Apuntes de Geometría Diferencial I

Eder A. Trujillo Montaño
Profesor: J.O.F. Loyzaga

11 de noviembre de 2019

Capítulo 1

Primer Parcial

7-ago-2019

1.1. Curvas regulares

Proposición 1. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}'$ una función que sea continua e inyectiva. Si A es compacto, entonces f es un homeomorfismo sobre su imagen, es decir, $f : A \to f(A)$ es una biyección continua cuya inversa es continua.*

Demostración. □

Definición 1. Una función f es localmente inyectiva en X si $\forall\, x \in X \quad \exists\, \delta > 0$ tal que $f : E(x, \delta) \to \mathbb{R}^n$ es inyectiva sobre su imagen. Se define de forma análoga, reemplazando "inyectiva" por "un homeomorfismo" el que una función sea localmente un homeomorfismo.

Proposición 2. *Sea $f : I \to \mathbb{R}^n$ continua, localmente inyectiva. Entonces f es localmente un homeomorfismo.*

La demostración es consecuencia de la proposición 1.

Proposición 3. *Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, con $n > 1$. Si f es un homeomorfismo sobre su imagen, entonces $\mathring{f(D)} = \emptyset$.*

Demostración. Procediendo por contradicción suponga que $\mathring{f(D)} \neq \emptyset$, así, $\exists\, u \in f(D)$ tal que $\exists\, \delta > 0$ con $E(u, \delta) \subset f(D)$. Sea $G = E(u, \delta)$ y sea $J = f^{-1}(G)$. G es conexo en $\mathbb{R}^n$. Al ser f^{-1} continua, J es conexo en $\mathbb{R}$, además $\mathring{J} \neq \emptyset$. Considere a $x \in \mathring{J}$ y a $v = f(x)$. Veamos ahora que la imagen inversa de dicho conjunto excluyendo a x, es decir, $f^{-1}(G \setminus \{v\}) = J \setminus \{x\}$ es conexo en $\mathbb{R}$. Sin embargo, $x \in \mathring{J}$, así $J \setminus \{x\}$ no es conexo, llegando así a una contradicción que parte de suponer que $\mathring{f(D)} \neq \emptyset$. □

Lema 1.1.1. *Sean A, B subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, A cerrado. Si $\mathring{A} = \mathring{B} = \emptyset$ entonces $(A \mathring{\cup} B) = \emptyset$.*

Demostración. Suponga que □

9-ago-2019

Proposición 4. *Sea $f : I \to \mathbb{R}^n$ una función continua localmente inyectiva, entonces $int(f(I)) = \emptyset$.*

Demostración. La proposición 2 implica que f es localmente un homeomorfismo, ees decir, para cada $c \in I, \exists \delta_x > 0$ tal que f restringido a $E(x, \delta_x$ es un homeomorfismo sobre su imagen. La proposición 3 implica que $int[f(E(x, \delta_x)] = \emptyset$. Para cada $x \in I$ sea $U_x = E(x, \frac{\delta_x}{2}$ Así el conjunto de los U_x forma una cubierta abierta de I. Como I es compacto entonces existe una subcubierta finita en la familia $\{U_x\}$. Considerela $\{U_{x_i}\} i \leq k$. Con $I \subset \bigcup_{i=1}^k U_{x_i} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^k U_{x_i}}$. Así

$$
\begin{aligned}
I &= I \cap \bigcup_{i=1}^{k} \overline{U_{x_i}} \\
f(I) &= f(I \cap \bigcup_{i=1}^{k} \overline{U_{x_i}}) \\
&= f(\bigcup_{i=1}^{k} I \cap \overline{U_{x_i}}) \\
&= \bigcup_{i=1}^{k} f(I \cap \overline{U_{x_i}})
\end{aligned}
$$

Observe que:

$$
\begin{aligned}
I \cap \overline{U_{x_i}} &\subset I \cap E(x, \delta_x) \\
f(I \cap \overline{U_{x_i}}) &\subset f(I \cap E(x, \delta_x))
\end{aligned}
$$

Veamos que cada $f(I \cap \overline{U_{x_i}})$ es compacto en $\mathbb{R}^n$ y cada $int[f(I \cap \overline{U_{x_i}})]$ □

Definición 2. Sea I un intervalo cerrado, se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}^n$ siendo $n > 1$ es una curva regular si se cumplen dos condiciones:

a. f' está definida y es continua en I.

b. $f'(t) \neq 0, \quad \forall t \in I$

Proposición 5. *Sea $f : I \to \mathbb{R}^n$ una curva regular, entonces $f(I)$ no tiene puntos interiores.*

Demostración. De acuerdo con la proposición 4, basta probar que f es continua y localmente inyectiva. f es continua, por ser deribable. Para probar que f es localmente inyectiva, tomemos dos t_0, t_1, distintos arbitrarios en I. Asuma $t_0 < t_1$ Veamos que podemos escribir

$$f(t_0) - f(t_1) = (f_1(t_0) - f_1(t_1), \ldots, f_n(t_0) - f_n(t_1))$$

Dado $i \in \{1, \ldots, n\}$, por el teorema del valor medio existe $\zeta_i \in (t_0, t_1)$ tal que

$$f_i(t_0) - f_i(t_1) = f_i'(\zeta_i)(t_1 - t_0).$$

Sea $u = (f_1'(z_1), \ldots, f_n'(z_n))$. Entonces $f(t_0) - f(t_1) = u(t_0 - t_1)$ Veamos que para cada $\epsilon > 0, \exists \delta > 0$ que no depende ni de t_0 ni de t_1 tal que si $|t_0 - t_1| < \delta$, entonces $u \in E(f'(t_0), \epsilon)$. Podemos mostrar éste hecho de la siguiente forma:

$$\|f'(t_0) - u\| = \Big[\sum_{i=1}^{n} [f_i'(t_0) - f_('\zeta_i)]\Big]$$

Por ser f una curva regular f_i' es continua en I y por ser I un compacto f_i' es uniformemente continua. Así dado $\epsilon > 0 \, \exists \delta_i > 0$ tal que $|t_0 - t_1| < \delta_i$ implica que $\|f_i(t_0) - f_i(t_1)\| < \epsilon$. Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_i\}$. Veamos que δ solamente depende de ϵ. Si $|t_0 - t_1| < \delta$ se tiene $|t_0 - \zeta_i| < \delta$ y así $|f_i'(t_0) - f_i'(\zeta_i)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Así vemos que:

$$\|f'(t_0) - u\|^2 < \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon^2}{n} = \epsilon^n$$
$$\|f'(t_0) - u\| = \epsilon$$

Con lo anterior vemos que el hecho enunciado es cierto. Por ser f una curva regular $f'(t_0) \neq 0$. Así existe $\epsilon > 0$ tal que $0 \notin E(f'(t_0, t_1))$ Así □

Observación. *Se ha probado que toda curva regular es localmente inyectiva.*

Observación. *Dada una curva regular $f : I \to \mathbb{R}$ $f(I)$ se denomina la traza de la curva.*

12-agosto-2019 Considere una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ Sea $mathfrakP$ el conjunto de particiones de $[a, b]$ y sea $P \in \mathfrak{P}; P = \{t_0, \ldots .t_k\}$ con $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$. P determina la poligonal cuyos segmentos son $\overline{f(t_i)f(t_{i+1})}$ definido como $\{f(t_i) + \alpha[f(t_{i+1} - f(t_i)])\}$ y se define L_P como la longitud de tal poligonal de la siguiente forma:

$$L_P = \sum_{i=0}^{k-1} \|f(t_i) - f(t_{i+1})\|$$

Si el conjunto $\{L_P | P \in \mathfrak{P}\}$ es acotado superiormento, entonces entonces se dice que el supremo de tal conjunto denotado por L es la longitud de f. En caso de que ésto ocurra, entonces diremos que f es rectificable

Lema 1.1.2. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una función, sean $P_1, P_2 \in \mathfrak{P}$. Si P_1 es un refinamiento de P_2, entonces $L_{P_2} \leq L_{P_1}$.*

Demostración. Sea m el número de elementos de $P_1 \setminus P_2$. Procediendo por inducción sobre m. Tenemos que si $m = 1$ $P_1 = P_2 \cup \{t\}$. Veamos que si $P_2 = \{t_0, \ldots, t_k\}$ (ahorita completar) □

Lema 1.1.3. *Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una función continua. Entonces* $\quad \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ *tal que*

$$\text{si } x, y_1, \ldots, y_n \in [a,b] \ \wedge \ |x - y_i| < \delta,$$
$$\text{entonces } \|g(x) - (g_1(y_1), \ldots, g_n(y_n))\| < \epsilon$$

Demostración. Por ser g continua, sus componentes $g_1, \ldots, g_n$ son también continuas y por lo tanto uniformemente continuas dado que $[a,b]$ es un compacto. Sea $\epsilon > 0$; sea $\epsilon' = \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$, entonces para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe $\delta_i > 0$ tal que $|g_i(x) - g(y_i)| < \epsilon'$ si $|x - y_i| < \delta_i$. Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_i\}$, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
\|g(x) - (g_1(y_1), \ldots, g_n(y_n))\| &= \Big[\sum_{i=1}^{n} (g_i(x) - g_i(y_i))^2 \Big] \\
&< \Big[\frac{\epsilon^2}{n} \Big]^{1/2} = \epsilon
\end{aligned}$$

