

Manfredo P. do Carmo

Instituto de Matematica Pura e Aplicada (IMPA)
Rio de Janeiro, Brasil

Geometría diferencial de curvas y superficies

Versión española de
José Claudio Sabina de Lis

Geometría diferencial de
curvas y superficies

Título original: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*
Esta obra ha sido publicada en inglés por Prentice-Hall, Inc., U. S. A.

Primera edición en «Alianza Universidad Textos»: 1990
Tercera reimpresión en «Alianza Universidad Textos»: 1995

A Leny

Reservados todos los derechos. De conformidad con lo dispuesto en el artículo 534-bis del Código Penal vigente, podrán ser castigados con penas de multa y privación de libertad quienes reprodujeren o plagiaren, en todo o en parte, una obra literaria, artística o científica fijada en cualquier tipo de soporte, sin la preceptiva autorización.²

Copyright © 1976 by Prentice-Hall, Inc. All rights reserved
© Ed. cast.: Alianza Editorial, S. A., Madrid, 1990, 1992, 1994, 1995
Calle Juan Ignacio Luca de Tena, 15; 28027 Madrid; teléf. 3938888
ISBN: 84-206-8135-0
Depósito Legal: S. 774-1995
Fotocomposición: EFCA, S. A.
Avda. Doctor Federico Rubio y Galí, 16. 28039 Madrid
Impreso en Gráficas Varona
Polígono «El Montalvo» - parcela 49
37008 Salamanca
Printed in Spain

INDICE

Prólogo	11
Algunas observaciones sobre el uso de este libro	13
Capítulo 1. Curvas	15
1.1. Introducción, 15.—1.2. <u>Curvas parametrizadas</u> , 16.—1.3. Curvas regulares; <u>longitud de arco</u> , 19.—1.4. El producto vectorial en R^3 , 25.—1.5. <u>La teoría local de curvas parametrizadas por la longitud de arco</u> , 30.—1.6. La forma canónica local, 40.—1.7. Propiedades globales de las curvas planas, 43.	
Capítulo 2. Superficies regulares.....	63
2.1. Introducción, 63.—2.2. Superficies regulares; imágenes inversas de valores regulares, 64.—2.3. Cambio de parámetros; funciones diferenciables sobre superficies, 80.—2.4. El plano tangente; la diferencial de una aplicación, 93.—2.5. La primera forma fundamental; área, 101.—2.6. Orientación de superficies, 112.—2.7. Una caracterización de las superficies compactas orientables, 118.—2.8. Una definición geométrica de área, 122.— <i>Apéndice</i> : Breve repaso sobre continuidad y diferenciabilidad, 126.	
Capítulo 3. Geometría de la aplicación de Gauss	141
3.1. Introducción, 141.—3.2. Definición de la aplicación de Gauss y sus propiedades fundamentales, 142.—3.3. La aplicación de Gauss en coordenadas locales, 159.—3.4. Campos vectoriales, 179.—3.5. Superficies regladas y superficies mínimas, 192.— <i>Apéndice</i> : Aplicaciones lineales autoadjuntas y formas cuadráticas, 217.	
Capítulo 4. Geometría intrínseca de superficies	221
4.1. Introducción, 221.—4.2. Isometrías; aplicaciones conformes, 222.—4.3. El teorema de Gauss y las ecuaciones de compatibilidad, 235.—4.4. Transporte paralelo; geodésicas, 241.—4.5. El teorema de Gauss-Bonnet y sus aplicaciones, 267.—4.6. La aplicación exponencial. Coordenadas polares geodésicas, 284.—4.7. Otras propiedades de las geodésicas. Entornos convexos, 299.— <i>Apéndice</i> : Demostraciones de los teoremas fundamentales de la teoría	

Capítulo 5. Geometría diferencial global	317
5.1. Introducción, 317.—5.2. Rigidez de la esfera, 319.—5.3. Superficies completas. Teorema de Hopf-Rinow, 326.—5.4. Variaciones primera y segunda de la longitud de arco; teorema de Bonnet, 339.—5.5. Campos de Jacobi y puntos conjugados, 357.—5.6. Espacios recubridores; los teoremas de Hadamard, 371.—5.7. Teoremas globales para curvas; el teorema de Fary-Milnor, 389.—5.8. Superficies con curvatura gaussiana nula, 406.—5.9. Teoremas de Jacobi, 413.—5.10. Superficies abstractas; otras generalizaciones, 422.—5.11. El teorema de Hilbert, 442.—Apéndice: Topología de conjuntos de puntos en espacios euclídeos, 453.	
Bibliografía y comentarios	467
Indicaciones y respuestas de algunos ejercicios	471
Índice alfabético	493

PROLOGO

Este libro es una introducción a la geometría diferencial de curvas y superficies, en sus aspectos local y global. La presentación se diferencia de las tradicionales en un uso más extenso del álgebra lineal elemental y por un cierto énfasis que se ha puesto en hechos geométricos básicos, más que en maquinaria de cálculo o detalles aleatorios.

Hemos tratado de construir cada capítulo del libro en torno a alguna idea simple y fundamental. Así, el capítulo 2 se construye en torno al concepto de superficie regular en R^3 ; cuando este concepto se ha desarrollado con propiedad, constituye probablemente el mejor modelo para las variedades diferenciables. El capítulo 3 está construido sobre la aplicación normal de Gauss y contiene una gran cantidad de geometría local de superficies en R^3 . El capítulo 4 unifica la geometría intrínseca de superficies en base al concepto de derivada covariante; de nuevo, nuestro propósito ha sido preparar al lector para la noción básica de conexión en la geometría riemanniana. Finalmente, en el capítulo 5, utilizamos las variaciones primera y segunda de la longitud de arco para deducir algunas propiedades globales de las superficies. Hacia el final del capítulo 5 (sec. 5.10), demostramos cómo cuestiones sobre la teoría de superficies, y la experiencia de los capítulos 2 y 4, conducen de manera natural a la consideración de variedades diferenciables y métricas riemannianas.

A fin de mantener el balance propio entre ideas y hechos, hemos presentado un gran número de ejemplos calculados con detalle. Además, se ha propuesto un surtido razonable de ejercicios. Algo de la materia concerniente a la geometría diferencial clásica se ha localizado en dichos ejercicios. Hemos dado indicaciones o respuestas para los ejercicios marcados con asterisco.

Los requisitos para leer este libro son el álgebra lineal y el calculus (cálculo infinitesimal). Del álgebra lineal, sólo se necesitan los conceptos más básicos, y bastaría con un curso estándar de licenciatura sobre el tema. Con respecto al calculus (cálculo infinitesimal), se requiere cierta familiaridad con él para funciones de varias

variables (incluyendo el enunciado del teorema de las funciones implícitas). En beneficio del lector, hemos tratado de limitar nuestras referencias a R. C. Buck, *Advanced Calculus*, Nueva York, McGraw-Hill, 1965 (citado como Buck, *Advanced Calculus*). Un cierto conocimiento de ecuaciones diferenciales será de utilidad aunque no es imprescindible.

Este libro es la traducción libre, con materia suplementaria, de un libro y un conjunto de apuntes, ambos publicados en portugués. De no haber sido por el entusiasmo y la enorme ayuda de Blaine Lawson, este libro no habría aparecido en inglés. Gran parte de la traducción fue hecha por Leny Cavalcante. Debo también reconocimiento a mis colegas y estudiantes del IMPA por su apoyo y sus comentarios. En particular, Elon Lima leyó parte de la versión portuguesa e hizo comentarios valiosos.

Robert Gardner, Jürgen Kern, Blaine Lawson y Nolan Wallach leyeron críticamente el manuscrito en inglés y me ayudaron a evitar varios errores, en el inglés y en las matemáticas. Roy Ogawa preparó los programas de ordenador para los bellos dibujos que aparecen en el libro (figs. 1-3, 1-8, 1-9, 1-10, 1-11, 3-45 y 4-4). Jerry Kazdan me dedicó generosamente su tiempo y me ofreció centenares de sugerencias literarias para la mejora del manuscrito. Esta versión final del libro se ha beneficiado considerablemente de su asesoramiento. A todas estas personas —y a Arthur Wester, editor de matemáticas en Prentice-Hall, y Wilsonb Góes, en el IMPA— les doy mi sincero agradecimiento.

ALGUNAS OBSERVACIONES SOBRE EL USO DE ESTE LIBRO

Hemos intentado preparar este libro para que pudiera utilizarse en más de un tipo de curso sobre geometría diferencial. Cada capítulo comienza con una introducción que describe la materia que contiene y cómo ésta se usará posteriormente en el libro. Hemos utilizado, a efectos de los intereses del lector, notas a pie de página para destacar las secciones (o partes de ellas) que pueden omitirse en una primera lectura.

Aunque hay bastante materia en el libro para un curso completo de un año (o un curso por temas), hemos intentado adecuar el libro a un primer curso de geometría diferencial, dirigido a estudiantes con alguna formación en álgebra lineal y calculus (cálculo infinitesimal) avanzado.

Para un cuarto de curso breve (10 semanas), sugerimos el uso de la siguiente materia: capítulo 1: secs. 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 y un tema de la sec. 1.7 (2 semanas); capítulo 2: secs. 2.2 y 2.3 (omitiendo las demostraciones), 2.4 y 2.5 (3 semanas); capítulo 3: secs. 3.2 y 3.3 (2 semanas); capítulo 4: secs. 4.2 (omitiendo aplicaciones conformes y los ejercicios 4, 3-18, 20), 4.3 (hasta el teorema egregium de Gauss), 4.4 (hasta la prop. 4; omitiendo los ejercicios 12, 13, 16, 18-21), 4.5 (hasta el teorema de Gauss-Bonnet local; incluyendo las aplicaciones (b) y (f)), 3 semanas.

Este programa de 10 semanas se ajusta a un horario un tanto apretado. Una alternativa más relajada consiste en conceder más tiempo a los primeros tres capítulos y ofrecer lecciones descriptivas, en las tres semanas últimas del curso, sobre geodésicas, el teorema egregium de Gauss y el teorema de Gauss-Bonnet (las geodésicas pueden definirse como aquellas curvas cuyos planos osculadores contienen las normales a la superficie).

En un curso semestral, la primera alternativa se podría impartir más pausadamente y el instructor (profesor) probablemente podría incluir más materia (por ejemplo, las secs. 5.2 y 5.10, parcialmente, o las secs. 4.6, 5.3 y 5.4).

Obsérvese además que un asterisco asociado a un ejercicio no significa que éste sea fácil o difícil. Solamente quiere decir que se proporcionará una indicación o la

olución al final del libro. En segundo lugar, hemos usado una \mathbf{x} en negrita para presentar parametrizaciones y ello podría resultar pesado a efectos de escritura en la izarra. Hemos reservado, en consecuencia, la letra X como sugerencia de recambio.

Donde normalmente deberían ir en cursivas, las letras de símbolos se escribirán en ománicas (letra estándar) cuando aparezcan en un contexto en cursivas. Se ha hecho esto para distinguir tales símbolos del texto circundante.

Capítulo 1

CURVAS

1.1. Introducción

La geometría diferencial de curvas y superficies presenta dos aspectos. Uno, que podría denominarse geometría diferencial clásica, se remonta a los comienzos del calculus (cálculo infinitesimal). En líneas generales, la geometría diferencial clásica es el estudio de propiedades locales de curvas y superficies. Por propiedades locales entendemos aquellas que dependen únicamente del comportamiento de la curva o superficie en el entorno de un punto. Los métodos que han demostrado por sí mismos ser adecuados para el estudio de tales propiedades son los del calculus (cálculo infinitesimal). Por esta razón, las curvas y superficies a considerar en geometría diferencial estarán definidas mediante funciones que pueden diferenciarse un cierto número de veces.

El otro aspecto es la denominada geometría diferencial global. Aquí se estudia la influencia de las propiedades locales sobre el comportamiento total de la curva o superficie. Volveremos a este aspecto de la geometría diferencial posteriormente en el libro.

Quizás es el estudio de superficies la parte más interesante y representativa de la geometría diferencial clásica. Sin embargo, algunas propiedades locales de las curvas aparecen de manera natural mientras se estudian las superficies. Por ello, usaremos este primer capítulo para ofrecer un tratamiento breve de las curvas.

El capítulo se ha organizado de manera que un lector principalmente interesado en superficies pueda leer únicamente las secc. de la 1.2 hasta la 1.5. Las secciones de la 1.2 hasta la 1.4 esencialmente contienen materia de carácter introductorio (curvas parametrizadas, longitud de arco, producto vectorial), que probablemente se conocerá de otros cursos y se introduce aquí por completitud. La sección 1.5 es el corazón del capítulo y contiene la materia de curvas requerida para el estudio de superficies. Para aquellos que deseen ir un poco más lejos en el tema de curvas, hemos incluido las secciones 1.6 v 1.7.

2. Curvas parametrizadas

Denotaremos por R^3 al conjunto de tripletes (x, y, z) de números reales. Nuestro objetivo es caracterizar ciertos subconjuntos de R^3 (que se llamarán curvas) que son, en cierto sentido, uno-dimensionales y a los que puedan aplicarse los métodos del cálculo diferencial. Una manera natural de definir tales subconjuntos es a través de funciones diferenciables. Decimos que una función real de una variable real es *diferenciable* (o *uvae*) si admite, en todos los puntos, derivadas de todos los órdenes (que son automáticamente continuas). Una primera definición de curva, no del todo satisfactoria pero suficiente para los propósitos del capítulo, es la siguiente.

DEFINICIÓN. Una curva parametrizada diferenciable es *una aplicación diferenciable* $\alpha: I \rightarrow R^3$ de un intervalo $I = (a, b)$ de la recta real R en R^3 .¹

La palabra *diferenciable* en esta definición significa que α es una correspondencia que aplica cada $t \in I$ en un punto $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in R^3$ de forma que las funciones $x(t), y(t), z(t)$ son diferenciables. La variable t se denomina *parámetro* de la curva. La palabra *intervalo* se toma en sentido generalizado, de forma que no excluyamos $a = -\infty, b = +\infty$.

Si denotamos por $x'(t)$ la primera derivada de x en el punto t y usamos notaciones similares para las funciones y e z , el vector $(x'(t), y'(t), z'(t)) = \alpha'(t) \in R^3$ se denomina *vector tangente* (o *vector velocidad*) de la curva α en t . El conjunto imagen $\alpha(I) \subset R^3$ se denomina la *traza* de α . Como se ilustra en el ejemplo 5 más abajo, se debe tener cuidado en distinguir una curva parametrizada, que es una aplicación, de su traza, que es un subconjunto de R^3 .

Una advertencia sobre la terminología. Mucha gente usa el término «infinitamente diferenciable» para funciones que admiten derivadas de todos los órdenes y reserva la palabra «diferenciable» para dar a entender que únicamente se pide la existencia de la primer derivada. No seguiremos aquí esta terminología.

Ejemplo 1. La curva parametrizada diferenciable dada por:

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad t \in R,$$

tiene como traza en R^3 una hélice de paso $2\pi b$ sobre el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. Aquí el parámetro t mide el ángulo que forma el eje x con la recta que une el origen O con la proyección del punto $\alpha(t)$ sobre el plano xy (véase la fig. 1-1).

Ejemplo 2. La aplicación $\alpha: R \rightarrow R^2$ dada por $\alpha(t) = (t^3, t^2)$, $t \in R$, es una curva parametrizada diferenciable que tiene como traza la fig. 1-2. Nótese que $\alpha'(0) = (0, 0)$; o sea, el vector velocidad es cero para $t = 0$.

Ejemplo 3. La aplicación $\alpha: R \rightarrow R^2$ dada por $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$, $t \in R$, es una curva parametrizada diferenciable (fig. 1-3). Nótese que $\alpha(2) = \alpha(-2) = (0, 0)$; es decir, la aplicación α no es inyectiva.

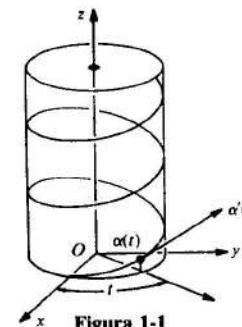


Figura 1-1

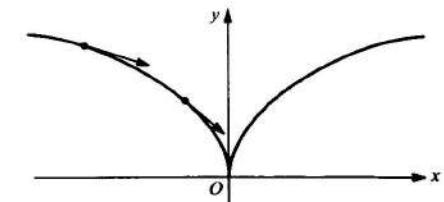


Figura 1-2

Ejemplo 4. La aplicación $\alpha: R \rightarrow R^2$ dada por $\alpha(t) = (t, |t|)$, $t \in R$, no es una curva parametrizada diferenciable, ya que $|t|$ no es diferenciable en $t = 0$ (fig. 1-4).

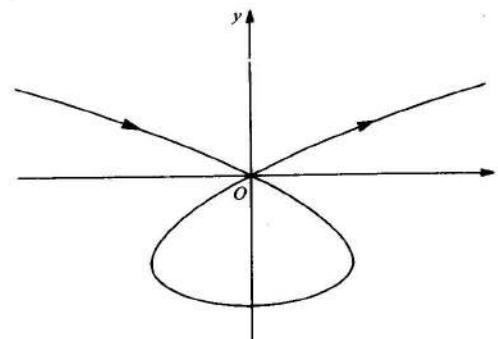


Figura 1-3

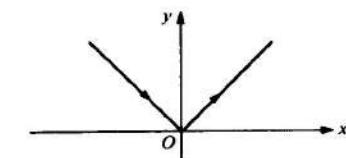
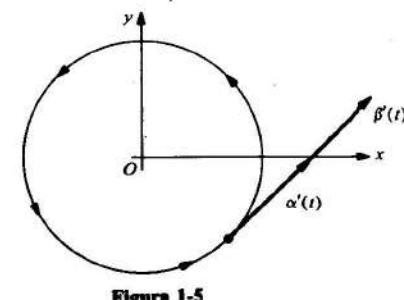


Figura 1-4

Ejemplo 5. Las dos curvas parametrizadas distintas:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (\cos t, \sin t) \\ \beta(t) &= (\cos 2t, \sin 2t), \end{aligned}$$

donde $t \in (0 - \varepsilon, 2\pi + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, tienen la misma traza, a saber, el círculo $x^2 + y^2 = 1$. Nótese que el vector velocidad de la segunda curva es el doble del de la primera (fig. 1-5).



¹ Para contextos en cursiva, las letras de símbolos no estarán en este tipo de letra, así se distinguirán

Ahora recordaremos brevemente algunas propiedades del producto interior* (o punto de vectores en R^3). Sea $u = (u_1, u_2, u_3) \in R^3$, y definamos su *norma* (o *longitud*) por

$$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Geométricamente, $|u|$ es la distancia del punto (u_1, u_2, u_3) al origen $O = (0, 0, 0)$. Sean ahora $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ de R^3 , y sea θ , $0 \leq \theta \leq \pi$, el ángulo formado por los segmentos Ou y Ov . El *producto interior* $u \cdot v$ se define por (fig. 1-6)

$$u \cdot v = |u| |v| \cos \theta.$$

Se verifican las siguientes propiedades:

1. Supóngase que u y v son vectores no nulos. Entonces $u \cdot v = 0$ si y sólo si u es ortogonal a v .
2. $u \cdot v = v \cdot u$.
3. $\lambda(u \cdot v) = \lambda u \cdot v = u \cdot \lambda v$.
4. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$.

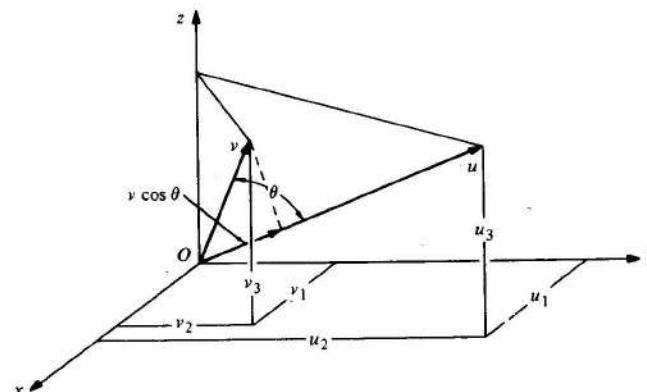


Figura 1-6

Una expresión útil para el producto interior se obtiene como sigue. Sean $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ y $e_3 = (0, 0, 1)$. Se comprueba fácilmente que $e_i \cdot e_j = 1$ si $i = j$ y que $e_i \cdot e_j = 0$ si $i \neq j$, donde $i, j = 1, 2, 3$. Así, escribiendo:

$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3, \quad v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3,$$

y usando las propiedades 3 y 4, obtenemos:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

De esta expresión se sigue que si $u(t)$ y $v(t)$, $t \in I$, son curvas diferenciables, entonces $u(t) \cdot v(t)$ es una función diferenciable, y

$$\frac{d}{dt}(u(t) \cdot v(t)) = u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t).$$

EJERCICIOS

1. Encontrar una curva parametrizada $\alpha(t)$ cuya traza sea el círculo $x^2 + y^2 = 1$ y tal que $\alpha(t)$ recorra el círculo a favor de las agujas del reloj con $\alpha(0) = (0, 1)$.
2. Sea $\alpha(t)$ una curva parametrizada que no pasa por el origen. Si $\alpha(t_0)$ es el punto de la traza de α más cercano al origen y $\alpha'(t_0) \neq 0$, demuéstrese que la posición del vector $\alpha(t_0)$ es ortogonal a $\alpha'(t_0)$.
3. Una curva parametrizada tiene la propiedad de que su segunda derivada $\alpha''(t)$ es idénticamente cero. ¿Qué puede decirse sobre α ?
4. Sea $\alpha: I \rightarrow R^3$ una curva parametrizada y sea $v \in R^3$ un vector fijo. Supóngase que $\alpha'(t)$ es ortogonal a v para todo $t \in I$ y que $\alpha(0)$ también es ortogonal a v . Demostrar que $\alpha(t)$ es ortogonal a v para todo $t \in I$.
5. Sea $\alpha: I \rightarrow R^3$ una curva parametrizada, con $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Demostrar que $|\alpha(t)|$ es una constante no nula si y sólo si $\alpha(t)$ es ortogonal a $\alpha'(t)$ para todo $t \in I$.

1.3. Curvas regulares; longitud de arco

Sea $\alpha: I \rightarrow R^3$ una curva parametrizada diferenciable. Para cada $t \in I$ en donde $\alpha'(t) \neq 0$ existe una recta bien definida, que pasa por el punto $\alpha(t)$ y contiene al vector $\alpha'(t)$. Esta recta se denomina *recta tangente* a α en t . Para el estudio de la geometría diferencial de una curva es esencial la existencia de tal recta tangente en cada punto. Por esta razón, llamaremos a cualquier punto t donde $\alpha'(t) = 0$ un *punto singular* de α y centraremos nuestra atención sobre curvas sin puntos singulares. Nótese que el punto $t = 0$ en el ejemplo 2 de la sec. 1.2 es un punto singular.

DEFINICION. Una curva parametrizada diferenciable $\alpha: I \rightarrow R^3$ se denomina regular si $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

De ahora en adelante consideraremos únicamente curvas parametrizadas diferenciables y regulares (y, por conveniencia, suprimiremos frecuentemente el término diferenciable).

Dado $t \in I$, la longitud de arco de una curva parametrizada regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, desde el punto t_0 , es por definición:

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt,$$

donde

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

es la longitud del vector $\alpha'(t)$. Ya que $\alpha'(t) \neq 0$, la longitud de arco s es una función diferenciable de t y $ds/dt = |\alpha'(t)|$.

En el ejercicio 8 se presentará una justificación geométrica para la definición de longitud de arco dada más arriba.

Puede suceder que el parámetro t sea ya la longitud de arco medida desde algún punto. En este caso, $ds/dt = 1 = |\alpha'(t)|$, es decir, el vector velocidad tiene longitud constante igual a 1. Recíprocamente, si $|\alpha'(t)| = 1$, entonces:

$$s = \int_{t_0}^t dt = t - t_0;$$

es decir, t es la longitud de arco de α medida desde algún punto.

Para simplificar nuestra exposición, nos limitaremos a curvas parametrizadas por la longitud de arco; ya veremos más tarde (sec. 1.5) que esta restricción no es esencial. En general, no es necesario especificar el origen de la longitud de arco s , ya que la mayor parte de los conceptos se definen únicamente en términos de las derivadas de $\alpha(s)$.

Es pertinente introducir otro convenio más. Dada la curva α parametrizada por la longitud de arco $s \in (a, b)$, podríamos considerar la curva β definida en $(-b, -a)$ por $\beta(s) = \alpha(-s)$, que tiene la misma traza que la primera pero está descrita en sentido contrario. Diremos, entonces, que estas dos curvas se diferencian por un *cambio de orientación*.

EJERCICIOS

- Demuéstrese que las rectas tangentes a la curva parametrizada regular $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ forman un ángulo constante con la recta $y = 0, z = x$.
- Un disco circular de radio 1 en el plano xy rueda sin deslizar a lo largo del eje x . La figura que describe un punto de la circunferencia del disco se llama *cicloide* (fig. 1-7).

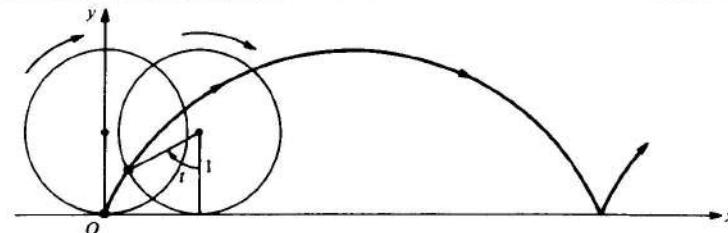


Figura 1-7. La cicloide.

*a. Obténgase una curva parametrizada $\alpha: R \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuya traza sea la cicloide y determine sus puntos singulares.

b. Calcúlese la longitud de arco de la cicloide correspondiente a una rotación completa del disco.

3. Sea $OA = 2a$ el diámetro de un círculo S^1 y sean OY y AV las tangentes a S^1 en O y A , respectivamente. Una semirrecta r , que corta a S^1 en C y a la recta AV en B , se traza desde O . Sobre OB se marca el segmento $Op = CB$. Si rotamos r alrededor de O , el punto p describirá una curva denominada la *cisoide de Diocles*. Tomando OA como eje x y OY como eje y , demostrar que:

a. La traza de:

$$\alpha(t) = \left(\frac{3at^2}{1+t^2}, \frac{2at^3}{1+t^2} \right), \quad t \in R,$$

es la cisoide de Diocles ($t = \tan \theta$; ver la fig. 1-8).

b. El origen $(0, 0)$ es un punto singular de la cisoide.

c. Cuando $t \rightarrow \infty$, $\alpha(t)$ se aproxima a la recta $x = 2a$, y $\alpha'(t) \rightarrow (0, 2a)$. Así, cuando $t \rightarrow \infty$, la curva y su tangente se aproximan a la recta $x = 2a$; decimos entonces que $x = 2a$ es una *asíntota* de la cisoide.

4. Sea $\alpha: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = \left(\sin t, \cos t + \log \operatorname{tag} \frac{t}{2} \right),$$

donde t es el ángulo que el eje y forma con el vector $\alpha'(t)$. La traza de α se denomina la *tractriz* (fig. 1-9). Demostrar que:

- α es una curva parametrizada diferenciable, regular excepto en $t = \pi/2$.
- La longitud del segmento sobre la tangente a la tractriz entre el punto de tangencia y el eje y es constantemente igual a 1.

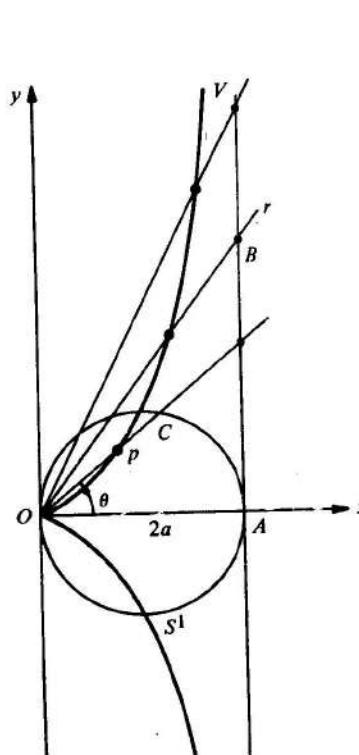


Figura 1-8. La cisoide de Diocles.

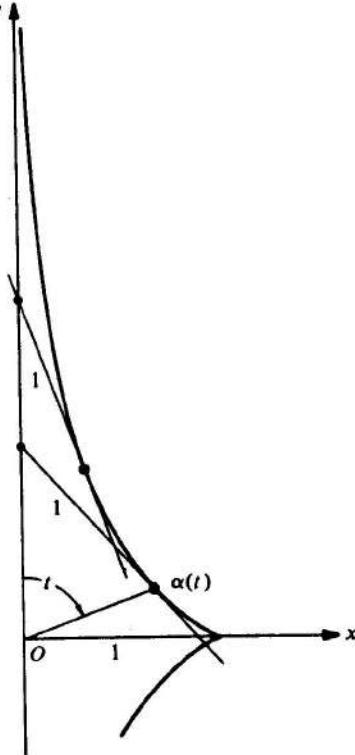


Figura 1-9. La tractriz.

5. Sea $\alpha: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = \left(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3} \right).$$

Probar que:

- a. Para $t = 0$, α es tangente al eje x .
- b. Cuando $t \rightarrow +\infty$, $\alpha(t) \rightarrow (0, 0)$ y $\alpha'(t) \rightarrow (0, 0)$.
- c. Considérese la curva de orientación opuesta. Ahora, cuando $t \rightarrow -1$, la curva y su tangente se aproximan a la recta $x + y + a = 0$. La figura que se obtiene completando la traza de α de forma que aquélla resulte simétrica con respecto a la recta $y = x$ se denomina el folium de Descartes (ver la fig. 1-10).

6. Sea la curva parametrizada $\alpha(t) = (ae^{bt} \cos t, ae^{bt} \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, a y b constantes, $a > 0$,

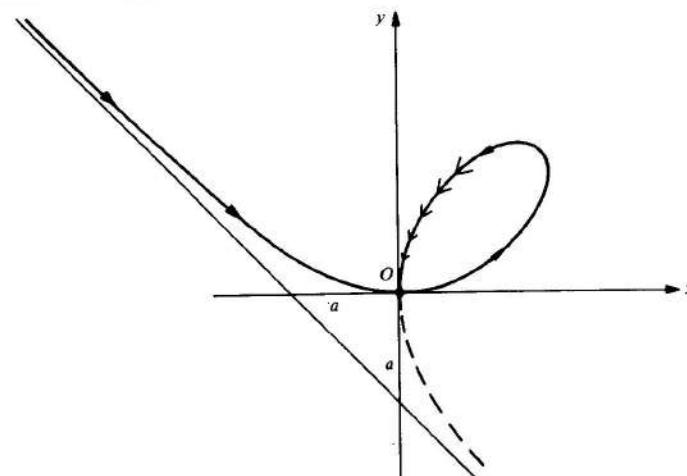


Figura 1-10. Folium de Descartes.

- a. Demostrar que cuando $t \rightarrow +\infty$, $\alpha(t)$ se approxima al origen O , girando en espiral alrededor de él (por eso, la traza de α es denominada espiral logarítmica; véase la fig. 1-11).
- b. Demostrar que $\alpha'(t) \rightarrow (0, 0)$ cuando $t \rightarrow +\infty$ y que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t |\alpha'(s)| ds$$

es finita, o sea, α tiene longitud de arco finita en $[t_0, +\infty)$.

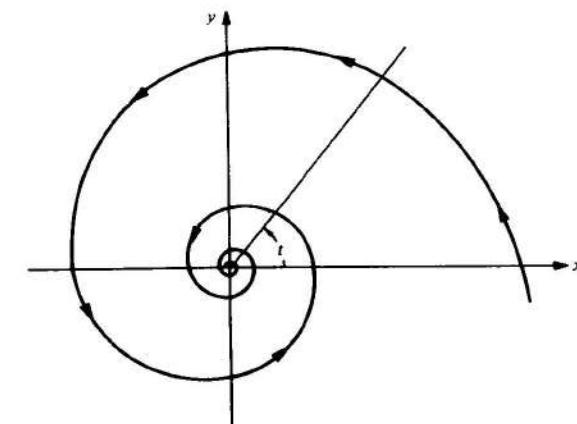


Figura 1-11. Espiral logarítmica.

7. Una aplicación $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ se denomina *curva de clase C^k* si cada una de las funciones coordenadas en la expresión $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ admite derivadas continuas hasta el orden k . Si α es solamente continua, decimos que α es de clase C^0 . Una curva α se denomina *simple* si la aplicación α es inyectiva. Así, la curva en el Ejemplo 3 de la Sec. 1.2 no es simple.

Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva simple de clase C^0 . Decimos que α admite una *tangente débil* en $t = t_0$ si la recta determinada por $\alpha(t_0 + h)$ y $\alpha(t_0)$ adopta una posición límite cuando $h \rightarrow 0$. Diremos que α admite una *tangente fuerte* en $t = t_0$ si la recta determinada por $\alpha(t_0 + h)$ y $\alpha(t_0 + k)$ adopta una posición límite cuando $h, k \rightarrow 0$. Demostrar que:

- $\alpha(t) = (t^2, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, admite una tangente débil pero no una tangente fuerte en $t = 0$.
- Si $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es de clase C^1 y regular en $t = t_0$, entonces admite una tangente fuerte en $t = t_0$.
- La curva dada por:

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t^2, t^2), & t \geq 0, \\ (t^2, -t^2), & t \leq 0, \end{cases}$$

es de clase C^1 pero no de clase C^2 . Dibújese un boceto de la curva y de sus vectores tangentes.

8. Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable y sea $[a, b] \subset I$ un intervalo cerrado. Para cada partición:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

de $[a, b]$, considérese la suma $\sum_{i=1}^n |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| = l(\alpha, P)$, donde P representa la partición dada. La norma $|P|$ de la partición se define por:

$$|P| = \max(t_i - t_{i-1}), i = 1, \dots, n.$$

Geométricamente, $l(\alpha, P)$ es la longitud de un polígono inscrito en $\alpha([a, b])$ con vértices en $\alpha(t_i)$ (ver la Fig. 1-12). La intención del ejercicio es demostrar que la longitud del arco $\alpha([a, b])$ es, en cierto sentido, un límite de longitudes de polígonos inscritos.

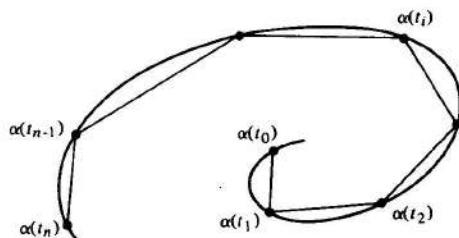


Figura 1-12

Pruébese que dado un $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|P| < \delta$ entonces:

$$\left| \int_a^b |\alpha'(t)| dt - l(\alpha, P) \right| < \epsilon.$$

9. a. Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva de clase C^0 (cf. el Ejercicio 7). Utilícese la aproximación poligonal descrita en el Ejercicio 8 para dar una definición razonable de longitud de arco para α .

b. Una curva no rectificable. El siguiente ejemplo demuestra que, con cualquier definición razonable, la longitud de arco de una curva C^0 en un intervalo cerrado podría ser no acotada. Sea $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t, t \operatorname{sen}(\pi/t))$ si $t \neq 0$, $\alpha(0) = (0, 0)$. Demostrar, geométricamente, que la longitud de arco de la porción de curva correspondiente a $1/(n+1) \leq t \leq 1/n$ es al menos $2(n + (1/2))$. Utilícese esto para establecer que la longitud de la curva en el intervalo $1/N \leq t \leq 1$ es mayor que $2 \sum_{n=1}^N 1/(n+1)$, y por tanto, tiende a infinito cuando $N \rightarrow \infty$.

10. Las rectas como líneas más cortas. Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada. Sea $[a, b] \subset I$ y sean $\alpha(a) = p$, $\alpha(b) = q$.

- Demostrar que, para cualquier vector constante v , $|v| = 1$,

$$(q - p) \cdot v = \int_a^b \alpha'(t) \cdot v dt \leq \int_a^b |\alpha'(t)| dt.$$

- Sea:

$$v = \frac{q - p}{|q - p|}$$

y demuéstrese que:

$$|\alpha(b) - \alpha(a)| \leq \int_a^b |\alpha'(t)| dt;$$

o sea, la curva que hace mínima la longitud de $\alpha(a)$ a $\alpha(b)$ es la recta que une estos puntos.

1.4. El producto vectorial en \mathbb{R}^3

En esta sección, presentaremos algunas propiedades del producto vectorial en \mathbb{R}^3 . Su utilidad se encontrará en nuestro estudio posterior de curvas y superficies.

Es conveniente empezar repasando la noción de orientación de un espacio vectorial. Dos bases ordenadas $e = \{e_i\}$ y $f = \{f_i\}$, $i = 1, \dots, n$, de un espacio vectorial n -dimensional V tienen la *misma orientación* si la matriz de cambio de base tiene determinante positivo. Denotemos esta relación por $e \sim f$. Se deduce de las propiedades elementales de los determinantes que $e \sim f$ es una relación de equivalencia; es decir, satisface

- $e \sim e$.
- Si $e \sim f$, entonces $f \sim e$.
- Si $e \sim f$, $f \sim g$, entonces $e \sim g$.

El conjunto de bases ordenadas de V se descompone así en clases de equivalencia (estando relacionados por \sim los elementos de una clase dada) que por la propiedad 3 son disjuntas. Ya que el determinante de un cambio de base es positivo o negativo, hay únicamente dos de tales clases.

Cada una de las clases de equivalencia determinadas por esta relación se denomina una *orientación* de V . Por esta razón, V admite dos orientaciones, y, si fijamos arbitrariamente una de ellas, a la otra se denomina la *orientación opuesta*.

En el caso $V = \mathbb{R}^3$, existe una base ordenada natural $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, y llamaremos a la orientación correspondiente a esta base la *orientación positiva de \mathbb{R}^3* , denominándose a la otra la *orientación negativa* (por supuesto, esto se aplica igualmente a cualquier \mathbb{R}^n). Diremos también que una base ordenada de \mathbb{R}^3 es *positiva* (*o negativa*) si pertenece a la orientación positiva (*o negativa*) de \mathbb{R}^3 . Así, la base ordenada e_1, e_3, e_2 es una base negativa, ya que la matriz que transforma esta base en e_1, e_2, e_3 tiene determinante igual a -1 .

Volvamos ahora al producto vectorial. Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$. El *producto vectorial* de u y v (en ese orden) es el único vector $u \wedge v \in \mathbb{R}^3$ caracterizado por:

$$(u \wedge v) \cdot w = \det(u, v, w) \quad \text{para todo } w \in \mathbb{R}^3.$$

Aquí $\det(u, v, w)$ significa que si expresamos u, v y w en la base natural $\{e_i\}$,

$$\begin{aligned} u &= \sum u_i e_i, & v &= \sum v_i e_i, \\ w &= \sum w_i e_i, & i &= 1, 2, 3, \end{aligned}$$

entonces:

$$\det(u, v, w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix},$$

donde $|a_{i,j}|$ designa el determinante de la matriz $(a_{i,j})$. Resulta inmediato de la definición que:

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} e_3. \quad (1)$$

Observación. Es también frecuente escribir $u \wedge v$ como $u \times v$ y denominarlo *producto cruz* (\times).

Las siguientes propiedades pueden comprobarse fácilmente (realmente sólo expresan las propiedades usuales de los determinantes):

1. $u \wedge v = -v \wedge u$ (*anticommutatividad*).
2. $u \wedge v$ es una función lineal de u y de v , separadamente; es decir, para cualesquier números reales a, b tenemos:

$$(au + bw) \wedge v = au \wedge v + bw \wedge v.$$

3. $u \wedge v = 0$ si y sólo si u y v son linealmente dependientes.

4. $(u \wedge v) \cdot u = 0$, $(u \wedge v) \cdot v = 0$.

Se deduce de la propiedad 4 que el vector producto $u \wedge v \neq 0$ es normal al plano generado por u y v . Para dar una interpretación geométrica de su norma y dirección, procederemos como sigue.

Primero, observamos que $(u \wedge v) \cdot (u \wedge v) = |u \wedge v|^2 > 0$. Esto significa que el determinante de los vectores $u, v, u \wedge v$ es positivo; es decir, $\{u, v, u \wedge v\}$ es una base positiva.

A continuación, probemos la relación:

$$(u \wedge v) \cdot (x \wedge y) = \begin{vmatrix} u \cdot x & v \cdot x \\ u \cdot y & v \cdot y \end{vmatrix},$$

donde, u, v, x, y son vectores arbitrarios. Esto puede comprobarse fácilmente observando que ambos miembros son lineales en u, v, x, y . Así, es suficiente comprobar que:

$$(e_i \wedge e_j) \cdot (e_k \wedge e_l) = \begin{vmatrix} e_i \cdot e_k & e_j \cdot e_k \\ e_i \cdot e_l & e_j \cdot e_l \end{vmatrix}$$

para todo $i, j, k, l = 1, 2, 3$. La verificación de esto es inmediata.

Se sigue que:

$$|u \wedge v|^2 = \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ u \cdot v & v \cdot v \end{vmatrix} = |u|^2 |v|^2 (1 - \cos^2 \theta) = A^2,$$

donde θ es el ángulo formado por u y v , y A es el área del paralelogramo generado por u y v .

Resumiendo, el producto vectorial de u y v es un vector $u \wedge v$ perpendicular al plano generado por u y v , de norma igual al área del paralelogramo generado por u y v , y con un sentido tal que $\{u, v, u \wedge v\}$ es una base positiva (fig. 1-13).

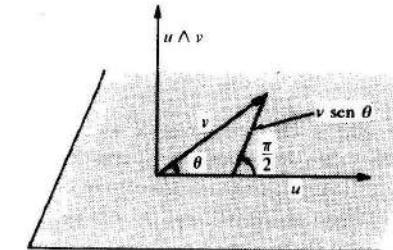


Figura 1-13

El producto vectorial no es asociativo. De hecho, se tiene la siguiente identidad:

$$(u \wedge v) \wedge w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u, \quad (2)$$

la cual puede demostrarse como sigue. Primero observamos que los dos miembros son lineales en u, v, w ; por tanto, la identidad será cierta si se satisface para todos los vectores de la base. Sin embargo, esta última verificación es directa; en efecto,

$$(e_1 \wedge e_2) \wedge e_1 = e_2 = (e_1 \cdot e_1)e_2 - (e_2 \cdot e_1)e_1.$$

Finalmente, sean $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ y $v(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))$ aplicaciones diferenciables del intervalo (a, b) en \mathbb{R}^3 , $t \in (a, b)$. Se deduce inmediatamente de la ecuación (1) que $u(t) \wedge v(t)$ también es diferenciable y que:

$$\frac{d}{dt}(u(t) \wedge v(t)) = \frac{du}{dt} \wedge v(t) + u(t) \wedge \frac{dv}{dt}.$$

Aparecen, de manera natural, productos de vectores en muchas construcciones geométricas. Realmente, la mayor parte de la geometría de planos y rectas en \mathbb{R}^3 puede expresarse completamente en términos de productos de vectores y determinantes. Repasaremos parte de esta materia en los siguientes ejercicios.

EJERCICIOS

1. Compruébese si las siguientes bases son positivas:

- a. La base $\{(1, 3), (4, 2)\}$ en \mathbb{R}^2 .
- b. La base $\{(1, 3, 5), (2, 3, 7), (4, 8, 3)\}$ en \mathbb{R}^3 .

*2. Un plano P en \mathbb{R}^3 viene dado por la ecuación $ax + by + cz + d = 0$. Demostrar que el vector $v = (a, b, c)$ es perpendicular al plano y que $|d|/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ mide la distancia del plano al origen $(0, 0, 0)$.

*3. Determinar el ángulo de intersección de los dos planos $5x + 3y + 2z - 4 = 0$ y $3x + 4y - 7z = 0$.

*4. Dados dos planos $ax + by + cz + d_i = 0$, $i = 1, 2$, probar que una condición necesaria y suficiente para que sean paralelos es

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

donde se adopta el convenio de que si un denominador es cero, el correspondiente numerador también es cero (decimos que dos planos son paralelos si o bien coinciden o bien no se cortan).

5. Demostrar que la ecuación de un plano que pasa por tres puntos no alineados $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $p_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $p_3 = (x_3, y_3, z_3)$ viene dada por:

$$(p - p_1) \wedge (p - p_2) \cdot (p - p_3) = 0,$$

donde $p = (x, y, z)$ es un punto arbitrario del plano y $p - p_1$, por ejemplo, representa al vector $(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$.

*6. Dados dos planos no paralelos $ax + by + cz + d_i = 0$, $i = 1, 2$, demostrar que su recta de intersección puede parametrizarse como:

$$x - x_0 = u_1 t, \quad y - y_0 = u_2 t, \quad z - z_0 = u_3 t,$$

donde (x_0, y_0, z_0) pertenece a la intersección y $u = (u_1, u_2, u_3)$ es el vector producto $u = a \wedge b$, $i = 1, 2$.

*7. Probar que una condición necesaria y suficiente para que el plano

$$ax + by + cz + d = 0$$

y la recta $x - x_0 = u_1 t$, $y - y_0 = u_2 t$, $z - z_0 = u_3 t$ sean paralelos es:

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = 0.$$

*8. Probar que la distancia ρ entre las dos rectas no paralelas

$$\begin{aligned} x - x_0 &= u_1 t, & y - y_0 &= u_2 t, & z - z_0 &= u_3 t, \\ x - x_1 &= v_1 t, & y - y_1 &= v_2 t, & z - z_1 &= v_3 t \end{aligned}$$

viene dada por

$$\rho = \frac{|(u \wedge v) \cdot r|}{|u \wedge v|},$$

donde $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$, $r = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$.

9. Determinar el ángulo de intersección del plano $3x + 4y + 7z + 8 = 0$ y la recta $x - 2 = 3t$, $y - 3 = 5t$, $z - 5 = 9t$.

10. La orientación natural de \mathbb{R}^2 hace posible asociar un signo al área A de un paralelogramo generado por dos vectores linealmente independientes $u, v \in \mathbb{R}^2$. Para hacerlo, sea $\{e_i\}$, $i = 1, 2$, la base natural ordenada de \mathbb{R}^2 , y escribamos $u = u_1 e_1 + u_2 e_2$ y $v = v_1 e_1 + v_2 e_2$. Obsérvese la relación matricial:

$$\begin{pmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ v \cdot u & v \cdot v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

y conclúyase que

$$A^2 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2.$$

Puesto que el último determinante tiene el mismo signo que la base $\{u, v\}$, podemos decir que A es positiva o negativa de acuerdo a si la orientación de $\{u, v\}$ es positiva o negativa. Esto es lo que se denomina *área orientada* en \mathbb{R}^2 .

11. a. Demuéstrese que el volumen V de un paralelepípedo generado por tres vectores linealmente independientes $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ viene dado por $V = |(u \wedge v) \cdot w|$, e introduzcase un *volumen orientado* en \mathbb{R}^3 .

b. Probar que

$$V^2 = \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v & u \cdot w \\ v \cdot u & v \cdot v & v \cdot w \\ w \cdot u & w \cdot v & w \cdot w \end{vmatrix}.$$

12. Dados los vectores $v \neq 0$ y w , demuéstrese que existe un vector u tal que $u \wedge v = w$ si y sólo si v es perpendicular a w . ¿Está el vector u determinado con unicidad? En caso negativo ¿cuál es la solución más general?

13. Sean $U(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ y $v(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))$ aplicaciones diferenciables del intervalo (a, b) en \mathbb{R}^3 . Si las derivadas $u'(t)$ y $v'(t)$ satisfacen las condiciones

$$u'(t) = au(t) + bv(t), \quad v'(t) = cu(t) - av(t),$$

donde a, b y c son constantes, demostrar que $u(t) \wedge v(t)$ es un vector constante.

14. Háganse todos los vectores unitarios que son perpendiculares al vector $(2, 2, 1)$ y paralelos al plano determinado por los puntos $(0, 0, 0)$, $(1, -2, 1)$, $(-1, 1, 1)$.

1.5. La teoría local de curvas parametrizadas por la longitud de arco

Esta sección contiene los principales resultados sobre curvas que serán utilizados en las últimas partes del libro.

Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud de arco s . Dado que el vector tangente $\alpha'(s)$ tiene longitud unidad, la norma $|\alpha''(s)|$ de la segunda derivada mide la tasa de cambio del ángulo que tangentes próximos forman con la tangente en s . Por esta razón, $|\alpha''(s)|$ proporciona una medida de cuán rápidamente se desvía la curva de la recta tangente en s , en un entorno de s (ver la fig. 1-14). Esto sugiere la siguiente definición.

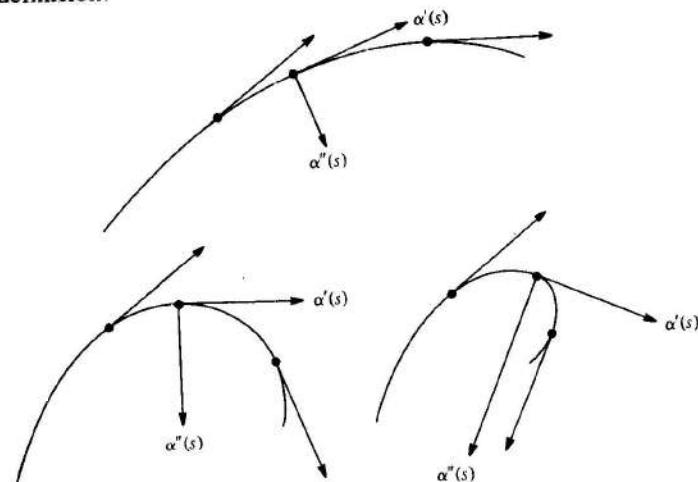


Figura 1-14

DEFINICIÓN. Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud de arco $s \in I$. El número $|\alpha''(s)| = k(s)$ se denomina la curvatura de α en s .

Si α es una recta, $\alpha(s) = us + v$, donde u y v son vectores constantes ($|u| = 1$), entonces $k \equiv 0$. Recíprocamente, si $k = |\alpha''(s)| \equiv 0$, entonces integrando se tiene

Nótese que por un cambio de orientación, el vector tangente cambia su sentido; o sea, si $\beta(-s) = \alpha(s)$, entonces

$$\frac{d\beta}{d(-s)}(-s) = -\frac{d\alpha}{ds}(s).$$

Por esta razón, $\alpha''(s)$ y la curvatura permanecen invariantes bajo cambios de orientación.

En puntos donde $k(s) \neq 0$, está bien definido un vector unitario $n(s)$ en la dirección $\alpha''(s)$ mediante la ecuación $\alpha''(s) = k(s)n(s)$. Más aún, $\alpha''(s)$ es normal a $\alpha'(s)$, pues diferenciando $\alpha'(s) \cdot \alpha'(s) = 1$ obtenemos $\alpha''(s) \cdot \alpha'(s) = 0$. Así, $n(s)$ es normal a $\alpha'(s)$ y se denomina el *vector normal* en s . El plano determinado por los vectores unitarios tangente y normal, $\alpha'(s)$ y $n(s)$, se denomina el *plano osculador* en s (ver la fig. 1-15).

En puntos donde $k(s) = 0$, el vector normal (y por tanto el plano osculador) no está definido (cf. el ejercicio 10). Para progresar en el análisis local de curvas, necesitamos, de manera esencial, el plano osculador. Es por eso conveniente decir que $s \in I$ es un *punto singular de orden 1* si $\alpha''(s) = 0$ (en este contexto, los puntos donde $\alpha'(s) = 0$ se denominan puntos singulares de orden 0).

En lo que sigue, sólo nos vamos a ocupar de curvas parametrizadas por la longitud de arco sin puntos singulares de orden 1. Denotaremos por $t(s) = \alpha'(s)$ al vector unitario tangente de α en s . Por tanto, $t'(s) = k(s)n(s)$.

El vector unitario $b(s) = t(s) \wedge n(s)$ es normal al plano osculador y lo llamaremos el *vector binormal* en s . Ya que $b(s)$ es un vector unitario, la longitud $|b'(s)|$ mide la tasa de cambio de los planos osculadores cercanos con respecto al plano osculador en s ; esto es, $b'(s)$ mide cuán rápidamente se desvía la curva del plano osculador en s , en un entorno de s (ver la fig. 1-15).

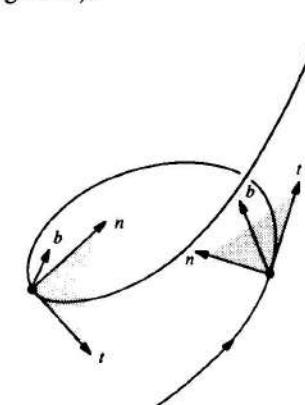


Figura 1-15

Para calcular $b'(s)$ observemos que, por una parte, $b'(s)$ es normal a $b(s)$ y que, por otra,

$$b'(s) = t'(s) \wedge n(s) + t(s) \wedge n'(s) = t(s) \wedge n'(s);$$

o sea, $b'(s)$ es normal a $t(s)$. Se sigue entonces que $b'(s)$ es paralelo a $n(s)$, y podemos escribir

$$b'(s) = \tau(s)n(s)$$

para alguna función $\tau(s)$.

Advertencia: Muchos autores escriben $-\tau(s)$ en vez de $\tau(s)$.

DEFINICION. Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud de arco s tal que $\alpha'(s) \neq 0$, $s \in I$. El número $\tau(s)$ definido por $b'(s) = \tau(s)n(s)$ se denomina la torsión de α en s .

Si α es una curva plana (esto es, $\alpha(I)$ está contenido en un plano), entonces el plano de la curva coincide con el plano osculador; de donde, $\tau = 0$. Recíprocamente, si $\tau = 0$ (y $k \neq 0$), tenemos que $b(s) = b_0 = \text{constante}$, y por tanto

$$(\alpha(s) \cdot b_0)' = \alpha'(s) \cdot b_0 = 0.$$

Se sigue que $\alpha(s) \cdot b_0 = \text{constante}$; de aquí, $\alpha(s)$ está contenida en un plano normal a b_0 . La condición $k \neq 0$ en todos los puntos es aquí esencial. En el ejercicio 10 daremos un ejemplo donde puede conseguirse que $\tau = 0$ y que, sin embargo, la curva no sea una curva plana.

En contraste con la curvatura, la torsión puede ser positiva o negativa. El signo de la torsión admite una interpretación geométrica, a ser expuesta más adelante (sec. 1.6).

Nótese que cambiando la orientación el vector binormal cambia de signo, ya que $b = t \wedge n$. Se sigue que $b'(s)$ y, por tanto, la torsión permanecen invariantes bajo un cambio de orientación.

Resumamos nuestra situación. A cada valor del parámetro s , hemos asociado tres vectores unitarios ortogonales $t(s)$, $n(s)$, $b(s)$. Nos referiremos al triángulo así formado como *triángulo de Frenet* en s . Las derivadas $t'(s) = kn$, $b'(s) = \tau n$ de los vectores $t(s)$ y $b(s)$, cuando se expresan en la base $\{t, n, b\}$, generan entidades geométricas (la curvatura k y la torsión τ) que nos proporcionan información sobre el comportamiento de α en un entorno de s .

La búsqueda de otras entidades geométricas locales nos llevaría a calcular $n'(s)$. Sin embargo, como $n = b \wedge t$, tenemos

$$n'(s) = b'(s) \wedge t(s) + b(s) \wedge t'(s) = -\tau b - kt,$$

y obtenemos de nuevo la curvatura y la torsión.

Para uso posterior, llamaremos a las ecuaciones

$$t' = kn,$$

$$n' = -kt - \tau b,$$

$$b' = \tau n$$

las fórmulas de Frenet (hemos suprimido s , por conveniencia). En este contexto, es usual la siguiente terminología. El plano tb es denominado *plano rectificante*, y *plano normal* el plano nb . Las rectas que pasan por $\alpha(s)$ que contienen a $n(s)$ y $b(s)$ se llaman *normal principal* y *binormal*, respectivamente. El inverso de la curvatura $R = 1/k$ se llama *radio de curvatura* en s . Por supuesto, un círculo de radio r tiene radio de curvatura igual a r , como puede verificarse fácilmente.

Físicamente, podemos imaginarnos una curva en \mathbb{R}^3 como el resultado de someter una recta a combamiento (curvatura) y atornillamiento (torsión). Tras reflexionar en esta construcción, nos vemos abocados a conjeturar el siguiente resultado, el cual, en líneas generales, establece que k y τ describen completamente el comportamiento local de la curva.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA TEORÍA LOCAL DE CURVAS. Dadas las funciones diferenciables $k(s) > 0$ y $\tau(s)$, $s \in I$, existe una curva parametrizada regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que s es la longitud de arco, $k(s)$ es la curvatura, y $\tau(s)$ es la torsión de α . Además, cualquier otra curva $\tilde{\alpha}$, satisfaciendo las mismas condiciones difiere de α en un movimiento rígido; esto es, existe una aplicación lineal ortogonal φ de \mathbb{R}^3 , con determinante positivo, y un vector c tal que $\tilde{\alpha} = \varphi + c$.

El enunciado de arriba es cierto. Una demostración completa involucra el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias y será expuesta en el apéndice al capítulo 4. Una demostración de la unicidad —salvo un movimiento— de curvas que tienen los mismos s , $k(s)$ y $\tau(s)$ es, sin embargo, simple y puede desarrollarse ahora.

Demostración de la parte de unicidad del teorema fundamental. Primero observemos que la longitud de arco, curvatura y torsión son invariantes bajo movimientos rígidos; eso significa que, por ejemplo, si $M: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un movimiento rígido y $\alpha = \alpha(t)$ es una curva parametrizada, entonces

$$\int_a^b \left| \frac{d\alpha}{dt} \right| dt = \int_a^b \left| \frac{d(M \circ \alpha)}{dt} \right| dt.$$

Eso es plausible, puesto que estos conceptos se definen por medio de productos interiores o vectoriales de ciertas derivadas (las derivadas son invariantes bajo traslaciones y los productos interior y vectorial se expresan por medio de longitudes y ángulos entre vectores, así también son invariantes bajo movimientos rígidos). Una comprobación cuidadosa puede dejarse como ejercicio (ver el Ejercicio 6).

Ahora, supongamos que dos curvas $\alpha = \alpha(s)$ y $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(s)$ satisfacen las condiciones $k(s) = \tilde{k}(s)$ y $\tau(s) = \tilde{\tau}(s)$, $s \in I$. Sean t_0, n_0, b_0 y $\tilde{t}_0, \tilde{n}_0, \tilde{b}_0$ los triángulos de Frenet en $s = s_0 \in I$ de α y $\tilde{\alpha}$, respectivamente. Claramente, existe un movimiento rígido que lleva $\tilde{\alpha}(s_0)$ en $\alpha(s_0)$ y $\tilde{t}_0, \tilde{n}_0, \tilde{b}_0$ en t_0, n_0, b_0 . Así, tras efectuar este movimiento rígido

sobre $\bar{\alpha}$, tenemos que $\bar{\alpha}(s_0) = \alpha(s_0)$ y que los triedros de Frenet $t(s)$, $n(s)$, $b(s)$ y $\bar{t}(s)$, $\bar{n}(s)$, $\bar{b}(s)$ de α y $\bar{\alpha}$, respectivamente, satisfacen las ecuaciones de Frenet

$$\begin{aligned}\frac{dt}{ds} &= kn & \frac{d\bar{t}}{ds} &= k\bar{n} \\ \frac{dn}{ds} &= -kt - \tau b & \frac{d\bar{n}}{ds} &= -k\bar{t} - \tau b \\ \frac{db}{ds} &= \tau n & \frac{d\bar{b}}{ds} &= \tau\bar{n},\end{aligned}$$

con $t(s_0) = \bar{t}(s_0)$, $n(s_0) = \bar{n}(s_0)$, $b(s_0) = \bar{b}(s_0)$.

Ahora observamos, usando las ecuaciones de Frenet, que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \{ |t - \bar{t}|^2 + |n - \bar{n}|^2 + |b - \bar{b}|^2 \} \\ &= \langle t - \bar{t}, t' - \bar{t}' \rangle + \langle b - \bar{b}, b' - \bar{b}' \rangle + \langle n - \bar{n}, n' - \bar{n}' \rangle \\ &= k \langle t - \bar{t}, n - \bar{n} \rangle + \tau \langle b - \bar{b}, n - \bar{n} \rangle - k \langle n - \bar{n}, t - \bar{t} \rangle - \tau \langle n - \bar{n}, b - \bar{b} \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

para todo $s \in I$. Por tanto, la expresión de arriba es constante, y, puesto que es cero para $s = s_0$, es idénticamente cero. Se sigue que $t(s) = \bar{t}(s)$, $n(s) = \bar{n}(s)$, $b(s) = \bar{b}(s)$ para todo $s \in I$. Ya que

$$\frac{d\alpha}{ds} = t = \bar{t} = \frac{d\bar{\alpha}}{ds},$$

obtenemos $(d/ds)(\alpha - \bar{\alpha}) = 0$. Así, $\alpha(s) = \bar{\alpha}(s) + a$, donde a es un vector constante. Como $\alpha(s_0) = \bar{\alpha}(s_0)$, tenemos $a = 0$; de aquí, $\alpha(s) = \bar{\alpha}(s)$ para todo $s \in I$.

Q.E.D.*

Observación 1. En el caso particular de una curva plana $\alpha: I \rightarrow R^2$, es posible dotar de un signo a la curvatura k . Para ello, sea $\{e_1, e_2\}$ la base natural (ver la sec. 1.4) de R^2 y defínase el vector normal $n(s)$, $s \in I$, bajo el requisito de que la base $\{t(s), n(s)\}$ tenga la misma orientación que la base $\{e_1, e_2\}$. La curvatura k está *definida* entonces por

$$\frac{dt}{ds} = kn$$

y podría ser positiva o negativa. Es claro que $|k|$ coincide con la definición previa y que k cambia de signo cuando, o cambiamos la orientación de α , o cambiamos la orientación de R^2 (fig. 1-16).

* Se usarán estas siglas a lo largo del libro para señalar que ha concluido una demostración. Son la

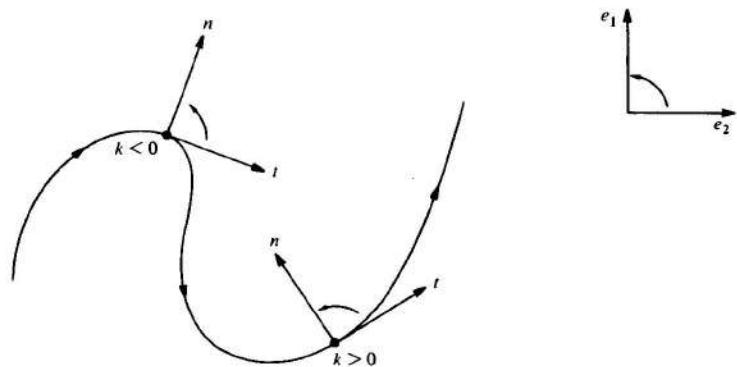


Figura 1-16

Debería subrayarse que, en el caso de curvas planas ($\tau \equiv 0$), la demostración del teorema fundamental, referida arriba, es realmente muy simple (ver el ejercicio 9).

Observación 2. Dada una curva parametrizada regular $\alpha: I \rightarrow R^3$ (no necesariamente parametrizada por la longitud de arco), es posible obtener una curva $\beta: J \rightarrow R^3$ parametrizada por la longitud de arco que tiene la misma traza que α . En efecto, sea

$$s = s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt, \quad t, t_0 \in I.$$

Ya que $ds/dt = |\alpha'(t)| \neq 0$, la función $s = s(t)$ admite una inversa diferenciable $t = t(s)$, $s \in s(I) = J$, donde, por abuso de notación, t también designa la función inversa s^{-1} de s . Sea ahora $\beta = \alpha \circ t: J \rightarrow R^3$. Claramente, $\beta(J) = \alpha(I)$ y $|\beta'(s)| = |\alpha'(t) \cdot (dt/ds)| = 1$. Esto prueba que β tiene la misma traza que α y está parametrizada por la longitud de arco. Es usual decir que β es una *reparametrización de α por la longitud de arco*.

Este hecho nos permite extender todos los conceptos locales definidos previamente a curvas regulares con un parámetro arbitrario. De esta forma, decimos que la curvatura $k(t)$ de $\alpha: I \rightarrow R^3$ en $t \in I$ es la curvatura de una reparametrización $\alpha: J \rightarrow R^3$ de $\alpha(I)$ por la longitud de arco correspondiente al punto $s = s(t)$. Esto es claramente independiente de la elección de β y muestra que la restricción, hecha al final de la sec. 1.3, de considerar únicamente curvas parametrizadas por la longitud de arco no es esencial.

En las aplicaciones, con frecuencia es conveniente disponer de fórmulas explícitas para las entidades geométricas en términos de un parámetro arbitrario; presentaremos unas cuantas en el ejercicio 12.

EJERCICIOS

Salvo que se establezca explícitamente otra cosa, $\alpha: I \rightarrow R^3$ es una curva parametrizada por la longitud de arco si de curvatura $k(s) \neq 0$ para todo $s \in I$.

1. Dada la curva parametrizada (hélice)

$$\alpha(s) = \left(a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, b \frac{s}{c} \right), \quad s \in \mathbb{R},$$

donde $c^2 = a^2 + b^2$.

- a. Demostrar que el parámetro s es la longitud de arco.
- b. Determinar la curvatura y torsión de α .
- c. Determinar el plano osculador de α .
- d. Demostrar que las rectas que contienen a $n(s)$ y pasan por $\alpha(s)$ cortan al eje z bajo un ángulo constante igual a $\pi/2$.
- e. Demostrar que las rectas tangentes a α forman un ángulo constante con el eje z .

*2. Demostrar que la torsión τ de α viene dada por

$$\tau(s) = -\frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s) \cdot \alpha'''(s)}{|k(s)|^2}.$$

3. Supóngase que $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^2$ (es decir, α es una curva plana) y dótense de signo a k como en el texto. Transpórtense los vectores $t(s)$ paralelamente a sí mismos de forma que los orígenes de $t(s)$ coincidan con el origen de \mathbb{R}^2 ; los extremos de $t(s)$ describen entonces una curva parametrizada $s \rightarrow t(s)$ denominada la *indicatriz de tangentes* de α . Sea $\theta(s)$ el ángulo de e_1 a $t(s)$ en la orientación de \mathbb{R}^2 . Demostrar (a) y (b); nótese que estamos admitiendo que $k \neq 0$.

- a. La indicatriz de tangentes es una curva parametrizada regular.
- b. $dt/ds = (d\theta/ds)n$, o sea, $k = d\theta/ds$.

- *4. Supóngase que todas las normales de una curva parametrizada pasan por un punto fijo. Probar que la traza de la curva está contenida en un círculo.

5. Una curva parametrizada regular α tiene la propiedad de que todas sus rectas tangentes pasan por un punto fijo.

- a. Probar que la traza de α es (un segmento de) una recta.
- b. ¿Se satisface todavía la conclusión de a si α no es regular?

6. Una *traslación* por un vector v en \mathbb{R}^3 es la aplicación $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que viene dada por $A(p) = p + v$, $p \in \mathbb{R}^3$. Una aplicación lineal $\varrho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una *transformación ortogonal* cuando $\varrho u \cdot \varrho v = u \cdot v$ para todos los vectores $u, v \in \mathbb{R}^3$. Un *movimiento rígido* en \mathbb{R}^3 es el resultado de componer una traslación y una transformación ortogonal con determinante positivo (se incluye esta última condición porque se espera de los movimientos rígidos que preserven la orientación).

- a. Demostrar que la norma de un vector y el ángulo θ entre dos vectores, $0 \leq \theta \leq \pi$, son invariantes frente a transformaciones ortogonales con determinante positivo.
- b. Demostrar que el producto vectorial de dos vectores es invariante frente a transformaciones ortogonales con determinante positivo. ¿Es cierta aún la afirmación si suprimimos la condición determinante positivo?
- c. Demuéstrese que la longitud de arco, la curvatura y la torsión de una curva parametrizada (siempre que estén definidos) son invariantes frente a movimientos rígidos.

- *7. Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada regular plana (de parámetro arbitrario) y definamos $n = n(t)$ y $k = k(t)$ como en la observación 1. Supóngase que $k(t) \neq 0$, $t \in I$. En esta situación, la curva

$$\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)}n(t), \quad t \in I,$$

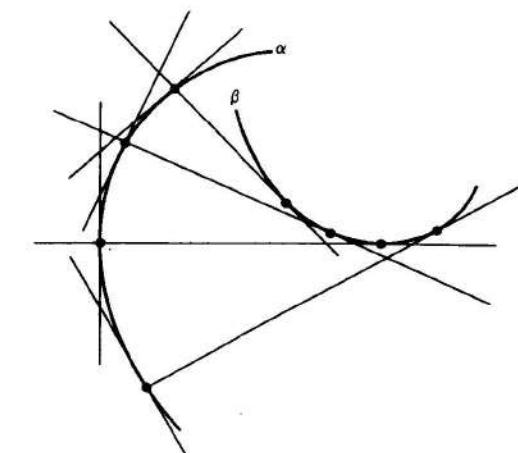


Figura 1-17

- a. Demuéstrese que la tangente en t a la evoluta de α es la normal a α en t .
- b. Considérense las rectas normales a α en dos puntos próximos t_1, t_2 , $t_1 \neq t_2$. Aproxímese t_1 a t_2 y demuéstrese que el punto de intersección de las normales converge a un punto de la traza de la evoluta de α .

8. La traza de la curva parametrizada (de parámetro arbitrario)

$$\alpha(t) = (t, \cosh t), \quad t \in \mathbb{R},$$

se denomina la *catenaria*.

- a. Demostrar que la curvatura con signo (cf. la observación 1) de la catenaria es

$$k(t) = \frac{1}{\cosh^2 t}.$$

- b. Demostrar que la evoluta (cf. el ejercicio 7) de la catenaria es

$$\beta(t) = (t - \operatorname{senh} t \cosh t, 2 \cosh t).$$

9. Dada una función diferencialbe $k(s)$, $s \in I$, demuéstrese que la curva plana parametrizada que tiene a $k = k(s)$ como curvatura está definida por:

$$\alpha(s) = \left(\int \cos \theta(s) ds + a, \int \sin \theta(s) ds + b \right),$$

donde

$$\theta(s) = \int k(s) ds + \varphi,$$

estableciendo que ésta queda determinada salvo una traslación del vector (a, b) y una

10. Considérese la aplicación

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-1/t}), & t > 0 \\ (t, e^{-1/t}, 0), & t < 0 \\ (0, 0, 0), & t = 0 \end{cases}$$

- a. Probar que α es una curva diferenciable.
- b. Probar que α es regular para todo t y que la curvatura $k(t) \neq 0$, para $t \neq 0, t \neq \pm\sqrt{2/3}$, y $k(0) = 0$.
- c. Probar que el límite de los planos osculadores cuando $t \rightarrow 0, t > 0$, es el plano $y = 0$ pero que dicho límite es el plano $z = 0$ cuando $t \rightarrow 0, t < 0$; esto implica que el vector normal es discontinuo en $t = 0$, mostrando por qué excluimos los puntos donde $k = 0$.
- d. Demostrar que τ puede definirse de suerte que $\tau = 0$, aun no siendo α una curva plana.

11. Es frecuente expresar una curva plana en coordenadas polares mediante $\rho = \rho(\theta)$, $a \leq \theta \leq b$.

a. Demostrar que la longitud de arco es

$$\int_a^b \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\theta,$$

donde la prima denota la derivada con respecto a θ .

b. Demostrar que la curvatura es

$$k(\theta) = \frac{2(\rho')^2 - \rho\rho'' + \rho^2}{((\rho')^2 + \rho^2)^{3/2}}.$$

12. Sea $\alpha: I \rightarrow R^3$ una curva parametrizada regular (no necesariamente por la longitud de arco) y sea $\beta: J \rightarrow R^3$ una reparametrización de $\alpha(I)$ por la longitud de arco $s = s(t)$, medida desde $t_0 \in I$ (ver la observación 2). Sea $t = t(s)$ la función inversa de s y defínase $d\alpha/dt = \alpha'$, $d^2\alpha/dt^2 = \alpha''$, etc. Demostrar las siguientes afirmaciones.

- a. $dt/ds = 1/|\alpha'|$, $d^2t/ds^2 = -(\alpha' \cdot \alpha'')/|\alpha'|^4$.
- b. La curvatura de α en $t \in I$ es

$$k(t) = \frac{|\alpha' \wedge \alpha''|}{|\alpha'|^3}.$$

c. La torsión de α en $t \in I$ es

$$\tau(t) = -\frac{(\alpha' \wedge \alpha'') \cdot \alpha'''}{|\alpha' \wedge \alpha''|^2}.$$

d. Si $\alpha: I \rightarrow R^2$ es una curva plana $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, la curvatura con signo (ver la observación 1) de α en t es

$$\nu_{xx} = \frac{x'y'' - x''y'}{x'^2 + y'^2}.$$

*13. Supóngase que $\tau(s) \neq 0$ y que $k'(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que $\alpha(I)$ se encuentre sobre una esfera es que:

$$R^2 + (R')^2 T^2 = \text{constante},$$

donde $R = 1/k$, $T = 1/\tau$, y R' es la derivada de R con respecto a s .

14. Sea $\alpha: (a, b) \rightarrow R^2$ una curva parametrizada regular y plana. Supóngase que existe t_0 , $a < t_0 < b$, tal que la distancia $|\alpha(t)|$ del origen a la traza de α tenga un máximo en t_0 . Establecer que la curvatura k de α en t_0 satisface $|k(t_0)| \geq 1/|\alpha(t_0)|$.

15. Demuéstrese que el conocimiento de la función vectorial $b = b(s)$, el vector binormal, de una curva α , cuya torsión nunca es nula, determina la curvatura $k(s)$ y el valor absoluto de la torsión $\tau(s)$ de α .

16. Demostrar que el conocimiento de la función vectorial $n = n(s)$, el vector normal, de una curva α , cuya torsión nunca es nula, determina la curvatura $k(s)$ y la torsión $\tau(s)$ de α .

17. En general, se dice que una curva α es una hélice si las rectas tangentes a α forman un ángulo constante con una dirección fija. Admitiendo que $\tau(s) \neq 0$ para $s \in I$, pruébese que:

*a. α es una hélice si y sólo si $k/\tau = \text{constante}$.

*b. α es una hélice si y sólo si las rectas que contienen a $n(s)$ y pasan por $\alpha(s)$ son paralelas a un plano fijo.

*c. α es una hélice si y sólo si las rectas que contienen a $b(s)$ y pasan por $\alpha(s)$ forman un ángulo constante con una dirección fija.

d. La curva

$$\alpha(s) = \left(\frac{a}{c} \int \sin \theta(s) ds, \frac{a}{c} \int \cos \theta(s) ds, \frac{b}{c} s \right),$$

donde $c^2 = a^2 + b^2$, es una hélice y $k/\tau = a/b$.

*18. Sea $\alpha: I \rightarrow R^3$ una curva parametrizada regular (no necesariamente por la longitud de arco) con $k(t) \neq 0$, $\tau(t) \neq 0$, $t \in I$. Se dice que α es una curva de Bertrand si existe una curva $\tilde{\alpha}: I \rightarrow R^3$ de forma que las normales de α y $\tilde{\alpha}$ en $t \in I$ son iguales. En este caso, se dice que $\tilde{\alpha}$ es una representación de Bertrand de α , y podemos escribir

$$\tilde{\alpha}(t) = \alpha(t) + rn(t).$$

Probar que:

a. r es constante.

b. α es una curva de Bertrand si y solamente si existe una relación lineal:

$$Ak(t) + B\tau(t) = 1, \quad t \in I,$$

donde A, B son constantes no nulas y k y τ son, respectivamente, la curvatura y la torsión de α .

c. Si α admite más de una representación de Bertrand, entonces tiene infinitas representaciones de Bertrand. Ocurre este caso si y solamente si α es una hélice circular.

Uno de los métodos más efectivos para resolver problemas en geometría consiste en hallar un sistema de coordenadas que se adapte al problema considerado. Para el estudio de propiedades locales de una curva, en el entorno de un punto s , disponemos de un sistema natural de coordenadas, a saber, el triángulo de Frenet en s . Por eso es conveniente referir la curva a este triángulo.

Sea $\alpha: I \rightarrow R^3$ una curva parametrizada por la longitud de arco, sin puntos singulares de orden 1. Vamos a escribir las ecuaciones de la curva, en un entorno de s_0 , usando el triángulo $t(s_0)$, $n(s_0)$, $b(s_0)$ como base para R^3 . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $s_0 = 0$, y consideraremos el desarrollo (finito) de Taylor

$$\alpha(s) = \alpha(0) + s\alpha'(0) + \frac{s^2}{2}\alpha''(0) + \frac{s^3}{6}\alpha'''(0) + R,$$

donde $\lim_{s \rightarrow 0} R/s^3 = 0$. Ya que $\alpha'(0) = t$, $\alpha''(0) = kn$, y

$$\alpha'''(0) = (kn)' = k'n + kn' = k'n - k^2t - k\tau b,$$

obtenemos

$$\alpha(s) - \alpha(0) = \left(s - \frac{k^2s^3}{3!}\right)t + \left(\frac{s^2k}{2} + \frac{s^3k'}{3!}\right)n - \frac{s^3}{3!}k\tau b + R,$$

en donde todos los términos se han evaluado en $s = 0$.

Tomemos ahora el sistema $Oxyz$ de forma que el origen O coincida con $\alpha(0)$ y que $t = (1, 0, 0)$, $n = (0, 1, 0)$, $b = (0, 0, 1)$. Bajo estas condiciones, $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ viene dada por

$$\begin{aligned} x(s) &= s - \frac{k^2s^3}{6} + R_x, \\ y(s) &= \frac{k}{2}s^2 + \frac{k'}{6}s^3 + R_y, \\ z(s) &= -\frac{k\tau}{6}s^3 + R_z, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $R = (R_x, R_y, R_z)$. Se conoce a la representación (1) como la *forma canónica local* de α , en un entorno de $s = 0$. La fig. 1-18 muestra a grandes rasgos las proyecciones de la traza de α , para s pequeño, sobre los planos tn , tb y nb .

A continuación vamos a describir algunas aplicaciones geométricas de la forma canónica local. Se encontrarán más aplicaciones en los ejercicios.

² Esta sección puede omitirse en una primera lectura.

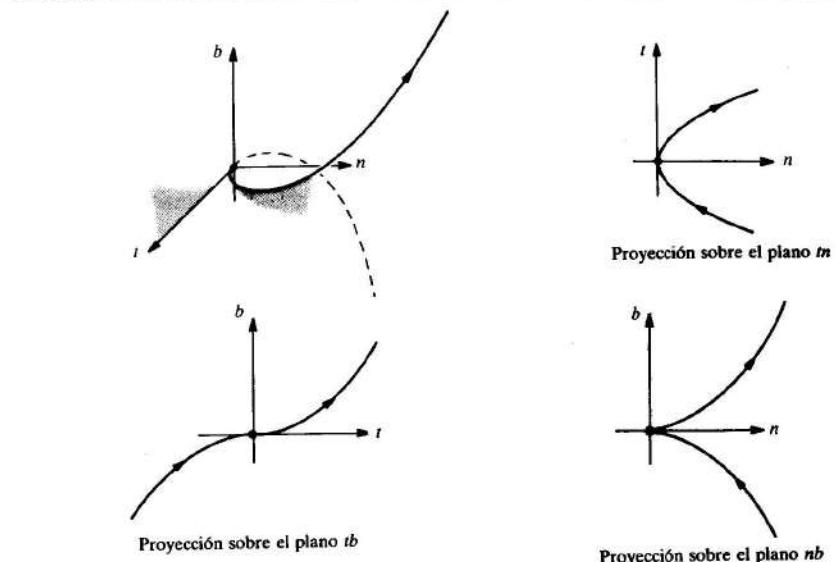


Figura 1-18

Una primera aplicación es la siguiente interpretación del signo de la torsión. De la tercera ecuación en (1) se sigue que si $\tau < 0$ y s es suficientemente pequeño, entonces $z(s)$ crece con s . Adoptemos el convenio de llamar «lado positivo» del plano osculador a aquel hacia el que apunta b . Entonces, como $z(0) = 0$, cuando describimos la curva en sentido creciente de la longitud de arco, la curva cruzará el plano osculador en $s = 0$, apuntando hacia el lado positivo (véase la fig. 1-19). Si, por el contrario, $\tau > 0$, la curva (recorrida en sentido creciente de la longitud de arco) cruzará el plano osculador apuntando hacia el lado opuesto del positivo.



Figura 1-19

La hélice del ejercicio 1 de la sec. 1-5 tiene torsión negativa. Un ejemplo de curva con torsión positiva lo proporciona la hélice

$$\alpha(s) = \left(a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, -b \frac{s}{c}\right)$$

deducida de la primera por reflexión con respecto al plano xz (véase la fig. 1-19).

Observación. Es también frecuente definir la torsión mediante $b' = -\tau n$. Con tal definición, la torsión de la hélice en el ejercicio 1 se vuelve positiva.

Otra consecuencia de la forma canónica es la existencia de un entorno $J \subset I$ de $s = 0$ tal que $\alpha(J)$ está enteramente contenido en aquel lado del plano rectificante hacia el que apunta n (ver la fig. 1-18). De hecho, como $k > 0$, obtenemos, para s suficientemente pequeño, $y(s) \geq 0$, siendo $y(0) = 0$ solamente cuando $s = 0$. Esto prueba nuestra afirmación.

Como última aplicación de la forma canónica, mencionamos la siguiente propiedad del plano osculador. El plano osculador en s adopta la posición límite del plano determinado por la tangente en s y el punto $\alpha(s+h)$ cuando $h \rightarrow 0$. Para demostrarlo, supongamos que $s = 0$. Entonces, cada plano que contiene la tangente en $s = 0$ es de la forma $z = cy$ o $y = 0$. El plano $y = 0$ es el plano rectificante, el cual, según vimos arriba, no contiene puntos cercanos a $\alpha(0)$, excepto el $\alpha(0)$ mismo, y puede descartarse de nuestras consideraciones. La condición para que el plano $z = cy$ pase por $\alpha(s+h)$ es ($s = 0$)

$$c = \frac{z(h)}{y(h)} = \frac{-\frac{k}{6}\tau h^3 + \dots}{\frac{k}{2}h^2 + \frac{k^2}{6}h^3 + \dots}.$$

Haciendo $h \rightarrow 0$, vemos que $c \rightarrow 0$. Por lo tanto, la posición límite del plano $z(s) = c(h)y(s)$ es el plano $z = 0$, o sea, el plano osculador, como queríamos demostrar.

EJERCICIOS

*1. Sea $\alpha: I \rightarrow R^3$ una curva parametrizada por la longitud de arco, de curvatura $k(s) \neq 0, s \in I$. Sea P un plano que satisface las siguientes condiciones:

1. P contiene a la recta tangente en s .
2. Dado cualquier entorno $J \subset I$ de s , existen puntos de $\alpha(J)$ en ambos lados de P .

Pruébese que P es el plano osculador de α en s .

2. Sea $\alpha: I \rightarrow R^3$ una curva parametrizada por la longitud de arco, de curvatura $k(s) \neq 0, s \in I$. Demuéstrese que

- *a. El plano osculador en s adopta la posición límite de los planos que pasan por $\alpha(s)$, $\alpha(s+h_1)$, $\alpha(s+h_2)$ cuando $h_1, h_2 \rightarrow 0$.
- b. La posición límite de los círculos que pasan por $\alpha(s)$, $\alpha(s+h_1)$, $\alpha(s+h_2)$ cuando $h_1, h_2 \rightarrow 0$ es un círculo del plano osculador en s , cuyo centro está en la recta que contiene a $n(s)$, siendo su radio el radio de curvatura $1/k(s)$; este círculo se denomina el *círculo osculador* en s .

3. Pruébese que la curvatura $k(t) \neq 0$ de una curva parametrizada regular $\alpha: I \rightarrow R^3$ es la curvatura en t de la curva plana $\pi \circ \alpha$, siendo π la proyección ortogonal de α sobre el plano osculador en t .

1.7. Propiedades globales de las curvas planas³

Queremos describir en esta sección algunos resultados que pertenecen a la geometría diferencial global de curvas. Incluso en el caso simple de las curvas planas, el tema ya ofrece ejemplos de teoremas nada triviales e interesantes cuestiones. Para desarrollar aquí esta materia, hemos de admitir sin demostración algunos hechos razonables; trataremos de ser cuidadosos a efectos de establecer estos hechos con precisión. Aunque pretendemos retornar más adelante, de una manera más sistemática, a la geometría diferencial global (cap. 5), pensamos que es instructiva y estimulante esta presentación primera del tema.

La sección contiene tres temas en orden creciente de dificultad: (A) la desigualdad isoperimétrica, (B) el teorema de los cuatro vértices y (C) la fórmula de Cauchy-Crofton. Los temas son totalmente independientes y puede omitirse, en una primera lectura, o la totalidad de los mismos.

Una función diferenciable sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ es la restricción de una función diferenciable definida sobre un intervalo abierto que contiene a $[a, b]$.

Una curva plana cerrada es una curva parametrizada regular $\alpha: [a, b] \rightarrow R^2$ tal que α y todas sus derivadas coinciden en a y en b ; es decir,

$$\alpha(a) = \alpha(b), \quad \alpha'(a) = \alpha'(b), \quad \alpha''(a) = \alpha''(b), \dots$$

La curva es *simple* si carece de otras autointersecciones; o sea, si $t_1, t_2 \in [a, b], t_1 \neq t_2$, entonces $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ (fig. 1-20).

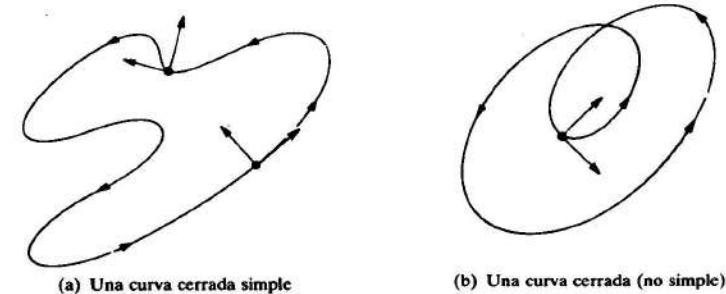


Figura 1-20

Usualmente consideraremos a la curva $\alpha: [0, l] \rightarrow R^2$ parametrizada por la longitud de arco s , así, l es la longitud de α . Algunas veces nos referiremos a una curva cerrada simple C , identificando este objeto con su traza. La curvatura de α se tomará con signo, como en la observación 1 de la sec. 1.5 (véase la fig. 1-20).

³ Esta sección puede omitirse en una primera lectura.

Admitiremos que *una curva cerrada simple C en el plano delimita a una región de este plano* que se denominará el *interior* de C. Esto es parte del resultado conocido como el teorema de la curva de Jordan (se dará una demostración en la sec. 5.7, teorema 1), que no se cumple, por ejemplo, en el caso de curvas simples en el toro (la superficie de una rosquilla; véase la fig. 1-21 (a)). Cuando quiera que hablemos del área encerrada por una curva cerrada simple C, nos referiremos al área del interior de C. Admitiremos además que puede elegirse el parámetro de una curva cerrada simple de suerte que si se recorre ésta en el sentido creciente de los parámetros, entonces dejamos a la izquierda el interior de la misma (fig. 1-21(b)). Diremos de tal curva que está *orientada positivamente*.

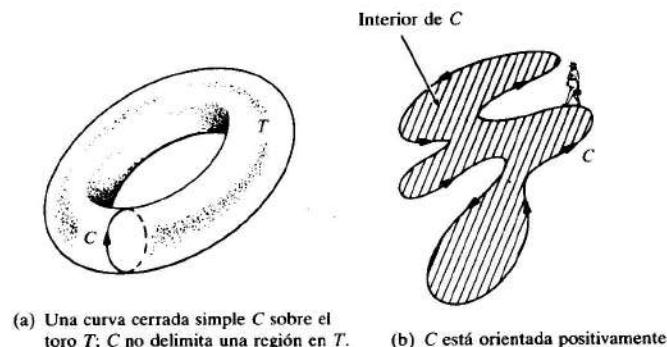


Figura 1-21

A. La desigualdad isoperimétrica

Quizás sea éste el teorema de tipo global más antiguo de la geometría diferencial, estando relacionado con el siguiente problema (isoperimétrico). *De todas las curvas cerradas simples en el plano con longitud dada l, ¿cuál es la que encierra un área máxima?* Bajo esta forma, el problema era ya conocido por los griegos quienes también conocían la solución, a saber, el círculo. Una demostración satisfactoria del hecho de que el círculo es una solución del problema isoperimétrico tardó, no obstante, mucho tiempo en aparecer. La principal razón parece ser que las demostraciones primeras admitían que debía existir una solución. No fue hasta 1870 que K. Weierstrass señaló que cuestiones muy similares no admitían soluciones y dio una demostración completa de la existencia de una solución al problema isoperimétrico. La demostración de Weierstrass era un tanto dura, en el sentido que era un corolario de la teoría por él creada para el tratamiento de problemas de maximizar (o minimizar) ciertas integrales (esta teoría se denomina cálculo de variaciones siendo el problema isoperimétrico un ejemplo típico de los problemas de los que se ocupa). Posteriormente, se encontraron demostraciones más directas. La demostración simple que presentaremos debe a E. Schmidt (1939). Para otra demostración directa y más bibliografía sobre el tema, puede consultarse la referencia [10] en la bibliografía.

Vamos a hacer uso de la siguiente fórmula del área A encerrada por una curva cerrada simple, orientada positivamente, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, donde $t \in [a, b]$ es un parámetro arbitrario:

$$A = - \int_a^b y(t)x'(t) dt = \int_a^b x(t)y'(t) dt = \frac{1}{2} \int_a^b (xy' - yx') dt \quad (1)$$

Nótese que la segunda fórmula se obtiene de la primera observando que

$$\begin{aligned} \int_a^b xy' dt &= \int_a^b (xy)' dt - \int_a^b x'y dt = [xy(b) - xy(a)] - \int_a^b x'y dt \\ &= \int_a^b x'y dt, \end{aligned}$$

ya que la curva es cerrada. La tercera fórmula es inmediata a partir de las otras dos.

Para probar la primera fórmula de la ecuación (1), consideremos inicialmente el caso de la fig. 1-22, donde la curva se compone de dos segmentos rectos paralelos al eje y, y dos arcos que pueden escribirse en la forma

$$y = f_1(x) \quad \text{e} \quad y = f_2(x), \quad x \in [x_0, x_1], \quad f_1 > f_2.$$

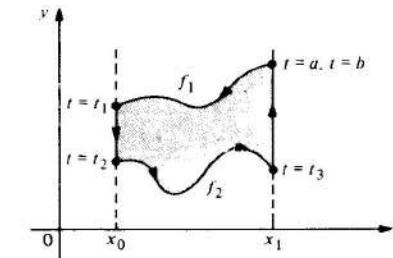


Figura 1-22

Claramente, el área delimitada por la curva es

$$A = \int_{x_0}^{x_1} f_1(x) dx - \int_{x_0}^{x_1} f_2(x) dx.$$

Como la curva está orientada positivamente, obtenemos, con la notación de la figura 1-22,

$$A = - \int_a^b y(t)x'(t) dt - \int_{t_2}^{t_3} y(t)x'(t) dt = - \int_a^b y(t)x'(t) dt,$$

ya que $x'(t) = 0$ a lo largo de los segmentos paralelos al eje y. Esto prueba la ecuación (1) en este caso.

Para probar el caso general, debe demostrarse que es posible dividir la región delimitada por la curva en un número finito de regiones del tipo de la de arriba. Esto

es claramente posible (fig. 1-23) si existe una recta E en el plano tal que la distancia $\rho(t)$ de $\alpha(t)$ a esta recta es una función con un número finito de puntos críticos (un punto crítico es aquel donde $\rho'(t) = 0$). La última afirmación es cierta, pero no vamos a entrar en su demostración. Mencionaremos, sin embargo, que la ecuación (1) puede obtenerse por medio del teorema de Stokes (de Green) en el plano (véase el ejercicio 15).

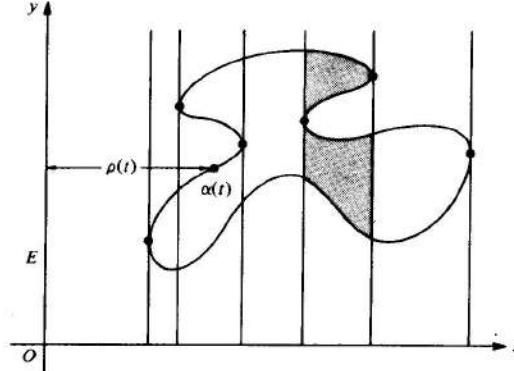


Figura 1-23

TEOREMA 1 (La desigualdad isoperimétrica). Sea C una curva cerrada, simple y plana de longitud l , y sea A el área de la región encerrada por C . Entonces

$$l^2 - 4\pi A \geq 0, \quad (2)$$

y la igualdad se da si y solamente si C es un círculo.

Demostración. Sean E y E' dos rectas paralelas que no cortan a la curva cerrada C y despláceselas hasta que corten a C por primera vez. Obtenemos así dos tangentes paralelas a C , L y L' , de forma que la curva está enteramente contenida en la banda delimitada por L y L' . Considérese un círculo S^1 que es tangente a L y L' y no corta a C . Sea O el centro de S^1 y tómese el sistema de coordenadas con origen en O y de eje x perpendicular a L y L' (fig. 1-24). Parametricemos C por la longitud de arco, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, de forma que esté orientada positivamente y que los puntos de tangencia con L y L' sean $s = 0$ y $s = s_1$, respectivamente.

Podemos suponer que la ecuación de S^1 es

$$\bar{\alpha}(s) = (\bar{x}(s), \bar{y}(s)) = (x(s), \bar{y}(s)), \quad s \in [0, l]$$

donde $2r$ es la distancia entre L y L' . Usando la ecuación (1) y denotando por \bar{A} el área encerrada por S^1 , tenemos

$$A = \int_0^l xy' ds, \quad \bar{A} = \pi r^2 = - \int_0^l \bar{y} \bar{x}' ds.$$

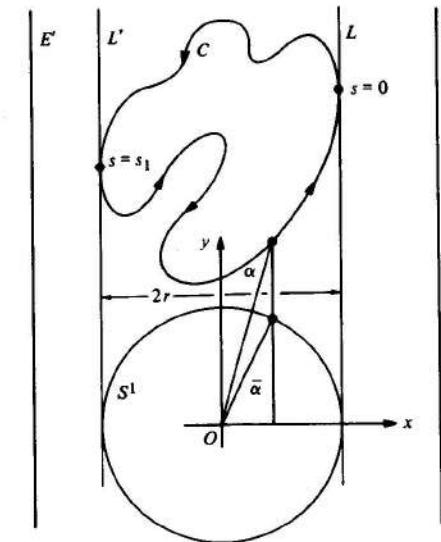


Figura 1-24

Así,

$$\begin{aligned} A + \pi r^2 &= \int_0^l (xy' - \bar{y} \bar{x}') ds \leq \int_0^l \sqrt{(xy' - \bar{y} \bar{x}')^2} ds \\ &\leq \int_0^l \sqrt{(x^2 + \bar{y}^2)(x')^2 + (y')^2} ds = \int_0^l \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} ds \\ &= lr. \end{aligned} \quad (3)$$

Recordemos ahora que la media geométrica de dos números positivos es menor o igual que su media aritmética y qué la igualdad se da si y sólo si éstos son iguales. Se deduce que

$$\sqrt{A} \sqrt{\pi r^2} \leq \frac{1}{2}(A + \pi r^2) \leq \frac{1}{2}lr. \quad (4)$$

Por tanto, $4\pi Ar^2 \leq l^2 r^2$, y esto da la ecuación (2).

Supongamos ahora que se da la igualdad en la ecuación (2). Entonces deben darse las igualdades en las ecuaciones (3) y (4). De la igualdad en la ecuación (4) se sigue que $A = \pi r^2$. Así, $l = 2\pi r$ y r no depende de la elección de la dirección de L . Más aún, la igualdad en la ecuación (3) implica que

$$(xy' - \bar{y} \bar{x}')^2 = (x^2 + \bar{y}^2)((x')^2 + (y')^2)$$

o

$$(xx' + \bar{y}y')^2 = 0;$$

o sea,

$$\frac{x}{y'} = \frac{\tilde{y}}{x'} = \frac{\sqrt{x^2 + \tilde{y}^2}}{\sqrt{(y')^2 + (x')^2}} = \pm r.$$

Por tanto, $x = \pm ry'$. Como r no depende de la elección de la dirección de L , podemos intercambiar x e y en la última relación y obtener $y = \pm rx'$. Así,

$$x^2 + y^2 = r^2((x')^2 + (y')^2) = r^2$$

y C es un círculo, como queríamos demostrar.

Q.E.D.

Observación 1. Se comprueba fácilmente que la demostración de arriba puede aplicarse a curvas C^1 , o sea, curvas $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, a las que solamente pedimos que las funciones $x(t)$, $y(t)$ tengan derivadas primeras continuas (que, por supuesto, coincidan en a y b si la curva es cerrada).

Observación 2. La desigualdad isoperimétrica es válida para una amplia clase de curvas. Se han encontrado demostraciones directas que funcionan siempre y cuando se puedan definir la longitud de arco y el área para las curvas a considerar. Para las aplicaciones, es conveniente señalar que el teorema es válido para curvas C^1 a trozos, es decir, curvas continuas que están formadas por un número finito de arcos C^1 . Estas curvas pueden tener un número finito de esquinas, donde la tangente es discontinua (fig. 1-25).

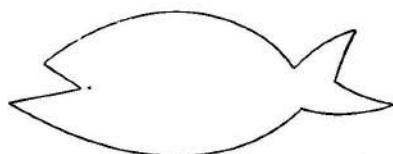


Figura 1-25. Una curva C^1 a trozos.

