Escuela Superior de Física y Matemáticas.

Examen Extraordinario de Topología.

Nombre: Flores Rodríguez Jaziel David

1. Sea (X, τ) un espacio topológico tal que dado $Y \subseteq X$ con $\#(Y) = 2$ se tiene que la topología del subespacio $\tau_Y = \{Y, \emptyset\}$. Demuestre que $\tau = \{X, \emptyset\}$.

2. Sea (X, τ) un espacio topológico.
   a. Si $\mathcal{F}$ es filtro de X, demuestre que $\mathcal{B} = \{\overline{E} \mid E \in \mathcal{F}\}$ es una base de filtro. Sea $\overline{\mathcal{F}} := \mathcal{B}^{+}$.
   b. (X, τ) es $T_3 \iff$ dado $\mathcal{F}$ un filtro de X tal que $\mathcal{F} \to l$ se tiene que $\overline{\mathcal{F}} \to l$.

3. Si (X_1, τ_1) es de Lindelöf y (X_2, τ_2) es compacto, demuestre que $(X_1 \times X_2, \tau_p)$ es de Lindelöf.

4.) Sean (X, τ) un espacio topológico y R 2
una relación de equivalencia definida sobre X.

Si $(X/R, \tau/R)$ es T_2, demuestre que R
es un subconjunto cerrado de $(X \times X, \tau_p)$

3.1

Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta abierta de $(\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2, \mathcal{T}_p)$.

Sea $x \in \mathbb{X}_1$. Sea F_x un subconjunto de F tal que $\{x\} \times \mathbb{X}_2$ esté contenido en la unión de los elementos F_x.

Como $\mathbb{X}_2$ es compacto, $\{x\} \times \mathbb{X}_2$ también lo es. Por lo tanto existe una colección finita de elementos F_x, además:

$$F_{x_n} = \{A_{x_1}, \dots, A_{x_n}\} \text{ para algún } n \in \mathbb{N}.$$

tal que $\bigcup_{i=1}^{n} F_{x_i}$ contiene a $\{x\} \times \mathbb{X}_2$.

Sea $V_x = \bigcup_{i=1}^{n} A_{x_i}$. Se probará a continuación que existe $W \in \mathcal{T}_1$ tal que

$$\{x\} \times \mathbb{X}_2 \subseteq W_x \times \mathbb{X}_2 \subseteq V_x$$

Notemos que existe $G = \{M_\gamma\}_{\gamma \in J} \subseteq \mathcal{T}_p$ tales que tales que

$$\{x\} \times \mathbb{X}_2 \subseteq \bigcup_{\gamma \in J} M_\gamma \quad \text{con} \quad M_\gamma = U_\gamma \times V_\gamma$$

con $U_\gamma \in \tau_1$, $V_\gamma \in \tau_2$ y $\forall \gamma \in J$.

Al ser compacto $\{x\} \times \mathbb{X}_2$ existe un número finito de elementos de G, digamos $M_1, \dots, M_m$ tales que $\{x\} \times \mathbb{X}_2 \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} M_i$.

Con $M_i = U_i \times V_i$ $\forall i \in \{1, \dots, m\}$.

Sea $W_x = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ entonces $W_x \in \tau_1$ y $x \in W$.

Notemos que $W_x \times \mathbb{X}_2 \subseteq U_1 \times V_1 \cup U_2 \times V_2 \cup \dots \cup U_n \times V_n$

Ya que si $a, b \in W \times \mathbb{X}_2$. Tomemos $(x, b) \in \{x\} \times \mathbb{X}_2$ suponiendo que existe $b \in \mathbb{X}_2$. Luego existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $(x, b) \in U_K \times V_K$ pero como $(a, b) \in W \times \mathbb{X}_2$ $a \in U_i$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $\therefore$ $(a, b) \in U_K \times V_K$

5

$\therefore W_x \times X_2 \subseteq V_x$ con $x \in W_x$.

Notemos que $\{W_x\}_{x \in X_1}$ es una cubierta abierta para X_1. Como X_1 es de Lindelöf existe una subcubierta numerable $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos V_{x_n} tal que W_n es vecindad de x_n.

Luego $\{V_{x_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una cubierta numerable de $X_1 \times X_2$, ya que

$$X_1 \times X_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{W_n \times X_2\} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_{x_n}$$

Pero cada V_x es una unión finita de elementos de $\mathcal{F}$. Por lo tanto existe una subcubierta numerable de $\mathcal{F}$ para cada $X_1 \times X_2$

$\therefore X_1 \times X_2$ es de Lindelöf.

2)

a) Para probar que $\mathcal{B}$ es base de filtro de X tenemos que ver que dados $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq B_1 \cap B_2$.

Y esto se cumple porque $\mathcal{F}$ es filtro, entonces $B_1 = \overline{E_1}$ y $B_2 = \overline{E_2}$ tenemos que

$$E_1 \cap E_2 \in \mathcal{F}$$

Luego, si $B = \overline{E_1 \cap E_2}$, por propiedades de cerradura

$$B \subseteq B_1 \cap B_2$$

$\therefore$ $\mathcal{B}$ es base de filtro.

4] **Dem.**

Por hipótesis $(X/_R, \tau/_R)$ es T_2, es decir es de Hausdorff.

Sea $f: X \longrightarrow X/_R$ el mapeo del cociente y sea $(a,b) \in R^c$. Entonces $f(a) \neq f(b)$ y desde que $X/_R$ es de Hausdorff existen abiertos $U, V \subseteq X/_R$ tales que $f(a) \in U$, $f(b) \in V$ y $U \cap V = \phi$.

Por definición $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son abiertos en X, entonces

$$f^{-1}(U) \times f^{-1}(V) \text{ es abierto en } X \times X$$

Tenemos $(a,b) \in f^{-1}(U) \times f^{-1}(V)$ pues $U \cap V = \phi$

$$\therefore \left(f^{-1}(U) \times f^{-1}(V)\right) \cap R = \phi \quad \because$$

$\forall (a,b) \in R^c$ existe una vecindad abierta de (a,b) tal que es un subconjunto abierto de R^c.

$\therefore$ R^c es ~~cerrado~~ abierto, por lo tanto R es cerrado.

8