□

Del teorema 7.4.5 de la introducción al análisis real de Bartle. Se tiene que

Proposición. $\quad \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ *tal que si $P \in \mathfrak{P}$ y $\|P\| < \delta$ entonces:*

$$\Big| \int_a^b g - S_P \Big| < \epsilon$$

Para cada suma de Riemman S_P

Proposición 6. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Si f' está definida y es continua en $[a,b]$, entonces f es rectificable y*

$$L = \int_a^b \|f'\|$$

Demostración. Veamos que $\int_a^b \|f'\|$ está definida al ser $\|f'\|$ contínua. Se verificará que f es rectificable. sea $P = \{t_0, \ldots, t_k\}$ una partición de $[a,b]$. Veamos que

$$\begin{aligned}
L_P &= \sum_{i=1}^{k} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| \\
&= \sum_{i=1}^{k} (t_i - t_{i-1}) \Big[\sum_{j=1}^{n} f_j'(c_i^j)^2 \Big]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Cada f_j' es acotada en $[a,b]$, por ser continua, así $\exists M_j$ tal que

$$f_j'(x) \leq M_j \quad \forall x \in [a,b]$$

Así

$$
\begin{aligned}
L_P &\leq \sum_{i=1}^{k} (t_i - t_{i-1}) \sqrt{M_1^2 + \ldots + M_n^2} \\
&= (b-a)\sqrt{M_1^2 + \ldots + M_n^2}
\end{aligned}
$$

lo cual muestra que $\{L_P | P \in \mathfrak{P}\}$ es acotado superiormente. Así f es rectificable. Verifiquemos que $|L - \int_a^b \|f'\|| < \epsilon \qquad \forall \epsilon > 0$. Veamos que

$$
|\int_a^b \|f'\| - L| = \int_a^b \|f'\| - S_P + S_P - L_P + L_P - L|
$$

Por la desigualdad del triángulo:

$$
|\int_a^b \|f'\| - L| \leq |\int_a^b \|f'\| \; - S_P| + |S_P - L_P| + |L_P - L|
$$

Así basta probar que cada uno de los términos de la suma anterior es menor que $\frac{\epsilon}{3}$ Por la referencia mencionada, existe $\delta > 0$ tal que si $\|P_1\| < \delta$ entonces:

$$
|\int_a^b \|f'\| \; - S_P| < \frac{\epsilon}{3}
$$

Por otra parte como $L = \sup\{L_P\}$ entonces existe P_2 tal que:

$$
L_{P_2} - L < \frac{\epsilon}{3}
$$

Ahora dada una partición $P' = \{t_0, \ldots, t_k\}$ entonces

$$
\begin{aligned}
|S_{P'} - L_{P'}| &= \Big| \sum_{i=1}^{k} (t_i - t_{i-1}) \|f'\|(\zeta_i) - \sum_{i=1}^{k} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| \Big| \\
&= \Big| \sum_{i=1}^{k} (t_i - t_{i-1}) \Big[\|f'\|(\zeta_i) - \|f_1'(c_i^j), \ldots, f_n'(c_n^j)\| \Big] \Big| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} (t_i - t_{i-1}) \|f'(\zeta_i) - (f_1'(c_i^j), \ldots, f_n'(c_n^j))\|
\end{aligned}
$$

Por el lema 2 , $\exists\, \delta > 0$ tal que $\|f'(\zeta_i) - (f_1'(c_i^j), \ldots, f_n'(c_n^j))\| < \frac{\epsilon}{3(b-a)}$ para $\|P_3\| < \delta_3$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} (t_i - t_{i-1}) \|f'(\zeta_i) - (f_1'(c_i^j), \ldots, f_n'(c_n^j))\| &< \sum_{i=1}^{k} (t_i - t_{i-1}) \frac{\epsilon}{3(b-a)} \\
&= \frac{\epsilon}{3}
\end{aligned}
$$

Así si P es un refinamiento de P_1, P_2, P_3, se verifica en cada caso la desigualdad. Sea $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3$, se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}|\int_a^b \|f'\| - L| &\leq |\int_a^b \|f'\| \ - S_P| + |S_P - L_P| + |L_P - L| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon\end{aligned}$$

Así

$$\int_a^b \|f'\| = L$$

□

14-ago-2019

***Ejemplo**. Considere la función:*

$$\begin{aligned}f : [2\pi] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos t, \sin t)\end{aligned}$$

Sea $S' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ Se tiene entonces que la imagen de f es S' Veamos que:

$$f'(t) = (-\sin t, \cos t) \quad \forall\, t \in [0, 2\pi]$$

Veamos que $f'(t) \neq 0$. Por la proposición 6, f es rectificable y

$$L = \int_0^{2\pi} \|f'\| = 2\pi.$$

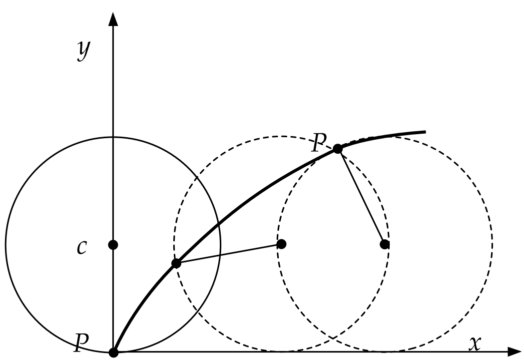

Figura 1.1: cicloide

***Ejemplo**. Considere un ponto P sobre una circunferencia de radio a. Si inicialmente P coincide con el origen y la circunferencia rota sobre el eje x en el sentido de las manecillas del reloj. P sigue una* *trayectoria que se conoce como cicloide. Se puede verificar que dicha curva está dada por:*

$$\begin{aligned} f : I &\to \mathbb{R}^2 \\ \theta &\mapsto a(\theta - \sin\theta, 1 - \cos\theta \end{aligned}$$

Si $I \subset (0, 2\pi)$ *entonces*

$$f'(\theta) = a(1 - \cos\theta, \sin\theta)$$

Es una curva regular.
Veamos también que f *definida en todo* $[0, 2\pi]$ *es rectificable. Por la proposición 6. Además*

$$L = \int_0^{2\pi} \|f'\| = a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \left[1 - \cos\theta\right]$$

Problema 1.1.1. *Estudie la curva obtenida en forma análoga a la anterior cuando el punto P pertenece al interior de la circunferencia.*

Ejemplo*. *Considere la función:

$$\begin{aligned} f : [0, 4\pi] &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (a\cos t, a\sin t, t) \end{aligned}$$

Así:

$$f'(t) = (-a\sin t, a\cos t, 1)$$

Entonces f *es rectificable y:*

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{4\pi} \|f'\| \\ &= \int_0^{4\pi} (a^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \\ &= 4\pi(a^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Ejemplo*. *Considere una función $f : I \to \mathbb{R}$. *tal que* f' *está definida y es continua en I. Sea*

$$\begin{aligned} F : I &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (f, f(t)) \end{aligned}$$

entonces F es una curva regular ya que:

$$F'(t) = (1, f'(t))$$

Ejemplo. *Considere la elipse C cuya ecuación es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Así C es la traza de la función:*

$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (a \sin t, b \cos t) \end{aligned}$$

Observe que $f'(t) \neq 0$.

Problema 1.1.2. *Encontrar una helice sobre la superficie de una esfera*

16-ago-2019

Definición 3. Sea $F : I \to \mathbb{R}^n$ una curva regular. Sean $C = f(I) y t \in I$. Se define el vector tangente unitario C en $f(t)$, denotado por $T(t)$ como

$$T(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$$

Considere la función

$$\begin{aligned} s : I &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \int_a^t \|f'\| \end{aligned}$$

Siendo $I = [a, b]$. $s(t)$ se denomina la longitud de arco de f entre $f(a) y f(t)$. Observe lo siguiente: Sea $f : I \to \mathbb{R}^n$ una curva regular. Por el teorema fundamental del cálculo

$$s' = \|f'\|$$

Se tiene de la definición del vector tangente que

$$T = \frac{f'}{s'} \quad \therefore \quad f' = s'T$$

Si f es de clase C^2 entonces se tiene:

$$f'' = s''T + s'T' \tag{1.1}$$

Lema 1.1.4. *Sea $g : I \to \mathbb{R}^n$ una función derivable. Si $\|g\|$ es constante, entonces $g(t)$ es ortogonal a $g'(t) \quad \forall\, t \in I$.*

Demostración. Por hipótesis existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\|g(t)\| = c \quad \forall t \in I$. Sea $t \in I$ entonces:

$$\begin{aligned} c^2 = \|g(t)^2\| &= \langle g(t), g(t) \rangle \\ 0 &= \langle g'(t), g(t) \rangle \end{aligned}$$

Si la función T es derivable, entonces, dado que $\|T(t)\| = 1$, se tiene del lema anterior que $T(t) \perp T'(t)$ □

Definición 4. Sea $f : I\mathbb{R}^n$ una curva regular. Sea $t \in I$ tal que $T'(t)$ está definida y es distinta de 0. Se define entonces el vector normal unitario a $C = f(I)$ en $f(t)$ denotado por $N(t)$ como:

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$$

Se tiene de lo anterior que $T(t)$ es ortogonal a $N(t)$. A la recta que pasa por $f(t)$ en la dirección del vector $N(t)$ se denomina recta normal principal.

Observación. *De la identidad* (1.1) *se tiene*

$$f'' = s''T + s'N\|T'\| \tag{1.2}$$

Definición 5. Sea $f : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular de clase C^2. Sea $t \in I$ tal que $T'(t) \neq 0$. El plano que pasa por $f(t)$, paralelo al plano determinado por $T(t)$ y $N(t)$, se denomina plano osculador a $C = f(I)$ en $f(t)$. El vector $T(t) \times N(t)$ se denomina vector binormal a C en $f(t)$ y se denota por $B(t)$. Observe que $\|B(t)\| = 1$.

$T(t), N(t), B(t)$ son vectores unitarios, mutuamente ortogonales. $B(t)$ es un vector normal al plano osculador.

