2025年11月4日 海淀区初一期中最后一题

小明在研究关于字母 t $(t\neq 0)$ 的代数式时发现，记代数式的值为 m，可通过 m 与 t 的关系对代数式进行分类，分类如下：

t 的一类式：对于 t 的每一个取值，都有 $|m|=|t|$

t 的二类式：对于 t 的每一个取值，都有 $|m|\neq|t|$

t 的三类式：既存在 t 的值，使得 $|m|=|t|$；又存在 t 的值，使得 $|m|\neq|t|$

已知 $a,b\in\mathbb{R}$，$a,b\neq 0$，对于 $x>0$，$y<0$，代数式 $ax-by$ 既是 x 的二类式，又是 y 的三类式，求 a,b 的取值范围.

解：对于 $x>0$，$y<0$，代数式 $ax-by$ 是 x 的二类式

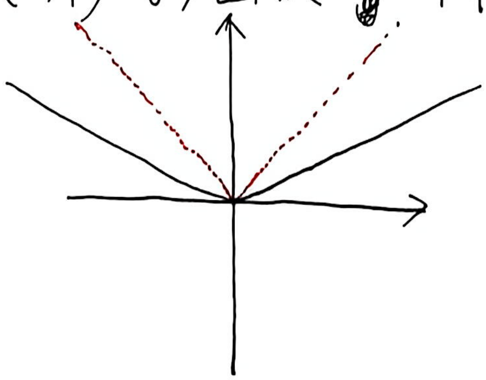
$\Longleftrightarrow$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$，$|ax-by|\neq|x|$ （其中 $y<0$）

$\Longleftrightarrow$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$，$\left|a(x-\frac{b}{a}y)\right|\neq|x|$ （其中 $y<0$）

$\Longleftrightarrow$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$，$|a|\left|x-\frac{b}{a}y\right|\neq|x|$ （其中 $y<0$）

$\Longleftrightarrow$ 函数 $f(x-\frac{b}{a}y)=|a|\left|x-\frac{b}{a}y\right|$ 的图像和函数 $g(x)=|x|$ 的图像在 $(0,+\infty)$ 上没有交点.

(1) 当 $a\in(-1,0)\cup(0,1)$ 时，函数 $f(x)=|a||x|$ 的图像如下图所示：

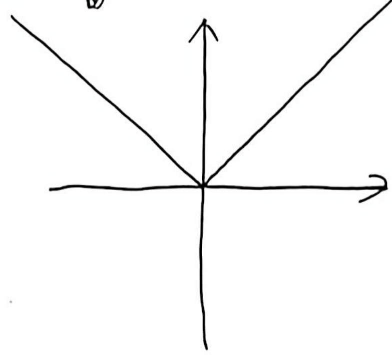


$\because b\neq 0$，$a\neq 0$，$y<0$　　$\therefore \frac{b}{a}y\neq 0$

∴函数 $f(x-\frac{b}{a}y)=|a|\left|x-\frac{b}{a}y\right|$ 的图像是在函数 $f(x)=|a||x|$ 的图像的基础上左右平移得到的、无论往左平移还是往右平移，函数 $f(x-\frac{b}{a}y)=|a|\left|x-\frac{b}{a}y\right|$ 的图像都会与函数 $g(x)=|x|$ 的图像在 $(0,+\infty)$ 上产生交点.

$\therefore a\notin(-1,0)\cup(0,1)$

(2) 当 $a=1$ 时，函数 $f(x)=|a||x|$ 的图像如下图所示：

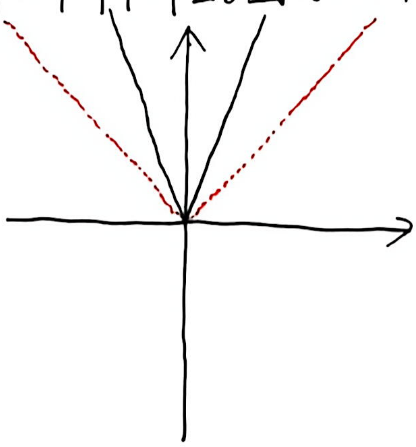


函数 $f(x)=|a||x|$ 的图像只能往左平移，才能与函数 $g(x)=|x|$ 的图像在 $(0,+\infty)$ 上没有交点.

$\therefore \frac{b}{a}y<0$　　$\therefore b>0$　　$\therefore a=1$ 且 $b>0$ 符合要求.

(3) 当 $a=-1$ 时，　$\frac{b}{a}y<0$　　$\therefore b<0$　　$\therefore a=-1$ 且 $b<0$ 符合要求

(4) 当 $a>1$ 时，函数 $f(x)=|a||x|$ 的图像如下图所示：



函数 $f(x)=|a||x|$ 的图像只能往左平移，才能与函数 $g(x)=|x|$ 的图像在 $(0,+\infty)$ 上没有交点,

$\therefore \frac{b}{a}y<0$　　$\therefore b>0$　　$\therefore a>1$且$b>0$符合要求

(5) 当 $a<-1$ 时，函数 $f(x)=|a||x|$ 的图像只能往左平移，才能与函数 $g(x)=|x|$ 的图像在 $(0,+\infty)$ 上没有交点