B. El teorema de los cuatro vértices

Necesitaremos algunos resultados generales más sobre curvas cerradas planas.

Sea $\alpha: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva cerrada plana dada por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$. Como s es la longitud de arco, el vector tangente $t(s) = (x'(s), y'(s))$ tiene longitud uno. Es conveniente introducir la *indicatriz tangente* t : $[0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ que viene dada por $t(s) = (x'(s), y'(s))$; es ésta una curva diferenciable, cuya traza está contenida en el círculo de radio 1 (fig. 1-26). Obsérvese que el vector velocidad de la indicatriz tangente es

$$\frac{dt}{ds} = (x''(s), y''(s)) = \alpha''(s) = kn,$$

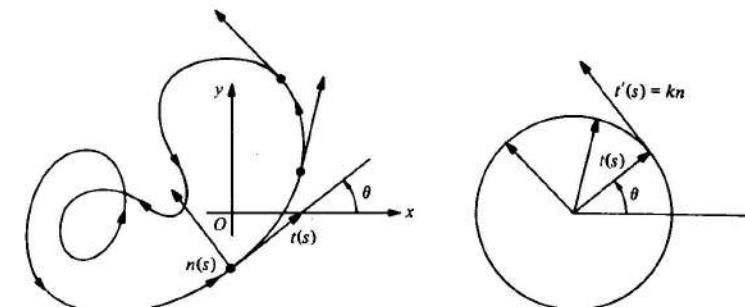


Figura 1-26

donde n es el vector normal, orientado como en la observación 2 de la sec. 1.5, y k es la curvatura de α .

Sea $\theta(s)$, $0 < \theta(s) < 2\pi$, el ángulo que forma $t(s)$ con el eje x ; es decir, $x'(s) = \cos \theta(s)$, $y'(s) = \sin \theta(s)$. Ya que

$$\theta(s) = \operatorname{arc \, tan} \frac{y'(s)}{x'(s)},$$

$\theta = \theta(s)$ está bien definido localmente (es decir, está bien definido en un pequeño intervalo en torno a s) como función diferenciable y

$$\frac{dt}{ds} = \frac{d}{ds}(\cos \theta, \sin \theta) = \theta'(-\sin \theta, \cos \theta) = \theta' n.$$

Esto significa que $\theta'(s) = k(s)$ y sugiere definir una función global y diferenciable $\theta: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$\theta(s) = \int_0^s k(s) ds.$$

Como

$$\theta' = k = x'y'' - x''y' = \left(\operatorname{arc \, tan} \frac{y'}{x'} \right)',$$

esta función global coincide, salvo constantes, con la definición local previa de θ . Intuitivamente, $\theta(s)$ mide la rotación total del vector tangente, es decir, el ángulo total descrito por el punto $t(s)$ de la indicatriz tangente, cuando recorremos la curva α desde 0 hasta s . Ya que α es cerrada, este ángulo es un múltiplo entero I de 2π , o sea,

$$\int_0^l k(s) ds = \theta(l) - \theta(0) = 2\pi I.$$

El número entero I se denomina el *índice de rotación* de la curva α .

En la fig. 1-27 hay algunos ejemplos de curvas con su índice de rotación. Obsérvese que el índice de rotación cambia de signo cuando cambiamos la orientación de la curva. Más aún, se ha establecido la definición de forma que el índice de una curva cerrada y simple, orientada positivamente, sea positivo.

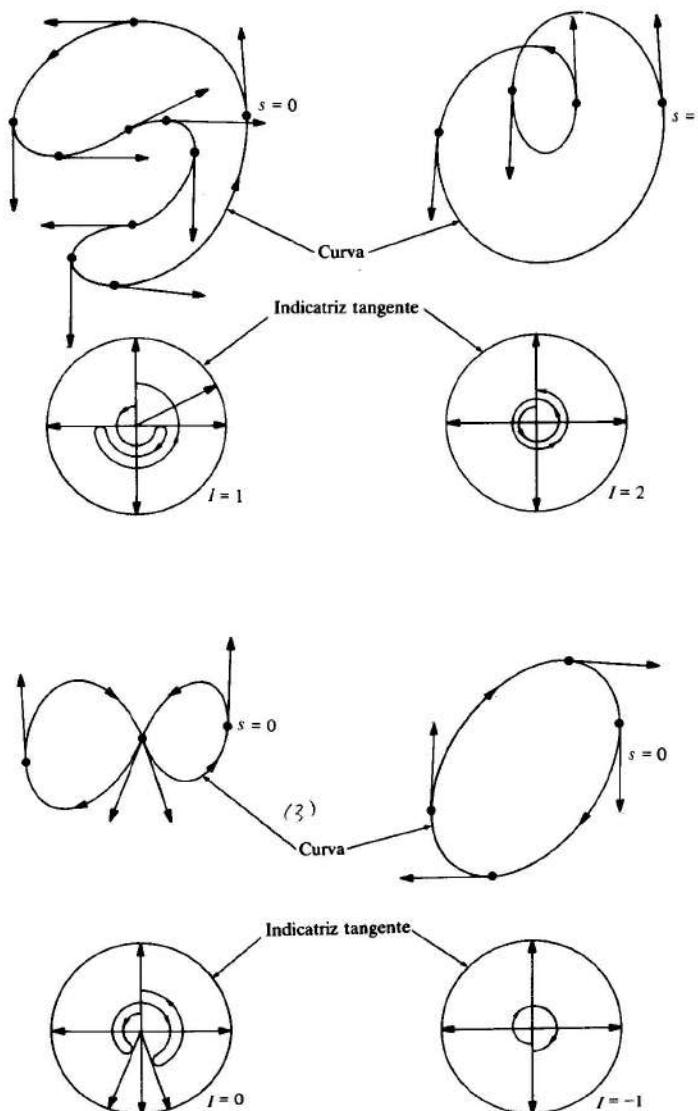


Figura 1-27

Un hecho global importante sobre el índice de rotación lo da el siguiente teorema, que se demostrará posteriormente en el libro (sec. 5.7, teorema 2).

TEOREMA DE ROTACION DE TANGENTES. *El índice de rotación de una curva cerrada simple es ± 1 , donde el signo depende la orientación de la curva.*

Una curva regular plana (no necesariamente cerrada) $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es *convexa* si, para todo $t \in [a, b]$, la traza $\alpha([a, b])$ de α está completamente contenida en un lado del semiplano cerrado determinado por la recta tangente en t (fig. 1-28).

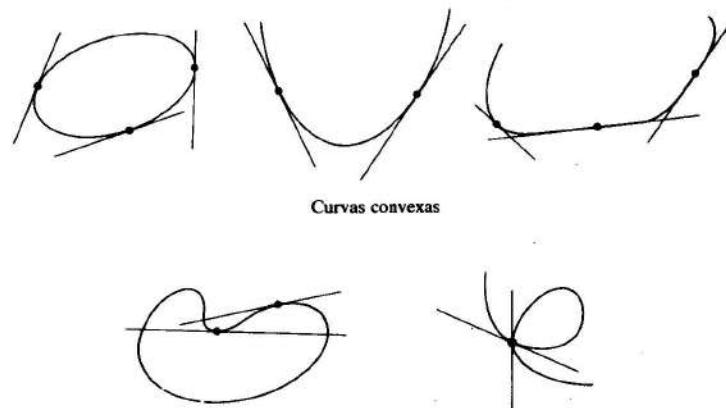


Figura 1-28

Un vértice de una curva regular plana $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un punto $t \in [a, b]$ en donde $k'(t) = 0$. Por ejemplo, una elipse con semiejes distintos tiene exactamente cuatro vértices, a saber, los puntos donde los ejes cortan a la elipse (véase el ejercicio 3). Constituye un hecho global interesante el que es éste el número mínimo de vértices para todas las curvas cerradas convexas.

TEOREMA 2 (Teorema de los cuatro vértices). *Una curva simple, cerrada y convexa tiene al menos cuatro vértices.*

Antes de comenzar la demostración, necesitamos un lema.

LEMA. *Sea $\alpha: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana y cerrada parametrizada por la longitud de arco y sean A, B y C números reales arbitrarios. Entonces*

$$\int_0^l (Ax + By + C) \frac{dk}{ds} ds = 0, \quad (5)$$

donde las funciones $x = x(s)$, $y = y(s)$ vienen dadas por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ y k es la curvatura de α .

Demostración del lema. Recordemos que existe una función diferenciable $\theta: [0, l] \rightarrow R$ tal que $x'(s) = \cos \theta$, $y'(s) = \operatorname{sen} \theta$. Así, $k(s) = \theta'(s)$ y

$$x'' = -ky', \quad y'' = kx'.$$

Por tanto, como las funciones involucradas coinciden en 0 y l ,

$$\begin{aligned}\int_0^l k' ds &= 0, \\ \int_0^l xk' ds &= -\int_0^l kx' dx = -\int_0^l y'' ds = 0, \\ \int_0^l yk' ds &= -\int_0^l ky' ds = \int_0^l x'' ds = 0.\end{aligned}$$

Q.E.D.

Demostración del teorema. Parametrícese la curva por la longitud de arco, $\alpha: [0, l] \rightarrow R^2$. Como $k = k(s)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[0, l]$, alcanza su máximo y su mínimo en $[0, l]$ (es éste un resultado básico de las funciones reales continuas; una demostración se encuentra, por ejemplo, en el apéndice al cap. 5, prop. 10). Así, α tiene al menos dos vértices, $\alpha(s_1) = p$ y $\alpha(s_2) = q$. Sea L la recta que pasa por p y por q , y sean β y γ los dos arcos de C determinados por los puntos p y q .

Afirmamos que cada uno de estos arcos se encuentra en un lado definido de L . De otra forma, C cortaría a L en un punto r distinto de p y q (fig. 1-29 (a)). Por convexidad, y ya que p, q, r son puntos distintos de C , la recta tangente en el punto intermedio, pongamos por caso p , tiene que coincidir con L . De nuevo, por convexidad, esto implica que L es tangente a C en los tres puntos p, q y r . Pero entonces, la tangente en un punto cercano a p (el punto intermedio) tendrá a q y r en lados distintos, salvo que el segmento completo rq pertenezca a C (fig. 1-29(b)). Esto implica que $k = 0$ en p y q . Ya que estos puntos corresponden al máximo y al mínimo de k , $k \equiv 0$ sobre C , lo que supone una contradicción.

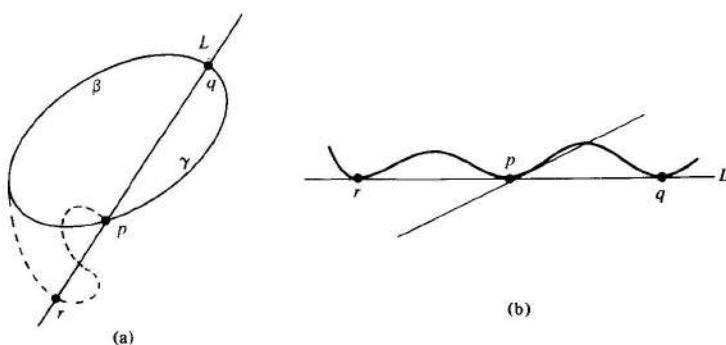


Figura 1-29

Sea $Ax + By + Cz = 0$ la ecuación de L . Si no hay más vértices, $k'(s)$ mantiene un signo constante sobre cada uno de los arcos β y γ . Podemos entonces arreglar el signo de todos los coeficientes A, B, C de forma que la integral de la ecuación (5) sea positiva. Esta contradicción prueba que hay un tercer vértice y que $k'(s)$ cambia de signo en β o en γ ; pongamos por caso en β . Ya que p y q son puntos de máximo y mínimo, $k'(s)$ cambia de signo dos veces en β . Así, hay cuatro vértices.

Q.E.D.

El teorema de los cuatro vértices ha sido el tema de muchas investigaciones. El teorema también es válido para curvas simples cerradas (no necesariamente convexas), pero la demostración es más dura. Para más literatura sobre el tema, véase la referencia [10].

Más adelante (sec. 5.7, prop. 1) demostraremos que *una curva plana y cerrada es convexa si y solamente si es simple y puede orientarse de forma que su curvatura sea positiva o cero*. De ello y de la demostración dada arriba, vemos que el enunciado del teorema de los cuatro vértices puede reformularse como sigue. *La función curvatura de una curva cerrada convexa es (no negativa y) o bien constante o bien tiene al menos dos máximos y dos mínimos.* Es natural entonces preguntarse si tales funciones de curvatura caracterizan a las curvas convexas. Con más precisión, podemos plantearnos la siguiente cuestión. *Sea $k: [a, b] \rightarrow R$ una función diferenciable no negativa tal que coincide, junto con todas sus derivadas, en a y b . Supóngase que k es o bien constante o bien tiene al menos dos máximos y dos mínimos. ¿Existe una curva simple cerrada $\alpha: [a, b] \rightarrow R^2$ tal que la curvatura de α sea $k(t)$?*

Para el caso en el que $k(t)$ es positiva estrictamente, H. Gluck dio una respuesta afirmativa a dicha cuestión (véase H. Gluck, «The Converse to the Four-Vertex Theorem», *L'Enseignement Mathématique*, t. XVII, fasc. 3-4, 1971, pp. 295-309). Sin embargo, sus métodos no se aplican al caso $k \geq 0$.

C. La fórmula de Cauchy-Crofton

En esta sección nuestro último tema se dedicará a encontrar un teorema que, el líneas generales, describa la siguiente situación. Sea C una curva regular en el plano. Nos fijamos en todas las rectas del plano que cortan a C y a cada una de estas rectas le asignamos una multiplicidad que es el número de sus puntos de intersección con C (fig. 1-30).

Primeramente, queremos encontrar una forma de asignar una medida a un subconjunto dado de rectas del plano. No sería demasiado sorprendente el que esté sea posible. Después de todo, asignamos una medida (el área) a los subconjuntos de puntos del plano. Una vez que caemos en la cuenta de que una recta puede determinarse por dos parámetros (por ejemplo, φ y θ en la fig. 1-31), podemos imaginarnos las rectas del plano como puntos de una región de cierto plano. De esta forma, lo que queremos es encontrar una manera «razonable» de medir «áreas» en dicho plano.

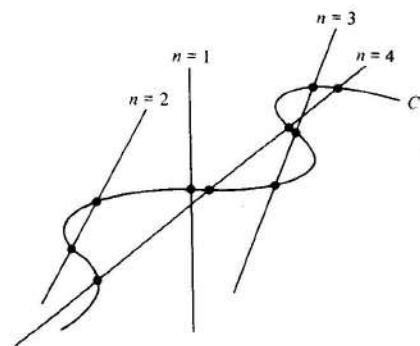


Figura 1-30. n es la multiplicidad de la recta correspondiente.

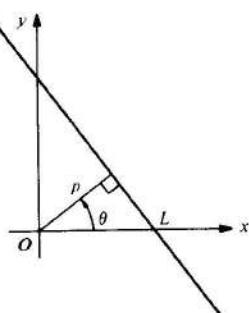


Figura 1-31. L está determinada por ρ y θ .

Tras elegir esta medida, queremos aplicarla y hallar la medida del conjunto de rectas (contadas con su multiplicidad) que cortan a C . El resultado es bastante interesante y puede enunciarse de la forma siguiente.

TEOREMA 3 (Fórmula de Cauchy-Crofton). *Sea C una curva regular plana de longitud l . La medida del conjunto de rectas (contadas con su multiplicidad) que cortan a C es igual a $2l$.*

Antes de acometer la demostración debemos definir lo que entendemos por una medida razonable en el conjunto de las rectas del plano. Primero, elijamos un sistema conveniente de coordenadas para dicho conjunto. Una recta L del plano está determinada por un vector unitario $v = (\cos \theta, \sin \theta)$ normal a L y el producto interior $p = v \cdot \alpha = x \cos \theta + y \sin \theta$ de n con el vector de posición $\alpha = (x, y)$ de L . Nótese que para determinar L en términos de los parámetros (p, θ) , debemos identificar $(p, \theta) \sim (p, \theta + 2k\pi)$, k un número entero, e identificar también $(p, \theta) \sim (-p, \theta \pm \pi)$.

Podemos reemplazar así el conjunto de todas las rectas del plano por el conjunto

$$\mathcal{L} = \{(p, \theta) \in \mathbb{R}^2; (p, \theta) \sim (p, \theta + 2k\pi) \text{ y } (p, \theta) \sim (-p, \theta \pm \pi)\}.$$

Demostraremos que, salvo elección de unidades, hay solamente una medida razonable en este conjunto.

Para decidir lo que entendemos por razonable, fíjemonos con más detalle en la medida usual de áreas en \mathbb{R}^2 . Necesitamos una definición.

Un *movimiento rígido* en \mathbb{R}^2 es una aplicación $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow (x, y)$, donde (fig. 1-32)

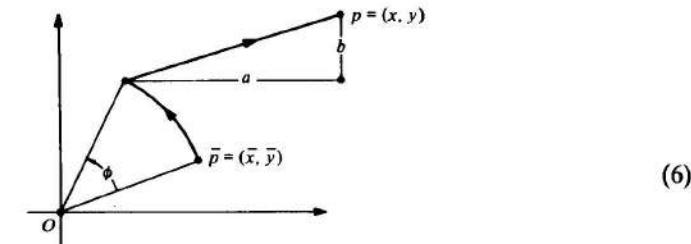


Figura 1-32

$$\begin{aligned} x &= a + \bar{x} \cos \varphi - \bar{y} \sin \varphi \\ y &= b + \bar{x} \sin \varphi + \bar{y} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Ahora, para definir el área de un conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ consideramos la integral doble

$$\iint_S dx dy;$$

es decir, integramos el «elemento de área» $dx dy$ sobre S . Cuando existe esta integral en algún sentido, decimos que S es *medible* y definimos el área de S como el valor de dicha integral. De ahora en adelante, admitiremos que existen todas las integrales involucradas en nuestras discusiones.

Nótese que podíamos haber elegido algún otro elemento de área, digamos, $xy^2 dx dy$. La razón de elegir $dx dy$ es que, salvo un factor, éste es el único elemento de área invariante frente a movimientos rígidos. Con más precisión, tenemos la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1. *Sea $f(x, y)$ una función continua definida en \mathbb{R}^2 . Para cualquier conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$, definase el área A de S mediante*

$$A(S) = \iint_S f(x, y) dx dy$$

(por supuesto, únicamente consideramos aquellos conjuntos para los que tal integral existe). Supóngase que A es invariante frente a movimientos rígidos; es decir, si S es cualquier conjunto y $\tilde{S} = F^{-1}(S)$, donde F es el movimiento rígido (6), tenemos

$$A(\tilde{S}) = \iint_{\tilde{S}} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} = \iint_S f(x, y) dx dy = A(S).$$

Entonces $f(x, y) = \text{constante}$.

Democión. Recordemos la fórmula del cambio de variables en integrales múltiples (Buck, *Advanced Calculus*, p. 301, o el ejercicio 15 de esta sección):

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \iint_S f(x(\bar{x}, \bar{y}), y(\bar{x}, \bar{y})) \frac{\partial(x, y)}{\partial(\bar{x}, \bar{y})} d\bar{x} d\bar{y}. \quad (7)$$

Aquí, $x = x(\bar{x}, \bar{y})$, $y = y(\bar{x}, \bar{y})$ son funciones con derivadas parciales continuas que definen la transformación de variables $T: R^2 \rightarrow R^2$, $S = T^{-1}(S)$, y

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\bar{x}, \bar{y})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} \\ \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} \end{vmatrix}$$

es el jacobiano de la transformación T . En nuestro caso particular, la transformación es el movimiento rígido (6) y el jacobiano es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\bar{x}, \bar{y})} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = 1.$$

Haciendo uso de este hecho y la ecuación (7), obtenemos

$$\iint_S f(x(\bar{x}, \bar{y}), y(\bar{x}, \bar{y})) d\bar{x} d\bar{y} = \iint_S f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y}.$$

Como esto es cierto para todo S , tenemos

$$f(x(\bar{x}, \bar{y}), y(\bar{x}, \bar{y})) = f(\bar{x}, \bar{y}).$$

Ahora usamos el hecho de que para todo par de puntos (x, y) , (\bar{x}, \bar{y}) en R^2 existe un movimiento rígido F tal que $F(\bar{x}, \bar{y}) = (x, y)$. Así,

$$f(x, y) = (f \circ F)(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x}, \bar{y}),$$

y $f(x, y) = \text{constante}$, como queríamos demostrar.

Q.E.D.

Observación 3. La demostración de arriba se basa en dos hechos: primero, que el jacobiano de un movimiento rígido es 1, y, segundo, que los movimientos rígidos son transitivos sobre los puntos del plano, es decir, dados dos puntos del plano existe un movimiento rígido que aplica uno en el otro.

Con estos preparativos, podemos finalmente definir una medida en el conjunto \mathcal{L} . Primero observamos que el movimiento rígido (6) induce una transformación en \mathcal{L} . De hecho, la ecuación (6) aplica la recta $x \cos \theta + y \sin \theta = p$ en la recta

$$\bar{x} \cos(\theta - \varphi) + \bar{y} \sin(\theta - \varphi) = p - a \cos \theta - b \sin \theta.$$

Esto significa que la transformación inducida por la ecuación (6) en \mathcal{L} es

$$\begin{aligned} \bar{p} &= p - a \cos \theta - b \sin \theta, \\ \bar{\theta} &= \theta - \varphi. \end{aligned}$$

Se comprueba fácilmente que el jacobiano de esta transformación es 1 y que tales transformaciones son también transitivas en el conjunto de las rectas del plano. Definimos entonces la medida de un conjunto $S \subset \mathcal{L}$ como

$$\iint_S dp d\theta.$$

De la misma manera que en la prop. 1, podemos demostrar entonces que ésta es, salvo un factor constante, la única medida en \mathcal{L} que es invariante frente a movimientos rígidos. Esta medida es, por tanto, tan razonable como puede serlo.

Ahora ya podemos esbozar una demostración del teorema 3.

Esbozo de la demostración del teorema 3. Primero admitamos que la curva C es un segmento de recta con longitud l . Como nuestra medida es invariante frente a movimientos rígidos, podemos suponer que el sistema de coordenadas tiene el origen O sobre el punto de C y que el eje x tiene la dirección de C . Entonces, la medida del conjunto de rectas que cortan a C es (fig. 1-33)

$$\iint_S dp d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{|\cos \theta| l/2} dp \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{l}{2} |\cos \theta| d\theta = 2l.$$

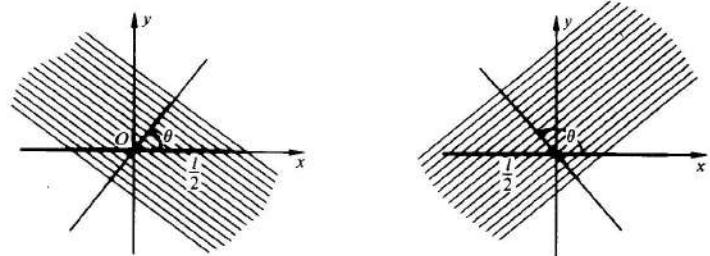


Figura 1-33

A continuación, sea C una curva poligonal compuesta de un número finito de segmentos C_i de longitud l_i ($\sum l_i = l$). Sea $n = n(p, \theta)$ el número de puntos de intersección de la línea recta (p, θ) con C . Entonces, sumando los resultados de cada segmento C_i , obtenemos

$$\iint n dp d\theta = 2 \sum_i l_i = 2l,$$

que es la fórmula de Cauchy-Crofton para una curva poligonal.

Finalmente, por un proceso de paso al límite, es posible extender la fórmula de arriba a cualquier curva regular, y esto demuestra el teorema 3.

Q.E.D.

Debe destacarse que las ideas generales de este tema pertenecen a una rama de la geometría conocida por el nombre de geometría integral. Se puede encontrar una

panorámica sobre el tema en L. A. Santaló, «Integral Geometry», en *Studies in Global Geometry and Analysis*, editado por S. S. Chern, The Mathematical Association of America, 1967, pp. 147-193.

La fórmula de Cauchy-Crofton puede ser utilizada de muchas maneras. Por ejemplo, si una curva no es rectificable (véase el ejercicio 9, sec. 1.3) pero el primer miembro de la ecuación (8) tiene sentido, éste puede usarse para definir la «longitud» de dicha curva. La ecuación (8) puede usarse también para obtener un modo eficiente de estimar longitudes de curvas. De hecho, puede darse una buena aproximación para la integral de la ecuación (8) como sigue⁴. Considérese una familia de rectas paralelas tal que dos rectas consecutivas están a una distancia r . Rótese, con ángulos $\pi/4$, $2\pi/4$, $3\pi/4$ esta familia, a fin de obtener cuatro familias de rectas. Sea n el número de puntos de intersección de una curva C con todas estas rectas. Entonces

$$\frac{1}{2}nr\frac{\pi}{4}$$

constituye una aproximación de la integral

$$\frac{1}{2} \int \int n \, dp \, d\theta = \text{longitud de } C$$

y por eso proporciona una estimación de la longitud de C . Para hacerse una idea de lo buena que puede ser esta estimación, desarrollemos un ejemplo.

Ejemplo. La figura 1-34 reproduce la imagen mediante un microscopio electrónico de una molécula circular de ADN y queremos estimar su longitud. Las cuatro familias

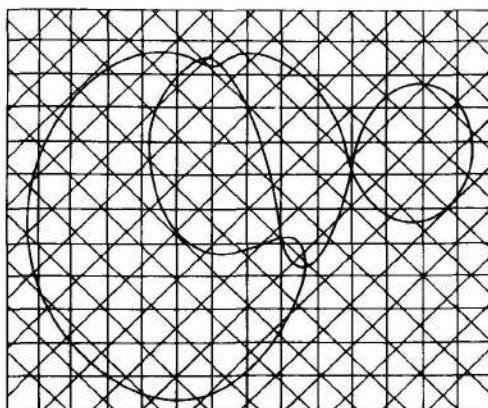


Figura 1-34. Reproducido de H. Ris y B. C. Chandler, Cold Spring Harbor Symp. Quant. Biol. 28, 2 (1963), bajo autorización.

⁴ Quiero agradecer a Robert Gardner el haberme sugerido esta aplicación y el ejemplo que sigue.

de rectas se han dibujado sobre la imagen a una distancia de 7 milímetros y ángulos de magnitud $\pi/4$ (una manera más práctica sería tener dibujada esta familia de una vez por todas sobre un papel transparente). El número hallado de puntos de intersección resulta ser 153. Así,

$$\frac{1}{2}n\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}153\frac{3,14}{4} \sim 60.$$

Ya que la línea de referencia en la imagen representa 1 micra ($= 10^{-6}$ metros) y mide, en nuestra escala, 25 milímetros, entonces $r = 25/7$ y así la longitud de esta molécula de ADN es, a partir de nuestros valores, aproximadamente

$$60\left(\frac{25}{7}\right) \sim 16,6 \text{ micras.}$$

El valor real es de 16,3 micras.

EJERCICIOS

- *1. ¿Existe alguna curva cerrada simple en el plano de longitud igual a 6 metros y delimitando un área de 3 metros cuadrados?
- *2. Sea \overline{AB} un segmento rectilíneo de longitud menor que l . Demuéstrese que la curva C que une A con B , de longitud l , y tal que junto con \overline{AB} encierra la mayor área posible es un arco de círculo que pasa por A y B (fig. 1-35).
- 3. Calcular la curvatura de la elipse

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi], a \neq b,$$

demostrando que tiene exactamente cuatro vértices, a saber, los puntos $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$.

- *4. Sea C una curva plana y T la recta tangente en un punto $p \in C$. Dibújese una recta L paralela a la recta normal en p a una distancia d de p (fig. 1-36). Sea h la longitud del segmento determinado sobre L por C y T (así, h es la «altura» de C con respecto a T). Demostrar que

$$|k(p)| = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{2h}{d^2},$$

donde $k(p)$ es la curvatura de C en p .



Figura 1-35

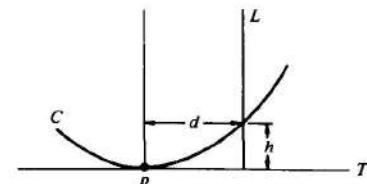


Figura 1-36

- *5. Si una curva cerrada y plana C está contenida dentro de un círculo de radio r , demostrar que existe un punto $p \in C$ tal que la curvatura k de C en p satisface $|k| \geq 1/r$.

6. Sea $\alpha(s)$, $s \in [0, l]$ una curva cerrada, convexa y plana, orientada positivamente. La curva

$$\beta(s) = \alpha(s) - rn(s),$$

donde r es una constante positiva y n es el vector normal, se denomina una curva *paralela* a α (fig. 1-37). Demostrar que

- Longitud de β = longitud de $\alpha + 2\pi r$.
- $A(\beta) = A(\alpha) + rl + \pi r^2$.
- $k_\beta(s) = k_\alpha(s)/(1 + rk_\alpha(s))$.

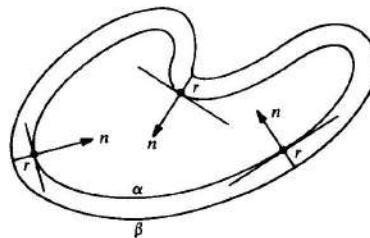


Figura 1-37

En (a)-(c), $A(\)$ designa el área encerrada por la curva correspondiente y k_α , k_β son, respectivamente, las curvaturas de α y β .

7. Sea $\alpha: R \rightarrow R^2$ una curva plana definida sobre toda la recta real R . Admitamos que α no pasa por el origen $0 = (0, 0)$ y también que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |\alpha(t)| = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} |\alpha(t)| = \infty.$$

- Demostrar que existe un punto $t_0 \in R$ tal que $|\alpha(t_0)| \leq |\alpha(t)|$ para todo $t \in R$.
- Probar, mediante un ejemplo, que la afirmación de la parte a es falsa si no se admiten simultáneamente $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\alpha(t)| = \infty$ y $\lim_{t \rightarrow -\infty} |\alpha(t)| = \infty$.
- *a. Sea $\alpha(s)$, $s \in [0, l]$, una curva cerrada, plana y simple. Supóngase que la curvatura $k(s)$ satisface $0 < k(s) \leq c$, donde c es una constante (así, α está menos curvada que un círculo de radio $1/c$). Demostrar que

$$\text{longitud de } \alpha \geq \frac{2\pi}{c}.$$

- Reemplazar en a la hipótesis de ser simple por « α tiene índice de rotación N ». Demuéstrese que

$$\text{longitud de } \alpha \geq \frac{2\pi N}{c}.$$

- *9. Un conjunto $K \subset R^2$ es *convexo* si dados dos puntos cualesquiera $p, q \in K$ el segmento rectilíneo \overline{pq} está contenido en K (fig. 1-38). Demostrar que una curva cerrada, simple y convexa delimita una región convexa.

10. Sea C una curva plana convexa. Demuéstrese geométricamente que C no tiene autointersecciones.

- *11. Dada una curva cerrada, simple y plana, no convexa C , podemos considerar su *envolvente convexa* H (fig. 1-39), es decir, la frontera del conjunto convexo más pequeño que contiene al interior de C . La curva H está formada por arcos de C y por los segmentos de tangentes que tienden un puente sobre los «huecos no convexos» (fig. 1-39). Puede demostrarse que H es una curva C^1 cerrada y convexa. Utilícese esto para demostrar que, en el problema isoperimétrico, nos podemos restringir al caso de curvas convexas.

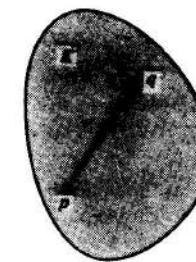


Figura 1-38

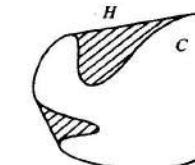


Figura 1-39

- *12. Considérese un círculo unidad S^1 en el plano. Demostrar que la razón $M_1/M_2 = 1/3$; siendo M_2 la medida del conjunto de rectas del plano que cortan a S^1 y M_1 la medida de todas las rectas que determinan en S^1 una cuerda de longitud $> \sqrt{3}$. Intuitivamente, esta razón es la probabilidad de que una recta que corte a S^1 determine una cuerda más larga que el lado de un triángulo equilátero inscrito en S^1 (fig. 1-40).

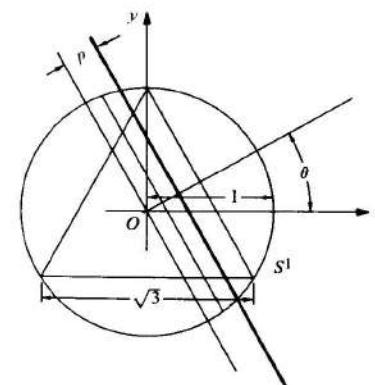


Figura 1-40

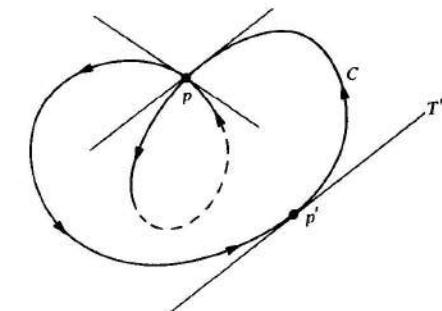


Figura 1-41

13. Sea C una curva cerrada orientada y plana de curvatura $k > 0$. Admitamos que C tiene al menos un punto p de autointersección. Demostrar que

- Hay un punto $p' \in C$ tal que la recta tangente T' en p' es paralela a alguna tangente en p .

- b. El ángulo de rotación de la tangente sobre el arco positivo de C formado por $pp'p$ es $> \pi$ (fig. 1-41).
 c. El índice de rotación de C es ≥ 2 .
14. a. Probar que si una recta L corta a una curva cerrada convexa C , entonces, o bien es L tangente a C , o bien L intersecta a C exactamente en dos puntos.
 b. Usar la parte a para probar que la medida del conjunto de rectas que cortan a C (sin multiplicidades) es igual a la longitud de C .
15. El teorema de Green en el plano es un resultado básico del calculus (cálculo infinitesimal) que puede enunciarse de la forma siguiente. Consideremos una curva cerrada, simple y plana, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$. Admitamos que α está orientada positivamente y sean C y R , respectivamente, la traza y el interior de α . Sean $p = p(x, y)$, $q = q(x, y)$ funciones reales con derivadas parciales continuas p_x, p_y, q_x, q_y . Entonces

$$\iint_R (q_x - p_y) dx dy = \int_C \left(p \frac{dx}{dt} + q \frac{dy}{dt} \right) dt,$$

donde se sobreentiende que en la segunda integral las funciones p y q se restringen a α y dicha integral se toma entre los límites $t = a$ y $t = b$. En las partes a y b que siguen nos proponemos deducir, del teorema de Green, una fórmula para el área de R y la fórmula del cambio de variables para integrales dobles (cf. las ecuaciones (1) y (7) del texto).

a. Tómese $q = x$ y $p = -y$ en la ecuación (9) y conclúyase que

$$A(R) = \iint_R dx dy = \frac{1}{2} \int_a^b \left(x(t) \frac{dy}{dt} - y(t) \frac{dx}{dt} \right) dt.$$

b. Sea $f(x, y)$ una función real con derivadas parciales continuas y $T: R^2 \rightarrow R^2$ una transformación de coordenadas dada por las funciones $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, que admiten también derivadas parciales continuas. Elijanse en la ecuación (9) $p = 0$ y q de forma que $q_x = f$. Aplíquense sucesivamente el teorema de Green, la aplicación T y de nuevo el teorema de Green para obtener

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dx dy &= \int_C q dy = \iint_{T^{-1}(C)} (q \circ T)(y_u u'(t) + y_v v'(t)) dt = \\ &= \iint_{T^{-1}(R)} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} ((q \circ T)y_v) - \frac{\partial}{\partial v} ((q \circ T)y_u) \right\} du dv. \end{aligned}$$

Demostrar que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} (q(x(u, v), y(u, v))y_v) - \frac{\partial}{\partial v} (q(x(u, v), y(u, v))y_u) &= \\ &= f(x(u, v), y(u, v))(x_u y_v - x_v y_u) = f \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}. \end{aligned}$$

Combínese esta relación con la identidad anterior y obténgase la fórmula de transformación de integrales dobles:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_{T^{-1}(R)} f(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv.$$

Capítulo 2

SUPERFICIES REGULARES

2.1. Introducción

En este capítulo, comenzaremos con el estudio de las superficies. Mientras que en el primer capítulo utilizamos principalmente cálculo diferencial elemental en una variable, ahora necesitaremos algunas nociones de cálculo diferencial de varias variables. Concretamente, será necesario conocer algunos hechos sobre continuidad y diferenciabilidad de funciones y aplicaciones en R^2 y R^3 . Lo que necesitamos puede encontrarse en cualquier texto estándar de cálculo diferencial avanzado, por ejemplo, Buck, *Advanced Calculus*; hemos incluido un breve repaso sobre parte de esta materia en un apéndice al cap. 2.

En la sec. 2.2 introduciremos el concepto básico de superficie regular en R^3 . En contraste con el tratamiento de las curvas en el cap. 1, las superficies regulares se definen como conjuntos en lugar de como aplicaciones. El objetivo de la sec. 2.2 es describir algunos criterios que sean útiles para intentar decidir si un subconjunto dado de R^3 es una superficie regular.

En la sec. 2.3 mostraremos la posibilidad de definir qué significa el que una función sobre una superficie regular sea diferenciable, y, en la sec. 2.4, demostraremos que la noción habitual de diferencial en R^2 puede extenderse a esta clase de funciones. De esta forma, las superficies regulares de R^3 proporcionan un marco natural para el cálculo diferencial bidimensional.

Por supuesto, las curvas se pueden tratar desde el mismo punto de vista, es decir, como subconjuntos de R^3 que proporcionan un ámbito natural para el cálculo diferencial unidimensional. Haremos una breve mención de éstas en la sec. 2.3.

Las secs. 2.2 y 2.3 son cruciales para el resto del libro. Un principiante podría encontrar un tanto difíciles las demostraciones contenidas en estas secciones. Si así fuese, éstas se pueden omitir en una primera lectura.

En la sec. 2.5 introduciremos la primera forma fundamental, un instrumento natural para tratar cuestiones métricas (longitudes de curvas, áreas de regiones, etc.) sobre una superficie regular. Esto constituirá un logro importante cuando lleguemos al cap. 4.

Las secciones de la 2.6 a la 2.8 son optativas en una primera lectura. En la sec. 2.6 trataremos con la idea de orientación sobre superficies regulares. Esta se va a necesitar en los caps. 3 y 4. En beneficio de aquellos que excluyen esta sección, repasaremos el concepto de orientación al principio del cap. 3.

2.2. Superficies regulares; imágenes inversas de valores regulares¹

En esta sección vamos a introducir la noción de superficie regular en R^3 . En líneas generales, una superficie regular en R^3 se obtiene tomando trozos de un plano, deformándolos, y disponiéndolos de forma que la figura resultante carezca de puntos abruptos, bordes o autointersecciones y de suerte que tenga sentido hablar de plano tangente en los puntos de la figura. La idea es definir un conjunto que sea, en cierto sentido, bidimensional y que sea también lo suficientemente «liso» como para que se puedan extender al mismo las nociones habituales del cálculo diferencial. Al final de la sec. 2.4, ya debería estar completamente claro que la siguiente definición es la correcta.

DEFINICIÓN 1. Un subconjunto $S \subset R^3$ es una superficie regular si, para cada $p \in S$, existe un entorno V en R^3 y una aplicación $x: U \rightarrow V \cap S$ de un subconjunto abierto U de R^2 sobre $V \cap S \subset R^3$ tal que (fig. 2-1)

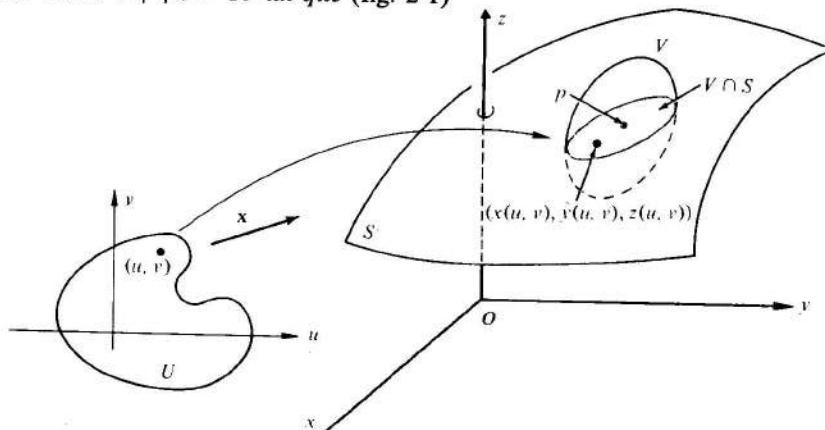


Figura 2-1

1. x es diferenciable. Esto significa que si escribimos

$$x(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U,$$

¹ En una primera lectura, las demostraciones de esta sección se podrían omitir.

las funciones $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes en U ;

2. x es un homeomorfismo. Como x es continua por la condición 1, esto significa que x admite una inversa $x^{-1}: V \cap S \rightarrow U$ que es continua; es decir, x^{-1} es la restricción de una función continua $F: W \subset R^3 \rightarrow R^2$ definida sobre un conjunto abierto W que contiene a $V \cap S$.
3. Condición de regularidad. Para cada $q \in U$, la diferencial $dx_q: R^2 \rightarrow R^3$ es inyectiva².

Dentro de un momento explicaremos la condición 3.

La aplicación x se denomina una *parametrización* o un *sistema (local) de coordenadas* en (un entorno de) p . El entorno $V \cap S$ se denomina un *entorno coordenado*.

Para dar de una manera más familiar la condición 3, calculemos la matriz de la aplicación lineal dx_q en las bases canónicas $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ de R^2 , de coordenadas (u, v) , y $f_1 = (1, 0, 0)$, $f_2 = (0, 1, 0)$, $f_3 = (0, 0, 1)$ de R^3 , de coordenadas (x, y, z) .

Sea $q = (u_0, v_0)$. El vector e_1 es tangente a la curva $u \rightarrow (u, v_0)$ cuya imagen a través de x es la curva

$$u \rightarrow (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)).$$

Esta curva imagen (denominada la *curva coordenada* $v = v_0$) está contenida en S y tiene en $x(q)$ el vector tangente (fig. 2-2)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u},$$

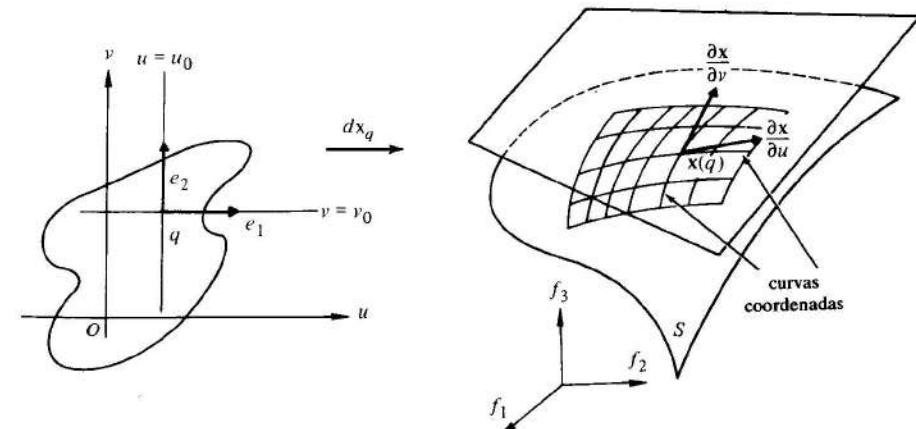


Figura 2-2

² Para contextos en itálicas, las letras de símbolos estarán en letra estándar de forma que se les pueda distinguir del texto circundante:

donde las derivadas están evaluadas en (u_0, v_0) y el vector se expresa por sus coordenadas en la base $\{f_1, f_2, f_3\}$. En virtud a la definición de diferencial (apéndice al cap. 2, def. 1),

$$d\mathbf{x}_q(e_1) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}.$$

De manera similar, utilizando la curva coordenada $u = u_0$ (la imagen por \mathbf{x} de la curva $v \rightarrow (u_0, v)$), obtenemos

$$d\mathbf{x}_q(e_2) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}.$$

Así, la matriz de la aplicación lineal $d\mathbf{x}_q$ en la base referida es

$$d\mathbf{x}_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

La condición 3 de la def. 1 puede expresarse ahora pidiendo que los dos vectores columna de esta matriz sean linealmente independientes; o, equivalentemente, que el producto vectorial $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \neq 0$; o, todavía de otra forma, que uno de los menores de orden dos de la matriz de $d\mathbf{x}_q$, es decir, uno de los determinantes jacobianos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)},$$

sea diferente de cero en q .

Observación 1. La definición 1 merece algunos comentarios. Primero, en contraste con nuestro tratamiento de las curvas en el cap. 1, hemos definido una superficie como un subconjunto S de R^3 y no como una aplicación. Esto se lleva a cabo recubriendo S con las trazas de parametrizaciones que satisfacen las condiciones 1, 2 y 3.

La condición 1 es bastante natural si esperamos hacer geometría diferencial global sobre S . La inyectividad en la condición 2 tiene como objetivo el prevenir autointersecciones en las superficies regulares. Esto es claramente necesario si vamos a hablar, por poner un ejemplo, de *el* plano tangente en un punto $p \in S$ (véase la fig. 2-3(a)). La continuidad de la inversa \mathbf{x}^{-1} en la condición 2 tiene un propósito más sutil que sólo se comprenderá plenamente en la próxima sección. Por ahora, mencionaremos que esta condición es esencial para probar que ciertos objetos definidos en términos

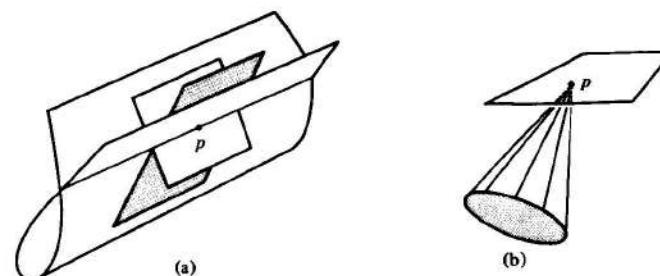


Figura 2-3. Algunas situaciones que se evitan en la definición de superficie regular.

de una parametrización no dependen de ésta sino del conjunto S mismo. Finalmente, como mostraremos en la sec. 2.4, la condición 3 garantizará la existencia de un «plano tangente» en todos los puntos de S (véase la fig. 2-3(b)).

Ejemplo 1. Demostremos que la esfera unidad

$$S^2 = \{(x, y, z) \in R^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

es una superficie regular.

Primero verifiquemos que la aplicación $\mathbf{x}_1: U \subset R^2 \rightarrow R^3$ dada por

$$\mathbf{x}_1(x, y) = (x, y, +\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}), \quad (x, y) \in U,$$

donde $R^2 = \{(x, y) \in R^2; z = 0\}$ y $U = \{(x, y) \in R^2; x^2 + y^2 < 1\}$ es una parametrización de S^2 . Obsérvese que $\mathbf{x}_1(U)$ es la parte (abierta) de S^2 por encima del plano xy .

Ya que $x^2 + y^2 < 1$, la función $+ \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes. Por tanto, \mathbf{x}_1 es diferenciable y se da la condición 1.

La condición 3 se verifica inmediatamente puesto que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} \equiv 1.$$

Para comprobar la condición 2, observamos que \mathbf{x}_1 es inyectiva y que \mathbf{x}_1^{-1} es la restricción de la proyección (continua) $\pi(x, y, z) = (x, y)$ sobre el conjunto $\mathbf{x}_1(U)$. Por tanto, \mathbf{x}_1^{-1} es continua en $\mathbf{x}_1(U)$.

Ahora recubriremos totalmente la esfera con parametrizaciones similares, de la manera siguiente. Definimos $\mathbf{x}_2: U \subset R^2 \rightarrow R^3$ mediante

$$\mathbf{x}_2(x, y) = (x, y, -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}),$$

compruébese que \mathbf{x}_2 es una parametrización y obsérvese que $\mathbf{x}_1(U) \cup \mathbf{x}_2(U)$ recubre S^2 excepto el ecuador

$$\{(x, y, z) \in R^3; x^2 + y^2 = 1, z = 0\}.$$

Entonces, utilizando los planos xz y zy , definimos las parametrizaciones

$$\begin{aligned}x_3(x, z) &= (x, +\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z), \\x_4(x, z) &= (x, -\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z), \\x_5(y, z) &= (+\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z), \\x_6(y, z) &= (-\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z),\end{aligned}$$

las cuales, junto con x_1 y x_2 , recubren a S^2 completamente (fig. 2-4), demostrando que S^2 es una superficie regular.

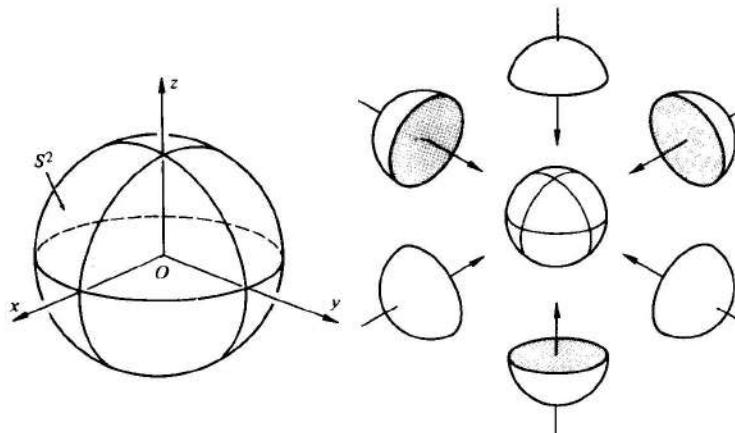


Figura 2-4

Para la mayoría de las aplicaciones, es conveniente relacionar las parametrizaciones con las coordenadas geográficas en S^2 . Sea $V = \{(\theta, \varphi); 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$ y sea $\mathbf{x}: V \rightarrow R^3$ definida por

$$\mathbf{x}(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta).$$

Claramente, $\mathbf{x}(V) \subset S^2$. Demostraremos que \mathbf{x} es una parametrización de S^2 . Habitualmente θ se denomina la *colatitud* (el complementario de la latitud) y φ la *longitud* (fig. 2-5).

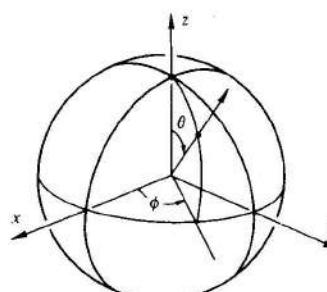


Figura 2-5

Es claro que las funciones sean $\theta \cos \varphi$, $\sin \theta \cos \varphi$, $\cos \theta$ admiten derivadas parciales continuas de todos los órdenes; de donde, \mathbf{x} es diferenciable. Además, para que los determinantes jacobianos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \varphi)} = \cos \theta \sin \theta,$$

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(\theta, \varphi)} = \sin^2 \theta \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial(x, z)}{\partial(\theta, \varphi)} = \sin^2 \theta \sin \varphi$$

se anulen simultáneamente, es necesario que

$$\cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta \cos^2 \varphi + \sin^4 \theta \sin^2 \varphi = \sin^2 \theta = 0.$$

Esto no tiene lugar en V , por tanto se satisfacen las condiciones 1 y 3 de la def. 1.

A continuación, observamos que dado un $(x, y, z) \in S^2 - C$, donde C es el semicírculo

$$C = \{(x, y, z) \in S^2; y = 0, x \geq 0\},$$

θ está únicamente determinado por $\theta = \cos^{-1} z$, pues $0 < \theta < \pi$. Conociendo θ , hallamos sean φ y $\cos \varphi$ a partir de $x = \sin \theta \cos \varphi$, $y = \sin \theta \sin \varphi$, y esto determina φ con unicidad ($0 < \varphi < 2\pi$). De ahí se sigue que \mathbf{x} admite una inversa \mathbf{x}^{-1} . Para completar la verificación de la condición 2, deberíamos probar que \mathbf{x}^{-1} es continua. Sin embargo, ya que pronto demostraremos (prop. 4) que tal comprobación no es necesaria, para el caso en que ya sepamos que S es una superficie regular, no efectuaremos aquí dicha verificación.

Resaltamos que $\mathbf{x}(V)$ solamente excluye un semicírculo de S^2 (incluyendo los dos polos) y que S^2 puede recubrirse con los entornos coordinados de dos parametrizaciones de este tipo.

En el ejercicio 16 indicaremos cómo recubrir S^2 con otro conjunto útil de entornos coordinados.

El ejemplo 1 pone de manifiesto que decidir, directamente de la definición, si un subconjunto dado de R^3 es una superficie regular, puede resultar bastante pesado. Antes de acometer otros ejemplos, vamos a presentar dos proposiciones que simplificarán esta tarea. La proposición 1 establece la relación existente entre la definición de superficie regular y la gráfica de una función $z = f(x, y)$. La proposición 2 hace uso del teorema de la función inversa y relaciona la definición de superficie regular con los subconjuntos de la forma $f(x, y, z) = \text{constante}$.

PROPOSICIÓN 1. Si $f: U \rightarrow R$ es una función diferenciable sobre un conjunto abierto U de R^2 , entonces la gráfica de f , es decir, el subconjunto de R^3 dado por $(x, y, f(x, y))$ para $(x, y) \in U$, es una superficie regular.

Demostración. Basta con demostrar que la aplicación $\mathbf{x}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

es una parametrización de la gráfica cuyo entorno coordenado recubre cada punto de dicha gráfica. La condición 1 se satisface claramente y la condición 3 tampoco ofrece dificultad alguna pues $\partial(x, y)/\partial(u, v) = 1$. Finalmente, cada punto (x, y, z) de la gráfica está en la imagen mediante \mathbf{x} del punto único $(u, v) = (x, y) \in U$. Por esta razón \mathbf{x} es inyectiva y, ya que \mathbf{x}^{-1} es la restricción a la gráfica de f de la proyección (continua) de \mathbb{R}^3 sobre el plano xy , \mathbf{x}^{-1} es continua.

Q.E.D.

Antes de empezar con la prop. 2, necesitamos una definición.

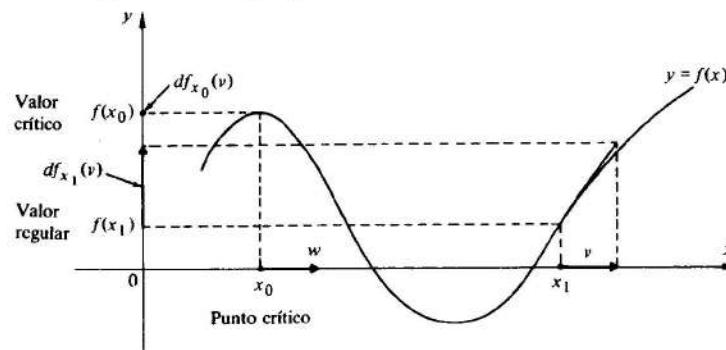


Figura 2-6

DEFINICION 2. Dada una aplicación diferenciable $F: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida sobre un conjunto abierto U de \mathbb{R}^n decimos que $p \in U$ es un punto crítico de F si la diferencial $dF_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ no es una aplicación sobreyectiva (o sobre). La imagen $F(p) \in \mathbb{R}^m$ de un punto crítico se denomina un valor crítico de F . Un punto de \mathbb{R}^m que no es un valor crítico de F se llama valor regular de F .

La terminología está motivada evidentemente por el caso particular en el que $f: U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función real de una variable real. Un punto $x_0 \in U$ es crítico si $f'(x_0) = 0$, es decir, si la diferencial df_{x_0} aplica todos los vectores de \mathbb{R} en el vector cero (f fig. 2-6). Nótese que cualquier $a \notin f(U)$ es trivialmente un valor regular de f .

Si $f: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable, entonces df_p aplicada sobre el vector $(1, 0, 0)$ se obtiene calculando el vector tangente en $f(p)$ a la curva

$$x \longrightarrow f(x, y_0, z_0).$$

Se sigue que

$$df_p(1, 0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = f_x$$

y análogamente que

$$df_p(0, 1, 0) = f_y, \quad df_p(0, 0, 1) = f_z.$$

Concluimos entonces que la matriz de df_p en la base $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ viene dada por

$$df_p = (f_x, f_y, f_z).$$

Nótese que en este caso decir que df_p no es sobreyectiva es equivalente a que $f_x = f_y = f_z = 0$ en p . De aquí, $a \in f(U)$ es un valor regular de $f: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ si y solamente si f_x, f_y y f_z no se anulan simultáneamente en cualquier punto de la imagen inversa de a

$$f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in U: f(x, y, z) = a\}.$$

PROPOSICION 2. Si $f: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable y $a \in f(U)$ es un valor regular de f , entonces $f^{-1}(a)$ es una superficie regular de \mathbb{R}^3 .

Demostración. Sea $p = (x_0, y_0, z_0)$ un punto de $f^{-1}(a)$. Como a es un valor regular de f , se puede admitir, cambiando si fuese preciso el nombre del eje, que $f_z \neq 0$ en p . Definimos la aplicación $F: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mediante

$$F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z)),$$

y denotamos por (u, v, t) a las coordenadas de un punto de \mathbb{R}^3 en donde F toma sus valores. La diferencial de F en p viene dada por

$$dF_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix},$$

de donde

$$\det(dF_p) = f_z \neq 0.$$

Por esta razón podemos aplicar el teorema de la función inversa (cf. el apéndice al cap. 2), que garantiza la existencia de entornos V de p y W de $F(p)$ tales que $F: V \rightarrow W$ es invertible y la inversa $F^{-1}: W \rightarrow V$ es diferenciable (fig. 2-7). Se deduce entonces que las funciones componentes de F^{-1} , es decir, las funciones

$$x = u, \quad y = v, \quad z = g(u, v, t), \quad (u, v, t) \in W,$$

son diferenciables. En particular, $z = g(u, v, a) = h(x, y)$ es una función diferenciable definida en la proyección de V sobre el plano xy . Como

$$F(f^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(u, v, t); t = a\},$$

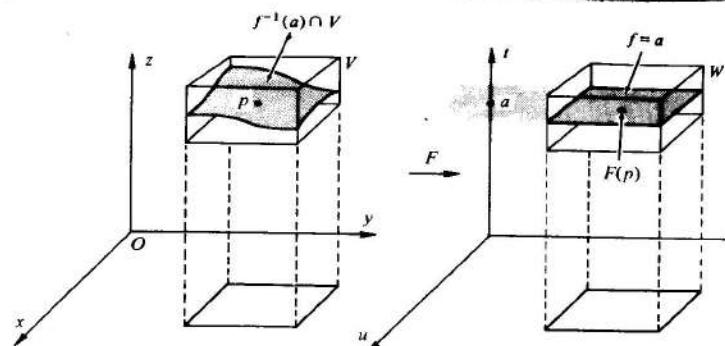


Figura 2-7

concluimos que la gráfica de h es $f^{-1}(a) \cap V$. Por la prop. 1, $f^{-1}(a) \cap V$ es un entorno coordenado de p . Por tanto, cada $p \in f^{-1}(a)$ se puede recubrir con un entorno coordenado, y de ahí, $f^{-1}(a)$ es una superficie regular.

Q.E.D.

Observación 2. La demostración consiste esencialmente en aplicar el teorema de la función inversa «para despejar z » en la ecuación $f(x, y, z) = a$, operación que puede hacerse en un entorno de p si $f_z(p) \neq 0$. Este hecho es un caso especial del resultado más general conocido como el teorema de las funciones implícitas, el cual se deduce del teorema de la función inversa y, de hecho, es equivalente a éste.

Ejemplo 2. El elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

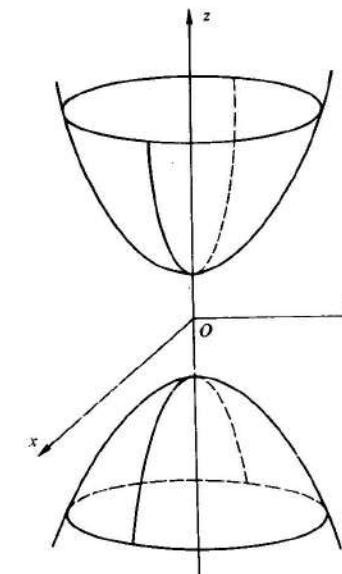
es una superficie regular. De hecho, es el conjunto $f^{-1}(0)$ donde

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

es una función diferenciable y 0 es un valor regular de f . Esto se sigue de que las derivadas parciales $f_x = 2x/a^2$, $f_y = 2y/b^2$, $f_z = 2z/c^2$ sólo se anulan simultáneamente en el punto $(0, 0, 0)$, que no pertenece a $f^{-1}(0)$. Este ejemplo incluye, como caso particular, a la esfera ($a = b = c = 1$).

Los ejemplos de superficies regulares presentados hasta ahora han sido subconjuntos conexos de \mathbb{R}^3 . Una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ se dice *conexa* si dos puntos cualesquiera de la misma se pueden unir mediante una curva continua en S . En la definición de superficie regular no impusimos restricciones sobre la conexidad de las superficies, y el siguiente ejemplo demuestra que las superficies regulares obtenidas a partir de la prop. 2 podrían no ser conexas.

Ejemplo 3. El hiperbolóide de dos hojas $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ es una superficie regular ya que viene dada por $f^{-1}(0)$, donde 0 es un valor regular de $f(x, y, z) = -x^2 - y^2 + z^2 - 1$ (fig. 2-8). Nótese que la superficie S no es conexa; es decir, tomando dos puntos en hojas distintas ($z > 0$ y $z < 0$) no es posible unirlos mediante una curva continua $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ contenida en la superficie; pues de otra forma, z cambia de signo y, para algún t_0 , tendríamos $z(t_0) = 0$, lo que significaría que $\alpha(t_0) \notin S$.

Figura 2-8. Una superficie no conexa: $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$.

A propósito de lo hecho, el argumento del ejemplo 3 puede usarse para probar una propiedad de las superficies *conexas* que utilizaremos repetidas veces.

Si $f: S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua que no se anula sobre una superficie conexa S , entonces f no cambia de signo en S .

Para probar esto, usamos el teorema del valor intermedio (apéndice al cap. 2, prop. 4). Admitamos, por contradicción, que $f(p) > 0$ y $f(q) < 0$ en puntos $p, q \in S$. Como S es conexa, existe una curva continua $\alpha: [a, b] \rightarrow S$ con $\alpha(a) = p$, $\alpha(b) = q$. Aplicando el teorema del valor intermedio a la función continua $f \circ \alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, encontramos que existe $c \in (a, b)$ con $f \circ \alpha(c) = 0$; o sea, f es cero en $\alpha(c)$; una contradicción.

Ejemplo 4. El toro T es una «superficie» generada al rotar un círculo S^1 de radio r alrededor de una recta contenida en el plano del círculo y alejada una distancia $a > r$ del centro de dicho círculo (fig. 2-9).

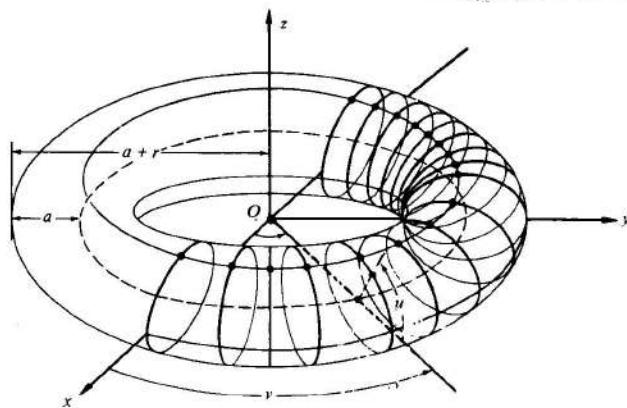


Figura 2-9

Sea S^1 el círculo en el plano yz con centro en el punto $(0, a, 0)$. Entonces, S^1 viene dado por $(y - a)^2 + z^2 = r^2$, y los puntos sobre la figura T que se obtiene al rotar el círculo alrededor del eje z satisfacen la ecuación

$$z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2.$$

Por tanto, T es la imagen inversa de r^2 mediante la función

$$f(x, y, z) = z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2.$$

Esta función es diferenciable cuando $(x, y) \neq (0, 0)$ y como

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

r^2 es un valor regular de f . Se deduce entonces que el toro T es una superficie regular.

La proposición 1 dice que la gráfica de una función diferenciable es una superficie regular. La siguiente proposición proporciona un recíproco local de este hecho, es decir, cualquier superficie regular es localmente la gráfica de una función diferenciable.

PROPOSICION 3. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y $p \in S$. Entonces existe un entorno V de p en S tal que V es la gráfica de una función diferenciable que tiene una de las tres formas siguientes: $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$, $x = h(y, z)$.

Demostración. Sea $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización de S en p , y escribamos $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in U$. Por la condición 3 de la def. 1, alguno de los determinantes jacobianos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}$$

no es cero en $\mathbf{x}^{-1}(p) = q$.

Admitamos primero que $(\partial(x, y)/\partial(u, v))(q) \neq 0$, y consideremos la aplicación $\pi \circ \mathbf{x}: U \rightarrow \mathbb{R}^2$, donde π es la proyección $\pi(x, y, z) = (x, y)$. Entonces $\pi \circ \mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, y, como $(\partial(x, y)/\partial(u, v))(q) \neq 0$, podemos aplicar el teorema de la función inversa para garantizar la existencia de entornos V_1 de q , V_2 de $\pi \circ \mathbf{x}(q)$ tal que $\pi \circ \mathbf{x}$ aplica V_1 difeomórficamente sobre V_2 (fig. 2-10). Se sigue que π restringida a $\mathbf{x}(V_1) = V$ es inyectiva y que hay una inversa diferenciable $(\pi \circ \mathbf{x})^{-1}: V_2 \rightarrow V_1$. Obsérvese que, como \mathbf{x} es un homeomorfismo, V es un entorno de p en S . Si componemos ahora la aplicación $(\pi \circ \mathbf{x})^{-1}: (x, y) \rightarrow (u(x, y), v(x, y))$ con la función $(u, v) \rightarrow z(u, v)$, encontramos que V es la gráfica de la función diferenciable $z = z(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$, y esto establece el primer caso.

Los casos restantes se pueden tratar de la misma manera, dando lugar a $x = h(y, z)$ e $y = g(x, z)$.

Q.E.D.

La siguiente proposición dice que si ya sabemos que S es una superficie regular y tenemos una candidato \mathbf{x} como parametrización, no tenemos que comprobar que \mathbf{x}^{-1} es continua, en el supuesto de que las otras condiciones se satisfagan. Se usó esta observación en el ejemplo 1.

PROPOSICION 4. Sea $p \in S$ un punto de una superficie regular S y sea $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación con $p \in \mathbf{x}(U) \subset S$ que cumple las condiciones 1 y 3 de la def. 1. Admítase que \mathbf{x} es inyectiva. Entonces \mathbf{x}^{-1} es continua.

Demostración. Sea $q \in \mathbf{x}(U)$. A causa de la regularidad de S , existe un entorno $W \subset S$ de q tal que W es la gráfica de una función diferenciable definida, pongamos por caso, sobre un abierto V del plano xy . Sea $N = \mathbf{x}^{-1}(W) \subset U$ y definamos $h = \pi \circ \mathbf{x}: N \rightarrow V$ donde $\pi(x, y, z) = (x, y)$. Entonces $dh = a \circ dx$ es no singular $\mathbf{x}^{-1}(q) = r$. Por el teorema de la función inversa, existe un entorno $\Omega \subset N$ tal que $h: \Omega \rightarrow h(\Omega)$ es un difeomorfismo. Nótese que $\mathbf{x}(\Omega)$ es un abierto de S y que, restringida a $\mathbf{x}(\Omega)$, $\mathbf{x}^{-1} = h^{-1} \circ \pi$ es una composición de aplicaciones continuas. Así, \mathbf{x}^{-1} es continua en q . Como q es arbitrario, \mathbf{x}^{-1} es continua en $\mathbf{x}(\Omega)$.

Q.E.D.

Ejemplo 5. El cono de una hoja C , dado por

$$z = \pm \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

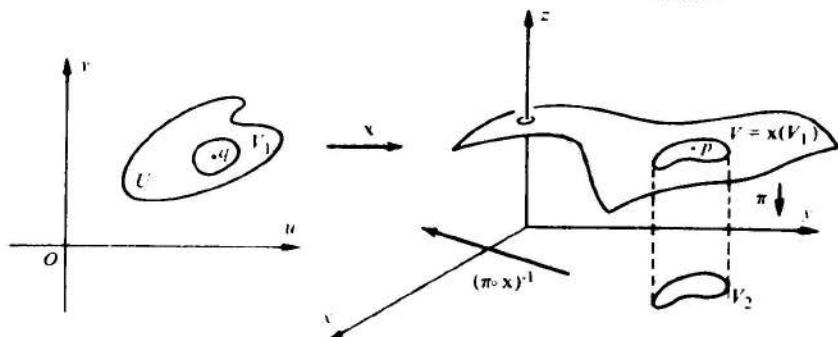


Figura 2-10

no es una superficie regular. Obsérvese que no podemos concluir esto del solo hecho de que la parametrización «natural»

$$(x, y) \rightarrow (x, y, +\sqrt{x^2 + y^2})$$

no es diferenciable; podría haber otras parametrizaciones satisfaciendo la def. 1.

Para demostrar que no es éste el caso, usamos la prop. 3. Si C fuese una superficie regular, debería ser, en un entorno de $(0, 0, 0) \in C$, la gráfica de una función diferenciable con una de las tres formas siguientes: $y = h(x, z)$, $x = g(y, z)$, $z = f(x, y)$. Las dos primeras formas pueden descartarse por el simple hecho de que las proyecciones de C sobre los planos xz e yz no son inyectivas. La última forma debería coincidir, en un entorno de $(0, 0, 0)$, con $z = +\sqrt{x^2 + y^2}$. Ya que $z = +\sqrt{x^2 + y^2}$ no es diferenciable en $(0, 0)$, esto es imposible.

Ejemplo 6. Una parametrización para el toro T del ejemplo 4 puede darse por (fig. 2-9)

$$\mathbf{z}(u, v) = ((r \cos u + a) \cos v, (r \cos u + a) \sin v, r \sin u),$$

donde $0 < u < 2\pi$, $0 < v < 2\pi$.

La condición 1 de la def. 1 se comprueba fácilmente y la condición 3 se reduce a un cálculo directo, que se deja como ejercicio. Como sabemos que T es una superficie regular, la condición 2 es equivalente, por la prop. 4, al hecho de que \mathbf{x} sea inyectiva.

Para probar que \mathbf{x} es inyectiva, primero observamos que $\sin u = z/r$; también, si $\sqrt{x^2 + y^2} \leq a$, entonces $\pi/2 \leq u \leq 3\pi/2$, y si $\sqrt{x^2 + y^2} \geq a$, entonces o bien $0 < u \leq \pi/2$, o bien $3\pi/2 \leq u < 2\pi$. Así, dado (x, y, z) , éste determina u , $0 < u < 2\pi$, con unicidad. Conociendo u , x e y encontramos $\cos v$ y $\sin v$. Esto determina a v con unicidad, $0 < v < 2\pi$. Así, \mathbf{x} es inyectiva.

Es fácil ver que el toro puede recubrirse por tres de tales entornos coordinados.

EJERCICIOS³

- Demuéstrese que el cilindro $\{(x, y, z) \in R^3; x^2 + y^2 = 1\}$ es una superficie regular, hallando parametrizaciones cuyos entornos coordinados lo recubran.
- ¿Es el conjunto $\{(x, y, z) \in R^3; z = 0 \text{ y } x^2 + y^2 \leq 1\}$ una superficie regular? ¿Es el conjunto $\{(x, y, z) \in R^3; z = 0 \text{ y } x^2 + y^2 < 1\}$ una superficie regular?
- Demostrar que el cono de dos hojas, con vértice en el origen, es decir, el conjunto $\{(x, y, z) \in R^3; x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$, no es una superficie regular.
- Sea $f(x, y, z) = z^2$. Demostrar que 0 no es un valor regular de f aunque $f^{-1}(0)$ sea una superficie regular.
- Sea $P = \{(x, y, z) \in R^3; x = y\}$, un plano, y sea $\mathbf{x}: U \subset R^2 \rightarrow R^3$ definida por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u + v, u + v, uv),$$

donde $U = \{(u, v) \in R^2; u > v\}$. Claramente, $\mathbf{x}(U) \subset P$. ¿Es \mathbf{x} una parametrización de P ?

6. Dar otra demostración de la prop. 1 aplicando la prop. 2 a $h(x, y, z) = f(x, y) - z$.

7. Sea $f(x, y, z) = (x + y + z - 1)^2$.

- Localizar los puntos y valores críticos de f .
- ¿Para qué valores de c es una superficie regular el conjunto $f(x, y, z) = c$?
- Respóndase a las cuestiones de las partes a y b tomando la función $f(x, y, z) = xyz^2$.

8. Sea $\mathbf{x}(u, v)$ como en la def. 1. Verificar que $d\mathbf{x}_q: R^2 \rightarrow R^3$ es inyectiva si y solamente si

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \neq 0.$$

9. Sea V un conjunto abierto del plano xy . Demuéstrese que el conjunto

$$\{(x, y, z) \in R^3; z = 0 \text{ and } (x, y) \in V\}$$

es una superficie regular.

10. Sea C una figura como el «8» en el plano xy y sea S la superficie cilíndrica que se proyecta sobre C (fig. 2-11); es decir,

$$S = \{(x, y, z) \in R^3; (x, y) \in C\}.$$

¿Es el conjunto S una superficie regular?

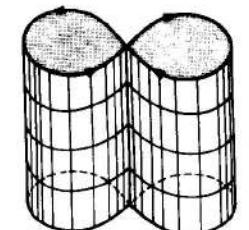


Figura 2-11

³ Los que hayan omitido las demostraciones de esta sección, deberían hacerlo propio con los ejercicios 17-19.

11. Demuéstrese que el conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 - y^2\}$ es una superficie regular, comprobando que las partes a y b son parametrizaciones para S :

a. $\mathbf{x}(u, v) = (u + v, u - v, 4uv)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.
 *b. $\mathbf{x}(u, v) = (u \cosh v, u \sinh v, u^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $u \neq 0$.

¿Qué partes de S recubren estas parametrizaciones?

12. Demostrar que $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \sen u \cos v, b \sen u \sin v, c \cos u), a, b, c, \neq 0,$$

donde $0 < u < \pi$, $0 < v < 2\pi$, es una parametrización para el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Describanse geométricamente las curvas $u = \text{constante}$ sobre el elipsoide.

- *13. Hallar una parametrización para el hiperoloide de dos hojas $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; -x^2 - y^2 + z^2 = 1\}$.

14. Una semirrecta $[0, +\infty)$ es perpendicular a una recta E y rota alrededor de E desde una posición inicial dada, en tanto que su origen se mueve a lo largo de E . El movimiento es tal que cuando $[0, +\infty)$ ha girado hasta un ángulo θ , el origen se halla a una distancia $d = \sen^2(\theta/2)$ de su posición inicial sobre E . Verifíquese que al suprimir la recta E de la imagen de la línea en rotación obtenemos una superficie regular. Si el movimiento fuese tal que $d = \operatorname{seb}((\theta/2))$, ¿qué más se necesitaría excluir para tener una superficie regular?

- *15. Sean dos puntos $p(t)$ y $q(t)$ que se mueven con la misma velocidad, p empezando en $(0, 0, 0)$ y desplazándose a lo largo del eje z y q empezando en $(a, 0, 0)$, $a \neq 0$, y desplazándose paralelamente al eje y . Demuéstrese que la recta que pasa por $p(t)$ y $q(t)$ describe un conjunto en \mathbb{R}^3 dado por $y(x - a) + zx = 0$. ¿Es este conjunto una superficie regular?

16. Una manera de obtener un sistema de coordenadas para la esfera S^2 , dada por $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$, es considerar la denominada *proyección estereográfica* $\pi: S^2 \sim \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ que lleva un punto $p = (x, y, z)$ de la esfera S^2 exceptuando el polo norte $N = (0, 0, 2)$, sobre la intersección del plano xy con la recta que conecta a N con p (fig. 2-12).

Sea $(u, v) = \pi(x, y, z)$, donde $(x, y, z) \in S^2 \sim \{N\}$ y $(u, v) \in$ al plano xy .

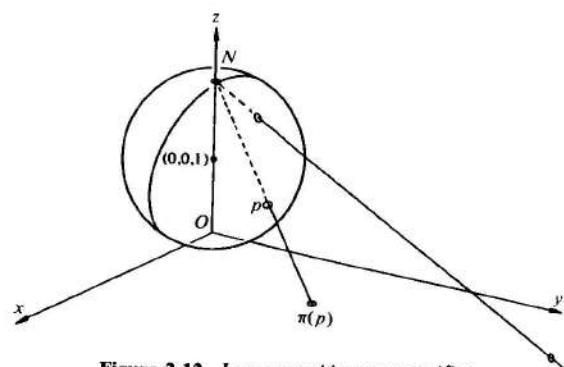


Figura 2-12. La proyección estereográfica.

- a. Demostrar que $\pi^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ viene dada por

$$\pi^{-1} \begin{cases} x = \frac{4u}{u^2 + v^2 + 4}, \\ y = \frac{4v}{u^2 + v^2 + 4}, \\ z = \frac{2(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2 + 4}. \end{cases}$$

- b. Demostrar que es posible, usando la proyección estereográfica, recubrir la esfera con dos entornos coordenados.

17. Definir una curva regular de manera análoga a una superficie regular. Pruebese que

- a. La imagen inversa de un valor regular para una función diferenciable

$$f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

es una curva regular plana. Dar un ejemplo de ese tipo de curva que no sea conexa.

- b. La imagen inversa de un valor regular para una aplicación diferenciable

$$F: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

es una curva regular en \mathbb{R}^3 . Demuéstrese la relación entre esta proposición y la manera clásica de introducir una curva en \mathbb{R}^3 como la intersección de dos superficies.

- *c. El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 = y^3\}$ no es una curva regular.

- *18. Supóngase que $f(x, y, z) = u = \text{constante}$, $g(x, y, z) = v = \text{constante}$, $h(x, y, z) = w = \text{constante}$, describen tres familias de superficies regulares y admítase que en (x_0, y_0, z_0) el jacobiano

$$\frac{\partial(f, g, h)}{\partial(x, y, z)} \neq 0.$$

Probar que en un entorno de (x_0, y_0, z_0) las tres familias estarán descritas por una aplicación $F(u, v, w) = (x, y, z)$ de un conjunto abierto en \mathbb{R}^3 con valores en \mathbb{R}^3 , donde una parametrización local de la superficie de la familia $f(x, y, z) = u$, por ejemplo, se obtiene al fijar $u = \text{constante}$ en esta aplicación. Determinar F para el caso en el que las tres familias de superficies son

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = u = \text{const.}; \quad (\text{esferas con centro } (0, 0, 0))$$

$$g(x, y, z) = \frac{y}{x} = v = \text{const.}, \quad (\text{planos que contienen al eje } z)$$

$$h(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{z^2} = w = \text{const.}, \quad (\text{conos con vértice en } (0, 0, 0)).$$

- *19. Sea $\alpha: (-3, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por (fig. 2-13)

$$\alpha(t) = \begin{cases} (0, -(t+2)), & \text{si } t \in (-3, -1), \\ = \text{a una curva parametrizada regular que una } p = (0, -1) \text{ con } q = \left(\frac{1}{\pi}, 0\right), \\ \text{si } t \in \left(-1, -\frac{1}{\pi}\right), \\ = \left(-t, -\operatorname{sen} \frac{1}{t}\right), & \text{si } t \in \left(-\frac{1}{\pi}, 0\right). \end{cases}$$

Es posible definir la curva que une a p con q de forma que las derivadas de α sean continuas en los puntos correspondientes y tal que α carezca de autointersecciones. Sea C la traza de α .

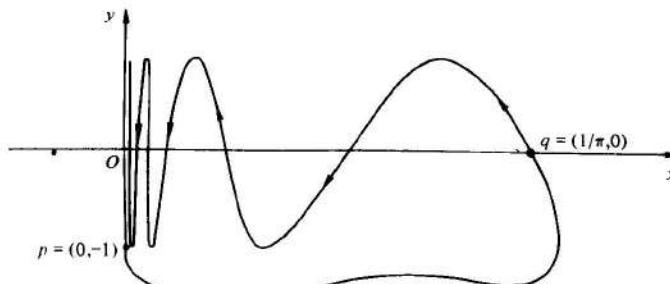


Figura 2-13. La escala horizontal es distinta de la escala vertical.

- a. ¿Es C una curva regular?
 b. Consideremos una recta normal al plano R^2 que al recorrer C describa un «cilindro» S .
 ¿Es S una superficie regular?

2.3. Cambio de parámetros; funciones diferenciables sobre superficies⁴

La geometría diferencial se interesa por aquellas propiedades de las superficies que dependen de su comportamiento en el entorno de un punto. La definición de superficie regular dada en la sec. 2.2 se adecúa a este propósito. De acuerdo con esta definición, cada punto p de una superficie regular pertenece a un entorno coordenado. Los puntos de tal entorno se caracterizan por sus coordenadas, por esta razón, deberíamos ser capaces de definir las propiedades locales que nos interesan en términos de estas coordenadas.

Por ejemplo, es importante que podamos definir qué se entiende por diferenciabilidad en un punto p de una superficie regular S para una función $f: S \rightarrow R$. Una forma natural de proceder consiste en elegir un entorno coordenado de p , de coordenadas u, v , y decir que f es diferenciable en p , si su expresión en las coordenadas u y v admite derivadas parciales continuas de todos los órdenes.

Sin embargo, el mismo punto de S pertenece a varios entornos coordinados (en la esfera del ejemplo 1 de la sec. 2.2, cualquier punto en el interior del primer octante pertenece a tres de los entornos coordinados dados). Además, podría elegirse otro sistema de coordenadas en un entorno de p (los puntos mencionados de la esfera también pueden parametrizarse mediante coordenadas geográficas o por la proyección estereográfica; cf. el ejercicio 16, sec. 2.2). Para que la definición dada tenga sentido, es necesario que no dependa del sistema de coordenadas elegido. En otras palabras, debe demostrarse que cuando p pertenezca a dos entornos coordinados, con parámetros (u, v) y (ξ, η) , es posible pasar de uno de estos pares de coordenadas al otro por medio de una transformación diferenciable.

La siguiente proposición demuestra que esto es cierto.

PROPOSICIÓN 1 (Cambio de parámetros). *Sea p un punto de una superficie regular S , y sean $x: U \subset R^2 \rightarrow S$, $y: V \subset R^2 \rightarrow S$ dos parametrizaciones de S tal que*

⁴ Las demostraciones en esta sección pueden omitirse en una primera lectura.

$$p \in x(U) \cap y(V) = W.$$

Entonces el «cambio de coordenadas» $h = x^{-1} \circ y: y^{-1}(W) \rightarrow x^{-1}(W)$ (vé la fig. 2.14) es un difeomorfismo; es decir, h es diferenciable y tiene una inversa diferenciable.

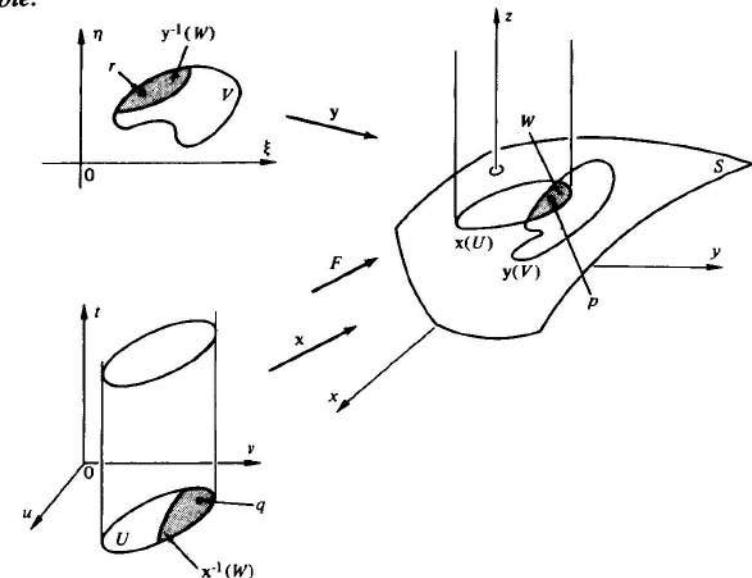


Figura 2-14

En otras palabras, si x e y vienen dadas por

$$\begin{aligned} x(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), & (u, v) \in U, \\ y(\xi, \eta) &= (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta)), & (\xi, \eta) \in V, \end{aligned}$$

entonces el cambio de coordenadas h , dado por

$$u = u(\xi, \eta), \quad v = v(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in y^{-1}(W),$$

tiene la propiedad de que las funciones u y v admiten derivadas parciales continuas de todos los órdenes, y la aplicación h puede invertirse, dando lugar a

$$\xi = \xi(u, v), \quad \eta = \eta(u, v), \quad (u, v) \in x^{-1}(W),$$

donde las funciones ξ y η también admiten derivadas parciales de todos los órdenes. Como

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)} \cdot \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(u, v)} = 1,$$

esto implica que los determinantes jacobianos de h y h^{-1} son no nulos en todos los puntos.

Demuestra de la prop. 1. $h = x^{-1} \circ y$ es un homeomorfismo, ya que es la composición de homeomorfismos (cf. el apéndice al cap. 2, prop. 3). No es posible concluir, por un argumento análogo, que h es diferenciable, ya que x^{-1} está definida en un conjunto abierto de S y todavía no sabemos lo que significa la diferenciabilidad de una función sobre S .

Procedemos de la siguiente manera. Sea $r \in y^{-1}(W)$ y pongamos $q = h(r)$. Como $x(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ es una parametrización, podemos suponer, cambiando los nombres de los ejes si fuese necesario, que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

Extendemos x a una aplicación $F: U \times R \rightarrow R^3$ definida por

$$F(u, v, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t), \quad (u, v) \in U, t \in R.$$

Geométricamente, F aplica un cilindro vertical C , sobre U , en un «cilindro vertical» sobre $x(U)$, aplicando cada sección de C con altura t en la superficie $x(u, v) + te_3$ es el vector unitario del eje z (fig. 2-14).

Es claro que F es diferenciable y que la restricción $F|_{U \times \{0\}} = x$. Calculando el determinante de la diferencial dF_q , obtenemos

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

Por esta razón es posible aplicar el teorema de la función inversa, que garantiza la existencia de un entorno M de $x(q)$ en R^3 tal que F^{-1} existe y es diferenciable en M .

Por la continuidad de y , existe un entorno N de r en V tal que $y(N) \subset M$ (apéndice al cap. 2, prop. 2). Nótese que, restringida a N , $h|_N = F^{-1} \circ y|_N$ es la composición de aplicaciones diferenciables. Así, podemos aplicar la regla de la cadena para aplicaciones (apéndice al cap. 2, prop. 8) y concluir que h es diferenciable en r . Como r es arbitrario, h es diferenciable en $y^{-1}(W)$.

Puede aplicarse exactamente el mismo argumento para demostrar que la aplicación h^{-1} es diferenciable, y, por tanto, h es un difeomorfismo.

Q.E.D.

Ahora daremos una definición explícita de lo que se entiende por función diferenciable sobre una superficie regular.

DEFINICIÓN 1. Sea $f: V \subset S \rightarrow R$ una función definida en un subconjunto abierto V de una superficie regular S . Se dice que f es diferenciable en $p \in V$ si, para alguna parametrización $x: U \subset R^2 \rightarrow S$ con $p \in x(U) \subset V$, la composición $f \circ x: U \subset R^2 \rightarrow R$ es diferenciable en $x^{-1}(p)$. f es diferenciable en V si es diferenciable en todos los puntos de V .

Se deduce inmediatamente de la última proposición que la definición dada no depende de la elección de la parametrización x . De hecho, si $y: V \subset R^2 \rightarrow S$ es otra parametrización con $p \in y(V)$, y si $h = x^{-1} \circ y$, entonces $f \circ y = f \circ x \circ h$ es diferenciable también, de donde se tiene la mencionada independencia.

Observación 1. Frecuentemente cometemos el abuso notacional de indicar a f y $f \circ x$ con el mismo símbolo $f(u, v)$, diciendo que $f(u, v)$ es la expresión de f en el sistema de coordenadas x . Esto es equivalente a identificar $x(U)$ con U y a imaginarse a (u, v) , indiferentemente, como punto de U y como punto de $x(U)$ con las coordenadas (u, v) . De ahora en adelante, se utilizarán abusos de lenguaje de este tipo sin otros comentarios.

Ejemplo 1. Sea S una superficie regular y $V \subset R^3$ un conjunto abierto tal que $S \subset V$. Sea $f: V \subset R^3 \rightarrow R$ una función diferenciable. Entonces, la restricción de f a S es una función diferenciable sobre S . De hecho, para cada $p \in S$ y cualquier parametrización $x: U \subset R^2 \rightarrow S$ en p , la función $f \circ x: U \rightarrow R$ es diferenciable. En particular, son diferenciables las siguientes funciones:

1. La función *altura* relativa a un vector unitario $v \in R^3$, $h: S \rightarrow R$, dada por $h(p) = p \cdot v$, $p \in S$, donde el punto denota el producto interior usual de R^3 . $h(p)$ es la altura de $p \in S$ relativa al plano normal a v que pasa por el origen (fig. 2-15).
2. El cuadrado de la distancia hasta un punto fijo $p_0 \in R^3$, $f(p) = |p - p_0|^2$, $p \in S$. La necesidad de tomar el cuadrado se debe al hecho de que la distancia $|p - p_0|$ no es diferenciable en $p = p_0$.

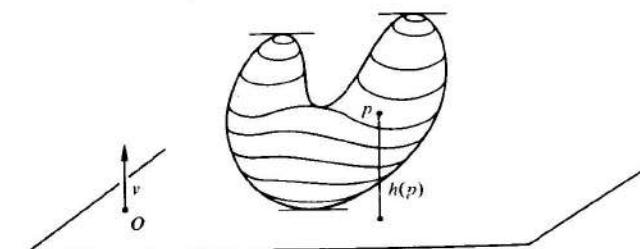


Figura 2-15

Observación 2. La demostración de la prop. 1 hace un uso esencial del hecho de que la inversa de una parametrización es continua. En vista de que necesitamos la prop. 1 para ser capaces de definir la diferenciabilidad de funciones sobre superficies (un concepto vital), no podemos prescindir de esta condición en la definición de superficie regular (cf. la observación 1 de la sec. 2-2).

La definición de diferenciabilidad se puede extender fácilmente al caso de aplicaciones entre superficies. Una aplicación continua $\varphi: V_1 \subset S_1 \rightarrow S_2$ de un conjunto abierto V_1 de una superficie regular S_1 en una superficie regular S_2 se dice *diferenciable* en $p \in V_1$ si, dadas las parametrizaciones

$$\mathbf{x}_1: U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1 \quad \mathbf{x}_2: U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2,$$

con $p \in \mathbf{x}_1(U_1)$ y $\varphi(\mathbf{x}_1(U_1)) \subset \mathbf{x}_2(U_2)$, la aplicación

$$\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1: U_1 \rightarrow U_2$$

es diferenciable en $q = \mathbf{x}_1^{-1}(p)$ (fig. 2-16).

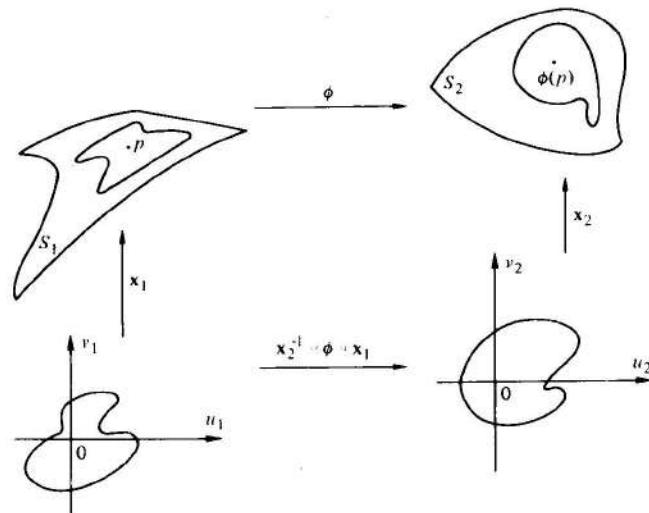


Figura 2-16

En otras palabras, φ es diferenciable si, cuando se expresa en coordenadas locales como $\varphi(u_1, u_2) = (\varphi_1(u_1, u_2), \varphi_2(u_1, u_2))$, las funciones φ_1 y φ_2 tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes.

La demostración de que esta definición no depende de la elección de las parametrizaciones se deja como ejercicio.

Debe mencionarse que la noción natural de equivalencia asociada a la diferenciabilidad es el concepto de difeomorfismo. Dos superficies regulares S_1 y S_2 son *difeomorfas* si existe una aplicación diferenciable $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ con inversa diferenciable $\varphi^{-1}: S_2 \rightarrow S_1$. Tal aplicación φ se denomina un *difeomorfismo* de S_1 en S_2 . La noción de difeomorfismo desempeña el mismo papel en el estudio de superficies regulares que el concepto de isomorfismo en el estudio de espacios vectoriales o el de congruencia en la geometría euclíadiana. En otras palabras, desde el punto de vista de la diferenciabilidad, dos superficies difeomorfas son indistinguibles.

Ejemplo 2. Si $x: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ es una parametrización, $x^{-1}: x(U) \rightarrow \mathbb{R}^2$ es diferenciable. De hecho, para cualquier $p \in x(U)$ y cualquier parametrización $y: V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ en p , tenemos que $x^{-1} \circ y: y^{-1}(W) \rightarrow x^{-1}(W)$, donde

$$W = x(U) \cap y(V),$$

es diferenciable. Esto prueba que U y $x(U)$ son difeomorfos (es decir, cada superficie regular es difeomorfa, localmente, a un plano) y justifica la identificación que se hizo en la observación 1.

Ejemplo 3. Sean S_1 y S_2 superficies regulares. Supóngase que $S_1 \subset V \subset \mathbb{R}^3$, donde V es un conjunto abierto de \mathbb{R}^3 , y que $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación diferenciable tal que $\varphi(S_1) \subset S_2$. Entonces la restricción $\varphi|S_1: S_1 \rightarrow S_2$ es una aplicación diferenciable.

De hecho, dado $p \in S_1$ y las parametrizaciones $\mathbf{x}_1: U_1 \rightarrow S_1$, $\mathbf{x}_2: U_2 \rightarrow S_2$, con $p \in \mathbf{x}_1(U_1)$ y $\varphi(\mathbf{x}_1(U_1)) \subset \mathbf{x}_2(U_2)$, tenemos que la aplicación

$$\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1: U_1 \rightarrow U_2$$

es diferenciable. Los que siguen, son casos particulares de este ejemplo general:

1. Admitamos que S es simétrica con respecto al plano xy ; o sea, si $(x, y, z) \in S$, entonces también $(x, y, -z) \in S$. Entonces la aplicación $\sigma: S \rightarrow S$, que lleva $p \in S$ a su punto simétrico, es diferenciable, pues es la restricción a S de $\sigma: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\sigma(x, y, z) = (x, y, -z)$. Esto se generaliza, por supuesto, a superficies simétricas con respecto a cualquier plano de \mathbb{R}^3 .
2. Sea $R_{z, \theta}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la rotación de ángulo θ alrededor del eje z , y sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular invariante frente a esta rotación; es decir, si $p \in S$, $R_{z, \theta}(p) \in S$. Entonces la restricción $R_{z, \theta}|S: S \rightarrow S$ es una aplicación diferenciable.
3. Sea $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación dada por $\varphi(x, y, z) = (xa, yb, zc)$, donde a, b y c son números reales no nulos. Claramente φ es diferenciable, y la restricción $\varphi|S^2$ es una aplicación de la esfera

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

en el elipsoide

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

(cf. el ejemplo 6 del apéndice al cap. 2).

Observación 3. La proposición 1 implica (cf. el ejemplo 2) que una parametrización $x: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ es un difeomorfismo de U sobre $x(U)$. Realmente, ahora podemos caracterizar a las superficies regulares como los subconjuntos $S \subset \mathbb{R}^3$ que son difeomorfos localmente a \mathbb{R}^2 ; es decir, para cada punto $p \in S$, existe un entorno V de p en S , un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y una aplicación $x: U \rightarrow V$, que es un difeomorfismo.

mo. Esta bella caracterización podría tomarse como punto de partida para el tratamiento de las superficies (véase el ejercicio 13).

A estas alturas, podríamos retornar a la teoría de curvas y considerarlas desde el punto de vista de este capítulo, es decir, como subconjuntos de R^3 . Solamente haremos mención de ciertos puntos fundamentales, dejando los detalles al cuidado del lector.

El símbolo I denotará un intervalo abierto de la recta R . Una *curva regular* en R^3 es un subconjunto $C \subset R^3$ con la siguiente propiedad: para cada punto $p \in C$ hay un entorno V de p en R^3 y un homeomorfismo diferenciable $\alpha: I \subset R \rightarrow V \cap C$ tal que la diferencial $d\alpha$, es inyectiva para cada $t \in I$ (fig. 2-17).

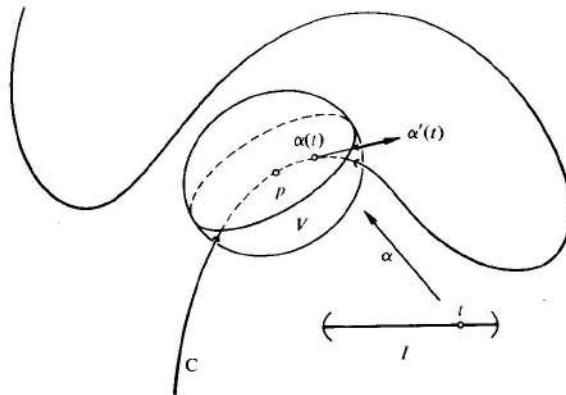


Figura 2-17. Una curva regular.