Definición 6. Sea $f : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. Sean $t_0, t_1 \in I$ Se define la curvatura de $C = f(I)$ en $f(t_0)$ denotada por $\kappa(t_0)$ como

$$\kappa = \lim_{t \to t_0} \frac{\|T(t) - T(t_0)\|}{|s(t) - s(t_0)|}$$

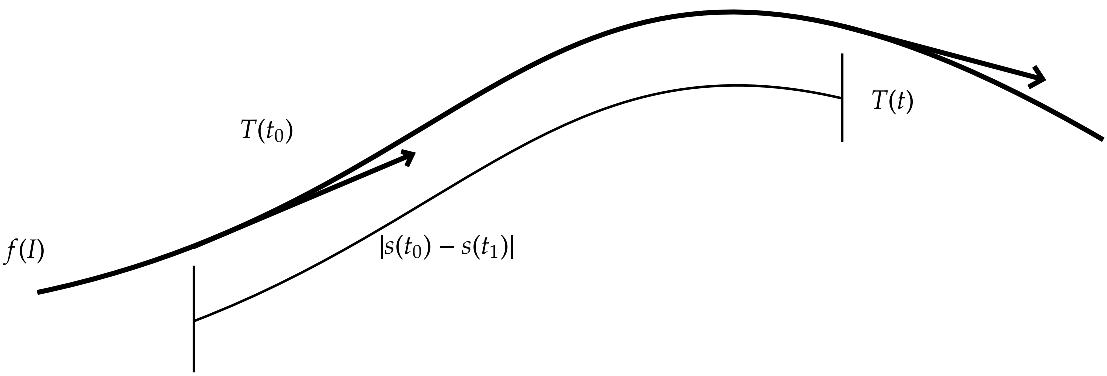

Figura 1.2: kappa

Proposición 7. *Sea $f : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regula de clase C^2; sea $t_0 \in I$ entonces $\kappa(t_0)$ está definida y es igual a:*

$$\frac{\|T'(t_0)\|}{\|f'(t_0)\|}$$

Demostración.

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\|T(t)-T(t_0)\|}{|s(t)-s(t_0)|} = \lim_{t\to t_0} \frac{\frac{\|T(t)-T(t_0)\|}{|t-t_0|}}{\frac{|s(t)-s(t_0)|}{|t-t_0|}}$$
$$\frac{\|T'(t_0)\|}{|s'(t_0)|} = \frac{\|T'(t_0)\|}{\|f'(t_0)\|}$$

□

Definición 7. Sea $f: I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular de clase C^2. si $t \in T$ y $\kappa(t) \neq 0$, se define el radio de curvatura de $C = f(I)$ en $f(t)$, denotado por $\varrho(t)$ como $\frac{1}{\kappa(t)}$

Ejemplo**.** *Considere la curva regular*

$$\begin{aligned} f: I &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (a\cos t, s\sin t). \end{aligned}$$

Veamos que:

$$\begin{aligned} f'(t) &= (-a\sin t, a\cos t) \\ \|f'(t)\| &= a \\ T(t) &= (-\sin t, \cos t) \\ T'(t) &= (-\cos t, -\sin t) \end{aligned}$$

La proposición 7 implica que $\kappa(t) = \frac{1}{a}$. *Entonces* $\varrho(t) = a$.

Observe que de la ecuación (1.2) y la proposición 7, se tiene:

$$f'' = s''T + N\kappa s'^2 \tag{1.3}$$

Proposición 8. *Sea* $g: I \to \mathbb{R}$ *una función de clase* C^2. *Considere ahora la función*

$$\begin{aligned} f: I &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t, g(t)) \end{aligned}$$

La curvatura de f *en* t *es*

$$\kappa(t) = \frac{|g''(t)|}{[1 + g'(t)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Demostración. f es una curva regular de clase C^2. De la identidad (1.3) se tiene:

$$\begin{aligned} \langle f'', T\rangle &= s''\langle T, T\rangle + \kappa(s')^2\langle N, T\rangle \\ &= s''\|T\|^2 \end{aligned}$$

Como $\|T\| = 1$ se tiene así $s''\langle f'', T\rangle$. Observe que $f' = (1, g')$, $f'' = (0, g'')$.

$$T = \frac{f'}{\|f'\|} = \frac{(1, g')}{\left[1 + (g')^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

así

$$s'' = \frac{g'g''}{\left[1 + (g')^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

de (1.3) se tiene

$$\kappa N = \frac{f'' - s''T}{(s')^2} \tag{1.4}$$

Observe que

$$\begin{aligned} f'' - s''T &= (0, g'') - \frac{g'g''}{\left[1 + (g')^2\right]^{1/2}} \frac{(1, g')}{\left[1 + (g')^2\right]^{1/2}} \\ &= \frac{-g'g'', g''}{1 + (g')^2} \end{aligned}$$

de (1.4):

$$\kappa N = \frac{-g'g'', g''}{\left[1 + (g')^2\right]^2}$$

observe que $\kappa = \|\kappa N\|$. Se tiene así finalmente que:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\left[[(g')^2 + 1](g'')^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[1 + (g')^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{|g''(t)|}{[1 + g'(t)^2]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

□

Proposición 9. *Sea $f : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular de clase C^2. Entonces la curvatura está dada por la expresión*

$$\kappa = \frac{\|f' \times f''\|}{\|f'\|^3}$$

Demostración. De la identidad (1.3) se tiene:

$$\begin{aligned} f' \times &= s''(f' \times T) + \kappa(s')^2(f' \times N) \\ f' \times t &= 0 \\ \text{así } f' \times f'' &= \kappa(s')^2(f' \times N) \\ \|f' \times f''\| &= \kappa\|f'\|^3 \\ \kappa &= \frac{\|f' \times f''\|}{\|f'\|^3} \end{aligned}$$

□

Ejemplo. *Considere la curva regular*

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$$
$$t \mapsto (a \sin t, b \cos t, 0)$$

Veamos que:

$$f'(t) = (a \cos t, -b \sin t, 0)$$
$$\|f'\| = (a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2)^{\frac{1}{2}}$$

En consecuecia de la proposición anterior se tiene:

$$\kappa = \frac{ab}{[a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t]^2}$$

Así la curvatura es máxima ó mínima sí:

$$\kappa(0) = \kappa(\pi) = \frac{b}{a^2}$$
$$\kappa(\frac{\pi}{2}) = \kappa(\frac{3\pi}{2}) = \frac{a}{b^2}$$

21-ago-2019

Hemos definido a la curvatura de una curva en términos de la longitud de arco. Si se definiera en términos del parámetro t, entonces sería dependiente de la parametrización y no únicamente de la traza.

Sea $f : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular de clase C^2. Dado $\hat{t} \in \kappa(\hat{t})$ la curvatura en t es distinta de cero. Considere una circunferencia cuyo radio sea $\rho(\hat{t})$, entonces su curvatura es $\frac{1}{\rho(\hat{t})}$. Ésta circunferencia se denomina circunferencia osculatriz de la traza de f en $f(\hat{t})$. Y es la curva que cumple que:

- $f(\hat{t})$ está en la circunferencia.
- El centro de la circunferencia se encuentra en $f(\hat{t}) + \rho(\hat{t})N(\hat{t})$

Problema 1.1.3. *Verifique que si $f : I \to \mathbb{R}$, es una función de clase C^2 lo mismo que $g : I \to \mathbb{R}$, tales que para $t_0 \in I$, $f(t_0) = g(t_0)$, $f'(t_0) = g'(t_0)$, $f''(t_0) = g''(t_0)$, entonces las curvas regulares definidas* *por:*

$$\begin{aligned} F : I &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto (t, f(t)) \\ G : I &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto (t, g(t)) \end{aligned}$$

Entonces la curvatura de $F(I)$ *en* t_0 *es igual que la de* $G(I)$ *en* t_0*. y determine las condiciones para las cuales la circunferencia osculatriz es la misma.*

Sea $f : I\not\models^3$ una curva regular para la cual el vector binormal $B(t)$ está definido en todo I. Suponga que la función B es derivable. Entonces se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} B' \times N = (T \times N)' \times N &= \left[(T' \times N) + (T \times N')\right] \times N \\ &= 0 \end{aligned}$$

Definición 8. Como los vectores B' y N son colineales, tenemos que $\forall\, t \in I$, existe un escalar $\tau(t)$ tal que

$$\frac{B'(t)}{s'(t)} = \tau(t)N(t)$$

A $\tau(t)$ se denomina la torsión de la traza de f en $f(t)$.

1.2. Ecuaciones de Frenet-Serret

Proposición 10. *Sea* f *una curva regular de clase* C^3*. Entonces:*

a. $T' = \kappa s' N$

b. $N' = -\kappa s' T - \tau s' B$

Demostración. Observe que $T' = N\|T'\|$. Como $\|T'\| = \kappa s'$, entonces tenemos

$$R' = \kappa s' N$$

De la definición de torsión se tiene

$$B' = \tau s' N$$

Así mismo

$$\begin{aligned}
B' &= (T \times N)' \\
&= (T \times N') + (T' \times N) \\
&= T \times N'
\end{aligned}$$

Así $\tau s' N = T \times N'$. Así

$$\tau s' N =$$

□

Las ecuaciones

$$\begin{aligned}
T' &= \kappa s' N \\
N' &= -\kappa s' T - \tau s' B \\
B' &= \tau s' N
\end{aligned}$$

Se conocen como ecuaciones Frenet-Serret. Fueron obtenidas en 1847 por J. Frenet

Proposición 11. *Considere una curva regular f de clase C^3. Sea $t \in I$ tal que $\kappa \neq 0$. entonces la torsión*

$$\tau(t) = -\frac{\langle f'(t) \times f''(t), f'''(t) \rangle}{\|f'(t) \times f''(t)\|^2}$$

Demostración. De la identidad (1.3). se tiene

$$f''' = s'''T + s''T' + \kappa' N s^{2\prime} + \kappa[2s's''N + (s')^2 N']$$

Haciendo uso de las dos primeras ecuaciones de Frenet se tiene

$$\begin{aligned}
f''' = s'''T + s''s'\kappa N + \kappa N s^{2\prime} + 2\kappa s' s'' N \\
+ \kappa(s'^2)[-'T - \tau s' B]
\end{aligned}$$

así:

$$\begin{aligned}
f''' = [s''' - \kappa^2 (s')^3]T + [3\kappa s' s'' + \kappa'(s')^2]N \quad (1.5) \\
- \kappa\tau(s')^3 B \quad (1.6)
\end{aligned}$$

De (1.3) se tiene

$$\begin{aligned}
f \times f'' &= s's''(T \times T) + \kappa(s')^3 B \\
&= \kappa(s')^3 B \\
\|f \times f''\| &= \kappa(s')^3
\end{aligned}$$

Como $\langle B, T\rangle = \langle B, N\rangle = 0$ se tiene de lo anterior

$$\begin{aligned}\langle f' \times f'', f'''\rangle &= -\tau[\kappa(s')^3]^2 \\ &= -\tau\|f' \times f''\|^2\end{aligned}$$

Así si $\kappa \neq 0$ se concluye

$$\tau(t) = -\frac{\langle f'(t) \times f''(t), f'''(t)\rangle}{\|f'(t) \times f''(t)\|^2}$$

$\square$

Capítulo 2

Segundo Parcial

2.1. Evolutas y envolventes

2-sept-2019

Sea $f : I \to \mathbb{R}^n$ una curva regular. $s : I \to \mathbb{R}$ es una función contínua.