$\therefore \frac{b}{a}y<0$　　$\therefore b<0$　　$\therefore a<-1$且$b<0$符合要求

$\therefore$ 对于 $x>0$，$y<0$，代数式 $ax-by$ 是 x 的二类式

$\Leftrightarrow (a\geq 1$ 且 $b>0)$ 或 $(a\leq -1$ 且 $b<0)$

对于 $x>0$，$y<0$，代数式 $ax-by$ 是 y 的三类式

$\Leftrightarrow \exists y\in(-\infty,0)$, s.t. $|ax-by|=|y|$

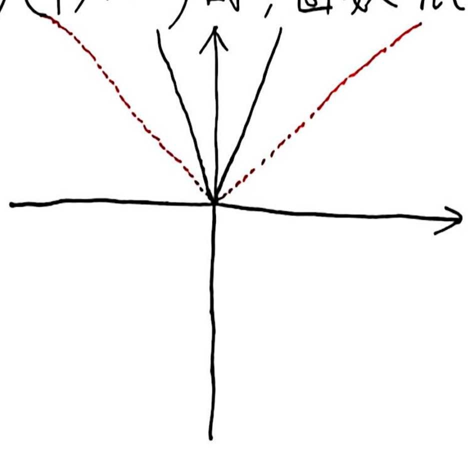
且 $\exists y\in(-\infty,0)$, s.t. $|ax-by|\neq|y|$　（其中 $x>0$）

$\Leftrightarrow \exists y\in(-\infty,0)$, s.t. $|b|\left|y-\frac{a}{b}x\right|=|y|$

且 $\exists y\in(-\infty,0)$, s.t. $|b|\left|y-\frac{a}{b}x\right|\neq|y|$

$\Leftrightarrow$ 函数 $h(y-\frac{a}{b}x)=|b|\left|y-\frac{a}{b}x\right|$ 的图像和函数 $p(y)=|y|$ 的图像在 $(-\infty,0)$ 上有交点但不完全重合.

(1) 当 $b\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 时，函数 $h(y)=|b||y|$ 的图像如下图所示：

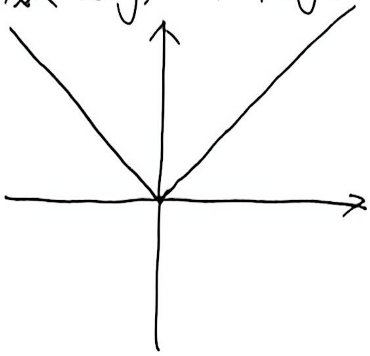


函数 $h(y)=|b||y|$ 的图像只能往左平移，才能与函数 $p(y)=|y|$ 的图像在 $(-\infty,0)$ 上有交点但不完全重合

$\therefore \frac{a}{b}x<0$

$\therefore$ ($b<-1$ 且 $a>0$) 或 ($b>1$ 且 $a<0$) 符合要求

(2) 当 $b=\pm1$ 时，函数 $h(y)=|b||y|$ 的图像如下图所示：

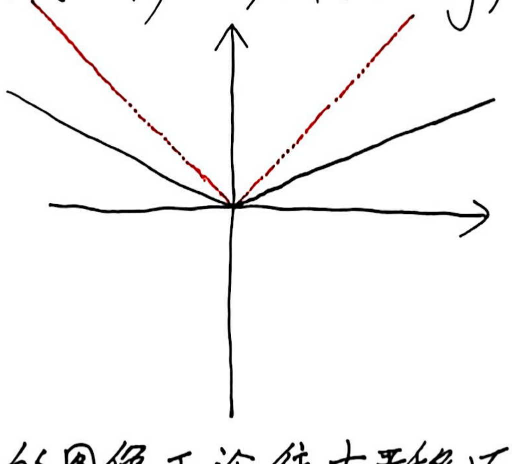


函数 $h(y)=|b||y|$ 的图像只能往左平移，才能与函数 $p(y)=|y|$ 的图像在 $(-\infty,0)$ 上有交点但不完全重合

$\therefore \frac{a}{b}x<0$

$\therefore$ ($b=-1$ 且 $a>0$) 或 ($b=1$ 且 $a<0$) 符合要求

(3) 当 $b\in(-1,0)\cup(0,1)$ 时，函数 $h(y)=|b||y|$ 的图像如下图所示：



函数 $h(y)=|b||y|$ 的图像无论往左平移还是往右平移，都能与函数 $p(y)=|y|$ 的图像在 $(-\infty,0)$ 上有交点但不完全重合

$\therefore$ ($-1<b<0$ 且 $a\neq 0$) 或 ($0<b<1$ 且 $a\neq 0$) 符合要求

$\therefore$ 对于 $x>0$，$y<0$，代数式 $ax-by$ 是 y 的三类式

$\Leftrightarrow$ ($b\leqslant -1$ 且 $a>0$)

或 ($b\geqslant 1$ 且 $a<0$)

或 ($-1<b<0$ 且 $a\neq 0$)

或 ($0<b<1$ 且 $a\neq 0$)

$\therefore$ 对于 $x>0$，$y<0$，代数式 $ax-by$ 既是 x 的三类式，又是 y 的三类式

$\Leftrightarrow$ ($a\geqslant 1$ 且 $0<b<1$)

或 ($a\leqslant -1$ 且 $-1<b<0$)