Es posible probar (ejercicio 15) que el cambio de parámetros viene dado (como en las superficies) por un difeomorfismo. A partir de este resultado fundamental, es posible decidir cuándo una propiedad dada, obtenida por medio de una parametrización, es independiente de esa parametrización. Tal propiedad será entonces una propiedad local del conjunto C .

Por ejemplo, se demuestra que la longitud de arco, definida en el cap. 1, es independiente de la parametrización elegida (ejercicio 15) y, en consecuencia, es una propiedad del conjunto C . Ya que siempre es posible parametrizar localmente una curva regular C por la longitud de arco, las propiedades (curvatura, torsión, etc.) determinadas por medio de esta parametrización son propiedades locales de C . Esto prueba que la teoría local de curvas desarrollada en el cap. 1 es válida para curvas regulares.

Algunas veces una superficie viene definida mediante el desplazamiento de cierta curva regular de una forma específica. Esto sucede en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4 (Superficies de revolución). Sea $S \subset R^3$ el conjunto que se obtiene al rotar una curva regular plana C alrededor de un eje en el plano de la curva, no

incidente con ésta. Tomaremos el plano xz como el plano de la curva y el eje z como eje de rotación. Sea

$$x = f(v), \quad z = g(v), \quad a < v < b, \quad f(v) > 0,$$

una parametrización de C y denotemos por u al ángulo de rotación alrededor del eje z . Obtenemos así una aplicación

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$$

del conjunto abierto $U = \{(u, v) \in R^2; 0 < u < 2\pi, a < v < b\}$ en S (fig. 2-18).

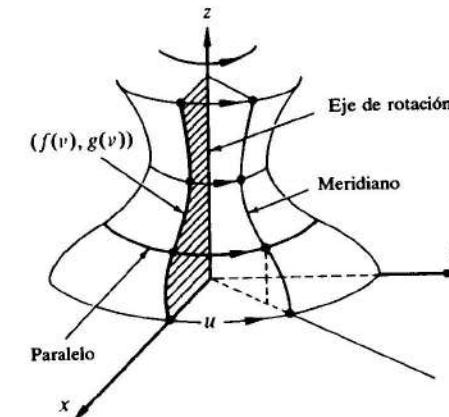


Figura 2-18. Una superficie de revolución.

Pronto veremos que \mathbf{x} satisface las condiciones de parametrización en la definición de superficie regular. Como S puede recubrirse totalmente por parametrizaciones similares, se deduce que S es una superficie regular denominada *superficie de revolución*. La curva C se denomina *curva generatriz* de S , y el eje z es el *eje de rotación* de S . Los círculos que describen los puntos de C se denominan los *paralelos* de S , y las diversas posiciones de C sobre S se denominan los *meridianos* de S .

Para demostrar que \mathbf{x} es una parametrización de S debemos verificar las condiciones 1, 2 y 3 de la def. 1, sec. 2.2. Las condiciones 1 y 3 son directas, y quedan al cuidado del lector. Para demostrar que \mathbf{x} es un homeomorfismo, primero probamos que \mathbf{x} es inyectiva. De hecho, ya que $(f(v), g(v))$ es una parametrización de C , dados z y $x^2 + y^2 = (f(v))^2$, podemos determinar v con unicidad. Luego \mathbf{x} es inyectiva.

Observamos, de nuevo a causa de que $(f(v), g(v))$ es una parametrización de C , que v es una función continua de z y de $\sqrt{x^2 + y^2}$, por tanto una función continua de (x, y, z) .

Para probar que x^{-1} es continua, sólo resta demostrar que u es una función continua de (x, y, z) . Para verlo, primero observamos que si $u \neq \pi$, obtenemos, al ser $f(v) \neq 0$,

$$\begin{aligned}\operatorname{tag} \frac{u}{2} &= \frac{\sin \frac{u}{2}}{\cos \frac{u}{2}} = \frac{2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}}{2 \cos^2 \frac{u}{2}} = \frac{\sin u}{1 + \cos u} \\ &= \frac{\frac{y}{f(v)}}{1 + \frac{x}{f(v)}} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}};\end{aligned}$$

de aquí,

$$u = 2 \operatorname{tag}^{-1} \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Luego, si $u \neq \pi$, u es una función continua de (x, y, z) . De la misma manera, si u está en un pequeño intervalo centrado en π , obtenemos

$$u = 2 \operatorname{cotag}^{-1} \frac{y}{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Así, u es una función continua de (x, y, z) . Esto demuestra que x^{-1} es continua y concluye la verificación.

Observación 4. Nuestra definición de superficie de revolución presenta un ligero problema. Si $C \subset R^2$ es una curva regular cerrada y plana que es simétrica con respecto a un eje r de R^3 , entonces, al rotar C alrededor de r , obtenemos una superficie que, según puede demostrarse, es regular y que también debería denominarse superficie de revolución (cuando C es un círculo y r contiene un diámetro de C , la superficie es la esfera). Para adaptarla a nuestra definición, tendríamos que excluir dos de sus puntos, a saber, los puntos donde r corta a C . Por razones técnicas, queremos mantener la terminología previa y llamaremos *superficies de revolución ampliadas* a las últimas superficies.

Debemos hacer ahora un comentario final sobre nuestra definición de superficie. Hemos elegido el definir una superficie (regular) como un subconjunto de R^3 . Si queremos considerar propiedades globales, así como locales, de las superficies, éste es el marco correcto. No obstante, el lector debería preguntarse por qué no hemos definido una superficie simplemente como una superficie parametrizada, como en el caso de las curvas. Esto puede hacerse y de hecho una cierta cantidad de literatura clásica en geometría diferencial fue introducida de esta manera. No se causan serios perjuicios en tanto que se consideren únicamente propiedades locales. Sin embargo, los conceptos globales básicos como la orientación (a considerar en las secc. 2.6 y 3.1), tienen que excluirse, o tratarse inadecuadamente, con tal enfoque.

En cualquier caso, la noción de superficie parametrizada es útil en algunas ocasiones y debe incluirse aquí.

DEFINICIÓN 2. Una superficie parametrizada $\mathbf{x}: U \subset R^2 \rightarrow R^3$ es una aplicación diferenciable de un conjunto abierto $U \subset R^2$ en R^3 . El conjunto $\mathbf{x}(U) \subset R^3$ se denomina la traza de \mathbf{x} . \mathbf{x} es regular si la diferencial $d\mathbf{x}_q: R^2 \rightarrow R^3$ es inyectiva para todo $q \in U$ (es decir, los vectores $\partial \mathbf{x} / \partial u$, $\partial \mathbf{x} / \partial v$ son linealmente independientes para todo $q \in U$). Un punto $p \in U$ donde $d\mathbf{x}_p$ no es inyectiva se denomina un punto singular de \mathbf{x} .

Obsérvese que una superficie parametrizada, incluso en el caso de ser regular, podría presentar autointersecciones en su traza.

Ejemplo 5. Sea $\alpha: I \rightarrow R^3$ una curva parametrizada regular. Defínase

$$\mathbf{x}(t, v) = \alpha(t) + v\alpha'(t), \quad (t, v) \in I \times R.$$

\mathbf{x} es una superficie parametrizada, denominada la *superficie tangente* de α (fig. 2-19).

Supóngase ahora que la curvatura $k(t)$, $t \in I$, de α es no nula para todo $t \in I$, y restrinjamos el dominio de \mathbf{x} a $U = \{(t, v) \in I \times R; v \neq 0\}$. Entonces

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \alpha'(t) + v\alpha''(t), \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \alpha'(t)$$

y

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = v\alpha''(t) \wedge \alpha'(t) \neq 0, \quad (t, v) \in U,$$

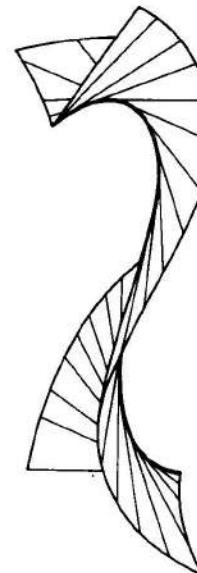


Figura 2-19. La superficie tangente.

puesto que, para todo t , la curvatura (cf. el ejercicio 12 de la sec. 1.5)

$$k(t) = \frac{|\alpha''(t) \wedge \alpha'(t)|}{|\alpha'(t)|^3}$$

es no nula. Se deduce que la restricción $\mathbf{x}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una superficie parametrizada regular, cuya traza consta de dos componentes conexas, siendo su frontera común el conjunto $\alpha(I)$.

La siguiente proposición demuestra que podemos extender los conceptos locales y propiedades de la geometría diferencial a superficies parametrizadas regulares.

PROPOSICION 2. Sea $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada regular y $q \in U$. Entonces existe un entorno V de q en \mathbb{R}^2 tal que $\mathbf{x}(V) \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie regular.

Demotación. De nuevo, esto es consecuencia del teorema de la función inversa. Escríbese

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Por la regularidad, podemos suponer que $(\partial(x, y)/\partial(u, v))(q) \neq 0$. Defínase la aplicación $F: U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mediante

$$F(u, v, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t), \quad (u, v) \in U, t \in \mathbb{R}.$$

Entonces

$$\det(dF_q) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

Por el teorema de la función inversa, existen entornos W_1 de q y W_2 de $F(q)$ tal que $F: W_1 \rightarrow W_2$ es un difeomorfismo. Tómese $V = W_1 \cap U$ y obsérvese que la restricción $F|V = \mathbf{x}|V$. Por tanto, $\mathbf{x}(V)$ es difeomorfo a V , luego es una superficie regular.

Q.E.D.

EJERCICIOS⁵

- *1. Sea $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la esfera unidad y sea $A: S^2 \rightarrow S^2$ la aplicación (antipodal) $A(x, y, z) = (-x, -y, -z)$. Demostrar que A es un difeomorfismo.
- 2. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y $\pi: S \rightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación que lleva cada $p \in S$ a su proyección ortogonal sobre $R^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$. ¿Es π diferenciable?
- 3. Demostrar que el paraboloide $z = x^2 + y^2$ es difeomorfo a un plano.
- 4. Constrúyase un difeomorfismo entre el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

⁵ Los que omitieron leer las demostraciones de esta sección también deberían excluir los ejercicios 13-16.

*5. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, y sea $d: S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(p) = |p - p_0|$, donde $p \in S$, $p_0 \notin S$; es decir, la distancia de p a un punto fijo p_0 no perteneciente a S . Demuéstrese que d es diferenciable.

6. Demostrar que la definición de aplicación diferenciable entre superficies no depende de las parametrizaciones elegidas.

7. Demuéstrese que la relación « S_1 es difeomorfa a S_2 » es una relación de equivalencia en el conjunto de las superficies regulares.

*8. Sea $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Designese por $N = (0, 0, 1)$ y $S = (0, 0, -1)$ los polos norte y sur, respectivamente, de S^2 ; definase $F: S^2 - \{N\} \cup \{S\} \rightarrow H$ como sigue: para cada $p \in S^2 - \{N\} \cup \{S\}$ tómese la perpendicular al eje z que pasa por p y por q en Oz . Considerérese la semirrecta l que empieza en q y contiene a p . Entonces $F(p) = l \cap H$ (fig. 2-20). Demostrar que F es diferenciable.

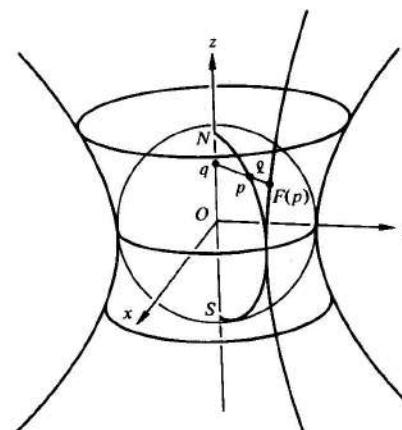


Figura 2-20

- 9. a. Defínase la noción de función diferenciable sobre una curva regular. ¿Qué se necesita para demostrar que la definición tiene sentido? No lo demuestre ahora. Si no ha omitido las demostraciones de esta sección, se le pedirá que lo haga en el ejercicio 15
- b. Demostrar que la aplicación $E: R \rightarrow S^1 = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$ dada por

$$E(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in R,$$

es diferenciable (geométricamente, E «envuelve» R alrededor de S^1).

- 10. Sea C una curva regular plana que se halla a un lado de una recta r del plano y que corta a r en los puntos p y q (fig. 2-21). ¿Qué condiciones debe satisfacer C para garantizar que la rotación de C alrededor de r genera una superficie de revolución ampliada (regular)?

- 11. Demostrar que las rotaciones de una superficie de revolución S alrededor de su eje son difeomorfismos de S .

- 12. Las superficies parametrizadas son, con frecuencia, útiles a efectos de describir conjuntos Σ que son superficies regulares excepto por un número finito de puntos y un número finito



Figura 2-21

de rectas. Por ejemplo, sea C la traza de una curva parametrizada regular $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ que no pasa por el origen $O = (0, 0, 0)$. Sea Σ el conjunto generado por el desplazamiento de una recta l que pasa por un punto móvil p de C y el punto fijo O (un cono de vértice O ; véase la fig. 2-22).

- Hallar una superficie parametrizada x cuya traza sea Σ .
- Hallar los puntos donde x no es regular.
- ¿Qué debería suprimirse de Σ para que el conjunto restante sea una superficie regular?

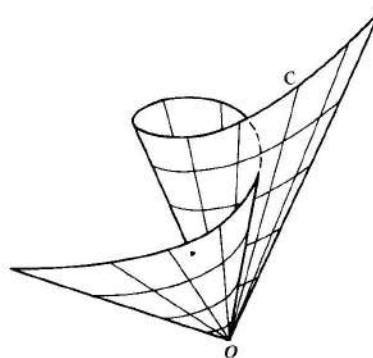


Figura 2-22

- Demuéstrese que la definición de diferenciabilidad de una función $f: V \subset S \rightarrow \mathbb{R}$ dada en el texto (def. 1) es equivalente a la siguiente: f es diferenciable en $p \in V$ si es la restricción a V de una función diferenciable definida en un conjunto abierto de \mathbb{R}^3 que contiene a p . (Habiendo comenzado con esta definición de diferenciabilidad, podríamos haber definido una superficie como un conjunto que es difeomorfo localmente a \mathbb{R}^2 ; véase la observación 3).
- Sea $A \subset S$ un subconjunto de una superficie regular S . Pruébese que el mismo A es una superficie regular si y solamente si A es abierto en S ; es decir, $A = U \cap S$, donde U es un conjunto abierto de \mathbb{R}^3 .
- Sea C una curva regular y sean $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow C$, $\beta: J \subset \mathbb{R} \rightarrow C$ dos parametrizaciones de C en un entorno de $p \in \alpha(I) \cap \beta(J) = W$. Sea

$$h = \alpha^{-1} \circ \beta: \beta^{-1}(W) \longrightarrow \alpha^{-1}(W)$$

el cambio de parámetros. Demuéstrese que

- h es un difeomorfismo.
- El valor absoluto de la longitud de arco de C en W no depende de qué parametrización se haya escogido para definirla, o sea,

$$\left| \int_{t_0}^t |\alpha'(s)| ds \right| = \left| \int_{\tau_0}^{\tau} |\beta'(\tau)| d\tau \right|, \quad t = h(\tau), t \in I, \tau \in J.$$

- Identifiquemos $\mathbb{R}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = -1\}$ con el plano complejo \mathbb{C} poniendo $(x, y, -1) = x + iy = \zeta \in \mathbb{C}$. Sea $P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ el polinomio complejo

$$P(\zeta) = a_0 \zeta^n + a_1 \zeta^{n-1} + \cdots + a_n, \quad a_0 \neq 0, a_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, n.$$

Denotemos por π_N la proyección estereográfica en $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ desde el polo norte $N = (0, 0, 1)$ sobre \mathbb{R}^2 . Pruébese que la aplicación $F: S^2 \rightarrow S^2$ dada por

$$F(p) = \pi_N^{-1} \circ P \circ \pi_N(p), \quad \text{si } p \in S^2 - \{N\},$$

$$F(N) = N$$

es diferenciable.

2.4. El plano tangente; la diferencial de una aplicación

En esta sección demostraremos que la condición 3 en la definición de superficie regular S garantiza que, para cada $p \in S$, el conjunto de vectores tangentes a las curvas parametrizadas de S que pasan por p , constituyen un plano.

Por un vector tangente a S , en $p \in S$, entendemos el vector tangente $\alpha'(0)$ de una curva parametrizada diferenciable $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ con $\alpha(0) = p$.

PROPOSICIÓN 1. Sea $x: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización de una superficie regular S y sea $q \in U$. El subespacio vectorial de dimensión 2,

$$dx_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3,$$

coincide con el conjunto de los vectores tangentes a S en $x(q)$.

Demostración. Sea w un vector tangente en $x(q)$, es decir, $w = \alpha'(0)$, donde $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ es diferenciable y $\alpha(0) = x(q)$. Por el ejemplo 2 de la sec. 2.3, la curva $\beta = x^{-1} \circ \alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ es diferenciable. Por la definición de diferencial (apéndice al cap. 2, def. 1), tenemos $dx_q(\beta'(0)) = w$. De donde, $w \in dx_q(\mathbb{R}^2)$ (fig. 2-23).

Por otra parte, sea $w = dx_q(v)$, donde $v \in \mathbb{R}^2$. Es claro que v es el vector velocidad de la curva $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ dada por

$$\gamma(t) = tv + q, \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

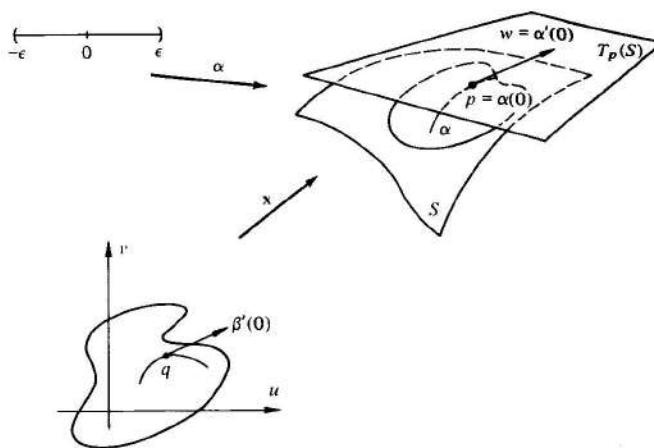


Figura 2-23

Por la definición de diferencial, $w = \alpha'(0)$, donde $\alpha = x \circ \gamma$. Esto demuestra que w es un vector tangente.

Q.E.D.

Por la proposición de arriba, el plano $d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$, que pasa por $\mathbf{x}(q) = p$, no depende de la parametrización x . Este plano se llamará el *plano tangente* a S en p y se denotará por $T_p(S)$. La elección de una parametrización x determina una base $\{\partial\mathbf{x}/\partial u(q), \partial\mathbf{x}/\partial v(q)\}$ de $T_p(S)$, denominada la base asociada a x . Algunas veces es conveniente escribir $\partial\mathbf{x}/\partial u = \mathbf{x}_u$ y $\partial\mathbf{x}/\partial v = \mathbf{x}_v$.

Las coordenadas de un vector $w \in T_p(S)$ en la base asociada a una parametrización x se determinan como sigue. w es el vector velocidad $\alpha'(0)$ de una curva $\alpha = x \circ \beta: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ se expresa por $\beta(t) = (u(t), v(t))$, con $\beta(0) = q = x^{-1}(p)$. Así,

$$\begin{aligned}\alpha'(0) &= \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \circ \beta)(0) = \frac{d}{dt}\mathbf{x}(u(t), v(t))(0) \\ &= \mathbf{x}_u(q)u'(0) + \mathbf{x}_v(q)v'(0) = w.\end{aligned}$$

Luego, en la base $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$, w tiene coordenadas $(u'(0), v'(0))$, donde $(u(t), v(t))$ es la expresión, en la parametrización x , de una curva cuyo vector velocidad en $t = 0$ es w .

Con la noción de plano tangente, podemos hablar de la diferencial de una aplicación (diferenciable) entre superficies. Sean S_1 y S_2 dos superficies regulares y sea $\varphi: V \subset S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación diferenciable de un conjunto abierto V de S_1 en S_2 . Si $p \in V$, sabemos que cada vector tangente $w \in T_p(S_1)$ es el vector velocidad $\alpha'(0)$ de una curva parametrizada diferenciable $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow V$ con $\alpha(0) = p$. La curva $\beta = \varphi \circ \alpha$ es tal que $\beta(0) = \varphi(p)$, y por tanto $\beta'(0)$ es un vector de $T_{\varphi(p)}(S_2)$ (fig. 2-24).

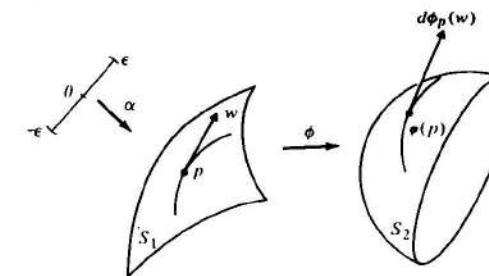


Figura 2-24

PROPOSICIÓN 2. En la discusión arriba desarrollada, dado w , el vector $\beta'(0)$ no depende de la elección de α . La aplicación $d\varphi_p: T_p(S_1) \rightarrow T_{\varphi(p)}(S_2)$ definida por $d\varphi_p(w) = \beta'(0)$ es lineal.

*Demuestra*ión. La demostración es similar a la que se ofrece en espacios euclídeos (cf. la prop. 4, apéndice al cap. 2). Sean $x(u, v), \tilde{x}(\tilde{u}, \tilde{v})$ parametrizaciones en sendos entornos de p y $\varphi(p)$, respectivamente. Admitamos que φ se expresa en estas coordenadas por

$$\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$$

y que α se expresa por

$$\alpha(t) = (u(t), v(t)), \quad t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Entonces $\beta(t) = (\varphi_1(u(t), v(t)), \varphi_2(u(t), v(t)))$, y la expresión de $\beta'(0)$ en la base $\{\tilde{x}_u, \tilde{x}_v\}$ es

$$\beta'(0) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} v'(0), \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} v'(0) \right).$$

Esta relación demuestra que $\beta'(0)$ depende solamente de la aplicación φ y de las coordenadas $(u'(0), v'(0))$ de w en la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$. Por ello $\beta'(0)$ es independiente de α . Además, la misma relación prueba que

$$\beta'(0) = d\varphi_p(w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix};$$

o sea, $d\varphi_p$ es una aplicación lineal de $T_p(S_1)$ en $T_{\varphi(p)}(S_2)$ cuya matriz en las bases $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ de $T_p(S_1)$ y $\{\tilde{x}_u, \tilde{x}_v\}$ de $T_{\varphi(p)}(S_2)$ es precisamente la matriz dada arriba.

Q.E.D.

La aplicación lineal $d\varphi_p$ definida por la proposición 2 se denomina la *diferencial* de φ en $p \in S_1$. De una forma similar definimos la diferencial de una función (diferencia-

ble) $f: U \subset S \rightarrow R$ en $p \in U$ como una aplicación lineal $df_p: T_p(S) \rightarrow R$. Dejamos los detalles al cuidado del lector.

Ejemplo 1. Sea $v \in R^3$ un vector unitario y sea $h: S \rightarrow R$, $h(p) = v \cdot p$, $p \in S$, la función altura definida en el ejemplo 1 de la sec. 2.3. Para calcular $dh_p(w)$, $w \in T_p(S)$, elijamos una curva diferenciable $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ con $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w$. Como $h(\alpha(t)) = \alpha(t) \cdot v$, obtenemos

$$dh_p(w) = \frac{d}{dt} h(\alpha(t))|_{t=0} = \alpha'(0) \cdot v = w \cdot v.$$

Ejemplo 2. Sea $S^2 \subset R^3$ la esfera unidad

$$S^2 = \{(x, y, z) \in R^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

y sea $R_{z, \theta}: R^3 \rightarrow R^3$ la rotación de ángulo θ alrededor del eje z . Entonces $R_{z, \theta}$ restringida a S^2 es una aplicación diferenciable de S^2 (cf. el ejemplo 3 de la sec. 2.3). Calcularemos $(dR_{z, \theta})_p(w)$, $p \in S^2$, $w \in T_p(S^2)$. Sea $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S^2$ una curva diferenciable con $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w$. Entonces, como $R_{z, \theta}$ es lineal,

$$(dR_{z, \theta})_p(w) = \frac{d}{dt} (R_{z, \theta} \circ \alpha(t))|_{t=0} = R_{z, \theta}(\alpha'(0)) = R_{z, \theta}(w).$$

Obsérvese que $R_{z, \theta}$ deja fijo el polo norte $N = (0, 0, 1)$ y que $(dR_{z, \theta})_N: T_N(S^2 \rightarrow T_N(S^2))$ es precisamente la rotación de ángulo θ en el plano $T_N(S^2)$.

Retrospectivamente, lo que hemos hecho hasta ahora es extender las nociones del cálculo diferencial en R^2 a superficies regulares. Habida cuenta de que el cálculo diferencial es una teoría esencialmente local, hemos definido una entidad (la superficie regular) que era localmente como un plano, salvo difeomorfismos, y entonces esta extensión se volvió natural. Debería esperarse por tanto que el teorema básico de la función inversa se extienda a aplicaciones diferenciables entre superficies.

Diremos que una aplicación $\varphi: U \subset S_1 \rightarrow S_2$ es un *difeomorfismo local* en $p \in U$ si existe un entorno $V \subset U$ de p tal que φ restringida a V es un difeomorfismo sobre un conjunto abierto $\varphi(V) \subset S_2$. En estos términos, la versión del teorema de la función inversa para superficies se expresa como sigue.

PROPOSICION 3. Si S_1 y S_2 son superficies regulares y $\varphi: U \subset S_1 \rightarrow S_2$ es una aplicación diferenciable de un conjunto abierto $U \subset S_1$ tal que la diferencial $d\varphi_p$ de φ en $p \in U$ es un isomorfismo, entonces φ es un difeomorfismo local en p .

La demostración es una aplicación inmediata del teorema de la función inversa en R^2 y se dejará como ejercicio.

Por supuesto, todos los otros conceptos del cálculo diferencial, como puntos críticos, valores regulares, etc., se extienden de manera natural a funciones y aplicaciones definidas sobre superficies regulares.

También el plano tangente nos permite hablar del ángulo de intersección de dos superficies en un punto de incidencia.

Dado un punto p de una superficie regular S , hay dos vectores unitarios de R^3 que son normales al plano tangente $T_p(S)$; se llama a cada uno de ellos *un vector unitario normal* en p . La recta que pasa por p y contiene a un vector unitario normal en p se denomina *recta normal* en p . El *ángulo* de intersección de dos superficies en un punto de incidencia p es el ángulo formado por sus planos tangentes (o sus rectas normales) en p (fig. 2-25).

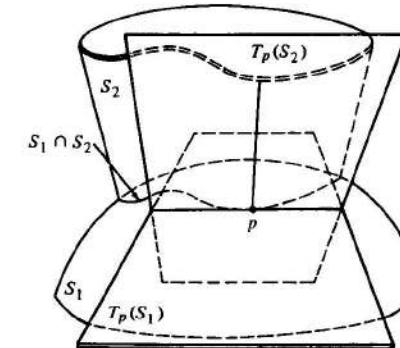


Figura 2-25

Fijando una parametrización $\mathbf{x}: U \subset R^2 \rightarrow S$ en $p \in S$, podemos determinar la elección de un vector unitario normal en cada punto $q \in \mathbf{x}(U)$ por la regla

$$\mathbf{N}(q) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(q).$$

Así, obtenemos una aplicación diferenciable $\mathbf{N}: \mathbf{x}(U) \rightarrow R^3$. Veremos más tarde (secs. 2.6 y 3.1) que no es siempre posible extender, de manera diferenciable, esta aplicación a toda la superficie S .

Antes de dejar esta sección, haremos algunas observaciones sobre cuestiones de diferenciabilidad.

La definición dada de superficie regular requiere que las parametrizaciones sean de clase C^∞ , es decir, que admitan derivadas parciales continuas de *todos* los órdenes. Para las cuestiones que surgen en geometría diferencial sólo necesitamos, en general, la existencia y continuidad de las derivadas parciales hasta un cierto orden, que varía con la naturaleza del problema (en raras ocasiones necesitamos derivadas de orden superior a cuatro).

Por ejemplo, la existencia y continuidad del plano tangente depende únicamente de la existencia y continuidad de las derivadas parciales de primer orden. Por esta razón, podría suceder que la gráfica de la función $z = f(x, y)$ admite en cada punto un plano tangente pero que no sea lo suficientemente diferenciable como para satisfacer la definición de superficie regular. Esto es lo que ocurre en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3. Considerérese la gráfica de la función $z = \sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}$, generada al rotar la curva $z = x^{4/3}$ alrededor del eje z. Como la curva es simétrica con respecto al eje z y admite una derivada continua que se anula en el origen, es claro que la gráfica de $z = \sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}$ tiene al plano xy como plano tangente en el origen. Sin embargo, la derivada parcial z_{xx} no existe en el origen y la gráfica considerada no es una superficie regular según se definió anteriormente (véase la prop. 3 de la sec. 2.2).

No pretendemos vernos envueltos en este tipo de cuestiones. La hipótesis de clase C^∞ en la definición se adoptó precisamente para evitar el estudio de las condiciones minimales de diferenciabilidad requeridas en cada caso particular. Estos matices tienen su interés, pero posiblemente pueden oscurecer la naturaleza geométrica de los problemas tratados aquí.

EJERCICIOS

- *1. Demostrar que la ecuación del plano tangente en (x_0, y_0, z_0) de una superficie regular dada por $f(x, y, z) = 0$, donde 0 es un valor regular de f , es

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

2. Determinar los planos tangentes de $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en los puntos $(x, y, 0)$ y demostrar que todos ellos son paralelos al eje z.
 3. Demuéstrese que la ecuación del plano tangente a una superficie que es la gráfica de una función diferenciable $z = f(x, y)$, en el punto $p_0 = (x_0, y_0)$, viene dada por

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Recuérdese la definición de diferencial df de una función $f: R^2 \rightarrow R$ y demuéstrese que el plano tangente es la gráfica de la diferencial df_p .

- *4. Demuéstrese que los planos tangentes a una superficie dada por $z = xf(y/x)$, $x \neq 0$, donde f es una función diferenciable, pasan todos por el origen $(0, 0, 0)$.
 5. Si en un entorno coordenado de una superficie regular ésta puede parametrizarse en la forma

$$\mathbf{x}(u, v) = \alpha_1(u) + \alpha_2(v),$$

donde α_1 y α_2 son curvas parametrizadas regulares, demuéstrese que los planos tangentes a lo largo de una curva coordenada fija en este entorno son todos paralelos a una recta.

6. Sea $\alpha: I \rightarrow R^3$ una curva parametrizada regular cuya curvatura nunca se anula. Considerérese la superficie tangente de α (ejemplo 5 de la sec. 2.3)

$$\mathbf{x}(t, v) = \alpha(t) + v\alpha'(t), \quad t \in I, v \neq 0.$$

Demuéstrese que los planos tangentes a lo largo de la curva $\mathbf{x}(\text{constante}, v)$ son iguales.

7. Sea $f: S \rightarrow R$ dada por $f(p) = |p - p_0|^2$, donde $p \in S$ p_0 es un punto fijo de R^3 (véase el ejemplo 1 de la sec. 2.3). Demostrar que $df_p(w) = 2w \cdot (p - p_0)$, $w \in T_p(S)$.

8. Pruébese que si $L: R^3 \rightarrow R^3$ es una aplicación lineal y $S \subset R^3$ es una superficie regular invariante por L , es decir, $L(S) \subset S$, entonces la restricción $L|S$ es una aplicación diferenciable y

$$dL_p(w) = L(w), \quad p \in S, w \in T_p(S).$$

9. Demostrar que la superficie parametrizada

$$\mathbf{x}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au), \quad a \neq 0,$$

es regular. Calcúlese su vector normal $N(u, v)$ y demuéstrese que a lo largo de la recta coordenada $u = u_0$ el plano tangente de \mathbf{x} rota alrededor de esta recta de forma que la tangente de su ángulo con el eje z es proporcional a la distancia $v (= \sqrt{x^2 + y^2})$ del punto $\mathbf{x}(u_0, v)$ al eje z.

10. *Superficies tubulares.* Sea $\alpha: I \rightarrow R^3$ una curva parametrizada regular cuya curvatura nunca se anula y de parámetro la longitud de arco. Sea

$$\mathbf{x}(s, v) = \alpha(s) + r(n(s) \cos v + b(s) \sin v), \quad r = \text{const.} \neq 0, s \in I,$$

una superficie parametrizada (el *tubo* de radio r alrededor de α), donde n es el vector normal y b es el vector binormal de α . Demostrar que, cuando \mathbf{x} es regular, su vector unitario normal es

$$N(s, v) = (n(s) \cos v + b(s) \sin v).$$

11. Demuéstrese que las normales a la superficie parametrizada dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)), f(u) \neq 0, g' \neq 0,$$

pasan todas por el eje z.

- *12. Demuéstrese que cada una de las ecuaciones $(a, b, c \neq 0)$

$$x^2 + y^2 + z^2 = ax,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = by,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = cz$$

define una superficie regular y que todas ellas se cortan ortogonalmente.

13. Un *punto crítico* de una función diferenciable $f: S \rightarrow R$ definida sobre una superficie regular S es un punto $p \in S$ tal que $df_p = 0$.

- *a. Sea $f: S \rightarrow R$ dada por $f(p) = |p - p_0|$, $p \in S$, $p_0 \notin S$ (cf. el ejercicio 5, sec. 2.3). Demostrar que $p \in S$ es un punto crítico de f si y sólo si la recta que une p a p_0 es normal a S en p .

- b. Sea $h: S \rightarrow R$ dada por $h(p) = p \cdot v$, donde $v \in R^3$ es un vector unitario (cf. el ejemplo 1, sec. 2.3). Demostrar que $p \in S$ es un punto crítico de h si y sólo si v es un vector normal de S en p .

- *14. Sea Q la unión de los tres planos coordinados $x = 0, y = 0, z = 0$. Sea $p = (x, y, z) \in R^3 - Q$.

- a. Demostrar que la ecuación en t ,

$$\frac{x^2}{a-t} + \frac{y^2}{b-t} + \frac{z^2}{c-t} \equiv f(t) = 1, \quad a > b > c > 0,$$

tiene tres raíces reales distintas: t_1, t_2, t_3 .

- b. Demuéstrese que para cada $p \in R^3 - Q$, los conjuntos dados por $f(t_1) - 1 = 0, f(t_2) - 1 = 0, f(t_3) - 1 = 0$ son superficies regulares que pasan por p y que son ortogonales dos a dos.
15. Demuéstrese que si todas las normales a una superficie conexa pasan por un punto fijo, la superficie está contenida en una esfera.
16. Sea w un vector tangente a una superficie regular S en un punto $p \in S$ y sean $x(u, v)$ y $\bar{x}(\bar{u}, \bar{v})$ dos parametrizaciones en p . Admítase que las expresiones de w en las bases asociadas a $x(u, v)$ y $\bar{x}(\bar{u}, \bar{v})$ son

$$w = \alpha_1 x_u + \alpha_2 x_v$$

y

$$w = \beta_1 \bar{x}_{\bar{u}} + \beta_2 \bar{x}_{\bar{v}}.$$

Demuéstrese que las coordenadas de w se relacionan mediante

$$\beta_1 = \alpha_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial v}$$

$$\beta_2 = \alpha_1 \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial v},$$

donde $\bar{u} = \bar{u}(u, v)$ y $\bar{v} = \bar{v}(u, v)$ son las expresiones del cambio de coordenadas.

- *17. Dos superficies regulares S_1 y S_2 se intersectan *transversalmente* si cualquiera que sea $p \in S_1 \cap S_2$ entonces $T_p(S_1) \neq T_p(S_2)$. Probar que si S_1 y S_2 se intersectan transversalmente, entonces $S_1 \cap S_2$ es una curva regular.
18. Pruébese que si una superficie regular S corta a un plano P en un único punto p , entonces este plano coincide con el plano tangente a S en p .
19. Sea $S \subset R^3$ una superficie regular y $P \subset R^3$ un plano. Si todos los puntos de S están en el mismo lado de P , pruébese que P es tangente a S en todos los puntos de $P \cap S$.
- *20. Demuéstrese que las proyecciones ortogonales del centro $(0, 0, 0)$ del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

sobre sus planos tangentes constituyen una superficie regular dada por

$$\{(x, y, z) \in R^3; (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2\} - \{(0, 0, 0)\}.$$

- *21. Sea $f: S \rightarrow R$ una función diferenciable sobre una superficie regular conexa S . Supóngase que $df_p = 0$ para todo $p \in S$. Pruébese que f es constante sobre S .
- *22. Demostrar que si todas las rectas normales a una superficie regular conexa S cortan a una recta fija, entonces S es una superficie de revolución.

23. Demuéstrese que la aplicación $F: S^2 \rightarrow S^2$ definida en el ejercicio 16 de la sec. 2.3 tiene solamente un número finito de puntos críticos (véase el ejercicio 13).
24. *Regla de la cadena.* Demostrar que si $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ y $\psi: S_2 \rightarrow S_3$ son aplicaciones diferenciables y $p \in S_1$, entonces

$$d(\psi \circ \varphi)_p = d\psi_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p.$$

25. Pruébese que si dos curvas regulares C_1 y C_2 de una superficie regular S son tangentes en un punto $p \in S$, y si $\varphi: S \rightarrow S$ es un difeomorfismo, entonces $\varphi(C_1)$ y $\varphi(C_2)$ son curvas regulares que son tangentes en $\varphi(p)$.
26. Demostrar que si p es un punto de una superficie regular S , es posible, mediante una elección adecuada de las coordenadas (x, y, z) , representar un entorno de p en S en la forma $z = f(x, y)$ de suerte que $f(0, 0) = 0, f_x(0, 0) = 0, f_y(0, 0) = 0$. (Esto es equivalente a tomar el plano xy como el plano tangente a S en p .)
27. *Teoría del contacto.* Dos superficies regulares S y \tilde{S} , en R^3 , que comparten un punto p , se dice que tienen un *contacto de orden* ≥ 1 en p si existen parametrizaciones con el mismo dominio $x(u, v)$ y $\tilde{x}(u, v)$ en p de S y \tilde{S} , respectivamente, tal que $x_u = \tilde{x}_u$ y $x_v = \tilde{x}_v$ en p . Si, además, alguna de las derivadas parciales de segundo orden es diferente en p , el *contacto* se dice que es *exactamente de orden igual* a 1. Demuéstrese que
- a. El plano tangente $T_p(S)$ de una superficie regular en el punto p tiene un contacto de orden ≥ 1 con la superficie en el punto p .
 - b. Si un plano tiene un contacto de orden ≥ 1 con una superficie S en p , entonces este plano coincide con el plano tangente en p .
 - c. Dos superficies regulares tienen un contacto de orden ≥ 1 si y solamente si tienen un plano tangente común en p , es decir, son tangentes en p .
 - d. Si dos superficies regulares S y \tilde{S} de R^3 tienen un contacto de orden ≥ 1 en p y si $F: R^3 \rightarrow R^3$ es un difeomorfismo de R^3 , entonces las imágenes $F(S)$ y $F(\tilde{S})$ son superficies regulares que tienen un contacto de orden ≥ 1 en $F(p)$; o sea, la noción de contacto de orden ≥ 1 es invariante frente a difeomorfismos.
 - e. Si dos superficies tienen un contacto de orden ≥ 1 en p , entonces $\lim_{r \rightarrow 0} (d/r) = 0$, donde d es la longitud del segmento determinado por las intersecciones con las superficies de alguna paralela a la recta normal común, situada a una distancia r de esta normal.
28. a. Definase la noción de valor regular para una función diferenciable $f: S \rightarrow R$ sobre una superficie regular S .
- b. Demuéstrese que la imagen inversa de un valor regular de una función diferenciable sobre una superficie regular S es una curva regular en S .

2.5. La primera forma fundamental; área

Hasta aquí nos hemos fijado en las superficies desde el punto de vista de la diferenciabilidad. En esta sección empezaremos con el estudio de más estructuras geométricas transportadas por la superficie. La más importante de éstas es quizás la primera forma fundamental, que describiremos ahora.

El producto interior natural de $R^3 \supset S$ induce en cada plano tangente $T_p(S)$ de una superficie regular S un producto interior, que se denotará por \langle , \rangle_p . Si w_1 ,

$w_2 \in T_p(S) \subset R^3$, entonces $\langle w_1, w_2 \rangle_p$ es igual al producto interior de w_1 y w_2 como vectores de R^3 . A este producto interior, que es una forma bilineal simétrica, es decir, $\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle w_2, w_1 \rangle_p$ y $\langle w_1, w_2 \rangle_p$ es lineal, separadamente, en w_1 y w_2 , corresponde una forma cuadrática $I_p: T_p(S) \rightarrow R$ dada por

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0. \quad (1)$$

DEFINICION 1. La forma cuadrática I_p en $T_p(S)$, definida por la ecuación (1), se denomina la primera forma fundamental de la superficie regular $S \subset R^3$ en $p \in S$.

Por consiguiente, la primera forma fundamental es simplemente la expresión de cómo la superficie S hereda el producto interior natural de R^3 . Geométricamente, como veremos dentro de un momento, la primera forma fundamental nos permite hacer mediciones sobre la superficie (longitudes de curvas, ángulos de vectores tangentes, áreas de regiones) sin referirnos al espacio ambiente R^3 donde se halla la superficie.

Ahora expresaremos la primera forma fundamental en la base $\{x_u, x_v\}$ asociada a la parametrización $x(u, v)$ en p . Como un vector tangente $w \in T_p(S)$ es el vector tangente de una curva parametrizada $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, con $p = \alpha(0) = x(u_0, v_0)$, obtenemos

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle x_u u' + x_v v', x_u u' + x_v v' \rangle_p \\ &= \langle x_u, x_u \rangle_p (u')^2 + 2 \langle x_u, x_v \rangle_p u' v' + \langle x_v, x_v \rangle_p (v')^2 \\ &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2, \end{aligned}$$

en donde los valores de las funciones involucradas se evalúan en $t = 0$, y

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= \langle x_u, x_u \rangle_p, \\ F(u_0, v_0) &= \langle x_u, x_v \rangle_p, \\ G(u_0, v_0) &= \langle x_v, x_v \rangle_p \end{aligned}$$

son los coeficientes de la primera forma fundamental en la base $\{x_u, x_v\}$ de $T_p(S)$. Haciendo a p recorrer el entorno coordenado correspondiente a $x(u, v)$ obtenemos las funciones $E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$ que son diferenciables en ese entorno.

De ahora en adelante suprimiremos el subíndice p en la expresión del producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ o de la forma cuadrática I_p cuando sea claro del contexto a qué punto nos estamos refiriendo. También será conveniente denotar el producto interior natural de R^3 mediante el mismo símbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en vez de con el punto, como se hizo previamente.

Ejemplo 1. Un sistema de coordenadas para un plano $P \subset R^3$ que pasa por $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y contiene al sistema ortonormal $\{w_1, w_2\}$, $w_1 = (a, a_2, a_3)$, $w_2 = (b_1, b_2, b_3)$, viene dada como sigue:

$$x(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2, \quad (u, v) \in R^2.$$

Para calcular la primera forma fundamental en un punto arbitrario de P observamos que $x_u = w_1$, $x_v = w_2$; ya que w_1 y w_2 son vectores unitarios ortogonales, las funciones E, F, G son constantes y vienen dadas por

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1.$$

En este caso trivial, la primera forma fundamental es esencialmente el teorema de Pitágoras en P ; es decir, el cuadrado de la longitud de un vector w que tiene coordenadas a, b en la base $\{x_u, x_v\}$ es igual a $a^2 + b^2$.

Ejemplo 2. El cilindro recto apoyado sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$ admite la parametrización $x: U \rightarrow R^3$, donde (fig. 2-26)

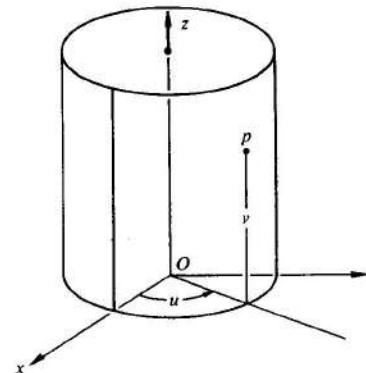


Figura 2-26

$$x(u, v) \equiv (\cos u, \sin u, v),$$

$$U = \{(u, v) \in R^2; \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty\}.$$

Para calcular la primera forma fundamental, observamos que

$$x_u = (-\sin u, \cos u, 0), \quad x_v = (0, 0, 1),$$

y, por consiguiente,

$$E = \sin^2 u + \cos^2 u = 1, \quad F = 0, \quad G = 1.$$

Resaltamos que, aunque el cilindro y el plano son superficies distintas, obtenemos el mismo resultado en ambos casos. Volveremos posteriormente a este tema (sección 4.2).

Ejemplo 3. Considérese la hélice que viene dada por $(\cos u, \sin u, au)$; véase el ejemplo 1, sec. 1.2. En cada punto de la hélice, trácese una recta paralela al plano xy

que corte al eje z , la superficie generada por estas rectas se denomina un *helicoide* y admite la siguiente parametrización:

$$\mathbf{x}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty.$$

\mathbf{x} aplica una banda abierta de amplitud 2π en el plano uv sobre aquella parte del helicoide que se corresponde con una rotación de ángulo 2π a lo largo de la hélice (fig. 2-27).

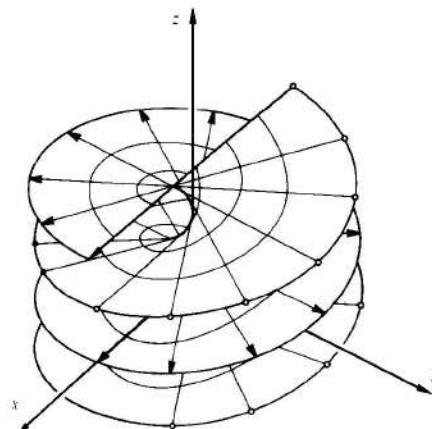


Figura 2-27. El helicoide.

La verificación de que el helicoide es una superficie regular es directa y se deja al cuidado del lector.

El cálculo de los coeficientes de la primera forma fundamental para la parametrización de arriba resulta

$$E(u, v) = v^2 + a^2, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = 1.$$

Como mencionamos antes, la importancia de la primera forma fundamental I procede del hecho de que conociendo I podemos tratar cuestiones métricas sobre una superficie regular si otras referencias al espacio ambiente \mathbb{R}^3 . Así, la longitud de arco s de una curva parametrizada $\alpha: I \rightarrow S$ viene dada por

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(t)| dt = \int_0^t \sqrt{I(\alpha'(t))} dt.$$

En particular, si $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ está contenida en un entorno coordenado correspondiente a la parametrización $\mathbf{x}(u, v)$, podemos calcular la longitud de arco de α entre, pongamos por caso, 0 y t mediante

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} dt. \quad (2)$$

También, el ángulo θ bajo el que se cortan dos curvas parametrizadas $\alpha: I \rightarrow S$, $\beta: I \rightarrow S$ en $t = t_0$ viene dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)| |\beta'(t_0)|}.$$

En particular, el ángulo φ entre las curvas coordenadas de una parametrización $\mathbf{x}(u, v)$ es

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle}{|\mathbf{x}_u| |\mathbf{x}_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}};$$

de donde se deduce que las curvas coordenadas de una parametrización son ortogonales si y sólo si $F(u, v) = 0$ para todo (u, v) . Una tal parametrización se denomina parametrización orthogonal.

Observación. En virtud a la ecuación (2), muchos matemáticos hablan del «elemento» de longitud de arco, ds de S , y escriben

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

para dar a entender que si $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ es una curva sobre S y $s = s(t)$ es su longitud de arco, entonces

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2.$$

Ejemplo 4. Calcularemos la primera forma fundamental de una esfera en un punto del entorno coordinado asociado a la parametrización (cf. el ejemplo 1, sec. 2.2)

$$\mathbf{x}(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta).$$

Primero, obsérvese que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\theta(\theta, \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi), \\ \mathbf{x}_\varphi(\theta, \varphi) = (-\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, 0). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} E(\theta, \varphi) &= \langle \mathbf{x}_\theta, \mathbf{x}_\theta \rangle = 1, \\ F(\theta, \varphi) &= \langle \mathbf{x}_\theta, \mathbf{x}_\varphi \rangle = 0, \\ G(\theta, \varphi) &= \langle \mathbf{x}_\varphi, \mathbf{x}_\varphi \rangle = \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Por tanto, si w es un vector tangente a la esfera en el punto $\mathbf{x}(\theta, \varphi)$, expresado en la base asociada a $\mathbf{x}(\theta, \varphi)$ por

$$w = a\mathbf{x}_\theta + b\mathbf{x}_\varphi,$$

entonces el cuadrado de la longitud de w viene dado por

$$|w|^2 = I(w) = Ea^2 + 2Fab + Gb^2 = a^2 + b^2 \operatorname{sen}^2 \theta.$$

Como aplicación, determinemos las curvas de este entorno coordinado de la esfera que forman un ángulo constante β con los meridianos $\varphi = \text{constante}$. Estas curvas se denominan *loxodromas* (líneas de rumbo) de la esfera.

Podemos suponer que la curva requerida $a(t)$ es la imagen por x de una curva $(\theta(t), \varphi(t))$ del plano $\theta\varphi$. En el punto $x(\theta, \varphi)$ donde la curva encuentra al meridiano $\varphi = \text{constante}$, tenemos

$$\cos \beta = \frac{\langle x_\theta, a'(t) \rangle}{|x_\theta| |a'(t)|} = \frac{\theta'}{\sqrt{(\theta')^2 + (\varphi')^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}$$

ya que en la base $\{x_\theta, x_\varphi\}$ el vector $a'(t)$ tiene coordenadas (θ', φ') y el vector x_θ tiene coordenadas $(1, 0)$. Se deduce que

$$(\theta')^2 \operatorname{tag}^2 \beta - (\varphi')^2 \operatorname{sen}^2 \theta = 0$$

o

$$\frac{\theta'}{\operatorname{sen} \theta} = \pm \frac{\varphi'}{\operatorname{tag} \beta},$$

de donde, por integración, obtenemos la ecuación de las loxodromas

$$\log \operatorname{tag} \left(\frac{\theta}{2} \right) = \pm (\varphi + c) \operatorname{cotag} \beta,$$

y donde la constante de integración c queda determinada al dar un punto $x(\theta_0, \varphi_0)$ por donde pasa la curva.

Otra cuestión métrica que puede tratarse con la primera forma fundamental es el cálculo (o la definición) del área de una región acotada de una superficie regular S . Un *dominio* (regular) de S es un subconjunto abierto y conexo de S tal que su frontera es la imagen de un círculo mediante un homeomorfismo diferenciable que es regular (es decir, su diferencial es no nula) excepto en un número finito de puntos. Una *región* de S es la unión de un dominio con su frontera (fig. 2-28). Una *región* de $S \subset R^3$ está *acotada* si está contenida en alguna bola de R^3 .

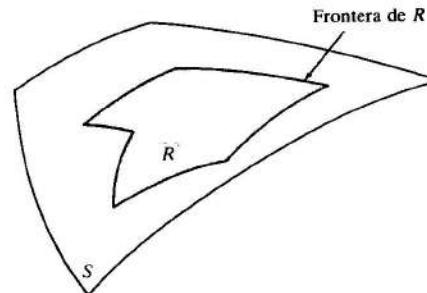


Figura 2-28

Consideraremos regiones acotadas R que estén contenidas en un entorno $x(U)$ de una parametrización $x: U \subset R^2 \rightarrow S$. En otras palabras, R es la imagen mediante x de una región acotada $Q \subset U$.

La función $|x_u \wedge x_v|$, definida en U , mide al área del paralelogramo generado por los vectores x_u y x_v . Primero vamos a demostrar que la integral

$$\int \int_Q |x_u \wedge x_v| du dv$$

no depende de la parametrización x .

De hecho, sea $\tilde{x}: \tilde{U} \subset R^2 \rightarrow S$ otra parametrización con $R \subset \tilde{x}(\tilde{U})$ y sea $\tilde{Q} = \tilde{x}^{-1}(R)$. Sea $\partial(u, v)/\partial(\tilde{u}, \tilde{v})$ el jacobiano del cambio de parámetros $h = x^{-1} \circ \tilde{x}$. Entonces

$$\begin{aligned} \int \int_Q |\tilde{x}_u \wedge \tilde{x}_v| d\tilde{u} d\tilde{v} &= \int \int_Q |x_u \wedge x_v| \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \right| d\tilde{u} d\tilde{v} \\ &= \int \int_Q |x_u \wedge x_v| du dv, \end{aligned}$$

en donde la última igualdad procede del teorema del cambio de variables para integrales múltiples (cf. Buck, *Advanced Calculus*, p. 304). Por tanto, hemos demostrado la afirmación de independencia y podemos introducir la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2. Sea $R \subset S$ una región acotada de una superficie regular contenida en el entorno coordinado de una parametrización $x: U \subset R^3 \rightarrow S$. El número positivo

$$\int \int_Q |x_u \wedge x_v| du dv = A(R), \quad Q = x^{-1}(R),$$

se denomina el *área de R* .

Existen varias justificaciones geométricas para tal definición, y una de ellas se presentará en la sec. 2.8.

Es conveniente observar que

$$|x_u \wedge x_v|^2 + \langle x_u, x_v \rangle^2 = |x_u|^2 \cdot |x_v|^2,$$

lo que prueba que el integrando de $A(R)$ se puede escribir como

$$|x_u \wedge x_v| = \sqrt{EG - F^2}.$$

También debería subrayarse que, en la mayoría de los ejemplos, la restricción de que R esté contenida en algún entorno coordinado no es demasiado seria, debido a que existen entornos coordinados que recubren la totalidad de la superficie exceptuando algunas curvas, las cuales no contribuyen al área.

Ejemplo 5. Calculemos el área del toro en el ejemplo 6, sec. 2.2. Para ello, consideramos el entorno coordenado correspondiente a la parametrización

$$\mathbf{x}(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u),$$

$$0 < u < 2\pi, \quad 0 < v < 2\pi,$$

que recubre el toro, exceptuando un meridiano y un paralelo. Los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$E = r^2, \quad F = 0, \quad G = (r \cos u + a)^2;$$

luego

$$\sqrt{EG - F^2} = r(r \cos u + a).$$

Ahora, consideremos la región R_ϵ obtenida como la imagen mediante \mathbf{x} de la región Q_ϵ (fig. 2-29) dada por ($\epsilon > 0$ y pequeño),

$$Q_\epsilon = \{(u, v) \in R^2; 0 + \epsilon \leq u \leq 2\pi - \epsilon, 0 + \epsilon \leq v \leq 2\pi - \epsilon\}.$$

Utilizando la def. 2 obtenemos

$$\begin{aligned} A(R_\epsilon) &= \iint_{Q_\epsilon} r(r \cos u + a) du dv \\ &= \int_{0+\epsilon}^{2\pi-\epsilon} (r^2 \cos u + ra) du \int_{0+\epsilon}^{2\pi-\epsilon} dv \\ &= r^2(2\pi - 2\epsilon)(\sin(2\pi - \epsilon) - \sin \epsilon) + ra(2\pi - 2\epsilon)^2. \end{aligned}$$

Haciendo $\epsilon \rightarrow 0$ en las expresiones de arriba, obtenemos

$$A(T) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} A(R_\epsilon) = 4\pi^2ra.$$

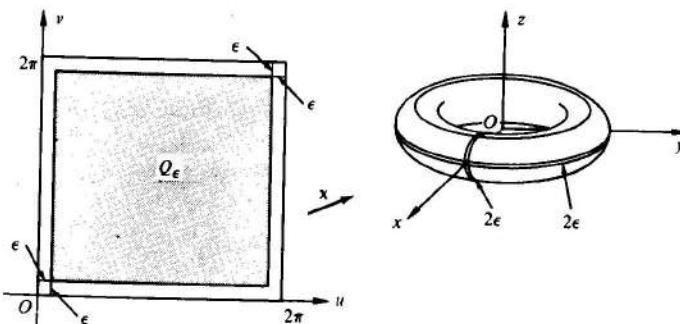


Figura 2-29

Esto concuerda con el valor que se halla mediante cálculo infinitesimal elemental utilizando, por ejemplo, el teorema de Pappus para el área de superficies de revolución (cf. el ejercicio 11).

EJERCICIOS

- Calcular la primera forma fundamental de las siguientes superficies parametrizadas, donde éstas sean regulares:
 - $\mathbf{x}(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u)$; elipsoide.
 - $\mathbf{x}(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, u^2)$; paraboloide elíptico.
 - $\mathbf{x}(u, v) = (au \cosh v, bu \sinh v, u^2)$; paraboloide hiperbólico.
 - $\mathbf{x}(u, v) = (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, c \cosh u)$; hiperbololoide de dos hojas.
- Sea $\mathbf{x}(\varphi, \theta) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ una parametrización de la esfera unidad S^2 . Sea P el plano $x = z \cot \alpha$, $0 < \alpha < \pi$, y β el ángulo agudo que la curva $P \cap S^2$ forma con el semimeridiano $\varphi = \varphi_0$. Calcular $\cos \beta$.
- Obtégase la primera forma fundamental de la esfera en la parametrización dada por la proyección estereográfica (cf. el ejercicio 16, sec. 2.2).
- Dada la superficie parametrizada

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \log \cos v + u), \quad -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2},$$

demuéstrese que las dos curvas $\mathbf{x}(u_1, v)$, $\mathbf{x}(u_2, v)$ determinan segmentos de longitudes iguales sobre todas las curvas $\mathbf{x}(u, \text{constante})$.

- Demuéstrese que el área A de una región acotada R de la superficie $z = f(x, y)$ es

$$A = \iint_Q \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy,$$

donde Q es la proyección ortogonal de R sobre el plano xy .

- Demuéstrese que

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \sin \alpha \cos v, u \sin \alpha \sin v, u \cos \alpha) \quad 0 < u < \infty, \quad 0 < v < 2\pi, \quad \alpha = \text{constante},$$

es una parametrización del cono de ángulo 2α en el vértice. En el correspondiente entorno coordinado, demostrar que la curva

$$\mathbf{x}(c \exp(v \sin \alpha \cot \beta), v), \quad c = \text{const.}, \quad \beta = \text{const.},$$

interseca a las generatrices del cono ($v = \text{const.}$) bajo el ángulo constante β .

- Las curvas coordenadas de una parametrización $\mathbf{x}(u, v)$ constituyen una *red de Tchebyshéf* si son iguales las longitudes de los lados opuestos de cualquier cuadrilátero formado por aquéllas. Demuéstrese que, para que esto se dé, una condición necesaria y suficiente es

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0.$$

- *8. Probar que, siempre que las curvas coordenadas constituyan una red de Tchebyshof (véase el ejercicio 7), es posible reparametrizar el entorno coordenado de suerte que los nuevos coeficientes de la primera forma cuadrática sean

$$E = 1, \quad F = \cos \theta, \quad G = 1,$$

donde θ es el ángulo de las curvas coordenadas.

- *9. Demostrar que una superficie de revolución siempre puede parametrizarse de forma que

$$E = E(v), \quad F = 0, \quad G = 1.$$

10. Sea $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$ el plano xy , y sea $\mathbf{x}: U \rightarrow P$ una parametrización de P dada por

$$\mathbf{x}(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta),$$

donde

$$U = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2; \rho > 0, 0 < \theta < 2\pi\}.$$

Calcular los coeficientes de la primera forma fundamental de P con respecto a esta parametrización.

11. Sea S una superficie de revolución y C su curva generatriz (cf. el ejemplo 4, sec. 2.3). Sea s la longitud de arco de C y denótese por $\rho = \rho(s)$ a la distancia desde el eje de rotación al punto de C correspondiente a s .

- a. *Teorema de Pappus.* Demuéstrese que el área de S es

$$2\pi \int_0^l \rho(s) ds,$$

donde l es la longitud de C .

- b. Aplíquese la parte a para calcular el área de un toro de revolución.

12. Demostrar que el área de un tubo regular de radio r alrededor de una curva α (cf. el ejercicio 10, sec. 2.4) es $2\pi r$ veces la longitud de α .

13. *Helicoides generalizados.* Una generalización natural de las superficies de revolución y de los helicoides se obtiene como sigue. Consideremos una curva plana y regular C , que no corta a un cierto eje E en el plano, y que está desplazada mediante un movimiento rígido con atornillamiento alrededor de E , o sea, tal que cada punto de C describe una hélice (o un círculo) de eje E . El conjunto S generado por el desplazamiento de C se denomina un *helicóide generalizado de eje E y generatriz C* . Si el movimiento de atornillamiento es una rotación pura alrededor de E , S es una superficie de revolución; si C es una recta perpendicular a E , S es (un trozo de) el helicóide estándar (cf. el ejemplo 3).

Elijanse los ejes de coordenadas de forma que E sea el eje z y C se halle en el plano yz .

Demostrar que

- a. Si $(f(s), g(s))$ es una parametrización de C mediante la longitud de arco s , $a < s < b$, $f(s) > 0$, entonces $\mathbf{x}: U \rightarrow S$, donde

$$U = \{(s, u) \in \mathbb{R}^2; a < s < b, 0 < u < 2\pi\}$$

y

$$\mathbf{x}(s, u) = (f(s) \cos u, f(s) \sin u, g(s) + cu), c = \text{const.},$$

es una parametrización de S . Concluir que S es una superficie regular.

- b. Las líneas coordenadas de la parametrización de arriba son ortogonales (es decir, $F = 0$) si y solamente si $\mathbf{x}(U)$ es o bien una superficie de revolución, o bien (un trozo de) el helicóide estándar.

14. *El gradiente sobre superficies.* El *gradiente* de una función diferenciable $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación diferenciable $\text{grad } f: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ que asigna a cada punto $p \in S$ un vector $\text{grad } f(p) \in T_p(S) \subset \mathbb{R}^3$ tal que

$$\langle \text{grad } f(p), v \rangle_p = df_p(v) \quad \text{para todo } v \in T_p(S).$$

Demostrar que

- a. Si E, F, G son los coeficientes de la primera forma fundamental en la parametrización $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, entonces $\text{grad } f$ sobre $\mathbf{x}(U)$ viene dado por

$$\text{grad } f = \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2} \mathbf{x}_u + \frac{f_v E - f_u G}{EG - F^2} \mathbf{x}_v.$$

En particular, si $S = \mathbb{R}^2$ con coordenadas x, y ,

$$\text{grad } f = f_x e_1 + f_y e_2,$$

donde $\{e_1, e_2\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^2 (*por tanto, la definición coincide con la habitual de gradiente en el plano*).

- b. Si mantienes a $p \in S$ fijo y haces variar v en el círculo unidad $|v| = 1$ de $T_p(S)$, entonces $df_p(v)$ es máximo si y sólo si $v = \text{grad } f / |\text{grad } f|$ (*en consecuencia $\text{grad } f(p)$ proporciona la dirección de máxima variación de f en p*).

- c. Si $\text{grad } f \neq 0$ en todos los puntos de la *curva de nivel* $C = \{q \in S; f(q) = \text{const.}\}$, entonces C es una curva regular sobre S y $\text{grad } f$ es normal a C en todos sus puntos.

15. Familias de curvas ortogonales.

- a. Sean E, F, G los coeficientes de la primera forma fundamental de una superficie regular S en la parametrización $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. Sean $\varphi(u, v) = \text{const.}$ y $\psi(u, v) = \text{const.}$ dos familias de curvas regulares en $\mathbf{x}(U) \subset S$ (cf. el ejercicio 28, sec. 2.4). Demostrar que estas dos familias son ortogonales (es decir, cuando quiera que dos curvas de familias distintas se encuentren, sus tangentes son ortogonales) si y sólo si

$$E\varphi_v \psi_v - F(\varphi_u \psi_v + \varphi_v \psi_u) + G\varphi_u \psi_u = 0.$$

- b. Aplíquese la parte a para demostrar que en el entorno coordenado $\mathbf{x}(U)$ del helicóide del ejemplo 3 las dos familias de curvas regulares

$$v \cos u = \text{const.}, \quad v \neq 0,$$

$$(v^2 + a^2) \sin^2 u = \text{const.}, \quad v \neq 0, \quad u \neq \pi,$$

son ortogonales.

2.6. Orientación de superficies⁶

En esta sección discutiremos en qué sentido, y cuándo, es posible orientar una superficie. Intuitivamente, como cada punto p de una superficie regular tiene un plano tangente $T_p(S)$, la elección de una orientación de $T_p(S)$ induce una orientación en un entorno de p , es decir, una noción de movimiento positivo a lo largo de curvas cerradas suficientemente pequeñas encerrando a cada punto del entorno (fig. 2-30). Si es posible hacer esta elección para cada $p \in S$ de forma que en la intersección de dos entornos cualesquiera la orientación coincida, entonces se dice que S es orientable. Si no es posible esto, S se denomina no orientable.

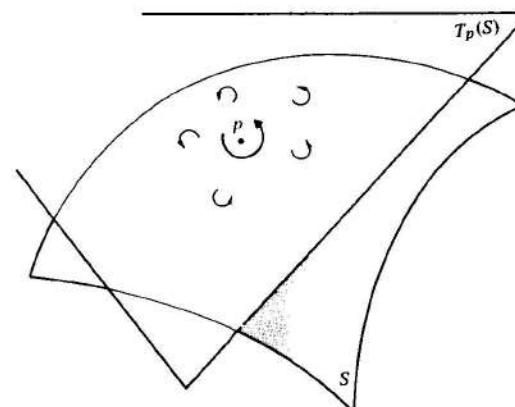


Figura 2-30

Vamos a precisar ahora estas ideas. Fijando una parametrización $\mathbf{x}(u, v)$ en el entorno de un punto p de una superficie regular S , determinamos una orientación del plano tangente $T_p(S)$, a saber, la orientación de la base ordenada asociada $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$. Si p pertenece al entorno coordenado de otra parametrización $\tilde{\mathbf{x}}(\tilde{u}, \tilde{v})$, la nueva base $\{\tilde{\mathbf{x}}_u, \tilde{\mathbf{x}}_v\}$ se expresa en términos de la primera mediante

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_u &= \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}, \\ \tilde{\mathbf{x}}_v &= \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}},\end{aligned}$$

donde $u = u(\tilde{u}, \tilde{v})$ y $v = v(\tilde{u}, \tilde{v})$ son las expresiones del cambio de coordenadas. Las bases $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ y $\{\tilde{\mathbf{x}}_u, \tilde{\mathbf{x}}_v\}$ determinan, en consecuencia, la misma orientación de $T_p(S)$ si y solamente si el jacobiano

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}$$

del cambio de coordenadas es positivo.

⁶ Esta sección puede omitirse en una primera lectura.

DEFINICIÓN 1. Se dice que una superficie regular S es orientable si es posible recubrirla con una familia de entornos coordinados de forma que si un punto p pertenece a dos entornos de esta familia, entonces el cambio de coordenadas tiene jacobiano positivo en p . A la elección de tal familia se denomina una orientación de S y, en este caso, S se denomina orientada. Si no es posible tal elección, la superficie se denomina no orientable.

Ejemplo 1. Una superficie que es la gráfica de una función diferenciable (cf. la sec. 2.2, prop. 1) es una superficie orientable. De hecho, todas las superficies que pueden recubrirse con un entorno coordenado son, trivialmente, orientables.

Ejemplo 2. La esfera es una superficie orientable. En vez de proceder mediante un cálculo directo, recurramos a un argumento general. La esfera se puede recubrir mediante dos entornos coordinados (utilizando la proyección estereográfica; véase el ejercicio 16 de la sec. 2.2), con parámetros (u, v) y (\tilde{u}, \tilde{v}) , de forma que la intersección W de estos entornos (la esfera menos dos puntos) es un conjunto conexo. Fijemos un punto p en W . Si el jacobiano del cambio de coordenadas en p es negativo, intercambiamos u y v en el primer sistema, y el jacobiano se vuelve positivo. Como el jacobiano es diferente de cero en W y positivo en $p \in W$, se deduce de la conexidad de W que el jacobiano siempre es positivo. Existe, por tanto, una familia de entornos coordinados verificando la def. 1 y, en consecuencia, la esfera es orientable.

Precisamente por el argumento utilizado, resulta claro que si una superficie regular se puede recubrir mediante dos entornos coordinados cuya intersección es conexa, entonces la superficie es orientable.

Antes de presentar un ejemplo de superficie no orientable, vamos a dar una interpretación geométrica de la idea de orientabilidad para una superficie regular en R^3 .

Como vimos en la sec. 2.4, dado un sistema de coordenadas $\mathbf{x}(u, v)$ en p , disponemos de una elección bien definida de un vector unitario normal N en p mediante la regla

$$N = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(p). \quad (1)$$

Tomando otro sistema de coordenadas locales $\tilde{\mathbf{x}}(\tilde{u}, \tilde{v})$ en p , vemos que

$$\tilde{\mathbf{x}}_u \wedge \tilde{\mathbf{x}}_v = (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}, \quad (2)$$

donde $\partial(u, v)/\partial(\tilde{u}, \tilde{v})$ es el jacobiano del cambio de coordenadas. De aquí, N mantendrá o cambiará su signo, dependiendo de si $\partial(u, v)/\partial(\tilde{u}, \tilde{v})$ es positivo o negativo, respectivamente.

Entenderemos por *campo diferenciable de vectores normales unitarios* sobre un conjunto abierto $U \subset S$, a una aplicación diferenciable $N: U \rightarrow R^3$ que asocia a cada $q \in U$ un vector unitario normal $N(q) \in R^3$ a S en q .

PROPOSICIÓN 1. Una superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ es orientable si y sólo si existe un campo diferenciable de vectores normales unitarios $N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ sobre S .

Demostración. Si S es orientable, es posible recubrirla con una familia de entornos coordenados de forma que, en la intersección de dos de ellos, el cambio de coordenadas tiene jacobiano positivo. En los puntos $p = \mathbf{x}(u, v)$ de cada entorno, definimos $N(p) = N(u, v)$ mediante la ecuación (1). $N(p)$ está bien definido ya que si p pertenece a dos entornos coordinados, con parámetros (u, v) y (\bar{u}, \bar{v}) , los vectores normales $N(u, v)$ y $N(\bar{u}, \bar{v})$ coinciden en virtud a la ecuación (2). Además, por la ecuación (1), las coordenadas de $N(u, v)$ en \mathbb{R}^3 son funciones diferenciables de (u, v) , y así la aplicación $N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ es diferenciable, como queríamos.

Por otra parte, sea $N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo diferenciable de vectores unitarios normales y consideremos una familia de entornos coordinados conexos que recubran a S . Para los puntos $p = \mathbf{x}(u, v)$ de cada entorno coordinado $\mathbf{x}(U)$, $U \subset \mathbb{R}^2$, es posible, gracias a la continuidad de N , intercambiando u con v si fuese necesario, escribir

$$N(p) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}.$$

De hecho, el producto interior

$$\left\langle N(p), \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|} \right\rangle = f(p) = \pm 1$$

es una función continua en $\mathbf{x}(U)$. Como $\mathbf{x}(U)$ es conexo, el signo de f es constante. Si $f = -1$, intercambiamos u con v en la parametrización y deducimos la afirmación.

Procediendo de esta manera con todos los entornos coordinados, tenemos que en la intersección de dos de ellos, pongamos por caso, $\mathbf{x}(u, v)$ y $\tilde{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$, el jacobiano

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$$

es ciertamente positivo, pues de otra forma tendríamos

$$\frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|} = N(p) = -\frac{\tilde{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \tilde{\mathbf{x}}_{\bar{v}}}{|\tilde{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \tilde{\mathbf{x}}_{\bar{v}}|} = -N(p),$$

lo que constituye una contradicción. De donde la familia considerada de entornos coordinados, tras experimentar ciertos intercambios de u con v , satisface las condiciones de la def. 1, y, por tanto, S es orientable.

Q.E.D.

Observación. Como pone de manifiesto la demostración, sólo necesitamos pedir la existencia de un campo vectorial unitario y continuo sobre S para que S sea orientable. Tal campo vectorial será diferenciable automáticamente.

Ejemplo 3. Vamos a describir ahora un ejemplo de superficie no orientable; la que se denomina *banda de Möbius*. Esta superficie se obtiene (véase la fig. 2-31) al considerar el círculo S^1 dado por $x^2 + y^2 = 4$ y el segmento abierto AB del plano yz

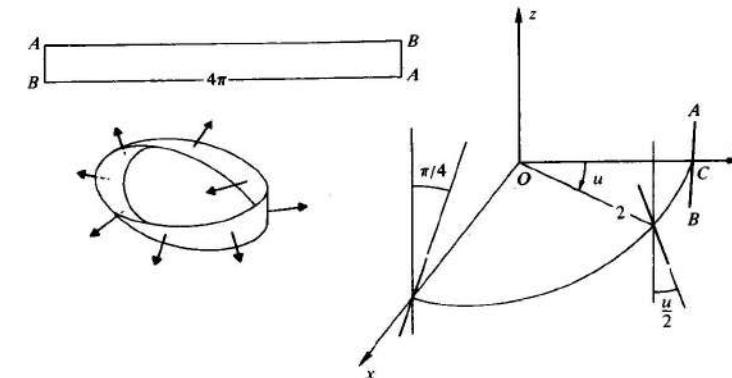


Figura 2-31

dado por $y = 2$, $|z| < 1$. Movemos el centro c de AB a lo largo de S^1 y giramos AB alrededor de c en el plano cz , de manera que cuando c recorra un ángulo u , AB haya rotado un ángulo $u/2$. Cuando c completa un recorrido alrededor del círculo, AB retorna a su posición inicial, con sus extremos invertidos. Desde el punto de vista de la diferenciabilidad, es como si hubiésemos identificado los lados (verticales) opuestos de un rectángulo, efectuando una torsión del mismo para que cada punto del lado AB se identifique con su simétrico (fig. 2-31).

Resulta evidente, geométricamente, que la banda de Möbius M es una superficie regular no orientable. De hecho, si M fuese orientable, existiría un campo diferenciable $N: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ de vectores unitarios normales. Tomando estos vectores sobre el círculo $x^2 + y^2 = 4$ vemos que tras efectuar un recorrido el vector N retorna a su posición inicial como $-N$, lo que es una contradicción.

Vamos a dar una demostración analítica de los hechos arriba mencionados.

Un sistema de coordenadas $\mathbf{x}: U \rightarrow M$ para la banda de Möbius viene dado por

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(\left(2 - v \operatorname{sen} \frac{u}{2} \right) \operatorname{sen} u, \left(2 - v \operatorname{sen} \frac{u}{2} \right) \cos u, v \cos \frac{u}{2} \right),$$

donde $0 < u < 2\pi$ y $-1 < v < 1$. El entorno coordinado correspondiente suprime los puntos del intervalo abierto $u = 0$. Al tomar entonces el origen de las u en el eje x obtenemos otra parametrización $\tilde{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$ dada por

$$x = \left\{ 2 - \bar{v} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2} \right) \right\} \cos \bar{u},$$

$$y = -\left\{ 2 - \bar{v} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2} \right) \right\} \operatorname{sen} \bar{u},$$

$$z = \bar{v} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2} \right),$$

cuyo entorno coordenado suprime el intervalo $u = \pi/2$. Estos dos entornos coordinados recubren la banda de Möbius y pueden utilizarse para demostrar que es una superficie regular.

Obsérvese que la intersección de los dos entornos coordinados no es conexa sino que consta de las dos componentes conexas:

$$W_1 = \left\{ x(u, v) : \frac{\pi}{2} < u < 2\pi \right\},$$

$$W_2 = \left\{ x(u, v) : 0 < u < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

El cambio de coordenadas viene dado por

$$\begin{cases} \bar{u} = u - \frac{\pi}{2} \\ \bar{v} = v \end{cases} \quad \text{en } W_1,$$

y

$$\begin{cases} \bar{u} = \frac{3\pi}{2} + u \\ \bar{v} = -v \end{cases} \quad \text{en } W_2,$$

Se deduce que

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = 1 > 0 \quad \text{en } W_1$$

y que

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = -1 < 0 \quad \text{en } W_2.$$

Para demostrar que la banda de Möbius es no orientable, suponemos que es posible definir un campo diferenciable de vectores unitarios normales $N: M \rightarrow \mathbb{R}^3$. Intercambiando si fuese necesario a u con v , podemos suponer que

$$N(p) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}$$

en cualquier p del entorno coordenado de $\mathbf{x}(u, v)$. Análogamente, podemos suponer que

$$N(p) = \frac{\tilde{\mathbf{x}}_u \wedge \tilde{\mathbf{x}}_v}{|\tilde{\mathbf{x}}_u \wedge \tilde{\mathbf{x}}_v|}$$

en todos los puntos del entorno coordenado de $\tilde{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$. Sin embargo, el jacobiano del cambio de coordenadas debe ser -1 en W_1 o W_2 , dependiendo de qué cambios del tipo $u \rightarrow v$, $\bar{u} \rightarrow \bar{v}$ se hubieran efectuado. Si p es un punto de esa componente de la intersección, entonces $N(p) = -N(p)$, lo que constituye una contradicción.

Hemos visto ya que una superficie que es la gráfica de una función diferenciable es orientable. Probaremos ahora que una superficie la cual es la imagen inversa de un valor regular de una función diferenciable también es orientable. Esta es una de las razones por las que resulta relativamente difícil construir en \mathbb{R}^3 ejemplos de superficies regulares no orientables.

PROPOSICIÓN 2. Si una superficie regular viene dada por $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = a\}$, donde $f: U \cup \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y a es un valor regular de f , entonces S es orientable.

Demostración. Dado un punto $(x_0, y_0, z_0) = p \in S$, considérese la curva parametrizada $(x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$, sobre S que pasa por p en $t = t_0$. Ya que la curva se halla en S , tenemos que

$$f(x(t), y(t), z(t)) = a$$

para todo $t \in I$. Derivando los dos miembros de esta expresión con respecto a t , vemos que en $t = t_0$

$$f_x(p)\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} + f_y(p)\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0} + f_z(p)\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t_0} = 0.$$

Esto prueba que el vector tangente a la curva en $t = t_0$ es perpendicular al vector (f_x, f_y, f_z) en p . Dado que la curva y el punto son arbitrarios, podemos concluir que

$$N(x, y, z) = \left(\frac{f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}, \frac{f_y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}, \frac{f_z}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}} \right)$$

es un campo diferenciable de vectores unitarios normales sobre S . Junto con la prop. 1, esto implica que S es orientable, como queríamos demostrar.

Q.E.D.

Una última observación. La orientación es, en definitiva, una propiedad no local de una superficie regular. Localmente, cada superficie regular es difeomorfa a un conjunto abierto del plano, por tanto orientable. La orientación es una propiedad global, en el sentido de que involucra a la totalidad de la superficie. Queda más por decir sobre propiedades globales; más adelante (cap. 5) nos ocuparemos de ello.

EJERCICIOS

1. Sea S una superficie regular recubierta por dos entornos coordinados V_1 y V_2 . Supóngase que $V_1 \cap V_2$ tiene dos componentes conexas, W_1 y W_2 , y que el jacobiano del cambio de coordenadas es positivo en W_1 y negativo en W_2 . Demuéstrese que S es no orientable.
2. Sea S_2 una superficie regular orientable y sea $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación diferenciable que es un difeomorfismo local en cada $p \in S_1$. Demostrar que S_1 es orientable.
3. ¿Es posible dar sentido a la noción de área para la banda de Möbius? En caso afirmativo, obtégase una integral para calcularla.
4. Sea S una superficie orientable y sean $\{U_\alpha\}$ y $\{V_\beta\}$ dos familias de entornos coordinados que recubren a S (es decir, $\bigcup U_\alpha = S \cup V_\beta$) y satisfacen las condiciones de la def. 1 (o sea, en cada una de las familias, los cambios de coordenadas tienen jacobiano positivo). Decimos que $\{U_\alpha\}$ y $\{V_\beta\}$ determinan la misma orientación de S si la unión de las dos familias satisface de nuevo las condiciones de la def. 1.

Pruébese que una superficie regular, conexa y orientable solamente puede tener dos orientaciones distintas.

5. Sea $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ un difeomorfismo.
 - a. Demostrar que S_1 es orientable si y sólo si S_2 es orientable (en consecuencia, la orientabilidad se preserva mediante difeomorfismos).
 - b. Sean S_1 y S_2 superficies orientables y orientadas. Demuéstrese que el difeomorfismo φ induce una orientación en S_2 . Utilícese la aplicación antipodal de la esfera (cf. el ejercicio 1, sec. 2.3) para demostrar que esta orientación puede ser distinta (cf. el ejercicio 4) de la inicial (así, la orientación misma pudiera no ser preservada por difeomorfismos; nótese, no obstante, que si S_1 y S_2 son conexas, un difeomorfismo o bien preserva o bien «invierte» la orientación).
6. Defínase el concepto de orientación para una curva regular $C \subset R^3$, y demuéstrese que si C es conexa, existen a lo más dos orientaciones distintas en el sentido del ejercicio 4 (en realidad únicamente existen dos, pero eso resulta más duro de demostrar).
7. Demuéstrese que si una superficie regular S contiene a un abierto difeomorfo a la banda de Möbius, entonces S es no orientable.

2.7. Una caracterización de las superficies compactas orientables⁷

El recíproco de la prop. 2 de la sec. 2.6, a saber, que *una superficie orientable en R^3 es la imagen inversa de un valor regular de alguna función diferenciable*, es cierto y su demostración no es trivial. Incluso en el caso particular de superficies compactas (definidas en esta sección), la demostración es instructiva y ofrece un interesante ejemplo de teorema global en geometría diferencial. La sección se dedicará por entero a la demostración de este resultado inverso.

Sea $S \subset R^3$ una superficie orientable. El punto crucial de la demostración consiste en demostrar que uno puede elegir, sobre la recta normal que pasa por $p \in S$, un intervalo abierto I_p centrado en p de longitud, digamos, $2\epsilon_p$ (ϵ_p varía con p) de forma que si $p \neq q \in S$, entonces $I_p \cap I_q = \emptyset$. Por tanto, la unión $\bigcup I_p$, $p \in S$, constituye un abierto V de R^3 , que contiene a S y posee la propiedad de que a través de cada punto de V pasa una única recta normal a S ; se dice entonces que V es un *entorno tubular* de S (fig. 2-32).

Admitamos, por el momento, la existencia de un entorno tubular V de una superficie orientable S . Podemos definir entonces una función $g: V \rightarrow R$ como sigue. Fíjese una orientación en S . Obsérvese que ningún par de segmentos I_p e I_q , $p \neq q$, del entorno tubular V , se cortan. Por tanto, a través de cada punto $P \in V$ pasa una única recta normal a S que corta a ésta en un punto p ; por definición, $g(P)$ es la distancia de p a P , con un signo que viene dado por el sentido del vector unitario normal en p . Si podemos probar que g es una función diferenciable y que 0 es un valor regular de g , tendremos que $S = g^{-1}(0)$, que es lo que se desea probar.

Ahora vamos a comenzar la demostración de la existencia de un entorno tubular para una superficie orientable. Primero demostraremos una versión local de este

⁷ Esta sección puede omitirse en una primera lectura.

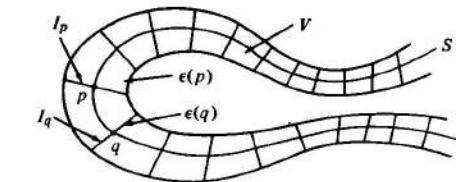


Figura 2-32. Un entorno tubular.

hecho; es decir, probaremos que para cada punto p de una superficie regular existe un entorno de p que contiene un entorno tubular.

PROPOSICIÓN 1. *Sea S una superficie regular y sea $x: U \rightarrow S$ una parametrización de un entorno del punto $p = x(u_0, v_0) \in S$. Entonces existe un entorno $W \subset x(U)$ de p en S y un número $\epsilon > 0$ tal que los segmentos de las rectas normales que pasan por los puntos $q \in W$, centrados en q y de longitud 2ϵ , son disjuntos (es decir, W tiene un entorno tubular).*

Demostración. Considérese la aplicación $F: U \times R \rightarrow R^3$ dada por

$$F(u, v; t) = x(u, v) + tN(u, v), \quad (u, v) \in U, \quad t \in R,$$

donde $N(u, v) = (N_x, N_y, N_z)$ es el vector unitario normal en

$$x(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Geométricamente, F aplica el punto $(u, v; t)$ del «cilindro» $U \times R$ en el punto de la recta normal a S que dista t de $x(u, v)$. Claramente F es diferenciable y su jacobiano en $t = 0$ tiene dado por

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ N_x & N_y & N_z \end{vmatrix} = |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \neq 0.$$

Por el teorema de la función inversa, existe un paralelepípedo en $U \times R$, por ejemplo

$$u_0 - \delta < u < u_0 + \delta, \quad v_0 - \delta < v < v_0 + \delta, \quad -\epsilon < t < \epsilon,$$

donde la restricción de F es inyectiva. Sin embargo, esto significa que en la imagen W mediante F del rectángulo

$$u_0 - \delta < u < u_0 + \delta, \quad v_0 - \delta < v < v_0 + \delta$$

los segmentos de las normales centrados en $q \in W$ y longitud $< 2\epsilon$ no se cortan.

Q.E.D.

En este punto, es conveniente observar lo siguiente. El hecho de que la función $g: V \rightarrow R$, arriba definida bajo la suposición de que existe un entorno tubular V , es diferenciable y admite a 0 como valor regular es un resultado local que puede demostrarse de manera inmediata.

PROPOSICION 2. Supongamos la existencia de un entorno tubular $V \subset R^3$ de una superficie orientable $S \subset R^3$, y elijamos una orientación para S . Entonces la función $g: V \rightarrow R$, definida como la distancia de un punto de V al pie de la única recta normal que pasa por este punto, es diferenciable y admite a cero como valor regular.

Demostración. Fijémonos de nuevo en la aplicación $F: U \times R \rightarrow R^3$ definida en la prop. 1, donde ahora admitimos que la parametrización x es compatible con la orientación dada.

Denotando por x, y, z a las coordenadas de $F(u, v, t) = x(u, v) + tN(u, v)$ podemos escribir

$$F(u, v, t) = (x(u, v, t), y(u, v, t), z(u, v, t)).$$

Como el jacobiano $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, t)$ es diferente de cero en $t = 0$, podemos invertir F en algún paralelepípedo Q ,

$$u_0 - \delta < u < u_0 + \delta, \quad v_0 - \delta < v < v_0 + \delta, \quad -\epsilon < t < \epsilon,$$

para obtener una aplicación diferenciable

$$F^{-1}(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), t(x, y, z)),$$

donde $(x, y, z) \in F(Q) = V$. Pero la función $g: V \rightarrow R$ del enunciado de la prop. 2 es precisamente $t = t(x, y, z)$. Así, g es diferenciable. Además, 0 es un valor regular de g ; pues en otro caso

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0$$

en algún punto donde $t = 0$; de donde dF^{-1} sería singular para $t = 0$, lo cual es una contradicción.

Q.E.D.

Para pasar de lo local a lo global, es decir, para probar la existencia de un entorno tubular para la totalidad de la superficie orientable, necesitamos algunos argumentos topológicos. Nos limitaremos al caso de superficies compactas, que ahora definiremos.

Sea A un subconjunto de R^3 . Decimos que $p \in R^3$ es un punto límite de A si cada entorno de p en R^3 contiene un punto de A distinto de p . Se dice que A es cerrado si contiene todos sus puntos límite. A es acotado si está contenido en alguna bola de R^3 . Si A es cerrado y acotado, se denomina un conjunto compacto.

La esfera y el toro son superficies compactas. El paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2$, $(x, y) \in R^2$, es una superficie cerrada, pero, al no ser acotada, no es una superficie compacta. El disco $x^2 + y^2 < 1$ del plano y la banda de Möbius son acotados pero no cerrados y por tanto no son compactos.

Vamos a necesitar algunas propiedades de los subconjuntos compactos de R^3 , que estableceremos ahora. La distancia entre dos puntos $p, q \in R^3$ se denotará por $d(p, q)$.

PROPIEDAD 1 (Bolzano-Weierstrass). Sea $A \subset R^3$ un conjunto compacto. Entonces cada subconjunto infinito de A tiene al menos un punto límite en A .

PROPIEDAD 2 (Heine-Borel). Sea $A \subset R^3$ un conjunto compacto y sea $\{U_\alpha\}$ una familia de conjuntos abiertos de A tal que $\bigcup U_\alpha = A$. Entonces es posible elegir un número finito $U_{k_1}, U_{k_2}, \dots, U_{k_n}$ de U_α tal que $\bigcup U_{k_i} = A$, $i = 1, \dots, n$.

PROPIEDAD 3 (Lebesgue). Sea $A \subset R^3$ un conjunto compacto y sea $\{U_\alpha\}$ una familia de conjuntos abiertos de A tal que $\bigcup U_\alpha = A$. Entonces existe un número $\delta > 0$ (el número de Lebesgue de la familia $\{U_\alpha\}$) tal que cualquiera que sea la pareja de puntos $p, q \in A$ situada a una distancia $d(p, q) < \delta$ entonces p y q pertenecen a algún U_α .

Las propiedades 1 y 2 se demuestran habitualmente en un curso avanzado de cálculo diferencial. En beneficio de la completitud, demostraremos ahora la propiedad 3. Más adelante en el libro (apéndice al cap. 5), trataremos los conjuntos compactos en R^n de una manera más sistemática y presentaremos las demostraciones de las propiedades 1 y 2.

Demostración de la propiedad 3. Admitamos que no existen $\delta > 0$ satisfaciendo las condiciones del enunciado; es decir, dado $1/n$ existen puntos p_n y q_n tal que $d(p_n, q_n) < 1/n$ pero p_n y q_n no pertenecen al mismo conjunto abierto de la familia $\{U_\alpha\}$. Tomando $n = 1, 2, \dots$, obtenemos dos conjuntos infinitos de puntos $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$ que, por la propiedad 1, tienen puntos límites p y q , respectivamente. Como $d(p_n, q_n) < 1/n$, podemos elegir estos puntos límite de modo que $p = q$. Pero $p \in U_\alpha$ para algún α , porque $p \in A = \bigcup U_\alpha$, y ya que U_α es un conjunto abierto, existe una bola abierta $B_\epsilon(p)$, con centro en p , tal que $B_\epsilon(p) \subset U_\alpha$. Como p es un punto límite de $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$, existen, para n suficientemente grande, puntos p_n y q_n en $B_\epsilon(p) \subset U_\alpha$; es decir, p_n y q_n pertenecen al mismo U_α , lo que constituye una contradicción.

Q.E.D.

Utilizando las propiedades 2 y 3, vamos ahora a demostrar la existencia de un entorno tubular para una superficie orientable y compacta.

PROPOSICION 3. Sea $S \subset R^3$ una superficie regular, compacta y orientable. Entonces existe un número $\epsilon > 0$ tal que cualesquiera que sean $p, q \in S$ los segmentos de las rectas normales de longitud 2ϵ , centrados en p y q , son disjuntos (es decir, S admite un entorno tubular).

Demostración. Por la prop. 1, para cada $p \in S$ existe un entorno W_p y un número $\epsilon_p > 0$ tal que la proposición se satisface para los puntos de W_p con $\epsilon = \epsilon_p$. Haciendo a

p recorrer S , obtenemos una familia $\{W_p\}$ con $\bigcup_{p \in S} W_p = S$. En virtud a la compacidad (propiedad 2), es posible elegir un número finito de conjuntos W_p , por ejemplo, W_1, \dots, W_k (correspondientes a $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$) tal que $\bigcup W_i = S$, $i = 1, \dots, k$. Demostraremos que el δ que se necesita viene dado por

$$\delta < \min(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \frac{\delta}{2}),$$

donde δ es el número de Lebesgue de la familia $\{W_i\}$ (propiedad 3).

En efecto, sean dos puntos $p, q \in S$. Si ambos pertenecen a algún W_i , $i = 1, \dots, k$, los segmentos de las rectas normales con centros en p y q y longitud 2ε no se cortan, ya que $\varepsilon < \varepsilon_i$. Si p y q no pertenecen al mismo W_i , entonces $d(p, q) \geq \delta$; para que los segmentos de las rectas normales, centrados en p y q y longitud 2ε , se cortaran en un punto $Q \in R^3$, deberíamos tener

$$2\varepsilon \geq d(p, Q) + d(Q, q) \geq d(p, q) \geq \delta,$$

lo que contradice la definición de ε .

Q.E.D.

Reuniendo las propiedades 1, 2 y 3, obtenemos el siguiente teorema, que es el principal objetivo de esta sección.

TEOREMA. *Sea $S \subset R^3$ una superficie regular, orientable y compacta. Entonces existe una función diferenciable $g: V \rightarrow R$, definida en un conjunto abierto $V \subset R^3$, con $S \subset V$ (con precisión, un entorno tubular de S), que admite a cero como un valor regular y es tal que $S = g^{-1}(0)$.*

Observación 1. Es posible demostrar la existencia de un entorno tubular para una superficie orientable, incluso si la superficie no es compacta; por esta razón, el teorema es válido sin la restricción de compactidad. Sin embargo, la demostración es más técnica. En este caso general, el $\varepsilon(p) > 0$ no es constante como en el caso compacto, pudiendo variar con p .

Observación 2. Es posible demostrar que una superficie regular compacta en R^3 es orientable; en consecuencia, la hipótesis de orientabilidad en el teorema (caso compacto) es innecesaria. Puede encontrarse una demostración de este hecho en H. Samelson, «Orientability of Hypersurfaces in R^n », Proc. A.M.S., 22 (1969), 301-302.

2.8. Una definición geométrica de área⁸

En esta sección presentaremos una justificación geométrica para la definición de área dada en la sec. 2.5. Con precisión, daremos una definición geométrica de área y demostraremos que en el caso de una región acotada en una superficie regular tal definición da lugar a la fórmula para el área que se dio en la sec. 2.5.

⁸ Esta sección puede omitirse en una primera lectura.

Para definir el área de una región $R \subset S$ empezaremos con una partición \mathcal{P} de R en un número finito de regiones R_i , es decir, escribiremos $R = \bigcup_i R_i$, donde la intersección de dos de tales regiones R_i es o bien vacía, o está constituida por puntos de la frontera de ambas regiones (fig. 2-33). El diámetro de R_i es el supremo de las distancias (en R^3) de dos puntos cualesquiera en R_i ; el mayor de los diámetros de las regiones R_i en una partición dada \mathcal{P} se denomina la norma μ de \mathcal{P} . Si tomamos ahora una partición de cada R_i , obtenemos una segunda partición de R , de la cual se dice que refina a \mathcal{P} .

Dada una partición

$$R = \bigcup_i R_i$$

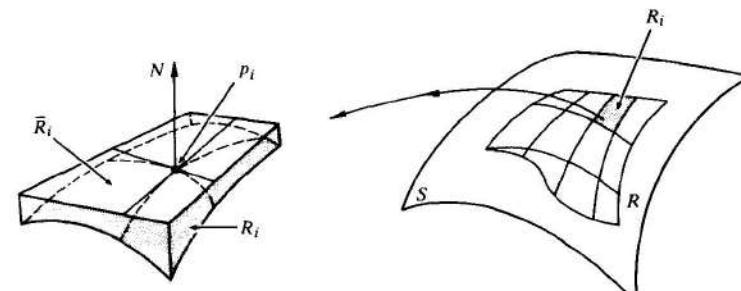


Figura 2-33

de R , elegimos arbitrariamente puntos $p_i \in R_i$ y proyectamos R_i sobre el plano tangente en p_i siguiendo la dirección de la recta normal en p_i ; esta proyección se denota por \bar{R}_i y su área por $A(\bar{R}_i)$. La suma $\sum_i A(\bar{R}_i)$ es una aproximación de lo que entendemos intuitivamente por el área de R .

Si, eligiendo particiones $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n, \dots$, cada vez más refinadas y tal que la norma μ_n de \mathcal{P}_n converge a cero, existe el límite de $\sum_i A(\bar{R}_i)$ y este límite es independiente de todas las elecciones efectuadas, entonces diremos que R tiene área $A(R)$ definida por

$$A(R) = \lim_{\mu_n \rightarrow 0} \sum_i A(\bar{R}_i).$$

Se puede encontrar una discusión intuitiva de esta definición en R. Courant, *Differential and Integral Calculus*, vol. II, Wiley-Interscience, Nueva York, 1936, p. 311.

Vamos a demostrar que una región acotada de una superficie regular tiene área. Nos limitaremos a regiones acotadas contenidas en un entorno coordenado y obtendremos una expresión para el área en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental en el correspondiente sistema de coordenadas.

PROPOSICIÓN. *Sea $x: U \rightarrow S$ un sistema coordenado en una superficie regular S y sea $R = x(Q)$ una región acotada de S contenida en $x(U)$. Entonces R tiene un área dada por*

$$A(R) = \iint_Q |x_u \wedge x_v| du dv.$$

Demostración. Considérese una partición, $R = \bigcup_i R_i$, de R . Como R es cerrada y acotada (por tanto compacta), podemos suponer que esta partición está lo suficientemente refinada de forma que dos rectas normales cualesquiera de R_i nunca son ortogonales. De hecho, como las rectas normales varían continuamente en S , existe para cada $p \in R$ un entorno de p en S donde dos rectas normales cualesquiera nunca son ortogonales; estos entornos forman una familia de conjuntos abiertos que recubren R , y, considerando una partición de R cuya norma sea menor que el número de Lebesgue del recubrimiento (sec. 2.7, propiedad 3 de los conjuntos compactos), podemos satisfacer la condición requerida.