Sean $x, y \in I$ con $x < y$. entonces

$$s(y) = \int_a^y \|f'\| = \int_a^x \|f'\| + \int_x^y \|f'\| = s(x) + \int_x^y \|f'\|$$

Como $\|f'\| > 0$ se tiene que $s(y) > s(x)$. Sea $J = s(I)$. J es un intervalo cerrado y $s : I \to J$ es una biyeccion contínua creciente. Así $s^{-1} : J \to I$ es contínua. Sea $F = f \circ s^{-1}$. $F \in C^n$. Observe que $(f, F) \in R$ ya que $f = F \circ s$. A F se le denomina la parametrización natural ó representación paramétrica natural de $[f]$.

Proposición 12. *Sea $f : I \to R^n$ una curva regular, F la representación paramétrica natural de $[f]$, entonces F es una curva regular y $\|F'(x)\| = 1 \quad \forall\, x \in s(I)$.*

Demostración. Dado $x \in s(I)$, $x = s(t)$ para algún $t \in I$. Se tiene, dado que $s'(t) = \|f'(t)\| \neq 0 \quad \forall t \in I$. Se tiene por el teorema de la función inversa que:

$$(s^{-1})'(x) = \frac{1}{s'(u)}$$

En consecuencia F es derivable; además

$$F'(x) = f'(s^{-1}(x))(s^{-1})'(x) = \frac{f'(u)}{\|f'(u)\|}$$

Así $\|F'(x)\| = 1$. $\square$

Así para F las ecuaciones de Frenet-Serret son:

$$\begin{array}{c} T' \\ N' \\ B' \end{array} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} T \\ N \\ B \end{array}$$

Proposición. *Considere a la curva paramétrica regular $[g]$. Sean entonces $f, \hat{f} \in [g]$ curvas regulares con $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ y $\hat{f} : [\hat{a}, \hat{b}] \to \mathbb{R}^n$. Considere entonces sus parametrizaciones naturales $F = f \circ s^{-1}$, $\hat{F} = \hat{f} \circ \hat{s}^{-1}$. Si $\hat{f} = f \circ \alpha$ con α una función de cambio de variable monótona creciente. Entonces $F(u) = \hat{F}(u) \quad \forall u \in s([a,b])$*

Demostración. Veamos que

$$\begin{aligned} F &= f \circ s^{-1} \\ \hat{F} &= \hat{f} \circ \hat{s}^{-1} = f \circ \alpha \circ \hat{s}^{-1} \end{aligned}$$

Así basta únicamente probar que $s^{-1} = \alpha \circ \hat{s}^{-1}$. Veamos que:

$$\begin{aligned} & & s^{-1} &= \alpha \circ \hat{s}^{-1} \\ &\Leftrightarrow & s &= \hat{s} \circ \alpha^{-1} \\ &\Leftrightarrow & s \circ \alpha \circ \hat{s}^{-1}(u) &= u \end{aligned}$$

Veamos que

$$\begin{aligned} (s \circ \alpha \circ \hat{s}^{-1})' &= (\alpha \circ \hat{s}^{-1})'(s' \circ \alpha \circ \hat{s}^{-1}) \\ &= (\hat{s}^{-1})'(\alpha' \circ \hat{s}^{-1}) \cdot (s' \circ \alpha \circ \hat{s}^{-1}) \\ &= \frac{\alpha' \cdot \|f' \circ \alpha\|}{\hat{s}'} \circ \hat{s}^{-1} \end{aligned}$$

Veamos que $\alpha' > 0$ puesto que α es monótona creciente. Además

$$\hat{s} = \int_a^t \|\hat{f}'\| = \int_a^t |\alpha'| \, \|f' \circ \alpha\|$$

Así:

$$(s \circ \alpha \circ \hat{s}^{-1})' = \frac{\alpha' \cdot \|f' \circ \alpha\|}{|\alpha'| \, \|f' \circ \alpha\|} \circ \hat{s}^{-1} = 1$$

Con lo que tenemos que

$$s \circ \alpha \circ \hat{s}^{-1}(u) = u + C$$

Y

$$\begin{aligned} C &= s \circ \alpha \circ \hat{s}^{-1}(0) \\ &= s \circ \alpha(\hat{a}) \\ &= s(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Con lo cual mostramos que $s^{-1} = \alpha \circ \hat{s}^{-1}$ o lo que es equivalente: $F = \hat{F}$ □

Definición 9. Sea $f : I \to \mathbb{R}^3$ la representación paramétrica natural de una curva paramétrica regular. Se dice que una curva regular g es la envolvente de la traza de f si la traza de g intersecta a las tangentes de f formando ángulos rectos

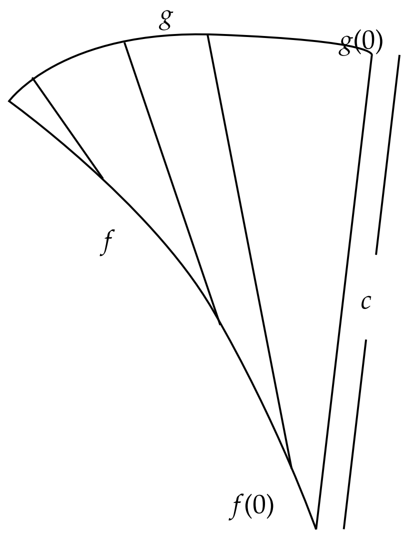

FIGURA 2.1: ENVOLVENTE

g debe estar definida de la siguiente manera

$$g(s) = f(s) + \lambda T(s)$$

Con la condición $\langle g'(s), T(s)\rangle = 0$. Se tiene así

$$\begin{aligned} 0 = \langle g'(s), T(s)\rangle &= \langle f'(s) + \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s)\rangle \\ &= \langle '(s), T(s)\rangle + \lambda'(s)\langle T(s), T(s)\rangle + \lambda\langle T'(s), T(s)\rangle \\ &= \langle f'(s), f'(s)\rangle + \lambda'(s) \\ &= \|f'\|^2 + \lambda' = 1 + \lambda' \end{aligned}$$

En consecuencia $\lambda(s) = -s + C$. y así se tiene que:

$$g(s) = f(s) + (C - s)T(s)$$

Observe que no necesariamente s es el parámetro natural para g. También veamos que para cada valor de la constante c

$$\langle f'(s) + cT'(s) - sT'(s) - T(s), T(s)\rangle = 0$$

Se ha probado así la siguiente proposición

Proposición 13. *Dada una parametrización natural $f : I \to \mathbb{R}^3$ de clase C^2, la traza de f tiene una infinidad de envolventes cada una dada por*

$$f(s) + (c - s)T(s)$$

siendo c una constante.

Ejemplo: considere la curva regular:

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

Observe que f es la parametrización natural de la clase de f. Así cada envolvente de la traza de f es

$$g(t) = (\cos t - (c - t)\sin t, \sin t + (c - t)\cos t))$$

Figura 2.2: cacarol

Así se tiene que para $c = 0$ se tiene que $g(t)$ es un punto en la circunferencia con centro en el origen y radio $[1 + t^2]^{\frac{1}{2}}$

Demuestre que si un segmento de un de longitud 2π tiene un extremo fijo al punto $(1, 0)$ y se extiende hacia abajo en forma paralela al eje y, entonces su otro extremo describe a una envolvente de la circunferencia con centro en el origen y radio 1 al envolver tal segmento a la circunferencia en sentido de las manecillas del reloj.

Definición 10. Dada una curva regular $f : I \to \mathbb{R}^3$, las curvas que tienen como envolvente a f se denominan evolutas de f.

Se tiene así que las tangentes de una evoluta de f son ortogonales a f. Considere una curva regular $f : I \to \mathbb{R}^3$. Sea $t \in I$. Existe una infinidad de rectas ortogonales a f en el punto $f(t)$, todas aquellas en el plano paralelo al determinado por los vectores $N(t)$ y $B(t)$.
Si $h : I \to \mathbb{R}^3$ es una evoluta de f, existen $\alpha : I \to \mathbb{R}$, $\beta : I \to \mathbb{R}$ tales que:

$$\forall t \in I \quad h(t) = f(t) + \alpha(t) + \beta(t)B(t)$$

y además $h'(t)$ debe ser paralelo al vector $\alpha(t)N(t) + \beta(t)B(t)$, así debe cumplirse

$$h'(t) \times \alpha(t)N(t) + \beta(t)B(t)$$

Se tiene entonces

$$\begin{aligned} h' &= f' + \alpha' N + \alpha N' + \beta' B + \beta B' \\ &= s'T + \alpha N + \alpha(-\kappa s' T - \tau s' B) + \beta' B + \beta(\tau s' N) \\ &= s'(1-\alpha)T + (\alpha' + \beta\tau s')N + (\beta' - \alpha\tau s')B \end{aligned}$$

Se tiene así que :

$$0 = s'(1-\kappa\alpha)\alpha(T \times N) + s'(1-\kappa\alpha)\beta(T \times B) + [(\alpha' + \beta\tau s')\beta - (\beta - \alpha\tau s')\alpha(N \times B)]$$

Como tenemos una combinación lineal de tres vectores linealmente independientes iguales a cero, cada escalar es cero y en consecuencia:

$$\begin{aligned} 1 - \kappa\alpha &= 0 \\ \kappa &= \rho \\ [(\frac{\beta}{\alpha})^2 - 1]\tau s' &= \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{\alpha^2} \\ \tau s' &= \frac{(\frac{\beta}{\alpha})^2}{(\frac{\beta}{\alpha})^2 + 1} \\ &= (\arctan(\frac{\beta}{\alpha}))' \\ \beta &= \rho \tan\Big[\int \tau s' + C\Big] \end{aligned}$$

Se verifica así la siguiente proposición:

Proposición 14. *Dada una curva regular de clase C^2, de clase C^2 $f : I \to \mathbb{R}^3$, para la cual $\kappa(t) \neq 0$ entonces existe una evoluta de f dada por:*

$$h = f + \alpha N + \beta B$$

con $\alpha = \rho$ *y* $\beta = \rho \tan\left[\int \tau s' + C\right]$

Observación. *Si* f *es una curva plana* $\tau = 0$. *Así para* $C = 0$, *se tiene la evoluta* $h = f + \rho N$. h *es entonces el lugar geométrico de los centros de curvatura.*

Considere la parábola definida por:

$$\begin{aligned} f : I &\to \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto (x, x^2) \end{aligned}$$

Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1, 2x) \\ \|f'\| &= (1 + 4x^2) \end{aligned}$$

Así:

$$T = \frac{f'}{\|f'\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 1x^2}}, \frac{2x}{\sqrt{1 + 4x^2}}\right)$$

Entonces

$$\begin{aligned} T' &= \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}} \\ \|T'\| &= \frac{2}{1 + 4x^2} \\ N &= \frac{T'}{\|T'\|} = \frac{(-2x, 1)}{(1 + 4x^2)^{1/2}} \\ \kappa &= \frac{\|T'\|}{\|f'\|} = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{N}{k} &= (-x - 4x^3, \frac{1}{2} + 2x^2) \\ h &= f + \frac{N}{\kappa} = (-4x^3, 3x^2 + \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

Si $y = y(u)$ define una función real de variable real cuya gráfica es la evoluta de la parábola entonces se tendría:

$$y(-4x^3) = 3x^2 + \frac{1}{2}$$

ó bien

$$y \circ g(x) = t(x)$$

Siendo $g(x) = -4x^3$ y $t(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}$

Así

$$\begin{aligned} u &= g \circ g^{-1} \\ &= -4g^{-1}(u)^3 \\ g^{-1}(u) &= (-\frac{u}{4})^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Así la gráfica de y es simérica respecto al eje de las ordenadas.

$$y'(u) = \frac{u}{8}\Big(\frac{u^2}{16}\Big)^{-\frac{2}{3}} > 0 \text{ si } u > 0$$
$$y''(u) = -\frac{1}{24}\Big(\frac{u^2}{16}\Big)^{-\frac{2}{3}} < 0$$

La ecuación de la evoluta

$$y = 3\Big(\frac{x^2}{16}\Big)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}$$

Puede escribirse como:

$$(y - \frac{1}{2})^3 = 27\frac{x^2}{16}$$

o bien

$$2(2y-1)^3 = 27x^2 \tag{2.1}$$

2.1.1. Parábola no homogénea

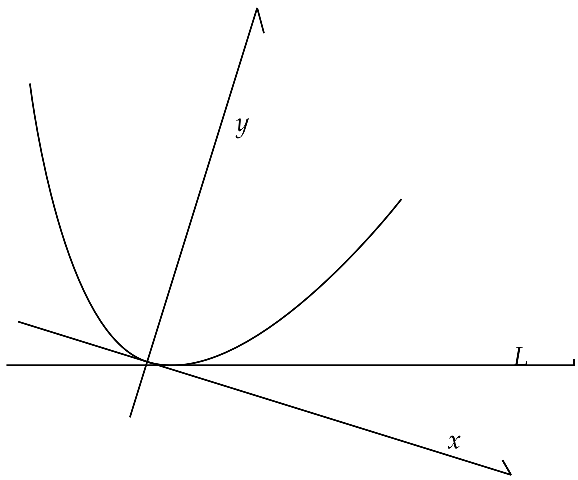

Figura 2.3: lamina

(t, t^2) punto de contacto
(a, b) centro de la lámina de la placa

$$y = 2xt - t^2 \qquad \text{ecuación de } L$$
$$y = -\frac{1}{2t}(x-a) + b \qquad \text{ecuación de } M$$
$$h = d((a,b),q) = \frac{b - 2ta + t^2}{(4t^2+1)^{1/2}}$$
$$V = mgh$$

Así

$$V(t) = mg\Big[\frac{b - 2ta + t^2}{(4t^2 + 1)^{1/2}}\Big]$$

Veamos que $V'(t) = 0$ si (t, t^2) es un punto de equilibrio.

$$V'(t) = \frac{mgu(t)}{(4t^2 + 1)^{3/2}}$$

Siendo $u(t) = 2t^3 + t(1 - 2b) - a$.
(t, t^2) corresponde a un punto de equilibrio si y sólo si $u(t) = 0$, y además u pasa de negativo a positivo en t.
Observe que si (t, t^2) es un punto de equilibrio $u(t) = 0$. Así (a, b) pertenece a la recta perpendicular a L que pasa por (t, t^2); es decir, $(t, t^2) \in M$. Sea $S = \{(t, a, b) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2t^2 + t(1 - 2b) - a = 0\}$.

Si se considera el plano $t = t_0$, S lo intersecta en la recta $2t_0^3 + t_0(1 - 2b) - a = 0$. Sea K la recta normal a la parábola $b = a^2$ en el plano (a, b) en el punto (t_0, t_0^2). La ecuación de dicha recta es $b = -\frac{1}{2t_0}a + t_0^2 + \frac{1}{2}$.
Si la recta K se traslada al plano paralelo al plano ab que intersecta al eje t en t_0 lo que se tiene es precisamente la intersección de S con tal plano. Considere un plano paralelo al plano at,

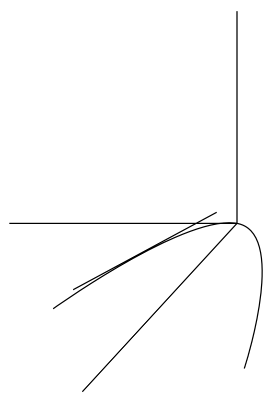

Figura 2.4: superficie S

digamos el plano $b = b_0$. Tal plano intersecta a S en $\{(t, a, b_0) \,|\, 2t^3 + t(1 - 2b_0) - a = 0\}$. Es decir, en el conjunto definido por:

$$a(t) = 2t^3 + t(1 - 2b_0)$$
$$a'(t) = 6t^2 + c$$

Así $a(t)$ tiene puntos críticos si y sólamente si $c \le 0$, es decir, $b_0 \ge \frac{1}{2}$.

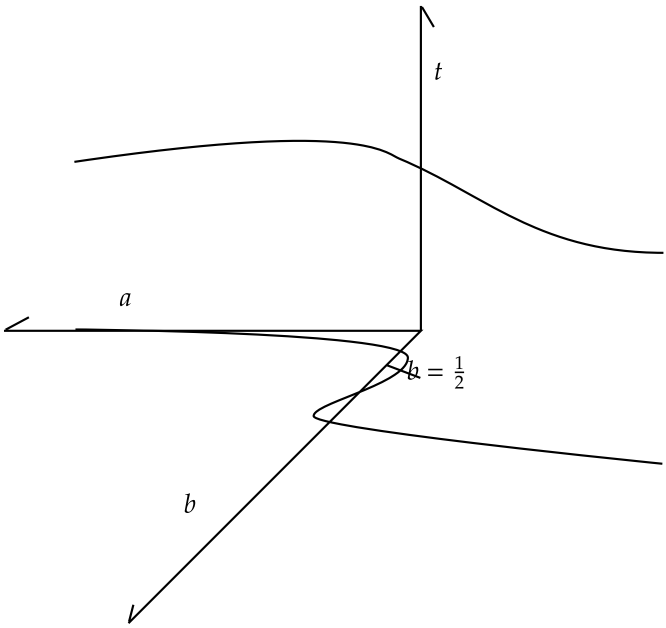

FIGURA 2.5: SABANA

Para (a, b) dado, la línea vertical a través de $(0, a, b)$. intersecta a S en un punto(t, a, b) que es solución de la ecuación $u(t) = 0$. El número de soluciones puede ser 1,2 ó 3. Los valores de t corresponden a puntos críticos de V. Un mínimo de V ocurre para valores de t en los cuales $u(t)$ cambia de negativo a positivo.
Sea γ la región del plano ab que consiste de los puntos (a, b) para los cuales hay exáctamente dos soluciones de u. Así si t es la raíz doble:

$$2t^3 + t(1 - 2b) - a = 0 \tag{2.2}$$

$$6t^2 + (1 - 2b) = 0 \tag{2.3}$$

$$t \neq 0 \tag{2.4}$$

Se tiene entonces que $2(2b - 1)^3 = 27a^2$.
20-Septiembre-2019

2.2. Superficies

Definición 11. Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie si para cada punto $P \in S$ existen abiertos U_P, V_P en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente, así como un homeomorfismo: $f_P : U_P \to V_P \cap S$. Siendo $P \in V$. Si además f_P es diferenciable y $\forall c \in U$, $Df_P(c)$ es inyectiva, entonces se dice que la superficie es regular.

f_P se denomina parametrización local de S en P. Sea A un conjunto de parametrizaciones locales de S; si para cada $P \in S$, existe en A una parametrización local de S en P entonces se dice que A constituye un atlas para S, y a cada elemento de A se le denomina carta.