Fijemos una región R_i de la partición y elegimos un punto $p_i \in R_i = x(Q_i)$. Queremos calcular el área de la proyección normal \bar{R}_i de R_i sobre el plano tangente en p_i . Para ello, considérese un nuevo sistema de ejes $p_i\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ en R^3 , obtenido a partir de $Oxyz$ mediante una traslación Op_i , seguida de una rotación que lleve el eje z a la recta normal en p_i de forma que ambos sistemas tengan la misma orientación (fig. 2-34). En los nuevos ejes, la parametrización se puede escribir

$$\bar{x}(u, v) = (\bar{x}(u, v), \bar{y}(u, v), \bar{z}(u, v)),$$

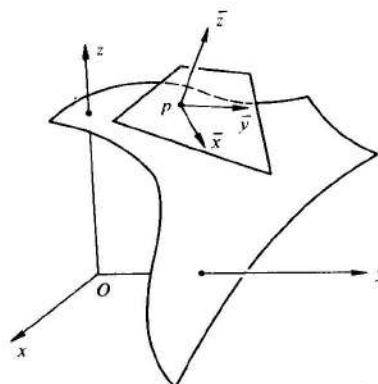


Figura 2-34

donde la forma explícita de $\bar{x}(u, v)$ no nos interesa; basta con saber que el vector $\bar{x}(u, v)$ se obtiene del vector $x(u, v)$ mediante una traslación seguida de una aplicación lineal ortogonal.

Observemos que $\partial(\bar{x}, \bar{y})/\partial(u, v) \neq 0$ en Q_i ; pues, en otro caso, la componente \bar{z} de algún vector normal en R_i sería cero y habría dos rectas normales ortogonales en R_i , lo que contradice nuestras hipótesis.

La expresión de $A(\bar{R}_i)$ viene dada por

$$A(\bar{R}_i) = \iint_{R_i} d\bar{x} d\bar{y}.$$

Como $\partial(\bar{x}, \bar{y})/\partial(u, v) \neq 0$, podemos considerar el cambio de coordenadas $\bar{x} = \bar{x}(u, v)$, $\bar{y} = \bar{y}(u, v)$ y transformar la expresión de arriba en

$$A(\bar{R}_i) = \iint_{Q_i} \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(u, v)} du dv.$$

Observemos ahora que, en p_i , los vectores \bar{x}_u y \bar{x}_v pertenecen al plano $\bar{x}\bar{y}$; por eso,

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial u} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial v} = 0 \quad \text{en } p_i;$$

luego,

$$\left| \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(u, v)} \right| = \left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right| \quad \text{en } p_i.$$

Se deduce que

$$\left| \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(u, v)} \right| - \left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right| = \varepsilon_i(u, v), \quad (u, v) \in Q_i,$$

donde $\varepsilon_i(u, v)$ es una función continua en Q_i con $\varepsilon_i(x^{-1}(p_i)) = 0$. Ya que la longitud de un vector se conserva frente a traslaciones y aplicaciones ortogonales lineales, obtenemos

$$\left| \frac{\partial x}{\partial u} \wedge \frac{\partial x}{\partial v} \right| = \left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right| = \left| \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(u, v)} \right| - \varepsilon_i(u, v).$$

Sean ahora M_i y m_i el máximo y el mínimo de la función continua $\varepsilon_i(u, v)$ en la región compacta Q_i ; entonces,

$$m_i \leq \left| \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(u, v)} \right| - \left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right| \leq M_i;$$

de donde,

$$m_i \iint_{Q_i} du dv \leq A(\bar{R}_i) - \iint_{Q_i} \left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right| du dv \leq M_i \iint_{Q_i} du dv.$$

Procediendo igual con todas las R_i , obtenemos

$$\sum_i m_i A(Q_i) \leq \sum_i A(\bar{R}_i) - \iint_Q |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| du dv \leq \sum_i M_i A(Q_i).$$

Ahora, refinemos cada vez más la partición dada, de forma que la norma $\mu \rightarrow 0$. Entonces $M_i \rightarrow m_i$. Por tanto, existe el límite de $\sum_i A(\bar{R}_i)$, dado por

$$A(R) = \iint_Q \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right| du dv,$$

el cual es claramente independiente de la elección de las particiones y del punto p_i en cada partición.

Q.E.D

Apéndice

BREVE REPASO SOBRE CONTINUIDAD Y DIFERENCIABILIDAD

R^n va a representar el conjunto de las n -tuplas (x_1, \dots, x_n) de números reales. Aunque utilizaremos solamente los casos $R^1 = R$, R^2 y R^3 , la noción más general de R^n unifica las definiciones y no conlleva dificultades adicionales; el lector puede pensar en R^2 o R^3 si así lo desea. En estos casos particulares, utilizaremos la siguiente notación más tradicional: x o t para R , (x, y) o (u, v) para R^2 y (x, y, z) para R^3 .

A. Continuidad en R^n

Vamos a comenzar precisamente la noción de que un punto esté ϵ -próximo a un punto dado $p_0 \in R^n$.

Una *bola* (o *bola abierta*) en R^n con centro $p_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ y radio $\epsilon > 0$ es el conjunto

$$B_\epsilon(p_0) = \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n; (x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2 < \epsilon^2\}.$$

Así, en R , $B_\epsilon(p_0)$ es un intervalo abierto con centro p_0 y longitud 2ϵ ; en R^2 , $B_\epsilon(p_0)$ es el interior de la región delimitada por una esfera de centro en p_0 y radio ϵ (véase la fig. A2-1).

Un conjunto $U \subset R^n$ es un *conjunto abierto* si para cada $p \in U$ existe una bola $B_\epsilon(p) \subset U$; intuitivamente, esto significa que los puntos de U están totalmente rodeados por puntos de U , o que los puntos que estén suficientemente próximos a puntos de U también pertenecen a U .

Por ejemplo, se ve fácilmente que el conjunto

$$\{(x, y) \in R^2; a < x < b, c < y < d\}$$

es abierto en R^2 . Sin embargo, si una de las desigualdades estrictas, pongamos por caso $x < b$, se reemplaza por $x \leq b$, el conjunto deja de ser abierto; ninguna bola con

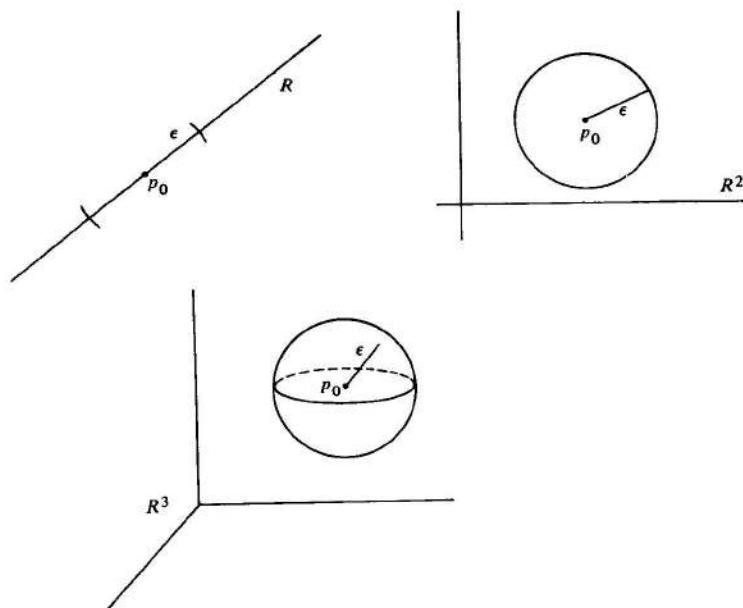


Figura A2-1

centro en el punto $(b, (d+c)/2)$, que pertenece al conjunto, puede estar contenida en el conjunto (fig. A2-2).

Resulta conveniente decir que un conjunto abierto de R^n que contiene a un punto p es un *entorno* de p .

De aquí en adelante, $U \subset R^n$ denotará un conjunto abierto de R^n .

Recuérdese que una función real $f: U \subset R \rightarrow R$ de una variable real es continua en x_0 si dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$, entonces

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

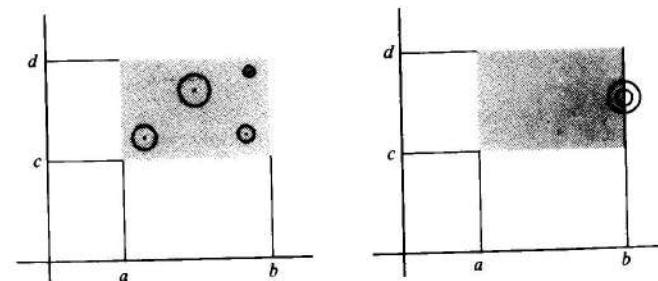


Figura A2-2

De manera análoga, una función real $f: U \subset R^2 \rightarrow R$ de dos variables reales es continua en (x_0, y_0) si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$, entonces

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

La noción de bola unifica estas definiciones como casos particulares del siguiente concepto general:

Una aplicación $F: U \subset R^n \rightarrow R^m$ es continua en $p \in U$ si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$F(B_\delta(p)) \subset B_\varepsilon(F(p)).$$

En otras palabras, F es continua en p si puntos arbitrariamente próximos a $F(p)$ son imágenes de puntos suficientemente próximos a p . Se comprueba fácilmente que en los casos particulares de $n = 1, 2$ y $m = 1$, esto coincide con las definiciones previas. Diremos que F es continua en U si F es continua para todo $p \in U$ (fig. A2-3).

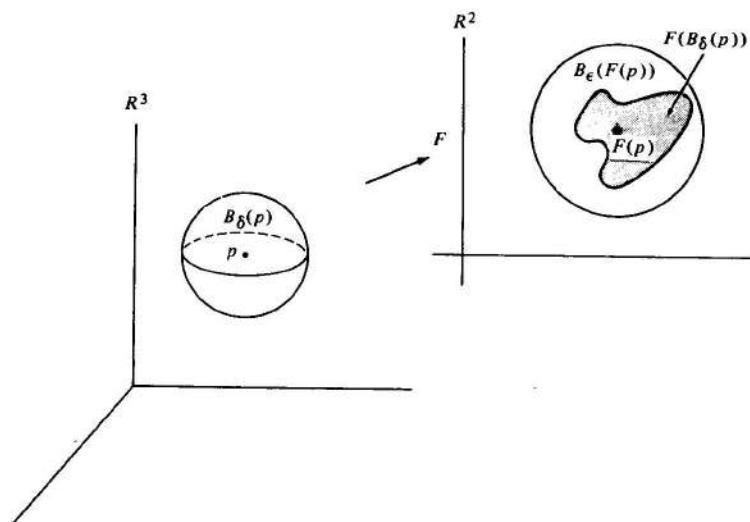


Figura A2-3

Dada una aplicación $F: U \subset R^n \rightarrow R^m$, podemos determinar m funciones de n variables como sigue. Sea $p = (x_1, \dots, x_n) \in U$ y $F(p) = (y_1, \dots, y_m)$. Entonces podemos escribir

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m = f_m(x_1, \dots, x_n).$$

Las funciones $f_i: U \rightarrow R$, $i = 1, \dots, m$, son las *funciones componentes* de F .

Ejemplo 1 (Simetría). Sea $F: R^3 \rightarrow R^3$ la aplicación que asigna cada $p \in R^3$ el punto que es simétrico a p con respecto al origen $O \in R^3$. Entonces $F(p) = -p$, o

$$F(x, y, z) = (-x, -y, -z),$$

y las funciones componentes de F son

$$f_1(x, y, z) = -x, \quad f_2(x, y, z) = -y, \quad f_3(x, y, z) = -z.$$

Ejemplo 2 (Inversión). Sea $F: R^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow R^2$ la aplicación definida como sigue. Denótese por $|p|$ la distancia al origen $O = (0, 0)$ de un punto $p \in R^2$. Por definición, $F(p)$, $p \neq O$, pertenece a la semirecta Op y es tal que $|F(p)| \cdot |p| = 1$. Así, $F(p) = p/|p|^2$, o

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right), \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

y las funciones componentes de F son

$$f_1(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad f_2(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Ejemplo 3 (Proyección). Sea $\pi: R^2 \rightarrow R^2$ la proyección $\pi(x, y, z) = (x, y)$. Entonces $f_1(x, y, z) = x$, $f_2(x, y, z) = y$.

La siguiente proposición demuestra que la continuidad de la aplicación F es equivalente a la continuidad de sus funciones componentes.

PROPOSICIÓN 1. $F: U \subset R^n \rightarrow R^m$ es continua si y sólo si cada función componente $f_i: U \subset R^n \rightarrow R$, $i = 1, \dots, m$, es continua.

Demotración. Supóngase que F es continua en $p \in U$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $F(B_\delta(p)) \subset B_\varepsilon(F(p))$. Por tanto, si $q \in B_\delta(p)$, entonces

$$F(q) \in B_\varepsilon(F(p)),$$

es decir,

$$(f_1(q) - f_1(p))^2 + \dots + (f_m(q) - f_m(p))^2 < \varepsilon^2,$$

lo cual implica que, para cada $i = 1, \dots, m$, $|f_i(q) - f_i(p)| < \varepsilon$. Por eso, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $q \in B_\delta(p)$, entonces $|f_i(q) - f_i(p)| < \varepsilon$. Por lo tanto, cada f_i es continua en p .

Recíprocamente, sean f_i , $i = 1, \dots, m$, continuas en p . Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existen $\delta_i > 0$ tales que si $q \in B_\delta(p)$, se tiene que $|f_i(q) - f_i(p)| < \varepsilon/\sqrt{m}$. Fíjese $\delta < \min \delta_i$ y sea $q \in B_\delta(p)$. Entonces

$$(f_1(q) - f_1(p))^2 + \dots + (f_m(q) - f_m(p))^2 < \varepsilon^2,$$

y de aquí, la continuidad de F en p .

Q.E.D.

Se deduce entonces que las aplicaciones de los ejemplos 1, 2 y 3 son continuas.

Ejemplo 4. Sea $F: U \subset R^n \rightarrow R^m$. Entonces

$$F(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t)), \quad t \in U.$$

A ésta se la denomina habitualmente como *función con valores vectoriales*, y las funciones componentes de F son las componentes del vector $F(t) \in R^m$. Cuando F es continua, o equivalentemente, las funciones $x_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, son continuas, decimos que F es una *curva continua en R^m* .

En la mayoría de las aplicaciones, es conveniente expresar la continuidad en términos de entornos en vez de bolas.

PROPOSICIÓN 2. Una aplicación $F: U \subset R^n \rightarrow R^m$ es continua en $p \in U$ si y sólo si, dado un entorno V de $F(p)$ en R^m , existe un entorno W de p en R^n tal que $F(W) \subset V$.

Demostración. Admitamos que F es continua en p . Como V es un conjunto abierto que contiene a $F(p)$, contiene una bola $B_\epsilon(F(p))$ para algún $\epsilon > 0$. Por continuidad, existe una bola $B_\delta = W$ tal que

$$F(W) = F(B_\delta(p)) \subset B_\epsilon(F(p)) \subset V,$$

y esto prueba que la condición es necesaria.

Recíprocamente, admitamos que la condición se satisface. Sea $\epsilon > 0$ dado y tomemos $V = B_\epsilon(F(p))$. Por hipótesis, existe un entorno W de p en R^n tal que $F(W) \subset V$. Como W es abierto, existe una bola $B_\delta(p) \subset W$. Así,

$$F(B_\delta(p)) \subset F(W) \subset V = B_\epsilon(F(p)),$$

y, por tanto, la continuidad de F en p .

Q.E.D.

La composición de aplicaciones continuas da lugar a una aplicación continua. Con precisión, tenemos la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 3. Sean $F: U \subset R^n \rightarrow R^m$ y $G: V \subset R^m \rightarrow R^k$ aplicaciones continuas, donde U y V son abiertos tales que $F(U) \subset V$.

Entonces $G \circ F: U \subset R^n \rightarrow R^k$ es una aplicación continua.

Demostración. Sean $p \in U$ y V un entorno de $G \circ F(p)$ en R^k . Por la continuidad de G , existe un entorno Q de $F(p)$ en R^m con $G(Q) \subset V$. Por la continuidad de F , existe un entorno W de p en R^n con $F(W) \subset Q$. Así,

$$G \circ F(W) \subset G(Q) \subset V,$$

de donde se deduce la continuidad de $G \circ F$.

Q.E.D.

Con frecuencia es necesario tratar con aplicaciones definidas en conjuntos arbitrarios (no necesariamente abiertos) de R^n . Para extender las ideas previas a esta situación, procederemos como sigue.

Sea $F: A \subset R^n \rightarrow R^m$ una aplicación, donde A es un conjunto arbitrario en R^n . Decimos que F es continua en A si existe un conjunto abierto $U \subset R^n$, $A \subset U$, y una aplicación continua $\tilde{F}: U \rightarrow R^m$ tal que la restricción $\tilde{F}|_{A} = F$. En otras palabras, F es continua en A si es la restricción de una aplicación continua definida en un conjunto abierto que contiene a A .

Resulta claro que si $F: A \subset R^n \rightarrow R^m$ es continua, dado un entorno V de $F(p)$ en R^m , $p \in A$, existe un entorno W de p en R^n tal que $F(W \cap A) \subset V$. Por esta razón, es conveniente llamar al conjunto $W \cap A$ un *entorno de p en A* (fig. A2-4).

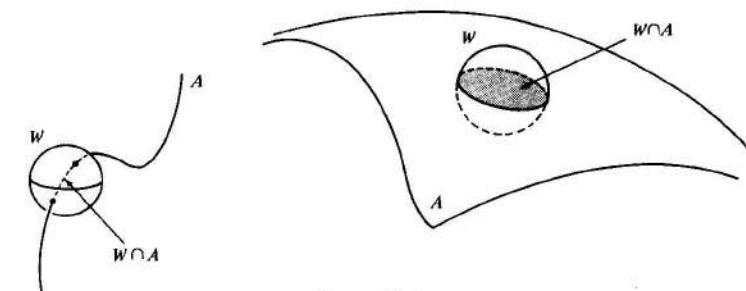


Figura A2-4

Ejemplo 5. Sea

$$E = \left\{ (x, y, z) \in R^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

un elipsoide, y sea $\pi: R^3 \rightarrow R^2$ la proyección del ejemplo 3. Entonces la restricción de π a E es una aplicación continua de E a R^2 .

Decimos que una aplicación continua $F: A \subset R^n \rightarrow R^m$ es un *homeomorfismo* sobre $F(A)$ si F es inyectiva y la inversa $F^{-1}: F(A) \subset R^m \rightarrow R^n$ es continua. En este caso A y $F(A)$ son *conjuntos homeomorfos*.

Ejemplo 6. Sea $F: R^3 \rightarrow R^3$ dada por

$$F(x, y, z) = (xa, yb, zc).$$

F es claramente continua y la restricción de F a la esfera

$$S^2 = \{(x, y, z) \in R^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

es una aplicación continua $\tilde{F}: S^2 \rightarrow R^3$. Obsérvese que $\tilde{F}(S^2) = E$, donde E es el elipsoide del ejemplo 5. También resulta claro que F es inyectiva y que

$$F^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c} \right).$$

Así, $\tilde{F}^{-1} = F^{-1}|E$ es continua. Por lo tanto, \tilde{F} es un homeomorfismo de la esfera S^2 sobre el elipsoide E .

Finalmente, queremos describir dos propiedades de las funciones reales definidas en un intervalo cerrado $[a, b]$,

$$[a, b] = \{x \in R; a \leq x \leq b\}$$

(las props. 4 y 5 de más abajo), y una importante propiedad del propio intervalo cerrado $[a, b]$. Se utilizarán repetidas veces en este libro.

PROPOSICION 4 (El teorema del valor intermedio). *Sea $f: [a, b] \rightarrow R$ una función continua definida en el intervalo cerrado $[a, b]$. Supóngase que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos; es decir, $f(a) \cdot f(b) < 0$. Entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

PROPOSICION 5. *Sea $f: [a, b] \rightarrow R$ una función continua definida en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces f alcanza su máximo y su mínimo en $[a, b]$; es decir, existen puntos $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [a, b]$.*

PROPOSICION 6 (Heine-Borel). *Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado y sea I_a , $a \in A$, una colección de intervalos abiertos en $[a, b]$ tal que $\bigcup_a I_a = [a, b]$. Entonces es posible elegir un número finito $I_{k_1}, I_{k_2}, \dots, I_{k_n}$ de intervalos I_a tal que $\bigcup I_{k_i} = [a, b]$, $i = 1, \dots, n$.*

Estas proposiciones son teoremas estandarizados en cursos avanzados de cálculo infinitesimal, y no vamos a demostrarlas aquí. No obstante, se ofrecen las demostraciones en el apéndice al cap. 5 (props. 6, 13 y 11, respectivamente).

B. Diferenciabilidad en R^n

Sea $f: U \subset R \rightarrow R$. La derivada $f'(x_0)$ de f en $x_0 \in U$ es el límite (cuando existe)

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad x_0 + h \in U.$$

Cuando f tiene derivadas en todos los puntos de un entorno V de x_0 , podemos considerar la derivada de $f': V \rightarrow R$ en x_0 , que se denomina la *segunda derivada* $f''(x_0)$ de f en x_0 , y así sucesivamente. f es *diferenciable* en x_0 si tiene derivadas continuas de todos los órdenes en x_0 . f es *diferenciable* en U si es diferenciable en todos los puntos de U .

Observación. Usamos la palabra *diferenciable* para lo que algunas veces se denomina *infinitamente diferenciable* (o clase C^∞). Nuestra acepción no debería confundirse con la del cálculo infinitesimal elemental, donde una función se denomina *diferenciable* si existe su derivada primera.

Sea $F: U \subset R^2 \rightarrow R$. La *derivada parcial de f con respecto a x en $(x_0, y_0) \in U$* , denotada por $(\partial f / \partial x)(x_0, y_0)$, es, cuando existe, la derivada en x_0 de la función de una variable: $x \rightarrow f(x, y_0)$. Análogamente, la derivada parcial con respecto a y en (x_0, y_0) , $(\partial f / \partial y)(x_0, y_0)$, se define como la derivada en y_0 de $y \rightarrow f(x_0, y)$. Cuando F tiene derivadas parciales en todos los puntos de un entorno V de (x_0, y_0) , podemos considerar las *derivadas parciales segundas* en (x_0, y_0) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

y así sucesivamente. f es *diferenciable* en (x_0, y_0) si tiene derivadas parciales de todos los órdenes en (x_0, y_0) . f es *diferenciable* en U si es diferenciable en todos los puntos de U . Algunas veces denominaremos las derivadas parciales mediante

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}.$$

Es importante el hecho de que cuando f es diferenciable las derivadas parciales de f son independientes del orden en las que se efectúan; es decir,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial^2 x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \quad \text{etc.}$$

Las definiciones de derivadas parciales y diferenciabilidad se extienden fácilmente a funciones $f: U \subset R^n \rightarrow R$. Por ejemplo, $(\partial f / \partial x_3)(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ es la derivada de la función de una variable

$$x_3 \longrightarrow f(x_1^0, x_2^0, x_3, x_4^0, \dots, x_n^0).$$

Un hecho más importante es que las derivadas parciales obedecen a la denominada *regla de la cadena*. Por ejemplo, si $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ son funciones reales diferenciables en $U \subset R^2$ y $f(x, y, z)$ es una función real diferenciable en R^3 , entonces la composición $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ es una función diferenciable en U , y la derivada parcial de f con respecto a u , por poner un ejemplo, viene dada por

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}.$$

Ahora estamos interesados en extender la noción de diferenciabilidad al caso de aplicaciones $F: U \subset R^n \rightarrow R^m$. Decimos que F es *diferenciable* en $p \in U$ si sus funciones componentes son diferenciables en p ; es decir, escribiendo

$$F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),$$

las funciones f_i , $i = 1, \dots, m$, tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes en p . F es diferenciable en U si es diferenciable en todos los puntos de U .

Para el caso $m = 1$, ésta coincide con la definición previa. Para el caso $n = 1$, obtenemos la noción de *curva diferenciable* (parametrizada) en R^m . Ya consideramos tal objeto en R^3 , en el cap. 1. Para nuestros propósitos, necesitamos extender la definición de vector tangente del cap. 1 a la presente situación. Un *vector tangente* a una aplicación $\alpha: U \subset R \rightarrow R^m$ en $t_0 \in U$ es el vector de R^m

$$\alpha'(t_0) = (x'_1(t_0), \dots, x'_m(t_0)).$$

Ejemplo 7. Sea $F: U \subset R^2 \rightarrow R^3$ dada por

$$F(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \operatorname{sen} v, \cos^2 v), \quad (u, v) \in U.$$

Las funciones componentes de F , a saber

$$f_1(u, v) = \cos u \cos v, f_2(u, v) = \cos u \operatorname{sen} v, f_3(u, v) = \cos^2 v$$

tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes en U . Así, F es diferenciable en U .

Ejemplo 8. Sea $\alpha: U \subset R \rightarrow R^4$ dada por

$$\alpha(t) = (t^4, t^3, t^2, t), \quad t \in U.$$

Entonces α es una curva diferenciable en R^4 , y el vector tangente a α en t es $\alpha'(t) = (4t^3, 3t^2, 2t, 1)$.

Ejemplo 9. Dado un vector $w \in R^m$ y un punto $p_0 \in U \subset R^m$, siempre podemos encontrar una curva diferenciable $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ con $\alpha(0) = p_0$ y $\alpha'(0) = w$. Basta con definir $\alpha(t) = p_0 + tw$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Escribiendo $p_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$ y $w = (w_1, \dots, w_m)$, las funciones componentes de α son $x_i(t) = x_i^0 + tw_i$, $i = 1, \dots, m$. Así, α es diferenciable, $\alpha(0) = p_0$ y

$$\alpha'(0) = (x'_1(0), \dots, x'_m(0)) = (w_1, \dots, w_m) = w.$$

Vamos a introducir ahora el concepto de diferencial de una aplicación diferenciable. Este va a desempeñar un papel importante en este libro.

DEFINICION 1. Sea $F: U \subset R^n \rightarrow R^m$ una aplicación diferenciable. A cada $p \in U$ asociamos una aplicación lineal $dF_p: R^n \rightarrow R^m$ que se denomina la *diferencial de F en p* y se define como sigue. Sea $w \in R^n$ y sea $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ una curva diferenciable tal que $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w$. Por la regla de la cadena, la curva $\beta = F \circ \alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow R^m$ es también diferenciable. Entonces (fig. A2-5)

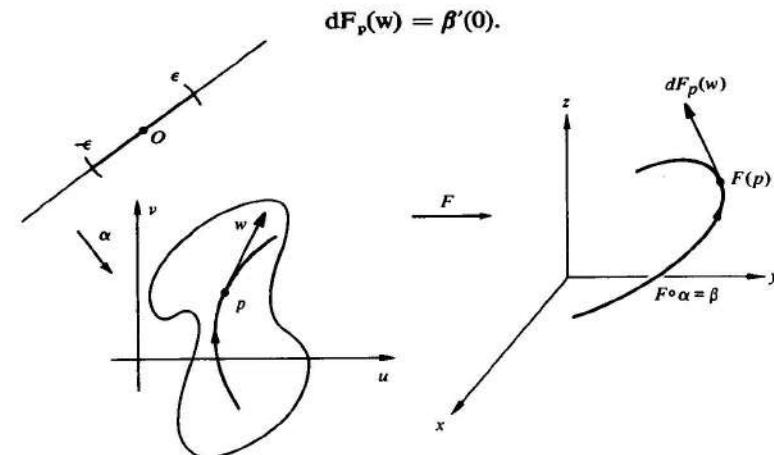


Figura A2-5

PROPOSICION 7. La definición precedente de dF_p no depende de la elección de la curva que pasa por p con vector tangente w , y dF_p es, efectivamente, una aplicación lineal.

Demostración. Para simplificar la notación, trabajaremos con el caso $F: U \subset R^2 \rightarrow R^3$. Sean (u, v) las coordenadas de R^2 y (x, y, z) las coordenadas de R^3 . Sea $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ la base canónica de R^2 y $f_1 = (1, 0, 0)$, $f_2 = (0, 1, 0)$, $f_3 = (0, 0, 1)$ la base canónica de R^3 . Entonces podemos escribir $\alpha(t) = (u(t), v(t))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$,

$$\alpha'(0) = w = u'(0)e_1 + v'(0)e_2,$$

$$F(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \text{ y}$$

$$\beta(t) = F \circ \alpha(t) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))).$$

Por tanto, usando la regla de la cadena y tomando derivadas en $t = 0$, obtenemos

$$\beta'(0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) f_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) f_2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) f_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = dF_p(w).$$

Esto demuestra que dF_p está representada, en las bases canónicas de R^2 y R^3 , mediante una matriz que depende solamente de las derivadas parciales de las funciones componentes x, y, z de F en p . Por tanto, dF_p es una aplicación lineal y es claro que $dF_p(w)$ no depende de la elección de α .

El lector no encontrará problemas para extender este argumento a la situación general.

Q.E.D.

La matriz de $dF_p: R^n \rightarrow R^m$ en las bases canónicas de R^n y R^m , es decir, la matriz $(\partial f_i / \partial x_j)$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, se llama la *matriz jacobiana* de F en p . Cuando $n = m$, esta matriz es cuadrada y su determinante se denomina el *determinante jacobiano*; es habitual denotarlo por

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}.$$

Observación. No hay acuerdo en la literatura con respecto a la notación para la diferencial. Es también de uso común el llamar a dF_p la derivada de F en p y denotarla por $F'(p)$.

Ejemplo 10. Sea $F: R^2 \rightarrow R^3$ dada por

$$F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy), \quad (x, y) \in R^2.$$

Puede comprobarse fácilmente que F es diferenciable y su diferencial dF_p en $p = (x, y)$ es

$$dF_p = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, $dF_{(1,1)}(2, 3) = (-2, 10)$.

Una de las ventajas de la noción de diferencial de una aplicación es que nos permite expresar muchos resultados del cálculo diferencial en un lenguaje geométrico. Considerese, por ejemplo, la siguiente situación: sean $F: U \subset R^2 \rightarrow R^3$, $G: V \subset R^3 \rightarrow R^2$ aplicaciones diferenciables, donde U y V son conjuntos abiertos tales que $F(U) \subset V$. Admitamos el conjunto de coordenadas siguiente

$$\begin{array}{ccc} U \subset R^2 & \xrightarrow{F} & V \subset R^3 & \xrightarrow{G} & R^2 \\ (u, v) & & (x, y, z) & & (\xi, \eta) \end{array}$$

y escribamos

$$F(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

$$G(x, y, z) = (\xi(x, y, z), \eta(x, y, z)).$$

Entonces

$$G \circ F(u, v) = (\xi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \eta(x(u, v), y(u, v), z(u, v))),$$

y, mediante la regla de la cadena, podemos decir que $G \circ F$ es diferenciable y calcular las derivadas parciales de sus funciones componentes. Por ejemplo,

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}.$$

Ahora, una manera simple de expresar la situación de arriba consiste en utilizar el siguiente resultado general.

PROPOSICIÓN 8 (La regla de la cadena para aplicaciones). Sean $F: U \subset R^n \rightarrow R^m$ y $G: V \subset R^m \rightarrow R^k$ aplicaciones diferenciables, donde U y V son conjuntos abiertos tales que $F(U) \subset V$. Entonces $G \circ F: U \rightarrow R^k$ es una aplicación diferenciable, y

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p, \quad p \in U.$$

Demostración. El hecho de que $G \circ F$ es diferenciable es consecuencia de la regla de la cadena para funciones. Ahora, fijemos $w_1 \in R^n$ y consideremos una curva $\alpha: (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \rightarrow U$, con $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w_1$. Pongamos $dF_p(w_1) = w_2$ y observemos que $dG_{F(p)}(w_2) = (d/dt)(G \circ F \circ \alpha)|_{t=0}$. Entonces

$$d(G \circ F)_p(w_1) = \frac{d}{dt}(G \circ F \circ \alpha)_{t=0} = dG_{F(p)}(w_2) = dG_{F(p)} \circ dF_p(w_1).$$

Q.E.D.

Nótese que, para la situación particular que estabamos considerando antes, la relación $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$ es equivalente al siguiente producto de matrices jacobianas

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \xi}{\partial v} \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix},$$

que contiene las expresiones de todas las derivadas parciales $\partial \xi / \partial u$, $\partial \xi / \partial v$, $\partial \eta / \partial u$, $\partial \eta / \partial v$. De esta forma, la simple expresión de la regla de la cadena para aplicaciones conlleva una gran cantidad de información sobre las derivadas parciales de sus funciones componentes.

Una propiedad importante de una función diferenciable $f: (a, b) \subset R \rightarrow R$ definida en un intervalo abierto (a, b) es que si $f'(x) = 0$ en (a, b) , entonces f es constante en (a, b) . Esto se generaliza a funciones diferenciables de distintas variables de la forma siguiente.

Decimos que un conjunto abierto $U \subset R^n$ es *conexo* si dados dos puntos $p, q \in U$ existe una aplicación continua $\alpha: [a, b] \rightarrow U$ tal que $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$. Esto significa

que dos puntos de U pueden unirse mediante una curva continua en U o que U está hecho de una sola «pieza».

PROPOSICIÓN 9. Sea $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable definida sobre un subconjunto abierto y conexo U de \mathbb{R}^n . Admítase que $df_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es cero en cada punto $p \in U$. Entonces f es constante en U .

Demostración. Sea $p \in U$ y sea $B_\delta(p) \subset U$ una bola abierta centrada en p y contenida en U . Cualquier punto $q \in B_\delta(p)$ puede unirse a p mediante el segmento «radial» $\beta: [0, 1] \rightarrow U$, donde $\beta(t) = tq + (1-t)p$, $t \in [0, 1]$ (fig. A2-6). Como U es abierto, podemos extender β a $(0 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$. Ahora, $f \circ \beta: (0 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función definida en un intervalo abierto, y

$$d(f \circ \beta)_t = (df \circ d\beta)_t = 0,$$

ya que $df = 0$. Así,

$$\frac{d}{dt}(f \circ \beta) = 0$$

para todo $t \in (0 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$, de donde $(f \circ \beta) = \text{const}$. Esto significa que $f(\beta(0)) = f(p) = f(\beta(1)) = f(q)$; es decir, f es constante en $B_\delta(p)$.

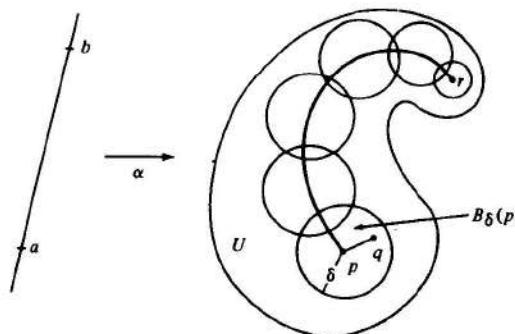


Figura A2-6

Por tanto, la proposición se ha demostrado localmente; es decir, cada punto de U tiene un entorno tal que f es constante en ese entorno. Nótese que hasta aquí no hemos usado la conexidad de U . Ahora vamos a necesitarla para demostrar que estas constantes son todas la misma.

Sea r un punto arbitrario de U . Como U es conexo, existe una curva continua $\alpha: [a, b] \rightarrow U$ con $\alpha(a) = p$, $\alpha(b) = r$. La función $f \circ \alpha: [a, b] \rightarrow U$ es continua en $[a, b]$. Por la primera parte de la demostración, para cada $t \in [a, b]$, existe un intervalo I_t , abierto en $[a, b]$, tal que $f \circ \alpha$ es constante en I_t . Como $\bigcup_t I_t = [a, b]$, podemos aplicar el teorema

de Heine-Borel (prop. 6). Así, podemos elegir un número finito I_1, \dots, I_k de intervalos I_t tal que $\bigcup_i I_i = [a, b]$, $i = 1, \dots, k$. Podemos admitir, reenumerando los intervalos si fuese necesario, que dos intervalos consecutivos se cortan. Entonces, $f \circ \alpha$ es constante en la unión de dos intervalos consecutivos. Se deduce así que $f \circ \alpha$ es constante en $[a, b]$; es decir,

$$f(\alpha(a)) = f(p) = f(\alpha(b)) = f(r).$$

Como r es arbitrario, f es constante en U .

Q.E.D.

Uno de los teoremas más importantes del cálculo diferencial es el denominado teorema de la función inversa, el cual, con la presente notación, dice lo siguiente. (Recuérdese que una aplicación lineal A es un isomorfismo si la matriz de A es invertible.)

TEOREMA DE LA FUNCION INVERSA. Sea $F: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable y supóngase que en $p \in U$ la diferencial $dF_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo. Entonces existe un entorno V de p en U y un entorno W de $F(p)$ en \mathbb{R}^n tal que $F: V \rightarrow W$ tiene una inversa diferenciable $F^{-1}: W \rightarrow V$.

Una aplicación diferenciable $F: V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$, donde V y W son conjuntos abiertos, se denomina un *difeomorfismo* de V en W si F tiene una inversa diferenciable. El teorema de la función inversa afirma que si en un punto $p \in U$ la diferencia dF_p es un isomorfismo, entonces F es un difeomorfismo en un entorno de p . En otras palabras, una afirmación sobre la diferenciabilidad de F en un punto implica una afirmación similar sobre el comportamiento de F en un entorno del punto.

Este teorema se utilizará con frecuencia en este libro. Puede encontrarse una demostración, por ejemplo, en Buck, *Advanced Calculus*, p. 285.

Ejemplo 11. Sea $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Las funciones componentes de F , a saber, $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$, tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes. Luego F es diferenciable.

Es instructivo fijarse, desde el punto de vista geométrico, en cómo F transforma las curvas del plano xy . Por ejemplo, la recta vertical $x = x_0$ se aplica sobre el círculo $u = e^{x_0} \cos y$, $v = e^{x_0} \sin y$ de radio e^{x_0} , y la recta horizontal $y = y_0$ se aplica sobre la semirrecta $u = e^x \cos y_0$, $v = e^x \sin y_0$ de pendiente $\tan y_0$. Se tiene que (fig. A2-7)

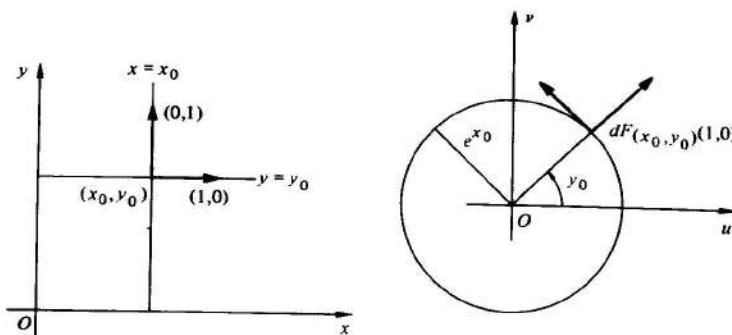


Figura A2-7

$$\begin{aligned} dF_{(x_0, y_0)}(1, 0) &= \frac{d}{dx}(e^x \cos y_0, e^x \sin y_0)|_{x=x_0} \\ &= (e^{x_0} \cos y_0, e^{x_0} \sin y_0), \\ dF_{(x_0, y_0)}(1, 0) &= \frac{d}{dy}(e^{x_0} \cos y, e^{x_0} \sin y)|_{y=y_0} \\ &= (-e^{x_0} \sin y_0, e^{x_0} \cos y_0). \end{aligned}$$

Esto se puede comprobar más fácilmente calculando la matriz jacobiana de F ,

$$dF_{(x, y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix},$$

y aplicando dicha matriz a los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ en (x_0, y_0) .

Notemos que el determinante jacobiano $\det(dF_{(x, y)}) = e^x \neq 0$, y así, dF_p es no singular para todo $p = (x, y) \in R^2$; esto también resulta evidente de las consideraciones geométricas previas. Por tanto, podemos aplicar el teorema de la función inversa para concluir que F es localmente un difeomorfismo.

Obsérvese que $F(x, y) = F(x, y + 2\pi)$. Entonces, F no es inyectiva y no admite una inversa global. Para cada $p \in R^2$, el teorema de la función inversa proporciona entornos V de p y W de $F(p)$ de forma que la restricción $F: V \rightarrow W$ es un difeomorfismo. En nuestro caso, se puede considerar como V a la banda $\{-\infty < x < \infty, 0 < y < 2\pi\}$ y W como $R^2 - \{(0, 0)\}$. Sin embargo, como muestra el ejemplo, si las condiciones del teorema se satisfacen incluso en todos los puntos y el dominio de definición de F es muy simple, podría no existir una inversa global de F .

Capítulo 3 GEOMETRIA DE LA APLICACION DE GAUSS

3.1. Introducción

Como vimos en el cap. 1, el considerar la tasa de variación de la recta tangente a una curva C nos condujo a una importante entidad geométrica, a saber, la curvatura de C . En este capítulo extenderemos esta idea a superficies regulares; es decir, intentaremos medir cuán rápidamente se aleja una superficie S del plano tangente $T_p(S)$ en un entorno del punto $p \in S$. Esto es equivalente a medir la tasa de variación en p de un campo unitario normal N en un entorno de p . Como veremos dentro de poco, esta tasa de variación viene dada por una aplicación lineal en $T_p(S)$ que resulta ser autoadjunta (véase el apéndice al cap. 3). Del estudio de esta aplicación lineal se puede deducir un número sorprendentemente grande de propiedades locales de S en p .

En la sec. 3.2, introduciremos las definiciones relevantes (la aplicación de Gauss, curvaturas principales y direcciones principales, curvaturas gaussiana y media, etc.) sin utilizar coordenadas locales. De esta forma, el contenido geométrico de las definiciones se pone de manifiesto con claridad. No obstante, a efectos tanto computacionales como teóricos, resulta importante expresar todos los conceptos en coordenadas locales. Esto se lleva a cabo en la sec. 3.3.

Las secs. 3.2 y 3.3 contienen la mayor parte de la materia del cap. 3 que será utilizada en las restantes partes de este libro. Las raras excepciones se señalarán explícitamente. A efectos de completitud, hemos demostrado las principales propiedades de las aplicaciones lineales autoadjuntas en el apéndice al cap. 3. Además, para aquellos que hayan omitido la sec. 2.6, hemos incluido un breve repaso sobre orientación para superficies al comienzo de la sec. 3.2.

La sección 3.4 contiene una demostración del hecho de que en cada punto de una superficie regular existe una parametrización ortogonal, es decir, una parametrización tal que sus curvas coordenadas se cortan ortogonalmente. Las técnicas que aquí se utilizan son interesantes por derecho propio y dan lugar a otro tipo de resultados. Sir-

embargo, para un curso de introducción sería conveniente admitir estos resultados y omitir la sección.

En la sec. 3.5 nos ocuparemos de dos casos especiales interesantes de superficies, a saber, las superficies regladas y las superficies mínimas. Se tratarán independientemente de forma que en una primera lectura una (o ambas) de ellas pueda omitirse.

3.2. Definición de la aplicación de Gauss y sus propiedades fundamentales

Comenzaremos dando un breve repaso a la noción de orientación para superficies.

Como hemos visto en la sec. 2.4, dada una parametrización $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ de una superficie regular S en un punto $p \in S$, podemos elegir un vector unitario normal en cada punto de $\mathbf{x}(U)$ mediante la regla

$$N(q) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(q), \quad q \in \mathbf{x}(U).$$

Así, tenemos una aplicación $N: \mathbf{x}(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ que asocia a cada $q \in \mathbf{x}(U)$ un vector unitario normal $N(q)$.

Más generalmente, si $V \subset S$ es un conjunto abierto en S y $N: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un aplicación diferenciable que asocia a cada $q \in V$ un vector unitario normal en q , decimos que N es un campo diferenciable de vectores unitarios normales en V .

Resulta sorprendente el hecho de que no todas las superficies admiten un campo diferenciable de vectores unitarios normales definido en la totalidad de la superficie. De hecho, en la banda de Möbius de la fig. 3-1 no puede definirse tal campo. Esto puede verificarse intuitivamente recorriendo el círculo medio de la figura: tras una vuelta, el campo vectorial N se convertiría en $-N$, lo que contradice la continuidad de N . Intuitivamente, uno no puede, sobre la banda de Möbius, efectuar una elección consistente de un «lado» definido; moviéndonos alrededor de la superficie, podemos ir con continuidad al «otro lado» sin abandonar la superficie.

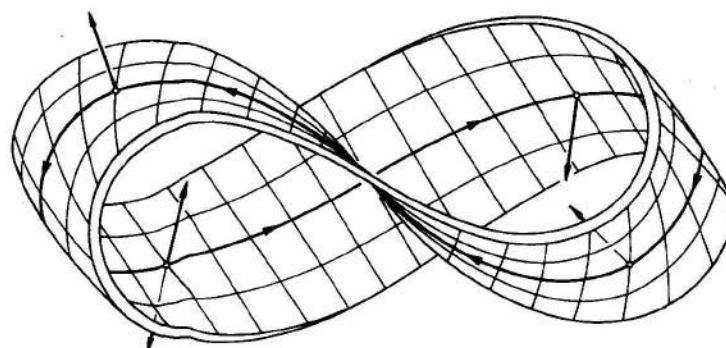


Figura 3-1. La banda de Möbius.

Diremos que una superficie regular es *orientable* si admite un campo diferenciable de vectores unitarios normales definido en la totalidad de la superficie; la elección de un campo N de ese tipo se denomina una *orientación* de S .

Por ejemplo, la banda de Möbius más arriba referida no es una superficie orientable. Por supuesto, cada superficie recubierta solamente por un sistema coordinado (por ejemplo, superficies representadas por gráficas de funciones diferenciables) es trivialmente orientable. Así, cada superficie es orientable localmente, y la orientación es una propiedad global en el sentido de que involucra a la totalidad de la superficie.

Una orientación N en S induce una orientación sobre cada espacio tangente $T_p(S)$, $p \in S$, como sigue. Definase una base $\{v, w\} \in T_p(S)$ como *positiva* si $\langle v \wedge w, N \rangle$ es positivo. Se ve fácilmente que el conjunto de todas las bases positivas de $T_p(S)$ es una orientación para $T_p(S)$; véase la sec. 1.4.

En sec. 2.6 se dan más detalles sobre la noción de orientación. No obstante, para los propósitos de los caps. 3 y 4, bastará con la presente descripción.

A lo largo de este capítulo, S va a denotar una superficie regular orientable en la que ha sido elegida una orientación (es decir, un campo diferenciable de vectores unitarios normales N); nos referiremos a esto diciendo simplemente que S es una superficie con una orientación N .

DEFINICION 1. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con una orientación N . La aplicación $N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ toma valores en la esfera unidad

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

La aplicación $N: S \rightarrow S^2$ así definida, se denomina la aplicación de Gauss de S (figura 3-2)¹.

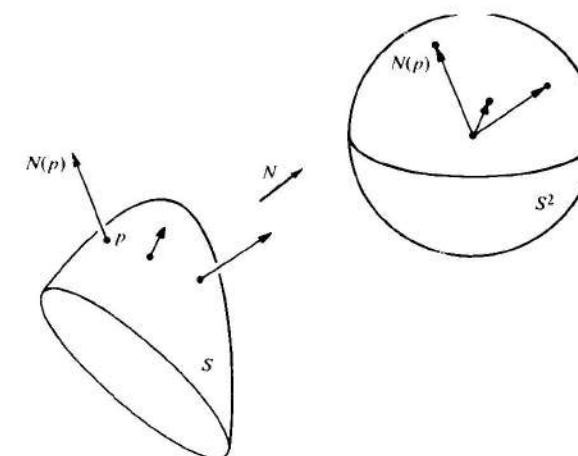


Figura 3-2. La aplicación de Gauss.

¹ Para contextos en itálicas, las letras de símbolos van en letra estándar en vez de itálicas.

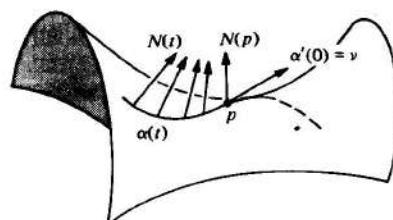
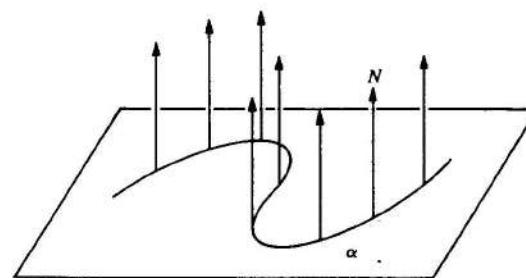


Figura 3-3

Es inmediato verificar que la aplicación de Gauss es diferenciable. La diferencial dN_p de N en $p \in S$ es una aplicación lineal de $T_p(S)$ en $T_{N(p)}(S^2)$. Como $T_p(S)$ y $T_{N(p)}(S^2)$ son planos paralelos, dN_p puede observarse como una aplicación lineal en $T_p(S)$.

La aplicación lineal $dN_p: T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ opera como sigue. Para cada curva parametrizada $\alpha(t)$ en S con $\alpha(0) = p$, consideramos la curva parametrizada $N \circ \alpha(t) = N(t)$ en la esfera S^2 ; esto equivale a restringir el vector normal N a la curva $\alpha(t)$. El vector tangente $N'(0) = dN_p(\alpha'(0))$ es un vector de $T_p(S)$ (fig. 3-3). Mide la tasa de variación del vector normal N , restringido a la curva $\alpha(t)$, en $t = 0$. Así, dN_p mide cómo N se aleja de $N(p)$ en un entorno de p . En el caso de curvas, esta medida viene dada por un número, la curvatura. En el caso de superficies, esta medida está caracterizada por una aplicación lineal.

Figura 3-4. Plano $dN_p = 0$.

Ejemplo 1. Para el plano P dado por $ax + by + cz + d = 0$, el vector unitario normal $N = (a, b, c)/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ es constante, por tanto $dN = 0$ (fig. 3-4).

Ejemplo 2. Considérese la esfera unidad

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Si $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es una curva parametrizada en S^2 , entonces

$$2xx' + 2yy' + 2zz' = 0,$$

lo cual demuestra que el vector (x, y, z) es normal a la esfera en el punto (x, y, z) . Así $\bar{N} = (x, y, z)$ y $N = (-x, -y, -z)$ son campos de vectores unitarios normales en S^2 . Fijamos una orientación en S^2 eligiendo $N = (-x, -y, -z)$ como campo normal. Nótese que N apunta hacia el centro de la esfera.

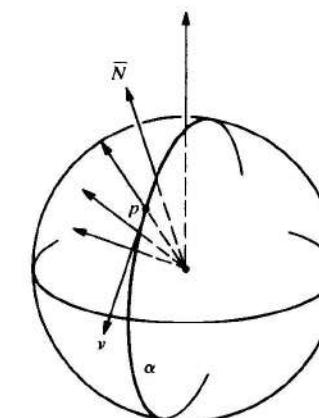
Restringido a la curva $\alpha(t)$, el vector normal

$$N(t) = (-x(t), -y(t), -z(t))$$

es una función vectorial de t , por tanto

$$dN(x'(t), y'(t), z'(t)) = N'(t) = (-x'(t), -y'(t), -z'(t));$$

es decir, $dN_p(v) = -v$ para todo $p \in S^2$ y todo $v \in T_p(S^2)$. Nótese que con la elección de \bar{N} como campo normal (es decir, con la orientación opuesta) habríamos obtenido $d\bar{N}_p(v) = v$ (fig. 3-5).

Figura 3-5. Esfera unidad: $d\bar{N}_p(v) = v$.

Ejemplo 3. Considérese el cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$. Mediante un argumento similar al del ejemplo previo, vemos que $\bar{N} = (x, y, 0)$ y $N = (-x, -y, 0)$ son vectores unitarios normales en (x, y, z) . Fijamos una orientación eligiendo $N = (-x, -y, 0)$ como el campo vectorial normal.

Considerando una curva $(x(t), y(t), z(t))$ contenida en el cilindro, es decir $(x(t))^2 + (y(t))^2 = 1$, podemos observar que, a lo largo de esta curva, $N(t) = (-x(t), -y(t), 0)$ y por tanto

$$dN(x'(t), y'(t), z'(t)) = N'(t) = (-x'(t), -y'(t), 0).$$

Concluimos lo siguiente: si v es un vector tangente al cilindro y paralelo al eje z , entonces

$$dN(v) = 0 = 0v;$$

si w es un vector tangente al cilindro y paralelo al plano xy , entonces $dN(w) = -w$ (fig. 3-6). Se deduce que los vectores v y w son autovectores de dN con autovalores 0 y -1 , respectivamente (véase el apéndice al cap. 3).

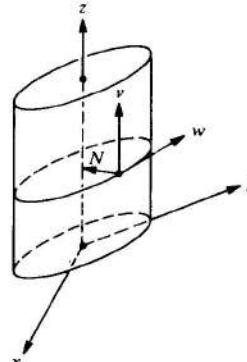


Figura 3-6

Ejemplo 4. Analicemos el punto $p = (0, 0, 0)$ del paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$. Para ello, consideremos una parametrización $\mathbf{x}(u, v)$ dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, v^2 - u^2),$$

y calculemos el vector normal $N(u, v)$. Obtenemos sucesivamente

$$\mathbf{x}_u = (1, 0, -2u),$$

$$\mathbf{x}_v = (0, 1, 2v),$$

$$N = \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 + \frac{1}{4}}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2 + v^2 + \frac{1}{4}}}, \frac{1}{2\sqrt{u^2 + v^2 + \frac{1}{4}}} \right).$$

Nótese que en $p = (0, 0, 0)$, \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v coinciden con los vectores unitarios a lo largo de los ejes x e y , respectivamente. Por tanto, el vector tangente en p a la curva $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$, con $\alpha(0) = p$, tiene, en \mathbb{R}^3 , coordenadas $(u'(0), v'(0), 0)$ (fig. 3-7). Restringiendo $N(u, v)$ a esta curva y calculando $N'(0)$, obtenemos

$$N'(0) = (2u'(0), -2v'(0), 0),$$

y por tanto, en p ,

$$dN_p(u'(0), v'(0), 0) = (2u'(0), -2v'(0), 0).$$

Se deduce que los vectores $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$ son autovectores de dN_p con autovalores 2 y -2 , respectivamente.

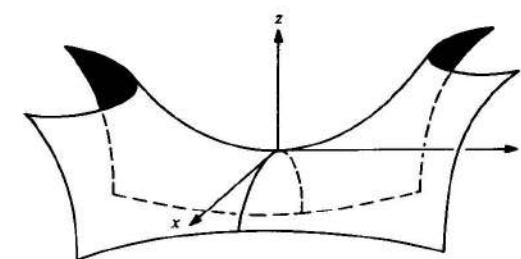


Figura 3-7

Ejemplo 5. El método del ejemplo previo, aplicado al punto $p = (0, 0, 0)$ del paraboloide $z = x^2 + ky^2$, $k > 0$, demuestra que los vectores unitarios del eje x y el eje y son autovectores de dN_p , con autovalores 2 y $2k$, respectivamente (suponiendo que N está apuntando hacia el exterior de la región delimitada por el paraboloide).

La siguiente proposición contiene un hecho importante concerniente a dN_p .

PROPOSICIÓN 1. *La diferencial $dN_p: T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ de la aplicación de Gauss es una aplicación lineal autoadjunta* (cf. el apéndice al cap. 3).

Demostración. Como dN_p es lineal, basta con verificar que $\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle$ para una base $\{w_1, w_2\}$ de $T_p(S)$. Sea $\mathbf{x}(u, v)$ una parametrización de S en p y $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ la base asociada de $T_p(S)$. Si $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ es una curva parametrizada en S , con $\alpha(0) = p$, tenemos

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p(\mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0)) \\ &= \frac{d}{dt} N(u(t), v(t)) \Big|_{t=0} \\ &= N_u u'(0) + N_v v'(0); \end{aligned}$$

en particular, $dN_p(\mathbf{x}_u) = N_u$ y $dN_p(\mathbf{x}_v) = N_v$. Por lo tanto, para probar que dN_p es autoadjunta, basta con demostrar que

$$\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{x}_u, N_v \rangle.$$

Para ver esto, tómense las derivadas de $\langle N, \mathbf{x}_u \rangle = 0$ y $\langle N, \mathbf{x}_v \rangle = 0$, con respecto a v y u , respectivamente, y obténgase

$$\begin{aligned} \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle &= 0, \\ \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Luego,

$$\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = -\langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle.$$

Q.E.D.

El hecho de que $dN_p: T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ es una aplicación lineal autoadjunta nos permite asociar a dN_p una forma cuadrática Q en $T_p(S)$, dada por $Q(v) = \langle dN_p(v), v \rangle$, $v \in T_p(S)$; cf. el apéndice al cap. 3. Para obtener una interpretación geométrica de esta forma cuadrática, necesitamos algunas definiciones. Por razones que resultarán claras en breve, vamos a utilizar la forma cuadrática $-Q$.

DEFINICION 2. La forma cuadrática Π_p , definida en $T_p(S)$ por $\Pi_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$ se denomina la segunda forma fundamental de S en p .

DEFINICION 3. Sea C una curva regular en S que pasa por $p \in S$, k la curvatura de C en p , y $\cos \theta = \langle n, N \rangle$, donde n es el vector normal a C y N es el vector normal a S en p . El número $k_n = k \cos \theta$ se denomina la curvatura normal de $C \subset S$ en p .

En otras palabras, k_n es la longitud de la proyección del vector kn sobre la normal a la superficie en p , con un signo dado por la orientación N de S en p (fig. 3-8).

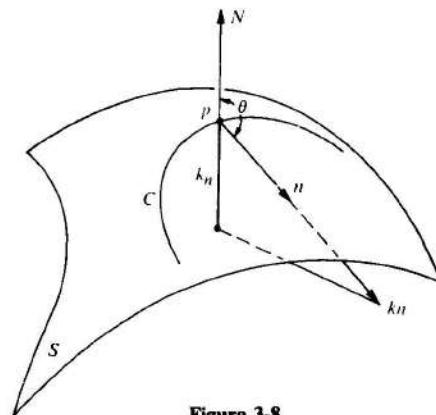


Figura 3-8

Observación. La curvatura normal de C no depende de la orientación de C sino que cambia de signo con un cambio de orientación de la superficie.

Para dar una interpretación de la segunda forma fundamental Π_p , consideremos una curva regular $C \subset S$ parametrizada por $\alpha(s)$, donde s es la longitud de arco de C , y con $\alpha(0) = p$. Si denotamos por $N(s)$ la restricción del vector normal N a la curva $\alpha(s)$, tenemos $\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0$. De donde,

$$\langle N(s), \alpha''(s) \rangle = -\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle.$$

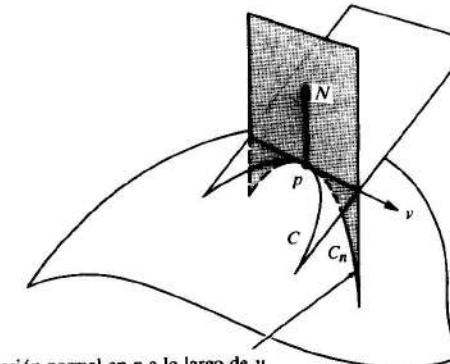
Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Pi_p(\alpha'(0)) &= -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\ &= -\langle N'(0), \alpha'(0) \rangle = \langle N(0), \alpha''(0) \rangle \\ &= \langle N, kn \rangle(p) = k_n(p). \end{aligned}$$

En otros términos, el valor de la segunda forma fundamental Π_p para un vector unitario $v \in T_p(S)$ es igual a la curvatura normal de una curva regular que pasa por p y es tangente a v . En particular, obtenemos el siguiente resultado.

PROPOSICION 2 (Meusnier). Todas las curvas contenidas en S que tienen en un punto dado $p \in S$ la misma recta tangente, tienen en este punto la misma curvatura normal.

La proposición de arriba nos permite hablar de la *curvatura normal a lo largo de una dirección en p* . Es conveniente el uso de la terminología siguiente. Dado un vector unitario $v \in T_p(S)$, la intersección de S con el plano que contiene a v y a $N(p)$ se denomina la *sección normal de S en p a lo largo de v* (fig. 3-9). En un entorno de p , una sección normal de S en p es una curva regular plana sobre S cuyo vector normal n en p es $\pm N(p)$ o cero; su curvatura es, por esta razón, igual al valor absoluto de la curvatura normal a lo largo de v en p . Según esta terminología, la proposición de arriba dice que el valor absoluto de la curvatura normal en p de una curva $\alpha(s)$ es igual a la curvatura de la sección normal a S en p a lo largo de $\alpha'(0)$.

Sección normal en p a lo largo de v Figura 3-9. El teorema de Meusnier: C y C_n tienen la misma curvatura normal en p a lo largo de v .

Ejemplo 6. Considerese la superficie de revolución que se obtiene al rotar la curva $z = y^4$ alrededor del eje z (fig. 3-10). Probaremos que en $p = (0, 0, 0)$ la diferencial $dN_p = 0$. Para comprobarlo, observamos que la curvatura de la curva $z = y^4$ en p es igual a cero. Además, como el plano xy es el plano tangente a la superficie en p , el vector normal $N(p)$ es paralelo al eje z . Por lo tanto, cualquier sección normal en p se obtiene por rotación de la curva $z = y^4$; luego tiene curvatura cero. Se sigue que todas las curvaturas normales son cero, y así $dN_p = 0$.

Ejemplo 7. En el plano del ejemplo 1, todas las secciones normales son rectas; por tanto, todas las curvaturas normales son cero. Así, la segunda forma fundamental es idénticamente cero en todos los puntos. Esto concuerda con el hecho de que $dN = 0$.

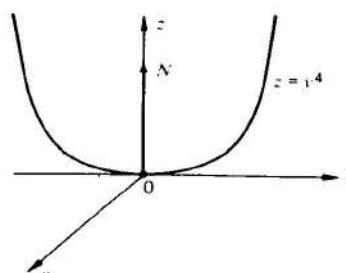


Figura 3-10

En la esfera S^2 del ejemplo 2, con orientación \bar{N} , las secciones normales en un punto $p \in S^2$ son círculos de radio 1 (fig. 3-11). Por tanto, todas las curvaturas normales son iguales a 1, y la segunda forma fundamental es $H_p(v) = 1$ para todo $p \in S^2$ y todo $v \in T_p(S)$ con $|v| = 1$.

En el cilindro del ejemplo 3, las secciones normales en un punto p varían desde un círculo perpendicular al eje del cilindro hasta una recta paralela al eje del cilindro, pasando por una familia de elipses (fig. 3-12). Así, las curvaturas normales varían de 1 a 0. No es difícil ver geométricamente que 1 es el máximo y 0 es el mínimo de la curvatura normal en p . Sin embargo, la aplicación del teorema sobre formas cuadráticas del apéndice al cap. 3 proporciona una demostración simple de esa observación. De hecho, como vimos en el ejemplo 3, los vectores w y v correspondientes a las direcciones de las curvaturas normales 1 y 0, respectivamente, son autovectores de dN_p con autovalores -1 y 0 , respectivamente. Así, como afirmabamos, la segunda forma fundamental alcanza sus extremos en estos vectores. Nótese que este procedimiento nos permite comprobar que tales valores extremos son 1 y 0.

Dejamos al cuidado del lector el analizar las secciones normales en el punto $p = (0, 0, 0)$ del paraboloide hiperbólico del ejemplo 4.

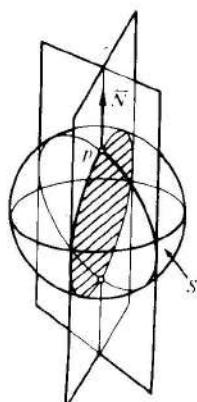


Figura 3-11. Secciones normales sobre una esfera.

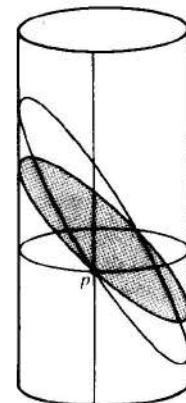


Figura 3-12. Secciones normales sobre un cilindro.

Volvamos a la aplicación lineal dN_p . El teorema del apéndice al cap. 3 demuestra que para cada $p \in S$ existe una base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_p(S)$ tal que $dN_p(e_1) = -k_1 e_1$, $dN_p(e_2) = -k_2 e_2$. Además, k_1 y k_2 ($k_1 \geq k_2$) son el máximo y el mínimo de la segunda forma fundamental H_p restringida al círculo unidad de $T_p(S)$; es decir, son los valores extremos de la curvatura normal en p .

DEFINICION 4. La curvatura normal máxima k_1 y la curvatura normal mínima k_2 se denominan las curvaturas principales en p ; las direcciones correspondientes, es decir, las direcciones dadas por los autovectores e_1, e_2 , se denominan las direcciones principales en p .

Por ejemplo, en el plano todas las direcciones en todos los puntos son direcciones principales. Lo mismo ocurre con la esfera. En ambos casos, esto procede del hecho de que la segunda forma fundamental en cada punto, restringida a los vectores del círculo unidad, es constante (cf. el ejemplo 7); en consecuencia, todas las direcciones son extremales para la curvatura normal.

En el cilindro del ejemplo 3, los vectores v y w dan las direcciones principales en p , correspondientes a las curvaturas principales 0 y 1, respectivamente. En el paraboloide hiperbólico del ejemplo 4, los ejes x y y son paralelos a las direcciones principales, de curvaturas principales -2 y 2 , respectivamente.

DEFINICION 5. Si una curva regular conexa C en S es tal que para todo $p \in C$ la recta tangente de C es una dirección principal en p , entonces se dice que C es una línea de curvatura de S .

PROPOSICION 3 (Olinde Rodrigues). Una condición necesaria y suficiente para que una curva regular conexa C en S sea una línea de curvatura de S es que

$$N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t),$$

para cualquier parametrización $\alpha(t)$ de C , donde $N(t) = N \circ \alpha(t)$ y $\lambda(t)$ es una función diferenciable de t . En este caso, $-\lambda(t)$ es la curvatura (principal) a lo largo de $\alpha'(t)$.

Demostración. Basta con observar que si $\alpha'(t)$ está contenida en una dirección principal, entonces $\alpha'(t)$ es un autovector de dN

$$dN(\alpha'(t)) = N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t).$$

El recíproco es inmediato. Q.E.D.

El conocimiento de las curvaturas principales en p nos permite calcular fácilmente la curvatura normal a lo largo de una dirección dada de $T_p(S)$. De hecho, sea $v \in T_p(S)$ con $|v| = 1$. Como e_1 y e_2 forman una base ortonormal de $T_p(S)$, tenemos

$$v = e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta,$$

donde θ es el ángulo de e_1 a v en la orientación de $T_p(S)$. La curvatura normal k_n a lo largo de v viene dada por

$$\begin{aligned} k_n &= H_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle \\ &= -\langle dN_p(e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta), e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta \rangle \\ &= \langle e_1 k_1 \cos \theta + e_2 k_2 \sin \theta, e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta \rangle \\ &= k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Se conoce clásicamente a la última expresión como la *fórmula de Euler*; que en realidad no es otra cosa que la expresión de la segunda forma fundamental en la base $\{e_1, e_2\}$.

Dada una aplicación lineal $A: V \rightarrow V$ de un espacio vectorial de dimensión 2 y dada una base $\{v_1, v_2\}$ de V , se recuerda que

el determinante de $A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, la traza de $A = a_{11} + a_{22}$,

donde (a_{ij}) es la matriz de A en la base $\{v_1, v_2\}$. Se sabe que estos números no dependen de la elección de la base $\{v_1, v_2\}$ y están, por tanto, asociados a la aplicación lineal A .

En nuestro caso, el determinante de dN es el producto $(-k_1)(-k_2) = k_1 k_2$ de las curvaturas principales, y la traza de dN es el opuesto $-(k_1 + k_2)$ de la suma de las curvaturas principales. Si cambiamos la orientación de la superficie, el determinante no varía (aquí es esencial que la dimensión sea par); sin embargo, la traza, cambia de signo.

DEFINICION 6. Sea $p \in S$ y sea $dN_p: T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ la diferencial de la aplicación de Gauss. El determinante de dN_p es la curvatura gaussiana K de S en p . El opuesto de la mitad de la traza de dN_p se denomina la curvatura media H de S en p .

Podemos escribir, en términos de las curvaturas principales

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

DEFINICION 7. Un punto de una superficie S se denomina

1. Elíptico si $\det(dN_p) > 0$.
2. Hiperbólico si $\det(dN_p) < 0$.
3. Parabólico si $\det(dN_p) = 0$, con $dN_p \neq 0$.
4. Plano si $dN_p = 0$.

Es claro que esta clasificación no depende de la elección de la orientación.

En un punto elíptico la curvatura gaussiana es positiva. Las curvaturas principales tienen el mismo signo y, por tanto, los vectores normales de todas las curvas que pasan por este punto se dirigen hacia el mismo lado del plano tangente. Los puntos

de una esfera son puntos elípticos. El punto $(0, 0, 0)$ del paraboloides $z = x^2 + ky^2, k > 0$ (cf. el ejemplo 5), también es un punto elíptico.

En un punto hiperbólico, la curvatura gaussiana es negativa. Las curvaturas principales tienen signos opuestos; por tanto, existen curvas que pasan por p cuyos vectores normales en p apuntan hacia cualquiera de los lados del plano tangente en p . El punto $(0, 0, 0)$ del paraboloides hiperbólico $z = y^2 - x^2$ (cf. el ejemplo 4) es un punto hiperbólico.

En un punto parabólico, la curvatura gaussiana es cero pero una de las curvaturas principales no es cero. Los puntos de un cilindro (cf. el ejemplo 3) son puntos parabólicos.

Finalmente, en un punto plano, todas las curvaturas principales son cero. Los puntos de un plano satisfacen trivialmente esta condición. Se dio un ejemplo no trivial de punto plano en el ejemplo 6.

DEFINICION 8. Si en $p \in S$, $k_1 = k_2$, entonces se dice que p es un punto umbílico de S ; en particular, los puntos planos ($k_1 = k_2 = 0$) son puntos umbílicos.

Todos los puntos de una esfera y de un plano son puntos umbílicos. Utilizando el método del ejemplo 6, podemos verificar que el punto $(0, 0, 0)$ del paraboloides $z = x^2 + y^2$ es un punto umbílico (no plano).

Vamos a demostrar ahora el interesante resultado que afirma que, esencialmente, las únicas superficies constituidas enteramente por puntos umbílicos son las esferas y los planos.

PROPOSICION 4. Si todos los puntos de una superficie conexa S son puntos umbílicos, entonces S está contenida en una esfera o en un plano.

Demuestração. Sea $p \in S$ y sea $x(u, v)$ una parametrización de S en p tal que el entorno coordenado V es conexo.

Como cada $q \in V$ es un punto umbílico, tenemos, para cualquier vector $w = a_1 x_u + a_2 x_v$ en $T_q(S)$,

$$dN(w) = \lambda(q)w,$$

donde $\lambda = \lambda(q)$ es una función real y diferenciable en V .

Primero demostramos que $\lambda(q)$ es constante en V . Para ello, escribimos la ecuación de arriba en la forma

$$N_u a_1 + N_v a_2 = \lambda(x_u a_1 + x_v a_2);$$

de donde, como w es arbitrario,

$$N_u = \lambda x_u,$$

$$N_v = \lambda x_v.$$

Derivando la primera ecuación con respecto a v , la segunda con respecto a u y restando las ecuaciones resultantes, tenemos

$$\lambda_u x_v - \lambda_v x_u = 0.$$

Como x_u y x_v son linealmente independientes, concluimos que

$$\lambda_u = \lambda_v = 0$$

para todo $q \in V$. Ya que V es conexo, λ es constante en V , que es lo que habíamos afirmado.

Si $\lambda \equiv 0$, $N_u = N_v = 0$ y por tanto $N = N_0 = \text{constante}$ en V . Así, $\langle x(u, v), N_0 \rangle_u = \langle x(u, v), N_0 \rangle_v = 0$; luego,

$$\langle x(u, v), N_0 \rangle = \text{constante},$$

y todos los puntos $x(u, v)$ de V pertenecen a un plano.

Si $\lambda \neq 0$, entonces el punto $x(u, v) - (1/\lambda)N(u, v) = y(u, v)$ no varía porque

$$(x(u, v) - \frac{1}{\lambda}N(u, v))_u = (x(u, v) - \frac{1}{\lambda}N(u, v))_v = 0.$$

Como

$$|x(u, v) - y|^2 = \frac{1}{\lambda^2},$$

todos los puntos de V están contenidos en una esfera de centro y y radio $1/|\lambda|$.

Esto demuestra la proposición localmente, es decir, en un entorno de un punto $p \in S$. Para completar la demostración observamos que, puesto que S es conexa, dado cualquier otro punto $r \in S$, existe una curva continua $\alpha: [0, 1] \rightarrow S$ con $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = r$. Para cada punto $\alpha(t) \in S$ de esta curva existe un entorno V_t en S contenido en una esfera o en un plano y tal que $\alpha^{-1}(V_t)$ es un intervalo abierto de $[0, 1]$. La unión $\bigcup \alpha^{-1}(V_t)$, $t \in [0, 1]$, recorre $[0, 1]$ y como $[0, 1]$ es un intervalo cerrado, puede recubrirse con un número finito de elementos de la familia $\{\alpha^{-1}(V_t)\}$ (cf. el teorema de Heine-Borel, prop. 6 del apéndice al cap. 2). Por tanto, $\alpha([0, 1])$ está recubierto por un número finito de entornos V_t .

Si los puntos de uno de estos entornos están en un plano, todos los otros estarán en el mismo plano. Como r es arbitrario, todos los puntos de S pertenecen a este plano.

Si los puntos de uno de estos entornos están en una esfera, el mismo argumento demuestra que todos los puntos de S pertenecen a una esfera, y esto completa la demostración.

Q.E.D.

DEFINICIÓN 9. Sea p un punto de S . Una dirección asintótica de S en p es una dirección de $T_p(S)$ para la cual la curvatura normal es cero. Una curva asintótica de S es una curva regular conexa $C \subset S$ tal que para cada $p \in C$ la recta tangente de C en p es una dirección asintótica.

Se deduce entonces de la definición que en un punto elíptico no hay direcciones asintóticas.

Una interpretación geométrica útil de las direcciones asintóticas viene dada por la indicatriz de Dupin, que vamos a describir ahora.

Sea p un punto de S . La indicatriz de Dupin en p es el conjunto de vectores w de $T_p(S)$ tales que $II_p(w) = \pm 1$.

Para escribir las ecuaciones de la indicatriz de Dupin de una manera más adecuada, sean (ξ, η) las coordenadas cartesianas de $T_p(S)$ en la base ortonormal $\{e_1, e_2\}$, donde e_1 y e_2 son autovectores de dN_p . Dado $w \in T_p(S)$, sean ϱ y θ , con $|\varrho| = 1$ y $v = e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta$, si $\varrho \neq 0$. Por la fórmula de Euler,

$$\begin{aligned} \pm 1 &= II_p(w) = \varrho^2 II_p(v) \\ &= k_1 \varrho^2 \cos^2 \theta + k_2 \varrho^2 \sin^2 \theta \\ &= k_1 \xi^2 + k_2 \eta^2, \end{aligned}$$

donde $w = \xi e_1 + \eta e_2$. Así, las coordenadas (ξ, η) de un punto de la indicatriz de Dupin satisfacen la ecuación

$$k_1 \xi^2 + k_2 \eta^2 = \pm 1; \quad (1)$$

de donde la indicatriz de Dupin es la unión de dos cónicas en $T_p(S)$. Observemos que la curvatura normal a lo largo de la dirección determinada por w es $k_n(v) = II_p(v) = \pm(1/\varrho^2)$.

Para un punto elíptico, la indicatriz de Dupin es una elipse (k_1 y k_2 tienen el mismo signo); esta elipse degenera en un círculo si el punto es umbílico y no plano ($k_1 = k_2 \neq 0$).

Para un punto hiperbólico, k_1 y k_2 tienen signos opuestos. Por esta razón, la indicatriz de Dupin está constituida por dos hipérbolas con un par de asíntotas comunes (fig. 3-13). A lo largo de las direcciones de las asíntotas, la curvatura normal es cero; por tanto, éstas son las direcciones asintóticas. Esto justifica la terminología y prueba que un punto hiperbólico tiene *exactamente dos* direcciones asintóticas.

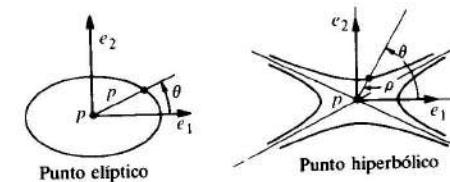


Figura 3-13. La indicatriz de Dupin.

Para un punto parabólico, una de las curvaturas principales es cero, y la indicatriz de Dupin degenera en un par de rectas paralelas. La dirección común de estas rectas es la única dirección asintótica en el punto dado.

En el ejemplo 5 de la sec. 3.3 demostraremos una interesante propiedad de la indicatriz de Dupin.

El concepto de direcciones conjugadas, que ahora pasamos a definir, está estrechamente relacionado con el de dirección asintótica.

DEFINICIÓN 10. Sea p un punto de una superficie S . Dos vectores no nulos $w_1, w_2 \in T_p(S)$ son conjugados si $\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle = 0$. Dos directrices r_1, r_2 en p son conjugadas si existe un par de vectores no nulos w_1, w_2 paralelos a r_1 y r_2 , respectivamente, que son conjugados.

Es inmediato comprobar que la definición de direcciones conjugadas no depende de la elección de los vectores w_1 y w_2 en r_1 y r_2 .

Se deduce de la definición que las direcciones principales son conjugadas y que una dirección asintótica es conjugada de sí misma. Además, en un punto umbílico no plano, cada par de direcciones ortogonales es un par de direcciones conjugadas, y, en un punto umbílico plano, cada dirección es conjugada de cualquier otra dirección.

Supongamos que $p \in S$ no es un punto umbílico y sea $\{e_1, e_2\}$ la base ortonormal de $T_p(S)$ determinada por $dN_p(e_1) = -k_1 e_1, dN_p(e_2) = -k_2 e_2$. Sean θ y φ los ángulos que forman con e_1 un par de direcciones r_1 y r_2 . Afirmamos que r_1 y r_2 son conjugadas si y sólo si

$$k_1 \cos \theta \cos \varphi = -k_2 \sin \theta \sin \varphi. \quad (2)$$

En efecto, r_1 y r_2 son conjugadas si y sólo si los vectores

$$w_1 = e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta, \quad w_2 = e_1 \cos \varphi + e_2 \sin \varphi$$

son conjugados. Así,

$$0 = \langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = -k_1 \cos \theta \cos \varphi - k_2 \sin \theta \sin \varphi.$$

Por consiguiente, se obtiene la condición (2).

Cuando k_1 y k_2 son no nulas (es decir, p es un punto elíptico o hiperbólico), la condición (2) da lugar a una construcción geométrica de las direcciones conjugadas en términos de la indicatriz de Dupin en p . Vamos a describir la construcción en un punto elíptico, la situación en un punto hiperbólico es similar. Sea r una recta que pasa por el origen de $T_p(S)$ y considérense los puntos de intersección q_1 y q_2 de r con la indicatriz de Dupin (fig. 3-14). Las rectas tangentes a la indicatriz de Dupin en q_1 y q_2 son paralelas y su dirección común r' es conjugada a r . Dejamos para los ejercicios (ejercicio 12) las demostraciones de estas afirmaciones.

EJERCICIOS

- Demostrar que en un punto hiperbólico las direcciones principales bisectan a las direcciones asintóticas.
- Demuéstrese que si una superficie es tangente a un plano a lo largo de una curva, entonces los puntos de esta curva o son parabólicos o son planos.

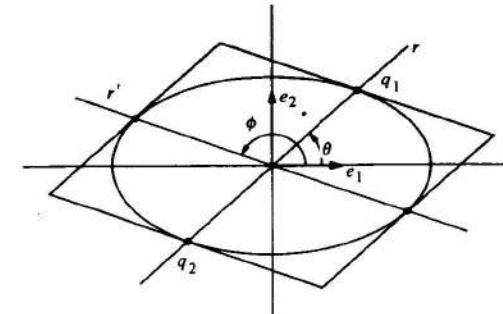


Figura 3-14. Construcción de las direcciones conjugadas.

- Sea $C \subset S$ una curva regular sobre una superficie S de curvatura gaussiana $K > 0$. Demuéstrese que la curvatura k de C en p satisface

$$k \geq \min(|k_1|, |k_2|),$$

donde k_1 y k_2 son las curvaturas principales de S en p .

- Admitamos que una superficie S tiene la propiedad de que en cualquier punto $|k_1| \leq 1, |k_2| \leq 1$. ¿Será cierto que la curvatura k de una curva sobre S también satisface $|k| \leq 1$?
- Demuéstrese que la curvatura media H en $p \in S$ viene dada por

$$H = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi k_n(\theta) d\theta$$

donde $k_n(\theta)$ es la curvatura normal en p a lo largo de una dirección que forma un ángulo θ con una dirección fija.

- Demuéstrese que la suma de las curvaturas normales asociadas a cualquier par de direcciones ortogonales, en un punto $p \in S$, es constante.
- Demostrar que si en un punto no plano la curvatura media es cero, entonces dicho punto admite un par de direcciones asintóticas ortogonales.
- Describase la región de la esfera unidad que recubre la imagen de la aplicación de Gauss de las siguientes superficies:
 - El parabolóide de revolución $z = x^2 + y^2$.
 - El hiperbolóide de revolución $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
 - El catenoide $x^2 + y^2 = \cosh^2 z$.
- Demostrar que
 - La imagen $N \circ \alpha$ por la aplicación de Gauss $N: S \rightarrow S^2$ de una curva parametrizada regular $\alpha: I \rightarrow S$ la cual no contiene puntos planos o parabólicos es una curva parametrizada regular sobre S^2 (denominada la *imagen esférica de α*).
 - Si $C = \alpha(I)$ es una línea de curvatura y k es su curvatura en p , entonces

$$k = |k_n k_N|,$$

donde k_n es la curvatura normal en p a lo largo de la recta tangente de C y k_N es la curvatura de la imagen esférica $N(C) \subset S^2$ en $N(p)$.

10. Supóngase que el plano osculador a una línea de curvatura $C \subset S$, la cual nunca es tangente a una dirección asintótica, forma un ángulo constante con el plano tangente a S a lo largo de C . Demuéstrese que C es una curva plana.
11. Sea p un punto elíptico de una superficie S y sean r y r' direcciones conjugadas en p . Hágase variar r en $T_p(S)$ para demostrar que el ángulo mínimo que forma r con r' se alcanza en un único par de direcciones de $T_p(S)$ que son simétricas con respecto a las direcciones principales.
12. Sea p un punto hiperbólico de una superficie S y sea r una dirección de $T_p(S)$. Describir y justificar una construcción geométrica para hallar la dirección conjugada r' de r , en términos de la indicatriz de Dupin (cf. la construcción de la sec. 3.2).
- *13. *Teorema de Beltrami-Enneper.* Pruébese que el valor absoluto de la torsión τ en un punto de una curva asintótica, cuya curvatura nunca se anula, viene dada por

$$|\tau| = \sqrt{-K},$$

donde K es la curvatura gaussiana en dicho punto.

- *14. Si una superficie S_1 intersecta a la superficie S_2 a lo largo de una curva regular C , entonces la curvatura k de C en $p \in C$ viene dada por

$$k^2 \operatorname{sen}^2 \theta = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 \cos \theta,$$

donde λ_1 y λ_2 son las curvaturas normales en p , a lo largo de la recta tangente a C , de S_1 y S_2 , respectivamente, y θ es el ángulo que forman los vectores normales de S_1 y S_2 en p .

15. *Teorema de Joachimstahl.* Supóngase que S_1 y S_2 se cortan a lo largo de una curva regular C , formando un ángulo $\theta(p)$, $p \in C$. Admitamos que C es una línea de curvatura de S_1 . Demuéstrese que $\theta(p)$ es constante si y sólo si C es una línea de curvatura de S_2 .
- *16. Demostrar que los meridianos de un toro son líneas de curvatura.
17. Demostrar que si $H \equiv 0$ sobre S y S carece de puntos planos, entonces la aplicación de Gauss $N: S \rightarrow S^2$ tiene la siguiente propiedad:

$$\langle dN_p(w_1), dN_p(w_2) \rangle = -K(p) \langle w_1, w_2 \rangle$$

para todo $p \in S$ y $w_1, w_2 \in T_p(S)$ cualesquiera. Demuéstrese que la condición de arriba implica que el ángulo de dos curvas incidentes en S y el ángulo de sus imágenes esféricas (cf. el ejercicio 9) son iguales salvo el signo.

- *18. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ las curvaturas normales en $p \in S$ a lo largo de direcciones que forman ángulos $0, 2\pi/m, \dots, (m-1)2\pi/m$; $m > 2$, con una dirección principal. Demostrar que

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_m = mH,$$

donde H es la curvatura media en p .

- *19. Sea $C \subset S$ una curva regular en S . Sean $p \in C$ y $\alpha(s)$ una parametrización de C por la longitud de arco tal que $\alpha(0) = p$. Elíjase una base ortonormal positiva $\{t, h\}$ en $T_p(S)$, donde $t = \alpha'(0)$. La torsión geodésica τ_g de $C \subset S$ en p está definida por

$$\tau_g = \left\langle \frac{dN}{ds}(0), h \right\rangle.$$

Demostrar que

- a. $\tau_g = (k_1 - k_2) \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi$, donde φ es el ángulo de e_1 a t .
- b. Si τ es la torsión de C , n es el vector normal (principal) de C y $\cos \theta = \langle N, n \rangle$, entonces

$$\frac{d\theta}{ds} = \tau - \tau_g.$$

- c. Las líneas de curvatura de S están caracterizadas por tener torsión geodésica idénticamente cero.

- *20. *Teorema de Dupin.* Se dice que tres familias de superficies forman un *sistema triplemente ortogonal* en un conjunto abierto $U \subset R^3$ si por cada punto $p \in U$ pasa una única superficie de cada familia y si las tres superficies que pasan por p son ortogonales dos a dos. Utilícese la parte c del ejercicio 19 para demostrar el teorema de Dupin: *las superficies de un sistema triplemente ortogonal se cortan entre sí sobre líneas de curvatura*.

3.3. La aplicación de Gauss en coordenadas locales

En la sección precedente, introdujimos algunos conceptos relacionados con el comportamiento local de la aplicación de Gauss. Para enfatizar el contenido geométrico de la situación, dimos las definiciones prescindiendo del uso de un sistema coordenado. Se calcularon, directamente de las definiciones, algunos ejemplos simples. Sin embargo, este procedimiento no es eficiente a la hora de tratar con situaciones generales. En esta sección, vamos a obtener las expresiones de la segunda forma fundamental y de la diferencial de la aplicación de Gauss en un sistema coordinado. Esto nos proporcionará un método sistemático para el cálculo de ejemplos específicos. Además, las expresiones generales así obtenidas son esenciales para el análisis pormenorizado de los conceptos ya introducidos.

Admitiremos que todas las parametrizaciones $x: U \subset R^2 \rightarrow S$, a considerar en esta sección, son compatibles con la orientación N de S ; es decir, en $x(U)$,

$$N = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}.$$

Sea $x(u, v)$ una parametrización en un punto $p \in S$ de una superficie S , y sea $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$ una curva parametrizada en S , con $\alpha(0) = p$. Para simplificar la notación, adoptaremos la convención de que todas las funciones que aparecen más abajo representan sus valores en el punto p .

El valor tangente a $\alpha(t)$ en p es $\alpha' = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'$, y

$$dN(\alpha') = N'(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'.$$

Como N_u y N_v pertenecen a $T_p(S)$, podemos escribir

$$\begin{aligned} N_u &= \alpha_{11} \mathbf{x}_u + \alpha_{21} \mathbf{x}_v, \\ N_v &= \alpha_{12} \mathbf{x}_u + \alpha_{22} \mathbf{x}_v, \end{aligned} \tag{1}$$

por tanto,

$$dN(\alpha') = (a_{11}u' + a_{12}v')\mathbf{x}_u + (a_{21}u' + a_{22}v')\mathbf{x}_v;$$

de donde

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Esto prueba que en la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$, dN viene expresada por la matriz (a_{ij}) , $i, j = 1, 2$. Nótese que esta matriz no es necesariamente simétrica, salvo que $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ sea una base ortonormal.

Por otra parte, la expresión de la segunda forma fundamental en la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ viene dada por

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle = -\langle N_u u' + N_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle \\ &= e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2, \end{aligned}$$

donde, puesto que $\langle N, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_v \rangle = 0$,

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle, \\ f &= -\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = -\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle, \\ g &= -\langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

Ahora vamos a obtener los valores de a_{ij} en términos de los coeficientes e, f, g . De la ecuación (1) tenemos

$$\begin{aligned} -f &= \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G, \\ -f &= \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F, \\ -e &= \langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F, \\ -g &= \langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G, \end{aligned} \tag{2}$$

donde E, F y G son los coeficientes de la primera forma fundamental en la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ (cf. la sec. 2.5). Las relaciones (2) pueden expresarse en forma matricial por

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix};$$

de donde

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1},$$

donde $(\quad)^{-1}$ representa la inversa de la matriz (\quad) . Se comprueba fácilmente que

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix},$$

de donde se deducen las siguientes expresiones para los coeficientes (a_{ij}) de la matriz de dN en la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$:

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2},$$

$$a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2},$$

$$a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2},$$

$$a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}.$$

Debe mencionarse que en la literatura las relaciones (1), conjuntamente con los valores de arriba, se conocen como las *ecuaciones de Weingarten*.

De la ecuación (3) obtenemos inmediatamente

$$K = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \tag{4}$$

Para calcular la curvatura media, recordamos que $-k_1, -k_2$ son los autovalores de dN . Por consiguiente, k_1 y k_2 satisfacen la ecuación

$$dN(v) = -kv = -kIv \quad \text{para algún } v \in T_p(S), v \neq 0,$$

donde I es la aplicación identidad. De aquí se deduce que la aplicación lineal $dN + kI$ no es invertible; luego tiene determinante cero. Así,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + k \end{pmatrix} = 0$$

o

$$k^2 + k(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0.$$

Como k_1 y k_2 son las raíces de esta ecuación cuadrática, concluimos que

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}, \tag{5}$$

luego,

$$k^2 - 2Hk + K = 0, \tag{6}$$

y, consecuentemente,

$$k = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

De esta relación se deduce que, si elegimos $k_1(q) \geq k_2(q)$, $q \in S$, entonces las funciones k_1 y k_2 son continuas en S . Además, k_1 y k_2 son diferenciables en S , salvo quizás en los puntos umbílicos ($H^2 = K$) de S .

En los cálculos de este capítulo, por brevedad, es conveniente escribir

$$\langle u \wedge v, w \rangle = (u, v, w) \quad \text{para cualesquiera } u, v, w \in \mathbb{R}^3.$$

Recordamos que esto no es otra cosa que el determinante de la matriz 3×3 cuyas columnas (o líneas) son las componentes de los vectores u, v, w en la base canónica de \mathbb{R}^3 .

Ejemplo 1. Vamos a calcular la curvatura gaussiana de los puntos del toro recubierto por la parametrización (cf. el ejemplo 6 de la sec. 2.2)

$$\mathbf{x}(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u), \\ 0 < u < 2\pi, 0 < v < 2\pi.$$

Para el cálculo de los coeficientes e, f, g , necesitamos conocer N (por tanto \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v), \mathbf{x}_{uu} , \mathbf{x}_{uv} y \mathbf{x}_{vv} :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u), \\ \mathbf{x}_v &= (-a + r \cos u) \sin v, (a + r \cos u) \cos v, 0), \\ \mathbf{x}_{uu} &= (-r \cos u \cos v, -r \cos u \sin v, -r \sin u), \\ \mathbf{x}_{uv} &= (r \sin u \sin v, -r \sin u \cos v, 0), \\ \mathbf{x}_{vv} &= (-a + r \cos u) \cos v, -(a + r \cos u) \sin v, 0). \end{aligned}$$

De estas identidades obtenemos

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = r^2, & F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0, \\ G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = (a + r \cos u)^2. \end{aligned}$$

Introduciendo los valores obtenidos en $e = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle$ y teniendo en cuenta que $|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| = \sqrt{EG - F^2}$, obtenemos

$$e = \left\langle \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}, \mathbf{x}_{uu} \right\rangle = \frac{(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{r^2(a + r \cos u)}{r(a + r \cos u)} = r.$$

Obtenemos, análogamente

$$\begin{aligned} f &= \frac{(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{vv})}{r(a + r \cos u)} = 0, \\ g &= \frac{(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{vv})}{r(a + r \cos u)} = \cos u(a + r \cos u). \end{aligned}$$

Finalmente, dado que $K = (eg - f^2)/(EG - F^2)$, tenemos

$$K = \frac{\cos u}{r(a + r \cos u)}.$$

De esta expresión se deduce que $K = 0$ a lo largo de los paralelos $u = \pi/2$ y $u = 3\pi/2$; por esta razón, los puntos de estos paralelos son puntos parabólicos. En la región del toro definida por $\pi/2 < u < 3\pi/2$, K es negativa (nótese que $r > 0$ y $a > r$); por tanto, los puntos de esta región son puntos hiperbólicos. En la región dada por $0 < u < \pi/2$ ó $3\pi/2 < u < 2\pi$, la curvatura es positiva y los puntos son puntos elípticos (fig. 3-15).

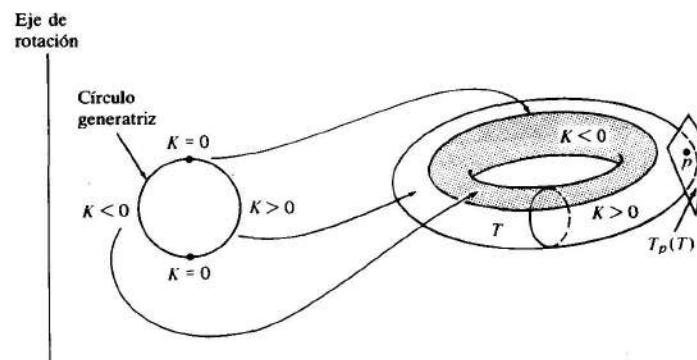


Figura 3-15

Como aplicación de la expresión para la segunda forma fundamental en coordenadas, vamos a demostrar una proposición que da información sobre la posición de una superficie en el entorno de un punto elíptico o hiperbólico, con respecto al plano tangente en dicho punto. De hecho, si nos fijamos en un punto elíptico del toro del ejemplo 1, observamos que la superficie se encuentra a un lado del plano tangente en dicho punto (véase la fig. 3-15). Por otra parte, si p es un punto hiperbólico del toro T y $V \subset T$ es cualquier entorno de p , podemos encontrar puntos de V a ambos lados de $T_p(S)$, sin importar lo pequeño que pueda ser V . Este ejemplo refleja un hecho general, de carácter local, que se describe en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1. Sea $p \in S$ un punto elíptico de una superficie S . Entonces existe un entorno V de p en S tal que todos los puntos de V pertenecen al mismo lado del plano tangente $T_p(S)$. Sea p un punto hiperbólico. Entonces, en cualquier entorno de p existen puntos de S en cada uno de los lados de $T_p(S)$.

Demostración. Sea $\mathbf{x}(u, v)$ una parametrización en p , con $\mathbf{x}(0, 0) = p$. La distancia d de un punto $q = \mathbf{x}(u, v)$ al plano tangente $T_p(S)$ viene dada por (fig. 3-16)

$$d = \langle \mathbf{x}(u, v) - \mathbf{x}(0, 0), N(p) \rangle.$$

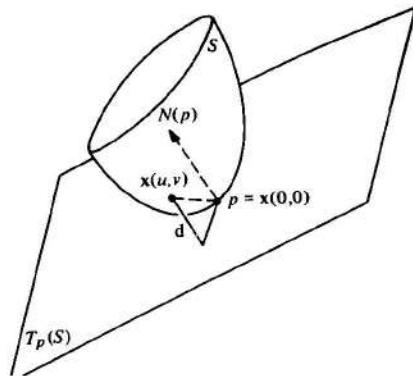


Figura 3-16

Como $x(u, v)$ es diferenciable, tenemos la fórmula de Taylor:

$$x(u, v) = x(0, 0) + x_u u + x_v v + \frac{1}{2}(x_{uu}u^2 + 2x_{uv}uv + x_{vv}v^2) + \bar{R},$$

donde las derivadas están evaluadas en $(0, 0)$ y el resto \bar{R} satisface la condición

$$\lim_{(u, v) \rightarrow (0, 0)} \frac{\bar{R}}{u^2 + v^2} = 0.$$

Se deduce entonces que

$$\begin{aligned} d &= \langle x(u, v) - x(0, 0), N(p) \rangle \\ &= \frac{1}{2}\{\langle x_{uu}, N(p) \rangle u^2 + 2\langle x_{uv}, N(p) \rangle uv + \langle x_{vv}, N(p) \rangle v^2\} + R \\ &= \frac{1}{2}(eu^2 + 2fuv + gv^2) + R = \frac{1}{2}H_p(w) + R, \end{aligned}$$

donde $w = x_u u + x_v v$, $R = \langle \bar{R}, N(p) \rangle$ y $\lim_{w \rightarrow 0} (R/|w|^2) = 0$.

Para un punto elíptico p , $H_p(w)$ tiene un signo fijo. Por tanto, para todo (u, v) suficientemente próximo a p , d tiene el mismo signo que $H_p(w)$; es decir, tales (u, v) pertenecen al mismo lado de $T_p(S)$.

Para un punto hiperbólico p , en cada entorno de p existen puntos (u, v) y (\bar{u}, \bar{v}) tales que $H_p(w/|w|)$ y $H_p(\bar{w}/|\bar{w}|)$ tienen signos opuestos (aquí $\bar{w} = x_u \bar{u} + x_v \bar{v}$); por tanto, tales puntos pertenecen a lados distintos de $T_p(S)$.

Q.E.D.