Observación. *En la definición de superficie regular, la condición relativa a que $Df_P(c)$ sea inyectiva es equivalente a que las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} D_1(f_P)_1 & D_2(f_P)_1 \\ D_1(f_P)_2 & D_2(f_P)_2 \\ D_1(f_P)_3 & D_2(f_P)_3 \end{bmatrix}$$

Sean linealmente independientes.

Ejemplo. *Sea $S = \{(x,y,z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Sea $P \in S$, $P = (P_1, P_2, P_3)$ Considere el caso en que $P_3 > 0$. Considere los conjuntos $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$ y $V = \{(x,y,z) \,|\, z > 0\}$.*
Considere la función:

$$f_P : U \to V \cap S$$
$$(x,y) \mapsto (x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)})$$

f_P es inyectiva, suprayectiva y contínua. Observe que $_P^{-1} : V \cap S \to U$ es contínua por ser la restricción de la proyección $\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ al conjunto $V \cap S$.
f_P es en consecuencia un homeomorfismo. f_P es diferenciable ya que cada una de sus componentes lo es, y

$$[Df_P(c)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-c_1}{\sqrt{1-(c_1^2+c_2^2)}} & \frac{-c_2}{\sqrt{1-(c_1^2+c_2^2)}} \end{bmatrix}$$

que es inyectiva. La función anterior f_P se denotará por g_1.

Sea $W = \{(x,y,z) \,|, \mathbb{R}^3 \,|z < 0\}$. Considere a

$$g_2 : U$$
$$(x,y) \mapsto (x, y, -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)})\}$$

g_2 es una parametrización local de S en a para cada $q \in S \cap W$. De la misma forma se construyen

$g_3, \ldots, g_6$:

$$\begin{aligned} g_3 : U' &\to S \cap H \\ (z, y) &\mapsto (\sqrt{1 - (z^2 + y^2)}, y, z) \\ g_4 : U' &\to S \cap K \\ (z, y) &\mapsto (-\sqrt{1 - (z^2 + y^2)}, y, z) \\ g_5 : U'' &\to S \cap L \\ (x, z) &\mapsto (x, \sqrt{1 - (z^2 + x^2)}, z) \\ g_6 : U'' &\to S \cap M \\ (x, z) &\mapsto (x, -\sqrt{1 - (z^2 + x^2)}, z) \end{aligned}$$

Definiendo a los dominios de forma análoga. Así se construye un átlas para la esfera. Se demuestra entonces que S es una superficie regular.

Proposición 15. *Sea U abierto en $\mathbb{R}^2$ y sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable; entonces la gráfica de f es una superficie regular*

Demostración. Considere la función

$$\begin{aligned} g : U &\to \{(x, y, f(x, y)) \,|\, (x, y) \in U\} \\ (x, y) &\mapsto (x, y, f(x, y)) \end{aligned}$$

g es inyectiva, suprayectiva, derivable, y g^{-1} es continua. Se tiene así que g es un homeomorfismo. Y

$$[Dg(c)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ D_1 f(c) & D_2 f(c) \end{bmatrix}$$

Se ha probado que g es una parametrización local de la gráfica de f en cualquier punto de ella. □

Definición 12. Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$. Considere una función $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciable. Se dice que $a \in f(U)$ es un punto singular de f si $Df(c)$ no es suprayectiva, en tal caso se dice que $f(c)$ es un valor singular. Se dice que $a \in \mathbb{R}$ es un valor regular de f si no es un valor singular.

La siguiente proposición se basa en los planteamientos del teorema de la función inversa. El teorema se encuentra en la mayor parte de los textos de la geometría diferencial.

Proposición 16. *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, siendo U abierto, una función diferenciable. Sea $a \in f(u)$ un valor regular de f, entonces $f^{-1}(a)$ es una superficie regular.*

Demostración. Sea $S = f^{-1}(a)$ y sea $c \in S$. Como $f(c) = a$ y a es un valor regular c no es un punto singular. Por ello $Df(c)$ es suprayectiva, así

$$[Df(c)] = \begin{bmatrix} D_1 f(c) & D_2 f(c) & D_3 f(c) \end{bmatrix}$$

Con algún $D_i f(c)$ distinto de 0. Asumiremos que $D_3 f(c) \neq 0$; en caso necesario se renombrarían los ejes.

Considere la función

$$\begin{aligned} F : U \subset \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y, f(x, y, z)) \end{aligned}$$

F es claramente diferenciable y

$$[DF(c)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ D_1 f(c) & D_2 f(c) & D_3 f(c) \end{bmatrix}$$

Observe que $\det[DF(c)] \neq 0$. Por el teorema de la función inversa existen abiertos, V, W en $\mathbb{R}^3$ tales que $c \in V$ con $F(c) \in W$. $F : V \to W$, es una biyección diferenciable cuya inversa es diferenciable. Sean g_1, g_2, g_3 las componentes de F^{-1}, entonces cada una de ella es diferenciable.

Sea

$$\begin{aligned} \Pi : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y) \end{aligned}$$

Observe que $\Pi(V) = \Pi(W)$.

Considere la función

$$\begin{aligned} h : \Pi(W) &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto g_3(x, y, a) \end{aligned}$$

Veamos que si $(x, y) \in \Pi(W)$ existe $z' \in \mathbb{R}$ tal que $(x, y, z') \in W$. Además $F(c_1, c_2, a) \in W$. Se puede asumir que W es un producto cartesiano de intervalos abiertos. Lo anterior justifica que $(x, y, a) \in W$.

Sea

$$\begin{aligned} k : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x, y, a) \end{aligned}$$

Veamos que k es diferenciable. Se tiene que $h = g_3 \circ k|_{\Pi(W)}$. Se tiene así que h es diferenciable. Veamos que

$$F(V \cap S) = F(G_h) = \{(x, y, a) \in W\}$$

Por lo cual $G_h = V \cap S$. Y anteriormente se mostró que la gráfica G_h es una superficie regular.

$\square$

Proposición 17. *Sean S una superficie regular, $P \in S$, $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ y $g : V \subset \mathbb{R}^2 \to S$ dos parametrizaciones locales de S en P y $W = f(U) \cap g(V)$. La función $h = f^{-1} \circ g : g^{-1}(W) \to^{-1} (W)$ es un difeomorfismo.*

Demostración. Sea $q = h(r)$, entonces $q \in f^{-1}(W) \subset U$. Como f es parametrización local el rango de la matriz $[Df(q)]$ es 2. En consecuencia se puede asumir que

$$\det \begin{bmatrix} D_1 f_1(q) & D_2 f_1(q) \\ D_1 f_2(q) & D_2 f_2(q) \end{bmatrix} \neq 0$$

Considere la función

$$\begin{aligned} F : U \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y) + z) \end{aligned}$$

F es diferenciable por ser cada una de sus componentes diferenciable. Observe que $F(U \times \{0\}) = f(U)$

$$[DF(q)] = \begin{bmatrix} D_1 f_1(q) & D_2 f_1(q) & 0 \\ D_1 f_2(q) & D_2 f_2(q) & 0 \\ D_1 f_3(q) & D_2 f_3(q) & 1 \end{bmatrix}$$

Cuyo determinante es distinto de 0. En consecuencia, del teorema de la función inversa existen abiertos L,M en $\mathbb{R}^3$ tales que $q \in L$ con $F(q) = f(q) \in M$ y $F : L \to M$ es una biyección diferenciable cuya inversa es también diferenciable.

$$\begin{aligned} g : V &\to g(V) \\ r \in g^{-1}(W) &\subset V \\ q = h(r) &= f^{-1} \circ g(r) \\ \therefore f(q) &= g(r) \\ \therefore g(r) &\in M \end{aligned}$$

Como M es abierto en $\mathbb{R}^3$ y $g(r) \in M$. Siendo g continua, existe un abierto $\hat{N}$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $(\hat{N} \cap V)$ $\square$

Definición 13. Sean S una superficie regular, $P \in S$. Dada una parametrización local de S en P

$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \to V \cap S$$

$V \cap S$ se denomina vecindad coordenada de P.

Sea $(x, y) = f^{-1}(P) \in U$, (x, y) se denominan las coordenadas de P bajo f. En general si

$q \in V \cap S$ y $(a,b) = f^{-1}(q)$, a la pareja (a,b) se le denominan las coordenadas de q bajo f.

Observación. *Si f, g son dos parametrizaciones locales de S en P y (x,y), $(\hat{x},\hat{y})$ son las coordenadas de P bajo f y g respectivamente, se tiene que $h = g^{-1} \circ g$ es un difeomorfismo que transforma las coordenadas de P bajo g a las coordenadas de P bajo f.*

Definición 14. Sean S una superficie regular, V un abierto en S

$$\phi : V \subset S \to \mathbb{R}^n$$

Se dice que ϕ es diferenciable en $P \in V$ si dada una parametrización local de S en P.

$$g : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$$

tal que $g(U) \subset V$, se tiene que:

$$\phi \circ g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$$

es diferenciable en $g^{-1}(P)$

Observación. *La definición anterior no depende de la parametrización*

Suponga que $\hat{g}$ es otra parametrización de S en P, sea $h = g^{-1} \circ \hat{g}$. Así $\phi \circ \hat{g} = \phi \circ g \circ h$. Se tiene entonces que $\phi \circ \hat{g}$ es diferenciable en $\hat{g}^{-1}(P)$.

Definición 15. Sean S_1 y S_2 superficies regulares,

$$\phi : V \subset S_1 \to S_2$$

con V abierto en S_1. ϕ se dice diferenciable en $P \in V$ si dadas parametrizaciones locales g_1,g_2 de S_1,S_2 en P y $\phi(P)$ respectivamente, cada una definida en U_1, U_2 tales que $g_1(U_1) \subset V$ y $\phi(g_1(U_1)) \subset g_2(U_2)$, se tiene que la función $g_2^{-1} \circ g \circ g_1$ es diferenciable en $g_1^{-1}(P)$.