No puede hacerse una afirmación como la de la prop. 1 en un entorno de un punto parabólico o plano. En los ejemplos precedentes de puntos parabólicos y planos (cf. los ejemplos 3 y 6 de la sec. 3.2) la superficie se hallaba a un lado del plano tangente y podía tener una recta en común con este plano. En los siguientes ejemplos demostraremos que puede darse una situación completamente diferente.

Ejemplo 2. La «silla de mono» (véase la fig. 3-17) viene dada por

$$x = u, \quad y = v, \quad z = u^3 - 3v^2u.$$

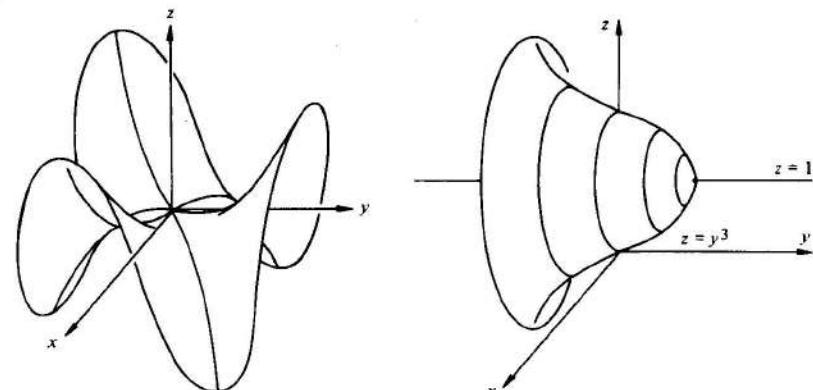


Figura 3-17

Figura 3-18

Un cálculo directo demuestra que en $(0, 0)$ los coeficientes de la segunda forma fundamental son $e = f = g = 0$; por tanto, el punto $(0, 0)$ es un punto plano. No obstante, en cualquier entorno de este punto hay puntos a ambos lados del plano tangente.

Ejemplo 3. Considérese la superficie que se obtiene al rotar la curva $z = y^3$, $-1 < z < 1$, alrededor de la recta $z = 1$ (véase la fig. 3-18). Un simple cálculo prueba que los puntos generados por la rotación del origen O son puntos parabólicos. Vamos a omitir este cálculo porque demostraremos en breve (ejemplo 4) que los paralelos y los meridianos de una superficie de revolución son líneas de curvatura; esto, junto con el hecho de que, para los puntos en cuestión, los meridianos (curvas de la forma $y = x^3$) tienen curvatura cero y el paralelo es una sección normal, implica la afirmación hecha más arriba.

Nótese que en cualquier entorno de un punto parabólico de aquel tipo existen puntos a ambos lados del plano tangente.

La expresión de la segunda forma fundamental en coordenadas locales es particularmente útil para el estudio de las direcciones asintóticas y principales. Primero nos fijaremos en las direcciones asintóticas.

Sea $x(u, v)$ una parametrización en $p \in S$, con $x(0, 0) = p$, y sean $e(u, v) = e$, $f(u, v) = f$ y $g(u, v) = g$ los coeficientes de la segunda forma fundamental en esta parametrización.

Se recuerda que (véase la def. 9 de la sec. 3.2) una curva regular conexa C en el entorno coordinado de x es una curva asintótica si y sólo si para cualquier parametrización $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$, $t \in I$, de C tenemos $H(\alpha'(t)) = 0$, para todo $t \in I$, es decir, si y sólo si

$$e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0, \quad t \in I. \tag{7}$$

Por esta razón, la ecuación (7) se denomina la *ecuación diferencial de las curvas asintóticas*. En la siguiente sección daremos una interpretación más precisa de esta expresión. Por ahora, sólo queremos sacar de la ecuación (7) la siguiente conclusión útil: *una condición necesaria y suficiente para que las curvas coordenadas de una parametrización en un entorno de un punto hiperbólico ($eg - f^2 < 0$) sean curvas asintóticas es que $e = g = 0$* .

En efecto, si las curvas $u = \text{const.}$, $v = v(t)$ y $u = u(t)$, $v = \text{const.}$ satisfacen la ecuación (7), obtenemos que $e = g = 0$. Recíprocamente, si la última condición se da y $f \neq 0$, la ecuación (7) se convierte en $fu'v' = 0$, ecuación que claramente satisfacen las curvas coordenadas.

Ahora vamos a considerar las direcciones principales, manteniendo las notaciones ya establecidas.

Una curva regular conexa C en el entorno coordenado de x es una línea de curvatura si y solamente si para cualquier parametrización de C , $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$, $t \in I$, tenemos (cf. la prop. 3 de la sec. 3.2)

$$dN(\alpha'(t)) = \lambda(t)\alpha'(t).$$

Se deduce entonces que las funciones $u'(t)$ y $v'(t)$ satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\frac{fF - eG}{EG - F^2}u' + \frac{gF - fG}{EG - F^2}v' = \lambda u',$$

$$\frac{eF - fE}{EG - F^2}u' + \frac{fF - gE}{EG - F^2}v' = \lambda v'.$$

Eliminando λ en el sistema precedente obtenemos la *ecuación diferencial de las líneas de curvatura*.

$$(fE - eF)(u')^2 + (gE - eG)u'v' + (gF - fG)(v')^2 = 0,$$

que, de una manera más simétrica, puede escribirse en la forma

$$\begin{vmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Utilizando el hecho de que las direcciones principales son ortogonales entre sí, se deduce fácilmente de la ecuación (8) que *una condición necesaria y suficiente para que las curvas coordenadas de una parametrización en el entorno de un punto no umbílico sean líneas de curvatura es que $F = f = 0$* .

Ejemplo 4. (Superficies de revolución). Considérese una superficie de revolución parametrizada por (cf. el ejemplo 4 de la sec. 2.3; hemos cambiado f y g por φ y ψ , respectivamente)

$$\mathbf{x}(u, v) = (\varphi(v \cos u), \varphi(v) \sin u, \psi(v)), \\ 0 < u < 2\pi, a < v < b, \quad \varphi(v) \neq 0.$$

Los coeficientes de la primera forma fundamental vienen dados por

$$E = \varphi^2, \quad F = 0, \quad G = (\varphi')^2 + (\psi')^2.$$

Es conveniente admitir que la curva que rota está parametrizada por la longitud de arco, es decir, que

$$(\varphi')^2 + (\psi')^2 = G = 1.$$

El cálculo de los coeficientes de la segunda forma fundamental es inmediato y da como resultado

$$e = \frac{(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} -\varphi \operatorname{sen} u & \varphi' \cos u & -\varphi \cos u \\ \varphi \cos u & \varphi' \operatorname{sen} u & -\varphi \operatorname{sen} u \\ 0 & \psi' & 0 \end{vmatrix} = -\varphi\psi'$$

$$f = 0,$$

$$g = \psi'\varphi'' - \psi''\varphi'.$$

Como $F = f = 0$, concluimos que los paralelos ($v = \text{const.}$) y los meridianos ($u = \text{const.}$) de una superficie de revolución son líneas de curvatura de tal superficie (este hecho se utilizó en el ejemplo 3).

Como

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{\psi'(\psi'\varphi'' - \psi''\varphi')}{\varphi} \quad (9)$$

y φ siempre es positiva, se deduce entonces que los puntos parabólicos vienen dados o bien por $\psi' = 0$ (la recta tangente a la curva generatriz es perpendicular al eje de rotación) o bien por $\varphi'\psi'' - \psi''\varphi' = 0$ (la curvatura de la curva generatriz es cero). Un punto que satisface ambas condiciones es un punto plano, ya que estas condiciones implican que $e = f = g = 0$.

Es conveniente expresar la curvatura gaussiana todavía de otra forma. Diferenciando $(\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1$ obtenemos $\varphi'\varphi'' = -\psi'\psi''$. Así,

$$K = -\frac{\psi'(\psi'\varphi'' - \psi''\varphi')}{\varphi} = -\frac{(\psi')^2\varphi'' + (\varphi')^2\psi''}{\varphi} = -\frac{\varphi''}{\varphi}.$$

La ecuación (9) resulta ser una expresión adecuada para la curvatura gaussiana de una superficie de revolución. Se puede utilizar, por ejemplo, para determinar las superficies de revolución con curvatura gaussiana constante (cf. el ejercicio 7).

Para calcular las curvaturas principales, hacemos primero la siguiente observación general: *si una parametrización de una superficie regular es tal que $F = f = 0$, entonces las curvaturas principales vienen dadas por e/E y g/G* . De hecho, en este caso, las curvaturas gaussiana y media vienen dadas por (cf. las ecuaciones (4) y (5))

$$K = \frac{eg}{EG}, \quad H = \frac{1}{2} \frac{eG + gE}{EG}.$$

Como K es el producto y $2H$ es la suma de las curvaturas principales, se deduce entonces nuestra afirmación.

Así, las curvaturas principales de una superficie de revolución viene dadas por

$$\frac{e}{E} = -\frac{\psi' \varphi}{\varphi^2} = -\frac{\psi'}{\varphi}, \quad \frac{g}{G} = \psi' \varphi'' - \psi'' \varphi'. \quad (10)$$

Luego, la curvatura media de una superficie de este tipo es

$$H = \frac{1}{2} \frac{-\psi' + \varphi(\psi' \varphi'' - \psi'' \varphi')}{\varphi}. \quad (11)$$

Ejemplo 5. Con frecuencia una superficie viene dada como la gráfica de función diferenciable (cf. la prop. 1, sec. 2.2) $z = h(x, y)$, donde (x, y) pertenece a un conjunto abierto $U \subset R^2$. Por esta razón, es conveniente disponer de fórmulas para los conceptos relevantes en este caso. Para obtener tales fórmulas parametrizemos la superficie mediante

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, h(u, v)), \quad (u, v) \in U,$$

donde $u = x$, $v = y$. Un simple cálculo prueba que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (1, 0, h_u), & \mathbf{x}_v &= (0, 1, h_v), & \mathbf{x}_{uu} &= (0, 0, h_{uu}), \\ \mathbf{x}_{uv} &= (0, 0, h_{uv}), & \mathbf{x}_{vv} &= (0, 0, h_{vv}). \end{aligned}$$

Así

$$N(x, y) = \frac{(-h_x, -h_y, 1)}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{1/2}}$$

es un campo unitario normal sobre la superficie y los coeficientes de la segunda forma fundamental en esta orientación vienen dados por

$$\begin{aligned} e &= \frac{h_{xx}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{1/2}}, \\ f &= \frac{h_{xy}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{1/2}}, \\ g &= \frac{h_{yy}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

De las expresiones precedentes cualquier fórmula que se necesite puede calcularse fácilmente. Por ejemplo, de las ecs. (4) y (5) obtenemos las curvaturas gaussiana y media:

$$\begin{aligned} K &= \frac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^2}, \\ 2H &= \frac{(1 + h_x^2)h_{yy} - 2h_xh_yh_{xy} + (1 + h_y^2)h_{xx}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Todavía hay otra razón, quizás más importante, para estudiar superficies expresadas en la forma $z = h(x, y)$. Esto se debe al hecho de que, localmente, cada superficie es la gráfica de una función diferenciable (cf. la prop. 3, sec. 2.2). Dado un punto p de una superficie S , podemos elegir los ejes de coordenadas de R^3 de forma que el origen de coordenadas O esté en p y el eje z esté dirigido a lo largo de la normal positiva de S en p (así, el plano xy coincide con $T_p(S)$). Se deduce entonces que en un entorno de p en S , ésta puede representarse en la forma $z = h(x, y)$, $(x, y) \in U \subset R^2$, donde U es un conjunto abierto y h es una función diferenciable (cf. la prop. 3, sec. 2.2), con $h(0, 0) = 0$, $h_x(0, 0) = 0$, $h_y(0, 0) = 0$ (fig. 3-19).

En este caso, la segunda forma fundamental de S en p aplicada al vector $(x, y) \in R^2$ toma la forma

$$h_{xx}(0, 0)x^2 + 2h_{xy}(0, 0)xy + h_{yy}(0, 0)y^2.$$

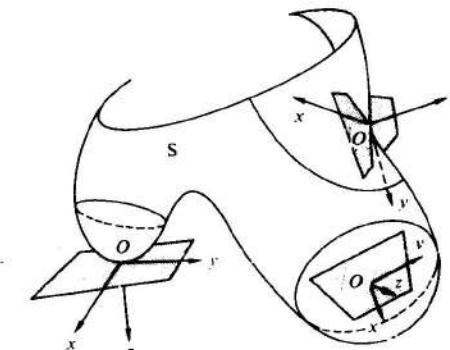


Figura 3-19. Cada punto de S tiene un entorno que puede representarse como $z = h(x, y)$.

En cálculo diferencial elemental de dos variables, la forma cuadrática precedente se conoce como el *hessiano* de h en $(0, 0)$. Así, el hessiano de h en $(0, 0)$ es la segunda forma fundamental de S en p .

Apliquemos las consideraciones precedentes para dar una interpretación geométrica de la indicatriz de Dupin. Con la notación de antes, sea $\epsilon > 0$ un número pequeño de forma que

$$C = \{(x, y) \in T_p(S); h(x, y) = \epsilon\}$$

sea una curva regular (quizás habría que cambiar la orientación de la superficie para lograr que $\epsilon > 0$). Queremos demostrar que si p no es un punto plano, la curva C es «aproximadamente» similar a la indicatriz de Dupin de S en p (fig. 3-20).

Para comprobarlo, admitamos además que los ejes x e y están dirigidos a lo largo de las direcciones principales, con el eje x a lo largo de la dirección de la curvatura principal máxima. Así, $f = h_{xy}(0, 0) = 0$ y

$$k_1(p) = \frac{e}{E} = h_{xx}(0, 0), \quad k_2(p) = \frac{g}{G} = h_{yy}(0, 0).$$

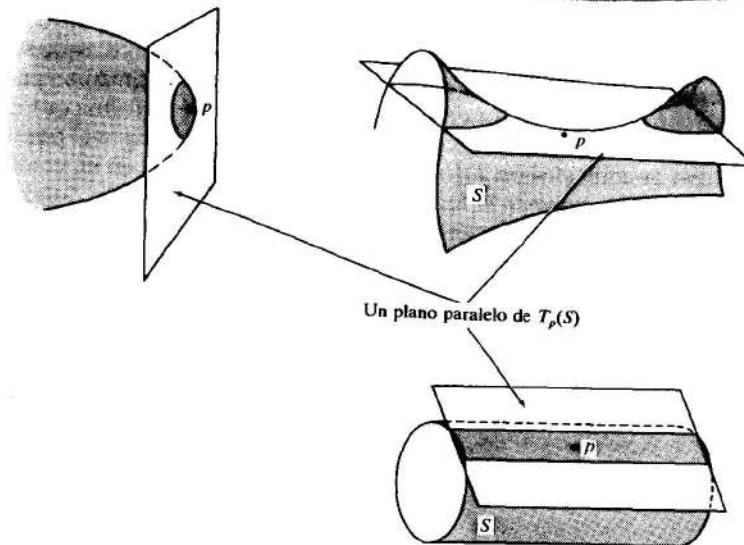


Figura 3-20

Desarrollando por Taylor $h(x, y)$ en $(0, 0)$ y teniendo en cuenta que $h_x(0, 0) = 0 = h_y(0, 0)$, obtenemos

$$\begin{aligned} h(x, y) &= \frac{1}{2}(h_{xx}(0, 0)x^2 + 2h_{xy}(0, 0)xy + h_{yy}(0, 0)y^2) + R \\ &= \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2) + R, \end{aligned}$$

donde

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{R}{x^2 + y^2} = 0.$$

Así, la curva C viene dada por

$$k_1x^2 + k_2y^2 + 2R = 2\epsilon.$$

Ahora, si p no es un punto plano, podemos considerar $k_1x^2 + k_2y^2 = 2\epsilon$ como una primera aproximación de C . Utilizando la transformación de semejanza,

$$x = \bar{x}\sqrt{2\epsilon}, \quad y = \bar{y}\sqrt{2\epsilon},$$

tenemos que $k_1x^2 + k_2y^2 = 2\epsilon$ se transforma en la curva

$$k_1\bar{x}^2 + k_2\bar{y}^2 = 1,$$

que es la indicatriz de Dupin en p . Esto significa que si p es un punto no plano, la intersección de S con un plano paralelo a $T_p(S)$ y próximo a p es, en una aproximación de primer orden, una curva similar a la indicatriz de Dupin en p .

Si p es un punto plano, esta interpretación ya no es válida (cf. el ejercicio 11).

Para concluir esta sección vamos a dar una interpretación geométrica de la curvatura gaussiana en términos de la aplicación de Gauss $N: S \rightarrow S^2$. Realmente, así fue como el propio Gauss introdujo esta curvatura.

Para ello, primero necesitamos una definición.

Sean S y \tilde{S} dos superficies regulares orientadas. Sea $\varphi: S \rightarrow \tilde{S}$ una aplicación diferenciable y admitamos que para algún $p \in S$, $d\varphi_p$ es no singular. Decimos que φ preserva la orientación en p si dada una base positiva $\{w_1, w_2\}$ en $T_p(S)$, entonces $\{d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2)\}$ es una base positiva de $T_{\varphi(p)}(\tilde{S})$. Si $\{d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2)\}$ no es una base positiva, decimos que φ invierte la orientación en p .

Ahora observamos que tanto S como la esfera unidad S^2 están sumergidas en \mathbb{R}^3 . Por tanto, una orientación N sobre S induce una orientación N en S^2 . Sea $p \in S$ tal que dN_p es no singular. Ya que para una base $\{w_1, w_2\}$ en $T_p(S)$,

$$dN_p(w_1) \wedge dN_p(w_2) = \det(dN_p)(w_1 \wedge w_2) = Kw_1 \wedge w_2,$$

la aplicación de Gauss N preservará la orientación en $p \in S$ si $K(p) > 0$ e invertirá la orientación en $p \in S$ si $K(p) < 0$. Intuitivamente, esto significa lo siguiente (fig. 3.21):

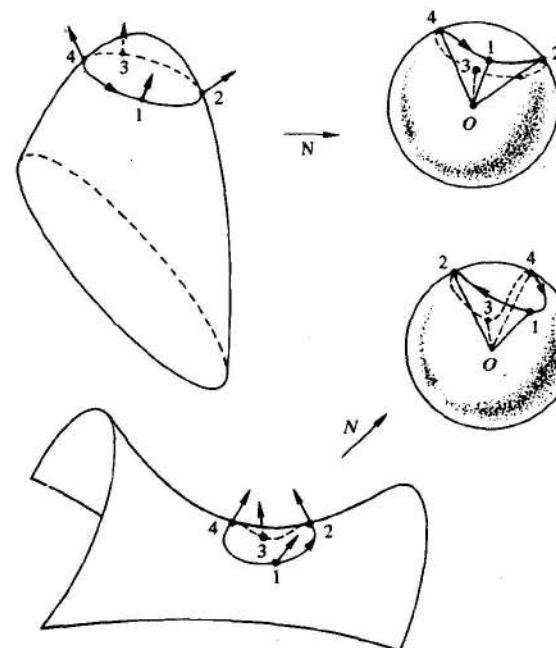


Figura 3-21. La aplicación de Gauss preserva la orientación en un punto elíptico e invierte la orientación en un punto hiperbólico.

una orientación de $T_p(S)$ induce una orientación en curvas cerradas suficientemente pequeñas alrededor de p ; la imagen por N de estas curvas tendrá la misma orientación o la opuesta de la original, dependiendo de si el punto p es un punto elíptico o hiperbólico, respectivamente.

Para tener en cuenta este hecho adoptaremos la convención que consiste en decir que el área de una región contenida en un entorno conexo V , donde $K \neq 0$, y el área de su imagen mediante N tienen el mismo signo si $K > 0$ en V y signos opuestos si $K < 0$ en V (como V es conexo, K no cambia de signo en V).

Ahora podemos enunciar la interpretación geométrica prometida de la curvatura gaussiana K , para $K \neq 0$.

PROPOSICION 2. *Sea p un punto de una superficie S tal que la curvatura gaussiana $K(p) \neq 0$ y sea V un entorno conexo de p donde K no cambia de signo. Entonces*

$$K(p) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A},$$

donde A es el área de una región $B \subset V$ que contiene a p , A' es el área de la imagen de B por la aplicación de Gauss $N: S \rightarrow S^2$, y el límite se toma sobre una sucesión de regiones B_n que converge a p , en el sentido de que cualquier bola centrada en p contiene a todas las B_n , para n suficientemente grande.

Demostración. El área A de B viene dada por (cf. la sec. 2.5)

$$A = \iint_R |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| du dv,$$

donde $\mathbf{x}(u, v)$ es una parametrización en p , cuyo entorno coordenado contiene a V (se puede admitir que V es suficientemente pequeño) y R es la región del plano uv correspondiente a B . El área A' de $N(B)$ es

$$A' = \iint_R |N_u \wedge N_v| du dv.$$

Usando la ecuación (1), la definición de K y la convención precedente, podemos escribir

$$A' = \iint_R K |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| du dv.$$

Tomando límites y denotando también por R al área de la región R , obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A} &= \lim_{R \rightarrow 0} \frac{A'/R}{A/R} = \frac{\lim_{R \rightarrow 0} (1/R) \iint_R K |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| du dv}{\lim_{R \rightarrow 0} (1/R) \iint_R |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| du dv} = \\ &= \frac{K |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|} = K \end{aligned}$$

(nótese que hemos utilizado el teorema del valor medio para integrales dobles) y esto prueba la proposición. Q.E.D.

Observación. Comparando la proposición con la expresión de la curvatura

$$k = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sigma}{s}$$

de una curva plana C en p (aquí s es longitud de arco de un pequeño segmento de C que contiene a p y σ es la longitud de arco de su imagen mediante la indicatriz de tangentes; cf. el ejercicio 3 de la sec. 1.5), vemos que la curvatura gaussiana K es lo análogo, para superficies, de la curvatura k para curvas planas.

EJERCICIOS

1. Demostrar que en el origen $(0, 0, 0)$ del hiperbolóide $z = axy$ tenemos que $K = -a^2$ y $H = 0$.
2. Determinar las curvas asintóticas y las líneas de curvatura del helicóide $x = v \cos u$, $y = v \sin u$, $z = cu$ y demuéstrese que su curvatura media es cero.
3. Determínense las curvas asintóticas del catenoide

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v).$$

4. Determínense las curvas asintóticas y las líneas de curvatura de $z = xy$.
5. Considérese la superficie parametrizada (superficie de Enneper)

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right)$$

y demuéstrese que

- a. Los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$E = G = (1 + u^2 + v^2)^2, \quad F = 0.$$

- b. Los coeficientes de la segunda forma fundamental son

$$e = 2, \quad g = -2, \quad f = 0.$$

- c. Las curvaturas principales son

$$k_1 = \frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2}, \quad k_2 = -\frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2}.$$

- d. Las líneas de curvatura son las curvas coordenadas.
e. Las curvas asintóticas son $u + v = \text{const.}$, $u - v = \text{const.}$

6. Una superficie con $K = -1$: la seudoesfera.

- Determinar una ecuación para la curva plana C , la cual es tal que el segmento de la recta tangente entre el punto de tangencia y alguna recta r del plano, que no corta a la curva, tiene longitud constantemente igual a 1 (esta curva se denomina la *tractriz*; véase la fig. 1-9).
- Rótese la tractriz C alrededor de la recta r ; determinense si la «superficie» de revolución así obtenida (la *seudoesfera*; véase la fig. 3-22) es regular y hállese una parametrización en un entorno de un punto regular.
- Demuéstrese que la curvatura gaussiana de cualquier punto regular de la seudoesfera es -1 .

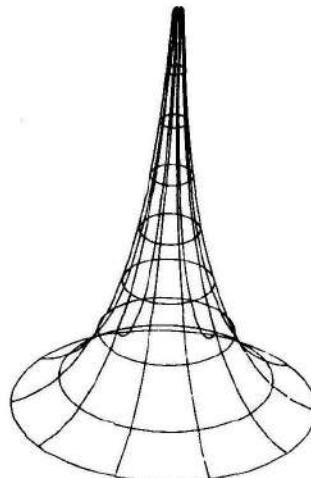


Figura 3-22. La seudoesfera.

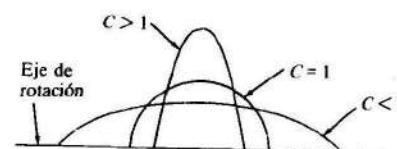


Figura 3-23

- Superficies de revolución con curvatura constante. Se da la superficie de revolución $(\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, \psi(v))$ con curvatura gaussiana K constante. Para determinar las funciones φ y ψ , elijase el parámetro v de forma que $(\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1$; esto significa, geométricamente, que v es la longitud de arco de la curva generatriz $(\varphi(v), \psi(v))$. Demóstrase que

- φ satisface $\varphi'' + K\varphi = 0$ y ψ viene dada por $\psi = \int \sqrt{1 - (\varphi')^2} dv$; así, $0 < u < 2\pi$ y el dominio de v se toma de forma que la última integral tenga sentido.
- Todas las superficies de revolución con curvatura constante $K = 1$ que intersectan perpendicularmente al plano xOy vienen dadas por

$$\varphi(v) = C \cos v, \quad \psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - C^2 \sin^2 v} dv,$$

donde C es una constante ($C = \varphi(0)$). Determinese el dominio de v y trácese un boceto a grandes rasgos del perfil de la superficie en el plano xz para los casos $C = 1$, $C > 1$, $C < 1$. Obsérvese que $C = 1$ da lugar a una esfera (fig. 3-23).

- Todas las superficies de revolución con curvatura constante $K = -1$ pueden expresarse por uno de los tipos siguientes

- $\varphi(v) = C \cosh v$,

$$\psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - C^2 \sinh^2 v} dv.$$

- $\varphi(v) = C \sinh v$,

$$\psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - C^2 \cosh^2 v} dv.$$

- $\varphi(v) = e^v$,

$$\psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - e^{2v}} dv.$$

Determine el dominio de v y trácese un boceto a grandes rasgos del perfil de la superficie en el plano xz .

- La superficie del tipo 3 en la parte c es la seudoesfera del ejercicio 6.
- Las únicas superficies de revolución con $K = 0$ son el cilindro circular recto, el cono circular recto y el plano.

- Contacto entre superficies de orden ≥ 2 . Dos superficies S y \tilde{S} , con un punto en común p , tienen un *contacto de orden ≥ 2* en p si existen dos parametrizaciones $\mathbf{x}(u, v)$ y $\tilde{\mathbf{x}}(u, v)$ en p de S y \tilde{S} , respectivamente, tales que

$$\mathbf{x}_u = \tilde{\mathbf{x}}_u, \quad \mathbf{x}_v = \tilde{\mathbf{x}}_v, \quad \mathbf{x}_{uu} = \tilde{\mathbf{x}}_{uu}, \quad \mathbf{x}_{uv} = \tilde{\mathbf{x}}_{uv}, \quad \mathbf{x}_{vv} = \tilde{\mathbf{x}}_{vv}$$

en p . Demuéstrese los siguientes:

- Sean S y \tilde{S} superficies con un contacto de orden ≥ 2 en p ; sean $\mathbf{x}: U \rightarrow S$ y $\tilde{\mathbf{x}}: U \rightarrow \tilde{S}$ parametrizaciones arbitrarias en p de S y \tilde{S} , respectivamente; y sea $f: V \subset R^3 \rightarrow R$ una función diferenciable en un entorno V de p en R^3 . Entonces las derivadas parciales de orden ≤ 2 de $f \circ \tilde{\mathbf{x}}: U \rightarrow R$ son cero en $\tilde{\mathbf{x}}^{-1}(p)$ si y sólo si las derivadas parciales de orden ≤ 2 de $f \circ \mathbf{x}: U \rightarrow R$ son cero en $\mathbf{x}^{-1}(p)$.

- Sean S y \tilde{S} superficies con un contacto de orden ≥ 2 en p . Sean $z = f(x, y)$, $z = \tilde{f}(x, y)$ las ecuaciones, en un entorno de p , de S y \tilde{S} , respectivamente, donde el plano xy es el plano tangente común en $p = (0, 0)$. Entonces la función $f(x, y) - \tilde{f}(x, y)$ tiene todas sus derivadas parciales de orden ≤ 2 , en $(0, 0)$, iguales a cero.

- Sea p un punto de una superficie $S \subset R^3$. Sea $Oxyz$ un sistema de coordenadas cartesianas para R^3 tal que $O = p$ y el plano xy es el plano tangente a S en p . Demuéstrese que el paraboloido

$$z = \frac{1}{2}(x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy}),$$

obtenido al despreciar los términos de orden mayor o igual al tercero en el desarrollo de Taylor en $p = (0, 0)$, tiene un contacto de orden ≥ 2 en p con S ; la superficie se denomina el *paraboloido osculador* de S en p .

- Si un paraboloido (incluyendo los casos degenerados del plano y del cilindro parabólico) tiene un contacto de orden ≥ 2 con una superficie S en p , entonces dicho paraboloido es el paraboloido osculador de S en p .

- Si dos superficies tienen un contacto de orden ≥ 2 en p , entonces los paraboloides osculadores de S y \tilde{S} en p coinciden. Conclúyase que las curvaturas gaussiana y media de S y \tilde{S} en p son iguales.

- f. La noción de contacto de orden ≥ 2 es invariante frente a difeomorfismos de R^3 ; es decir, si S y \tilde{S} tienen un contacto de orden ≥ 2 en p y $\varphi: R^3 \rightarrow R^3$ es un difeomorfismo, entonces $\varphi(S)$ y $\varphi(\tilde{S})$ tienen un contacto de orden ≥ 2 en $\varphi(p)$.
- g. Si S y \tilde{S} tienen un contacto de orden ≥ 2 en p , entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{d}{r^2} = 0,$$

donde d es la longitud del segmento generado por las superficies, al cortar una recta perpendicular a $T_p(S) = T_p(\tilde{S})$ la cual se halla a una distancia r de p .

9. **Contacto de curvas.** Defínase el contacto de orden $\geq n$ (n un entero ≥ 1) para curvas regulares en R^3 con un punto en común p y demuéstrese que

- a. La noción de contacto de orden $\geq n$ es invariante frente a difeomorfismos.
b. Dos curvas tienen un contacto de orden ≥ 1 en p si y solamente si son tangentes en p .

10. **Contacto entre curvas y superficies.** Una curva C y una superficie S , que comparten un punto p , tienen un contacto de orden $\geq n$ (n un entero ≥ 1) en p si existe una curva $\hat{C} \subset S$ que pasa por p tal que C y \hat{C} tienen un contacto de orden $\geq n$ en p . Demuéstrese que:

- a. Si $f(x, y, z) = 0$ es una representación de S en un entorno de p y $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es una parametrización de C en p , con $\alpha(0) = p$, entonces C y S tienen un contacto de orden $\geq n$ en p si y sólo si

$$f(x(0), y(0), z(0)) = 0, \quad \frac{df}{dt} = 0, \dots, \frac{d^n f}{dt^n} = 0,$$

donde las derivadas están evaluadas en $t = 0$.

- b. Si un plano tiene un contacto de orden ≥ 2 con una curva C en p , entonces éste es su plano osculador en p .
c. Si una esfera tiene un contacto de orden ≥ 3 con una curva C en p y $\alpha(s)$ es una parametrización por la longitud de arco de esta curva, con $\alpha(0) = p$, entonces el centro de la esfera viene dado por

$$\alpha(0) + \frac{1}{k}n + \frac{k'}{k^2\tau}b.$$

Tal esfera se denomina la *esfera osculatrix* de C en p .

11. Considérese la silla de mono S del ejemplo 2. Construir la indicatriz de Dupin en $p = (0, 0, 0)$ usando la definición de la sec. 3.2 y comparar ésta con la curva obtenida al intersecciar S con un plano paralelo a $T_p(S)$, próximo a p . ¿Por qué no son «aproximadamente similares»? (cf. el ejemplo 5 de la sec. 3.3). Repasar el argumento del ejemplo 5 de la sec. 3.3 y señalar dónde no sería correcto al aplicarlo al presente ejemplo.

12. Considérese la superficie parametrizada

$$\mathbf{x}(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u + \log \tan \frac{u}{2} + \varphi(v)),$$

donde φ es una función diferenciable. Demostrar que

- a. Las curvas $v = \text{const.}$ están contenidas en planos que pasan por el eje z y cortan a la superficie bajo un ángulo constante θ dado por

$$\cos \theta = \frac{\varphi'}{\sqrt{1 + (\varphi')^2}}.$$

Concluir que las curvas $v = \text{const.}$ son líneas de curvatura de la superficie.

- b. La longitud del segmento de una recta tangente a una curva $v = \text{const.}$, determinado por el punto de tangencia y el eje z , es constantemente igual a 1. Concluir que las curvas $v = \text{const.}$ son tractrices (cf. el ejercicio 6).

13. Sea $F: R^3 \rightarrow R^3$ la aplicación (una homotecia) definida por $F(p) = cp$, $p \in R^3$, c una constante positiva. Sea $S \subset R^3$ una superficie regular y definamos $F(S) = \tilde{S}$. Demuéstrese que \tilde{S} es una superficie regular y háganse las fórmulas que relacionan las curvaturas gaussiana y media, K y H , de S con las curvaturas gaussiana y media, \tilde{K} y \tilde{H} , de \tilde{S} .
14. Considérese la superficie que se obtiene al rotar la curva $y = x^3$, $-1 < x < 1$, alrededor de la recta $x = 1$. Demostrar que los puntos obtenidos al rotar el origen $(0, 0)$ de la curva son puntos planos de la superficie.

- *15. Désese un ejemplo de superficie con un punto parabólico aislado p (es decir, existe un entorno de p donde no hay otros puntos parabólicos).

- *16. Demostrar que una superficie compacta (es decir, cerrada y acotada en R^3) tiene un punto elíptico.

17. Definir la curvatura gaussiana para una superficie no orientable. ¿Podría usted definir la curvatura media para una superficie no orientable?

18. Demostrar que la banda de Möbius de la fig. 3-1 puede parametrizarse por

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(\left(2 - v \operatorname{sen} \frac{u}{2} \right) \operatorname{sen} u, \left(2 - v \operatorname{sen} \frac{u}{2} \right) \cos u, v \cos \frac{u}{2} \right)$$

y que su curvatura gaussiana es

$$K = -\frac{1}{\{ \frac{1}{4}v^2 + (2 - v \operatorname{sen}(u/2))^2 \}^2}.$$

- *19. Obténganse las curvas asintóticas del hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

- *20. Determinar los puntos umbílicos del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

- *21. Sea S una superficie con orientación N . Sea $V \subset S$ un conjunto abierto en S y sea $f: V \subset S \rightarrow R$ cualquier función diferenciable que nunca se anula en V . Sean v_1 y v_2 dos campos diferenciables (tangentes) en V tal que en cada punto de V , v_1 y v_2 son ortonormales y $v_1 \wedge v_2 = N$.

- a. Demostrar que la curvatura gaussiana K de V viene dada por

$$K = \frac{\langle d(fN)(v_1) \wedge d(fN)(v_2), fN \rangle}{f^3}.$$

Como se ilustra en la parte b, la ventaja de esta fórmula consiste en que a menudo podemos simplificar el cálculo de K , mediante una elección hábil de f .

- b. Aplicar el resultado precedente para demostrar que si f es la restricción de

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

al elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

entonces la curvatura gaussiana del elipsoide es

$$K = \frac{1}{a^2 b^2 c^2}.$$

22. *El hessiano.* Sea $h: S \rightarrow R$ una función diferenciable sobre una superficie S y sea $p \in S$ un punto crítico de h (es decir, $dh_p = 0$). Sea $w \in T_p(S)$ y sea

$$\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$$

una curva parametrizada con $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w$. Defínase

$$H_p h(w) = \left. \frac{d^2(h \circ \alpha)}{dt^2} \right|_{t=0}$$

- a. Sea $x: U \rightarrow S$ una parametrización de S en p , demostrar que (aquí es esencial el hecho de que p sea un punto crítico de h)

$$H_p h(u' \hat{x}_u + v' \hat{x}_v) = h_{uu}(p)(u')^2 + 2h_{uv}(p)u'v' + h_{vv}(p)(v')^2.$$

Concluir que $H_p h: T_p(S) \rightarrow R$ es una forma cuadrática bien definida (es decir, no depende de la elección de x) sobre $T_p(S)$. $H_p h$ se denomina el *hessiano* de h en p .

- b. Sea $h: S \rightarrow R$ la función altura de S con respecto a $T_p(S)$; es decir, $h(q) = \langle q - p, N(p) \rangle$, $q \in S$. Verificar que p es un punto crítico de h y, por tanto, que el hessiano $H_p h$ está bien definido. Demostrar que si $w \in T_p(S)$, $|w| = 1$, entonces

$$H_p h(w) = \text{la curvatura normal en } p \text{ en la dirección } w.$$

Conclúyase que el *hessiano en p de la función altura con respecto a $T_p(S)$* es la segunda forma fundamental de S en p .

23. *Funciones de Morse sobre superficies.* Un punto crítico $p \in S$ de una función diferenciable $h: S \rightarrow R$ es *no degenerado* si la aplicación lineal autoadjunta $A_p h$ asociada a la forma cuadrática $H_p h$ (cf. el apéndice al cap. 3) es no singular (aquí $H_p h$ es el hessiano de h en p ; cf. el ejercicio 22). En otro caso, p es un punto crítico *degenerado*. Una función diferenciable en S es una *función de Morse* si todos sus puntos críticos son no degenerados. Sea $h_r: S \subset R^3 \rightarrow R$ la función distancia de S a r ; es decir,

$$h_r(q) = \sqrt{\langle q - r, q - r \rangle}, \quad q \in S, \quad r \in R^3, \quad r \notin S.$$

- a. Demostrar que $p \in S$ es un punto crítico de h_r , si y sólo si la recta pr es perpendicular a S en p .
b. Sea p un punto crítico de $h_r: S \rightarrow R$. Sea $w \in T_p(S)$, $|w| = 1$ y sea $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una curva parametrizada por la longitud de arco con $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w$. Demostrar que

$$H_p h_r(w) = \frac{1}{h_r(p)} - k_n$$

donde k_n es la curvatura normal en p a lo largo de la dirección de w . Concluir que la base ortonormal $\{e_1, e_2\}$, donde e_1 y e_2 son paralelos a las direcciones principales de $T_p(S)$, diagonaliza a la aplicación lineal autoadjunta $A_p h_r$. Conclúyase además que p es un punto crítico degenerado de h_r , si y sólo si o bien $h_r(p) = 1/k_1$ o bien $h_r(p) = 1/k_2$, donde k_1 y k_2 son las curvaturas principales en p .

- c. Demostrar que el conjunto

$$B = \{r \in R^3; h_r \text{ es una función de Morse}\}$$

es un conjunto abierto y denso en R^3 ; donde denso en R^3 significa que en cada entorno de un punto dado de R^3 existe un punto de B ; esto demuestra que en cualquier superficie regular hay «muchas» funciones de Morse.

24. *Convexidad local y curvatura.* Una superficie $S \subset R^3$ es *localmente convexa* en un punto $p \in S$ si existe un entorno $V \subset S$ de p tal que V está contenido en uno de los semiespacios cerrados determinados por $T_p(S)$ en R^3 . Si, además, V tiene un solo punto en común con $T_p(S)$, entonces se dice que S es *estrictamente localmente convexa* en p .

- a. Demostrar que S es estrictamente localmente convexa en p si las curvaturas principales de S en p son no nulas y del mismo signo (es decir, la curvatura gaussiana $K(p)$ satisface $K(p) > 0$).
b. Demuéstrese que si S es localmente convexa en p , entonces las curvaturas principales de S en p no tienen signos diferentes (así, $K(p) \geq 0$).
c. Para probar que $K \geq 0$ no implica convexidad local, considérese la superficie $f(x, y) = x^3(1 + y^2)$, definida en el conjunto abierto $U = \{(x, y) = x^3(1 + y^2); x \neq 0\}$, definida en el conjunto abierto $U = \{(x, y) \in R^2; y^2 < 1/2\}$. Probar que la curvatura gaussiana de esta superficie es no negativa en U y que, aún así, la superficie no es localmente convexa en $(0, 0) \in U$ (un profundo teorema, debido a R. Sacksteder, implica que un ejemplo como el precedente no puede extenderse a la totalidad de R^2 si insistimos en mantener la condición de curvatura no negativa; cf. la Observación 3 de la sec. 5.6).
*d. El ejemplo de la parte c es también muy especial en el siguiente sentido local. Sea p un punto de una superficie S y admitamos que existe un entorno $V \subset S$ de p tal que las curvaturas principales en V no tienen signos diferentes (esto no sucede en el ejemplo de la parte c). Probar que S es localmente convexa en p .

3.4. Campos vectoriales²

En esta sección utilizaremos los teoremas fundamentales de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias (existencia, unicidad y dependencia continua con respecto a los datos iniciales) para demostrar la existencia de ciertos sistemas de coordenadas sobre superficies.

Si el lector está dispuesto a admitir los resultados de los corolarios 2, 3 y 4 al final de esta sección (los cuales pueden entenderse sin leer la sección), esta materia se puede omitir en una primera lectura.

Vamos a comenzar con una presentación geométrica de la materia de ecuaciones diferenciales que tenemos intención de utilizar.

Un *campo vectorial* en un conjunto abierto $U \subset R^2$ es una aplicación que asigna a cada $q \in U$ un vector $w(q) \in R^2$. Se dice que el campo vectorial w es *diferenciable* si

² Esta sección se puede omitir en una primera lectura.

escribiendo $q = (x, y)$ y $w(q) = (s(x, y), b(x, y))$, las funciones a y b son funciones diferenciables en U .

Geométricamente, la definición se corresponde con el hecho de asociar a cada punto $(x, y) \in U$ un vector de coordenadas $a(x, y)$ y $b(x, y)$ las cuales varían diferenciablemente con (x, y) (fig. 3-24).

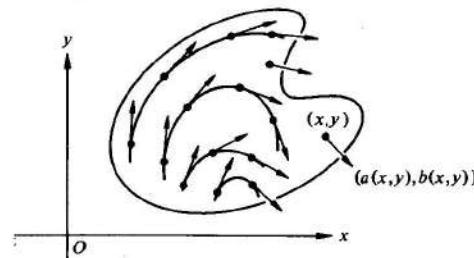


Figura 3-24

En lo que sigue únicamente consideraremos campos vectoriales diferenciables.

La fig. 3-25 muestra algunos ejemplos de campos vectoriales.

Dado un campo vectorial w , es natural preguntarse si existe una *trayectoria* para este campo, es decir, si existe una curva parametrizada diferenciable $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, tal que $\alpha'(t) = w(\alpha(t))$.

Por ejemplo, una trayectoria, que pasa por el punto (x_0, y_0) del campo vectorial $w(x, y) = (x, -y)$ es la recta $\alpha(t) = (x_0 e^t, y_0 e^t)$, $t \in R$, y una trayectoria de $w(x, y) = (y, -x)$ que pasa por el punto (x_0, y_0) , es el círculo $\beta(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $t \in R$, $r^2 = x_0^2 + y_0^2$.

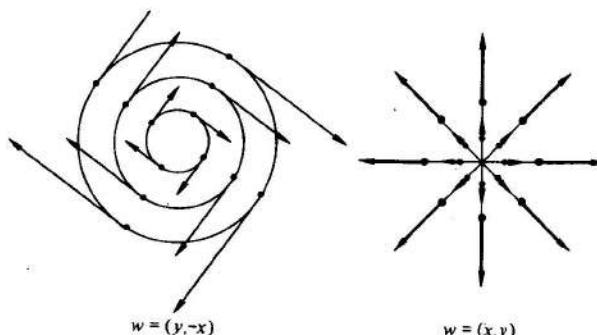


Figura 3-25

En el lenguaje de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, se dice que el campo vectorial w determina el sistema de *ecuaciones diferenciales*,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= b(x, y), \end{aligned} \tag{1}$$

y que una trayectoria de w es una solución de la ecuación (1).

El teorema fundamental de existencia (local) y unicidad de soluciones para la ec. (1) es equivalente al siguiente resultado sobre trayectorias; en lo que sigue, las letras I y J representarán intervalos abiertos de la recta real R , que contienen al origen $0 \in R$.

TEOREMA 1. Sea w un campo vectorial en un conjunto abierto $U \subset R^2$. Dado $p \in U$, existe una trayectoria $\alpha: I \rightarrow U$, es decir, $\alpha'(t) = w(\alpha(t))$, $t \in I$ con $\alpha(0) = p$. Esta trayectoria es única en el sentido siguiente: cualquier otra trayectoria $\beta: J \rightarrow U$ con $\beta(0) = p$ coincide con α en $I \cap J$.

Un complemento importante al teorema 1 es el hecho de que la trayectoria que pasa por p «varía diferenciablemente con respecto a p ». Esta idea puede precisarse como sigue.

TEOREMA 2. Sea w un campo vectorial en un conjunto abierto $U \subset R^2$. Para cada $p \in U$ existe un entorno $V \subset U$ de p , un intervalo I y una aplicación $\alpha: V \times I \rightarrow U$ tal que

1. Para $q \in V$ fijo, la curva $\alpha(q, t)$, $t \in I$, es la trayectoria de w que pasa por q ; es decir,

$$\alpha(q, 0) = q, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t}(q, t) = w(\alpha(q, t)).$$

2. α es diferenciable.

El teorema 2 significa geométricamente que todas las trayectorias que pasan, para $t = 0$, por un cierto entorno V de p pueden «agruparse» en una sola aplicación diferenciable. Es éste el sentido en el que decimos que las trayectorias dependen diferenciablemente con respecto a p (fig. 3-26).

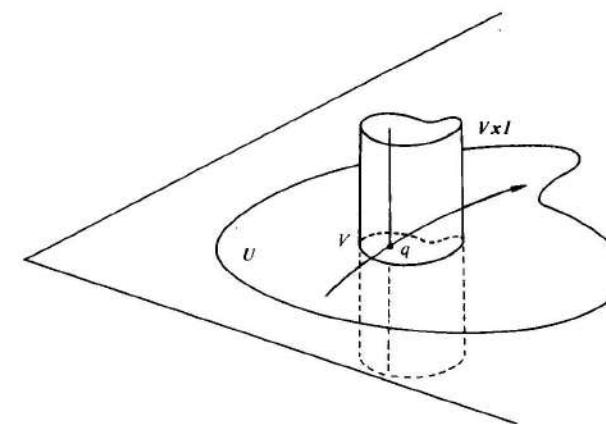


Figura 3-26

La aplicación α se denomina el *flujo (local)* de w en p .

En este libro admitiremos los teoremas 1 y 2; para encontrar una demostración puede consultarse, por ejemplo, W. Hurewicz, *Lectures on Ordinary Differential Equations*, M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1958, cap. 2. Para nuestros propósitos, necesitamos la siguiente consecuencia de estos teoremas.

LEMA. Sea w un campo vectorial en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y sea $p \in U$ tal que $w(p) \neq 0$. Entonces existe un entorno $W \subset U$ de p y una función diferenciable $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f es constante a lo largo de cada trayectoria de w y $df_q \neq 0$ para todo $q \in W$.

Demostración. Elijamos un sistema de coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^2 tal que $p = (0, 0)$ y $w(p)$ apunte en la dirección del eje x . Sea $\alpha: V \times I \rightarrow U$ el flujo local en p , $V \subset U$, $t \in I$ y sea $\tilde{\alpha}$ la restricción de α al rectángulo.

$$(V \times I) \cap \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3; x = 0\}.$$

Véase la fig. 3-27. Por la definición de flujo local, $d\tilde{\alpha}_p$ aplica el vector unitario del eje t en w y aplica el vector unitario del eje y en sí mismo. Por tanto, $d\tilde{\alpha}_p$ es no singular. Se deduce entonces que existe un entorno $W \subset U$ de p , donde $\tilde{\alpha}^{-1}$ está definida y es diferenciable. La proyección de $\tilde{\alpha}^{-1}(x, y)$ sobre el eje y es una función diferenciable $\xi = f(x, y)$ que toma el mismo valor ξ sobre todos los puntos de la trayectoria que pasa por $(0, \xi)$. Como $d\tilde{\alpha}_p$ es no singular, puede tomarse W lo suficientemente pequeño como para que $df_q \neq 0$ para todo $q \in W$. Por tanto, f es la función requerida.

Q.E.D.

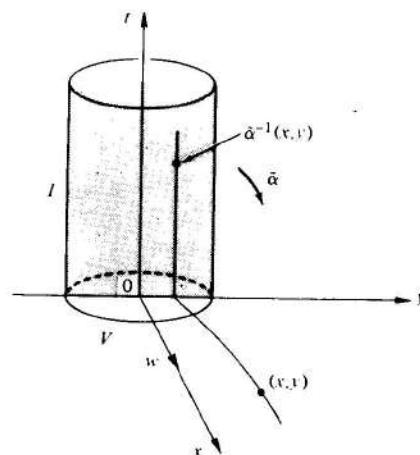


Figura 3-27

La función f del lema precedente se denomina una *integral primera* (local) de w en un entorno de p . Por ejemplo, si $w = (y, -x)$ está definido en \mathbb{R}^2 , una integral primera $f: \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ es $f(x, y) = x^2 + y^2$.

El concepto de campo de direcciones está estrechamente ligado al de campo vectorial.

Un *campo de direcciones* r en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ es una correspondencia que asigna a cada $p \in U$ una recta $r(p)$ en \mathbb{R}^2 que pasa por p . Se dice que r es *diferenciable* en $p \in U$ si existe un campo vectorial diferenciable y no nulo w , definido en un entorno $V \subset U$ de p , tal que para cada $q \in V$, $w(q) \neq 0$ es una *base* de $r(q)$; r es *diferenciable* en U si es diferenciable para cada $p \in U$.

A cada campo vectorial diferenciable y no nulo w en $U \subset \mathbb{R}^2$ le corresponde un campo de direcciones dado por $r(p) =$ recta generada por $w(p)$, $p \in U$.

Por la propia definición, cada campo diferenciable de direcciones da lugar, localmente, a un campo vectorial diferenciable y no nulo. Sin embargo, esto no es cierto globalmente, como se pone de manifiesto mediante el campo de direcciones en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ dado por las rectas tangentes a las curvas de la fig. 3-28; cualquier intento de orientar estas curvas a fin de obtener un campo vectorial diferenciable no nulo conduce a una contradicción.

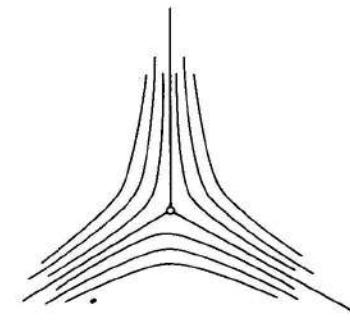


Figura 3-28. Un campo de direcciones no orientable en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Una curva regular conexa $C \subset U$ es una *curva integral* de un campo de direcciones r , definido en $U \subset \mathbb{R}^2$, si $r(q)$ es la recta tangente a C en q para todo $q \in C$.

Por lo que se ha visto previamente, resulta claro que dado un campo diferenciable de direcciones r en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, por cada $q \in U$ pasa una curva integral C de r ; C coincide localmente con la traza de la trayectoria que pasa por q del campo vectorial determinado en U por r . En lo que sigue, únicamente consideraremos campos diferenciables de direcciones y, en general, se omitirá la palabra diferenciable.

Una manera natural de describir un campo de direcciones es como sigue. Decimos que dos vectores no nulos w_1 y w_2 en $q \in \mathbb{R}^2$ son equivalentes si $w_1 = \lambda w_2$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Dos vectores como éstos representan la misma recta que pasa por q , y recíprocamente, si dos vectores no nulos pertenecen a la misma recta que pasa por q , entonces son equivalentes. Así, un campo de direcciones r en un conjunto abierto

$U \subset R^2$ puede ser definido al asignar a cada $q \in U$ un par de números reales (r_1, r_2) , las coordenadas de un vector perteneciente a r , donde consideramos como equivalentes a los pares (r_1, r_2) y $(\lambda r_1, \lambda r_2)$, $\lambda \neq 0$.

En el lenguaje de las ecuaciones diferenciales, un campo de direcciones viene dado usualmente por

$$a(x, y) \frac{dx}{dt} + b(x, y) \frac{dy}{dt} = 0, \quad (2)$$

lo cual significa simplemente que a un punto $q = (x, y)$ le asociamos la recta que pasa por q y contiene al vector $(b, -a)$ o a cualquiera de sus múltiplos no nulos (fig. 3-29).

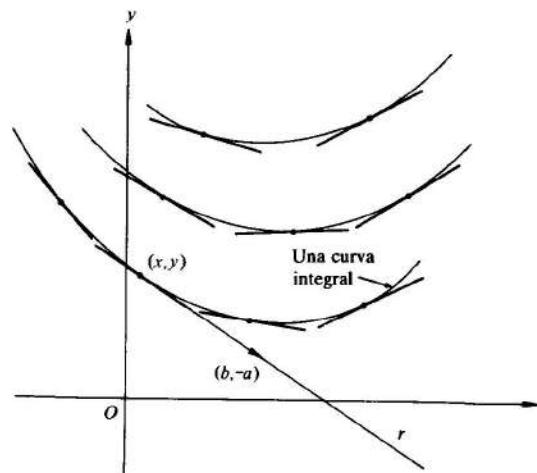


Figura 3-29. La ecuación diferencial $a dx + b dy = 0$.

La traza de la trayectoria del campo vectorial $(b, -a)$ es una curva integral de r . Como las parametrizaciones no desempeñan papel alguno en las consideraciones precedentes, en vez de la ec. (2), es de uso frecuente la expresión

$$a dx + b dy = 0$$

con el mismo significado que antes.

Las ideas que acabamos de introducir pertenecen al dominio de los resultados locales de R^2 , que a su vez dependen solamente de la «estructura diferenciable» de R^2 . Por lo tanto, pueden transportarse a una superficie regular sin dificultades adicionales, como sigue.

DEFINICION 1. Un campo vectorial w en un conjunto abierto $U \subset S$ de una superficie regular S es una correspondencia que asigna a cada $p \in U$ un vector $w(p) \in T_p(S)$. El campo vectorial w es diferenciable en $p \in U$ si, para alguna parametrización $x(u, v)$ en p , las funciones $a(u, v)$ y $b(u, v)$ dadas por

$$w(p) = a(u, v)x_u + b(u, v)x_v$$

son funciones diferenciables en p ; resulta claro que esta definición no depende de la elección de x .

Análogamente, podemos definir trayectorias, campo de direcciones y curvas integrales. Los teoremas 1 y 2 y el lema precedente se extienden fácilmente a la presente situación; salvo el cambio de R^2 por S , los enunciados son exactamente los mismos.

Ejemplo 1. En el toro usual T , se obtiene un campo vectorial parametrizando los meridianos de T mediante la longitud de arco y definiendo $w(p)$ como el vector velocidad del meridiano que pasa por p (fig. 3-30). Nótese que $|w(p)| = 1$ para todo $p \in T$. Se deja como ejercicio (ejercicio 2) verificar que w es diferenciable.

Ejemplo 2. Un procedimiento similar, esta vez sobre la esfera S^2 y utilizando los semimeridianos de S^2 , da lugar a un campo vectorial definido en la esfera menos los dos polos N y S . Para obtener un campo vectorial definido en la totalidad de la esfera, deben reparametrizarse todos los semimeridianos mediante el mismo parámetro t , $-1 < t < 1$, y definir $v(p) = (1 - t^2)w(p)$ para $p \in S^2 - \{N\} \cup \{S\}$ y $v(N) = v(S) = 0$ (fig. 3-31).

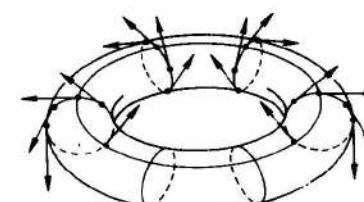


Figura 3-30

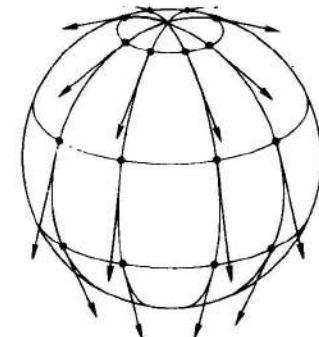


Figura 3-31

Ejemplo 3. Sea $S = \{(x, y, z) \in R^3; z = x^2 - y^2\}$ el paraboloide hiperbólico. La intersección con S de los planos $z = \text{const.} \neq 0$ determina una familia de curvas $\{C_a\}$ tal que, por cada punto de $S - \{(0, 0, 0)\}$, pasa una curva de C_a . Las rectas tangentes a tales curvas generan un campo diferenciable de direcciones r sobre $S - \{(0, 0, 0)\}$. Queremos hallar un campo de direcciones r' sobre $S - \{(0, 0, 0)\}$ que sea ortogonal a r en cada punto y determinar las curvas integrales de r' . Se denomina a r' el campo ortogonal a r , y se llama la familia orthogonal de r a las curvas integrales de r' (cf. el ejercicio 15, sec. 2.5).

Comenzaremos parametrizando S mediante

$$x(u, v) = (u, v, u^2 - v^2), \quad u = x, \quad v = y.$$

La familia $\{C_a\}$ viene dada por $u^2 - v^2 = \text{const.} \neq 0$ (o mejor, por la imagen mediante x de este conjunto). Si $u'x_u + v'x_v$ es un vector tangente de una parametrización regular de alguna curva C_a , al diferenciar $u^2 - v^2 = \text{const.}$ obtenemos,

$$2uu' - 2vv' = 0.$$

Así, $(u', v') = (-v, -u)$. Se tiene entonces que r viene dado, en la parametrización \mathbf{x} , por el par (v, u) o cualquiera de sus múltiplos no nulos.

Sea ahora $(a(u, v), b(u, v))$ una expresión para el campo orthogonal r' , en la parametrización \mathbf{x} . Como

$$E = 1 + 4u^2, \quad F = -4uv, \quad G = 1 + 4v^2,$$

y r' es ortogonal a r en cada punto, tenemos

$$Eav + F(bv + au) + Gbu = 0$$

o

$$(1 + 4u^2)av - 4uv(bv + au) + (1 + 4v^2)bu = 0.$$

Se deduce entonces que

$$va + ub = 0. \quad (3)$$

Esto determina, salvo múltiplos no nulos, el par (a, b) y, por tanto, el campo r' .

Para hallar las curvas integrales de r' , sea $u'x_u + v'x_v$ un vector tangente de alguna parametrización regular de una curva integral de r' . Entonces (u', v') satisface la ecuación (3), es decir,

$$vu' + uv' = 0$$

o

$$uv = \text{const.}$$

Se deduce entonces que la familia orthogonal de $\{C_a\}$ viene dada por las intersecciones con S de los cilindros hiperbólicos $xy = \text{const.} \neq 0$.

El resultado principal de esta sección es el siguiente teorema.

TEOREMA. Sean w_1 y w_2 dos campos vectoriales en un conjunto abierto $U \subset S$, que son linealmente independientes en algún punto $p \in U$. Es posible entonces parametrizar un entorno $V \subset U$ de p de forma que para cada $q \in V$ las curvas coordenadas de esta parametrización que pasan por q son tangentes a las rectas determinadas por $w_1(q)$ y $w_2(q)$.

Demostración. Sea W un entorno de p donde están definidas las integrales primeras f_1 y f_2 de w_1 y w_2 , respectivamente. Defínase la aplicación $\varphi: W \rightarrow R^2$ mediante

$$\varphi(q) = (f_1(q), f_2(q)), \quad q \in W.$$

Como f_1 es constante sobre las trayectorias de w_1 y $(df_1) \neq 0$, en p tenemos

$$d\varphi_p(w_1) = ((df_1)_p(w_1), (df_2)_p(w_1)) = (0, a),$$

donde $a = (df_2)_p(w_1) \neq 0$, puesto que w_1 y w_2 son linealmente independientes. Análogamente,

$$d\varphi_p(w_2) = (b, 0),$$

donde $b = (df_1)_p(w_2) \neq 0$.

Se tiene entonces que $d\varphi_p$ es no singular, por tanto que φ es un difeomorfismo local. Luego existe un entorno $\tilde{U} \subset R^2$ de $\varphi(p)$ el cual se aplica difeomórficamente, mediante $\mathbf{x} = \varphi^{-1}$, sobre un entorno $V = \mathbf{x}(\tilde{U})$ de p ; es decir, \mathbf{x} es una parametrización de S en p , cuyas curvas coordenadas

$$f_1(q) = \text{const.}, \quad f_2(q) = \text{const.},$$

son tangentes en q a las rectas determinadas por $w_1(q)$, $w_2(q)$, respectivamente.

Q.E.D.

Debe resaltarse que el teorema no implica que las curvas coordenadas se puedan parametrizar de forma que sus vectores velocidad sean $w_1(q)$ y $w_2(q)$. Lo establecido en el teorema se aplica a las curvas coordenadas considerándolas como curvas regulares (conjunto de puntos); con precisión, tenemos el

COROLARIO 1. Sean r y r' dos campos de direcciones dados en un conjunto abierto $U \subset S$ tales que en $p \in U$, $r(p) \neq r'(p)$, entonces existe una parametrización \mathbf{x} en un entorno de p tal que las curvas coordenadas de \mathbf{x} son las curvas integrales de r y r' .

Una primera aplicación del teorema precedente es la demostración de la existencia de una parametrización orthogonal en cualquier punto de una superficie regular.

COROLARIO 2. Para todo $p \in S$ existe una parametrización $\mathbf{x}(u, v)$ en un entorno V de p tal que las curvas coordenadas $u = \text{const.}$ y $v = \text{const.}$ se cortan orthogonalmente en cada $q \in V$ (tal parametrización \mathbf{x} se denomina una parametrización orthogonal).

Demostración. Considérese una parametrización arbitraria $\tilde{\mathbf{x}}: \tilde{U} \rightarrow S$ en p y defínanse los dos campos vectoriales $w_1 = \tilde{\mathbf{x}}_u$, $w_2 = -(\tilde{F}/\tilde{E})\tilde{\mathbf{x}}_u + \tilde{\mathbf{x}}_v$ en $\tilde{\mathbf{x}}(\tilde{U})$, donde \tilde{E} , \tilde{F} , \tilde{G} son los coeficientes de la primera forma fundamental en $\tilde{\mathbf{x}}$. Como $w_1(q)$ y $w_2(q)$ son vectores ortogonales para cada $q \in \tilde{\mathbf{x}}(\tilde{U})$, aplicando el teorema se obtiene la parametrización requerida.

Q.E.D.

Una segunda aplicación del teorema (concretamente, del corolario 1) es la existencia de coordenadas deducidas a partir de las direcciones asintóticas y principales.

Como vimos en la sec. 3.3, las curvas asintóticas son soluciones de

$$e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0.$$

En un entorno de un punto hiperbólico p , tenemos que $eg - f^2 < 0$. Rotemos el plano uv de forma que $e(p) > 0$. Entonces el primer miembro de la ecuación precedente se puede escribir como el producto de dos factores lineales distintos, dando lugar a

$$(Au' + Bv')(Au' + Dv') = 0, \quad (4)$$

donde los coeficientes están determinados por

$$A^2 = e, \quad A(B + D) = 2f, \quad BD = g.$$

Puesto que $eg - f^2 < 0$, este sistema de ecuaciones tiene soluciones reales. Así, la ec. (4) da lugar a dos ecuaciones:

$$Au' + Bv' = 0, \quad (4a)$$

$$Au' + Dv' = 0. \quad (4b)$$

Cada una de estas ecuaciones determina un campo diferenciable de direcciones (por ejemplo, la ec. (4a) selecciona la dirección r que contiene al vector no nulo $(B, -A)$) y en cada punto del entorno en cuestión las direcciones dadas por las ecs. (4a) y (4b) son distintas. Aplicando el corolario 1, vemos que es posible parametrizar un entorno de p de forma que las curvas coordenadas son las curvas integrales de las ecs. (4a) y (4b). En otras palabras,

COROLARIO 3. Sea $p \in S$ un punto hiperbólico de S . Es posible entonces parametrizar un entorno de p de forma que las curvas coordenadas de esta parametrización sean las curvas asintóticas de S .

Ejemplo 4. Un ejemplo casi trivial, que sin embargo ilustra los mecanismos del método precedente, lo proporciona el paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$. Como es habitual, parametrizamos totalmente a la superficie mediante

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2).$$

Un simple cálculo muestra que

$$e = \frac{2}{(1 + 4u^2 + 4v^2)^{1/2}}, \quad f = 0, \quad g = -\frac{2}{(1 + 4u^2 + 4v^2)^{1/2}}.$$

Por tanto, la ecuación de las curvas asintóticas puede escribirse en la forma

$$\frac{2}{(1 + 4u^2 + 4v^2)^{1/2}}((u')^2 - (v')^2) = 0,$$

la cual puede factorizarse en dos ecuaciones lineales determinando los dos campos de direcciones:

$$r_1: u' + v' = 0,$$

$$r_2: u' - v' = 0.$$

Las curvas integrales de estos campos de direcciones vienen dadas por las dos familias de curvas:

$$r_1: u + v = \text{const.},$$

$$r_2: u - v = \text{const.}$$

Es claro ahora que las funciones $f_1(u, v) = u + v$, $f_2(u, v) = u - v$ son integrales primarias de los campos vectoriales asociados a r_1 y r_2 , respectivamente. Escribiendo entonces

$$\tilde{u} = u + v, \quad \tilde{v} = u - v,$$

obtenemos una nueva parametrización para la totalidad de la superficie $z = x^2 - y^2$ en la cual las curvas coordenadas son las curvas asintóticas de la superficie.

En este caso particular, el cambio de parámetros es válido para toda la superficie. En general, podría no ser inyectivo globalmente, incluso si la totalidad de la superficie está constituida por puntos hiperbólicos.

Análogamente, en un entorno de un punto no umbílico de S , es posible descomponer la ecuación diferencial de las líneas de curvatura en dos factores lineales distintos. Mediante un argumento similar obtenemos el

COROLARIO 4. Sea $p \in S$ un punto no umbílico de S . Entonces es posible parametrizar un entorno de p de forma que las curvas coordenadas de esta parametrización son las líneas de curvatura de S .

EJERCICIOS

- Demostrar que la diferenciabilidad de un campo vectorial no depende de la elección de un sistema coordenado.
- Demostrar que el campo vectorial que se obtiene en el toro parametrizando todos sus meridianos por la longitud de arco y tomando sus vectores tangentes (ejemplo 1) es diferenciable.
- Demuéstrese que un campo vectorial w definido en una superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ es diferenciable si y sólo si es diferenciable como aplicación $w: S \rightarrow \mathbb{R}^3$.
- Sea S una superficie y $\mathbf{x}: U \rightarrow S$ una parametrización de S . Entonces

$$a(u, v)u' + b(u, v)v' = 0,$$

donde a y b son funciones diferenciables, determina un campo de direcciones r sobre $x(U)$, a saber, la correspondencia que asigna a cada $x(u, v)$ la recta que contiene al vector $bx_u - ax_v$. Demuéstrese que una condición necesaria y suficiente para la existencia de un campo ortogonal r' sobre $x(U)$ (cf. el ejemplo 3) es que las funciones

$$Eb - Fa, \quad Fb - Ga$$

nunca sean simultáneamente nulas (aquí, E, F y G son los coeficientes de la primera forma fundamental en x) y que entonces, r' está determinado por

$$(Eb - Fa)u' + (Fb - Ga)v' = 0.$$

5. Sea S una superficie y $x: U \rightarrow S$ una parametrización de S . Si $ac - b^2 < 0$, demuéstrese que

$$a(u, v)(u')^2 + 2b(u, v)u'v' + c(u, v)(v')^2 = 0$$

puede factorizarse en dos ecuaciones distintas, determinando cada una de ellas un campo de direcciones en $x(U) \subset S$. Demuéstrese que estos dos campos de direcciones son ortogonales si y sólo si

$$Ec - 2Fb + Ga = 0.$$

6. Una recta r corta al eje z y se mueve de forma que hace un ángulo constante $\alpha \neq 0$ con el eje z , describiendo cada uno de sus puntos una hélice de paso $c \neq 0$ alrededor del eje z . La figura que genera r es la traza de la superficie parametrizada (véase la fig. 3-32)

$$x(u, v) = (v \operatorname{sen} \alpha \cos u, v \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} u, \cos \alpha + cu).$$

Es fácil ver que x es una superficie parametrizada regular (cf. el ejercicio 13, sec. 2-5). Restrínjanse los parámetros (u, v) a un conjunto abierto U de forma que $x(U) = S$ sea una superficie regular (cf. la prop. 2, sec. 2.3).

- a. Hallar la familia ortogonal (cf. el ejemplo 3) de la familia de curvas coordenadas $u = \operatorname{const}$.
- b. Utilíicense las curvas $u = \operatorname{const}$. y su familia ortogonal para obtener una parametrización ortogonal de S . Demuéstrese que en los nuevos parámetros (\bar{u}, \bar{v}) los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$\hat{G} = 1, \quad \hat{F} = 0, \quad \hat{E} = \{c^2 + (\bar{v} - c\bar{u} \operatorname{cos} \alpha)^2\} \operatorname{sen}^2 \alpha.$$

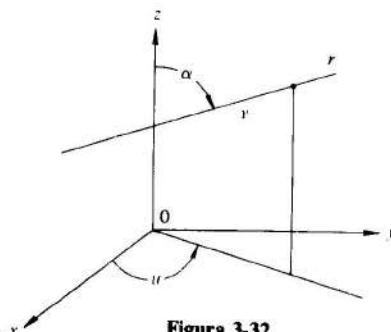


Figura 3-32

7. Definase la derivada $w(f)$ de una función diferenciable $f: U \subset S \rightarrow \mathbb{R}$ con respecto a un campo vectorial w en U mediante

$$w(f)(q) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)|_{t=0}, \quad q \in U,$$

donde $\alpha: I \rightarrow S$ es una curva tal que $\alpha(0) = q$, $\alpha'(0) = w(q)$. Demostrar que

- a. w es diferenciable en U si y sólo si para toda función diferenciable f en U , $w(f)$ es diferenciable.
- b. Sean λ y μ números reales y sea $g: U \subset S \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable sobre U ; entonces

$$w(\lambda f + \mu g) = \lambda w(f) + \mu w(g),$$

$$w(fg) = w(f)g + fw(g).$$

8. Demostrar que si w es un campo vectorial diferenciable sobre una superficie S y $w(p) \neq 0$ para algún $p \in S$, entonces es posible parametrizar un entorno de p mediante $x(u, v)$ de manera que $x_u = w$.

9. a. Sea $A: V \rightarrow W$ una aplicación lineal no singular entre los espacios vectoriales V y W de dimensión 2 que están dotados de los productos escalares $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$, respectivamente. La aplicación A es una *semejanza* si existe un número real $\lambda \neq 0$ tal que $\langle Av_1, Av_2 \rangle = \lambda \langle v_1, v_2 \rangle$, para $v_1, v_2 \in V$ cualesquiera. Admitiendo que A no es una semejanza demostrar que existe un único par de vectores ortonormales e_1 y e_2 en V tales que Ae_1, Ae_2 son ortonormales en W .

- b. Utilícese la parte a para demostrar el *teorema de Tissot*: sea $\varphi: U_1 \subset S_1 \rightarrow S_2$ un difeomorfismo de un entorno U_1 del punto p de la superficie S_1 en la superficie S_2 . Supongamos que la aplicación lineal $d\varphi$ no es una semejanza en ningún punto. Entonces es posible parametrizar un entorno de p en S_1 mediante una parametrización ortogonal $x_1: U \rightarrow S_1$ de forma que $\varphi \circ x_1 = x_2: U \rightarrow S_2$ es también una parametrización ortogonal en un entorno de $\varphi(p) \in S_2$.

10. Sea T el toro del ejemplo 6 de la sec. 2.2 y definase la aplicación $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow T$ mediante

$$\varphi(u, v) = ((r \cos u + a) \cos v, (r \cos u + a) \operatorname{sen} v, r \operatorname{sen} u),$$

donde u y v son las coordenadas cartesianas de \mathbb{R}^2 . Sea $u = at$, $v = bt$ una recta en \mathbb{R}^2 que pasa por $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ y considérese la curva contenida en T , $\alpha(t) = (at, bt)$. Demuéstrese que

- a. φ es un difeomorfismo local.
- b. La curva $\alpha(t)$ es una curva regular, y $\alpha(t)$ es una curva cerrada si y sólo si b/a es un número racional.
- *c. Si b/a es irracional, la curva $\alpha(t)$ es densa en T ; es decir, cada entorno de un punto $p \in T$ contiene un elemento de $\alpha(t)$.

- *11. Utilizar la unicidad local de las trayectorias de un campo vectorial w en $U \subset S$ para demostrar el resultado siguiente. Dado $p \in U$, existe una única trayectoria $\alpha: I \rightarrow U$ de w , con $\alpha(0) = p$, la cual es *maximal* en el sentido siguiente: cualquier otra trayectoria $\beta: J \rightarrow U$, con $\beta(0) = p$, es la restricción de α a J (es decir, $J \subset I$ y $\alpha|J = \beta$).

- *12. Demuéstrese que si w es un campo vectorial diferenciable sobre una superficie compacta S y $\alpha(t)$ es la trayectoria maximal de w con $\alpha(0) = p \in S$, entonces $\alpha(t)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

13. Construir un campo vectorial diferenciable sobre un disco abierto del plano (el cual no es compacto) tal que una trayectoria maximal $\alpha(t)$ no esté definida para todo $t \in R$ (esto prueba que la condición de compacidad del Ejercicio 12 es esencial).

3.5. Superficies regladas y superficies mínimas³

En geometría diferencial uno se encuentra con un número considerable de casos particulares (superficies de revolución, superficies paralelas, superficies regladas, superficies mínimas, etc.) que pueden resultar interesantes en sí mismos (como las superficies mínimas), o constituyen un bello ejemplo del poder y las limitaciones de los métodos de la geometría. De acuerdo con el espíritu de este libro, hasta la fecha nos hemos ocupado de estos casos especiales en ejemplos y ejercicios.

No obstante, puede ser útil presentar algunos de estos temas con más detalle. Es lo que pretendemos hacer ahora. Utilizaremos esta sección para desarrollar la teoría de superficies regladas y hacer una introducción a la teoría de superficies mínimas. A lo largo de esta sección es conveniente el uso del concepto de superficie parametrizada definido en la sec. 2.3.

Si el lector así lo desea, puede omitirse la totalidad de la sección o alguno de sus temas. Exceptuando una referencia a la sec. A en el ejemplo 6 de la sec. B, los dos temas son independientes y sus resultados no se utilizarán de manera esencial en ninguna parte de este libro.

A. Superficies regladas

Una familia uniparamétrica (diferenciable) de rectas $\{\alpha(t), w(t)\}$ es una correspondencia que asigna a cada $t \in I$ un punto $\alpha(t) \in R^3$ y un vector $w(t) \in R^3$, $w(t) \neq 0$, de forma que tanto $\alpha(t)$ como $w(t)$ son diferenciables con respecto a t . Para cada $t \in I$, la recta L_t que pasa por $\alpha(t)$ y es paralela a $w(t)$ se denomina la recta de la familia en t .

Dada una familia uniparamétrica de rectas $\{\alpha(t), w(t)\}$, la superficie parametrizada

$$\mathbf{x}(t, v) = \alpha(t) + v w(t), \quad t \in I, \quad v \in R,$$

se denomina la superficie reglada generada por la familia $\{\alpha(t), w(t)\}$. Las rectas L_t se denominan las generatrices y se llama a la curva $\alpha(t)$ una directriz de la superficie \mathbf{x} . Algunas veces usamos la expresión superficie reglada para dar a entender la traza de \mathbf{x} . Debe observarse que también permitimos a \mathbf{x} el tener puntos singulares, es decir, puntos (t, v) donde $x_t \wedge x_v = 0$.

Ejemplo 1. Los ejemplos más simples de superficies regladas son las superficies tangentes a una curva regular (cf. el ejemplo 4, sec. 2.3), los cilindros y los conos. Un cilindro es una superficie reglada, generada por una familia uniparamétrica de rectas $\{\alpha(t), w(t)\}$, $t \in I$, donde $\alpha(I)$ está contenido en un plano P y $w(t)$ es paralelo a una dirección fija de R^3 (fig. 3-33(a)). Un cono es una superficie reglada, generada por una familia $\{\alpha(t), w(t)\}$, $t \in I$, donde $\alpha(I) \subset P$ y todas las generatrices L_t pasan por un punto $p \notin P$ (fig. 3-33(b)).

³ Esta sección se puede omitir en una primera lectura.

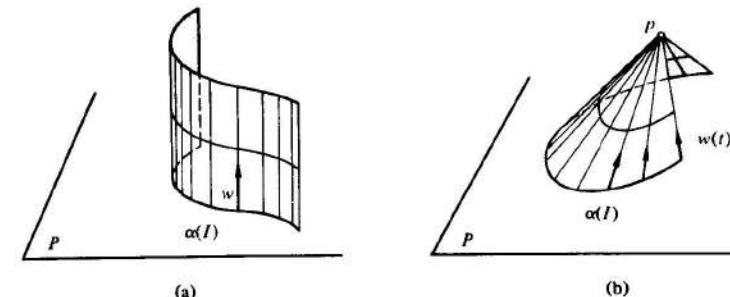


Figura 3-33

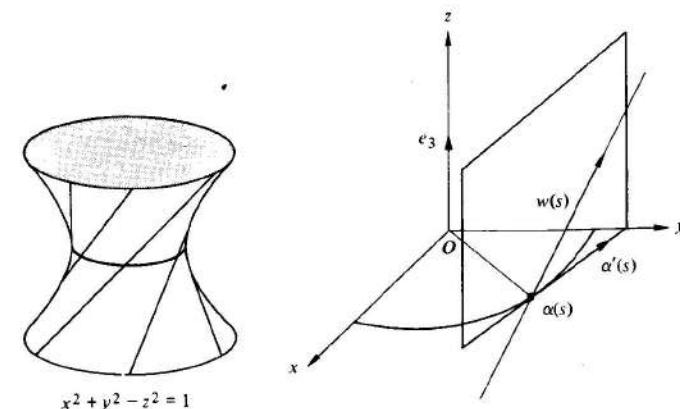
Ejemplo 2. Sea S^1 el círculo unidad $x^2 + y^2 = 1$ del plano xy y sea $\alpha(s)$ una parametrización de S^1 por la longitud de arco. Para cada s , sea $w(s) = \alpha'(s) + e_3$, donde e_3 es el vector unitario del eje z (fig. 3-34). Entonces

$$\mathbf{x}(s, v) = \alpha(s) + v(\alpha'(s) + e_3)$$

es una superficie reglada. Puede expresarse de una forma más familiar si escribimos

$$\mathbf{x}(s, v) = (\cos s - v \sin s, \sin s + v \cos s, v)$$

y observamos que $x^2 + y^2 - z^2 = 1 + v^2 - v^2 = 1$. Esto demuestra que la traza de \mathbf{x} es un hiperbolóide de revolución.

Figura 3-34. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ como superficie reglada.

Es interesante observar que si tomamos $w(s) = -\alpha'(s) + e_3$, obtenemos de nuevo la misma superficie. Esto demuestra que el hiperbolóide tiene dos familias de generatrices.

Hemos definido las superficies regladas permitiendo la presencia de singularidades. Esto es necesario si queremos incluir las superficies tangentes y los conos. Pronto demostraremos, al menos para las superficies regladas que satisfacen alguna condición razonable, que las singularidades para este tipo de superficie (si las hay) se concentran a lo largo de una curva de esta superficie.

Comenzaremos ahora el estudio de las superficies regladas generales. Podemos admitir, sin pérdida de generalidad, que $|w(t)| = 1$, $t \in I$. Para poder desarrollar la teoría, necesitamos la hipótesis no trivial de que $w'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Si los ceros de $w'(t)$ son aislados, podemos dividir nuestra superficie en trozos de forma que la teoría pueda aplicarse a cada uno de ellos. Sin embargo, si los ceros de $w'(t)$ tienen puntos de acumulación, la situación podría volverse complicada y no va a tratarse aquí.

La hipótesis $w'(t) \neq 0$, $t \in I$, se expresa usualmente diciendo que la superficie x es *no cilíndrica*.

Salvo que se advierta otra cosa, admitiremos que

$$x(t, v) = \alpha(t) + vw(t) \quad (1)$$

es una superficie reglada no cilíndrica con $|w(t)| = 1$, $t \in I$. Nótese que la hipótesis $|w(t)| = 1$ implica que $\langle w(t), w'(t) \rangle = 0$ para todo $t \in I$.

Queremos hallar primero una curva parametrizada $\beta(t)$ tal que $\langle \beta'(t), w'(t) \rangle = 0$, $t \in I$, de forma que $\beta(t)$ esté contenida en la traza de x , es decir,

$$\beta(t) = \alpha(t) + u(t)w(t), \quad (2)$$

para alguna función real $u = u(t)$. Admitiendo la existencia de tal curva β , uno obtiene

$$\beta' = \alpha' + u'w + uw';$$

de donde, como $\langle w, w' \rangle = 0$,

$$0 = \langle \beta', w' \rangle = \langle \alpha', w' \rangle + u\langle w', w' \rangle.$$

Se deduce entonces que $u = u(t)$ viene dada por

$$u = -\frac{\langle \alpha', w' \rangle}{\langle w', w' \rangle} \quad (3)$$

Así, si definimos $\beta(t)$ mediante las ecs. (2) y (3), obtenemos la curva requerida.

Ahora demostraremos que la curva β no depende de la elección de la curva directriz α para la superficie reglada. Se dice entonces que β es la *línea de restricción*, y sus puntos se denominan los *puntos centrales* de la superficie reglada.

Para probar nuestra afirmación, sea $\tilde{\alpha}$ otra directriz de la superficie reglada; es decir, para todo (t, v) sea

$$x(t, v) = \alpha(t) + vw(t) = \tilde{\alpha}(t) + sw(t) \quad (4)$$

para alguna función $s = s(v)$. Entonces, obtenemos de las ecs. (2) y (3)

$$\beta - \tilde{\beta} = (\alpha - \tilde{\alpha}) + \frac{\langle \tilde{\alpha}' - \alpha', w' \rangle}{\langle w', w' \rangle} w,$$

donde $\tilde{\beta}$ es la línea de restricción correspondiente a α . Por otra parte, la ec. (4) implica que

$$\alpha - \tilde{\alpha} = (s - v)w(t).$$

Así,

$$\beta - \tilde{\beta} = \left\{ (s - v) + \frac{\langle (v - s)w', w' \rangle}{\langle w', w' \rangle} \right\} w = 0,$$

y esto prueba nuestra afirmación pues $\langle w, w' \rangle = 0$.

Tomemos ahora la línea de restricción como directriz de la superficie reglada, escribiéndola como sigue

$$x(t, u) = \beta(t) + uw(t). \quad (5)$$

Con esta elección tenemos que

$$x_t = \beta' + uw', \quad x_u = w$$

y

$$x_t \wedge x_u = \beta' \wedge w + uw' \wedge w.$$

Como $\langle w', w \rangle = 0$ y $\langle w', w' \rangle = 0$, concluimos que, para alguna función $\lambda = \lambda(t)$, $\beta' \wedge w = \lambda w'$. Por tanto,

$$\begin{aligned} |x_t \wedge x_u|^2 &= |\lambda w' + uw' \wedge w|^2 \\ &= \lambda^2 |w'|^2 + u^2 |w'|^2 = (\lambda^2 + u^2) |w'|^2. \end{aligned}$$

Se deduce entonces que los únicos puntos singulares de la superficie reglada (5) están sobre la línea de restricción $u = 0$ y tienen lugar si y sólo si $\lambda(t) = 0$. Obsérvese también que

$$\lambda = \frac{\langle \beta', w, w' \rangle}{|w'|^2},$$

donde, como es usual, (β', w, w') es la abreviatura de $\langle \beta' \wedge w, w' \rangle$.

Calculemos la curvatura gaussiana de la superficie (5) en sus puntos regulares. Como

$$x_{tt} = \beta'' + uw'', \quad x_{tu} = w', \quad x_{uu} = 0,$$

tenemos que los coeficientes de la segunda forma fundamental son,

$$g = 0, \quad f = \frac{(x_t, x_u, x_{tu})}{|x_t \wedge x_u|} = \frac{\langle \beta', w, w' \rangle}{|x_t \wedge x_u|};$$

luego (como $g = 0$ no necesitamos el valor de e para calcular K),

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{\lambda^2 |w'|^4}{(\lambda^2 + u^2)^2 |w'|^4} = -\frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + u^2)^2}. \quad (6)$$

Esto demuestra que, en puntos regulares, la curvatura gaussiana K de una superficie reglada satisface $K \leq 0$, y K es cero solamente a lo largo de aquellas generatrices que cortan a la línea de estricción en un punto singular.

La ec. (6) nos permite dar una interpretación geométrica de los puntos centrales (regulares) de una superficie reglada. De hecho, los puntos de una generatriz son puntos regulares de la superficie, exceptuando quizás el punto central. Si $\lambda \neq 0$, la función $|K(u)|$ es continua sobre la generatriz y , por la ec. (6), los puntos centrales están caracterizados por el hecho de que $|K(u)|$ tiene un máximo allí.

Véase el ejercicio 4 para otra interpretación geométrica de la línea de estricción.

Resaltamos también que la curvatura K toma los mismos valores en los puntos de una generatriz que son simétricos con respecto al punto central (esto justifica el calificativo central).

La función $\lambda(t)$ se denomina el *parámetro de distribución* de x . Como la línea de estricción no depende de la elección de la directriz, se deduce que lo mismo es cierto para λ . Si x es regular, tenemos la siguiente interpretación de λ . El vector normal a la superficie en (t, u) es

$$N(t, u) = \frac{\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{x}_u}{|\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{x}_u|} = \frac{\lambda w' + uw' \wedge w}{\sqrt{\lambda^2 + u^2 |w'|^2}}.$$

Por otra parte ($\lambda \neq 0$),

$$N(t, 0) = \frac{w'}{|w'| |\lambda|}$$

Por tanto, si θ es el ángulo que forman $N(t, u)$ y $N(t, 0)$,

$$\tan \theta = \frac{u}{|\lambda|}. \quad (7)$$

Por tanto, si θ es el ángulo que forma el vector normal en un punto de una generatriz con el vector normal en el punto central de esta generatriz, entonces $\operatorname{tag} \theta$ es proporcional a la distancia entre estos dos puntos, y el coeficiente de proporcionalidad es el inverso del parámetro de distribución.

Ejemplo 3. Sea S el paraboloide hiperbólico $z = kxy$, $k \neq 0$. Para demostrar que S es una superficie reglada, observamos que las rectas $y = z/tk$, $x = t$, para cada $t \neq 0$ pertenecen a S . Si tomamos la intersección de esta familia de rectas con el plano $z = 0$, obtenemos la curva $x = t$, $y = 0$, $z = 0$. Tomando esta curva como directriz y vectores $w(t)$ paralelos a las rectas $y = z/tk$, $x = t$, se tiene

$$\alpha(t) = (t, 0, 0), \quad w(t) = \left(0, \frac{1}{k}, t\right).$$

Así, obtenemos la superficie reglada (fig. 3-35)

$$\mathbf{x}(t, v) = \alpha(t) + vw(t) = \left(t, \frac{v}{\sqrt{1+k^2 t^2}}, \frac{vkt}{\sqrt{1+k^2 t^2}}\right), \quad t \in R, v \in R,$$

cuya traza claramente coincide con S .

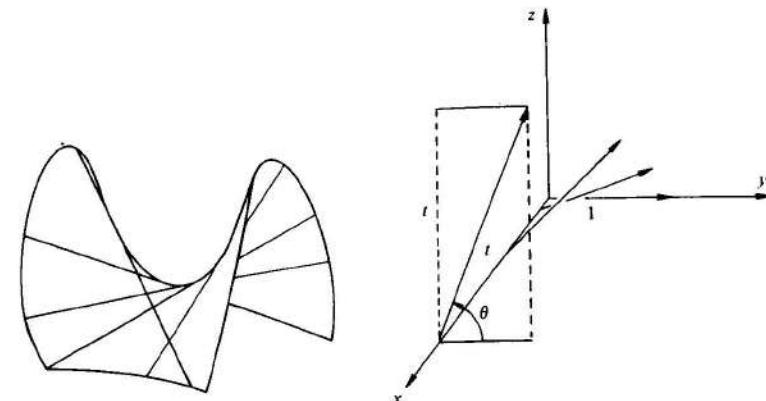


Figura 3-35. $z = xy$ como superficie reglada.

Como $\alpha'(t) = (1, 0, 0)$, obtenemos que la línea de estricción es la propia α . El parámetro de distribución es

$$\lambda = \frac{1}{k}.$$

Resaltamos también que la tangente del ángulo θ que forma $w(t)$ con $w(0)$ es $\operatorname{tag} \theta = tk$.

La última observación da lugar a una interesante propiedad general de las superficies regladas. Si en una superficie reglada se considera la familia de vectores normales a lo largo de una generatriz, esta familia genera otra superficie reglada. En virtud a la ecuación (7) y aquella observación, la última superficie es exactamente el paraboloide hiperbólico $z = kxy$, donde $1/k$ es el valor del parámetro de distribución en la generatriz elegida.

Entre las superficies regladas, las desarrollables juegan un papel importante. Comencemos otra vez con una superficie reglada arbitraria (no necesariamente no cilíndrica)

$$\mathbf{x}(t, v) = \alpha(t) + vw(t), \quad (8)$$

generada por la familia $\{\alpha(t), w(t)\}$ donde $|w(t)| = 1$. Se dice que la superficie (8) es *desarrollable* si

$$(w, w', \alpha') \equiv 0. \quad (9)$$

Para hallar una interpretación geométrica de la condición (9), vamos a calcular la curvatura gaussiana de una superficie desarrollable en un punto regular. Un cálculo completamente similar al que hicimos para obtener la ecuación (6) da lugar a

$$g = 0, \quad f = \frac{(w, w', \alpha')}{|\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{x}_v|}.$$

Por la condición (9), $f = 0$; luego,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \equiv 0.$$

Esto implica que, en los puntos regulares, la curvatura gaussiana de una superficie desarrollable es idénticamente cero.

Véase el ejercicio 6, para otra interpretación geométrica de una superficie desarrollable.

Podemos distinguir ahora dos casos no exhaustivos de superficies desarrollables:

1. $w(t) \wedge w'(t) = 0$. Esto implica que $w'(t) \equiv 0$. Por tanto, $w(t)$ es constante y la superficie reglada es un cilindro que se apoya en una curva obtenida al intersectar el cilindro con un plano normal a $w(t)$.
2. $w(t) \wedge w'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. En este caso $w'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Por tanto, la superficie es no cilíndrica y podemos aplicarle nuestro trabajo previo. Consecuentemente, podemos determinar la línea de estricción (2) y comprobar el valor del parámetro de distribución

$$\lambda = \frac{(\beta', w, w')}{|w'|^2} \equiv 0. \quad (10)$$

Por tanto, la línea de estricción será el lugar geométrico de los puntos singulares de la superficie desarrollable. Si $\beta'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, se deduce de la ecuación (10) y del hecho de que $\langle \beta', w' \rangle = 0$ que w es paralelo a β' . Luego, la superficie reglada es la superficie tangente de β . Si $\beta'(t) = 0$ para todo $t \in I$ entonces la línea de estricción es un punto, y la superficie reglada es un cono con vértice en dicho punto.

Por supuesto, los casos precedentes no cubren todas las posibilidades. Como es habitual, si hay puntos de acumulación de ceros para las funciones involucradas, el análisis puede resultar bastante complicado. En cualquier caso, lejos de estos puntos de acumulación, una superficie desarrollable es la unión de trozos de cilindros, conos y superficies tangentes.

Como ya hemos visto, en puntos regulares, la curvatura gaussiana de una superficie desarrollable es idénticamente cero. En la sec. 5.8 demostraremos una especie de recíproco global que implica que una superficie regular S contenida en R^3 que es cerrada como subconjunto de R^3 y tiene curvatura gaussiana nula es un cilindro.

Ejemplo 4 (La envolvente de una familia de planos tangentes a lo largo de una curva de una superficie). Sea S una superficie regular y $\alpha = \alpha(s)$ una curva sobre S , parametrizada por la longitud de arco. Admitamos que α nunca es tangente a una dirección asintótica. Considérese la superficie reglada

$$\mathbf{x}(s, v) = \alpha(s) + v \frac{N(s) \wedge N'(s)}{|N'(s)|}, \quad (11)$$

donde denotamos por $N(s)$ al vector unitario normal de S restringido a la curva $\alpha(s)$ (como $\alpha'(s)$ no es una dirección asintótica, $N'(s) \neq 0$ para todo s). Vamos a demostrar que \mathbf{x} es una superficie desarrollable que es regular en un entorno de $v = 0$ y es tangente a S a lo largo de $v = 0$. Previamente, consideremos una interpretación geométrica de la superficie \mathbf{x} .

Sea $\{T_{\alpha(s)}(S)\}$ la familia de planos tangentes a la superficie S sobre la curva $\alpha(s)$. Si Δs es suficientemente pequeño, los dos planos $T_{\alpha(s)}(S)$ y $T_{\alpha(s+\Delta s)}(S)$ de la familia se cortarán a lo largo de una recta paralela al vector

$$\frac{N(s) \wedge N(s + \Delta s)}{\Delta s}.$$

Si hacemos tender a cero a Δs , esta recta se aproximará a una posición límite, paralela al vector

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{N(s) \wedge N(s + \Delta s)}{\Delta s} &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} N(s) \wedge \frac{(N(s + \Delta s) - N(s))}{\Delta s} \\ &= N(s) \wedge N'(s). \end{aligned}$$

Intuitivamente, esto significa que las generatrices de \mathbf{x} son las posiciones límite de las intersecciones de planos próximos de la familia $\{T_{\alpha(s)}(S)\}$. Se dice entonces que \mathbf{x} es la envolvente de la familia de planos tangentes a S a lo largo de $\alpha(s)$ (fig. 3-36).

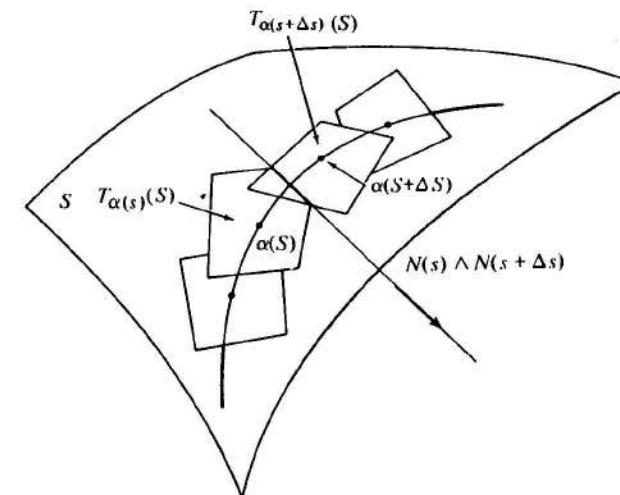


Figura 3-36

Por ejemplo, si α es una parametrización de un paralelo de la esfera S^2 , entonces la envolvente de los planos tangentes a S^2 a lo largo de α es o bien un cilindro, si el paralelo es un ecuador, o bien un cono, si el paralelo no es un ecuador (fig. 3-37).

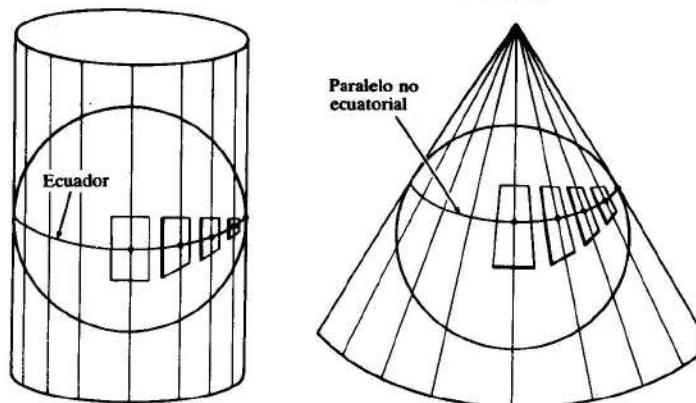


Figura 3-37. Envolventes de familias de planos tangentes a una esfera a lo largo de un paralelo.

Para demostrar que \mathbf{x} es una superficie desarrollable, comprobaremos que \mathbf{x} cumple la condición (9). En efecto, calculando, obtenemos directamente que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{N \wedge N'}{|N'|} \wedge \left(\frac{N \wedge N'}{|N'|} \right)', \alpha' \right\rangle &= \left\langle \frac{N \wedge N'}{|N'|} \wedge \frac{(N \wedge N')'}{|N'|}, \alpha' \right\rangle \\ &= \frac{1}{|N'|^2} \langle\langle N \wedge N', N'' \rangle N, \alpha' \rangle = 0. \end{aligned}$$

Lo que prueba nuestra afirmación.

Ahora demostraremos que \mathbf{x} es regular en un entorno de $v = 0$ y que es tangente a S a lo largo de α . De hecho, en $v = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v &= \alpha' \wedge \frac{(N \wedge N')}{|N'|} = \langle N', \alpha' \rangle \frac{N}{|N'|} = -\langle N, \alpha' \rangle \frac{N}{|N'|} \\ &= -\frac{(k_n N)}{|N'|}, \end{aligned}$$

donde $k_n = k_n(s)$ es la curvatura normal de α . Como $k_n(s)$ no se anula nunca, esto demuestra que \mathbf{x} es regular en un entorno de $v = 0$ y que el vector unitario normal de \mathbf{x} en $\mathbf{x}(s, 0)$ coincide con $N(s)$. Por tanto, \mathbf{x} es tangente a S a lo largo de $v = 0$ y completamos así la demostración de nuestras afirmaciones.

Resumiremos nuestras conclusiones de la manera siguiente. Sea $\alpha(s)$ una curva parametrizada por la longitud de arco sobre la superficie S y admitamos que α nunca es tangente a una dirección asintótica. Entonces la envolvente (9) de la familia de planos tangentes a S a lo largo de α es una superficie desarrollable, regular en un entorno de $\alpha(s)$ y tangente a S a lo largo de $\alpha(s)$.

B. Superficies mínimas

Se dice que una superficie parametrizada regular es *mínima* si su curvatura media se anula en todos los puntos. Una superficie regular $S \subset R^3$ es *mínima* si cada una de sus parametrizaciones es mínima.

Para explicar por qué usamos la denominación *mínima* para tales superficies, necesitamos introducir la noción de variación. Sea $\mathbf{x}: U \subset R^2 \rightarrow R^3$ una superficie parametrizada regular. Tomemos un dominio acotado $D \subset U$ (ver la sec. 2.5) y una función diferenciable $h: \bar{D} \rightarrow R$, donde \bar{D} es la unión del dominio D con su frontera ∂D . La *variación normal de $\mathbf{x}(\bar{D})$* , determinada por h , es la aplicación (fig. 3-38) dada por

$$\varphi: \bar{D} \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow R^3$$

$$\varphi(u, v, t) = \mathbf{x}(u, v) + th(u, v)N(u, v), \quad (u, v) \in \bar{D}, t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

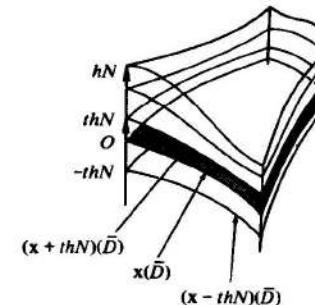


Figura 3-38. Una variación normal de $\mathbf{x}(D)$.

Para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, la aplicación $\mathbf{x}^t: D \rightarrow R^3$

$$\mathbf{x}^t(u, v) = \varphi(u, v, t)$$

es una superficie parametrizada con

$$\frac{\partial \mathbf{x}^t}{\partial u} = \mathbf{x}_u + thN_u + th_u N,$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}^t}{\partial v} = \mathbf{x}_v + thN_v + th_v N.$$

Así, denotando por E^t, F^t, G^t los coeficientes de la primera forma fundamental de \mathbf{x}^t , obtenemos

$$E^t = E + th(\langle \mathbf{x}_u, N_u \rangle + \langle \mathbf{x}_v, N_u \rangle) + t^2 h^2 \langle N_u, N_u \rangle + t^2 h_u h_v,$$

$$F^t = F + th(\langle \mathbf{x}_u, N_v \rangle + \langle \mathbf{x}_v, N_u \rangle) + t^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle + t^2 h_u h_v,$$

$$G^t = G + th(\langle \mathbf{x}_v, N_v \rangle + \langle \mathbf{x}_u, N_v \rangle) + t^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle + t^2 h_v h_v.$$

Utilizando el hecho de que

$$\langle \mathbf{x}_u, N_u \rangle = -e, \quad \langle \mathbf{x}_u, N_v \rangle + \langle \mathbf{x}_v, N_u \rangle = -2f, \quad \langle \mathbf{x}_v, N_v \rangle = -g$$

y que la curvatura media H es (sec. 3.3, ecuación (5))

$$H = \frac{1}{2} \frac{Eg - 2fF + Ge}{EG - F^2},$$

obtenemos

$$\begin{aligned} EG' - (F')^2 &= EG - F^2 - 2th(Eg - 2fF + Ge) + R \\ &= (EG - F^2)(1 - 4thH) + R, \end{aligned}$$

donde $\lim_{t \rightarrow 0} (R/t) = 0$.

Se deduce entonces que si ϵ es suficientemente pequeño, x' es una superficie parametrizada regular. Además, el área $A(t)$ de $x'(\bar{D})$ es

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_D \sqrt{EG' - (F')^2} \, du \, dv \\ &= \int_D \sqrt{1 - 4thH + \tilde{R}} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv, \end{aligned}$$

donde $\tilde{R} = R/(EG - F^2)$. Luego si ϵ es pequeño, A es una función diferenciable y su derivada en $t = 0$ es

$$A'(0) = - \int_D 2hH \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv \quad (12)$$

Ahora ya estamos preparados para justificar el uso del término mínimo en conexión con las superficies de curvatura media nula.

PROPOSICION 1. *Sea $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada regular y sea $D \subset U$ un dominio acotado en U . Entonces x es mínima si y sólo si $A'(0) = 0$ para todos los dominios D , en las condiciones precedentes, y todas las variaciones normales de $x(\bar{D})$.*

Demostración. Si x es mínima, la condición se verifica claramente al ser $H = 0$. Recíprocamente, admitamos que la condición se verifica y que $H(q) \neq 0$ para algún $q \in D$. Tomemos $h: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(q) = H(q)$, siendo h idénticamente cero fuera de un pequeño entorno de q . La contradicción se obtiene al ser $A'(0) < 0$ para la variación determinada por esta función h .

Q.E.D.

De esta forma, cualquier región acotada $x(\bar{D})$ de una superficie mínima x es un punto crítico de la función área para cualquier variación normal de $x(\bar{D})$. Debe notarse que este punto crítico no tiene por qué ser un mínimo, lo que hace que el término mínima parezca, en cierto sentido, inoportuno. No obstante, es una terminología clásica, introducida por Lagrange (que fue el primero en definir superficie mínima) en 1760.

Las superficies mínimas se asocian frecuentemente con las películas de jabón que pueden obtenerse al sumergir un bastidor de alambre dentro de una solución jabonosa y retirarlo con cuidado. Si el experimento se realiza con éxito, se obtiene una película de jabón delimitada por el propio bastidor. Se puede demostrar, apelando a consideraciones físicas, que la película adoptará una posición donde la curvatura media sea cero en sus puntos regulares. Por este procedimiento podemos «manufacturar» bellas superficies mínimas, como la de la fig. 3-39.

Observación 1. Debe señalarse que, de acuerdo con nuestra definición, no todas las películas de jabón son superficies mínimas. Hemos supuesto que las superficies mínimas son regulares (podíamos haber admitido la existencia de algunos puntos singulares aislados, pero ir más allá de eso hubiera conducido a un tratamiento mucho menos elemental). Sin embargo, pueden formarse películas jabonosas, por ejemplo, utilizando un bastidor cúbico (fig. 3-40), que tienen singularidades a lo largo de rectas.

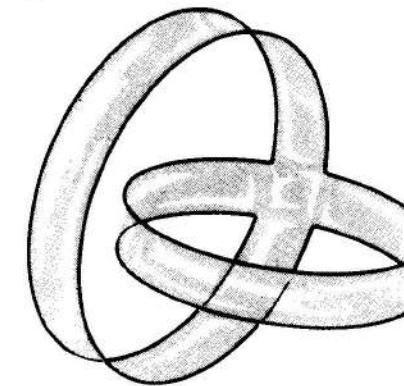


Figura 3-39

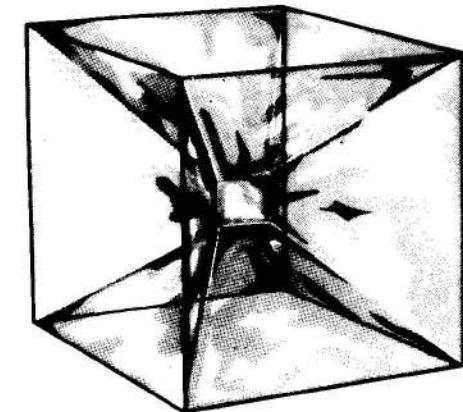


Figura 3-40

Observación 2. La conexión entre las superficies mínimas y las películas de jabón motivó el célebre problema de Plateau (Plateau fue un físico belga que realizó, hacia 1850, minuciosos experimentos con películas de jabón). En líneas generales, el problema puede describirse en los siguientes términos: *demostrar que para cada curva cerrada $C \subset \mathbb{R}^3$ existe una superficie S de área mínima que tiene a C como borde*. Plantear el problema de una manera precisa (qué curvas y superficies están permitidas y qué se entiende por el hecho de que C sea un borde de S) constituye una parte no trivial del propio problema. Una versión del problema de Plateau fue resuelta simultáneamente por Douglas y Radó en 1930. Otras versiones (y generalizaciones del problema para dimensiones superiores) han inspirado la creación de entidades matemáticas que comprenden al menos tantos objetos como tipos de películas de jabón. Remitimos al lector interesado al cap. 2 de Lawson [20] (las referencias se hallan al final del libro) para otros detalles y bibliografía reciente sobre el problema de Plateau.

Será conveniente introducir, para una superficie parametrizada regular arbitraria, el vector curvatura media definido por $\mathbf{H} = H\mathbf{N}$. La interpretación geométrica del sentido de \mathbf{H} se puede deducir de la ecuación (12). De hecho, si elegimos $h = H$, tenemos, para esta variación en particular,

$$A'(0) = -2 \int_D \langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv < 0.$$

Lo cual significa que si deformamos $\mathbf{x}(D)$ según el sentido del vector \mathbf{H} , el área decrece inicialmente.

El vector curvatura media admite otra interpretación de la que nos vamos a ocupar ahora, ya que tiene importantes aplicaciones para la teoría de superficies mínimas.

Se dice que una superficie parametrizada regular $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ es isotérmica si $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$ y $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0$.

PROPOSICIÓN 2. Sea $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ una superficie parametrizada regular y admitamos que \mathbf{x} es isotérmica. Entonces

$$\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 2\lambda^2 \mathbf{H},$$

donde $\lambda^2 = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$.

Demostración. Como \mathbf{x} es isotérmica, $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$ y $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0$. Derivando, obtenemos

$$\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle = -\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vv} \rangle.$$

Por tanto,

$$\langle \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \rangle = 0.$$

Análogamente,

$$\langle \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle = 0.$$

De lo que se deduce que $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}$ es paralelo a \mathbf{N} . Ya que \mathbf{x} es isotérmica,

Así,

$$H = \frac{1}{2} \frac{g + e}{\lambda^2}.$$

$$2\lambda^2 H = g + e = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} \rangle;$$

de donde,

$$\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 2\lambda^2 \mathbf{H},$$

Q.E.D.

El laplaciano Δf de una función diferenciable $f: U \subset R^2 \rightarrow R$ se define por $\Delta f = (\partial^2 f / \partial u^2) + (\partial^2 f / \partial v^2)$, $(u, v) \in U$. Decimos que f es armónica en U si $\Delta f = 0$. De la prop. 2 obtenemos

COROLARIO. Sea $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ una superficie parametrizada y admitamos que \mathbf{x} es isotérmica. Entonces \mathbf{x} es mínima si y sólo si sus funciones coordenadas x, y, z son armónicas.

Ejemplo 5. El catenoides definido por

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av), \\ 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty.$$

Esta es la superficie generada al rotar la catenaria $y = a \cosh(z/a)$ alrededor del eje z (fig. 3-41). Se comprueba fácilmente que $E = G = a^2 \cosh^2 v$, $F = 0$, y que $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$. Por tanto, el catenoides es una superficie mínima. Esta superficie está caracterizada por ser la única superficie de revolución que es mínima

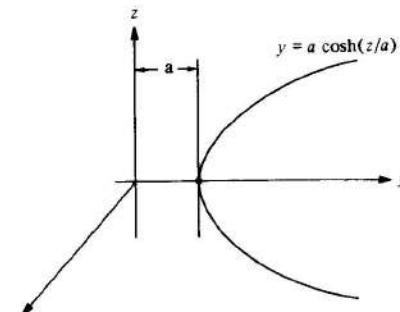


Figura 3-41

La última afirmación puede demostrarse como sigue. Queremos hallar una curva $y = f(x)$ tal que, cuando rote alrededor del eje x , describa una superficie mínima. Como los paralelos y los meridianos de una superficie de revolución son líneas de curvatura de la superficie (sec. 3.3, ejemplo 4), debemos tener que la curvatura de la curva $y = f(x)$ es la opuesta de la curvatura normal del círculo generado por el punto $f(x)$; ambas son curvaturas principales. Como la curvatura de $y = f(x)$ es

$$\frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}$$

y la curvatura normal del círculo es la proyección de su curvatura usual ($= 1/y$) sobre la normal \mathbf{N} a la superficie (véase la fig. 3-42), obtenemos

$$\frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}} = -\frac{1}{y} \cos \varphi.$$

Pero $-\cos \varphi = \cos \theta$ (véase la fig. 3-42) y como $\operatorname{tag} \theta = y'$, obtenemos que la ecuación que debe satisfacer la curva $y = f(x)$ es

$$\frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{1}{y} \frac{1}{(1 + (y')^2)^{1/2}}$$

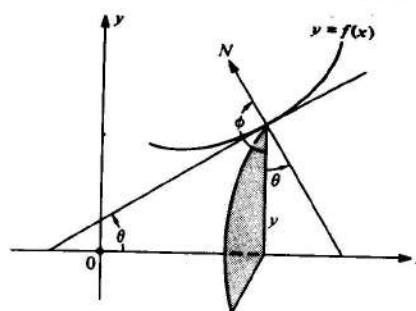


Figura 3-42

Claramente, existe un punto x donde $f'(x) \neq 0$. Trabajemos en un entorno de este punto donde $f' \neq 0$. Multiplicando los dos miembros de la ecuación precedente por $2y'$ se obtiene,

$$\frac{2y''y'}{1 + (y')^2} = \frac{2y'}{y}.$$

Haciendo $1 + (y')^2 = z$ (de donde, $2y''y' = z'$), tenemos

$$\frac{z'}{z} = \frac{2y'}{y},$$

que, integrando, da lugar a (k es una constante)

$$\log z = \log y^2 + \log k^2 = \log(yk)^2$$

o

$$1 + (y')^2 = z = (yk)^2.$$

La última expresión se puede escribir

$$\frac{k dy}{\sqrt{(yk)^2 - 1}} = k dx,$$

que, de nuevo por integración, da lugar a (c es una constante)

$$\cosh^{-1}(yk) = kx + c$$

o

$$y = \frac{1}{k} \cosh(kx + c).$$

Por tanto, en el entorno de un punto donde $f' \neq 0$, la curva $y = f(x)$ es una catenaria. Pero entonces y' sólo puede ser cero en $x = 0$, y, si la superficie va a ser conexa, por continuidad es un catenoide, como afirmamos en un principio.

Ejemplo 6 (El helicoide). (Cf. el ejemplo 3, séc. 2.5.)

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \operatorname{senh} v \cos u, a \operatorname{senh} v \sin u, au).$$

Se comprueba fácilmente que $E = G = a^2 \cosh^2 v$, $F = 0$ y que $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$. Por tanto, el helicoide es una superficie mínima. Detenta además la propiedad de ser la única superficie mínima, aparte del plano, que es también una superficie reglada.

Podemos presentar una demostración de la última afirmación si admitimos que los ceros de la curvatura gaussiana de una superficie mínima son aislados (para consultar una demostración, véase, por ejemplo, el trabajo de recapitulación de Osserman citado al final de esta sección, pág. 212). Una vez garantizado esto, procederemos como sigue.

Admitamos que la superficie no es un plano. Entonces en algún entorno W de la superficie la curvatura Gaussiana K es estrictamente negativa. Como la curvatura media es cero, W está recubierto por dos familias de curvas asintóticas que se cortan ortogonalmente. Ya que las generatrices son curvas asintóticas y la superficie no es un plano, podemos elegir un punto $q \in W$ tal que la curva asintótica, aparte de la generatriz, que pasa por q tiene torsión no nula en q . Como el plano osculador de una curva asintótica es el plano tangente a la superficie, existe un entorno $V \subset W$ tal que las generatrices de V son normales principales de la familia de curvas asintóticas no rectilíneas (fig. 3-43). Resulta un ejercicio interesante de curvas demostrar que esto sólo puede ocurrir si y sólo si las curvas no rectilíneas son hélices circulares (cf. el

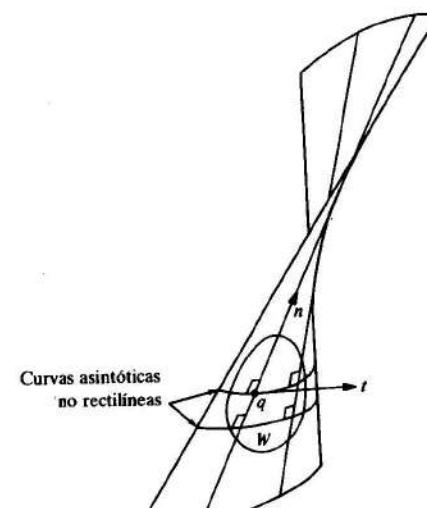


Figura 3-43

ejercicio 18, sec. 1.5). Por tanto, V es parte de un helicoide. Puesto que la torsión de una hélice circular es constante, es obvio que toda la superficie es parte de un helicoide, como habíamos anunciado en un principio.

El helicoide y el catenoide fueron descubiertos por Meusnier en 1776, quien también demostró que la definición de Lagrange de las superficies mínimas como puntos críticos de un problema variacional es equivalente a la anulación de la curvatura media. Fueron, durante mucho tiempo, los únicos ejemplos conocidos de superficies mínimas. No fue hasta 1835 que Scherk descubrió otros ejemplos, uno de los cuales se describe en el ejemplo 8. En el ejercicio 14 describiremos una conexión interesante entre el helicoide y el catenoide.

Ejemplo 7 (La superficie mínima de Enneper). La superficie de Enneper es la superficie parametrizada

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right), \quad (u, v) \in R^2,$$

que, como es inmediato comprobar, es una superficie mínima (fig. 3-44). Nótese que al cambiar (u, v) por $(-v, u)$ transformamos, en la superficie, (x, y, z) en $(-y, x, -z)$. Así, si efectuamos un giro positivo de ángulo $\pi/2$ alrededor del eje z , seguido de una simetría en el plano xy , la superficie permanece invariante.

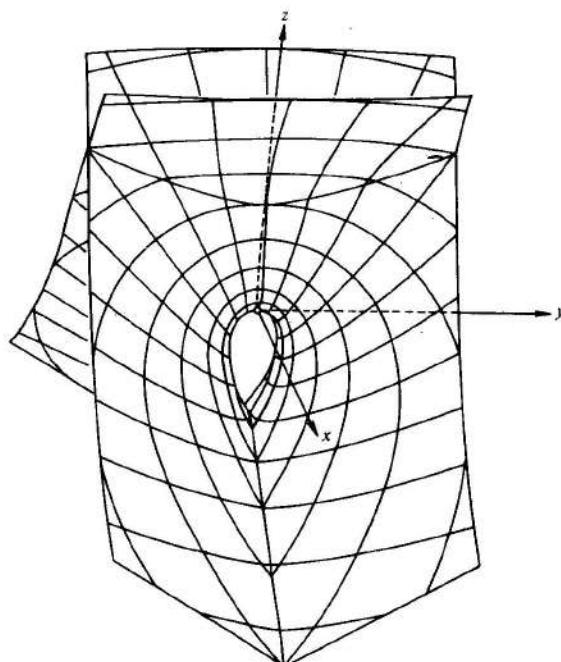


Figura 3-44. La superficie de Enneper. Reproducida bajo autorización, con modificaciones, de K. Leichtweiss, «Minimalflächen im Grossen», Überblicke Math., 2 (1969), pp. 7-49, fig. 4.

Una peculiaridad interesante de la superficie de Enneper es que tiene autointersecciones. Esto se puede demostrar haciendo $u = \rho \cos \theta$, $v = \rho \sin \theta$ y escribiendo

$$\mathbf{x}(\rho, \theta) = \left(\rho \cos \theta - \frac{\rho^3}{3} \cos 3\theta, \rho \sin \theta + \frac{\rho^3}{3} \sin 3\theta, \rho^2 \cos 2\theta \right).$$

Así, si $\mathbf{x}(\rho_1, \theta_1) = \mathbf{x}(\rho_2, \theta_2)$, un simple cálculo prueba que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \rho_1^2 + \frac{\rho_1^6}{9} - \cos 4\theta \frac{2\rho_1^4}{3} \\ &= \left(\rho_1 + \frac{\rho_1^3}{3} \right)^2 - \frac{4}{3} (\rho_1^2 \cos 2\theta_1)^2 \\ &= \left(\rho_2 + \frac{\rho_2^3}{3} \right)^2 - \frac{4}{3} (\rho_2^2 \cos 2\theta_2)^2. \end{aligned}$$

De donde, como $\rho_1^2 \cos 2\theta_1 = \rho_2^2 \cos 2\theta_2$, obtenemos

$$\rho_1 + \frac{\rho_1^3}{3} = \rho_2 + \frac{\rho_2^3}{3},$$

lo cual implica que $\rho_1 = \rho$. Se deduce entonces que $\cos 2\theta_1 = \cos 2\theta_2$.

Si, por ejemplo, $\rho_1 = \rho_2$ y $\theta_1 = 2\pi - \theta_2$, deducimos de

$$y(\rho_1, \theta_1) = y(\rho_2, \theta_2)$$

que $y = -y$. Luego $y = 0$; o sea, los puntos (ρ_1, θ_1) y (ρ_2, θ_2) pertenecen a la curva $\sin \theta + (\rho^2/3) \sin 3\theta = 0$. Es claro que para cada punto (ρ, θ) de esta curva, el punto $(\rho, 2\pi - \theta)$ también pertenece a ésta, y que

$$x(\rho, \theta) = x(\rho, 2\pi - \theta), z(\rho, \theta) = z(\rho, 2\pi - \theta).$$

Por tanto, la intersección de la superficie con el plano $y = 0$ es una curva sobre la cual la superficie se corta a sí misma.

Análogamente, puede demostrarse que la intersección de la superficie con el plano $x = 0$ también es una curva de autointersección (correspondiente al caso $\rho_1 = \rho_2$, $\theta_1 = \pi - \theta_2$). Es inmediato comprobar que éstas son las únicas autointersecciones de la superficie de Enneper.

Deseo expresar mi agradecimiento a Alcides Lins Neto por analizar este ejemplo a fin de trazar un primer boceto de la fig. 3-44.

Antes de pasar al siguiente ejemplo, vamos a establecer una relación útil entre las superficies mínimas y las funciones analíticas de una variable compleja. Denotemos por \mathbb{C} al plano complejo, el cual, como ya es habitual, se identifica con R^2 haciendo $\xi = u + iv$, $\xi \in \mathbb{C}$, $(u, v) \in R^2$. Recordamos que una función $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica cuando, escribiendo

$$f(\xi) = f_1(u, v) + if_2(u, v),$$

las funciones reales f_1 y f_2 admiten derivadas parciales continuas de primer orden que satisfacen las denominadas ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{\partial f_2}{\partial v}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial v} = -\frac{\partial f_2}{\partial u}.$$

Sea ahora $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada regular y definamos las funciones complejas $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ mediante

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{\partial x}{\partial u} - i \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \varphi_2(\zeta) = \frac{\partial y}{\partial u} - i \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \varphi_3(\zeta) = \frac{\partial z}{\partial u} - i \frac{\partial z}{\partial v},$$

donde x, y, z son las funciones componentes de \mathbf{x} .

LEMA. \mathbf{x} es isotérmica si y sólo si $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$. Si se satisface esta condición, \mathbf{x} es mínima si y sólo si φ_1, φ_2 y φ_3 son funciones analíticas.

*Demuestra*ón. Obtenemos mediante un simple cálculo que

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = E - G + 2iF,$$

de donde se deduce la primera parte del lema. Además $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$ si y sólo si

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right) = -\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right) = -\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) = -\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right),$$

lo que implica la mitad de las ecuaciones de Cauchy-Riemann para $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Como la otra mitad se satisface automáticamente, concluimos que $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$ si y sólo si φ_1, φ_2 y φ_3 son analíticas.

Q.E.D.

Ejemplo 8. (*La superficie mínima de Scherk*). Viene dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(\arg \frac{\zeta + i}{\zeta - i}, \arg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}, \log \left| \frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2 - 1} \right| \right),$$

$$\zeta \neq \pm 1, \zeta \neq \pm i,$$

donde $\zeta = u + iv$ y $\arg \zeta$ es el ángulo que forma ζ con el eje real.

Calculamos fácilmente que

$$\arg \frac{\zeta + i}{\zeta - i} = \operatorname{tag}^{-1} \frac{2u}{u^2 + v^2 - 1},$$

$$\arg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} = \operatorname{tag}^{-1} \frac{-2v}{u^2 + v^2 - 1}$$

$$\log \left| \frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2 - 1} \right| = \frac{1}{2} \log \frac{(u^2 - v^2 + 1)^2 + 4u^2v^2}{(u^2 - v^2 - 1)^2 + 4u^2v^2};$$

de donde,

$$\varphi_1 = \frac{\partial x}{\partial u} - i \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{2}{1 + \zeta^2}, \quad \varphi_2 = -\frac{2i}{1 - \zeta^2}, \quad \varphi_3 = \frac{4\zeta}{1 - \zeta^4}.$$

Como $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$ y φ_1, φ_2 y φ_3 son analíticas, \mathbf{x} es una parametrización isotérmica de una superficie mínima.

Se comprueba inmediatamente a partir de las expresiones para x, y, z que

$$z = \log \frac{\cos y}{\cos x}.$$

Esta representación demuestra que la superficie de Scherk está definida sobre el tablero de ajedrez de la fig. 3-45 (excepto en los vértices de los cuadros, donde la superficie es en realidad una recta vertical).

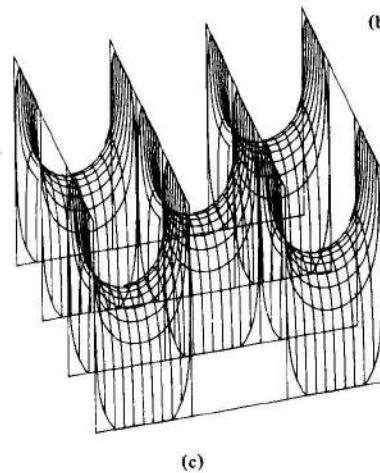
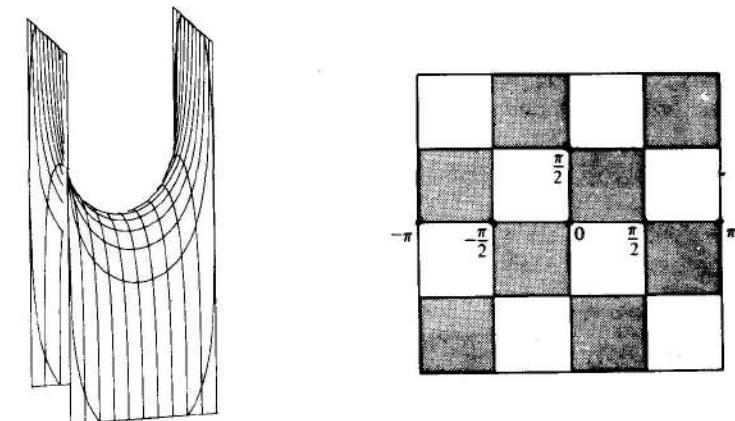


Figura 3-45. La superficie de Scherk.

Las superficies mínimas constituyen quizá la clase de superficies mejor estudiada en geometría diferencial, y apenas hemos tocado el tema. Una introducción bastante legible puede consultarse en R. Osserman, *A Survey of Minimal Surfaces*, Van Nostrand Mathematical Studies, Van Nostrand Reinhold, Nueva York, 1969. La teoría se ha constituido en una fértil rama de la geometría diferencial en la que todavía están siendo investigadas cuestiones interesantes nada triviales. Tiene conexiones profundas con las funciones analíticas de variable compleja y las ecuaciones derivadas parciales. Por regla general, los resultados de la teoría tienen la fascinante cualidad de ser fáciles de visualizar pero muy difíciles de demostrar. Para transmitir al lector parte del sabor del tema cerraremos esta breve introducción estableciendo sin demostración un resultado sorprendente.

TEOREMA (Osserman). Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, cerrada (como subconjunto de \mathbb{R}^3) y mínima en \mathbb{R}^3 que no es un plano. Entonces la imagen de la aplicación de Gauss $N: S \rightarrow S^2$ es densa en la esfera S^2 ; es decir, hay puntos de $N(S) \subset S^2$ arbitrariamente próximos a cualquier punto de S^2 .

Una demostración de este teorema se encuentra en el trabajo de Osserman antes citado. Realmente, el teorema es algo más fuerte al aplicarse a superficies completas, concepto que definiremos en la sec. 5.3.

EJERCICIOS

- Demostrar que el helicoide (cf. el ejemplo 3, sec. 2.5) es una superficie reglada, que su línea de estricción es el eje z y que su parámetro de distribución es constante.
- Demostrar que sobre el hiperbolóide de revolución $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, el paralelo de menor radio es la línea de estricción, las generatrices se cortan formando un ángulo constante y el parámetro de distribución es constante.
- Sea $\alpha: I \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ una curva sobre una superficie regular S y considérese la superficie reglada generada por la familia $\{\alpha(t), N(t)\}$, donde $N(t)$ es la normal a la superficie en $\alpha(t)$. Demuéstrese que $\alpha(I) \subset S$ es una línea de curvatura en S si y sólo si esta superficie reglada es desarrollable.
- Admitamos que la superficie reglada no cilíndrica

$$x(t, v) = \alpha(t) + vw(t), \quad |w| = 1,$$

es regular. Sean $w(t_1), w(t_2)$ las direcciones de dos generatrices de x y sean $x(t_1, v_1), x(t_2, v_2)$ los pies de la perpendicular común a estas dos generatrices. Cuando $t_2 \rightarrow t_1$, estos puntos tienden a un punto $x(t_1, \bar{v})$. Para determinar (t_1, \bar{v}) demuéstrese lo siguiente.

- El vector unitario de la perpendicular común converge a un vector unitario tangente a la superficie en (t_1, \bar{v}) . Conclúyase que, en (t_1, \bar{v}) ,

$$\langle w' \wedge w, N \rangle = 0.$$

- $\bar{v} = -(\langle \alpha', w' \rangle / \langle w', w' \rangle)$. De esta forma, (t_1, \bar{v}) es el punto central de la generatriz que pasa por t_1 , siendo ésta otra interpretación de la línea de estricción (la cual se supone no singular).

- Un *conoide recto* es una superficie reglada cuyas generatrices L intersectan perpendicularmente un eje fijo r el cual no corta a la directriz $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$.

- Hallar una parametrización del conoide recto, determinando una condición que implique que éste es no cilíndrico.
- Dado un conoide recto no cilíndrico, háganse la línea de estricción y el parámetro de distribución.

- Sea

$$x(t, v) = \alpha(t) + vw(t)$$

una superficie desarrollable. Demostrar que en un punto regular se tiene

$$\langle N_v, x_v \rangle = \langle N_v, x_i \rangle = 0.$$

Conclúyase que el *plano tangente a una superficie desarrollable permanece constante a lo largo de* (los puntos regulares de) *una generatriz fijada*.

- Sea S una superficie regular y sea $C \subset S$ una curva regular sobre S que nunca es tangente a una dirección asintótica. Considérese la envolvente de la familia de planos tangentes a S a lo largo de C . Demuéstrese que la dirección de la generatriz que pasa por un punto $p \in C$ es conjugada de la dirección de la tangente a C en p .
- Demostrar que si $C \subset S^2$ es un paralelo de la esfera unidad S^2 , entonces la envolvente de los planos tangentes a S^2 a lo largo de C es o bien un cilindro, si C es un ecuador, o un cono, si C no es un ecuador.
- Superficies focales.* Sea S una superficie regular sin puntos parabólicos o umbílicos. Sea $x: U \rightarrow S$ una parametrización de S tal que las curvas coordenadas son líneas de curvatura (si U es pequeño, esto no constituye una restricción; cf. el corolario 4, sec. 3.4). Las superficies parametrizadas

$$\begin{aligned} y(u, v) &= x(u, v) + \varrho_1 N(u, v), \\ z(u, v) &= x(u, v) + \varrho_2 N(u, v), \end{aligned}$$

donde $\varrho_1 = 1/k_1$, $\varrho_2 = 1/k_2$, se denominan *superficies focales* de $x(U)$ (o *superficies de centros* de $x(U)$); esta terminología proviene del hecho de que, por ejemplo, $y(u, v)$ es el centro del círculo osculador (cf. la sec. 1.6, ejercicio 2) de la sección normal en $x(u, v)$, correspondiente a la curvatura principal k_1 . Demuéstrese que

- Si $(k_1)_u$ y $(k_2)_v$ nunca se anulan, entonces y y z son superficies parametrizadas regulares.
- En puntos regulares, las direcciones sobre una superficie focal correspondientes a las direcciones principales en $x(U)$ son conjugadas. Esto significa, por ejemplo, que y_u e y_v son vectores conjugados en $y(U)$ para todo $(u, v) \in U$.
- Una superficie focal, por ejemplo y , puede construirse de la forma siguiente. Considérese la línea de curvatura $x(u, \text{const.})$ sobre $x(U)$ y constrúyase la superficie desarrollable generada por las normales a $x(u, \text{const.})$ a lo largo de la curva $x(u, \text{const.})$ (cf. el ejercicio 3). La línea de estricción de esta superficie desarrollable se encuentra sobre $y(U)$ y, cuando $x(u, \text{const.})$ recorre $x(U)$, esta línea recorre $y(U)$ (fig. 3-46).

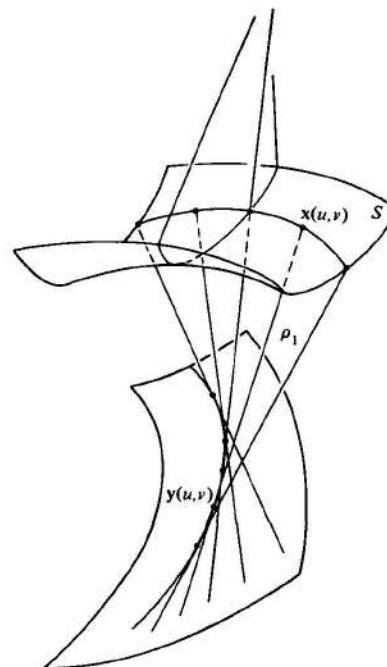


Figura 3-46. Construcción de una superficie focal.

10. El ejemplo 4 puede generalizarse como sigue. Una *familia uniparamétrica diferenciable de planos* $\{\alpha(t), N(t)\}$ es una correspondencia que asigna a cada $t \in I$ un punto $\alpha(t) \in R^3$ y un vector unitario $N(t) \in R^3$ de forma que tanto α como N son aplicaciones diferenciables. Se dice que una familia $\{\alpha(t), N(t)\}$, $t \in I$ es una *familia de planos tangentes* si $\alpha'(t) \neq 0$, $N(t)' \neq 0$ y $\langle \alpha'(t), N(t) \rangle = 0$ para todo $t \in I$.

- a. Demostrar que una familia uniparamétrica diferenciable de planos tangentes $\{\alpha(t), N(t)\}$ determina una familia uniparamétrica diferenciable de rectas $\{\alpha(t), (N \wedge N')/|N'|\}$ la cual genera la superficie desarrollable

$$\mathbf{x}(t, v) = \alpha(t) + v \frac{N \wedge N'}{|N'|}. \quad (*)$$

La superficie (*) se denomina la *envolvente de la familia* $\{\alpha(t), N(t)\}$.

- b. Demostrar que si $\alpha'(t) \wedge (N(t) \wedge N'(t)) \neq 0$ para todo $t \in I$, entonces la envolvente (*) es regular en un entorno de $v = 0$, y el vector unitario normal a \mathbf{x} en $(t, 0)$ es $N(t)$.
c. Sea $\alpha = \alpha(s)$ una curva en R^3 parametrizada por la longitud de arco. Admitamos que la curvatura $k(s)$ y la torsión $\tau(s)$ de α nunca se anulan. Demuéstrese que la familia de planos osculadores $\{\alpha(s), b(s)\}$ es una familia uniparamétrica diferenciable de planos tangentes y que la envolvente de esta familia es la superficie tangente a $\alpha(s)$ (cf. el ejemplo 5, sec. 2.3).

11. Sea $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ una superficie parametrizada regular. Una *superficie paralela* a \mathbf{x} es una superficie parametrizada de la forma

$$\mathbf{y}(u, v) = \mathbf{x}(u, v) + aN(u, v),$$

donde a es una constante.

- a. Demostrar que $y_u \wedge y_v = (1 - 2Ha + Ka^2)(x_u \wedge x_v)$, donde K y H son las curvaturas gaussiana y media de \mathbf{x} , respectivamente.
b. Pruébese que en los puntos regulares la curvatura gaussiana de \mathbf{y} es

$$\frac{K}{1 - 2Ha + Ka^2}$$

y la curvatura media de \mathbf{y} es

$$\frac{H - Ka}{1 - 2Ha + Ka^2}.$$

- c. Sea \mathbf{x} una superficie cuya curvatura media es constantemente igual a c , $c \neq 0$, y considérese la superficie paralela a \mathbf{x} , a una distancia $1/2c$. Demostrar que esta superficie paralela tiene la curvatura gaussiana constantemente igual a $4c^2$.
12. Demostrar que no existen superficies mínimas compactas (es decir, cerradas y acotadas en R^3).
13. a. Sea S una superficie regular sin puntos umbílicos. Demostrar que S es una superficie mínima si y sólo si la aplicación de Gauss $N: S \rightarrow S^2$ satisface, cualesquiera que sean $p \in S$ y $w_1, w_2 \in T_p(S)$,

$$\langle dN_p(w_1), dN_p(w_2) \rangle_{N(p)} = \lambda(p) \langle w_1, w_2 \rangle_p,$$

donde $\lambda(p) \neq 0$ es un número que sólo depende de p .

- b. Sea $\mathbf{x}: U \rightarrow S^2$ una parametrización de la esfera unidad S^2 mediante la proyección estereográfica. Consideremos un entorno V de un punto p , en la superficie mínima S de la parte a, tal que la restricción de $N: S \rightarrow S^2$ a V sea un difeomorfismo (como $K(p) = \det(dN_p) \neq 0$, la existencia de un entorno V de este tipo se deduce del teorema de la función inversa). Demuéstrese que la parametrización $y = N^{-1} \circ \mathbf{x}: U \rightarrow S$ es isotérmica (esto proporciona una manera de introducir las parametrizaciones isotérmicas en las superficies mínimas sin puntos planos).

14. Cuando dos funciones diferenciables $f, g: U \subset R^2 \rightarrow R$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial v}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{\partial g}{\partial u},$$

se comprueba sin dificultad que son armónicas; en este caso se dice que f y g son *armónicas conjugadas*. Sean \mathbf{x} e \mathbf{y} parametrizaciones isotérmicas de superficies mínimas tales que sus funciones componentes son armónicas conjugadas dos a dos; entonces \mathbf{x} e \mathbf{y} se denominan *superficies mínimas conjugadas*. Demuéstrese que

- a. El helicoide y el catenoide son superficies mínimas conjugadas.

- b. Dadas dos superficies mínimas conjugadas, x e y , la superficie

$$z = (\cos t)x + (\sin t)y \quad (*)$$

es también una superficie mínima para todo $t \in R$.

- c. Todas las superficies de la familia uniparamétrica (*) tienen la misma forma fundamental: $E = \langle x_u, y_u \rangle$.

En consecuencia, cualquier pareja de superficies mínimas conjugadas puede conectarse mediante una familia uniparamétrica de superficies mínimas, siendo la primera forma fundamental de esta familia independiente de t .

Apéndice

APLICACIONES LINEALES AUTOADJUNTAS Y FORMAS CUADRATICAS

En este apéndice, denotaremos por V a un espacio vectorial de dimensión 2 dotado de un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Todo lo que sigue puede extenderse sin dificultad a un espacio vectorial de dimensión n , pero por simplicidad sólo trataremos con el caso $n = 2$.

Decimos que una aplicación lineal $A: V \rightarrow V$ es *autoadjunta* si $\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle$ para todo $v, w \in V$.

Nótese que si $\{e_1, e_2\}$ es una base ortonormal de V y $(a_{ij}), i, j = 1, 2$ es la matriz de A con respecto a esta base, entonces

$$\langle Ae_i, e_j \rangle = a_{ij} = \langle e_i, Ae_j \rangle = \langle Ae_j, e_i \rangle = a_{ji};$$

es decir, la matriz (a_{ij}) es simétrica.

A cada aplicación lineal autoadjunta le asociamos una aplicación $B: V \times V \rightarrow R$ definida por

$$B(v, w) = \langle Av, w \rangle.$$

Es claro que B es bilineal; es decir, es lineal en v y w por separado. Además, el hecho de que A sea autoadjunta implica que $B(v, w) = B(w, v)$; o sea, B es una forma bilineal simétrica en V .

Recíprocamente, si B es una forma bilineal simétrica en V , podemos definir una aplicación lineal $A: V \rightarrow V$ mediante $\langle Av, w \rangle = B(v, w)$ y la simetría de B implica que A es autoadjunta.

Por otra parte, a cada forma bilineal simétrica B en V le corresponde una forma cuadrática Q en V definida por

$$Q(v) = B(v, v), \quad v \in V,$$

y el conocimiento de Q determina completamente a B , ya que

$$B(u, v) = \frac{1}{2}[Q(u + v) - Q(u) - Q(v)].$$

De esta forma, se establece una correspondencia inyectiva entre las formas cuadráticas en V y las aplicaciones lineales autoadjuntas de V .

El objetivo de este apéndice es demostrar (véase el teorema que sigue) que dada una aplicación lineal autoadjunta $A: V \rightarrow V$, existe una base ortonormal de V tal que la matriz de A con respecto a esta base es diagonal. Además, los elementos de la diagonal principal son el máximo y el mínimo de la correspondiente forma cuadrática restringida al círculo unidad de V .

LEMA. Si la restricción de la función $Q(x, y) = ax^2 + 2bx + cy^2$ al círculo unidad $x^2 + y^2 = 1$, tiene un máximo en el punto $(1, 0)$, entonces $b = 0$.

Demostración. Parametricemos el círculo $x^2 + y^2 = 1$ por $x = \cos t, y = \sin t, t \in (0 - \epsilon, 2\pi + \epsilon)$. Así, la restricción de Q a al círculo, se convierte en una función de t :

$$Q(t) = a \cos^2 t + 2b \cos t \sin t + c \sin^2 t.$$

Como Q tiene un máximo en el punto $(1, 0)$ concluimos

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{t=0} = 2b = 0.$$

De donde, $b = 0$, que es lo que buscábamos.

Q.E.D.

PROPOSICION. Dada una forma cuadrática Q en V , existe una base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de V tal que si $v \in V$ viene dado por $v = xe_1 + ye_2$, entonces

$$Q(v) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2,$$

donde λ_1 y λ_2 son, respectivamente, el máximo y el mínimo de Q sobre el círculo unidad $|v| = 1$.

Demostración. Sea λ_1 el máximo de Q sobre el círculo $|v| = 1$ y sea e_1 un vector unitario donde $Q(e_1) = \lambda_1$. La continuidad de Q sobre el conjunto compacto $|v| = 1$ garantiza la existencia de tal e_1 . Sea e_2 un vector unitario ortogonal a e_1 y pongamos $\lambda_2 = Q(e_2)$. Vamos a demostrar que la base $\{e_1, e_2\}$ satisface las condiciones de la proposición.

Sea B la forma bilineal simétrica asociada a Q y tomemos $v = xe_1 + ye_2$. Entonces

$$\begin{aligned} Q(v) &= B(v, v) = B(xe_1 + ye_2, xe_1 + ye_2) \\ &= \lambda_1 x^2 + 2bxy + \lambda_2 y^2, \end{aligned}$$

donde $b = B(e_1, e_2)$. Por el lema, $b = 0$, y sólo resta probar que λ_2 es el mínimo de Q en el círculo $|v| = 1$. Esto es inmediato porque, para cualquier $v = xe_1 + ye_2$ con $x^2 + y^2 = 1$, tenemos que

$$Q(v) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 \geq \lambda_2(x^2 + y^2) = \lambda_2,$$

a que $\lambda_1 \leq \lambda_2$.

Q.E.D.

Decimos que un vector $v \neq 0$ es un *autovector* de la aplicación lineal $A: V \rightarrow V$ si $Av = \lambda v$ para algún número real λ ; en ese caso λ se denomina un *autovalor* de A .

TEOREMA. Sea $A: V \rightarrow V$ una aplicación lineal autoadjunta. Entonces existe una base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de V tal que $A(e_1) = \lambda_1 e_1, A(e_2) = \lambda_2 e_2$; es decir, e_1 y e_2 son autovectores y λ_1, λ_2 son autovalores de A . En la base $\{e_1, e_2\}$, la matriz de A es claramente diagonal y los elementos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 \geq \lambda_2$, de la diagonal principal son, respectivamente, el máximo y el mínimo de la forma cuadrática $Q(v) = \langle Av, v \rangle$ sobre el círculo unidad de V .

Demostración. Consideremos la forma cuadrática $Q(v) = \langle Av, v \rangle$. Por la proposición precedente, existe una base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de V , con $Q(e_1) = \lambda_1, Q(e_2) = \lambda_2 \leq \lambda_1$, donde λ_1 y λ_2 son, respectivamente, el máximo y el mínimo de Q sobre el círculo unidad. Por tanto, sólo falta por demostrar que

$$A(e_1) = \lambda_1 e_1, \quad A(e_2) = \lambda_2 e_2$$

Como $B(e_1, e_2) = \langle Ae_1, e_2 \rangle = 0$, por el lema, y $e_2 \neq 0$, tenemos que o bien Ae_1 es paralelo a e_1 o bien $Ae_1 = 0$. Si Ae_1 es paralelo a e_1 , entonces $Ae_1 = \alpha e_1$, y, como $\langle Ae_1, e_1 \rangle = \lambda_1 = \langle \alpha e_1, e_1 \rangle = \alpha$, concluimos que $Ae_1 = \lambda_1 e_1$; si $Ae_1 = 0$, entonces $\lambda_1 = \langle Ae_1, e_1 \rangle = 0$ y $Ae_1 = 0 = \lambda_1 e_1$. Tenemos así, en cualquier caso, que $Ae_1 = \lambda_1 e_1$.

Usando ahora el hecho de que

$$B(e_1, e_2) = \langle Ae_2, e_1 \rangle = 0$$

y que

$$\langle Ae_2, e_2 \rangle = \lambda_2,$$

podemos probar de la misma manera que $Ae_2 = \lambda_2 e_2$.

Q.E.D.

Observación. La extensión de los resultados precedentes a espacios vectoriales de dimensión n , $n > 2$, sólo requiere tomar la siguiente precaución. En la proposición previa, elegimos $\lambda_1 = Q(e_1)$ como el máximo de Q en la esfera unidad y entonces demostramos que Q restringida al subespacio ortogonal a e_1 , V_1 , es una forma cuadrática en V_1 . Tomamos $\lambda_2 = Q(e_2)$ como el máximo de Q_1 sobre la esfera unidad de V_1 , y así sucesivamente.

Capítulo 4

GEOMETRIA INTRINSECA DE SUPERFICIES

4.1. Introducción

En el cap. 2 introdujimos la primera forma fundamental de una superficie S y mostramos cómo podía utilizarse para calcular conceptos métricos simples en S (longitud, ángulo, área, etc.). El punto importante es que tales cálculos pueden efectuarse sin «abandonar» la superficie, una vez que se conoce la primera forma fundamental. Por esta razón, se dice que estos conceptos son intrínsecos a la superficie S .

Sin embargo, la geometría de la primera forma fundamental no se agota con los conceptos simples antes mencionados. Como veremos en este capítulo, muchas propiedades locales importantes de una superficie pueden expresarse solamente en términos de la primera forma fundamental. El estudio de tales propiedades se denomina la *geometría intrínseca* de la superficie. Este capítulo está dedicado a geometría intrínseca.

En la sec. 4.2 definiremos la noción de isometría, la cual esencialmente confiere precisión a la idea intuitiva de que dos superficies tengan «la misma» forma fundamental primera.

En la sec. 4.3 demostraremos la célebre fórmula de Gauss que expresa la curvatura gaussiana K como una función de los coeficientes de la primera forma fundamental y de sus derivadas. Esto significa que K es un concepto intrínseco, un hecho bastante sorprendente si tenemos en cuenta que K se definió utilizando la segunda forma fundamental.

En la sec. 4.4 comenzaremos un estudio sistemático de la geometría intrínseca. Se pondrá de manifiesto que el tema puede unificarse mediante el concepto de derivada covariante de un campo vectorial sobre una superficie. Este concepto generaliza la derivada usual de un campo vectorial en el plano y juega un papel fundamental a lo largo del capítulo.

La sec. 4.5 se dedica al teorema de Gauss-Bonnet en sus versiones local y global. Probablemente éste es el teorema más importante del presente libro. Incluso en un curso breve, debería hacerse un esfuerzo por llegar a la sec. 4.5.

En la sec. 4.6 definiremos la aplicación exponencial y la utilizaremos para definir dos sistemas de coordenadas especiales, a saber, las coordenadas normales y las coordenadas polares geodésicas.

En la sec. 4.7 acometeremos algunos puntos delicados de la teoría de geodésicas que se dejaron de lado en las secciones previas. Por ejemplo, demostraremos la existencia, para cada punto p de una superficie S , de un entorno de p en S que es un entorno normal de todos sus puntos (la definición de entorno normal se introduce en la sec. 4.6). Este resultado y otro relacionado se utilizan en el cap. 5; sin embargo, quizás resulte conveniente admitirlos y omitir la sec. 4.7 en una primera lectura. También demostraremos la existencia de entornos convexos, aunque nunca se utilizarán en otra parte del libro.

4.2. Isometrías; aplicaciones conformes

Los ejemplos 1 y 2 de la sec. 2.5 exhiben una peculiaridad interesante. Aunque el cilindro y el plano son superficies distintas, sus formas fundamentales primeras son «iguales» (al menos en los entornos coordinados que hemos considerado). Esto significa que en lo concerniente a cuestiones métricas intrínsecas (longitud, ángulo, área), el plano y el cilindro se comportan de la misma manera localmente. (Esto intuitivamente es claro, ya que al cortar el cilindro a lo largo de una generatriz podríamos desplegarlo sobre una parte del plano.) En este capítulo veremos que muchos otros conceptos importantes asociados a una superficie regular únicamente dependen de la primera forma fundamental y deberían incluirse en la categoría de conceptos intrínsecos. Por lo tanto es conveniente que formulemos con precisión qué se entiende al decir que dos superficies tienen sus formas fundamentales primeras iguales.

Siempre consideraremos que S y \bar{S} son superficies regulares.

DEFINICIÓN 1. Un difeomorfismo $\varphi: S \rightarrow \bar{S}$ es una isometría si para todo $p \in S$ y todas las parejas $w_1, w_2 \in T_p(S)$ se tiene que

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}.$$

Se dice entonces que las superficies S y \bar{S} son isométricas.

En otras palabras, un difeomorfismo φ es una isometría si la diferencial $d\varphi$ preserva el producto interior. Siendo φ una isometría se sigue que,

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \langle d\varphi_p(w), d\varphi_p(w) \rangle_{\varphi(p)} = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w))$$

para todo $w \in T_p(S)$. Recíprocamente, si un difeomorfismo φ preserva la primera forma fundamental, es decir,

$$I_p(w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)) \quad \text{para todo } w \in T_p(S),$$

entonces

$$\begin{aligned} 2\langle w_1, w_2 \rangle &= I_p(w_1 + w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2) \\ &= I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1 + w_2)) - I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1)) - I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_2)) \\ &= 2\langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle, \end{aligned}$$

y, por tanto, φ es una isometría.

DEFINICIÓN 2. Una aplicación $\varphi: V \rightarrow \bar{S}$ de un entorno V de $p \in S$ es una isometría local en p si existe un entorno \bar{V} de $\varphi(p) \in \bar{S}$ tal que $\varphi: V \rightarrow \bar{V}$ es una isometría. Si en cada $p \in S$ existe una isometría local en \bar{S} , se dice que la superficie S es localmente isométrica a \bar{S} . S y \bar{S} son localmente isométricas si S es localmente isométrica a \bar{S} y \bar{S} es localmente isométrica a S .

Resulta claro que si $\varphi: S \rightarrow \bar{S}$ es un difeomorfismo y una isometría local para cada $p \in S$, entonces φ es (globalmente) una isometría. Sin embargo, pudiera suceder que dos superficies sean localmente isométricas sin ser (globalmente) isométricas, como muestra el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1. Sea φ una aplicación del entorno coordenado $\bar{x}(U)$ para el cilindro considerado en el ejemplo 2 de la sec. 2.5, en el plano $x(R^2)$ del ejemplo 1 de la sec. 2.5, definida por $\varphi = x \circ \bar{x}^{-1}$ (hemos cambiado x por \bar{x} en la parametrización del cilindro). Entonces la aplicación φ es una isometría local. De hecho, cada vector w , tangente al cilindro en un punto $p \in \bar{x}(U)$, es tangente a una curva $\bar{x}(u(t), v(t))$, donde $(u(t), v(t))$ es una curva en $U \subset R^2$. Así, w se puede escribir en la forma

$$w = \bar{x}_u u' + \bar{x}_v v'.$$

Por otra parte, $d\varphi(w)$ es tangente a la curva

$$\varphi(\bar{x}(u(t), v(t))) = x(u(t), v(t)).$$

Así, $d\varphi(w) = x_u u' + x_v v'$. Como $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$, $G = \bar{G}$, obtenemos

$$\begin{aligned} I_p(w) &= \bar{E}(u')^2 + 2\bar{F}u'v' + \bar{G}(v')^2 \\ &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2 = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)), \end{aligned}$$

como habíamos anunciado. Se deduce entonces que el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ es localmente isométrico a un plano.

La isometría no puede extenderse a la totalidad del cilindro porque el cilindro ni siquiera es homeomorfo a un plano. Una demostración rigurosa de la última afirmación nos llevaría demasiado lejos, pero con el siguiente argumento intuitivo podemos hacernos una idea de la demostración. Cualquier curva cerrada simple del plano puede deformarse continuamente hasta un punto sin abandonar el plano (fig. 4-1).

Tal propiedad se preservaría con toda seguridad bajo un homeomorfismo. Pero un paralelo del cilindro (fig. 4-1) no detenta esa propiedad, lo que contradice la existencia de un homeomorfismo entre el plano y el cilindro.

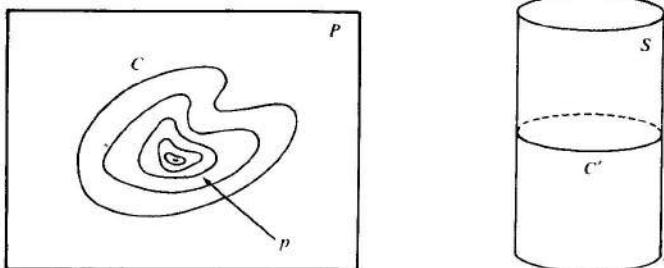


Figura 4-1. $C \subset P$ se puede deformar continuamente hasta un punto p sin abandonar P . No se cumple lo mismo para $C' \subset S$.

Antes de presentar otros ejemplos, vamos a generalizar el argumento precedente al fin de obtener un criterio para isometrías locales en términos de coordenadas locales.

PROPOSICIÓN 1. Admitamos la existencia de parametrizaciones $x: U \rightarrow S$ y $\bar{x}: \bar{U} \rightarrow \bar{S}$ tales que $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$, $G = \bar{G}$ en U . Entonces la aplicación $\varphi = \bar{x} \circ x^{-1}: x(U) \rightarrow \bar{S}$ es una isometría local.

Demostración. Sean $p \in x(U)$ y $w \in T_p(S)$. Entonces w es tangente a una curva $x(\alpha(t))$ en $t = 0$, donde $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ es una curva en U , por consiguiente, w se puede escribir ($t = 0$)

$$w = x_u u' + x_v v'.$$

Por definición, el vector $d\varphi_p(w)$ es el vector tangente a la curva $\bar{x} \circ x^{-1} \circ x(\alpha(t))$, es decir, a la curva $\bar{x}(\alpha(t))$ en $t = 0$ (fig. 4-2). Por tanto,

$$d\varphi_p(w) = \bar{x}_u u' + \bar{x}_v v'.$$

Como

$$\begin{aligned} I_p(w) &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2, \\ I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)) &= \bar{E}(u')^2 + 2\bar{F}u'v' + \bar{G}(v')^2, \end{aligned}$$

concluimos que $I_p(w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w))$ para todo $p \in x(U)$ y $w \in T_p(S)$; de donde φ es una isometría local.

Q.E.D.

Ejemplo 2. Sea S una superficie de revolución y

$$\begin{aligned} x(u, v) &= (f(v) \cos u, f(v) \sen u, g(v)), \\ a < v < b, \quad 0 < u < 2\pi, \quad f(v) > 0, \end{aligned}$$

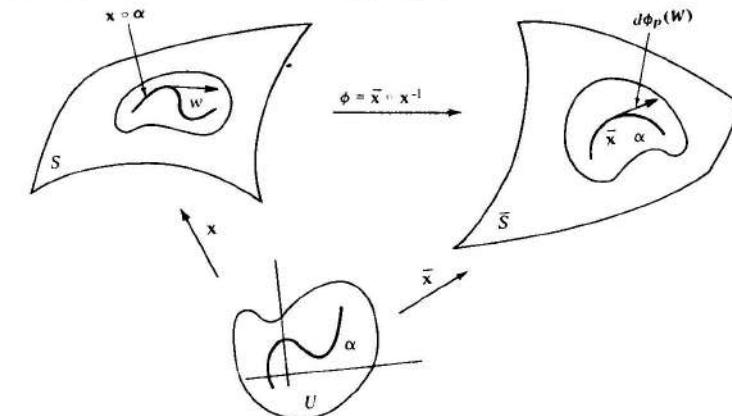


Figura 4-2

una parametrización de S (cf. el ejemplo 4, sec. 2.3). En la parametrización x , los coeficientes de la primera forma fundamental de S vienen dados por

$$E = (f(v))^2, \quad F = 0, \quad G = (f'(v))^2 + (g'(v))^2.$$

En particular, la superficie de revolución de la *catenaria*,

$$x = a \cosh v, \quad z = av, \quad -\infty < v < \infty,$$

tiene la siguiente parametrización:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sen u, av) \\ 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty, \end{aligned}$$

con respecto a la cual, los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$E = a^2 \cosh^2 v, \quad F = 0, \quad G = a^2 (1 + \operatorname{senh}^2 v) = a^2 \cosh^2 v.$$

Esta superficie de revolución se denomina *catenoide* (véase la fig. 4-3). Vamos a demostrar que el catenoide es localmente isométrico al helicoide del ejemplo 3, sec. 2-5.

Una parametrización del helicoide viene dada por

$$\bar{x}(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{v} \cos \bar{u}, \bar{v} \sen \bar{u}, a\bar{u}), \quad 0 < \bar{u} < 2\pi, \quad -\infty < \bar{v} < \infty.$$

Efectuemos el cambio de parámetros

$$\bar{u} = u, \quad \bar{v} = a \operatorname{senh} v, \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty,$$

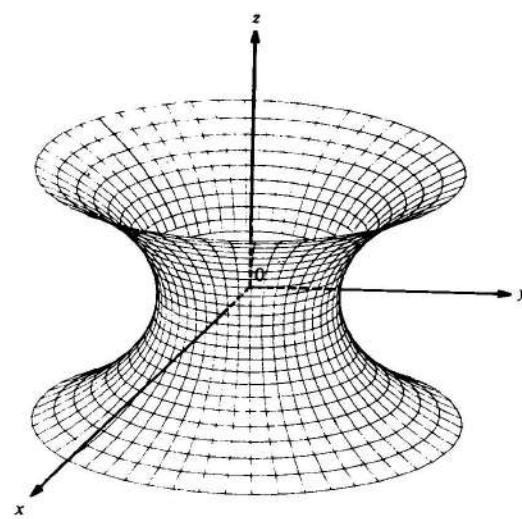


Figura 4-3. El catenoide.

que es legítimo ya que la aplicación es claramente inyectiva y el jacobiano

$$\frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial(u, v)} = a \cosh v$$

nunca se anula. Así, una nueva parametrización del helicoide es

$$\tilde{x}(u, v) = (a \operatorname{senh} v \cos u, a \operatorname{senh} v \operatorname{sen} u, au),$$

con respecto a la cual, los coeficientes de la primera forma fundamental vienen dados por

$$E = a^2 \cosh^2 v, \quad F = 0, \quad G = a^2 \cosh^2 v.$$

Haciendo uso de la prop. 1 concluimos que el catenoide y el helicoide son localmente isométricos.

La figura 4-4 ofrece una idea geométrica de cómo opera la isometría; aplica «una vuelta» del helicoide (entorno coordenado correspondiente a $0 < u < 2\pi$) en el catenoide exceptuando un meridiano.

Observación 1. La isometría entre el helicoide y el catenoide apareció ya en el cap. 3, en el contexto de las superficies mínimas; cf. el ejercicio 14, sec. 3.5.

Ejemplo 3. Vamos a demostrar que el cono de una hoja, exceptuando el vértice,

$$z = +k\sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

es localmente isométrico a un plano. La idea consiste en demostrar que el cono menos una generatriz puede «desplegarse» sobre un trozo de un plano.

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto abierto expresado en coordenadas polares (ρ, θ) mediante

$$0 < \rho < \infty, \quad 0 < \theta < 2\pi \operatorname{sen} \alpha,$$

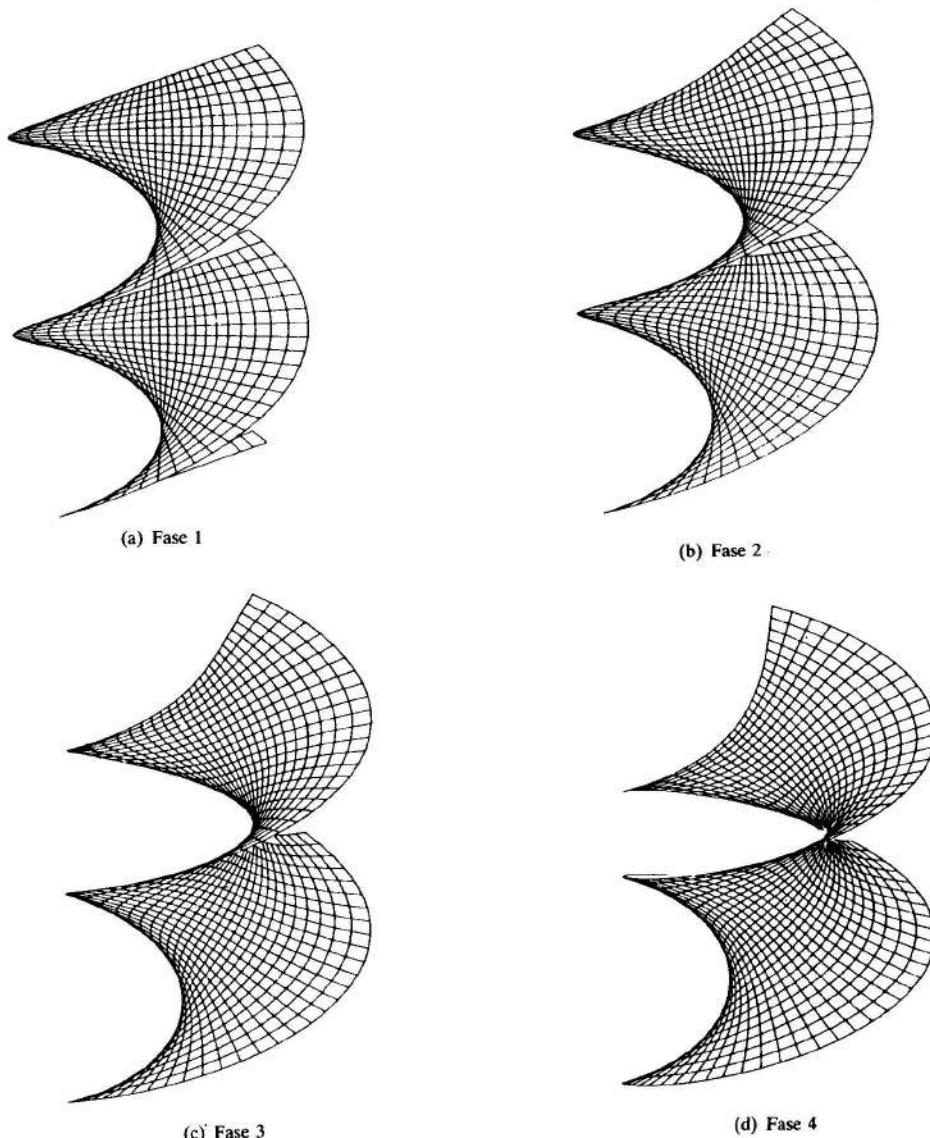
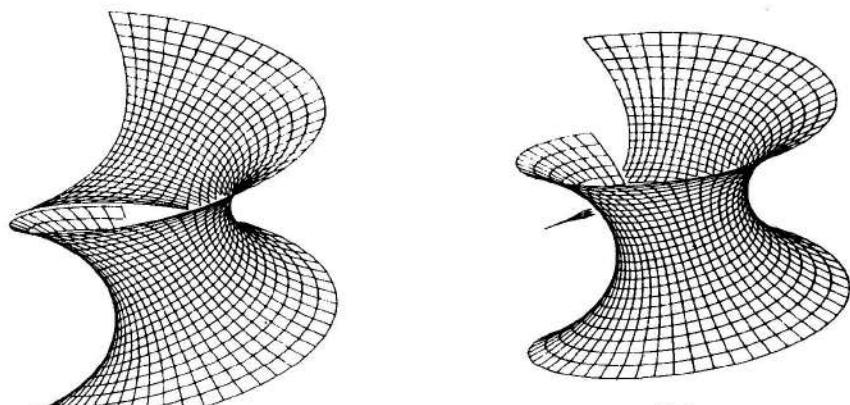
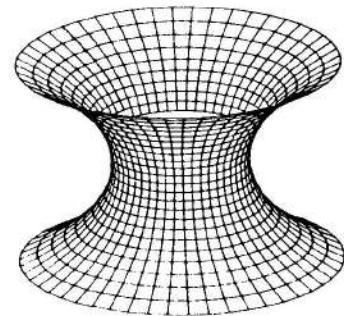


Figura 4-4. Deformación isométrica del helicoide en el catenoide.



(e) Fase 5

(f) Fase 6



(g) Fase 7

Figura 4-4

donde 2α ($0 < 2\alpha < \pi$) es el ángulo del vértice del cono (es decir, donde $\cotag \alpha = k$), y sea $F: U \rightarrow R^3$ la aplicación (fig. 4-5)

$$F(\varrho, \theta) = \left(\varrho \operatorname{sen} \alpha \cos \left(\frac{\theta}{\operatorname{sen} \alpha} \right), \varrho \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{\operatorname{sen} \alpha} \right), \varrho \cos \alpha \right).$$

Es claro que $F(U)$ está contenido en el cono porque

$$k\sqrt{x^2 + y^2} = \cotag \alpha \sqrt{\varrho^2 \operatorname{sen}^2 \alpha} = \varrho \cos \alpha = z.$$

Además, cuando θ recorre el intervalo $(0, 2\pi \operatorname{sen} \alpha)$, $\theta/\operatorname{sen} \alpha$ recorre el intervalo $(0, 2\pi)$. De esta forma, todos los puntos del cono exceptuando la generatriz $\theta = 0$, quedan cubiertos por $F(U)$.

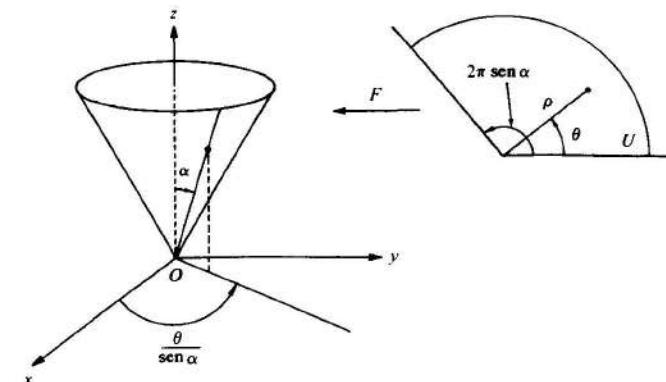


Figura 4-5

Se comprueba fácilmente que F y dF son inyectivas en U ; por lo tanto, F es un difeomorfismo de U sobre el cono menos una generatriz.

Vamos a demostrar ahora que F es una isometría. En efecto, podemos imaginarnos a U como una superficie regular, parametrizada por

$$\bar{x}(\varrho, \theta) = (\varrho \cos \theta, \varrho \operatorname{sen} \theta, 0), \quad 0 < \varrho < \infty, \quad 0 < \theta < 2\pi \operatorname{sen} \alpha.$$

En esta parametrización, los coeficientes de la primera forma fundamental de U son

$$\bar{E} = 1, \quad \bar{F} = 0, \quad \bar{G} = \varrho^2.$$

Por otra parte, los coeficientes de la primera forma fundamental del cono, en la parametrización $F \circ \bar{x}$ son

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \varrho^2.$$

En virtud a la prop. 1 concluimos que F es una isometría local, como pretendíamos establecer.

Observación 2. El hecho de que podamos calcular longitudes de curvas sobre una superficie S , utilizando únicamente su primera forma fundamental, nos permite introducir la noción de distancia «intrínseca» entre puntos de S . En líneas generales, definimos la *distancia* (intrínseca) $d(p, q)$ entre dos puntos de S como el ínfimo de las longitudes de curvas que unan a p con q sobre S . (Procederemos con más detalle en la sec. 5.3.) Es claro que esta distancia es mayor o igual que la distancia $\|p - q\|$ de p a q como puntos de R^3 (fig. 4-6). Demostraremos en el ejercicio 3 que la distancia d es invariante bajo isometrías; es decir, si $\varphi: S \rightarrow \hat{S}$ es una isometría, $d(p, q) = d(\varphi(p), \varphi(q))$, $p, q \in S$.

La noción de isometría es el concepto natural de equivalencia para las propiedades métricas de las superficies regulares. De la misma forma que superficies difeomorfas

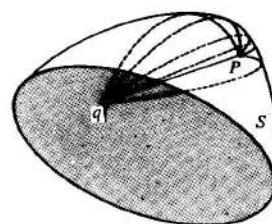


Figura 4-6

son equivalentes desde el punto de vista de la diferenciabilidad, las superficies isométricas lo son desde el punto de vista métrico.

Se pueden definir otros tipos de equivalencia en el estudio de superficies. Bajo nuestro punto de vista, los más importantes son los difeomorfismos y las isometrías. Sin embargo, cuando se trata con problemas asociados a funciones analíticas de variable compleja, es importante introducir el concepto de equivalencia conforme, que ahora discutiremos brevemente.

DEFINICION 3. Un difeomorfismo $\varphi: S \rightarrow \tilde{S}$ se denomina una aplicación conforme si para todo $p \in S$ y cualesquiera que sean $v_1, v_2 \in T_p(S)$ se tiene que

$$\langle d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2) \rangle = \lambda^2(p) \langle v_1, v_2 \rangle_p,$$

donde λ^2 es una función diferenciable no nula sobre S ; se dice entonces que las superficies S y \tilde{S} son conformes. Una aplicación $\varphi: V \rightarrow \tilde{S}$ de un entorno V de $p \in S$ en \tilde{S} es una aplicación conforme local en p si existe un entorno \tilde{V} de $\varphi(p)$ tal que $\varphi: V \rightarrow \tilde{V}$ es una aplicación conforme. Si para cada $p \in S$ existe una aplicación conforme local en p , se dice que la superficie S es localmente conforme a \tilde{S} .

El significado geométrico de la precedente definición es que se preservan los ángulos (pero no necesariamente las longitudes) bajo las aplicaciones conformes. En efecto, sean $\alpha: I \rightarrow S$ y $\beta: I \rightarrow S$ dos en S que se cortan en, por ejemplo, $t = 0$. El ángulo θ que forman en $t = 0$ viene dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha', \beta' \rangle}{|\alpha'| |\beta'|}, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Una aplicación conforme $\varphi: S \rightarrow \tilde{S}$ aplica estas curvas en las curvas $\varphi \circ \alpha: I \rightarrow \tilde{S}$, $\varphi \circ \beta: I \rightarrow \tilde{S}$, que se cortan en $t = 0$, formando un ángulo dado por

$$\cos \bar{\theta} = \frac{\langle d\varphi(\alpha'), d\varphi(\beta') \rangle}{|d\varphi(\alpha')| |d\varphi(\beta')|} = \frac{\lambda^2 \langle \alpha', \beta' \rangle}{\lambda^2 |\alpha'| |\beta'|} = \cos \theta,$$

como habíamos anunciado. No es difícil demostrar que esta propiedad caracteriza a las aplicaciones conformes locales (ejercicio 14).

La siguiente proposición es lo análogo de la proposición 1 para aplicaciones conformes; su demostración también se deja como ejercicio.

PROPOSICION 2. Sean $x: U \rightarrow S$ y $\tilde{x}: U \rightarrow \tilde{S}$ dos parametrizaciones tales que $E = \lambda^2 \tilde{E}$, $F = \lambda^2 \tilde{F}$, $G = \lambda^2$ en U , donde λ^2 es una función diferenciable que nunca se anula en U . Entonces la aplicación $\varphi = \tilde{x} \circ x^{-1}: x(U) \rightarrow \tilde{S}$ es una aplicación conforme local.

Se ve sin dificultad que la propiedad de ser localmente conforme es una relación de equivalencia; es decir, si S_1 es localmente conforme a S_2 y S_2 es localmente conforme a S_3 , entonces S_1 es localmente conforme a S_3 .

La propiedad más importante de las aplicaciones conformes se establece en el siguiente teorema, que no demostraremos.

TEOREMA. Dos superficies regulares cualesquiera son localmente conformes.

La demostración se basa en la posibilidad de parametrizar un entorno de cualquier punto de una superficie regular de forma que los coeficientes de la primera forma fundamental sean

$$E = \lambda^2(u, v) > 0, \quad F = 0, \quad G = \lambda^2(u, v).$$

Tal sistema coordenado se denomina *isotermo*. Una vez que se admite la existencia de un entorno coordinado isotermo en una superficie regular S , es claro que S es localmente conforme a un plano y, mediante la composición de aplicaciones, localmente conforme a cualquier otra superficie.

La demostración de que existen sistemas coordinados isotermos en cualquier superficie regular es delicada y no será desarrollada aquí. El lector interesado puede consultar la referencia L. Bets, *Riemann Surfaces*, New York University, Institute of Mathematical Sciences, New York, 1957-1958, pp. 15-35.

Observación 3. Ya aparecieron las parametrizaciones isotermas en el cap. 3, dentro del contexto de las superficies mínimas; cf. la proposición 2 y el ejercicio 13 de la sec. 3.5.

EJERCICIOS

1. Sea $F: U \subset R^2 \rightarrow R^3$ definida por

$$F(u, v) = (u \operatorname{sen} \alpha \cos v, u \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} v, u \cos \alpha), \\ (u, v) \in U = \{(u, v) \in R^2; u > 0\}, \quad \alpha = \operatorname{const.}$$

- a. Demostrar que F es un difeomorfismo local de U sobre un cono C con vértice en el origen y de ángulo 2α en el vértice.
b. ¿Es F una isometría local?

2. Demuéstrese el siguiente «recíproco» de la prop. 1: sean $\varphi: S \rightarrow S$ una isometría y $x: U \rightarrow S$ una parametrización en $p \in S$; entonces $\tilde{x} = \varphi \circ x$ es una parametrización en $\varphi(p)$ y $E = \tilde{E}$, $F = \tilde{F}$, $G = \tilde{G}$.
- *3. Demostrar que un difeomorfismo $\varphi: S \rightarrow S$ es una isometría si y sólo si la longitud de arco de cualquier curva parametrizada en S es igual a la longitud de arco de la curva imagen mediante φ .
4. Utilizar la proyección estereográfica (cf. el ejercicio 16, sec. 2.2) para demostrar que la esfera es localmente conforme a un plano.
5. Sean $\alpha_1: I \rightarrow R^3$, $\alpha_2: I \rightarrow R^3$ dos curvas parametrizadas regulares, siendo el parámetro la longitud de arco. Admitamos que las curvaturas k_1 de α_1 y k_2 de α_2 satisfacen $k_1(s) = k_2(s) \neq 0$, $s \in I$. Sean

$$\begin{aligned}x_1(s, v) &= \alpha_1(s) + v\alpha'_1(s), \\x_2(s, v) &= \alpha_2(s) + v\alpha'_2(s)\end{aligned}$$

sus correspondientes superficies (regulares) tangentes (cf. el ejemplo 5, sec. 2.3) y sea V un entorno de (s_0, v_0) tal que $x_1(V) \subset R^3$, $x_2(V) \subset R^3$ son superficies regulares (cf. la prop. 2, sec. 2.3). Demostrar que $x_1 \circ x_1^{-1}: x_2(V) \rightarrow x_1(V)$ es una isometría.

- *6. Sea $\alpha: I \rightarrow R^3$ una curva parametrizada regular con $k(t) \neq 0$, $t \in I$. Sea $x(t, v)$ la superficie tangente de α . Demuéstrese que, para cada $(t_0, v_0) \in I \times (R - \{0\})$, existe un entorno V de (t_0, v_0) tal que $x(V)$ es isométrica a un conjunto abierto del plano (*en consecuencia, las superficies tangentes son localmente isométricas a los planos*).
7. Sean V y W dos espacios vectoriales (de dimensión finita) con la misma dimensión, cuyos productos interiores se denotan por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y sea $F: V \rightarrow W$ una aplicación lineal. Demuéstrese que las condiciones siguientes son equivalentes:
- $\langle F(v_1), F(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$ para todo $v_1, v_2 \in V$.
 - $|F(v)| = |v|$ para todo $v \in V$.
 - Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base ortonormal de V , entonces $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ es una base ortonormal de W .
 - Existe una base ortonormal $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V tal que $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ es una base ortonormal de W .

Si se satisface alguna de estas condiciones, F se denomina una *isometría lineal* de V en W (cuando $W = V$, una isometría lineal se denomina *transformación ortogonal*).

- *8. Sea $G: R^3 \rightarrow R^3$ una aplicación tal que

$$|G(p) - G(q)| = |p - q| \quad \text{para todo } p, q \in R^3$$

(es decir, G es una aplicación que *preserva las distancias*). Demuéstrese que existe $p_0 \in R^3$ y una isometría lineal (cf. el ejercicio 7) F del espacio vectorial R^3 tal que

$$G(p) = F(p) + p_0 \quad \text{para todo } p \in R^3.$$

9. Sean S_1 , S_2 y S_3 superficies regulares. Demuéstrese que

- Si $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ es una isometría, entonces $\varphi^{-1}: S_2 \rightarrow S_1$ también es una isometría.
- Si $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$, $\psi: S_2 \rightarrow S_3$ son isometrías, entonces $\psi \circ \varphi: S_1 \rightarrow S_3$ es una isometría.

Esto implica que las isometrías de una superficie regular constituyen, de manera natural, un grupo, denominado el *grupo de las isometrías* de S .

10. Sea S una superficie de revolución. Demostrar que las rotaciones alrededor de su eje son isometrías de S .

- *11. a. Sea $S \subset R^3$ una superficie regular y sea $f: R^3 \rightarrow R^3$ una aplicación de R^3 que preserva las distancias (véase el ejercicio 8) tal que $F(S) \subset S$. Demuéstrese que la restricción de f a S es una isometría de S .
- b. Utilizar la parte a para demostrar que el grupo de isometrías (véase el ejercicio 10) de la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ contiene al grupo de las transformaciones lineales ortogonales de R^3 (en realidad es igual a éste; véase el ejercicio 23, sec. 4.4).
- c. Póngase un ejemplo que pruebe la existencia de isometrías $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ que no pueden extenderse a aplicaciones $F: R^3 \rightarrow R^3$ que preservan las distancias.

- *12. Sea $C = \{(x, y, z) \in R^3; x^2 + y^2 = 1\}$ un cilindro. Constrúyase una isometría $\varphi: C \rightarrow C$ tal que el conjunto de puntos fijos de φ , es decir, el conjunto $\{p \in C; \varphi(p) = p\}$, contenga exactamente dos puntos.

13. Sean V y W dos espacios vectoriales (de dimensión finita) con la misma dimensión y productos interiores $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sea $G: V \rightarrow W$ una aplicación lineal. Demuéstrese que las siguientes condiciones son equivalentes:

- a. Existe una constante real $\lambda \neq 0$ tal que

$$\langle G(v_1), G(v_2) \rangle = \lambda^2 \langle v_1, v_2 \rangle \quad \text{para todo } v_1, v_2 \in V.$$

- b. Existe una constante real $\lambda > 0$ tal que

$$|G(v)| = \lambda |v| \quad \text{para todo } v \in V.$$

- c. Existe una base ortonormal $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V tal que $\{G(v_1), \dots, G(v_n)\}$ es una base ortonormal de W , teniendo todos los vectores $G(v_i)$, $i = 1, \dots, n$, la misma longitud (no nula).

Si se satisface una cualquiera de estas condiciones, G se denomina una *aplicación lineal conforme* (o una *semejanza*).

14. Decimos que una aplicación diferenciable $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ *preserva los ángulos* cuando para cada $p \in S_1$ y cada pareja $v_1, v_2 \in T_p(S_1)$ tenemos

$$\cos(v_1, v_2) = \cos(d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2)).$$

Demuéstrese que φ es conforme localmente si y sólo si preserva ángulos.

15. Sea $\varphi: R^2 \rightarrow R^2$ definida por $\varphi(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, donde u y v son funciones diferenciables que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

Demuéstrese que φ es una aplicación conforme local de $R^2 - Q$ en R^2 , donde $Q = \{(x, y) \in R^2; u_x^2 + v_y^2 = 0\}$.

- 16.** Sea $x: U \subset R^2 \rightarrow R^3$, donde

$$U = \{(\theta, \varphi) \in R^2; 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\},$$

una parametrización de la esfera unidad S^2 . Sean

$$\log \operatorname{tag} \frac{1}{2} \theta = u, \quad \varphi = v.$$

Demuéstrese que una nueva parametrización del entorno coordenado $x(U) = V$ viene dada por

$$\mathbf{y}(u, v) = (\operatorname{sech} u \cos v, \operatorname{sech} u \sin v, \operatorname{tanh} u).$$

Demostrar que en esta parametrización y los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$E = G = \operatorname{sech}^2 \mu, \quad F = 0.$$

De esta forma, $y^{-1}: V \subset S^2 \rightarrow R^2$ es una aplicación conforme que transforma los meridianos y los paralelos de S^2 en rectas del plano. Esta es la denominada **proyección Mercator**.

- *17. Considérese un triángulo sobre la esfera unidad de forma que sus lados estén constituidos por segmentos de loxodromas (es decir, curvas que forman un ángulo constante con los meridianos; cf. el ejemplo 4, sec. 2.5) que no contienen polos. Demuéstrese que la suma de los ángulos interiores de tal triángulo es π .

18. Se dice que un difeomorfismo $\varphi: S \rightarrow \bar{S}$ preserva las áreas si el área de cualquier región $R \subset S$ es igual al área de $\varphi(R)$. Demostrar que si φ preserva las áreas y es conforme entonces φ es una isometría.

$$\varphi: S^2 - \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\} = M \rightarrow C$$

la aplicación definida como sigue. Para cada $p \in M$, se considera la recta que pasa por p y que, siendo perpendicular al eje Oz , corta al eje Oz en el punto q . Sea l la semirrecta que empieza en q y contiene a p (fig. 4-7). Por definición $\alpha(p) = C \cap l$.

Demostrar que φ es un difeomorfismo que preserva las áreas.

20. Sea $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ la parametrización de una superficie de revolución S .

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)), \quad f(v) > 0,$$

$$U = \{(u, v) \in R^2 : 0 \leq u \leq 2\pi, a \leq v \leq b\}$$

- a. Demuéstrese que la aplicación $m: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\varphi(u, v) = \left(u, \int \frac{\sqrt{(f'(v))^2 + (g'(v))^2}}{f(v)} dv \right)$$

es un difeomorfismo local

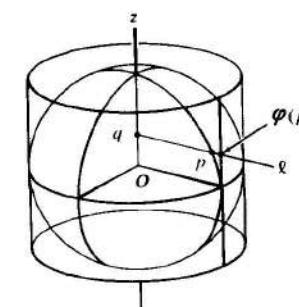


Figura 4-7

- b. Utilizar la parte a para demostrar que una superficie de revolución S es localmente conforme a un plano, de forma que, cada aplicación conforme local $\theta: V \subset S \rightarrow R^2$ aplica los paralelos y los meridianos del entorno V en un sistema ortogonal de rectas contenido en $\theta(V) \subset R^2$. (Obsérvese que esto constituye una generalización de la proyección Mercator del ejercicio 16.)

c. Demuéstrese que la aplicación $\psi: U \rightarrow R^2$ definida por

$$\psi(u, v) = \left(u, \int f(v) \sqrt{(f'(v))^2 + (g'(v))^2} dv \right)$$

es un difeomorfismo local

- d. Utilizar la parte c para demostrar que por cada punto p de una superficie de revolución S existe un entorno $V \subset S$ y una aplicación $\theta: V \rightarrow \mathbb{R}^2$ de V en el plano, que preserva las áreas.

4.3 El teorema de Gauss y las ecuaciones de compatibilidad

Las propiedades del cap. 3 se obtuvieron a partir del estudio de la variación del plano tangente en el entorno de un punto. Procediendo por analogía con las curvas, vamos a asignar un triedro a cada punto de una superficie (lo análogo al triedro de Frenet) y a estudiar las derivadas de sus vectores.

Como ya es habitual, denotaremos por S a una superficie regular, orientable y orientada. Sea $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización en la orientación de S . A cada punto de $\mathbf{x}(U)$ le podemos asignar un triángulo natural definido por los vectores $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ y N . Será el objetivo de esta sección el estudio de este triángulo.

Al expresar las derivadas de los vectores \mathbf{x}_u , \mathbf{x}_v y N con respecto a la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + L_1 N, \\ \mathbf{x}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + L_2 N, \\ \mathbf{x}_{vu} &= \Gamma_{21}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{21}^2 \mathbf{x}_v + L_2 N, \\ \mathbf{x}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + L_3 N, \\ N_u &= a_{11} \mathbf{x}_u + a_{21} \mathbf{x}_v, \\ N_v &= a_{12} \mathbf{x}_u + a_{22} \mathbf{x}_v, \end{aligned} \tag{1}$$

donde los a_{ij} , $i, j = 1, 2$, se obtuvieron en el cap. 3 y los otros coeficientes están por determinarse. Los coeficientes Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2$, se denominan los símbolos de Christoffel de S en la parametrización x . Como $x_{uv} = x_{vu}$, concluimos que $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$ y $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$; es decir, los símbolos de Christoffel son simétricos con respecto a los subíndices.

Efectuando el producto interior de las cuatro primeras relaciones de (1) con N , obtenemos inmediatamente $L_1 = e$, $L_2 = L_2 = f$, $L_3 = g$, donde e, f, g son los coeficientes de la segunda forma fundamental de S .

Para determinar los símbolos de Christoffel, efectuamos el producto interior de las cuatro primeras relaciones con x_u y x_v , obteniendo el sistema

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle x_{uu}, x_u \rangle = \frac{1}{2}E_u, \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle x_{uu}, x_v \rangle = F_u - \frac{1}{2}E_v, \\ \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \langle x_{uv}, x_u \rangle = \frac{1}{2}E_v, \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \langle x_{uv}, x_v \rangle = \frac{1}{2}G_u, \\ \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \langle x_{vv}, x_u \rangle = F_v - \frac{1}{2}G_u, \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \langle x_{vv}, x_v \rangle = \frac{1}{2}G_v. \end{cases} \quad (2)$$

Nótese que las ecuaciones precedentes se han agrupado en tres pares de ecuaciones y que, para cada par, el determinante del sistema es $EG - F^2 \neq 0$. De esta forma, es posible resolver el sistema de arriba y calcular los símbolos de Christoffel en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental E, F, G y de sus derivadas. En vista de que es más fácil trabajar con el sistema (2) en cada caso particular, no vamos a obtener ahora las expresiones explícitas de los Γ_{ij}^k (véase más adelante el ejemplo 1). Sin embargo, es muy importante la siguiente consecuencia del hecho de que podamos resolver el sistema (2): todos los conceptos geométricos y propiedades que se expresen en términos de los símbolos de Christoffel son invariantes frente a isometrías.

Ejemplo 1. Vamos a calcular los símbolos de Christoffel para una superficie de revolución parametrizada por (cf. el ejemplo 4, sec. 2.3)

$$x(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)), \quad f(v) \neq 0.$$

Como

$$E = (f(v))^2, \quad F = 0, \quad G = (f'(v))^2 + (g'(v))^2,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} E_u &= 0, & E_v &= 2ff', \\ F_u &= F_v = 0, & G_u &= 0, \\ G_v &= 2(f'f'' + g'g''), \end{aligned}$$

donde las primeras denotan derivadas con respecto a v . La solución de las dos primeras ecuaciones del sistema (2) es

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}.$$

A continuación, el segundo par de ecuaciones del sistema (2) conduce a

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{ff'}{f^2}, \quad \Gamma_{12}^2 = 0.$$

Finalmente, de las dos últimas ecuaciones del sistema (2) obtenemos

$$\Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}.$$

Justamente como acabamos de ver, las expresiones de las derivadas de x_u, x_v y N con respecto a la base $\{x_u, x_v, N\}$, únicamente dependen de que se conozcan los coeficientes de la primera y la segunda forma fundamental de S . Un procedimiento para obtener relaciones entre estos coeficientes consiste en considerar las expresiones

$$\begin{aligned} (x_{uu})_v - (x_{uv})_u &= 0, \\ (x_{vv})_u - (x_{vu})_v &= 0, \\ N_{uv} - N_{vu} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Al introducir los valores de (1), podemos escribir estas relaciones en la forma

$$\begin{aligned} A_1 x_u + B_1 x_v + C_1 N &= 0, \\ A_2 x_u + B_2 x_v + C_2 N &= 0, \\ A_3 x_u + B_3 x_v + C_3 N &= 0, \end{aligned} \quad (3a)$$

donde $A_i, B_i, C_i, i = 1, 2, 3$, son funciones de E, F, G, e, f, g y de sus derivadas. Como los vectores x_u, x_v, N son linealmente independientes, (3a) implica la existencia de nueve relaciones:

$$A_i = 0, \quad B_i = 0, \quad C_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

A título de ejemplo, vamos a determinar las relaciones $A_1 = 0, B_1 = 0, C_1 = 0$. Haciendo uso de los valores de (1), la primera relación en (3) puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 x_{uv} + \Gamma_{11}^2 x_{vv} + e N_v + (\Gamma_{11}^1)_v x_u + (\Gamma_{11}^2)_v x_v + e_v N \\ = \Gamma_{12}^1 x_{uu} + \Gamma_{12}^2 x_{vu} + f N_u + (\Gamma_{12}^1)_u x_u + (\Gamma_{12}^2)_u x_v + f_u N. \end{aligned} \quad (4)$$

Usando de nuevo (1) y la ecuación de los coeficientes de x_u , obtenemos

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 + ea_{22} + (\Gamma_{11}^2)_u \\ = \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{21}^2 + fa_{21} + (\Gamma_{12}^2)_u.\end{aligned}$$

Introduciendo los valores ya calculados de a_{ij} (cf. la sec. 3.3) se deduce que

$$\begin{aligned}(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1\Gamma_{21}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 \\ = -E \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ = -EK. \quad (5)\end{aligned}$$

Es conveniente interrumpir nuestros cálculos para centrar la atención en el hecho de que las ecuaciones precedentes prueban el siguiente teorema, debido a K. F. Gauss.

TEOREMA EGREGIUM (Gauss). *La curvatura gaussiana K de una superficie es invariante frente a isometrías locales.*

En efecto, si $x: U \subset R^2 \rightarrow S$ es una parametrización en $p \in S$ y si $\varphi: V \subset S \rightarrow S$, donde $V \subset x(U)$ es un entorno de p , es una isometría local en p , entonces $y = \varphi \circ x$ es una parametrización de S en $\varphi(p)$. Como φ es una isometría, los coeficientes de la primera forma fundamental de las parametrizaciones x e y , en los puntos correspondientes q y $\varphi(q)$, $q \in V$, coinciden; de esta forma, también coinciden los símbolos de Christoffel correspondientes. En virtud a la ec. (5), K puede calcularse en un punto, en función de los símbolos de Christoffel de la parametrización considerada en dicho punto. Se deduce entonces que $K(q) = K(\varphi(q))$ para todo $q \in V$.

La expresión precedente, que expresa el valor de K en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental y de sus derivadas, se conoce como la *fórmula de Gauss*. Se demostró por primera vez en un famoso artículo de Gauss [1].

El teorema de Gauss es considerado, por sus extensas consecuencias, como uno de los resultados más importantes de la geometría diferencial. Sólo mencionaremos, por el momento, el corolario siguiente.

Como se demostró en la sec. 4.2, un catenoide es localmente isométrico a un helicoide. Del teorema de Gauss se deduce que las curvaturas gaussianas son iguales en los puntos correspondientes, hecho que no es trivial desde el punto de vista geométrico.

Es realmente notable que un concepto como la curvatura gaussiana, cuya definición hace uso esencial de la posición de una superficie en el espacio, no dependa de dicha posición sino, únicamente, de la estructura métrica (la primera forma fundamental) de la superficie.

En la siguiente sección veremos que muchos otros conceptos de la geometría diferencial están en el mismo caso que la curvatura gaussiana; es decir, dependen únicamente de la primera forma fundamental de una superficie. Esto nos permite

alguna al espacio que contiene a la superficie (una vez que se conozca la primera forma fundamental)¹.

Volvamos a nuestros cálculos, con la vista puesta en un nuevo resultado geométrico. Igualando los coeficientes de x_u en (4), se observa que la relación $A_1 = 0$ puede escribirse en la forma

$$(\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^1\Gamma_{21}^1 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{22}^1 = FK. \quad (5a)$$

Igualando también en la ec. (4) los coeficientes de N , obtenemos $C_1 = 0$ bajo la forma

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2) - g\Gamma_{11}^2. \quad (6)$$

Obsérvese que la relación (5a) es simplemente otra versión (cuando $F \neq 0$) de la fórmula de Gauss (5).

Aplicando el mismo proceso a la segunda expresión de (3), obtenemos que de nuevo las ecuaciones $A_2 = 0$ y $B_2 = 0$ conducen a la fórmula de Gauss (5). Además, $C_2 = 0$ viene dada por

$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^2) - g\Gamma_{12}^2. \quad (6a)$$

Finalmente, puede aplicarse el mismo proceso a la última expresión de (3), llegando a que $C_3 = 0$ es una identidad y a que $A_3 = 0$ y $B_3 = 0$ de nuevo son las ecs. (6) y (6a). Las ecuaciones (6) y (6a) se denominan *ecuaciones de Mainardi-Codazzi*.

La fórmula de Gauss y las ecuaciones de Mainardi-Codazzi se conocen con el nombre *ecuaciones de compatibilidad* de la teoría de superficies.

Una cuestión natural consiste en saber si existen otras relaciones de compatibilidad entre la primera y la segunda forma fundamental aparte de las ya obtenidas. El teorema que sigue establece que la respuesta es negativa. En otras palabras, mediante derivaciones sucesivas o cualquier otro proceso, no obtendremos nuevas relaciones entre los coeficientes E, F, G, e, f, g y sus derivadas. En realidad, el teorema es más explícito y afirma que el conocimiento de las formas fundamentales primera y segunda determina localmente a una superficie. Con más precisión,

TEOREMA (Bonnet). *Sean E, F, G, e, f, g funciones diferenciables, definidas en un conjunto abierto $V \subset R^2$, con $E > 0$ y $G > 0$. Admitemos que estas funciones satisfacen formalmente las ecuaciones de Gauss y de Mainardi-Codazzi y que $EG - F^2 > 0$. Entonces, para cada $q \in V$ existe un entorno $U \subset V$ de q y un difeomorfismo $x: U \rightarrow x(U) \subset R^3$ tal que la superficie regular $x(U) \subset R^3$ tiene a E, F, G y a e, f, g como coeficientes de las formas fundamentales primera y segunda, respectivamente. Además, si U es conexo y si*

$$\bar{x}: U \rightarrow \bar{x}(U) \subset R^3$$

¹ No se va a utilizar el resto de esta sección hasta el cap. 5. En caso de ser omitido, debería hacerse lo propio con los ejercicios 7 y 8.

es otro difeomorfismo que satisface las mismas condiciones, entonces existe una traslación T y una transformación ortogonal lineal propia ϱ en \mathbb{R}^2 tal que $\tilde{x} = T \circ \varrho \circ x$.

Puede encontrarse una demostración de este teorema en el apéndice al cap. 4.

Para uso posterior, es conveniente observar cómo se simplifican las ecuaciones de Mainardi-Codazzi cuando el entorno coordenado no contiene puntos umbílicos y las curvas coordenadas son líneas de curvatura ($F = f = 0$). Entonces, las ecs. (6) y (6a) pueden escribirse en la forma

$$e_v = e\Gamma_{12}^1 - g\Gamma_{11}^2, \quad g_u = g\Gamma_{12}^2 - e\Gamma_{22}^1.$$

Teniendo en cuenta que $F = 0$ implica que

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2}\frac{E_v}{G}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2}\frac{E_v}{E},$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2}\frac{G_u}{E}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}\frac{G_u}{G},$$

concluimos entonces que las ecuaciones de Mainardi-Codazzi adoptan la forma:

$$e_v = \frac{E_v}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right), \quad (7)$$

$$g_u = \frac{G_u}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right). \quad (7a)$$

EJERCICIOS

1. Demuéstrese que si x es una parametrización ortogonal, es decir, $F = 0$, entonces

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}.$$

2. Demostrar que si x es una parametrización isoterma, es decir, $E = G = \lambda(u, v)$ y $F = 0$, entonces

$$K = -\frac{1}{2\lambda} \Delta(\log \lambda),$$

donde $\Delta\varphi$ representa el laplaciano $(\partial^2\varphi/\partial u^2) + (\partial^2\varphi/\partial v^2)$ de la función φ . Conclúyase que cuando $E = G = (u^2 + v^2 + c)^{-2}$ y $F = 0$, entonces $K = \text{const.} = 4c$.