Definición 16. Dos superficies regulares se S_1, S_2 se dicen difeomorfas si existe una biyección $\phi : S_1 \to S_2$ diferenciable cuya inversa es diferenciable.

Proposición 18. *Sea S una superficie regular, $P \in S$. $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ una parametrización local de S en P, entonces $f^{-1} : f(U)R^2$ Sea $g : V \subset \mathbb{R}^2$ es una función diferenciable*

Demostración. Sea $P \in f(U)$

Sea $g : V \subset \mathbb{R}^2 \to S$ una parametrización local se S en P. Sea $h = f^{-1} \circ g : g^{-1}(W) \to f^{-1}(W)$ con $W = f(U) \cap g(V)$ h es en particular difrerenciable en $g^{-1}(P)$, así f^{-1} diferencaible en P.

$\square$

La proposición implica que siendo S una superficie regular y f una parametrización local de S en P. $f : U \to f(U)$ es un difeomorfismo. Ésto muestra que toda superficie regular es localmente difeomorfa al plano.

Problema 2.2.1. *Sean $V \subset \mathbb{R}^3$ abierto, S una superficie regular: $f : V \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable. Si $S \subset V$ demuestre que $f|_S$ es una función diferenciable.*

Problema 2.2.2. *Demuestre que toda esfera es difeomorfa a toda elipsoide*

Capítulo 3

Tercer Parcial

3.1. Cálculo Variacional

3.1.1. Ecuación de Euler

Proposición 19. *Sea G un abierto en $\mathbb{R}^2$ y $f : G \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $D_1 f$ existe y es continua en G. Suponga que $[\alpha, \beta] \times [a, b] \subset G$. Para $x \in [\alpha, \beta]$, considere*

$$\begin{aligned} f_x : [a, b] &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

Y sea

$$\begin{aligned} F : [\alpha, \beta] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^b f_x \end{aligned}$$

Entonces $\forall\, x \in [\alpha, \beta]$, $F'(x)$ existe y es igual

$$\int_a^b (D_1 f)_x$$

Donde

$$\begin{aligned} (D_1 f)_x : [a, b] &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto D_1(x, y) \end{aligned}$$

Demostración. Claramente f_x es continua. En consecuencia $\int_a^b f_x$ existe, y por ello F está definida.

Considere un elemento (x, y) de $[\alpha, \beta] \times [a, b]$, si definimos

$$\begin{aligned} f^y : [\alpha, \beta] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

Se tiene así que $(f^y)'(x) = D_1 f(x, y)$.

Sean $\hat{x} \in [\alpha, \beta]$, $\hat{h} \neq 0$ y $\hat{x} + \hat{h} \in [\alpha, \beta]$. Entonces

$$F(\hat{x} + \hat{h}) - F(\hat{x}) = \int_a^b f_{\hat{x}+\hat{h}} - \int_a^b f_{\hat{x}} = \int_a^b f_{\hat{x}+\hat{h}} - f_{\hat{x}}$$

Por otra parte, del teorema del valor medio existe $c \in (\hat{x}, \hat{x} + \hat{h})$

$$(f^y)'(c) = \frac{f^y(\hat{x} + \hat{h}) - f^y(\hat{x})}{\hat{h}}$$

c entonces se puede escribir como $c = \hat{x} + \theta\hat{h}$ con $\theta \in (0, 1)$. Además θ depende de y De ésta manera

$$\begin{aligned} f(\hat{x} + \hat{h}, y) - f(\hat{x}, y) &= \hat{h}(f^y)'(c) \\ &= \hat{h} D_1 f(c, y) \\ &= \hat{h} D_1 f(\hat{x} + \theta\hat{h}, y) \end{aligned}$$

Como $D_1 f$ es continua en un compacto, dado $\epsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que

$$|D_1 f(c, y) - D_1(\hat{x}, y)| < \frac{\epsilon}{b - a}$$

si

$$|\hat{h}| < \epsilon$$

Considere la función

$$\begin{aligned} g : [a, b] &\to \mathbb{R}^2 \\ y &\mapsto (c, y) \end{aligned}$$

De lo cual se tiene

$$f_{\hat{x}+\hat{h}} - f_{\hat{x}} = \hat{h} f \circ g$$

Así

$$\frac{F(\hat{x} + \hat{h}) - F(\hat{x})}{\hat{h}} = \int_a^b (D_1 f)_{\hat{x}}$$

$$\Big|\frac{F(\hat{x} + \hat{h}) - F(\hat{x})}{\hat{h}} - \int_a^b (D_1 f)_{\hat{x}} \leq \int_a^b \Big|D_1 f \circ g - (D_1 f)_{\hat{x}}\Big|$$

Así se puede finalmente concluir

$$\lim_{\hat{h}\to 0} \frac{F(\hat{x}+\hat{h}) - F(\hat{x})}{\hat{h}}$$

existe y es igual a $\int_a^b (D_1 f)_{\hat{x}}$, y dado el hecho que $D_1 f$ es uniformemente continua, la derivada existe y es continua. □

Lema 3.1.1. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua, tal que*

$$\int_a^b f\eta = 0$$

para toda función $\eta : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua que satisface $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Entonces $f(x) = 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$

Demostración. Suponga que existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) \neq 0$. Suponga que $f(c) > 0$. Como f es continua, para $\epsilon = f(c)$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(c)| < \epsilon \text{ si } |x - c| < \delta \text{ y } x \in [a,b]$$

Así si $x \in [a,b] \cap (c-\delta, c+\delta)$, entonces $-\epsilon < f(x) - f(c)$. Con lo que $0 < f(x)$. Existen entonces $a', b'; a' < b'$. tales que $(a', b') \subset (a,b) \cap (c-\delta, c+\delta)$. Considere entonces la función $\eta : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida en la siguiente forma

$$\eta(x) = \begin{cases} (b'-x)(x-a') & \text{si } x \in [a',b'] \\ 0 & \text{si } x \notin [a',b'] \end{cases}$$

η es continua. Además que $\eta(a) = \eta(b) = 0$. En consecuencia

$$\int_a^b = 0$$

Sin embargo $f\eta$ es estrictamente mayor que 0 en el abierto (a', b') y cero en el resto de su dominio, finalmente

$$\int_a^b f\eta > 0$$

Lo cual es una contradicción

□

Sea $F : G \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en el abierto G. Suponga que $[a,b] \subset \Pi_1(G)$, siendo

$$\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) \mapsto x$$

Sean $c, d \in \mathbb{R}$. C el conjunto

$$\{f : [a,b] \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ es de clase} C^2; f(a) = c, f(b) = d, \ (x, f(x), f'(x)) \in G\}$$

Dado $f \in C$. Sean

$$\begin{aligned} g_f : [a,b] &\to G \\ x &\mapsto (x, f(x), f'(x)) \\ h_f : F \circ g_f \end{aligned}$$

Considere finalmente la función

$$\begin{aligned} I : C &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_a^b h_f \end{aligned}$$

El propósito del cálculo variacional es determinar un elemento $\phi \in C$ tal que $I(\phi)$ sea máximo o mínimo.

Proposición 20 (Euler 1977)**.** *Una condición necesaria para que $u \in C$ sea un extremo de I, es que se cumpla la siguiente identidad*

$$D_2F(x, u(x), u'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}[D_3F(x, u(x), u'(x)]$$

Demostración. Asuma que $u \in C$ es un extremo de I. Sea

$$\eta : [a,b] \to \mathbb{R}$$

una función de clase C^2 tal que $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Para probar ésta proposición, basta probar que:

$$\int_a^b \eta\Big[D_2F(x, u(x), u'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}[D_3F(x, u(x), u'(x)]\Big]$$

Sea $\hat{\mathbb{R}} = \{\epsilon \in \mathbb{R} \,|\, u + \epsilon\eta \in C\}$. Entonces $\{u + \epsilon\eta \,|\, \epsilon \in \hat{\mathbb{R}}\} \in C$.

Considere las funciones

$$\begin{aligned} \hat{f} : \hat{\mathbb{R}} &\to C \\ \epsilon &\mapsto u + \epsilon\eta \\ L : [a,b] \times \hat{\mathbb{R}} &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, \epsilon) &\mapsto g_{\hat{f}(\epsilon)}(x) = (x, \hat{f}(x), \hat{f}'(x)) \end{aligned}$$

Se tiene así la función: para cada $\epsilon \in \hat{\mathbb{R}}$, considere la función

$$\begin{aligned}(F \circ L) : [a, b] &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto (F \circ L)(x, \epsilon)\end{aligned}$$

Considere así mismo la función

$$\begin{aligned}G_\eta : \hat{\mathbb{R}} &\to \mathbb{R}\\ \epsilon &\mapsto I(\hat{f}(\epsilon))\end{aligned}$$

Se tiene que $G_\eta(\epsilon) = \int_a^b h_{\hat{f}(\epsilon)}$

Como $F \circ L$ y $(F \circ L)_\epsilon$ son continuas, la proposición anterior, implica que $G'_\eta(\epsilon)$ existe y es igual a $\int_a^b D_2(F \circ L)_\epsilon$.