3. Compruébese que las superficies

$$x(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \log u),$$

$$\bar{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v),$$

tienen la misma curvatura gaussiana y los puntos $\bar{x}(u, v)$ y $x(u, v)$, mientras que la aplicación $\bar{x} \circ x^{-1}$ no es una isometría. Esto prueba que el «recíproco» del teorema de Gauss no es cierto.

4. Demuéstrese que ningún entorno de un punto de la esfera se puede aplicar isométricamente en un plano.

5. Si las curvas coordenadas constituyen una red de Tchebyshev (cf. los ejercicios 7 y 8, sec. 2.5), entonces $E = G = 1$ y $F = \cos \theta$. Demostrar que en este caso

$$K = -\frac{\theta_{uv}}{\sin \theta}.$$

6. Demostrar que no existe una superficie $x(u, v)$ tal que $E = G = 1$, $F = 0$ y $e = 1$, $g = -1$, $f = 0$.

7. ¿Existe alguna superficie $x = x(u, v)$ con $E = 1$, $F = 0$, $G = \cos^2 u$ y $e = \cos^2 u$, $f = 0$, $g = 1$?
8. Calcular los símbolos de Christoffel para un subconjunto abierto del plano.

a. En coordenadas cartesianas.

b. En coordenadas polares.

Utilícese la fórmula de Gauss para calcular K en ambos casos.

9. Justifíquese por qué las superficies que siguen no son localmente isométricas dos a dos:

a. La esfera.

b. El cilindro.

c. La silla de montar $z = x^2 - y^2$.

4.4. Transporte paralelo. Geodésicas

Vamos a continuar ahora con una exposición sistemática de la geometría intrínseca. Para exhibir el significado intuitivo de los conceptos, a menudo nos referiremos al espacio exterior a la superficie, cuando introduzcamos definiciones o hagamos alguna interpretación. Sin embargo, en cada caso demostraremos que los conceptos presentados sólo dependen de la primera forma fundamental.

Vamos a comenzar con la definición de derivada covariante de un campo vectorial, que es lo análogo para superficies a la diferenciación habitual de vectores en el plano. Recordamos que un *campo vectorial (tangente)* en un conjunto abierto $U \subset S$ de una superficie regular S es una correspondencia w que asigna a cada $p \in U$ un vector $w(p) \in T_p(S)$. El campo vectorial w es *diferenciable* en p si, para alguna parametrización $x(u, v)$ en p , las componentes a y b de $w = ax_u + bx_v$ con respecto a la base $\{x_u, x_v\}$ son funciones diferenciables en p . Si w es diferenciable en cada $p \in U$ entonces w es diferenciable en U .

DEFINICION 1. Sea w un campo vectorial diferenciable en un conjunto abierto $U \subset S$ y $p \in U$. Sea $y \in T_p(S)$. Consideremos una curva parametrizada

$$\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U,$$

con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = y$, y sea $w(t)$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, la restricción del campo vectorial w a la curva α . El campo vectorial que se obtiene proyectando ortogonalmente $(dw/dt)(0)$ sobre el plano $T_p(S)$ se denomina la derivada covariante en p del campo vectorial w con respecto al vector y . La derivada covariante se denota por $(Dw/dt)(0)$ o por $(D_y w)(p)$ (fig. 4-8).

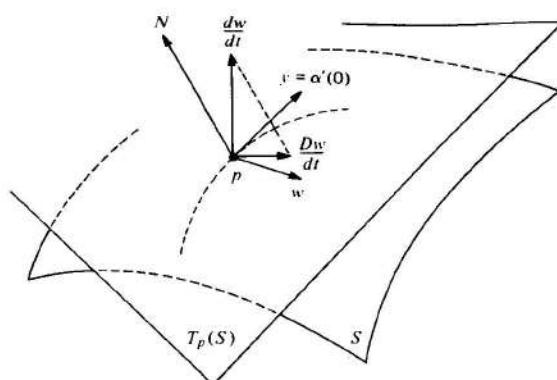


Figura 4-8. La derivada covariante.

La definición precedente hace uso del vector normal a S y de una curva particular α , tangente a y en p . Para demostrar que la diferenciación covariante es un concepto de la geometría intrínseca, que no depende de la elección de la curva α , vamos a obtener su expresión en términos de una parametrización $x(u, v)$ de S en p .

Sea $x(u(t), v(t)) = \alpha(t)$ la expresión de α y sea

$$\begin{aligned} w(t) &= a(u(t), v(t))x_u + b(u(t), v(t))x_v \\ &= a(t)x_u + b(t)x_v, \end{aligned}$$

la expresión de $w(t)$ en la parametrización $x(u, v)$. Entonces

$$\frac{dw}{dt} = a(x_{uu}u' + x_{uv}v') + b(x_{vu}u' + x_{vv}v') + a'x_u + b'x_v,$$

donde la prima representa la derivada con respecto a t .

Como Dw/dt es la componente en el plano tangente de dw/dt , utilizamos las expresiones en (1) de la Sec. 4.3 para x_{uu} , x_{uv} , x_{vv} y, suprimiendo la componente normal, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{Dw}{dt} &= (a' + \Gamma_{11}^1 au' + \Gamma_{12}^1 av' + \Gamma_{12}^1 bu' + \Gamma_{22}^1 bv')x_u \\ &\quad + (b' + \Gamma_{11}^2 au' + \Gamma_{12}^2 av' + \Gamma_{12}^2 bu' + \Gamma_{22}^2 bv')x_v. \end{aligned} \quad (1)$$

La identidad (1) pone de manifiesto que Dw/dt sólo depende del vector $(u', v') = y$, no de la curva α . Además, la superficie hace acto de presencia en (1) a través de los símbolos de Christoffel, es decir, a través de la primera forma fundamental. Por tanto, queda probada nuestra afirmación.

En particular, si S es un plano, ya sabemos que es posible hallar una parametrización de forma que $E = G = 1$ y $F = 0$. Una rápida ojeada a las ecuaciones para los

símbolos de Christoffel muestra que los Γ_{ij}^k son nulos en este caso. Se sigue entonces de la ec. (1) que, para este caso, la derivada covariante coincide con la derivada usual de vectores en el plano (esto puede también comprobarse geométricamente a partir de la def. 1). Por tanto, la derivada covariante constituye una generalización de la derivada usual de vectores en el plano.

Otra consecuencia de la ec. (1) es que la definición de derivada covariante se puede extender a campos vectoriales que estén definidos únicamente sobre los puntos de una curva parametrizada. Para clarificar este punto, precisamos algunas definiciones.

DEFINICION 2. Una curva parametrizada $\alpha: [0, l] \rightarrow S$ es la restricción a $[0, l]$ de una aplicación diferenciable de $(0 - \epsilon, l + \epsilon)$, $\epsilon > 0$, en S . Si $\alpha(0) = p$ y $\alpha(l) = q$, decimos que α une p con q . Se dice que α es regular si $\alpha'(t) \neq 0$ para $t \in [0, l]$.

De aquí en adelante será conveniente utilizar la notación $[0, l] = I$ siempre que no sea preciso especificar los extremos de I .

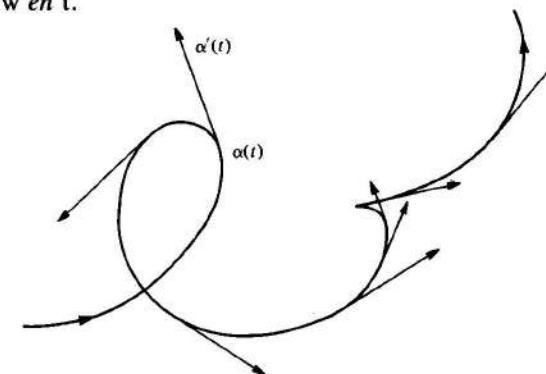
DEFINICION 3. Sea $\alpha: I \rightarrow S$ una curva parametrizada en S . Un campo vectorial w a lo largo de α es una correspondencia que asigna a cada $t \in I$ un vector

$$w(t) \in T_{\alpha(t)}(S).$$

El campo vectorial w es diferenciable en $t_0 \in I$ si, para alguna parametrización $x(u, v)$ en $\alpha(t_0)$, las componentes $a(t)$, $b(t)$ de $w(t) = ax_u + bx_v$, son funciones diferenciables de t en t_0 . Se dice que w es diferenciable en I si es diferenciable en cada punto $t \in I$.

Un ejemplo de campo vectorial (diferenciable) a lo largo de α viene dado por el campo $\alpha'(t)$ de los vectores tangentes a α (fig. 4-9).

DEFINICION 4. Sea w un campo vectorial diferenciable a lo largo de $\alpha: I \rightarrow S$. La expresión (1) de $(Dw/dt)(t)$, $t \in I$, está bien definida y se denomina la derivada covariante de w en t .

Figura 4-9. El campo de los vectores tangentes a lo largo de una curva α .

Desde un punto de vista externo a la superficie, para obtener la derivada covariante de un campo w a lo largo de $\alpha: I \rightarrow S$ en $t \in I$, efectuamos la derivada usual $(dw/dt)(t)$ de w en t y proyectamos ortogonalmente este vector sobre el plano tangente $T_{\alpha(t)}(S)$. De esto se desprende que, cuando dos superficies son tangentes a lo largo de una curva parametrizada α , la derivada covariante de un campo w a lo largo de α es la misma para ambas superficies.

Si $\alpha(t)$ es una curva sobre S , podemos imaginárnosla como la trayectoria de un punto que se mueve sobre la superficie. Entonces, $\alpha'(t)$ es la velocidad y $\alpha''(t)$ es la aceleración de α . La derivada covariante $D\alpha'/dt$ del campo $\alpha'(t)$ es la componente tangencial de la aceleración $\alpha''(t)$. Intuitivamente, $D\alpha'/dt$ es la aceleración del punto $\alpha(t)$ observado desde la superficie S .

DEFINICION 5. Se dice que un campo vectorial w , a lo largo de una curva parametrizada $\alpha: I \rightarrow S$, es paralelo si $Dw/dt = 0$ para cada $t \in I$.

En el caso particular del plano, la noción de campo paralelo a lo largo de una curva parametrizada se reduce a la de campo constante sobre la curva; es decir, son constantes la longitud del vector y el ángulo con una dirección fija (fig. 4-10). Estas propiedades se vuelven a obtener en parte, para cualquier superficie, en la forma que establece la siguiente proposición.

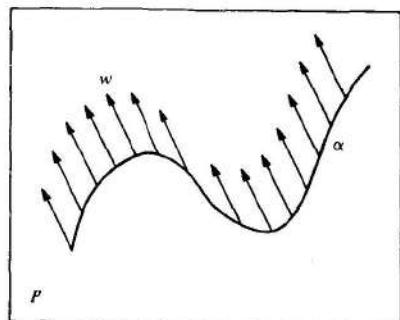


Figura 4-10

PROPOSICION 1. Sean w y v dos campos vectoriales paralelos a lo largo de $\alpha: I \rightarrow S$. Entonces $\langle v(t), w'(t) \rangle$ es constante. En particular, $|w(t)|$ y $|v(t)|$ son constantes y el ángulo entre $w(t)$ y $v(t)$ es constante.

Demostración. Decir que el campo vectorial w es paralelo a lo largo de α significa que dw/dt es normal al plano tangente a la superficie en $\alpha(t)$; o sea,

$$\langle v(t), w'(t) \rangle = 0, \quad t \in I.$$

Por otra parte, $v'(t)$ también es normal al plano tangente en $\alpha(t)$. Así,

$$\langle v(t), w(t) \rangle' = \langle v'(t), w(t) \rangle + \langle v(t), w'(t) \rangle = 0;$$

es decir, $\langle v(t), w(t) \rangle = \text{constante}$.

Q.E.D.

Como es natural, los campos paralelos en una superficie arbitraria podrían parecerles extraños a nuestra intuición, más apegada a R^3 . Por ejemplo, el campo vectorial tangente a un meridiano (parametrizado por la longitud de arco) de la esfera unidad S^2 es un campo paralelo en S^2 (fig. 4-11). En efecto, como un meridiano es un círculo máximo de S^2 , la derivada usual de dicho campo es normal a S^2 . En consecuencia, su derivada covariante es cero.

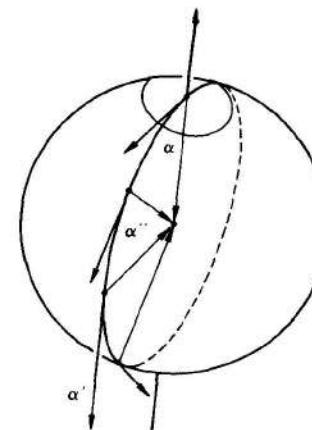


Figura 4-11. Un campo paralelo sobre la esfera.

La siguiente proposición establece la existencia de campos vectoriales paralelos a lo largo de una curva parametrizada $\alpha(t)$ y también asegura que tales campos quedan completamente determinados por sus valores en un punto t_0 .

PROPOSICION 2. Sea $\alpha: I \rightarrow S$ una curva parametrizada sobre S y sea $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}(S)$, $t_0 \in I$. Entonces existe un único campo vectorial paralelo $w(t)$ a lo largo de $\alpha(t)$, con $w(t_0) = w_0$.

Posteriormente, daremos en esta sección una demostración elemental de la prop. 2. No obstante, todos aquellos que estén familiarizados con la materia de la sec. 3.6 observarán que la demostración es consecuencia inmediata del teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias.

La proposición 2 nos permite hablar de transporte paralelo de un vector a lo largo de una curva parametrizada.

DEFINICION 6. Sea $\alpha: I \rightarrow S$ una curva parametrizada y $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}(S)$, $t_0 \in I$. Sea w el campo vectorial paralelo a lo largo de α , con $w(t_0) = w_0$. El vector $w(t_1)$, $t_1 \in I$, se denomina el transporte paralelo de w_0 a lo largo de α en el punto t_1 .

Debe resaltarse que si $\alpha: I \rightarrow S$, $t \in I$, es regular, entonces el transporte paralelo no depende de la parametrización de $\alpha(I)$. En efecto, si $\beta: J \rightarrow S$, $\sigma \in J$ es otra parametrización regular de $\alpha(I)$, a partir de la ec. (1) se deduce que

$$\frac{Dw}{d\sigma} = \frac{Dw}{dt} \frac{dt}{d\sigma}, \quad t \in I, \sigma \in J.$$

Como $dt/d\sigma \neq 0$, $w(t)$ es paralelo si y sólo si $w(\sigma)$ es paralelo.

La proposición 1 contiene una propiedad importante del transporte paralelo. Fijemos dos puntos $p, q \in S$ y una curva parametrizada $\alpha: I \rightarrow S$ con $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = q$. Denotemos por $P_\alpha: T_p(S) \rightarrow T_q(S)$ la aplicación que asigna a cada $v \in T_p(S)$ su transporte paralelo a lo largo de α en q . La proposición 1 dice que esta aplicación es una isometría.

Otra propiedad interesante del transporte paralelo es que si dos superficies S y \bar{S} son tangentes a lo largo de una curva parametrizada α y w_0 es un vector de $T_{\alpha(t_0)}(S) = T_{\alpha(t_0)}(\bar{S})$, entonces $w(t)$ es el transporte paralelo de w_0 con respecto a la superficie S si y sólo si $w(t)$ es el transporte paralelo de w_0 con respecto a la superficie \bar{S} . De hecho, la derivada covariante Dw/dt de w es la misma para ambas superficies. La afirmación se deduce entonces de la unicidad del transporte paralelo.

La propiedad precedente nos permite presentar un ejemplo simple e instructivo de transporte paralelo.

Ejemplo 1. Sea C un paralelo de colatitud φ (véase la fig. 4-12) de la esfera unidad orientada y sea w_0 un vector unitario, tangente a C en algún punto p de C . Determinemos el transporte paralelo de w_0 a lo largo de C , parametrizado por la longitud de arco s , con $s = 0$ en p .

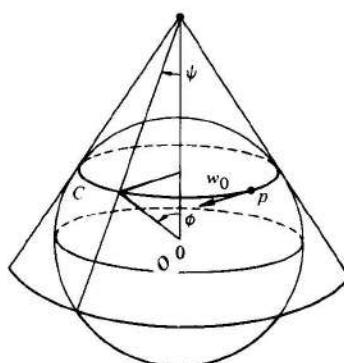


Figura 4-12

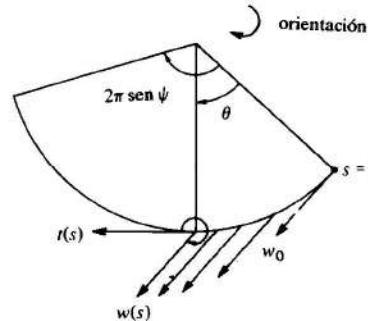


Figura 4-13

Consideraremos el cono tangente a la esfera a lo largo de C . El ángulo ψ del vértice de este cono viene dado por $\psi = (\pi/2) - \alpha$. En virtud a la propiedad precedente, el problema se reduce a determinar el transporte paralelo de w_0 , a lo largo de C , con respecto al cono tangente.

Sin embargo, el cono menos una generatriz es isométrico al conjunto abierto $U \subset R^2$ (cf. el ejemplo 3, sec. 4.2), cuya expresión en coordenadas polares es

$$0 < \rho < +\infty, \quad 0 < \theta < 2\pi \operatorname{sen} \psi.$$

Como en el plano el transporte paralelo coincide con la noción habitual, obtenemos, al contar s unidades a partir de p y abarcar un ángulo central θ , que (véase la fig. 4-13) el ángulo orientado formado por el vector tangente $t(s)$ con el transporte paralelo $w(s)$ viene dado por $2\pi - \theta$.

En algunos casos resulta cómodo trabajar con la noción de «curva abrupta», la cual puede expresarse en los siguientes términos.

DEFINICION 7. Una aplicación $\alpha: [0, l] \rightarrow S$ es una curva parametrizada regular a trozos si α es continua y existe una subdivisión

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = l$$

del intervalo $[0, l]$ de forma que la restricción $\alpha|[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \dots, k$ es una curva parametrizada regular. Se denomina a cada $\alpha|[t_i, t_{i+1}]$ un arco regular de α .

Se puede extender con facilidad la noción de transporte paralelo a curvas parametrizadas regulares a trozos. Si, por ejemplo, el valor inicial w_0 se halla en el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$, efectuamos el transporte paralelo sobre el arco regular $\alpha|[t_i, t_{i+1}]$ de la manera habitual; si $t_{i+1} \neq l$, entonces adoptamos $w(t_{i+1})$ como valor inicial para el transporte paralelo en el arco siguiente $\alpha|[t_{i+1}, t_{i+2}]$, y así sucesivamente.

Ejemplo 2.² El ejemplo previo muestra un caso particular de una interesante construcción geométrica, más general, del transporte paralelo. Sea C una curva regular sobre una superficie S y admitamos que C nunca es tangente a una dirección asintótica. Consideremos la envolvente de la familia de planos tangentes a S a lo largo de C (cf. el ejemplo 4, sec. 3.5). En un entorno de C , esta envolvente es una superficie regular Σ , tangente a S a lo largo de C (en el ejemplo 1, Σ se puede tomar como una banda que rodea a C sobre el cono tangente a la esfera a lo largo de C). Por tanto, el transporte paralelo a lo largo de C , de cualquier vector $w \in T_p(S)$, $p \in S$, es el mismo si lo consideramos con respecto a S o a Σ . Además, Σ es una superficie desarrollable, luego su curvatura gaussiana es idénticamente cero.

Además, se demostrará posteriormente en el presente libro (sec. 4.6, teorema de Minding) que una superficie con curvatura gaussiana cero es localmente isométrica a un plano. Por tanto, podemos aplicar un entorno $V \subset \Sigma$ de p en un plano P mediante una isometría $\varphi: V \rightarrow P$. Para obtener el transporte paralelo de w a lo largo de $V \cap C$,

² El presente ejemplo utiliza la materia de superficies regladas de la sec. 3-5.

efectuamos el transporte paralelo habitual de $d\phi_p(w)$ en el plano a lo largo de $\phi(C)$ y lo recuperamos en Σ mediante $d\phi$ (fig. 4-14).

Elaboramos así una construcción geométrica del transporte paralelo a lo largo de pequeños arcos de C . Se deja como ejercicio la demostración de que esta construcción puede extenderse, paso a paso, a un arco dado de C (utilícese el teorema de Heine-Borel y procédase como en el caso de curvas abruptas).

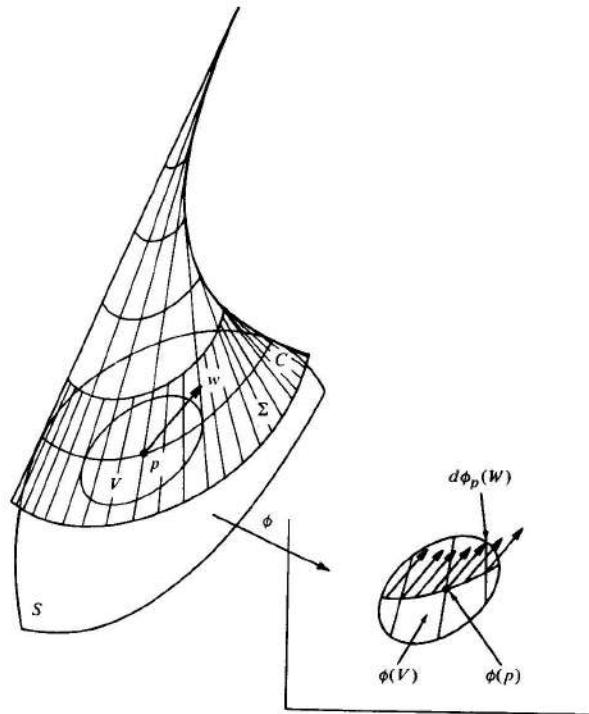


Figura 4-14. Transporte paralelo a lo largo de C .

Aquellas curvas parametrizadas $\gamma: I \rightarrow R^2$ de un plano, a lo largo de las cuales el campo tangente $\gamma'(t)$ es paralelo, son precisamente las rectas de dicho plano. Las curvas parametrizadas que satisfacen una condición análoga sobre una superficie se llaman geodésicas.

DEFINICION 8. Se dice que una curva parametrizada no constante $\gamma: I \rightarrow S$ es geodésica en $t \in I$ si el campo de sus vectores tangentes $\gamma'(t)$ es paralelo a lo largo de γ en t ; es decir,

$$\frac{D\gamma'(t)}{dt} = 0;$$

se dice que γ es una geodésica parametrizada si es geodésica para todo $t \in I$.

Por la prop. 1, obtenemos inmediatamente que $|\gamma'(t)| = \text{const.} = c \neq 0$. Por tanto, podemos introducir la longitud de arco $s = ct$ como parámetro y concluir que el parámetro t de una geodésica parametrizada γ es proporcional a la longitud de arco de γ .

Obsérvese que una geodésica parametrizada puede presentar autointersecciones (esto lo ilustra el ejemplo 6; véase la fig. 4-20). Sin embargo, su campo tangente nunca se anula y en consecuencia la parametrización es regular.

La noción de geodésica es claramente local. Las consideraciones previas nos permiten extender la definición de geodésica a subconjuntos de S que sean curvas regulares.

DEFINICION 8a. Se dice que una curva regular conexa C en S es una geodésica si, para cada $p \in C$, la parametrización $\alpha(s)$ de un entorno coordenado de p por la longitud de arco s es una geodésica parametrizada; es decir, $\alpha'(s)$ es un campo paralelo a lo largo de $\alpha(s)$.

Obsérvese que cada recta contenida en una superficie satisface la def. 8a.

Desde un punto de vista externo a la superficie S , la Def. 8a equivale a decir que $\alpha'(s) = kn$ es normal al plano tangente, es decir, paralelo a la normal de la superficie. En otras palabras, una curva regular $C \subset S$ ($k \neq 0$) es una geodésica si y sólo si su normal principal en cada punto $p \in C$ es paralela a la normal a S en p .

La propiedad precedente puede utilizarse para identificar geométricamente algunas geodésicas, como muestran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3. Los círculos máximos de la esfera S^2 son geodésicas. De hecho, los círculos máximos C se obtienen al intersectar la esfera con un plano que pase por el centro O de la esfera. La normal principal en un punto $p \in C$ se halla en la dirección de la recta que conecta p con O porque C es un círculo de centro O . Como S^2 es una esfera, la normal se halla en esta misma dirección, lo que prueba nuestra afirmación.

Más adelante, en esta sección, demostraremos el hecho general de que por cada punto $p \in S$ y cada dirección de $T_p(S)$ existe exactamente una geodésica $C \subset S$ que pasa por p y es tangente a esta dirección. Para el caso de la esfera, por cada punto y tangente a una dirección dada pasa exactamente un círculo máximo, el cual es, como demostramos antes, una geodésica. Consecuentemente, por unicidad, los círculos máximos son las únicas geodésicas de una esfera.

Ejemplo 4. Para el cilindro circular recto, apoyado en el círculo $x^2 + y^2 = 1$, resulta claro que los círculos que se obtienen al intersectar el cilindro con planos normales al eje del cilindro son geodésicas. Esto es así porque la normal principal en cualquiera de los puntos de la intersección es paralela a la normal a la superficie en estos puntos.

Por otra parte, en virtud a la observación posterior a la def. 8a las rectas del cilindro (generatrices) también son geodésicas.

Para verificar la existencia de otras geodésicas C sobre el cilindro vamos a considerar la parametrización (cf. el ejemplo 2, sec. 2-5)

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

del cilindro en un punto $p \in C$, con $x(0, 0) = p$. En esta parametrización, un entorno de p en C viene expresado por $x(u(s), v(s))$, donde s es la longitud de arco de C . Como previamente vimos (cf. el ejemplo 1, sec. 4.2), x es una isometría local que aplica un entorno U de $(0, 0)$ del plano uv en el cilindro. Ya que la condición de ser geodésica es local e invariante frente a isometrías, la curva $(u(s), v(s))$ debe ser una geodésica en U que pasa por $(0, 0)$. Pero las geodésicas del plano son las rectas. Por tanto, excluyendo los casos obtenidos ya,

$$u(s) = as, \quad v(s) = bs, \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Se deduce entonces que una curva regular (que no sea ni un círculo ni una recta) es una geodésica del cilindro si localmente es de la forma (fig. 4-15)

$$(\cos as, \sin as, bs),$$

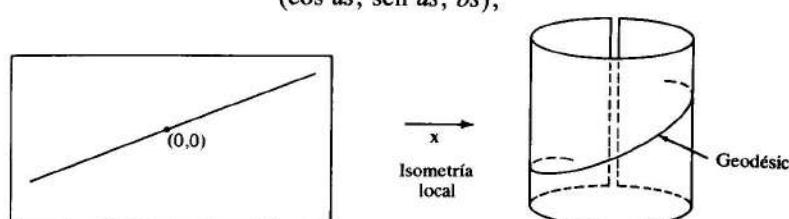


Figura 4-15. Geodésicas en un cilindro.

por tanto es una hélice. De esta forma, quedan determinadas todas las geodésicas de un cilindro circular recto.

Obsérvese que dados dos puntos de un cilindro, no situados en un círculo paralelo al plano xy , es posible conectarlos por medio de un número infinito de hélices. Este hecho significa que dos puntos de un cilindro pueden conectarse en general mediante un número infinito de geodésicas, en contraste con la situación en el plano. Obsérvese que tal situación sólo puede ocurrir con aquellas geodésicas que efectúan una «vuelta completa», ya que el cilindro menos una generatriz es isométrico al plano (fig. 4-16).

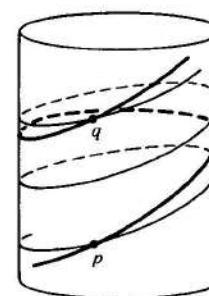


Figura 4-16. Dos geodésicas sobre el cilindro que unen a p con q .

Siguiendo con la analogía respecto del plano, observamos que las rectas, o sea, las geodésicas del plano, también están caracterizadas como aquellas curvas regulares de curvatura cero. Ahora, la curvatura de una curva plana orientada viene dada por el valor absoluto de la derivada del campo vectorial unitario tangente a la curva, con un signo asociado que denota la concavidad de la curva en relación con la orientación del plano (cf. la sec. 1.5, observación 1). Para tener en cuenta este signo, es conveniente introducir la siguiente definición.

DEFINICION 9. Sea w un campo diferenciable de vectores unitarios a lo largo de una curva parametrizada $\alpha: I \rightarrow S$ sobre una superficie orientada S . Como $w(t)$, $t \in I$, es un campo vectorial unitario, $(dw/dt)(t)$ es normal a $w(t)$ y por tanto

$$\frac{Dw}{dt} = \lambda(N \wedge w(t)).$$

El número real $\lambda = \lambda(t)$, denotado por $[Dw/dt]$, se denomina el valor algebraico de la derivada covariante de w en t .

Obsérvese que el signo de $[Dw/dt]$ depende de la orientación de S y que $[Dw/dt] = \langle dw/dt, N \wedge w \rangle$.

Deberíamos resaltar la observación general de que, de ahora en adelante, la orientación de S va a jugar un papel esencial en los conceptos que se van a introducir. El lector perpicaz ya habrá notado que las definiciones de transporte paralelo y geodésica no dependen de la orientación de S . Por contra, la curvatura geodésica, que definiremos a continuación, cambia de signo con un cambio de orientación en S .

Vamos a definir ahora, para curvas en una superficie, un concepto análogo al de curvatura para curvas planas.

DEFINICION 10. Sea C una curva regular orientada contenida en una superficie orientada S , y sea $\alpha(s)$ una parametrización de C por la longitud de arco s , en un entorno de $p \in S$. El valor algebraico de la derivada covariante $[D\alpha'(s)/ds] = k_g$ de $\alpha'(s)$ en p se denomina la curvatura geodésica de C en p .

De esta forma, las geodésicas que sean curvas regulares están caracterizadas como las curvas cuya curvatura geodésica es cero.

Desde un punto de vista externo a la superficie, el valor absoluto de la curvatura geodésica k_g de C en p es el valor absoluto de la componente tangencial del vector $\alpha''(s) = kn$, donde k es la curvatura de C en p y n es el vector normal a C en p . Recordando que el valor absoluto de la componente normal del vector kn es el valor absoluto de la curvatura normal k_n de $C \subset S$ en p , obtenemos inmediatamente que (fig. 4-17)

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2.$$

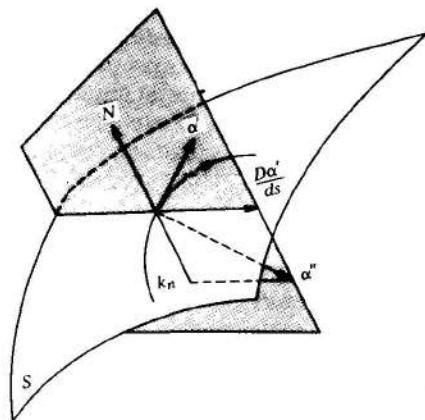


Figura 4-17

Por ejemplo, para un paralelo C de colatitud φ de la esfera S^2 , el valor absoluto de la curvatura geodésica k_g puede calcularse a partir de la relación (véase la fig. 4-18)

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi} = k_s^2 + k_g^2 = 1 + k_g^2;$$

es decir,

$$k_g^2 = \cotag^2 \varphi.$$

El signo de k_g depende de las orientaciones de S^2 y C .

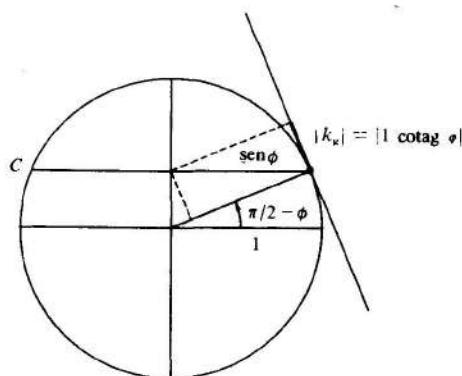


Figura 4-18. Curvatura geodésica de un paralelo sobre la esfera unidad.

Otra consecuencia de esta interpretación externa es que cuando dos superficies son tangentes a lo largo de una curva regular C , el valor absoluto de la curvatura geodésica de C con respecto a cualquiera de las dos superficies es el mismo.

Observación. La curvatura geodésica de $C \subset S$ cambia de signo cuando cambia la orientación de C o bien la de S .

Ahora vamos a obtener una expresión para el valor algebraico de la derivada covariante (véase la prop. 3 más adelante). Para ello precisamos algunos preliminares.

Sean v y w dos campos vectoriales diferenciables a lo largo de la curva parametrizada $\alpha: I \rightarrow S$, con $|v(t)| = |w(t)| = 1$, $t \in I$. Queremos definir una función diferenciable $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ de forma que $\varphi(t)$, $t \in I$, sea una determinación del ángulo de $v(t)$ a $w(t)$ en la orientación de S . Consideremos, a tal efecto, el campo vectorial diferenciable \tilde{v} a lo largo de α , definido por la condición de que $\{v(t), \tilde{v}(t)\}$ sea una base ortonormal positiva para cada $t \in I$. De este modo, $w(t)$ puede expresarse

$$w(t) = a(t)v(t) + b(t)\tilde{v}(t),$$

donde a y b son funciones diferenciables en I y $a^2 + b^2 = 1$.

El siguiente lema (Lema 1) establece que fijada una determinación φ_0 del ángulo de $v(t_0)$ a $w(t_0)$, es posible «extenderla» diferenciablemente a I , dando lugar a la función buscada.

LEMA 1. Sean a y b dos funciones diferenciables en I con $a^2 + b^2 = 1$ y sea φ_0 tal que $a(t_0) = \cos \varphi_0$, $b(t_0) = \sin \varphi_0$. Entonces la función diferenciable

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{t_0}^t (ab' - ba') dt$$

satisface $\cos \varphi(t) = a(t)$, $\sin \varphi(t) = b(t)$, $t \in I$, y $\varphi(t_0) = \varphi_0$.

Demostración. Basta con demostrar que la función

$$(a - \cos \varphi)^2 + (b - \sin \varphi)^2 = 2 - 2(a \cos \varphi + b \sin \varphi)$$

es idénticamente cero, o que

$$A = a \cos \varphi + b \sin \varphi = 1.$$

Utilizando el hecho de que $aa' = -bb'$ junto con la definición de φ , inmediatamente obtenemos

$$\begin{aligned} A' &= -a(\sin \varphi)\varphi' + b(\cos \varphi)\varphi' + a'\cos \varphi + b'\sin \varphi \\ &= -b'(\sin \varphi)(a^2 + b^2) - a'(\cos \varphi)(a^2 + b^2) \\ &\quad + a'\cos \varphi + b'\sin \varphi = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $A(t) = \text{const.}$ y como $A(t_0) = 1$, el lema queda demostrado.

Q.E.D.

Ahora ya podemos relacionar la derivada covariante de dos campos vectoriales unitarios a lo largo de una curva con el ángulo que forman tales campos.

LEMÁ 2. Sean v y w dos campos vectoriales diferenciables a lo largo de la curva $\varphi: I \rightarrow S$, con $|w(t)| = |v(t)| = 1$, $t \in I$. Entonces

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] - \left[\frac{Dv}{dt} \right] = \frac{d\varphi}{dt},$$

donde φ es una de las determinaciones diferenciables del ángulo de v a w , como la construida en el lema 1.

*Demuestra*ción. Introducimos los vectores $\bar{v} = N \wedge v$ y $\bar{w} = N \wedge w$. Entonces

$$w = (\cos \varphi)v + (\operatorname{sen} \varphi)\bar{v}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \bar{w} &= N \wedge w = (\cos \varphi)N \wedge v + (\operatorname{sen} \varphi)N \wedge \bar{v} \\ &= (\cos \varphi)\bar{v} - (\operatorname{sen} \varphi)v. \end{aligned} \quad (3)$$

Diferenciando (2) con respecto a t , obtenemos

$$w' = -(\operatorname{sen} \varphi)\varphi'v + (\cos \varphi)v' + (\cos \varphi)\varphi'\bar{v} + (\operatorname{sen} \varphi)\bar{v}'.$$

Efectuando el producto interior de la última relación con \bar{w} , utilizando (3) y observando que $\langle v, \bar{v} \rangle = 0$, $\langle v, v' \rangle = 0$, concluimos que

$$\begin{aligned} \langle w', \bar{w} \rangle &= (\operatorname{sen}^2 \varphi)\varphi' + (\cos^2 \varphi)\langle v', \bar{v} \rangle + (\cos^2 \varphi)\varphi' - (\operatorname{sen}^2 \varphi)\langle \bar{v}', v \rangle \\ &= \varphi' + (\cos^2 \varphi)\langle v', \bar{v} \rangle - (\operatorname{sen}^2 \varphi)\langle \bar{v}', v \rangle. \end{aligned}$$

Por otra parte, como $\langle v, \bar{v} \rangle = 0$, es decir,

$$\langle v', \bar{v} \rangle = -\langle v, \bar{v}' \rangle,$$

concluimos que

$$\langle w', \bar{w} \rangle = \varphi' + (\cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi)\langle v', \bar{v} \rangle = \varphi' + \langle v', \bar{v} \rangle.$$

Se deduce entonces que

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] = \langle w', \bar{w} \rangle = \varphi' + \langle v', \bar{v} \rangle = \frac{d\varphi}{dt} + \left[\frac{Dv}{dt} \right],$$

pues que

$$\langle w', \bar{w} \rangle = \left\langle \frac{dw}{dt}, \bar{w} \right\rangle = \left[\frac{Dw}{dt} \right] \langle N \wedge w, \bar{w} \rangle = \left[\frac{Dw}{dt} \right],$$

con lo que concluye la demostración del lema.

Q.E.D.

La siguiente observación es consecuencia inmediata del lema precedente. Sean C una curva regular orientada en S , $\alpha(s)$ una parametrización de C por la longitud de arco s en $p \in C$ y $v(s)$ un campo paralelo a lo largo de $\alpha(s)$. Tomando entonces $w(s) = v'(s)$, obtenemos

$$k_g(s) = \left[\frac{D\alpha'(s)}{ds} \right] = \frac{d\varphi}{ds}.$$

En otras palabras, la curvatura geodésica es la tasa de variación del ángulo que forma la tangente a la curva con una dirección paralela a lo largo de dicha curva. En el caso del plano, la dirección paralela está fija y la curvatura geodésica se reduce a la curvatura usual.

Ahora ya estamos en disposición de obtener la expresión prometida para el valor algebraico de la derivada covariante. Siempre que hablamos de parametrización de una superficie orientada, se admitirá que esta parametrización es compatible con la orientación dada.

PROPOSICIÓN 3. Sea $x(u, v)$ una parametrización ortogonal (es decir $F = 0$) de un entorno sobre una superficie orientada S y $w(t)$ un campo diferenciable de vectores unitarios a lo largo de la curva $x(u(t), v(t))$. Entonces

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt},$$

donde $\varphi(t)$ es el ángulo de x_u a $w(t)$ en la orientación considerada.

*Demuestra*ción. Sean $e_1 = x_u/\sqrt{E}$, $e_2 = x_v/\sqrt{G}$ los vectores unitarios tangentes a las curvas coordenadas. Obsérvese que $e_1 \wedge e_2 = N$, donde N es la orientación de S considerada. Por el lema 2, podemos escribir

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] = \left[\frac{De_1}{dt} \right] + \frac{d\varphi}{dt},$$

donde $e_1(t) = e_1(u(t), v(t))$ es la restricción del campo e_1 a la curva $x(u(t), v(t))$.

Ahora,

$$\left[\frac{De_1}{dt} \right] = \left\langle \frac{de_1}{dt}, N \wedge e_1 \right\rangle = \left\langle \frac{de_1}{dt}, e_2 \right\rangle = \langle (e_1)_u, e_2 \rangle \frac{du}{dt} + \langle (e_1)_v, e_2 \rangle \frac{dv}{dt}.$$

Por otra parte, como $F = 0$, tenemos que

$$\langle x_{uu}, x_{uv} \rangle = \frac{1}{2} E_v,$$

por lo tanto

$$\langle (e_1)_u, e_2 \rangle = \left\langle \left(\frac{x_u}{\sqrt{E}} \right)_u, \frac{x_v}{\sqrt{G}} \right\rangle = -\frac{1}{2} \frac{E_v}{\sqrt{EG}}.$$

Análogamente

$$\langle (e_1)_v, e_2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{G_u}{\sqrt{EG}}.$$

Introduciendo estas relaciones en la expresión de $[dw/dt]$ obtenemos finalmente

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt},$$

lo cual completa la demostración.

Q.E.D.

Vamos a demostrar, como aplicación de la prop. 3, la existencia y unicidad del transporte paralelo (prop. 2).

Demostración de la prop. 2. Inicialmente, admitamos que la curva parametrizada $\alpha: I \rightarrow S$ está contenida en el entorno coordenado de una parametrización ortogonal $x(u, v)$. Entonces, según las notaciones de la prop. 3, la condición de paralelismo para el campo w se transforma en

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} = B(t).$$

Denotando por φ_0 una determinación del ángulo orientado de x_u a w_0 , el campo w queda completamente determinado por

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{t_0}^t B(s) ds,$$

lo que demuestra, en este caso, la existencia y unicidad de w .

Si $\alpha(I)$ no está contenida en un entorno coordenado, utilizaremos la compacidad de I para dividir $\alpha(I)$ en un número finito de partes, contenida cada una en un entorno coordenado. Entonces, el resultado se extiende inmediatamente al presente caso, si utilizamos la unicidad de la primera parte de la demostración sobre las intersecciones no vacías de estos trozos.

Q.E.D.

La siguiente expresión para la curvatura geodésica, conocida como la *fórmula de Liouville*, es otra aplicación de la prop. 3.

PROPOSICION 4 (Liouville). *Sea $\alpha(s)$ una parametrización por la longitud de arco, del entorno de un punto $p \in S$ de una curva regular orientada C , contenida en una superficie orientada S . Sea $x(u, v)$ una parametrización ortogonal de S en p y sea $\varphi(s)$ el ángulo que forma x_u con $\alpha'(s)$ en la orientación considerada. Entonces*

$$k_g = (k_g)_1 \cos \varphi + (k_g)_2 \sin \varphi + \frac{d\varphi}{ds},$$

donde $(k_g)_1$ y $(k_g)_2$ son, respectivamente, las curvaturas geodésicas de las curvas coordenadas $v = \text{const.}$ y $u = \text{const.}$

Demostración. Poniendo $w = \alpha'(s)$ en la prop. 3, obtenemos

$$k_s = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} + \frac{d\varphi}{ds}.$$

A lo largo de la curva coordenada $v = \text{const.}$ $u = u(s)$, tenemos que $dv/ds = 0$ y $du/ds = 1/\sqrt{E}$; por tanto,

$$(k_s)_1 = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}.$$

Análogamente,

$$(k_s)_2 = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}}.$$

Introduciendo, en la fórmula de arriba para k_g , estas expresiones, obtenemos

$$k_g = (k_s)_1 \sqrt{E} \frac{du}{ds} + (k_s)_2 \sqrt{G} \frac{dv}{ds} + \frac{d\varphi}{ds}.$$

Como

$$\sqrt{E} \frac{du}{ds} = \left\langle \alpha'(s), \frac{x_u}{\sqrt{E}} \right\rangle = \cos \varphi \quad \text{y} \quad \sqrt{G} \frac{dv}{ds} = \sin \varphi,$$

finalmente llegamos, como era nuestro objetivo, a

$$k_g = (k_g)_1 \cos \varphi + (k_g)_2 \sin \varphi + \frac{d\varphi}{ds},$$

quedando concluida la demostración.

Q.E.D.

Vamos a introducir ahora las ecuaciones de una geodésica en un entorno coordinado. A tal efecto, sean $\gamma: I \rightarrow S$ una curva parametrizada de S y sea $x(u, v)$ una parametrización de S en un entorno V de $\gamma(t_0)$, $t_0 \in I$. Sea $J \subset I$ un intervalo abierto que contiene a t_0 tal que $\gamma(J) \subset V$. Sea $x(u(t), v(t))$, $t \in J$, la expresión de $\gamma: J \rightarrow S$ con respecto a la parametrización x . Entonces, el campo vectorial tangente $\gamma'(t)$, $t \in J$, viene dado por

$$w = u'(t)x_u + v'(t)x_v.$$

Por tanto, el hecho de que w sea paralelo equivale a que se satisfaga el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 &= 0, \\ v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

que se obtiene a partir de la ec. (1) haciendo $a = u'$ y $b = v'$ e igualando a cero los coeficientes de x_u y x_v .

En otras palabras, $\gamma: I \rightarrow S$ es una geodésica si y sólo si se satisface el sistema (4), para cada intervalo $J \subset I$ tal que $\gamma(J)$ esté contenido en un entorno coordenado. Se conoce al sistema (4) como las *ecuaciones diferenciales de las geodésicas de S*.

La siguiente proposición es una consecuencia importante del hecho de que las geodésicas estén caracterizadas por el sistema (4).

PROPOSICION 5. Dado un punto $p \in S$ y un vector $w \in T_p(S)$, $w \neq 0$, existe $\epsilon > 0$ y una única geodésica parametrizada $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = w$.

Veremos en la sec. 4.7 cómo puede deducirse la prop. 5 a partir de teoremas sobre campos vectoriales.

Observación. La razón de tomar $w \neq 0$ en la prop. 5 proviene del hecho de excluir a las curvas constantes en la definición de geodésica parametrizada (cf. la def. 8).

Dedicaremos el resto de esta sección a introducir algunas aplicaciones geométricas de las ecuaciones diferenciales (4). Si el lector así lo desea, esta materia puede omitirse. Si fuera éste el caso, debería hacerse lo propio con los ejercicios 18, 20 y 21.

Ejemplo 5. Vamos a emplear el sistema (4) para estudiar localmente las geodésicas de una superficie de revolución (cf. el ejemplo 4, sec. 2.3) con la parametrización

$$x = f(v) \cos u, \quad y = f(v) \sin u, \quad z = g(v).$$

Por el ejemplo 1 de la sec. 4.1, los símbolos de Christoffel vienen dadas por

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{11}^2 &= -\frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}, & \Gamma_{12}^1 &= \frac{ff'}{f^2}, \\ \Gamma_{12}^2 &= 0, & \Gamma_{22}^1 &= 0, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}. \end{aligned}$$

Con los valores de arriba, el sistema (4) se convierte en

$$\begin{aligned} u'' + \frac{2ff'}{f^2}u'v' &= 0, \\ v'' - \frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}(u')^2 + \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}(v')^2 &= 0. \end{aligned} \tag{4a}$$

Ahora vamos a sacar algunas conclusiones a partir de estas ecuaciones.

Primeramente, y como era de esperar, los meridianos $u = \text{const.}$ y $v = v(s)$, parametrizados por la longitud de arco s , son geodésicas. De hecho, la primera de las ecuaciones de (4a) trivialmente se satisface para $u = \text{const.}$ La segunda ecuación se convierte en

$$v'' + \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}(v')^2 = 0.$$

Teniendo en cuenta que, a lo largo del meridiano $u = \text{const.}$ $v = v(s)$, la primera forma fundamental da lugar a

$$(f')^2 + (g')^2(v')^2 = 1,$$

concluimos que

$$(v')^2 = \frac{1}{(f')^2 + (g')^2}.$$

Por tanto, derivando,

$$2v'v'' = -\frac{2(f'f'' + g'g'')}{((f')^2 + (g')^2)^2}v' = -\frac{2(f'f'' + g'g'')}{(f')^2 + (g')^2}(v')^3,$$

o bien, como $v' \neq 0$,

$$v'' = -\frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}(v')^2;$$

es decir, a lo largo del meridiano también se satisface la segunda de las ecuaciones de (4a), lo que, en efecto, prueba que los meridianos son geodésicas.

Vamos a determinar ahora qué paralelos $v = \text{const.}$ $u = u(s)$, parametrizados por la longitud de arco, son geodésicas. La primera de las ecuaciones de (4a) establece que $u' = \text{const.}$ y la segunda se convierte en

$$\frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}(u')^2 = 0.$$

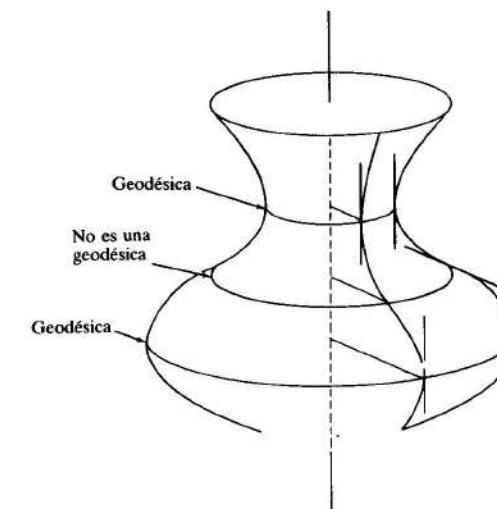


Figura 4-19

Para que el paralelo $v = \text{const.}$, $u = u(s)$ sea una geodésica es necesario que $u' \neq 0$. Como $(f')^2 + (g')^2 \neq 0$ y $f \neq 0$, de la ecuación precedente concluimos que $f' = 0$.

En otras palabras, una condición necesaria para que un paralelo de una superficie de revolución sea una geodésica es que tal paralelo esté generado por la rotación de un punto de la curva generatriz donde la tangente sea paralela al eje de revolución (fig. 4-19). Claramente, esta condición es suficiente, pues implica que la recta normal del paralelo coincide con la recta normal a la superficie (fig. 4-19).

Para otras utilidades, vamos a obtener una interesante consecuencia geométrica de la primera de las ecuaciones de (4a), conocida como la relación de Clairaut. Obsérvese que la primera de las ecuaciones de (4a) puede escribirse en la forma

$$(f^2 u')' = f^2 u'' + 2ff'u'v' = 0;$$

de donde,

$$f^2 u' = \text{const.} = c.$$

Por otra parte, el ángulo θ , $0 \leq \theta \leq \pi/2$, de una geodésica con un paralelo que la corta viene dado por

$$\cos \theta = \frac{|\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v u' + \mathbf{x}_v v' \rangle|}{|\mathbf{x}_u|} = |fu'|,$$

donde $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ es la base asociada a la parametrización dada. Como $f = r$ es el radio del paralelo en el punto de intersección, obtenemos la *relación de Clairaut*:

$$r \cos \theta = \text{const.} = |c|.$$

En el siguiente ejemplo mostraremos cuán útil es esta relación. Véanse también los ejercicios 18, 20 y 21.

Finalmente, vamos a demostrar que el sistema (4a) se puede integrar por medio de primitivas. Sea $u = u(s)$, $v = v(s)$ una geodésica parametrizada por la longitud de arco, de la cual supondremos que no es un meridiano o un paralelo de la superficie. La primera de las ecuaciones de (4a) se escribe entonces en la forma $f^2 u' = \text{const.} = c \neq 0$.

Previamente, obsérvese que la primera forma fundamental a lo largo de $(u(s), v(s))$,

$$1 = f^2 \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + ((f')^2 + (g')^2) \left(\frac{dv}{ds} \right)^2, \quad (5)$$

junto con la primera ecuación de (4a), es equivalente a la segunda ecuación de (4a). De hecho, al sustituir $f^2 u' = c$ en la ec. (5), obtenemos

$$\left(\frac{dv}{ds} \right)^2 ((f')^2 + (g')^2) = -\frac{c^2}{f^2} + 1;$$

de donde, al derivar con respecto a s ,

$$2 \frac{dv}{ds} \frac{d^2v}{ds^2} ((f')^2 + (g')^2) + \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 (2f'f'' + 2g'g'') \frac{dv}{ds} = \frac{2ff'c^2}{f^4} \frac{dv}{ds},$$

que, como $(u(s), v(s))$ no es un paralelo, es equivalente a la segunda ecuación de (4a) (no obstante, la geodésica puede ser tangente a un paralelo que no sea una geodésica y entonces $v'(s) = 0$; sin embargo, la relación de Clairaut establece que esto sólo puede ocurrir en puntos aislados).

Por otra parte, como $c \neq 0$ (debido a que la geodésica no es un meridiano), se tiene que $u'(s) \neq 0$. Podemos, así, invertir $u = u(s)$, obteniendo $s = s(u)$ y, en consecuencia, $v = v(s(u))$. Al multiplicar la ec. (5) por $(ds/du)^2$ obtenemos

$$\left(\frac{ds}{du} \right)^2 = f^2 + ((f')^2 + (g')^2) \left(\frac{dv}{ds} \frac{ds}{du} \right)^2,$$

o bien, utilizando el hecho de que $(ds/du)^2 = f^4/c^4$,

$$f^2 = c^2 + c^2 \frac{(f')^2 + (g')^2}{f^2} \left(\frac{dv}{du} \right)^2,$$

es decir,

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{c} f \sqrt{\frac{f^2 - c^2}{(f')^2 + (g')^2}};$$

de donde,

$$u = c \int \frac{1}{f} \sqrt{\frac{(f')^2 + (g')^2}{f^2 - c^2}} dv + \text{const.} \quad (6)$$

lo que constituye la ecuación de un segmento de geodésica, que no sea un paralelo o un meridiano, de una superficie de revolución.

Ejemplo 6. Vamos a demostrar ahora que cualquier geodésica, que no sea un meridiano, del paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2$ se corta a sí misma infinitas veces.

Sea p_0 un punto del paraboloide y sea P_0 el paralelo de radio r_0 que pasa por p_0 . Sea γ una geodésica parametrizada que pasa por p_0 y forma un ángulo θ_0 con P_0 . Como, en virtud a la relación de Clairaut,

$$r \cos \theta = \text{const.} = |c|, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

concluimos que θ crece con r .

Por tanto, θ crece si seguimos la dirección de los paralelos crecientes. Pudiera suceder que en algunas superficies de revolución θ se aproxime asintóticamente a un meridiano. Dentro de un momento comprobaremos que no es éste el caso del paraboloide de revolución. Es decir, la geodésica intersecta a todos los meridianos, efectuando, por tanto, un número infinito de vueltas alrededor del paraboloide.

Por otra parte, si seguimos la dirección de los paralelos decrecientes, el ángulo θ decrece y se aproxima al valor 0, el cual corresponde a un paralelo de radio $|c|$ (obsérvese que si $\theta_0 \neq 0$, $|c| < r$). Más adelante demostraremos en el presente libro que ninguna geodésica de una superficie de revolución puede ser asintótica a un paralelo que no sea, él mismo, una geodésica (sec. 4.7). Como ningún paralelo del paraboloide es una geodésica, la geodésica γ es en realidad tangente al paralelo de radio $|c|$ en el punto p_1 . Como 1 es el valor máximo de $\cos \theta$, el valor de r crecerá a partir de p_1 . Por tanto, estamos en la misma situación que antes. La geodésica girará un número infinito de veces alrededor del paraboloide, siguiendo la dirección de los valores crecientes de r ; entonces cortará claramente a la otra rama de la geodésica un número infinito de veces (fig. 4-20).

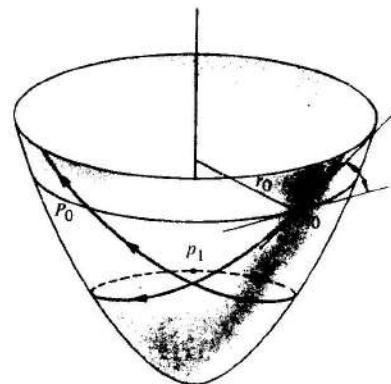


Figura 4-20

Obsérvese que si $\theta_0 = 0$, la situación inicial es la del punto p_1 .

Queda por demostrar que cuando r crece, la geodésica γ corte a todos los meridianos del paraboloide. Primeramente, observemos que la geodésica no puede ser tangente a un meridiano. En otro caso, debería coincidir con el meridiano en virtud a la parte de unicidad de la prop. 5. Como el ángulo θ crece con r , si γ no cortase a todos los meridianos, debería aproximarse asintóticamente a un meridiano, por ejemplo M .

Admitamos que es ésta la situación y elijamos el sistema de coordenadas locales para el paraboloide $z = x^2 + y^2$, definido por

$$\begin{aligned}x &= v \cos u, & y &= v \sin u, & z &= v^2, \\&0 < v < +\infty, & 0 < u < 2\pi,\end{aligned}$$

de forma que el entorno coordenado correspondiente contenga a M cuando $u = u_0$. Por hipótesis $u \rightarrow u_0$ cuando $v \rightarrow \infty$. Por otra parte, en este sistema de coordenadas la

ecuación de la geodésica γ viene dada por (cf. la ec. (6), el ejemplo 5 y elijase una orientación para γ de forma que $c > 0$)

$$u = c \int \frac{1}{v} \sqrt{\frac{1+4v^2}{v^2 - c^2}} dv + \text{const.} > c \int \frac{dv}{v} + \text{const.},$$

ya que

$$\frac{1+4v^2}{v^2 - c^2} > 1.$$

De la desigualdad de arriba se deduce que cuando $v \rightarrow \infty$, u crece superando cualquier valor prefijado, lo que contradice el hecho de que γ se approxima asintóticamente a M . Por lo tanto, γ intersecta a todos los meridianos y con esto completamos la demostración de lo afirmado al comienzo de este ejemplo.

EJERCICIOS

1. a. Demuéstrese que si una curva $C \subset S$ es simultáneamente una línea de curvatura y una geodésica, entonces C es una curva plana.
b. Demuéstrese que si una geodésica (no rectilínea) es una curva plana, entonces es una línea de curvatura.
c. Exhibir un ejemplo de línea de curvatura que sea una curva plana y que sin embargo no sea una geodésica.
2. Demuéstrese que una curva $C \subset S$ es simultáneamente una curva asintótica y una geodésica si y sólo si C es una recta (o un segmento de recta).
3. Demostrar, sin utilizar la prop. 5, que las rectas son las únicas geodésicas del plano.
4. Sean v y w dos campos vectoriales a lo largo de una curva $\varphi: I \rightarrow S$. Demostrar que

$$\frac{d}{dt} \langle v(t), w(t) \rangle = \left\langle \frac{Dv}{dt}, w(t) \right\rangle + \left\langle v(t), \frac{Dw}{dt} \right\rangle.$$

5. Considérese el toro de revolución generado por la rotación del círculo

$$(x - a)^2 + z^2 = r^2, y = 0,$$

alrededor del eje z ($a > r > 0$). Los paralelos generados por los puntos $(a+r, 0)$, $(a-r, 0)$, (a, r) se denominan, respectivamente, el *paralelo máximo*, el *paralelo mínimo* y el *paralelo superior*. Compruébese cuál de estos paralelos es

- a. Una geodésica.
b. Una curva asintótica.
c. Una línea de curvatura.
- *6. En el toro del ejercicio 5, calcúlese la curvatura geodésica del paralelo superior.
7. Intersepar el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano que pasa por el eje x , formando un ángulo θ con el plano xy .

- a. Demuéstrese que la curva C de intersección es una elipse.
 b. Calcúlese el valor absoluto de la curvatura geodésica de C en el cilindro, en aquellos puntos donde C corta a sus propios ejes.
- *8. Demuéstrese que si todas las geodésicas de una superficie conexa son curvas planas, entonces la superficie está contenida en un plano o en una esfera.
- *9. Considérense dos meridianos C_1 y C_2 de una esfera que forman un ángulo φ en el punto p_1 . Efectuemos el transporte paralelo de un vector w_0 tangente a C_1 , a lo largo de C_1 y de C_2 , desde el punto inicial p_1 hasta el punto p_2 donde se encuentran otra vez los meridianos, obteniendo, respectivamente, los vectores w_1 y w_2 . Calcúlese el ángulo de w_1 a w_2 .
- *10. Enunciar con precisión y demostrar la siguiente afirmación: el valor algebraico de la derivada covariante es invariante frente a isometrías que preservan la orientación.
- *12. Decimos que un conjunto de curvas regulares sobre una superficie S es una *familia diferenciable de curvas* en S si las tangentes a las curvas de dicho conjunto constituyen un campo diferenciable de direcciones (véase la sec. 3.4). Admitamos que una superficie S admite dos familias diferenciables y ortogonales de geodésicas. Demostrar que la curvatura gaussiana de S es cero.
- *13. Sea V un entorno conexo de un punto p de una superficie S , y admitamos que el transporte paralelo entre dos puntos cualesquiera de V no depende de la curva que une dichos puntos. Demostrar que la curvatura gaussiana de V es cero.
14. Sea S una superficie regular orientada y sea $\alpha: I \rightarrow S$ una curva parametrizada por la longitud de arco. Considerense en el punto $p = \alpha(s)$ los tres vectores unitarios (el *tríedro de Darboux*) $T(s) = \alpha'(s)$, $N(s) =$ la normal a S en p , $V(s) = N(s) \wedge T(s)$. Demuéstrese que

$$\frac{dT}{ds} = 0 + aV + bN,$$

$$\frac{dV}{ds} = -aT + 0 + cN,$$

$$\frac{dN}{ds} = -bT - cV + 0,$$

donde $a = a(s)$, $b = b(s)$, $c = c(s)$, $s \in I$. Las fórmulas precedentes constituyen lo análogo a las fórmulas de Frenet para el tríedro T , V , N . A efectos de establecer el significado geométrico de los coeficientes, demuéstrese que

- a. $c = -\langle dN/ds, V \rangle$; concluir a partir de esto que $\alpha(I) \subset S$ es una línea de curvatura si y sólo si $c = 0$ ($-c$ se denomina la *torsión geodésica* de α ; cf. el ejercicio 19, sec. 3.2).
 b. b es la curvatura normal en p de $\alpha(I) \subset S$.
 c. a es la curvatura geodésica en p de $\alpha(I) \subset S$.

15. Sea p_0 un polo de la esfera unidad S^2 y sean q , r dos puntos del ecuador correspondiente tales que los meridianos p_0q y p_0r forman un ángulo θ en p_0 . Considerese un vector unitario v , tangente al meridiano p_0q en p_0 , efectuando el transporte paralelo de v a lo largo de la curva cerrada formada por el meridiano p_0q , el paralelo qr y el meridiano rp_0 (fig. 4-21).

- a. Determinar el ángulo que forma con v la posición final de v .
 b. Repetir el mismo proceso cuando los puntos r , q se toman sobre un paralelo de colatitud φ (cf. el ejemplo 1) en lugar del ecuador.

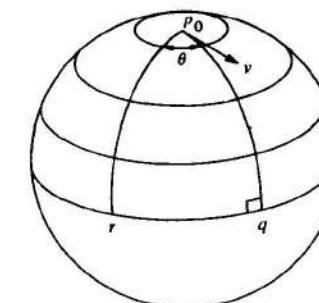


Figura 4-21

- *16. Sea p un punto de una superficie orientada S y admitamos que existe un entorno de p en S cuyos puntos son todos parabólicos. Pruébese que la (única) curva asintótica que pasa por p se halla en un segmento abierto de una recta. Constrúyase un ejemplo para mostrar que es esencial la condición de poseer un entorno de puntos parabólicos.
17. Sea $\alpha: I \rightarrow S$ una curva parametrizada por la longitud de arco s , con curvatura no nula. Considerese la superficie parametrizada (sec. 2.3)

$$\mathbf{x}(s, v) = \alpha(s) + vb(s), \quad s \in I, -\varepsilon < v < \varepsilon, \varepsilon > 0,$$

donde b es el vector binormal de α . Pruébese que si ε es pequeño, $\mathbf{x}(I \times (-\varepsilon, \varepsilon)) = S$ es una superficie regular en donde $\alpha(I)$ es una geodésica (*en consecuencia, cada curva es una geodésica de la superficie que generan sus binormales*).

- *18. Considerese una geodésica que empieza en un punto p de la parte superior ($z > 0$) del hiperbolóide de revolución $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ y que forme un ángulo θ con el paralelo que pasa por p , de forma que $\cos \theta = 1/r$, donde r es la distancia de p al eje z : Demuéstrese que al seguir la geodésica en la dirección de los paralelos decrecientes, ésta se approxima asintóticamente al paralelo $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ (fig. 4-22).

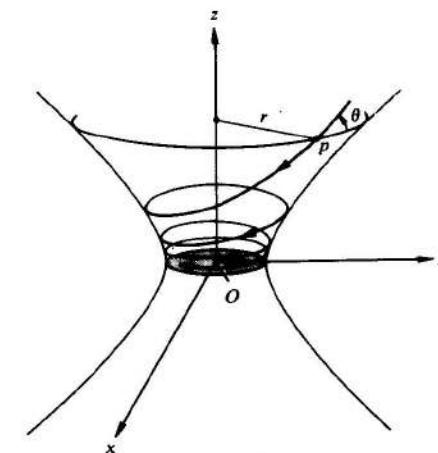


Figura 4-22

*19. Demuéstrese que cuando las ecuaciones diferenciales de las geodésicas (4) se refieren a la longitud de arco entonces la segunda ecuación de (4) es consecuencia de la primera de dichas ecuaciones, exceptando las curvas coordenadas.

*20. Sea T un toro de revolución que supondremos parametrizado por (cf. el ejemplo 6, sec. 2.2)

$$\mathbf{x}(u, v) = ((r \cos u + a) \cos v, (r \cos u + a) \sin v, r \sin u).$$

Demostrar que

- a. Si una geodésica es tangente al paralelo $u = \pi/2$, entonces está completamente contenida en la región de T definida por

$$-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}.$$

- b. Una geodésica que intersecte al paralelo $u = 0$ formando un ángulo θ ($0 < \theta < \pi/2$) también intersecta al paralelo $u = \pi$ si

$$\cos \theta < \frac{a - r}{a + r}.$$

21. Las *superficies de Liouville* son aquellas superficies para las que es posible obtener un sistema de coordenadas locales $\mathbf{x}(u, v)$ tal que los coeficientes de la primera forma fundamental se escriben

$$E = G = U + V, \quad F = 0,$$

donde $U = U(u)$ sólo es función de u , y $V = V(v)$ solamente lo es de v . Obsérvese que las superficies de Liouville generalizan las superficies de revolución. Demuéstrese que (cf. el ejemplo 5).

- a. Las geodésicas de una superficie de Liouville pueden obtenerse calculando las primitives de la forma

$$\int \frac{du}{\sqrt{U - c}} = \pm \int \frac{dv}{\sqrt{V + c}} + c_1,$$

donde c y c_1 son constantes que dependen de las condiciones iniciales.

- b. Si θ , $0 \leq \theta \leq \pi/2$, es el ángulo que forma una geodésica con la curva $v = \text{const.}$, entonces

$$U \sin^2 \theta - V \cos^2 \theta = \text{const.}$$

(Nótese que ésta es la relación análoga a la de Clairaut para superficies de Liouville.)

22. Sea $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y sea $p \in S^2$. Para cada curva parametrizada regular a trozos $\alpha: [0, l] \rightarrow S^2$ con $\alpha(0) = \alpha(l) = p$, sea $P_\alpha: T_p(S^2) \rightarrow T_p(S^2)$ la aplicación que asigna a cada $v \in T_p(S^2)$ su transporte paralelo de regreso a p a lo largo de α . En virtud a la prop. 1, P_α es una isometría. Demuéstrese que para cada rotación R de $T_p(S^2)$ existe una curva α tal que $R = P_\alpha$.

23. Demuéstrese que las isometrías de la esfera unidad

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

son las restricciones a S^2 de las aplicaciones lineales ortogonales de \mathbb{R}^3 .

4.5. El teorema de Gauss-Bonnet y sus aplicaciones

En esta sección presentaremos el teorema de Gauss-Bonnet y algunas de sus consecuencias. La geometría implicada en este teorema es bastante simple, sin embargo, ciertos hechos topológicos son responsables de la dificultad de su demostración. Tales hechos se introducirán sin demostraciones.

Probablemente, es el teorema de Gauss-Bonnet uno de los resultados más profundos de la geometría diferencial de superficies. Gauss presentó una primera versión de este teorema en su famoso artículo [1] que versaba sobre triángulos geodésicos sobre superficies (es decir, triángulos cuyos lados son arcos de geodésicas). En líneas generales, éste afirma que el exceso con respecto a π de la suma de los ángulos interiores $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ de un triángulo geodésico T es igual a la integral extendida a T de la curvatura gaussiana K ; es decir (fig. 4-23),

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i - \pi = \iint_T K d\sigma.$$

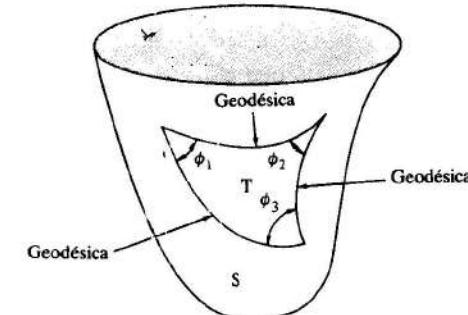
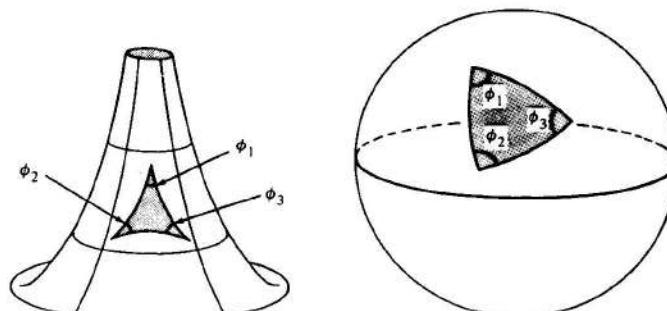


Figura 4-23. Un triángulo geodésico.

Por ejemplo, si $K \equiv 0$, obtenemos que $\sum \varphi_i - \pi$, lo cual constituye una extensión a superficies con curvatura cero del teorema de Tales que estudiamos en bachillerato. También, si $K \equiv 1$, obtenemos que $\sum \varphi_i - \pi = \text{área}(T) > 0$. Así, sobre la esfera unidad, la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo geodésico es mayor que π , y el exceso a π es exactamente el área de T . Análogamente, sobre la seudoesfera (ejercicio 6, sec. 3.3) la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo geodésico es menor que π (fig. 4-24).

La extensión del teorema a una región delimitada por una curva simple no geodésica (véase más adelante la ec. (1)) se debe a O. Bonnet. Para conseguir



$$K \equiv -1, \sum \phi_i < \pi$$

Figura 4-24

$$K \equiv 1, \sum \phi_i > \pi$$

extensiones más amplias, por ejemplo, a superficies compactas, deben entrar en escena algunas consideraciones topológicas. En realidad, uno de los rasgos más importantes del teorema de Gauss-Bonnet es que establece una relación notable entre la topología de una superficie compacta y la integral de su curvatura (véase más adelante el corolario 2).

Ahora vamos a empezar por los detalles de una versión local del teorema de Gauss-Bonnet. Necesitamos algunas definiciones.

Sea $\alpha: [0, l] \rightarrow S$ una aplicación continua del intervalo cerrado $[0, l]$ en una superficie regular S . Decimos que α es una *curva parametrizada, regular a trozos, cerrada y simple* si

1. $\alpha(0) = \alpha(l)$.
2. $t_1 \neq t_2, t_1, t_2 \in [0, l]$, implica que $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$.
3. Existe una partición

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = l,$$

de $[0, l]$ tal que α es diferenciable y regular en cada $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \dots, k$.

Esto significa, intuitivamente, que α es una curva cerrada (condición 1) sin autointersecciones (condición 2), cuya recta tangente deja de estar definida sólo en un número finito de puntos (condición 3).

Los puntos $\alpha(t_i)$, $i = 0, \dots, k$, se denominan los *vértices* de α y las trazas $\alpha([t_i, t_{i+1}])$ se llaman los *arcos regulares* de α . Es habitual llamar *curva cerrada regular a trozos* a la traza $\alpha([0, l])$ de α .

Por la condición de regularidad, para cada vértice $\alpha(t_i)$ existe el límite por la izquierda, o sea, para $t < t_i$

$$\lim_{t \rightarrow t_i^-} \alpha'(t) = \alpha'(t_i - 0) \neq 0,$$

y el límite por la derecha, es decir, para $t > t_i$

$$\lim_{t \rightarrow t_i^+} \alpha'(t) = \alpha'(t_i + 0) \neq 0.$$

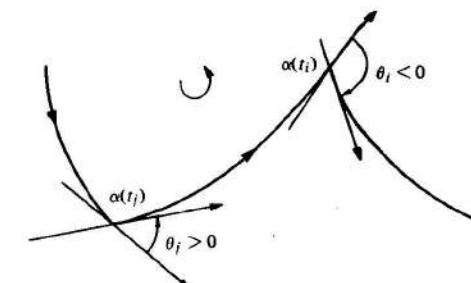


Figura 4-25

Admitamos ahora que S está orientada y sea $|\theta_i|$, $0 < |\theta_i| \leq \pi$, la menor determinación del ángulo de $\alpha'(t_i - 0)$ a $\alpha'(t_i + 0)$. Si $|\theta_i| \neq \pi$, asociamos a θ_i el signo del determinante $(\alpha'(t_i - 0), \alpha'(t_i + 0), N)$. Esto significa que si el vértice $\alpha(t_i)$ no es una «cúspide» (fig. 4-25), entonces el signo de θ_i viene dado por la orientación de S . Se conoce como *ángulo externo* en el vértice $\alpha(t_i)$ al ángulo con signo θ_i , $-\pi < \theta_i < \pi$.

En caso de que el vértice $\alpha(t_i)$ sea una cúspide, es decir, $|\theta_i| = \pi$, elegimos el signo de θ_i de la manera siguiente. Por la condición de regularidad, podemos comprobar que existe un número $\epsilon' > 0$ tal que el determinante $(\alpha'(t_i - \epsilon), \alpha'(t_i + \epsilon), N)$ no cambia de signo para todo $0 < \epsilon < \epsilon'$. Damos a θ_i el signo de este determinante (fig. 4-26).

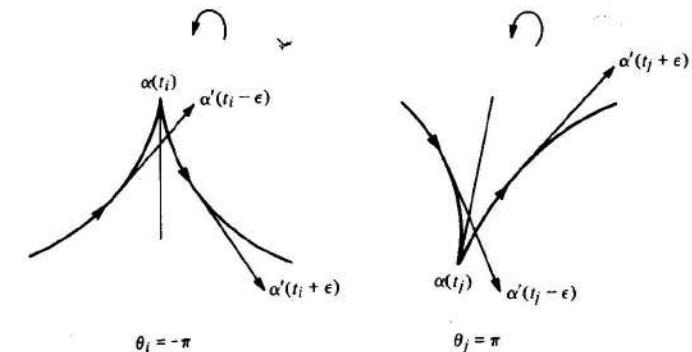


Figura 4-26. El signo del ángulo externo en el caso de una cúspide.

Sea $x: U \subset R^2 \rightarrow S$ una parametrización compatible con la orientación de S . Supóngamos además que U es homeomorfo a un disco abierto del plano.

Sea $\alpha: [0, l] \rightarrow x(U) \subset S$ una curva parametrizada, regular a trozos, cerrada y simple, con vértices $\alpha(t_i)$ y ángulos externos θ_i , $i = 0, \dots, k$.

Consideremos las funciones diferenciables $\varphi_i: [t_i, t_{i+1}] \rightarrow R$ que miden el ángulo positivo de x_u a $\alpha'(t)$ en cada $t \in [t_i, t_{i+1}]$ (cf. el lema 1, sec. 4.4).

El resultado que sigue constituye el primer hecho topológico que presentaremos sin demostración.

TEOREMA (de rotación de tangentes). Con la notación precedente

$$\sum_{i=0}^k (\varphi_i(t_{i+1}) - \varphi_i(t_i)) + \sum_{i=0}^k \theta_i = \pm 2\pi,$$

donde el signo más o el menos dependen de la orientación de α .

El teorema establece que la variación total del ángulo a una dirección dada del vector tangente a α , más los «saltos» en los vértices, es igual a 2π .

Una demostración elegante de este teorema se debe a H. Hopf, *Compositio Math.*, 2 (1953), 50-62. Para el caso en el que α carece de vértices, la demostración del teorema de Hopf se encuentra en la sec. 5.7 (teorema 2) de este libro.

Todavía necesitamos algo más de terminología antes de establecer la versión local del teorema de Gauss-Bonnet.

Sea S una superficie orientada. Se dice que una región $R \subset S$ (unión de un conjunto abierto y conexo con su frontera) es una *región simple* si R es homeomorfa a un disco y la frontera ∂R de R es la traza de una curva parametrizada, regular a trozos, cerrada y simple $\alpha: I \rightarrow S$. Decimos entonces que α está *orientada positivamente* si para cada $\alpha(t)$, perteneciente a un arco regular, la base ortogonal positiva $\{\alpha'(t), h(t)\}$ satisface la condición de que $h(t)$ «apunta hacia» R ; con más precisión, para cualquier curva $\beta: I \rightarrow R$ con $\beta(0) = \alpha(t)$ y $\beta'(0) \neq \alpha'(t)$, tenemos que $\langle \beta'(0), h(t) \rangle > 0$. Esto significa, intuitivamente, que si caminamos sobre α en la dirección positiva, con la cabeza apuntando hacia la normal N , entonces la región R se halla a la izquierda (fig. 4-27). Puede demostrarse que una de las dos orientaciones posibles de α hace que ésta esté orientada positivamente.

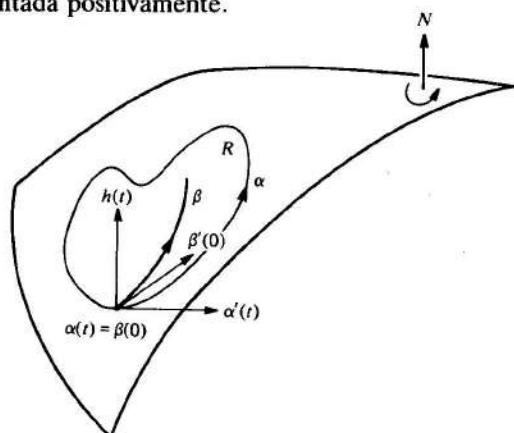


Figura 4-27. Una curva frontera orientada positivamente.

Sea ahora $x: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización de S compatible con su orientación sea $R \subset x(U)$ una región acotada de S . Si f es una función diferenciable sobre S , entonces se comprueba fácilmente que la integral

$$\iint_{x^{-1}(R)} f(u, v) \sqrt{EG - F^2} du dv$$

no depende de la parametrización x , elegida en la clase de la orientación de x (la demostración es la misma que en la definición de área; cf. la sec. 2.5). En consecuencia, esta integral tiene un significado geométrico y se denomina la *integral de f sobre la región R*. Es frecuente denotarla por

$$\iint_R f d\sigma.$$

Establecemos ahora, con estas definiciones, el

TEOREMA DE GAUSS-BONNET (Local). Sea $x: U \rightarrow S$ una parametrización ortogonal (es decir, $F = 0$) de una superficie orientada S , donde $U \subset \mathbb{R}^2$ es homeomorfo a un disco abierto y x es compatible con la orientación de S . Sea $R \subset x(U)$ una región simple de S y sea $\alpha: I \rightarrow S$ tal que $\partial R = \alpha(I)$. Admitamos que α está orientada positivamente, y está parametrizada por la longitud de arco s , siendo $\alpha(s_0), \dots, \alpha(s_k)$ y $\theta_0, \dots, \theta_k$ los vértices y los ángulos externos de α , respectivamente. Entonces

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi, \quad (1)$$

donde $k_g(s)$ es la curvatura geodésica de los arcos regulares de α y K es la curvatura gaussiana de S .

Observación. La restricción de que la región R esté contenida en el conjunto imagen de una parametrización ortogonal sólo se necesita para simplificar la demostración. Como veremos posteriormente (corolario 1 del teorema de Gauss-Bonnet global) el resultado precedente también es válido para cualquier región simple de una superficie regular. Esto resulta bastante plausible, puesto que la ec. (1) de ninguna manera involucra una parametrización en particular³.

Demostración. Sea $u = u(s)$ y $v = v(s)$ la expresión de α en la parametrización x . Utilizando la prop. 3 de la sec. 4.4 tenemos que

$$k_g(s) = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} + \frac{d\varphi_i}{ds},$$

donde $\varphi_i = \varphi_i(s)$ es una función diferenciable que mide el ángulo positivo de x_u a $\alpha'(s)$ en $[s_i, s_{i+1}]$. Integrando la expresión precedente sobre cada intervalo $[s_i, s_{i+1}]$ y sumando los resultados,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds &= \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \frac{dv}{ds} - \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \frac{du}{ds} \right) ds \\ &\quad + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds. \end{aligned}$$

³ Si se admite la validez de esta afirmación, entonces ya pueden introducirse las aplicaciones 2 y 6 presentadas más adelante.

Utilizamos ahora el teorema de Gauss-Green en plano uv , el cual establece lo siguiente: si $P(u, v)$ y $Q(u, v)$ son funciones diferenciables en una región simple $R \subset R^2$, cuya frontera viene expresada por $u = u(s)$, $v = v(s)$, entonces

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(P \frac{du}{ds} + Q \frac{dv}{ds} \right) ds = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) du dv.$$

Se deduce entonces que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds &= \iint_{x^{-1}(R)} \left\{ \left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right\} du dv \\ &\quad + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds. \end{aligned}$$

A partir de la fórmula de Gauss para $F = 0$ (cf. el ejercicio 1, sec. 4.3), sabemos

$$\begin{aligned} \iint_{x^{-1}(R)} \left\{ \left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right\} du dv &= - \iint_{x^{-1}(R)} K \sqrt{EG} du dv \\ &= - \iint_R K d\sigma. \end{aligned}$$

Por otra parte, en virtud al teorema de rotación de tangentes,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds &= \sum_{i=0}^k (\varphi_i(s_{i+1}) - \varphi_i(s_i)) \\ &= \pm 2\pi - \sum_{i=0}^k \theta_i. \end{aligned}$$

Al estar la curva α orientada positivamente, debe tomarse el signo más, como se comprobó fácilmente en el caso particular del círculo en el plano.

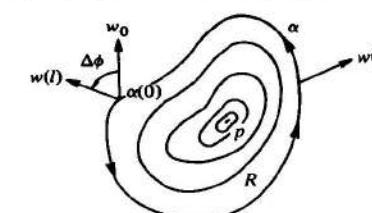
Reuniendo todos estos hechos, obtenemos

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi. \quad \text{Q.E.D.}$$

Antes de emprender la versión global del teorema de Gauss-Bonnet, desearíamos ver de manifiesto cómo las técnicas utilizadas en la demostración de este teorema pueden emplearse para establecer una interpretación geométrica, en términos de realismo, de la curvatura gaussiana.

A tales efectos, sea $x: U \rightarrow S$ una parametrización ortogonal en un punto $p \in S$ y $R \subset x(U)$ una región simple sin vértices, que contiene a p en su interior. Sea $[0, l] \rightarrow x(U)$ una curva parametrizada por la longitud de arco s de forma que la recta de α sea la frontera de R . Sea w_0 un vector unitario tangente a S en $x(\alpha(0))$ y sea $w(s)$, $s \in [0, l]$, el transporte paralelo de w_0 a lo largo de α (fig. 4-28). Utilizando prop. 3 de la sec. 4.4 y el teorema de Gauss-Green en el plano uv , obtenemos

$$0 = \int_0^l \left[\frac{Dw}{ds} \right] ds = \int_0^l \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} ds + \int_0^l \frac{d\varphi}{ds},$$



$$= - \iint_R K d\sigma + \varphi(l) - \varphi(0),$$

Figura 4-28

donde $\varphi = \varphi(s)$ es una determinación diferenciable del ángulo de x_u a $w(s)$. Se deduce así que $\varphi(l) - \varphi(0) = \Delta\varphi$ viene dado por

$$\Delta\varphi = \iint_R K d\sigma. \quad (2)$$

Entonces, $\Delta\varphi$ no depende de la elección de w_0 , y de la expresión precedente se deduce que $\Delta\varphi$ tampoco depende de la elección de $\varphi(0)$. Al efectuar el límite (en el sentido de la prop. 2, sec. 3.3)

$$\lim_{R \rightarrow p} \frac{\Delta\varphi}{A(R)} = K(p),$$

donde $A(R)$ denota el área de la región R , obtenemos la interpretación de K que se perseguía.

Para globalizar el teorema de Gauss-Bonnet necesitamos más preliminares topológicos.

Sea S una superficie regular. Se dice que una región $R \subset S$ es *regular* si R es compacta y su frontera ∂R es la unión de un número finito de curvas regulares a trozos, cerradas y simples que no se cortan (la región de la fig. 4-29(a) es regular,

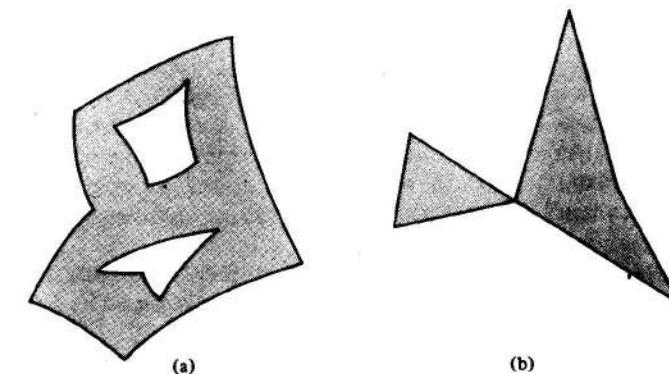


Figura 4-29

pero la de fig. 4-29(b) no lo es). Por conveniencia, consideraremos que una superficie compacta es una región regular, cuya frontera es vacía.

Llamaremos *triángulo* a una región simple con sólo tres vértices, y ángulos externos α_i , $i = 1, 2, 3$.

Una *triangulación* de una región regular $R \subset S$ es una familia finita \mathcal{T} de triángulos T_i , $i = 1, 2, \dots, n$, tal que

1. $\bigcup_{i=1}^n T_i = R$.
2. Si $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, entonces o bien $T_i \cap T_j$ es un lado común a T_i y a T_j o bien consta de un vértice a T_i y a T_j .

Dada una triangulación \mathcal{T} de una región regular $R \subset S$ de una superficie S , denotaremos por F al número de triángulos (caras), por E al número de lados (aristas) y por V al número de vértices de la triangulación. El número

$$F - E + V = \chi$$

se denomina la *característica de Euler-Poincaré* de la triangulación.

Presentamos sin demostración las proposiciones que siguen. Puede encontrarse una exposición de estos resultados, por ejemplo, en L. Ahlfors y L. Sario, *Riemann Surfaces*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1961, cap. 1.

PROPOSICIÓN 1. *Cada región regular de una superficie regular admite una triangulación.*

PROPOSICIÓN 2. *Sea S una superficie orientada y $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in A$, una familia de parametrizaciones compatibles con la orientación de S . Sea $R \subset S$ una región regular de S . Entonces existe una triangulación \mathcal{T} de R de forma que cada triángulo $T \in \mathcal{T}$ está contenido en algún entorno coordenado de la familia $\{x_\alpha\}$. Además, si la frontera de cada triángulo de \mathcal{T} está orientada positivamente, triángulos adyacentes determinan orientaciones opuestas en el lado común (fig. 4-30).*

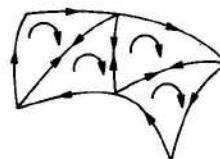


Figura 4-30

PROPOSICIÓN 3. *Si $R \subset S$ es una región regular de una superficie S , la característica de Euler-Poincaré no depende de la triangulación de R . En consecuencia, resulta conveniente denotarla por $\chi(R)$.*

La última proposición muestra que la característica de Euler-Poincaré es un variante topológico de la región regular R . En beneficio de las aplicaciones del

teorema de Gauss-Bonnet, mencionaremos el importante hecho de que este invariante permite una clasificación topológica de las superficies compactas en \mathbb{R}^3 .

Debe observarse que un cálculo directo establece que la característica de Euler-Poincaré de la esfera es 2, la del toro (la esfera con un «asa»; véase la fig. 4-31) es cero, la del toro doble (la esfera con dos asas) es -2, y, en general, la del n -toro (la esfera con n asas) es $-2(n - 1)$.

La proposición siguiente establece que esta lista engloba a todas las superficies compactas de \mathbb{R}^3 .

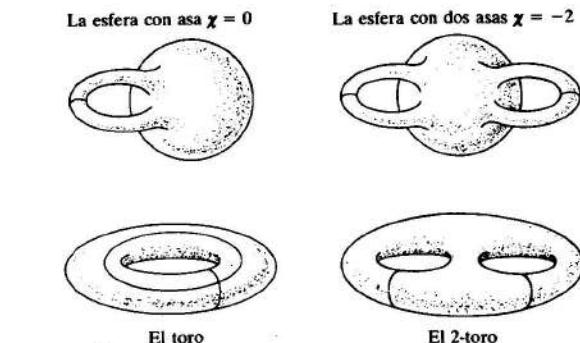


Figura 4-31

PROPOSICIÓN 4. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie conexa y compacta; entonces la característica de Euler-Poincaré $\chi(S)$ toma uno de los valores 2, 0, -2, ..., -2n, ...; además, si $S' \subset \mathbb{R}^3$ es otra superficie compacta y $\chi(S) = \chi(S')$, entonces S es homeomorfa a S' .*

En otras palabras, cada superficie conexa y compacta $S \subset \mathbb{R}^3$ es homeomorfa a una esfera con un cierto número g de asas. El número

$$g = \frac{2 - \chi(S)}{2}$$

se denomina el *género* de S .

Finalmente, sea $R \subset S$ una región regular de una superficie orientada S y sea \mathcal{T} una triangulación de R tal que cada triángulo $T_j \in \mathcal{T}$, $j = 1, \dots, k$, está contenido en un entorno coordenado $x_j(U_j)$ de una familia de parametrizaciones $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in A$, compatibles con la orientación de S . Sea f una función diferenciable sobre S . La siguiente proposición prueba que tiene sentido hablar de la integral de f extendida a la región R .

PROPOSICIÓN 5. *Con las notaciones precedentes, la suma*

$$\sum_{j=1}^k \iint_{x_j^{-1}(T_j)} f(u_j, v_j) \sqrt{E_j G_j - F_j^2} du_j dv_j$$

no depende de la triangulación \mathcal{T} ni tampoco de la familia $\{x_j\}$ de parametrizaciones de S .

Por lo tanto, esta suma tiene significado geométrico y se denomina la *integral de curvatura* sobre la región R . Habitualmente se denota por

$$\iint_R f d\sigma.$$

Ya estamos en condiciones de establecer y demostrar el

TEOREMA GLOBAL DE GAUSS-BONNET. Sea $R \subset S$ una región regular de una superficie orientada y sean C_1, \dots, C_n las curvas regulares a trozos, cerradas y simples que forman la frontera ∂R de R . Supongamos que cada C_i está orientada positivamente y sea $\theta_1, \dots, \theta_p$ el conjunto de todos los ángulos externos de las curvas C_1, \dots, C_n . Entonces

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{i=1}^p \theta_i = 2\pi\chi(R),$$

donde s denota la longitud de arco de C_i y la integral sobre C_i significa la suma de las integrales que corresponden a los arcos regulares de C_i .

Demostración. Consideremos una triangulación \mathfrak{Z} de la región R de forma que cada triángulo T_j esté contenido en un entorno coordenado de una familia de parametrizaciones ortogonales, compatibles con la orientación de S . En virtud a la prop. 2 existe tal triangulación. Además, si la frontera de cada triángulo de \mathfrak{Z} está orientada positivamente, obtenemos orientaciones opuestas en los lados que son comunes a triángulos adyacentes (fig. 4-32).

Aplicando a cada triángulo el teorema local de Gauss-Bonnet y sumando los resultados obtenemos, utilizando la prop. 5 y el hecho de que cada lado «interior» se recorre dos veces en orientaciones opuestas

$$\sum_i \int_{C_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{j,k=1}^{p,3} \theta_{jk} = 2\pi F,$$

donde F denota el número de triángulos de \mathfrak{Z} y $\theta_{j1}, \theta_{j2}, \theta_{j3}$ son los ángulos externos del triángulo T_j .

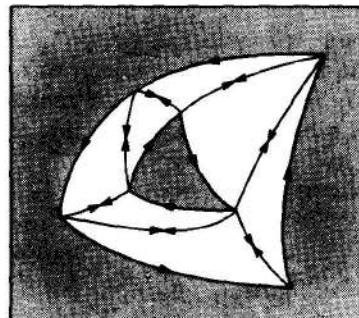


Figura 4-32

Introduciremos ahora los ángulos *interiores* del triángulo T_j , dados por $\varphi_{jk} = \pi - \theta_{jk}$. De esta forma,

$$\sum_{j,k} \theta_{jk} = \sum_{j,k} \pi - \sum_{j,k} \varphi_{jk} = 3\pi F - \sum_{j,k} \varphi_{jk}.$$

Utilizaremos la notación siguiente:

E_e = el número de aristas externas de \mathfrak{Z} .

E_i = el número de aristas internas de \mathfrak{Z} .

V_e = el número de vértices externos de \mathfrak{Z} .

V_i = el número de vértices internos de \mathfrak{Z} .

Como las curvas C_i son cerradas, $E_e = V_e$. Además, es fácil demostrar por inducción que

$$3F = 2E_i + E_e$$

y, por tanto, que

$$\sum_{j,k} \theta_{jk} = 2\pi E_i + \pi E_e - \sum_{j,k} \varphi_{jk}.$$

Observemos ahora que los vértices externos pueden ser o bien vértices de alguna curva C_i o vértices introducidos por la triangulación. Ponemos $V_e = V_{ec} + V_{ei}$, donde V_{ec} es el número de vértices de las curvas C_i y V_{ei} es el número de vértices externos de la triangulación que no son vértices de alguna curva C_i . Como la suma de ángulos alrededor de cada vértice interno es 2π , obtenemos

$$\sum_{j,k} \theta_{jk} = 2\pi E_i + \pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_{ei} - \sum_i (\pi - \theta_i).$$

Sumando y restando πE_e a la expresión precedente y tomando en consideración que $E_e = V_e$, concluimos que

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} \theta_{jk} &= 2\pi E_i + 2\pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_e - \pi V_{ei} - \pi V_{ec} + \sum_i \theta_i \\ &= 2\pi E - 2\pi V + \sum_i \theta_i. \end{aligned}$$

Recopilando los resultados obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{i=1}^p \theta_i &= 2\pi(F - E + V) \\ &= 2\pi\chi(R). \end{aligned} \quad \text{Q.E.D.}$$

Como la característica de Euler-Poincaré de una región simple es claramente 1, obtenemos el (véase la observación 1)

COROLARIO 1. Si R es una región simple de S entonces

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi.$$

Teniendo en cuenta el hecho de que una superficie compacta puede considerarse como una región cuya frontera es vacía, obtenemos el

COROLARIO 2. Sea S una superficie compacta y orientable; entonces

$$\iint_S K d\sigma = 2\pi\chi(S).$$

El corolario 2 es de lo más chocante. Baste pensar en todas las formas posibles de una superficie homeomorfa a la esfera para sorprendernos con el hecho de que la función curvatura se distribuya de forma tal que «la curvatura total», es decir, $\iint S K d\sigma$, sea la misma para todos los casos.

Vamos a presentar a continuación algunas aplicaciones del teorema de Gauss-Bonnet. Para estas aplicaciones (y para los ejercicios del final de la sección) es conveniente admitir un resultado básico de la topología del plano (el teorema de la curva de Jordan) que utilizaremos en la forma siguiente: *cada curva regular a trozos del plano (por tanto, sin autointersecciones) es la frontera de una región simple*.

1. Una superficie compacta de curvatura positiva es homeomorfa a una esfera.

La característica de Euler-Poincaré de tal superficie es positiva y la esfera es la única superficie compacta de R^3 que satisface esta condición.

2. Sea S una superficie orientable con curvatura negativa o nula. Entonces dos geodésicas γ_1 y γ_2 que parten del mismo punto $p \in S$ no pueden encontrarse otra vez en un punto $q \in S$ de forma que las trazas de γ_1 y γ_2 constituyan la frontera de una región simple R de S .

Admitamos que lo contrario es cierto. En virtud al teorema de Gauss-Bonnet (R es simple)

$$\iint_R K d\sigma + \theta_1 + \theta_2 = 2\pi,$$

donde θ_1 y θ_2 son los ángulos externos de la región R . Como las geodésicas γ_1 y γ_2 no pueden cortarse tangencialmente, tenemos que $\theta_i < \pi$, $i = 1, 2$. Por otra parte $K \leq 0$, de donde se deduce la contradicción.

Cuando $\theta_1 = \theta_2 = 0$, las trazas de las geodésicas γ_1 y γ_2 constituyen una geodésica cerrada y simple de S (es decir, una curva regular cerrada que es una geodésica). Se deduce entonces que sobre una superficie con curvatura nula o negativa, no existe una geodésica cerrada y simple que sea la frontera de una región simple de S .

3. Sea S una superficie homeomorfa a un cilindro con curvatura gaussiana $K < 0$. Entonces S tiene a lo más una geodésica cerrada y simple Γ .

Supongamos que S contiene una geodésica cerrada y simple Γ . En virtud a la aplicación 2 y como existe un homeomorfismo φ de S con el plano P menos un punto $q \in P$, $\varphi(\Gamma)$ es la frontera de una región simple de P que contiene a q .

Admitamos ahora que S contiene otra geodésica cerrada y simple Γ' . Afirmamos que Γ' no intersecta a Γ . En caso contrario, los arcos de $\varphi(\Gamma)$ y $\varphi(\Gamma')$ comprendidos entre dos puntos de intersección «consecutivos», r_1 y r_2 , constituirían la frontera de una región simple, lo que contradice la aplicación 2 (véase la fig. 4-33). Por el argumento precedente, $\varphi(\Gamma')$ también es la frontera de una región simple R de P que contiene a q , cuyo interior es homeomorfo a un cilindro. Por tanto, $\chi(R) = 0$. Por otra parte, por el teorema de Gauss-Bonnet,

$$\iint_{\varphi^{-1}(R)} K d\sigma = 2\pi\chi(R) = 0,$$

lo que constituye una contradicción, pues $K < 0$.