Por otra parte,

$$D(F \circ L)(x, \epsilon) = DF(L(x, \epsilon)) \circ DL(x, \epsilon)$$

Así

$$D_2(F \circ L) = \eta(x) D_2 F(L(x, \epsilon)) + \eta'(x) D_3 F(L(x, \epsilon))$$

Tenemos entonces que

$$G'_\eta(\epsilon) = \int_a^b D_2(F \circ L) = \eta(x) D_2 F(L(x, \epsilon)) + \eta'(x) D_3 F(L(x, \epsilon))$$

Utilizando el método de integración por partes se tiene:

$$G'_\eta(\epsilon) = \int_a^b \eta(x) \Big[D_2(F \circ L(x, \epsilon)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} [D_3(F \circ L(x, \epsilon))] \Big]$$

al ser $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Como $G_\eta(0) = I(u)$. 0 es un extremo de G_η. Así $G'_\eta = 0$. Entonces

$$\int_a^b \eta \Big[D_2 F(x, u(x), u'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} [D_3 F(x, u(x), u'(x)] \Big]$$

□

3.1.2. Geodésicas en la esfera

Sean P_1, P_2 dos puntos en la esfera S^2. Sea $P : [u, v] \to \mathbb{R}^3$ una curva regular cuya traza está contenida en la esfera, tal que $P(u) = P_1, P(v) = P_2$. Utilizando coordenadas esféricas se puede escribir

$$\begin{aligned}x(t) &= \cos\theta(t) \cos\phi(t)\\ y(t) &= \cos\theta(t) \sin\phi(t)\\ z(t) &= \sin\theta(t)\end{aligned}$$

La longitud de la curva es entonces

$$L_P = \int_u^v \|P'(t)\|$$

Se tiene entonces que

$$\|P'(t)\| = [\theta'(t)^2 + \phi'(t)^2 \sin^2 \theta(t)]^{1/2}$$

Si θ es inyectiva, podemos escribir

$$L_P = \int_u^v \theta'(t) \sqrt{1 + \Big[\frac{\phi'(t)}{\theta'(t)}\Big]^2 \sin^2 \theta(t)}$$

Entonces, utilizando el primer teorema de sustitución

$$\begin{aligned} L_P = \int_u^v G(t) &= \int_{\theta^{-1}(\alpha)}^{\theta^{-1}(\beta)} \\ &= \int_\alpha^\beta G(\theta^{-1}(x))(\theta^{-1})'(x) \\ &= \int_\alpha^\beta \Big[1 + \phi'(\theta^{-1}(x))^2(\theta^{-1})'(x)^2 \sin^2 x\Big]^{1/2} \end{aligned}$$

Considere entonces a $f =$

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto (1 + x^2 \sin^2 x)^{1/2} \end{aligned}$$

Se tiene así la función:

$$h_f = F \circ g_f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$$

Así la ecuación de Euler se reduce en éste caso:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x}[D_3(F(x, f(x), f'(x)))] = 0$$

Así $\exists C \in \mathbb{R}$ tal que

$$C = D_3 F(x, f(x), f'(x))$$

Por lo cual

$$\frac{f'(x) \sin^2 x}{\Big[1 + f'(x)^2 \sin^2 x\Big]^{1/2}} = C$$

Lo anterior constituye una condición necesaria para que P sea una geodésica de S^2.

Sea $\Phi = f'$. Se tiene entonces que

$$\Phi^2 \sin^2 x(\sin^2 x - C^2) = C^2$$

Observe que $|C| < 1$

Así

$$\Phi = \frac{C}{\sin x[\sin^2 x - C^2]^{1/2}}$$

Reemplazando $\sin^2 x$ se tiene

$$\begin{aligned}
f' &= \frac{C}{\sin^2 x[1 - C^2(1 + \cot^2 x)]^{1/2}} \\
&= \frac{C(\cot x)'}{1 - C^2 - C^2 \cot^2 x]^{1/2}} \\
f &= \arccos \frac{C \cot x}{\sqrt{1 - C^2}} + C_1 \\
&= \arccos[C_2 \cot x] + C_1
\end{aligned}$$

Como $x = \theta$, se concluye:

$$\cos(f(\theta) - C - 1) = C_2 \cot \theta$$

ó bien

$$A \cos f(\theta) + B \sin f(\theta) = \theta$$

Multiplicando ambos miembros por $\sin \theta$, se tiene

$$\begin{aligned}
A \sin \theta \cos f(\theta) + B \sin \theta \sin f(\theta) &= \cos \theta \\
A \sin \theta \cos \phi + B \sin \theta \sin \phi &= \cos \theta
\end{aligned}$$

o bien en coordenadas cartesianas

$$Ax + By = z$$

Es decir que la curva se encuentra en la intersección de una superficie que contiene al origen

Charles Fox.

Problema 3.1.1.

a. Verifique que si $D_1F = 0$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(x, u, u') - u'D_3F(x, u, u') = C$$

b. Verifique que la hélice $f(t) = (\cos t, \sin t, at)$ satisface la ecuación de Euler para ser una geodésica del cilindro circular.

Considerando al conjunto C definido como antes, y a la función I de la misma forma. Sea u

un extremo de I

$$\begin{aligned} g_u : [a,b] &\to \mathbb{R}^3 \\ x &\mapsto (x, u(x), u'(x)) \end{aligned}$$

Sea $H = (D_3F) \circ g_u$. Para cada $x \in [a,b]$ se tiene:

$$DH(x) = D(D_3F(g_u(x)) \circ Dg_u(x)$$

Así

$$H'(x) = D_{13}F(g_u(x)) + u'(x)D_{23}F(g_u(x)) + u''(x)D_{33}F(g_h(x))$$

Como $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}H(x) = H'(x)$.

En consecuencia la ecuación de Euler puede escribirse en la forma:

$$-D_2F(x, u(x), u'(x)) + D_{13}F(x, u(x), u'(x)) + u'(x)D_{23}F(x, u(x), u'(x) + u''(x)D_{33}F(x, u(x), u'(x))$$

Considere una función $F : G \subset \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$ diferenciable. Suponga que $[a,b] \subset \Pi_1(G)$ Sean

$$\begin{aligned} C &= \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \,|\, f \in C^2, f(a) = c, f(b) = d \\ &= (x, f(x), f'(x)) \in G \quad \forall\, x \in [a,b]\} \\ f \in C \quad ; \quad g_f[a,b] &\to G \\ x &\mapsto (x, f(x), f'(x)) \\ h_f = F \circ g_f : [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto F(x, f(x), f'(x)) \end{aligned}$$

Veamos que h_f es continua. Así podemos considerar la función

$$\begin{aligned} I : C &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_a^b h_f \end{aligned}$$

Suponga que $u \in C$ es un extremo de I. Sea $\eta : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^2 tal que $\eta(a) = \eta(b) = 0$ y sea $\hat{\mathbb{R}} = \{\epsilon \in \ | u + \epsilon\eta \in C\}$. Considere las funcióne

$$\begin{aligned} \hat{f} : \hat{\mathbb{R}} &\to C \\ \epsilon &\mapsto u + \epsilon\eta \\ G_\eta : \hat{\mathbb{R}} &\to \mathbb{R} \\ \epsilon &\mapsto I(\hat{f}(\epsilon)) = \int_a^b h_{\hat{f}(\epsilon)} \end{aligned}$$

Sea también:

$$
\begin{aligned}
L : [a,b] \times \hat{\mathbb{R}} &\to \mathbb{R}^{2n+1} \\
(x,\epsilon) &\mapsto g_{\hat{f}(\epsilon)}(x) \\
F \circ L : [a,b] \times \hat{\mathbb{R}} &\to \mathbb{R} \\
(x,\epsilon) &\mapsto F \circ g_{\hat{f}(\epsilon)}(x)
\end{aligned}
$$

Dado $\epsilon \in \hat{\mathbb{R}}$, se tiene la función

$$
\begin{aligned}
h_{\hat{f}(\epsilon)} = (F \circ L)_\epsilon : [a,b] &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto F \circ L(x,\epsilon)
\end{aligned}
$$

Se tiene entonces:

$$G_\eta(\epsilon) = \int_a^b (F \circ L)_\epsilon$$

La proposición 21 implica que

$$G'_\eta(\epsilon) = \int_a^b [D_2(F \circ L)]_\epsilon$$

Veamos que

$$[DF(L(x,\epsilon))] = \left[D_1F(x,\epsilon)\dots D_{2n+1}\right]$$

y

$$[DL(x,\epsilon)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ u'_1(x) + \epsilon\eta'_1(x) & \eta'_1(x) \\ \vdots & \vdots \\ u'_n(x) + \epsilon\eta'_n(x) & \eta'_n(x) \\ u''_1(x) + \epsilon\eta''_1(x) & \eta''_1(x) \\ \vdots & \vdots \\ u''_n(x) + \epsilon\eta''_n(x) & \eta''_n(x) \end{bmatrix}$$

Así

$$[D_2(F\circ L)]_\epsilon = \eta_1(x)D_2F(L(x,\epsilon)) + \dots + \eta_n(x)D_{n+1}F(L(x,\epsilon)) + \eta'_1(x)D_{n+2}F(L(x,\epsilon)) + \dots + \eta'_n D_{2n+1}F(L(x,\epsilon))$$

Con lo cual, integrando por partes tenemos

$$G'_\eta(\epsilon) = \int_a^b \sum_{i=1}^n \eta_i[(x)D_{i+1}F(L(x,\epsilon)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}D_{i+n+1}F(L(x,\epsilon))$$

En particular G_η tiene un punto crítico en 0. Así

$$0 = G'_\eta(\epsilon) = \int_a^b \sum_{i=1}^n \eta_i[(x)D_{i+1}F(L(x,0)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}D_{i+n+1}F(L(x,0))$$

Como η es una función de clase C^2 con $\eta(a) = \eta(b) = 0$ arbitraria, podemos tomar a $\eta_k^k = \eta_k$. $\eta_k^i = 0$ para $i \neq k$. Con lo cual se tiene

$$0 = G'_{\eta_k}(\epsilon) = \int_a^b \eta_k[(x)D_{k+1}F(L(x,0)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}D_{k+n+1}F(L(x,0))$$

Así, del lema de la proposición 21, se conluye:

$$D_{k+1}F(x,u(x),u'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}D_{k+n+1}F(x,u(x),u'(x)) = 0$$

Con lo cual se muestra lo siguiente:

Proposición 21. *Sean F definido como anterior, C el conjunto de funciones anteriores y $u \in C$ tal que u es un extremo de I, entonces*

$$D_{k+1}F(x,u(x),u'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}D_{k+n+1}F(x,u(x),u'(x)) = 0$$

Herman H . Goldstine A History of the calculus of Variations from the 17th through the 19th century.