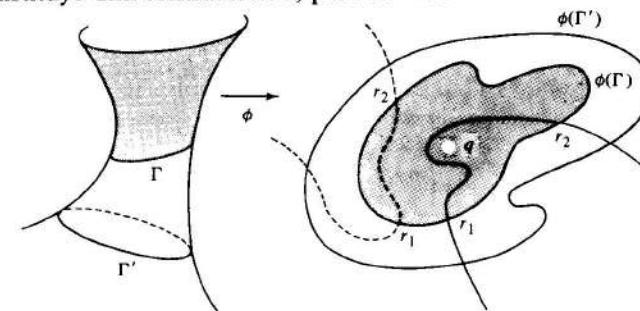


Figura 4-33

4. Si existen dos geodésicas cerradas y simples Γ_1 y Γ_2 en una superficie compacta, conexa y con curvatura positiva, entonces Γ_1 y Γ_2 se cortan.

Por la aplicación 1, S es homeomorfa a una esfera. Si Γ_1 y Γ_2 no se cortan, entonces el conjunto formado por Γ_1 y Γ_2 es la frontera de una región R cuya característica de Euler-Poincaré es $\chi(R) = 0$. En virtud al teorema de Gauss-Bonnet,

$$\iint_R K d\sigma = 0,$$

y, como $K > 0$, esto constituye una contradicción.

5. Vamos a demostrar el resultado siguiente, debido a Jacobi: sea $\alpha: I \rightarrow R^3$ una curva parametrizada, regular, cerrada con curvatura no nula. Admitamos que la curva que describe el vector normal $n(s)$ en la esfera unidad S^2 (la indicatriz normal) es simple. Entonces $n(I)$ divide a S^2 en dos regiones con la misma área.

Podemos suponer que α está parametrizada por la longitud de arco. Denotemos por \tilde{s} la longitud de arco de la curva $n = n(s)$ en S^2 . La curvatura geodésica k_g de $n(s)$ es

$$k_g = \langle \ddot{n}, n \wedge \dot{n} \rangle,$$

donde los puntos representan la diferenciación con respecto a \tilde{s} . Como

$$\dot{n} = \frac{dn}{ds} \frac{ds}{d\tilde{s}} = (-kt - \tau b) \frac{ds}{d\tilde{s}},$$

$$\ddot{n} = (-kt - \tau b) \frac{d^2s}{d\tilde{s}^2} + (-k't - \tau'b) \left(\frac{ds}{d\tilde{s}} \right)^2 - (k^2 + \tau^2)n \left(\frac{ds}{d\tilde{s}} \right)^2,$$

$$\left(\frac{ds}{d\tilde{s}} \right)^2 = \frac{1}{k^2 + \tau^2},$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\bar{k}_g &= \langle n \wedge \dot{n}, \ddot{n} \rangle = \frac{ds}{d\tilde{s}} \langle (kb - \tau t), \ddot{n} \rangle = \left(\frac{ds}{d\tilde{s}} \right)^3 (-k\tau' + k'\tau) \\ &= -\frac{\tau'k - k'\tau}{k^2 + \tau^2} \frac{ds}{d\tilde{s}} = -\frac{d}{ds} \operatorname{tag}^{-1} \left(\frac{\tau}{k} \right) \frac{ds}{d\tilde{s}}.\end{aligned}$$

De esta forma, aplicando el teorema de Gauss-Bonnet a una de las regiones R limitada por $n(I)$ y utilizando el hecho de que $K = 1$, obtenemos

$$2\pi = \int_R K d\sigma + \int_{\partial R} \bar{k}_g d\tilde{s} = \int_R d\sigma = \text{área de } R.$$

Como el área de S^2 es 4π , deducimos el resultado deseado.

6. Sea T un triángulo geodésico (es decir, los lados de T son geodésicas) en una superficie orientada. Sean $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ los ángulos externos de T y sean $\varphi_1 = \pi - \theta_1, \varphi_2 = \pi - \theta_2, \varphi_3 = \pi - \theta_3$ sus ángulos interiores. Por el teorema de Gauss-Bonnet,

$$\iint_T K d\sigma + \sum_{i=1}^3 \theta_i = 2\pi.$$

Por lo tanto,

$$\iint_T K d\sigma = 2\pi - \sum_{i=1}^3 (\pi - \varphi_i) = -\pi + \sum_{i=1}^3 \varphi_i.$$

Se tiene así que la suma de los ángulos interiores, $\sum_{i=1}^3 \varphi_i$, de un triángulo geodésico es

1. Igual a π si $K = 0$.
2. Mayor que π si $K > 0$.
3. Menor que π si $K < 0$.

Además, la diferencia $\sum_{i=1}^3 \varphi_i - \pi$ (el exceso de T) precisamente viene dada por $\iint_T K d\sigma$. Si $K \neq 0$ sobre T , ésta es el área de la imagen $N(T)$ de T mediante la

aplicación de Gauss $N: S \rightarrow S^2$ (cf. la ec. (12), sec. 3.3). Esta fue la forma en la que el propio Gauss estableció su teorema: *el exceso de un triángulo geodésico T es igual al área de su imagen esférica $N(T)$* .

El resultado precedente guarda relación con una controversia histórica concerniente a la posibilidad de probar el quinto axioma de Euclides (el axioma de las paralelas), del cual se deduce que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a π . Considerando las geodésicas como rectas, es posible demostrar que las superficies con curvatura constante y negativa constituyen un modelo (local) de geometría donde se satisfacen los axiomas de Euclides, exceptuando el quinto y el axioma que garantiza la posibilidad de prolongar indefinidamente las líneas rectas. En realidad, Hilbert demostró que no existe en R^3 una superficie con curvatura constante y negativa, cuyas geodésicas puedan prolongarse indefinidamente (la seudoesfera del ejercicio 6, sec. 3.3, presenta una arista de puntos singulares). En consecuencia, las superficies de R^3 con curvatura gaussiana constante y negativa no proporcionan un modelo donde comprobar únicamente la independencia del quinto axioma. Sin embargo, utilizando la noción de superficie abstracta, es posible sortear esta inconveniencia y construir un modelo de geometría donde *todos* los axiomas de Euclides son válidos, con excepción del quinto. Por lo tanto, este axioma es independiente de los restantes.

En las secs. 5.10 y 5.11, demostraremos el resultado de Hilbert que acabamos de citar y describiremos el modelo abstracto para una geometría no euclídea.

7. *Campos vectoriales sobre superficies*⁴. Sea v un campo vectorial diferenciable sobre una superficie orientada S . Decimos que $p \in S$ es un *punto singular* de v si $v(p) = 0$. El punto singular p es *aislado* si existe un entorno V de p en S tal que v no tiene, a parte de p , otros puntos singulares en V .

A cada punto singular aislado p de un campo vectorial v , asociaremos un número entero, el índice de v , que definimos a continuación. Sea $x: U \rightarrow S$ una parametrización ortogonal en $p = x(0, 0)$ compatible con la orientación de S , y sea $\alpha: [0, l] \rightarrow S$ una curva parametrizada, regular a trozos, orientada positivamente, cerrada y simple tal que, $\alpha([0, l]) \subset x(U)$ es la frontera de una región simple R que contiene a p como único punto singular. Sea $v = v(t)$, $t \in [0, l]$, la restricción de v a lo largo de α y sea $\varphi = \varphi(t)$ alguna determinación diferenciable del ángulo de x_u a $v(t)$, dada por el lema 1 de la sec. 4.4 (que se extiende sin dificultad al caso de curvas regulares a trozos). Como α es cerrada, existe un número entero I definido por

$$2\pi I = \varphi(l) - \varphi(0) = \int_0^l \frac{d\varphi}{dt} dt.$$

Se denomina I el *índice* de v en p .

Debemos demostrar que esta definición no depende de las elecciones efectuadas, siendo la de la parametrización x la primera. Sea $w_0 \in T_{\alpha(0)}(S)$ y sea $w(t)$ el transporte paralelo de w_0 a lo largo de α . Sea $\psi(t)$ una determinación diferenciable del ángulo de

⁴ Esta aplicación requiere la materia de la sec. 3.4. En caso de haber sido omitida, también debería hacerse lo propio con los ejercicios 6-9 de esta sección.

x_u a $w(t)$. Entonces, como vimos en la interpretación de K en términos del transporte paralelo (cf. la ec. (2)),

$$\psi(l) - \psi(0) = \iint_R K d\sigma.$$

Restando las ecuaciones precedentes obtenemos

$$\iint_R K d\sigma - 2\pi I = (\psi - \varphi)(l) - (\psi - \varphi)(0) = \Delta(\psi - \varphi) \quad (3)$$

Como $\psi - \varphi$ no depende de x_u , el índice I es independiente de la parametrización x .

La demostración de que el índice no depende de la elección de α resulta más técnica (aunque más intuitiva) y solamente la esbozaremos.

Sean α_0 y α_1 dos curvas del tipo requerido en la definición de índice; probaremos que el índice de v es el mismo para ambas curvas. Supongamos primero que las trazas de α_0 y α_1 no se cortan. Existen entonces un homeomorfismo de la región delimitada por las trazas de α_0 y α_1 sobre una región del plano comprendida entre dos círculos concéntricos C_0 y C_1 (un anillo). Como podemos construir una familia de círculos concéntricos C_t que dependen de t de manera continua y describen una deformación de C_0 a C_1 , obtenemos una familia de curvas α_t , que dependen continuamente en t y deforman α_0 en α_1 (fig. 4-34). Denotemos por I_t al índice de v calculado con la curva α_t . Ahora, I_t depende continuamente de $t \in [0, 1]$, pues el índice se expresa por una integral. Siendo un número entero, I_t permanece constante en esta deformación, así $I_0 = I_1$, que es lo que se persegüía. Si se cortan las trazas de α_0 y α_1 , elegimos una curva lo suficientemente pequeña como para que su traza tenga intersección vacía con las de α_0 y α_1 por separado, y aplicamos el resultado previo.

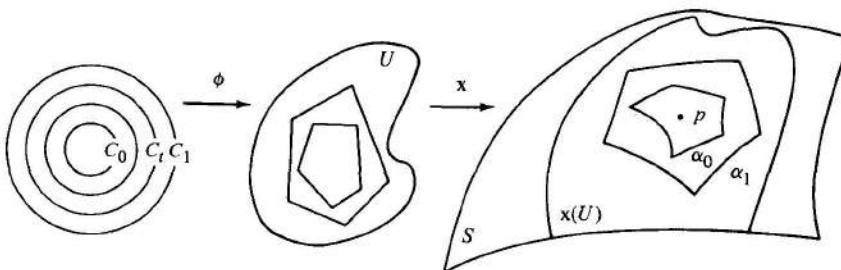


Figura 4-34

Debe observarse que la definición de índice todavía puede aplicarse cuando p no es un punto singular de v . Sin embargo, resulta entonces que el índice es cero. Esto se deduce del hecho de que, como I no depende de x_u , podemos elegir x_u como el propio v ; así, $\varphi(t) = 0$.

En la fig. 4-35 mostramos algunos ejemplos del índice para campos vectoriales en el plano xy que tienen a $(0, 0)$ como punto singular. Las curvas que aparecen en los dibujos son las trayectorias de los campos vectoriales.

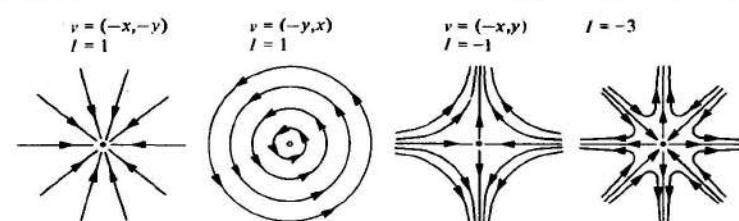


Figura 4-35

Sea ahora $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie compacta y orientada, y sea v un campo vectorial diferenciable que sólo tiene puntos singulares aislados. Observemos que el número de éstos es finito. En caso contrario, por compacidad (cf. la sec. 2.7, propiedad 1), el conjunto de puntos singulares tendría un punto límite, el cual sería un punto singular no aislado. Sea $\{x_a\}$ una familia de parametrizaciones ortogonales compatibles con la orientación de S . Sea \mathfrak{T} una triangulación de S tal que

1. Cada triángulo $T \in \mathfrak{T}$ está contenido en algún entorno coordenado de la familia $\{x_a\}$.
2. Cada $T \in \mathfrak{T}$ contiene a lo más un punto singular.
3. La frontera de cada $T \in \mathfrak{T}$ carece de puntos singulares y está orientada positivamente.

Si aplicamos la ec. (3) a cada triángulo $T \in \mathfrak{T}$, sumamos los resultados y tenemos en cuenta que la arista de cada $T \in \mathfrak{T}$ aparece dos veces con orientaciones opuestas, obtenemos

$$\iint_S K d\sigma - 2\pi \sum_{i=1}^k I_i = 0,$$

donde I_i es el índice del punto singular p_i , $i = 1, \dots, k$. Este resultado, unido al teorema de Gauss-Bonnet (cf. el corolario 2), permite llegar finalmente a

$$\sum I_i = \frac{1}{2\pi} \iint_S K d\sigma = \chi(S).$$

Hemos probado así el siguiente resultado:

TEOREMA DE POINCARÉ. *La suma de los índices de un campo vectorial diferenciable v con puntos singulares aislados sobre una superficie compacta S , es igual a la característica de Euler-Poincaré de S .*

Es éste un notable resultado. Implica que $\sum I_i$ no depende de v sino de la topología de S . Por ejemplo, en cualquier superficie homeomorfa a la esfera, todos los campos vectoriales con singularidades aisladas deben cumplir que la suma de sus índices es igual 2. En particular, ninguna de tales superficies puede exhibir campos vectoriales sin puntos singulares.

EJERCICIOS

- Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, compacta y orientable que no es homeomorfa a una esfera. Demostrar que hay puntos en S donde la curvatura gaussiana es positiva, negativa y cero.
- Sea T un toro de revolución. Describase la imagen de la aplicación de Gauss en T y compruébese, sin apelar al teorema de Gauss-Bonnet, que

$$\iint_T K d\sigma = 0.$$

Calcúlese la característica de Euler-Poincaré de T y compruébese el resultado precedente mediante el teorema de Gauss-Bonnet.

- Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular homeomorfa a una esfera. Sea $\Gamma \subset S$ una geodésica cerrada y simple en S y sean A y B las regiones de S que tienen a Γ como frontera común. Sea $N: S \rightarrow S^2$ la aplicación de Gauss de S . Demostrar que $N(A)$ y $N(B)$ tienen la misma área.
- Calcular la característica de Euler-Poincaré de
 - Un elipsoide.
 - La superficie $S = \{(x, y, z); x^2 + y^{10} + z^6 = 1\}$.
- Sea C un paralelo de colatitud φ de la esfera unidad orientada S^2 y sea w_0 un vector tangente unitario de C en un punto $p \in C$ (cf. el ejemplo 1, sec. 4.4). Efectúese el transporte paralelo de w_0 a lo largo de C y demuéstrese que, tras una vuelta completa, su posición forma un ángulo $\Delta\varphi = (2\pi - \cos \varphi)$ con la posición inicial w_0 . Verificar que

$$\lim \frac{\Delta\varphi}{A} = 1 \text{ curvatura de } S^2,$$

donde A es el área de la región R de S^2 delimitada por C .

- Para los siguientes campos vectoriales del plano demuéstrese que $(0, 0)$ es un punto singular aislado y calcúlese el índice en $(0, 0)$:

- $v = (x, y)$.
- $v = (-x, y)$.
- $v = (x, -y)$.
- $v = (x^2 - y^2, -2xy)$.
- $v = (x^3 - 3xy^2, y^3 - 3x^2y)$.

- ¿Puede ocurrir que el índice de un punto singular sea cero? En caso afirmativo, constrúyase un ejemplo.
- Demostrar que una superficie compacta y orientable $S \subset \mathbb{R}^3$ admite un campo vectorial sin puntos singulares si y sólo si S es homeomorfa a un toro.
- Sea C una curva regular cerrada y simple sobre la esfera S^2 . Sea v un campo vectorial diferenciable en S^2 tal que sus trayectorias nunca son tangentes a C . Demostrar que cada una de las regiones determinadas por C contiene al menos un punto singular de v .

4.6. La aplicación exponencial. Coordenadas polares geodésicas

En esta sección introduciremos algunos sistemas de coordenadas especiales, con la mirada puesta en sus aplicaciones geométricas. La manera natural de introducir tales coordenadas es a través de la aplicación exponencial, que ahora pasamos a describir.

Como aprendimos en la sec. 4.4, prop. 5, dado un punto p de una superficie regular S y un vector no nulo $v \in T_p(S)$ existe una única geodésica parametrizada $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, con $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$. Para indicar la dependencia de esta geodésica con respecto al vector v , es conveniente representarla por $\gamma(t, v) = \gamma$.

LEMÁ 1. Si la geodésica $\gamma(t, v)$ está definida para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, entonces la geodésica $\gamma(t, \lambda v)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, está definida para $t \in (-\varepsilon/\lambda, \varepsilon/\lambda)$ y $\gamma(t, \lambda v) = \gamma(\lambda t, v)$.

Demostración. Sea $\alpha: (-\varepsilon/\lambda, \varepsilon/\lambda) \rightarrow S$ la curva parametrizada definida por $\alpha(t) = \gamma(\lambda t)$. Entonces $\alpha(0) = \gamma(0)$, $\alpha'(0) = \lambda\gamma'(0)$, y, por la linealidad de D (cf. la ec. (1), sec. 4.4),

$$D_{\alpha'(0)}\alpha'(t) = \lambda^2 D_{\gamma'(0)}\gamma'(t) = 0.$$

Entonces, α es una geodésica con datos iniciales $\gamma(0)$, $\lambda\gamma'(0)$, luego, por unicidad,

$$\alpha(t) = \gamma(t, \lambda v) = \gamma(\lambda t, v)$$

Q.E.D.

Intuitivamente, el Lema 1 quiere decir que, al ser constante la velocidad de una geodésica, podemos viajar sobre su traza en un tiempo prefijado, a condición de ajustar apropiadamente nuestra velocidad.

Introduciremos ahora la siguiente notación. Si $v \in T_p(S)$, $v \neq 0$, es tal que $\gamma(|v|)$, $v/|v| = \gamma(1, v)$ está definido, ponemos

$$\exp_p(v) = \gamma(1, v) \quad \text{y} \quad \exp_p(0) = p.$$

*

Geométricamente, la construcción corresponde a trazar (si ello es posible) sobre la geodésica que pasa por p y en la dirección de v una longitud igual a $|v|$; el punto de S obtenido por este procedimiento se denota por $\exp_p(v)$ (fig. 4-36).

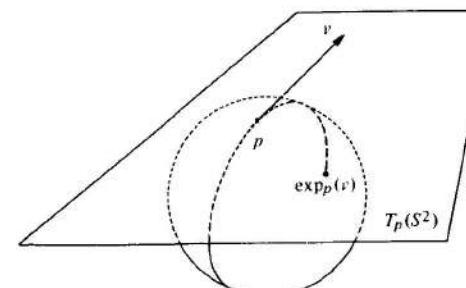


Figura 4-36

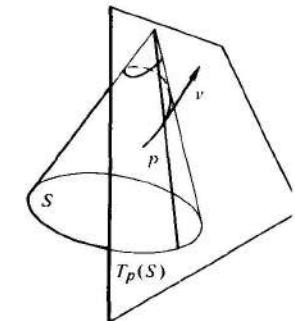


Figura 4-37

Por ejemplo, en la esfera unidad S^2 , $\exp_p(v)$ está definida para $v \in T_p(S^2)$. Los puntos de los círculos de radios π , 3π , ..., $(2n+1)\pi$ son aplicados en el punto q , el punto antipodal de p . Los puntos de los círculos de radios 2π , 3π , ..., $2n\pi$ son aplicados de regreso a p .

Por otra parte, sobre la superficie regular C constituida por el cono de una hoja menos el vértice, $\exp_p(v)$ no está definida para un vector $v \in T_p(C)$ que apunte en la dirección del meridiano que conecta a p con el vértice, cuando $|v| \geq d$ y d es la distancia de p al vértice (fig. 4-37).

Si, en el ejemplo de la esfera, eliminamos de S^2 el punto antipodal de p , entonces $\exp_p(v)$ únicamente está definida en el interior del disco de radio π y centro en el origen contenido en $T_p(S^2)$.

El factor importante es que \exp_p siempre está definida y es diferenciable en un entorno de p .

PROPOSICIÓN 1. Dado $p \in S$ existe un $\epsilon > 0$ tal que \exp_p está definida y es diferenciable en el interior B_ϵ de un disco de radio ϵ y centro el origen contenido en $T_p(S)$.

*Demuestra*ción. Resulta claro que para cada dirección en $T_p(S)$ es posible, en virtud al lema 1, tomar v lo suficientemente pequeño de forma que el intervalo de definición de $\gamma(t, v)$ contenga a 1, y así $\gamma(1, v) = \exp_p(v)$ está definida. Para demostrar que esta reducción puede efectuarse uniformemente en todas las direcciones, necesitamos el teorema de dependencia regular de una geodésica con respecto a las condiciones iniciales (véase la sec. 4.7) enunciado en la forma siguiente: dado $p \in S$ existen números $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$ y una aplicación diferenciable

$$\gamma: (-\epsilon_2, \epsilon_2) \times B_{\epsilon_1} \rightarrow S$$

tal que, para $v \in B_{\epsilon_1}$, $v \neq 0$, $t \in (-\epsilon_2, \epsilon_2)$, la curva $\gamma(t, v)$ es la geodésica de S con $\gamma(0, v) = p$, $\gamma'(0, v) = v$, y para $v = 0$, $\gamma(t, 0) = p$.

Nuestra afirmación se deduce de este enunciado y del lema 1. En efecto, como $\gamma(t, v)$ está definida para $|t| < \epsilon_2$, $|v| < \epsilon_1$, al poner $\lambda = \epsilon_2/2$ en el lema 1, obtenemos que $\gamma(t, \epsilon_2/2)v$ está definida para $|t| < 2$, $|v| < \epsilon_1$. En consecuencia, al tomar el disco $B_\epsilon \subset T_p(S)$, con centro en el origen y radio $\epsilon < \epsilon_1\epsilon_2/2$, tenemos que $\gamma(1, w) = \exp_p w$, $w \in B_\epsilon$, está definida. La diferenciabilidad de \exp_p en B_ϵ se deduce de la diferenciabilidad de γ .

Q.E.D.

La proposición que sigue constituye un complemento importante a este resultado.

PROPOSICIÓN 2. La aplicación $\exp_p: B_\epsilon \subset T_p(S) \rightarrow S$ es un difeomorfismo en un entorno $U \subset B_\epsilon$ del origen 0 de $T_p(S)$.

*Demuestra*ción. Vamos a demostrar que la diferencial $d(\exp_p)$ es no singular en $0 \in T_p(S)$. A estos efectos, identificamos el espacio de los vectores tangentes a $T_p(S)$ en 0 con el propio $T_p(S)$. Consideremos la curva $\alpha(t) = tv$, $v \in T_p(S)$. Es obvio que $\alpha(0) = 0$ y $\alpha'(0) = v$. La curva $(\exp_p \circ \alpha)(t) = \exp_p(tv)$ admite en $t = 0$ el vector tangente

$$\frac{d}{dt}(\exp_p(tv)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma(t, v)) \Big|_{t=0} = v.$$

Así pues

$$(d \exp_p)_0(v) = v,$$

lo que prueba que $d \exp_p$ es no singular en 0. Aplicando el teorema de la función inversa (cf. la prop. 3, sec. 2.4), completamos la demostración de la proposición.

Q.E.D.

Resulta conveniente llamar a $V \subset S$ un *entorno normal* de p si $V = \exp_p(U)$ es la imagen de un entorno U del origen en $T_p(S)$, sobre el que la restricción de \exp_p es un difeomorfismo.

Como la aplicación exponencial en $p \in S$ es un difeomorfismo en U , puede utilizarse para introducir coordenadas en V . Entre los sistemas de coordenadas construidos por este procedimiento, los más habituales son:

1. Las *coordenadas normales*, que corresponden a un sistema de coordenadas rectangulares en el plano tangente $T_p(S)$.
2. Las *coordenadas polares geodésicas*, que corresponden a las coordenadas polares en el plano tangente $T_p(S)$ (fig. 4-38).

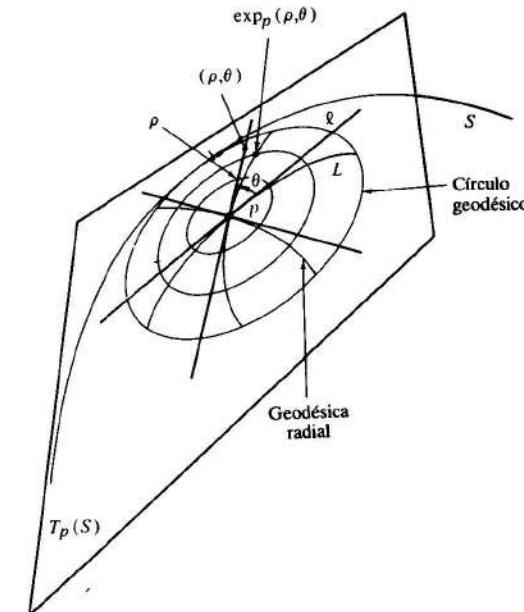


Figura 4-48. Coordenadas polares.

Primero vamos a estudiar las coordenadas normales, que se obtienen al elegir en el plano $T_p(S)$, $p \in S$ dos vectores ortogonales unitarios e_1 y e_2 . Como $\exp_p: U \rightarrow V \subset S$ es un difeomorfismo, satisface las condiciones de parametrización en p . Si $q \in V$,

entonces $q = \exp_p(w)$, donde $w = ue_1 + ve_2 \in U$ y decimos que q tiene coordenadas (u, v) . Es claro que las coordenadas normales obtenidas por este procedimiento dependen de la elección de e_1 y e_2 .

En un sistema de coordenadas normales centradas en p , las geodésicas que pasan por p son las imágenes mediante \exp_p de las rectas $u = at$, $v = bt$ que pasan por el origen de $T_p(S)$. Obsérvese también que en p los coeficientes de la primera forma fundamental con respecto a dicho sistema vienen dados por $E(p) = G(p) = 1$, $F(p) = 0$.

Analicemos ahora las coordenadas polares geodésicas. Elegimos un sistema de coordenadas polares (ρ, θ) en el plano $T_p(S)$, $p \in S$, donde ρ es el radio polar y $0 < 2\pi$, es el ángulo polar, cuyo polo es el origen O de $T_p(S)$. Obsérvese que las coordenadas polares del plano no están definidas en la semirrecta cerrada l correspondiente a $\theta = 0$. Pongamos $\exp_p(l) = L$. Como $\exp_p: U - l \rightarrow V - L$ todavía es un difeomorfismo, podemos parametrizar los puntos de $V - L$ mediante las coordenadas (ρ, θ) , las cuales se denominan coordenadas polares geodésicas.

Utilizaremos la terminología siguiente. Las imágenes mediante $\exp_p: U \rightarrow V$ de los círculos en U con centro en 0 se denominarán *círculos geodésicos* de V , y las imágenes mediante \exp_p de las rectas que pasan por O se llamarán *geodésicas radiales* de V . En $V - L$ estas curvas son, respectivamente, $\rho = \text{const.}$ y $\theta = \text{const.}$

Ahora vamos a determinar los coeficientes de la primera forma fundamental en un sistema de coordenadas polares geodésicas.

PROPOSICIÓN 3. Sea $x: U - l \rightarrow V - L$ un sistema de coordenadas polares geodésicas (ρ, θ) . Entonces los coeficientes $E = E(\rho, \theta)$, $F(\rho, \theta)$ y $G = G(\rho, \theta)$ de la primera forma fundamental satisfacen las condiciones:

$$E = 1, \quad F = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} G = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_\rho = 1.$$

Demuestração. Por la definición de aplicación exponencial, ρ mide la longitud de arco a lo largo de la curva $\theta = \text{const.}$ Se deduce inmediatamente que $E = 1$:

Al introducir el hecho de que $\theta = \text{const.}$ es una geodésica en la ecuación diferencial de las geodésicas (ec. (4), sec. 4.4), se concluye que $\Gamma_{11}^2 = 0$. Utilizando la primera de las relaciones de (2), que en la sec. 4.3 definen los símbolos de Christoffel, obtenemos

$$0 = \frac{1}{2}E_\rho = \Gamma_{11}^1 E = \Gamma_{11}^1.$$

Al introducir esta relación en la segunda de las ecuaciones (2) de la sec. 4.3, concluimos que $F_\rho = 0$, por tanto, $F(\rho, \theta)$ no depende de ρ .

Para cada $q \in V$, denotaremos por $\alpha(\sigma)$ el círculo geodésico que pasa por q , donde $\sigma \in [0, 2\pi]$ (si $q = p$, $\alpha(\sigma)$ es la curva constante $\alpha(\sigma) = p$). Denotaremos por $\gamma(s)$, donde s es la longitud de arco de γ , la geodésica radial que pasa por q . Con esta notación podemos escribir

$$F(\rho, \theta) = \left\langle \frac{d\alpha}{d\sigma}, \frac{dy}{ds} \right\rangle.$$

El coeficiente $F(\rho, \theta)$ no está definido en p . Sin embargo, si fijamos la geodésica radial $\theta = \text{const.}$, el segundo miembro de la ecuación precedente está definido en cada punto de esta geodésica. Como en p , $\alpha(\sigma) = p$, es decir, $d\alpha/d\sigma = 0$, obtenemos

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} F(\rho, \theta) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\langle \frac{d\alpha}{d\sigma}, \frac{dy}{ds} \right\rangle = 0.$$

Esto implica, conjuntamente con el hecho de que F no depende de ρ , que $F = 0$.

Para demostrar la última afirmación de la proposición, elegimos un sistema de coordenadas normales (\bar{u}, \bar{v}) en p de forma que el cambio de coordenadas viene dado por

$$\bar{u} = \rho \cos \theta, \quad \bar{v} = \rho \sin \theta, \quad \rho \neq 0, \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

Recordando que

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(\rho, \theta)},$$

donde $\partial(\bar{u}, \bar{v})/\partial(\rho, \theta)$ es el jacobiano del cambio de coordenadas y \bar{E} , \bar{F} , \bar{G} , son los coeficientes de la primera forma fundamental en las coordenadas normales (\bar{u}, \bar{v}) ,

$$(\sqrt{\bar{G}})_{\rho\rho} + K\sqrt{\bar{G}} = 0, \quad (1)$$

Como en p , $\bar{E} = \bar{G} = 1$, $\bar{F} = 0$ (las coordenadas normales están definidas en p), concluimos que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\bar{G}} = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{\bar{G}})_\rho = 1$$

con lo que concluye la demostración de la proposición.

Q.E.D.

Observación 1. El significado geométrico del hecho de que $F = 0$ es que, en un entorno coordenado normal, la familia de círculos geodésicos es ortogonal a la familia de geodésicas radiales. Se conoce a este hecho como el *lema de Gauss*.

Ahora presentaremos algunas aplicaciones geométricas de las coordenadas polares geodésicas.

Vamos a estudiar en primer lugar, las superficies de curvatura gaussiana constante. Como en un sistema polar $E = 1$ y $F = 0$, la curvatura gaussiana K se escribe

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}}.$$

Puede considerarse esta expresión como una ecuación diferencial que debe satisfacer $\sqrt{G}(\rho, \theta)$ si pretendemos que la superficie (en el entorno coordinado en cuestión) tenga curvatura $K(\rho, \theta)$. Si K es constante, la expresión de arriba, o, equivalentemente,

$$\sqrt{G} = \rho\sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}, \quad \rho \neq 0. \quad (2)$$

es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes. Demostraremos ahora el

TEOREMA DE MINDING. *Dos superficies cualesquiera con la misma curvatura gaussiana constante son localmente isométricas. Con más precisión, sean S_1 y S_2 dos superficies regulares con la misma curvatura K constante. Elijamos los puntos $p_1 \in S_1$, $p_2 \in S_2$ y las bases ortonormales $\{e_1, e_2\} \in T_{p_1}(S_1)$, $\{f_1, f_2\} \in T_{p_2}(S_2)$. Entonces existen entornos V_1 de p_1 , V_2 de p_2 y una isometría $\psi: V_1 \rightarrow V_2$ tal que $d\psi(e_1) = f_1$, $d\psi(e_2) = f_2$.*

Demarcación. Consideremos primero la ec. (2) y estudiemos por separado los casos (1) $K = 0$, (2) $K > 0$ y (3) $K < 0$.

1. Si $K = 0$, $(\sqrt{G})_{\theta\theta} = 0$. Así, $(\sqrt{G})_\theta = g(\theta)$, donde $g(\theta)$ es una función de θ . Como

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} (\sqrt{G})_\theta = 1,$$

concluimos que $(\sqrt{G})_\theta = 1$. Por lo tanto, $\sqrt{G} = \varrho + f(\theta)$, donde $f(\theta)$ es una función de θ . Ya que

$$f(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0,$$

tenemos finalmente, en este caso,

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G(\varrho, \theta) = \varrho^2.$$

2. Si $K > 0$, la solución general de la ec. (2) es

$$\sqrt{G} = A(\theta) \cos(\sqrt{K}\varrho) + B(\theta) \sin(\sqrt{K}\varrho),$$

donde $A(\theta)$ y $B(\theta)$ son funciones de θ . Derivando se comprueba sin dificultad que esta expresión es una solución de la ec. (2).

Como $\lim_{\varrho \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0$, obtenemos $A(\theta) = 0$. De esta forma,

$$(\sqrt{G})_\theta = B(\theta)\sqrt{K} \cos(\sqrt{K}\varrho),$$

y como $\lim_{\varrho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_\theta = 1$, concluimos que

$$B(\theta) = \frac{1}{\sqrt{K}}.$$

Por lo tanto, en este caso,

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \frac{1}{K} \sin^2(\sqrt{K}\varrho).$$

3. Finalmente, si $K < 0$, la solución general de la ec. (2) es

$$\sqrt{G} = A(\theta) \cosh(\sqrt{-K}\varrho) + B(\theta) \operatorname{senh}(\sqrt{-K}\varrho).$$

Utilizando las condiciones iniciales, en este caso verificamos que

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \frac{1}{-K} \operatorname{senh}^2(\sqrt{-K}\varrho).$$

Ahora ya estamos listos para demostrar el teorema de Minding. Sean, respectivamente, V_1 y V_2 entornos normales de p_1 y p_2 . Sea φ la isometría lineal de $T_{p_1}(S_1)$ sobre $T_{p_2}(S_2)$ definida por $\varphi(e_1) = f_1$, $\varphi(e_2) = f_2$. Consideremos un sistema de coordenadas polares (ϱ, θ) en $T_{p_1}(S_1)$ con eje l y pongamos $L_1 = \exp_{p_1}(l)$, $L_2 = \exp_{p_2}(\varphi(l))$. Definamos $\psi: V_1 \rightarrow V_2$ mediante

$$\psi = \exp_{p_2} \circ \varphi \circ \exp_{p_1}^{-1}.$$

Afirmamos que ψ es la isometría requerida.

En efecto, la restricción $\bar{\psi}$ de ψ a $V_1 - L_1$ aplica un entorno coordenado polar, de coordenadas (ϱ, θ) con centro en p_1 , en un entorno coordenado polar, de coordenadas (ϱ, θ) con centro en p_2 . En virtud al estudio precedente de la ec. (2), los coeficientes de las formas fundamentales primas en los puntos correspondientes son iguales. Por la prop. 1 de la sec. 4.2, ψ es una isometría. Por continuidad, ψ todavía preserva los productos interiores en los puntos de L_1 y por tanto es una isometría. Es inmediato comprobar que $d\psi(e_1) = f_1$, $d\psi(e_2) = f_2$, y con esto concluye la demostración.

Q.E.D.

Observación 2. Para el caso en que K no es constante pero mantiene su signo, la expresión $\sqrt{G} K = -(\sqrt{G})_{\theta\theta}$ admite una bella interpretación intuitiva. Consideremos la longitud de arco $L(\varrho)$, de la curva $\varrho = \text{const.}$ entre dos geodésicas próximas $\theta = \theta_0$ y $\theta = \theta_1$:

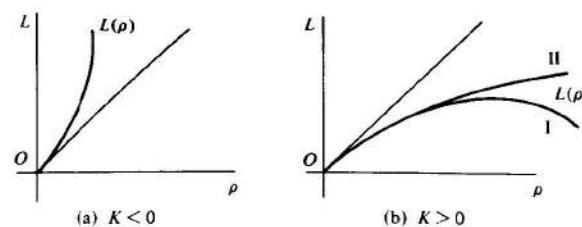
$$L(\varrho) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{G(\varrho, \theta)} d\theta.$$

Admitamos que $K < 0$. Como

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \sqrt{G} = 1 \text{ y } (\sqrt{G})_{\theta\theta} = -K\sqrt{G} > 0,$$

la función $L(\varrho)$ se comporta como en la fig. 4-39(a). Esto significa que $L(\varrho)$ crece con ϱ ; es decir, cuando ϱ crece, las geodésicas $\theta = \theta_0$ y $\theta = \theta_1$ se alejan cada vez más una de otra (naturalmente, debemos permanecer en el entorno coordinado en cuestión).

Por otra parte, si $K > 0$, $L(\varrho)$ se comporta como en la fig. 4-39(b). Las geodésicas $\theta = \theta_0$ y $\theta = \theta_1$ pueden (caso I) o no (caso II) acercarse entre sí después de un cierto valor de ϱ , y esto depende de la curvatura Gaussiana. Por ejemplo, en el caso de la esfera, dos geodésicas que partan de un polo empiezan a acercarse después de cruzar el ecuador (fig. 4-40).



En el cap. 5 (secs. 5.4 y 5.5) volveremos a considerar este tema, precisando más esta observación.

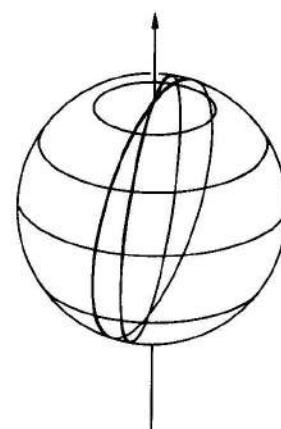


Figura 4-40

Otra aplicación de las coordenadas polares geodésicas se ocupa de una interpretación geométrica de la curvatura gaussiana K .

A estos efectos, observamos en primer lugar que la expresión de K en coordenadas polares geodésicas (ρ, θ) , con centro $p \in S$, es:

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{\theta\theta}}{\sqrt{G}},$$

y, por tanto,

$$\frac{\partial^3(\sqrt{G})}{\partial \rho^3} = -K(\sqrt{G})_\rho - K_\rho(\sqrt{G}).$$

Así, recordando que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0,$$

obtenemos

$$-K(p) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\partial^3 \sqrt{G}}{\partial \rho^3}.$$

Por otra parte, definiendo \sqrt{G} y sus derivadas sucesivas con respecto a ρ en p mediante el valor de los límites correspondientes (cf. la ec. (1)), podemos escribir

$$\begin{aligned} \sqrt{G}(\rho, \theta) &= \sqrt{G}(0, \theta) + \rho(\sqrt{G})_\rho(0, \theta) + \frac{\rho^2}{2!} (\sqrt{G})_{\rho\rho}(0, \theta) \\ &\quad + \frac{\rho^3}{3!} (\sqrt{G})_{\rho\rho\rho}(0, \theta) + R(\rho, \theta) \end{aligned}$$

donde

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{R(\rho, \theta)}{\rho^3} = 0,$$

uniformemente en θ . Substituyendo los valores ya calculados en la expresión precedente, obtenemos

$$\sqrt{G}(\rho, \theta) = \rho - \frac{\rho^3}{3!} K(\rho) + R.$$

Con este valor \sqrt{G} , calculamos la longitud de arco L de un círculo geodésico de radio $\rho = r$:

$$L = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{0+\epsilon}^{2\pi-\epsilon} \sqrt{G}(r, \theta) d\theta = 2\pi r - \frac{\pi}{3} r^3 K(r) + R_1,$$

donde

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{R_1}{r^3} = 0.$$

Se deduce entonces que

$$K(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{\pi} \frac{2\pi r - L}{r^3},$$

identidad que ofrece una interpretación intrínseca de $K(r)$, en términos de radio r de un círculo geodésico $S_r(p)$, encerrando a p , y las longitudes de arco $2\pi r$ de $S_r(p)$ y $\exp_p^{-1}(S_r(p))$, respectivamente.

Por el proceso precedente, es fácil obtener una interpretación de $K(p)$ en términos del área de la región delimitada por $S_r(p)$ (véase el ejercicio 3).

Como última aplicación de las coordenadas polares geodésicas, estudiaremos ahora algunas propiedades variacionales de las geodésicas. Una propiedad fundamental de las geodésicas es que, localmente, minimizan la longitud de arco. Con más precisión, tenemos la

PROPOSICIÓN 4. Sea p un punto de una superficie S . Entonces, existe un entorno $W \subset S$ de p tal que si $\gamma: I \rightarrow W$ es una geodésica parametrizada con $\gamma(0) = p$, $\gamma(t_1) = q$, $t_1 \in I$, y $\alpha: [0, t_1] \rightarrow S$ es una curva parametrizada regular que une a p con q , tenemos que

$$l_\gamma \leq l_\alpha,$$

donde l_α denota la longitud de la curva α . Además, si $l_\gamma = l_\alpha$, entonces, la traza de γ coincide con la traza de α entre p y q .

Demostración. Sea V un entorno normal de p y sea \tilde{W} la región cerrada delimitada por un círculo geodésico de radio r contenido en V . Sean (ρ, θ) las coordenadas polares geodésicas en $\tilde{W} - L$ con centro en p tal que $q \in L$.

Primero supongamos que $\alpha([0, t_1]) \subset \tilde{W} - L$ y definamos $\alpha(t) = (\rho(t), \theta(t))$. Inicialmente, obsérvese que

$$\sqrt{\rho'(t)^2 + G(\theta'(t))^2} \geq \sqrt{(\rho'(t))^2},$$

dándose la igualdad si y solamente si $\theta' \equiv 0$; es decir, $\theta = \text{constante}$. Por lo tanto, la longitud $l_\alpha(\epsilon)$ de α entre ϵ y $t_1 - \epsilon$ satisface

$$\begin{aligned} l_\alpha(\epsilon) &= \int_{\epsilon}^{t_1-\epsilon} \sqrt{(\rho'(t))^2 + G(\theta'(t))^2} dt \geq \int_{\epsilon}^{t_1-\epsilon} \sqrt{(\rho'(t))^2} dt \\ &\geq \int_{\epsilon}^{t_1-\epsilon} \rho'(t) dt = l_\gamma - 2\epsilon, \end{aligned}$$

obteniéndose la igualdad si y sólo si $\theta = \text{const.}$ y $\rho' > 0$. Al hacer $\epsilon \rightarrow 0$ en la expresión de arriba, deducimos que $l_\alpha \geq l_\gamma$, teniendo lugar la identidad si y sólo si α es la geodésica radial $\theta = \text{const.}$ con una parametrización $\rho = \rho(t)$, donde $\rho'(t) > 0$. Se deduce que si $l_\alpha = l_\gamma$, entonces coinciden las trazas de α y γ entre p y q .

Supongamos ahora que $\alpha([0, t_1])$ intersecta a L y admitamos que el primer punto en que esto ocurre es, por ejemplo, $\alpha(t_2)$. Entonces, por el argumento previo, $l_\alpha \geq l_\gamma$ entre t_0 y t_2 , implicando $l_\alpha = l_\gamma$ que las trazas de α y γ coinciden. Como $\alpha([0, t_1])$ y L son compactos, existe un valor $\bar{t} \geq t_2$ tal que o bien es $\alpha(\bar{t})$ el último punto donde $\alpha([0, t_1])$ intersecta a L o bien $\alpha([\bar{t}, t_1]) \subset L$ (fig. 4-41). En cualquier caso, al aplicar la situación precedente, deducimos las afirmaciones de la proposición.

Finalmente, supongamos que $\alpha([0, t_1])$ no está totalmente contenido en \tilde{W} . Sea $t_0 \in [0, t_1]$ el primer valor para el que $\alpha(t_0) = x$ pertenece a la frontera de \tilde{W} . Sea $\tilde{\gamma}$ la geodésica radial px y sea $\tilde{\alpha}$ la restricción de la curva α al intervalo $[0, t_0]$. Resulta claro que $l_\alpha \geq l_{\tilde{\gamma}}$ (véase la fig. 4-42).

Por el argumento previo, $l_\alpha > l_{\tilde{\gamma}}$. Como q es un punto del interior de \tilde{W} , $l_{\tilde{\gamma}} > l_\gamma$. Concluimos entonces que $l_\alpha > l_\gamma$ y la demostración queda finalizada.

Q.E.D.

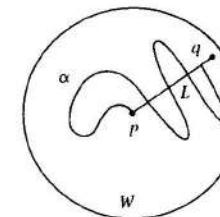


Figura 4-41

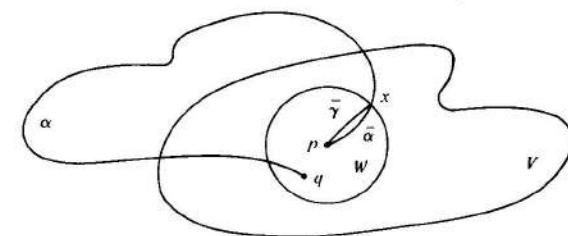


Figura 4-42

Observación 4. La demostración también establece que es cierto el recíproco de la última afirmación de la prop. 4. Sin embargo, este resultado recíproco no se generaliza al caso de curvas regulares a trozos.

La proposición previa no es cierta desde el punto de vista global, como muestra el ejemplo de la esfera. Dos puntos no antipodales de una esfera pueden conectarse mediante dos meridianos de longitudes distintas y únicamente el más pequeño satisface las conclusiones de la proposición. En otras palabras, si una geodésica es lo suficientemente extensa, pudiera no ser el trayecto más corto entre sus puntos extremos. No obstante, la siguiente proposición establece que, cuando una curva regular describe el trayecto más corto entre cualquier pareja de puntos situados en ella, esta curva es necesariamente una geodésica.

PROPOSICIÓN 5. Sea $\alpha: I \rightarrow S$ una curva parametrizada regular cuyo parámetro es proporcional a la longitud de arco. Admitamos que la longitud de arco entre cualquier pareja de puntos $t, \tau \in I$, es menor o igual que la longitud de arco de cualquier curva parametrizada que una $\alpha(t)$ con $\alpha(\tau)$. Entonces α es una geodésica.

Demostración. Sea $t_0 \in I$ un punto arbitrario de I y sea W el entorno de $\alpha(t_0) = p$ dado por la prop. 4. Sea $q = \alpha(t_1) \in W$. Partiendo del caso en el que se da la igualdad en la prop. 4, se deduce que α es una geodésica en (t_0, t_1) . En caso contrario, α tendría, entre t_0 y t_1 , una longitud mayor que la geodésica radial que une a $\alpha(t_0)$ con $\alpha(t_1)$, en contradicción con las hipótesis. Como α es regular, en virtud a la continuidad tenemos que α es una geodésica en t_0 .

Q.E.D.

EJERCICIOS

1. Demuéstrese que sobre una superficie con curvatura constante los círculos geodésicos tienen curvatura geodésica constante.
2. Demostrar que las ecuaciones de las geodésicas en coordenadas polares geodésicas ($E = 1$, $F = 0$) vienen dadas por

$$\begin{aligned} \rho'' - \frac{1}{2} G_\rho(\theta)^2 &= 0 \\ \theta' + \frac{G_\theta}{G_\rho} \rho' \theta' + \frac{1}{2} \frac{G_\theta}{G_\rho} (\theta')^2 &= 0. \end{aligned}$$

3. Si p es un punto de una superficie regular S , demuéstrese que

$$K(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{12\pi r^2 - A}{\pi r^4},$$

donde $K(p)$ es la curvatura gaussiana de S en p , r es el radio de un círculo geodésico $S_r(p)$ centrado en p y A es el área de la región delimitada por $S_r(p)$.

4. Demostrar que en un sistema normal de coordenadas con centro en p , todos los símbolos de Christoffel en p son cero.

5. ¿Entre cuáles de las siguientes parejas de superficies existe una isometría local?

- a. Toro de revolución y cono.
- b. Cono y esfera.
- c. Cono y cilindro.

6. Sea S una superficie, p un punto de S y $S^1(p)$ un círculo geodésico que rodea a p , lo suficientemente pequeño como para estar contenido en un entorno normal. Sean r y s dos puntos de $S^1(p)$ y C un arco de $S^1(p)$ comprendido entre r y s . Considérese la curva $\exp_p^{-1}(C) \subset T_p(S)$. Demostrar que puede elegirse $S^1(p)$ lo suficientemente pequeño de forma que

- a. Si $K > 0$, entonces $l(\exp_p^{-1}(C)) > l(C)$, donde $l(\quad)$ representa la longitud de arco de la curva correspondiente.
- b. Si $K < 0$, entonces $l(\exp_p^{-1}(C)) < l(C)$.

7. Sea (ϱ, θ) un sistema de coordenadas polares geodésicas ($E = 1, F = 0$) sobre una superficie y sea $\gamma(\varrho(s), \theta(s))$ una geodésica que forma un ángulo $\varphi(s)$ con las curvas $\theta = \text{constante}$. Por coherencia, las curvas $\theta = \text{const.}$ están orientadas en el sentido creciente de ϱ y se mide el ángulo φ desde $\theta = \text{const.}$ hasta γ , con respecto a la orientación dada por la parametrización (ϱ, θ) . Demuéstrese que

$$\frac{d\varphi}{ds} + (\sqrt{G})_\varrho \frac{d\theta}{ds} = 0.$$

- *8. *Teorema de Gauss sobre la suma de los ángulos interiores de un triángulo geodésico «pequeño».* Sea Δ un triángulo geodésico (es decir, sus lados son segmentos de geodésicas) sobre una superficie S . Admitamos que Δ es lo suficientemente pequeño como para estar contenido en un entorno normal de alguno de sus vértices. Pruébese de manera directa (es decir, sin apelar al teorema de Gauss-Bonnet) que

$$\iint_{\Delta} K \, dA = \left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right) - \pi,$$

donde K es la curvatura gaussiana de S y $0 < \alpha_i < \pi$, $i = 1, 2, 3$, son los ángulos interiores del triángulo Δ .

9. *Desigualdad isoperimétrica local para círculos geodésicos.* Sea $p \in S$ y sea $S_r(p)$ un círculo geodésico con centro p y radio r . Sea L la longitud de arco de $S_r(p)$ y A el área de la región delimitada por $S_r(p)$. Demuéstrese que

$$4\pi A - L^2 = \pi^2 r^4 K(p) + R,$$

donde $K(p)$ es la curvatura gaussiana de S en p y

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{R}{r^4} = 0.$$

Por tanto, si $K(p) > 0$ ($\delta < 0$) y r es pequeño, $4\pi A - L^2 > 0$ ($\delta < 0$); compárese este resultado con la desigualdad isoperimétrica de la sec. 1.7.

10. Sea S una superficie conexa y sean $\varphi, \psi: S \rightarrow S$ dos isometrías de S . Admitamos que existe un punto $p \in S$ tal que $\varphi(p) = \psi(p)$ y $d\varphi_p(v) = d\psi_p(v)$ para todo $v \in T_p(S)$. Demuéstrese que $\varphi(q) = \psi(q)$ para todo $q \in S$.

11. *Movilidad libre de triángulos geodésicos pequeños.* Sea S una superficie con curvatura gaussiana, constante. Considérense dos puntos $p_1, p'_1 \in S$ y sean V, V' , respectivamente, entornos normales de p_1 y p'_1 . Elijanse los triángulos geodésicos p_1, p_2, p_3 en V (el término geodésico significa que los lados $\widehat{p_1 p_2}, \widehat{p_2 p_3}, \widehat{p_3 p_1}$ son arcos de geodésica) y p'_1, p'_2, p'_3 en V' de forma que

$$\begin{aligned} l(p_1, p_2) &= l(p'_1, p'_2), \\ l(p_2, p_3) &= l(p'_2, p'_3), \\ l(p_3, p_1) &= l(p'_3, p'_1) \end{aligned}$$

(donde l designa la longitud de un arco geodésico). Demuéstrese que existe una isometría $\theta: V \rightarrow V'$ que aplica el primer triángulo en el segundo. Este hecho constituye la versión local, para superficies con curvatura constante, de aquel teorema de la geometría de bachillerato que asegura que dos triángulos con los lados correspondientes iguales son congruentes.

12. Se dice que un difeomorfismo $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ es una *aplicación geodésica* si, para cada geodésica $C \subset S_1$ de S_1 , la curva regular $\varphi(C) \subset S_2$ es una geodésica de S_2 . Si U es un entorno de $p \in S_1$, se dice que $\varphi: U \rightarrow S_2$ es una *aplicación geodésica local* en p si existe un entorno V de $\varphi(p)$ en S_2 tal que $\varphi: U \rightarrow V$ es una aplicación geodésica.

- a. Demuéstrese que si $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ es una aplicación geodésica y conforme, entonces φ es una *semejanza*; es decir,

$$\langle v, w \rangle_p = \lambda \langle d\varphi_p(v), d\varphi_p(w) \rangle, \quad p \in S_1, v, w \in T_p(S_1),$$

siendo λ una constante.

- b. Sean $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la esfera unidad, $\tilde{S} = \{(x, y, z) \in S^2; z < 0\}$ la semiesfera inferior y P el plano $z = -1$. Demuéstrese que la aplicación (proyección central) $\varphi: \tilde{S} \rightarrow P$, que lleva el punto $p \in \tilde{S}$ en la intersección con P de la recta que pasa por p y el centro de la esfera, es una aplicación geodésica.
*c. Demuéstrese que una superficie con curvatura constante admite, en cada $p \in S$, una aplicación geodésica local con valores en el plano.

13. *Teorema de Beltrami.* En la parte c del ejercicio 12, se demostró que una superficie S con curvatura constante K admite, en cada $p \in S$, una aplicación geodésica local con valores en

el plano. Para demostrar el recíproco (teorema de Beltrami) —a saber, si una superficie regular y conexa S admite en cada $p \in S$ una aplicación geodésica local con valores en el plano, entonces S tiene curvatura constante— deben probarse las afirmaciones siguientes:

- a. Si $v(u)$ es una geodésica en un entorno coordenado de una superficie, parametrizado por (u, v) , la cual no coincide con $u = \text{const.}$, entonces

$$\frac{d^2v}{du^2} = \Gamma_{12}^2 \left(\frac{dv}{du} \right)^3 + (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^1) \left(\frac{dv}{du} \right)^2 + (\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^1) \frac{dv}{du} - \Gamma_{11}^2.$$

- *b. Si S admite una aplicación geodésica local $\varphi: V \rightarrow R^2$ del entorno V de un punto $p \in S$ en el plano R^2 , entonces es posible parametrizar el entorno V mediante coordenadas (u, v) , de forma que

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = 2\Gamma_{12}^1, \quad \Gamma_{11}^1 = 2\Gamma_{12}^2.$$

- *c. Si existe una aplicación geodésica de un entorno V de $p \in S$ con valores en el plano, entonces la curvatura K en V satisface las relaciones

$$KE = \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - (\Gamma_{12}^1)_u \quad (a)$$

$$KF = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 - (\Gamma_{12}^2)_v \quad (b)$$

$$KG = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 - (\Gamma_{12}^1)_v \quad (c)$$

$$KF = \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - (\Gamma_{12}^1)_u \quad (d)$$

- *d. Si existe una aplicación geodésica de un entorno V de $p \in S$ con valores en el plano, entonces la curvatura K en V es constante.

- e. Utilícese un argumento estándar de conexidad, junto con los resultados precedentes, para demostrar el teorema de Beltrami.

14. El grupo de holonomía. Sea S una superficie regular y $p \in S$. Para cada curva parametrizada regular a trozos $\alpha: [0, l] \rightarrow S$ con $\alpha(0) = \alpha(l) = p$, sea $P_\alpha: T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ la aplicación que asigna a cada $v \in T_p(S)$ su transporte paralelo, a lo largo de α , de regreso a p . En virtud a la prop. 1 de la sec. 4.4, P_α es una isometría lineal de $T_p(S)$. Si $\beta: [l, \bar{l}] \rightarrow S$ es otra curva parametrizada regular a trozos con $\beta(l) = \beta(\bar{l}) = p$, definase la curva $\beta \circ \alpha: [0, l + \bar{l}] \rightarrow S$ por el procedimiento de recorrer, sucesivamente, primero α y después β ; es decir, $\beta \circ \alpha(s) = \alpha(s)$ si $s \in [0, l]$ y $\beta \circ \alpha(s) = \beta(s)$ si $s \in [l, \bar{l}]$.

- a. Considérese el conjunto

$$H_p(S) = \{P_\alpha: T_p(S) \rightarrow T_p(S); \text{ para todas las } \alpha \text{ que conectan } p \text{ con } p\},$$

donde α es una curva regular a trozos. Defínase en este conjunto la operación $P_\beta \circ P_\alpha = P_{\beta \circ \alpha}$; es decir, $P_\beta \circ P_\alpha$ es la composición habitual que hace actuar primero a P_α y después a P_β . Demuéstrese que, con esta operación, $H_p(S)$ es un grupo (en realidad, un subgrupo del grupo de las isometrías lineales de $T_p(S)$). Se denomina a $H_p(S)$ el grupo de holonomía de S en p .

- b. Demuéstrese que, para una superficie homeomorfa a un disco con $K \equiv 0$, el grupo de holonomía en cualquier punto se reduce a la identidad.

- c. Demostrar que si S es conexa, los grupos de holonomía $H_p(S)$ y $H_q(S)$ en dos puntos arbitrarios $p, q \in S$, son isomorfos. En consecuencia, podemos hablar del grupo de holonomía (abstracto) de una superficie.

- d. Demuéstrese que el grupo de holonomía de una esfera es isomorfo al grupo de las matrices de rotación 2×2 (cf. el ejercicio 22, sec. 4.4).

4.7. Otras propiedades de las geodésicas; entornos convexos⁵

En esta sección demostraremos cómo se deducen ciertos hechos relativos a las geodésicas (en particular, la prop. 5 de la sec. 4.4) a partir del teorema general de existencia, unicidad y dependencia continua con respecto a las condiciones iniciales para campos vectoriales.

Las geodésicas en una parametrización $x(u, v)$ vienen dadas a partir del sistema

$$\begin{aligned} u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 &= 0, \\ v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

donde los Γ_{ij}^k son funciones de las coordenadas locales u y v . Poniendo $u' = \xi$ y $v' = \eta$, el sistema precedente puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} \xi' &= F_1(u, v, \xi, \eta), \\ \eta' &= F_2(u, v, \xi, \eta), \\ u' &= F_3(u, v, \xi, \eta), \\ v' &= F_4(u, v, \xi, \eta), \end{aligned} \quad (2)$$

donde $F_3(u, v, \xi, \eta) = \xi$, $F_4(u, v, \xi, \eta) = \eta$.

Es conveniente utilizar la siguiente notación: (u, v, ξ, η) designará un punto de R^4 el cual lo representaremos como el producto cartesiano $R^4 = R^2 \times R^2$; (u, v) va a denotar un punto del primer factor y (ξ, η) un punto del segundo factor.

El sistema (2) es equivalente a un campo vectorial en un conjunto abierto de R^4 , concepto que se define de una forma completamente análoga al de campo vectorial en R^2 (cf. la sec. 3.4). El teorema de existencia y unicidad de trayectorias (teorema 1, sec. 3.4) también es cierto para este caso (realmente, el teorema es válido en R^n ; cf. S. Lang, Analysis I, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968, pp. 383-386) y puede enunciarse en los siguientes términos:

Dado el sistema (2) en un conjunto abierto $U \subset R^4$ y dado un punto

$$(u_0, v_0, \xi_0, \eta_0) \in U$$

existe una única trayectoria $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ de la ec. (2), con

$$\alpha(0) = (u_0, v_0, \xi_0, \eta_0).$$

Para aplicar este resultado a una superficie regular S debemos observar que, dada una parametrización $x(u, v)$ en $p \in S$, con entorno coordenado V , el conjunto de pares (q, v) , $q \in V$, $v \in T_q(S)$, puede identificarse con el conjunto abierto $V \times R^2 = U \subset R^4$. Para ello, identificamos cada $T_q(S)$, $q \in V$, con R^2 a través de la base $\{x_u, x_v\}$. Cuando

⁵ En una primera lectura, esta sección puede omitirse. No obstante, las proposiciones 1 y 2 (cuyos enunciados se pueden comprender sin leer la sección) se utilizan en el cap. 5.

quiero que hablemos de diferenciabilidad y continuidad en el conjunto de pares (q, v) entenderemos que se trata de la diferenciabilidad y continuidad inducidas por esta identificación.

Admitiendo el teorema precedente, la demostración de la prop. 5 de la sec. 4.4 es trivial. De hecho, las ecuaciones de las geodésicas en la parametrización $x(u, v)$ en $p \in S$ conducen a un sistema de la forma (2) en $U \subset R^4$. El teorema fundamental implica que dado un punto $q = (u_0, v_0) \in V$ y un vector tangente no nulo $v = (\xi_0, \eta_0) \in T_q(S)$ existe una única geodésica parametrizada

$$\gamma = \pi \circ \alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V$$

en V (donde $\pi(q, v) = q$ es la proyección $V \times R^2 \rightarrow V$).

El teorema de dependencia con respecto a las condiciones iniciales para el campo vectorial definido por la ec. (2) también es importante. En esencia es el mismo que para campos vectoriales de R^2 : *dado un punto $p = (u_0, v_0, \xi_0, \eta_0) \in U$, existe un entorno $V = V_1 \times V_2$ de p (donde V_1 es un entorno de (u_0, v_0) y V_2 es un entorno de (ξ_0, η_0)), existe un intervalo abierto I y una aplicación diferenciable $\alpha: I \times V_1 \times V_2 \rightarrow U$ tal que, fijado $(u, v, \xi, \eta) = (q, v) \in V$, se tiene entonces que $\alpha(t, q, v), t \in I$, es la trayectoria de (2) que pasa por (q, v) .*

Para aplicar este resultado a una superficie regular S , introducimos una parametrización en $p \in S$, con entorno coordenado V , e identificamos, como antes, el conjunto de pares (q, v) , $q \in V$, $v \in T_q(S)$, con $V \times R^2$. Tomando el par $(p, 0)$ como condición inicial, obtenemos un intervalo $(-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$, un entorno $V_1 \subset V$ de p en S , un entorno V_2 del origen en R^2 y una aplicación diferenciable

$$\gamma: (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \times V_1 \times V_2 \rightarrow V$$

tal que si $(q, v) \in V_1 \times V_2$, $v \neq 0$, la curva

$$t \rightarrow \gamma(t, q, v), \quad t \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2),$$

es la geodésica de S que satisface $\gamma(0, q, v) = q$, $\gamma'(0, q, v) = v$, si $v = 0$, esta curva se reduce al punto q . Aquí $\gamma = \pi \circ \alpha$, donde $\pi(q, v) = q$ es la proyección $U = V \times R^2 \rightarrow V$ y α es la aplicación antes definida.

Volviendo a la superficie, el conjunto $V_1 + V_2$ tiene la forma

$$\{(q, v), q \in V_1, v \in V_2(0) \subset T_q(S)\},$$

donde $V_2(0)$ representa un entorno del origen en $T_q(S)$. De esta forma, si restringimos γ a $(-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \times \{p\} \times V_2$, podemos elegir $\{p\} \times V_2 = B_{\varepsilon_1} \subset T_p(S)$ y obtener entonces el

TEOREMA 1. *Dado $p \in S$ existen números $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ y una aplicación diferenciable*

$$\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \times B_{\varepsilon_1} \rightarrow S, \quad B_{\varepsilon_1} \subset T_p(S)$$

tal que para $v \in B_{\varepsilon_1}$, $v \neq 0$, $t \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$ la curva $t \rightarrow \gamma(t, v)$ es la geodésica de S con $\gamma(0, v) = p$, $\gamma'(0, v) = v$, para $v = 0$, $\gamma(t, 0) = p$.

Se utilizó este resultado en la demostración de la prop. 1 de la sec. 4.6.

El teorema precedente corresponde al caso en el que p se mantiene fijo. Para tratar con el caso general, denotemos por $B_r(q)$ el dominio delimitado por un (pequeño) círculo geodésico de radio r y centro q y por $\tilde{B}_r(q)$, la unión de $B_r(q)$ con su frontera.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\tilde{B}_\varepsilon(p) \subset V_1$. Sea $B_{\delta(q)}(0) \subset \tilde{V}_q(0)$ el mayor disco abierto contenido en el conjunto $\tilde{V}_q(0)$, constituido por la unión de $V_q(0)$ con sus puntos límite, y sea $\varepsilon_1 = \inf \delta(q)$, $q \in \beta_\varepsilon(p)$. Claramente, $\varepsilon_1 > 0$. Por tanto, el conjunto

$$\mathcal{U} = \{(q, v); q \in B_\varepsilon(p), v \in B_{\varepsilon_1}(0) \subset T_q(S)\}$$

está contenido en $V_1 \times V_2$, obteniendo el

TEOREMA 1a. *Dado $p \in S$, existen números positivos ε , ε_1 , ε_2 y una aplicación diferenciable*

$$\gamma: (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \times \mathcal{U} \rightarrow S,$$

donde

$$\mathcal{U} = \{(q, v); q \in B_\varepsilon(p), v \in B_{\varepsilon_1}(0) \subset T_q(S)\},$$

tal que $\gamma(t, q, 0) = q$, y, para $v \neq 0$, la curva

$$t \rightarrow \gamma(t, q, v), \quad t \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$$

es la geodésica de S que satisface $\gamma(0, q, v) = q$, $\gamma'(0, q, v) = v$.

Aplíquese el teorema 1a para obtener el siguiente refinamiento de la existencia de geodésicas normales.

PROPOSICIÓN 1. *Dado $p \in S$, existe un entorno W de p en S y un número $\delta > 0$ tal que, para cada $q \in W$, \exp_q es un difeomorfismo en $B_\delta(0) \subset T_q(S)$ y $W \subset \exp_1(B_\delta(0))$; es decir, W es un entorno normal de todos sus puntos.*

Demostración. Sea V un entorno coordenado de p . Sean ε , ε_1 , ε_2 y $\gamma: (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \times \mathcal{U} \rightarrow V$ como en el teorema 1a. Eligiendo $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, podemos asegurar que, para $(q, v) \in \mathcal{U}$, $\exp_p(v) = \gamma(|v|, q, v)$ está bien definida. Así, podemos definir una aplicación diferenciable $\phi: \mathcal{U} \rightarrow V \times V$ mediante

$$\phi(q, v) = (q, \exp_q(v)).$$

Demostraremos primero que $d\phi$ es no singular en $(p, 0)$. Para ello, investiguemos cómo transforma ϕ las curvas en \mathcal{U} de la forma:

$$t \rightarrow (p, tw), \quad t \rightarrow (\alpha(t), 0),$$

donde $w \in T_p(S)$ y $\alpha(t)$ es una curva en S con $\alpha(0) = p$. Obsérvese que los vectores tangentes a estas curvas en $t = 0$ son, respectivamente, $(0, w)$ y $(\alpha'(0), 0)$. Luego,

$$\begin{aligned} d\varphi_{(p,0)}(0, w) &= \frac{d}{dt}(p, \exp_p(wt)) \Big|_{t=0} = (0, w), \\ d\varphi_{(p,0)}(\alpha'(0), 0) &= \frac{d}{dt}(\alpha(t), \exp_{\alpha(t)}(0)) \Big|_{t=0} = (\alpha'(0), \alpha'(0)), \end{aligned}$$

y $d\varphi_{(p,0)}$ transforma vectores linealmente independientes en vectores linealmente independientes. Es decir, $d\varphi_{(p,0)}$ es no singular.

Podemos, por tanto, aplicar el teorema de la función inversa y concluir la existencia de un entorno \mathcal{B} de $(p, 0)$ en \mathcal{U} tal que φ aplica difeomórficamente \mathcal{B} sobre un entorno de (p, p) en $V \times V$. Sean $U \subset B_\delta(p) \subset \mathcal{B}$ tales que

$$\mathcal{B} = \{(q, v) \in \mathcal{U}; q \in U, v \in B_\delta(0) \subset T_q(S)\}.$$

Finalmente, sea $W \subset U$ un entorno de p tal que $W \times W \subset \varphi(\mathcal{B})$.

Afirmamos que los δ y W así obtenidos satisfacen el enunciado del teorema. En efecto, como φ es un difeomorfismo en \mathcal{B} , \exp_q es un difeomorfismo en $B_\delta(0)$, $q \in W$. Además, si $q \in W$. Además, si $q \in W$, entonces

$$\varphi(\{q\} \times B_\delta(0)) \supseteq \{q\} \times W,$$

y, por la definición de φ , $W \subset \exp_q(B_\delta(0))$.

Q.E.D.

Observación 1. Se deduce de la proposición previa que, dados dos puntos $q_1, q_2 \in W$, existe una única geodésica γ de longitud menor que δ que une a q_1 con q_2 . Además, la demostración también establece que γ «depende diferenciablemente» de q_1 y q_2 en el sentido siguiente: dado $(q_1, q_2) \in W \times W$, resulta entonces determinado con unicidad un $v \in T_{q_1}(S)$, precisamente, el v dado por $\varphi^{-1}(q_1, q_2) = (q_1, v)$, que depende diferenciablemente de (q_1, q_2) y satisface que $\gamma'(0) = v$.

Una de las aplicaciones del resultado previo consiste en demostrar que una curva, que minimiza localmente la longitud de arco, no puede estar «rota». Con precisión, tenemos la

PROPOSICIÓN 2. *Sea $\alpha: I \rightarrow S$ una curva parametrizada y regular a trozos tal que, en cada arco regular, el parámetro es proporcional a la longitud de arco. Admitamos que la longitud de arco entre dos cualesquiera de sus puntos es menor o igual que la longitud de arco de cualquier curva parametrizada regular que una estos puntos. Entonces α es una geodésica; en particular, α es regular en todos sus puntos.*

Demostración. Sea $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq t_{k+1} = l$ una subdivisión de $[0, l] = I$ de forma que $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$, $i = 0, \dots, k$, es regular. Por la prop. 5 de la sec. 4.6, α es una geodésica en los puntos de (t_i, t_{i+1}) . Para probar que α es una geodésica en t_i , consideremos el entorno W de $\alpha(t_i)$ dado por la prop. 1. Sean $q_1 = \alpha(t_i - \varepsilon)$,

$q_2 = \alpha(t_i + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, dos puntos de W y sea γ la geodésica radial de $B_\delta(q_1)$ que une a q_1 con q_2 (Fig. 4-43). Por la prop. 4 de la sec. 4.6, generalizada al caso de curvas regulares a trozos, $l(\gamma) \leq l(\alpha)$ entre q_1 y q_2 . Esto, junto con las hipótesis de la proposición, implica que $l(\gamma) = l(\alpha)$. Luego, apelando otra vez a la prop. 4 de la sec. 4.6, las trazas de γ y α coinciden. Por tanto, α es una geodésica en t_i y la prueba queda concluida.

Q.E.D.

En el ejemplo 6 de la sec. 4.4 hemos utilizado el hecho siguiente: *una geodésica $\gamma(t)$ de una superficie de revolución no puede ser asintótica a un paralelo P_0 que no sea, él mismo, una geodésica*. Esbozaremos una demostración de este resultado a título de otra aplicación más de la prop. 1 (como ejercicio, pueden completarse los detalles).

Supongamos lo contrario y sea p un punto del paralelo P_0 . Sean W y δ el entorno y el número que proporciona la prop. 1 y sea $q \in P_0 \cap W$, $q \neq p$. Como $\gamma(t)$ es asintótica a P_0 , el punto p es el límite de puntos $\gamma(t_i)$, donde $\{t_i\} \rightarrow \infty$, y la tangente de γ en t_i converge a la tangente de P_0 en p . Por la observación 1, la geodésica $\tilde{\gamma}(t)$ que, con longitud menor que δ , une a p con q debe ser tangente a P_0 en p . En virtud a la relación de Clairaut (cf. el ejemplo 5, sec. 4.4), un pequeño arco de $\tilde{\gamma}(t)$ en torno a p estará contenido en la región de W donde se encuentra $\gamma(t)$. Se deduce entonces la existencia de un par de puntos de W , suficientemente próximos a p , conectados por dos geodésicas de longitud menor que δ (véase la fig. 4-44). Esto, al constituir una contradicción, prueba nuestra afirmación.

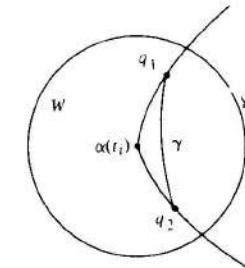


Figura 4-43

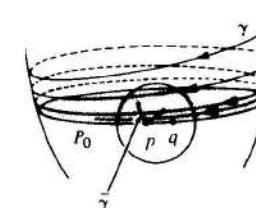


Figura 4-44

Una cuestión natural relacionada con la prop. 1 consiste en saber si la geodésica de longitud menor que δ , que une dos puntos $q_1, q_2 \in W$, está contenida en W . Si es éste el caso para cualquier par de puntos de W , decimos que W es *convexo*.

Decimos que una geodésica parametrizada que une dos puntos es *mínima* si su longitud es menor o igual que la de cualquier curva parametrizada, regular a trozos, que une estos puntos.

Cuando W es convexo tenemos, en virtud a la prop. 4 de la sec. 4.6 (véase también la observación 3), que la geodésica γ que une $q_1 \in W$ con $q_2 \in W$ es mínima. Luego, en este caso, podemos afirmar que dos puntos cualesquiera de W están unidos por una única geodésica mínima en W . Sin embargo, W generalmente no es convexo.

Ahora vamos a demostrar que se puede elegir W de forma que sea convexo. El punto crucial de la demostración es la proposición, interesante por derecho propio,

que sigue. Como ya es habitual, denotamos por $B_r(p)$ el interior de la región delimitada por un círculo geodésico $S_r(p)$ de radio r y centro p .

PROPOSICIÓN 3. Para cada $p \in S$ existe un número positivo ε con la propiedad siguiente: si una geodésica $\gamma(t)$ es tangente al círculo geodésico $S_r(p)$, $r < \varepsilon$, en $\gamma(0)$, entonces, para $t \neq 0$ y pequeño, $\gamma(t)$ se halla fuera de $B_r(p)$ (fig. 4-45).

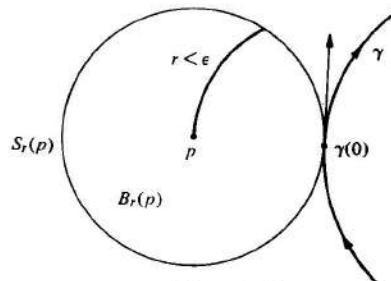


Figura 4-45

Demostración. Sea W el entorno de p que proporciona la prop. 1. Consideremos, para cada par (q, v) , $q \in W$, $v \in T_p(S)$, $|v| = 1$, la geodésica $\gamma(t, q, v)$ y pongamos, para cada par (q, v) fijo (Fig. 4-46),

$$\exp_p^{-1} \gamma(t, q, v) = u(t),$$

$$F(t, q, v) = |u(t)|^2 = F(t).$$

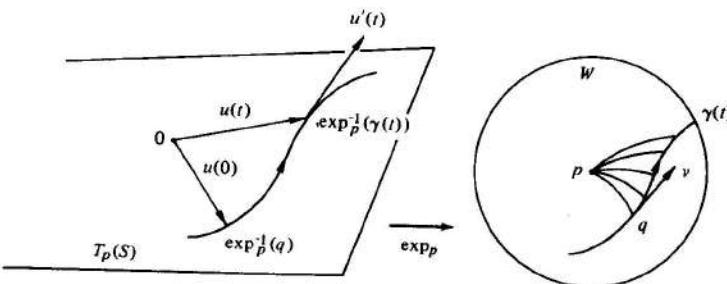


Figura 4-46

Así, para cada (q, v) fijo, $F(t)$ es el cuadrado de la distancia del punto $\gamma(t, q, p)$ a p . Claramente, $F(t, q, v)$ es diferenciable. Obsérvese que $F(t, p, v) = |vt|^2$.

Denotemos ahora mediante \mathcal{U}^1 el conjunto

$$\mathcal{U}^1 = \{(q, v), q \in W, v \in T_q(S), |v| = 1\},$$

y definamos la función $Q: \mathcal{U}^1 \rightarrow R$ por

$$Q(q, v) = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \Big|_{t=0}$$

Como F es diferenciable, Q es continua. Además, como

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 2\langle u(t), u'(t) \rangle,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 2\langle u(t), u''(t) \rangle + 2\langle u'(t), u'(t) \rangle,$$

y en (p, v)

$$u'(t) = v, \quad u''(t) = 0,$$

obtenemos

$$Q(p, v) = 2|v|^2 = 2 > 0 \quad \text{para todo } v \in T_p(S), |v| = 1.$$

Por continuidad, se deduce la existencia de un entorno $V \subset W$ tal que $Q(q, v) > 0$ para todo $q \in V$ y $v \in T_q(S)$ con $|v| = 1$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(p) \subset V$. Afirmamos entonces que ε satisface el enunciado de la proposición.

En efecto, sea $r < \varepsilon$ y sea $\gamma(t, q, v)$ una geodésica tangente a $S_r(p)$ en $\gamma(0) = q$. Introduciendo coordenadas polares geodésicas en torno a p , vemos que $\langle u(0), u'(0) \rangle = 0$ (véase la fig. 4-47). Luego, $\partial F / \partial t(0) = 0$. Como $F(0, q, v) = r^2$ y $(\partial^2 F / \partial t^2)(0) > 0$, tenemos que $F(t) > r^2$ para $t \neq 0$ y pequeño; por tanto, $\gamma(t)$ se halla fuera de $B_r(p)$.

Q.E.D.

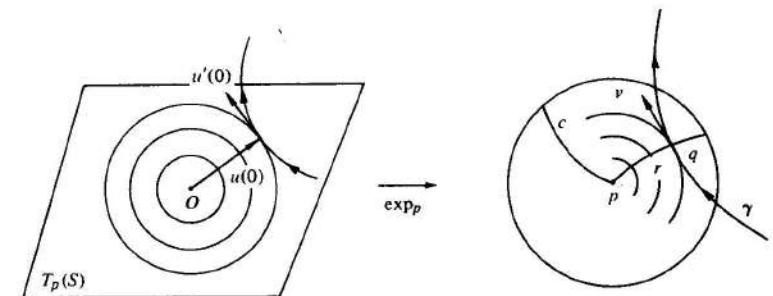


Figura 4-47

Ya podemos demostrar la

PROPOSICIÓN 4 (Existencia de entornos convexos). Para cada punto $p \in S$ existe un número $c > 0$ tal que $B_c(p)$ es convexo; es decir, dos puntos cualesquiera de $B_c(p)$ pueden unirse mediante una única geodésica mínima dentro de $B_c(p)$.

Demostración. Sea ε como en la prop. 3. Elijamos δ y W como en la prop. 1 de forma que $\delta < \varepsilon/2$. Tomemos $c < \delta$ tal que $B_c(p) \subset W$. Demostremos que $B_c(p)$ es convexo.

Sean $q_1, q_2 \in B_c(p)$ y sea $\gamma: I \rightarrow S$ la geodésica con longitud menor que $\delta < \epsilon/2$ que une q_1 con q_2 . Resulta claro que $\gamma(I)$ está contenido en $B_\epsilon(p)$ y queremos demostrar que $\gamma(I)$ está contenido en $B_c(p)$. Supongamos lo contrario. Existe entonces un punto $m \in B_\epsilon(p)$ donde se alcanza la distancia máxima r de $\gamma(I)$ a p (fig. 4-48). En un entorno de m , los puntos de $\gamma(I)$ estarán en $B_r(p)$. Sin embargo, esto contradice la prop. 3.

Q.E.D.

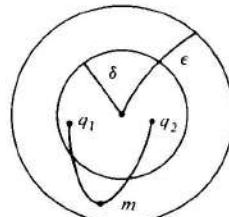


Figura 4-48

EJERCICIOS

- *1. Sean y y w campos vectoriales diferenciables en un conjunto abierto $U \subset S$. Sea $p \in S$ y $\alpha: I \rightarrow S$ una curva tal que $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = y$. Denotemos por $P_{\alpha,t}: T_{\alpha(0)}(S) \rightarrow T_{\alpha(t)}(S)$ el transporte paralelo, a lo largo de α , de $\alpha(0)$ a $\alpha(t)$, $t \in I$. Demuéstrese que

$$(D_y w)(p) := \frac{d}{dt} (P_{\alpha,t}^{-1}(w(\alpha(t)))) \Big|_{t=0},$$

siendo el segundo miembro el vector velocidad de la curva $P_{\alpha,t}^{-1}(w(\alpha(t)))$ en $T_p(S)$, para $t = 0$ (por lo tanto, el concepto de derivada covariante puede deducirse a partir de la noción de transporte paralelo).

2. a. Demostrar que la derivada covariante tiene las siguientes propiedades. Sean v, w e y campos vectoriales diferenciables en $U \subset S$, $f: U \rightarrow R$ una función diferenciable en S , $y(f)$ la derivada de f en la dirección del campo y (cf. el ejercicio 7, sec. 3.4) y sean λ, μ números reales. Entonces
1. $D_y(\lambda v + \mu w) = \lambda D_y(v) + \mu D_y(w)$; $D_{\lambda v + \mu w}(w) = \lambda D_y(w) + \mu D_v(w)$.
 2. $D_y(fv) = y(f)v + fD_y(v)$; $D_f(v) = fD_y(v)$.
 3. $y(\langle v, w \rangle) = \langle D_y v, w \rangle + \langle v, D_y w \rangle$.
 4. $D_{x_u} x_v = D_{x_v} x_u$, donde $x(u, v)$ es una parametrización de S .

- *b. Demuéstrese que la propiedad 3 es equivalente al hecho de que el transporte paralelo a lo largo de una curva parametrizada regular a trozos, $\alpha: I \rightarrow S$, que conecta dos puntos $p, q \in S$, es una isometría entre $T_p(S)$ y $T_q(S)$. Demostrar que la propiedad 4 es equivalente a la simetría de los símbolos de Christoffel en los índices inferiores.

- *c. Sea $\mathcal{B}(U)$ el espacio de los campos vectoriales (diferenciables) en $U \subset S$ y sea $D: \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ (donde denotamos $D(y, v) = D_y(v)$) una aplicación que satisface las propiedades 1-4. Verificar que $D_y(v)$ coincide con la derivada covariante considerada en el texto (en general, se llama una conexión en U a toda aplicación D que satisface las

propiedades 1 y 2; el punto crucial del ejercicio consiste en demostrar que, en una superficie dotada de un producto escalar, existe una única conexión que satisface además las propiedades adicionales 3 y 4).

- *3. Sea $\alpha: I = [0, l] \rightarrow S$ una curva parametrizada, regular y simple. Considerese una campo vectorial unitario $v(t)$ a lo largo de α , con $\langle \alpha'(t), v(t) \rangle = 0$, así como una aplicación $x: R \times I \rightarrow S$ definida por

$$x(s, t) = \exp_{\alpha(t)}(sv(t)), \quad s \in R, t \in I.$$

- a. Demostrar que x es diferenciable en un entorno de I en $R \times I$ y que dx es no singular en $(0, t)$, $t \in I$.
- b. Demostrar que existe $\epsilon > 0$ tal que x es inyectiva en el rectángulo $t \in I$, $|s| < \epsilon$.
- c. Demostrar que x es una parametrización de S en el conjunto abierto $t \in (0, l)$, $|s| < \epsilon$, cuyo entorno coordenado contiene a $\alpha((0, l))$. Las coordenadas obtenidas por este procedimiento se denominan *coordenadas geodésicas* (o coordenadas de Fermi) de base α . Demuéstrese que en tal sistema $F = 0$, $E = 1$. Además, si α es una geodésica parametrizada por la longitud de arco entonces $G(0, t) = 1$ y $G_s(0, t) = 0$.
- d. Establezcase el resultado siguiente, análogo al lema de Gauss (observación 1 tras la prop. 3, sec. 4.6). Sea $\alpha: I \rightarrow S$ una curva parametrizada regular y sea $\gamma(s)$, $s \in I$, una familia de geodésicas parametrizadas por la longitud de arco s definida por las condiciones: $\gamma(0) = \alpha(t)$ y $\{\gamma'(0), \alpha'(t)\}$ es una base ortogonal positiva. Entonces, para \tilde{s} fijo, suficientemente pequeño, la curva $t \rightarrow \gamma_t(\tilde{s})$, $t \in I$, intersecta ortogonalmente a todas las γ_t (tales curvas se denominan *paralelas geodésicas*).
4. La *energía* E de una curva $\alpha: [a, b] \rightarrow S$ se define por

$$E(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|^2 dt.$$

- *a. Demuéstrese que $(l(\alpha))^2 \leq (b - a)E(\alpha)$ y que se da la igualdad si y sólo si t es proporcional a la longitud de arco.
- b. Conclúyase de la parte a que si $\gamma: [a, b] \rightarrow S$ es una geodésica mínima con $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$, tenemos que $E(\gamma) \leq E(\alpha)$, dándose la igualdad si y sólo si α es una geodésica mínima.
5. Sea $\gamma: [0, l] \rightarrow S$ una geodésica *simple*, parametrizada por la longitud de arco, y denotemos por u y v las coordenadas de Fermi en un entorno de $\gamma([0, l])$, estando representado este conjunto por $u = 0$ (cf. el Ejercicio 3). Sea $u = \gamma(v, t)$ una familia de curvas que dependen del parámetro t , $-\epsilon < t < \epsilon$, siendo γ diferenciable y verificándose además

$$\gamma(0, t) = \gamma(0) = p, \quad \gamma(l, t) = \gamma(l) = q, \quad \gamma(v, 0) = \gamma(v) \equiv 0.$$

Tal familia se denomina una *variación* de γ que mantiene fijos los extremos p y q . Sea $E(t)$ la energía de la curva $\gamma(v, t)$ (cf. el ejercicio 4); es decir,

$$E(t) = \int_0^l \left(\frac{\partial \gamma}{\partial v}(v, t) \right)^2 dv.$$

- *a. Demuéstrese que

$$E'(0) = 0,$$

$$\frac{1}{2} E''(0) = \int_0^l \left\{ \left(\frac{d\eta}{dv} \right)^2 - K\eta^2 \right\} dv,$$

donde $\eta(v) = \partial\gamma/\partial t|_{t=0}$, $K = K(\gamma)$ es la curvatura gaussiana a lo largo de γ y la prima ' representa la derivada con respecto a t (las fórmulas precedentes se denominan, respectivamente, las *variaciones primera y segunda* de la energía de γ ; más adelante, en la sec. 5.4, daremos un tratamiento más completo de estas fórmulas, incluyendo el caso en el que γ no es simple).

- b. Dedúzcase de la parte a que si $K \leq 0$ entonces, cualquier geodésica simple $\gamma: [0, l] \rightarrow S$ es mínima con respecto a las curvas que, suficientemente próximas a γ , conecten $\gamma(0)$ y $\gamma(l)$.

6. Sea S el cono $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$, $k > 0$, $(x, y) \neq (0, 0)$ y sea $V \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto abierto definido en coordenadas polares por $0 < \varrho < \infty$, $0 < \theta < 2\pi n \operatorname{sen} \beta$, donde $\operatorname{cotag} \beta = k$ y n es el mayor entero tal que $2\pi n \operatorname{sen} \beta < 2\pi$ (cf. el ejemplo 3, sec. 4.2). Sea $\varphi: V \rightarrow S$ la aplicación

$$\varphi(\varrho, \theta) = \left(\varrho \operatorname{sen} \beta \cos\left(\frac{\theta}{\operatorname{sen} \beta}\right), \varrho \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{\operatorname{sen} \beta}\right), \varrho \cos \beta \right).$$

- a. Demostrar que φ es una isometría local.

- *b. Sea $q \in S$. Admitamos que $\beta < \pi/6$ y sea k el mayor entero tal que $2\pi k$ sean $\beta < \pi$. Demostrar que existen al menos k geodésicas que, partiendo de q , regresan de nuevo a q . Demostrar que en q estas geodésicas no se cortan tangencialmente y, por lo tanto, ninguna de ellas es una geodésica cerrada (fig. 4-49).

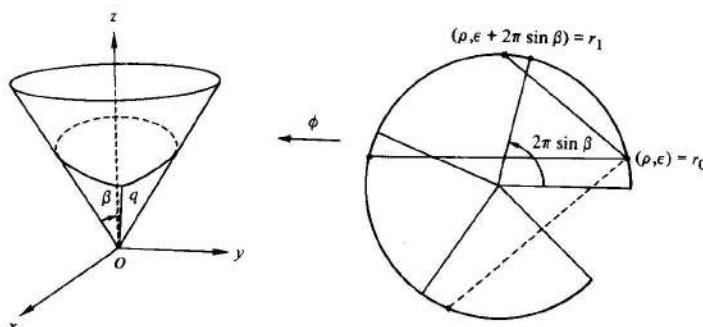


Figura 4-49

- *c. Demuéstrese que existen exactamente k geodésicas de este tipo, bajo las condiciones de la parte b.

7. Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada regular. Para cada $t \in I$, sea $P(t) \subset \mathbb{R}^3$ un plano que pasa por $\alpha(t)$ y contiene a $\alpha'(t)$. Cuando el vector unitario normal $N(t)$ a $P(t)$ es una función diferenciable de t y $N'(t) \neq 0$, $t \in I$, decimos que la aplicación $t \mapsto \{\alpha(t), N(t)\}$ es una *familia diferenciable de planos tangentes*. Dada una familia de este tipo, determinaremos la superficie parametrizada (cf. la sec. 2.3):

$$\mathbf{x}(t, v) = \alpha(t) + v \frac{N(t) \wedge N'(t)}{|N'(t)|}.$$

La superficie parametrizada \mathbf{x} se denomina la *envolvente* de la familia $\{\alpha(t), N(t)\}$ (cf. el ejemplo 4, sec. 3.5).

- a. Sea S una superficie orientada y $\gamma: I \rightarrow S$ una geodésica parametrizada por la longitud de arco con $k(s) \neq 0$ y $\tau(s) \neq 0$, $s \in I$. Sea $N(s)$ el vector unitario normal a S , a lo largo de γ . Demostrar que la envolvente de la familia de planos tangentes $\{\gamma(s), N(s)\}$ es regular en un entorno de γ , tiene curvatura Gaussiana $K = 0$ y es tangente a S a lo largo de γ (de esta forma, hemos obtenido una superficie localmente isométrica al plano que contiene a γ como geodésica).
- b. Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud de arco con $k(s) \neq 0$ y $\tau(s) \neq 0$, $s \in I$, y sea $\{\alpha(s), n(s)\}$ la familia de sus planos rectificantes. Demostrar que la envolvente de esta familia es regular en un entorno de α , tiene curvatura gaussiana $K = 0$ y contiene a α como geodésica (en consecuencia, cada curva es una geodésica en la envolvente de sus planos rectificantes; como esta envolvente es localmente isométrica al plano, esto justifica el término *plano rectificante*).

Apéndice

DEMOSTRACIONES DE LOS TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LA TEORÍA LOCAL DE CURVAS Y SUPERFICIES

En este apéndice demostraremos cómo pueden obtenerse los teoremas fundamentales de existencia y unicidad para curvas y superficies (secs. 1.5 y 4.2), a partir de teoremas de la teoría de ecuaciones diferenciales.

Demostración del teorema fundamental de la teoría local de curvas (cf. el enunciado en la sec. 1.5). El punto de partida consiste en observar que las ecuaciones de Frenet

$$\begin{aligned}\frac{dt}{ds} &= kn, \\ \frac{dn}{ds} &= -kt - \tau b, \\ \frac{db}{ds} &= \tau n\end{aligned}\tag{1}$$

pueden considerarse como un sistema diferencial en $I \times \mathbb{R}^9$,

$$\left. \begin{aligned}\frac{d\xi_1}{ds} &= f_1(s, \xi_1, \dots, \xi_9) \\ \vdots & \\ \frac{d\xi_9}{ds} &= f_9(s, \xi_1, \dots, \xi_9)\end{aligned}\right\}, \quad s \in I,\tag{1a}$$

donde $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = t$, $(\xi_4, \xi_5, \xi_6) = n$, $(\xi_7, \xi_8, \xi_9) = b$ y las f_i , $i = 1, \dots, 9$, son funciones lineales (con coeficientes que dependen de s) de las coordenadas ξ_i .

En general, un sistema diferencial del tipo (1a) no puede asociarse a un campo vectorial «estacionario» (como en la sec. 3.4). En cualquier caso, se cumple un teorema de existencia y unicidad que puede enunciarse en los siguientes términos:

Dadas las condiciones iniciales $s_0 \in I$, $(\xi_1)_0, \dots, (\xi_9)_0$, existe un intervalo abierto $J \subset I$, que contiene a s_0 , y una única aplicación diferenciable $\alpha: J \rightarrow \mathbb{R}^9$, con

$$\alpha(s_0) = ((\xi_1)_0, \dots, (\xi_9)_0) \quad y \quad \alpha'(s) = (f_1, \dots, f_9),$$

donde cada f_i , $i = 1, \dots, 9$, está evaluada en $(s, \alpha(s)) \in J \times \mathbb{R}^9$. Además, si el sistema es lineal, $J = I$ (cf. S. Lang, Analysis I, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968, pp. 383-386).

Se deduce entonces que, dado un triedro ortonormal y orientado positivamente $\{t_0, n_0, b_0\}$ en \mathbb{R}^3 , y un valor $s_0 \in I$, existe una familia de triedros $\{t(s), n(s), b(s)\}$, $s \in I$, con $t(s_0) = t_0$, $n(s_0) = n_0$, $b(s_0) = b_0$.

Primero demostraremos que la familia $\{t(s), n(s), b(s)\}$, obtenida por este procedimiento, es ortonormal para cada $s \in I$. En efecto, utilizando el sistema (1) para expresar las derivadas con respecto a s de las seis cantidades

$$\langle t, n \rangle, \quad \langle t, b \rangle, \quad \langle n, b \rangle, \quad \langle t, t \rangle, \quad \langle n, n \rangle, \quad \langle b, b \rangle$$

como funciones de estas mismas cantidades, obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d}{ds} \langle t, n \rangle = k \langle n, n \rangle - k \langle t, t \rangle - \tau \langle t, b \rangle,$$

$$\frac{d}{ds} \langle t, b \rangle = k \langle n, b \rangle + \tau \langle t, n \rangle,$$

$$\frac{d}{ds} \langle n, b \rangle = -k \langle t, b \rangle - \tau \langle b, b \rangle + \tau \langle n, n \rangle,$$

$$\frac{d}{ds} \langle t, t \rangle = 2k \langle t, n \rangle,$$

$$\frac{d}{ds} \langle n, n \rangle = -2k \langle n, t \rangle - 2\tau \langle n, b \rangle,$$

$$\frac{d}{ds} \langle b, b \rangle = 2\tau \langle b, n \rangle.$$

Se comprueba fácilmente que

$$\langle t, n \rangle \equiv 0, \quad \langle t, b \rangle \equiv 0, \quad \langle n, b \rangle \equiv 0,$$

$$t^2 \equiv 1, n^2 \equiv 1, b^2 \equiv 1,$$

es una solución del sistema precedente, bajo las condiciones iniciales $0, 0, 0, 1, 1, 1$. En virtud a la unicidad, la familia $\{t(s), n(s), b(s)\}$ es ortonormal para cada $s \in I$, como habíamos afirmado.

A partir de la familia $\{t(s), n(s), b(s)\}$ es posible obtener una curva definiendo

$$\alpha(s) = \int t(s) ds, \quad s \in I,$$

donde entendemos por la integral de un vector la función vectorial que se obtiene integrando cada una de las componentes. Es claro que $\alpha'(s) = t(s)$ y que $\alpha''(s) = kn$. Por lo tanto, $k(s)$ es la curvatura de α en s . Además, como

$$\alpha'''(s) = k'n + kn' = k'n - k^2t - k\tau b,$$

la torsión de α vendrá dada por (cf. el ejercicio 12, sec. 1.5)

$$-\frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle}{k^2} = -\frac{\langle t \wedge kn, (-k^2t + k'n - k\tau b) \rangle}{k^2} = \tau;$$

en consecuencia, α es la curva que se buscaba.

Todavía tenemos que demostrar que α es única salvo traslaciones y rotaciones en R^3 . Sea $\tilde{\alpha}: I \rightarrow R^3$ otra curva con $\tilde{k}(s) = k(s)$ y $\tilde{\tau}(s) = \tau(s)$, $s \in I$, y, sea $\{\tilde{t}_0, \tilde{n}_0, \tilde{b}_0\}$ el triedro de Frenet de $\tilde{\alpha}$ en s_0 . Resulta claro que es posible hacer coincidir, tras efectuar una traslación A y una rotación φ , el triedro $\{\tilde{t}_0, \tilde{n}_0, \tilde{b}_0\}$ con el triedro $\{t_0, n_0, b_0\}$ (ambos triedros son positivos). Basta aplicar la parte de unicidad del teorema precedente sobre ecuaciones diferenciales para obtener el resultado buscado.

Q.E.D.

Demostración del teorema fundamental de la teoría local de superficies (cf. el enunciado en la sec. 4.3). La idea de la demostración coincide con la que acabamos de exponer; es decir, buscamos una familia de triedros $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\}$, que dependen de u y de v , que satisfagan el sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + eN, \\ \mathbf{x}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + fN = \mathbf{x}_{vu}, \\ \mathbf{x}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + gN, \\ N_u &= a_{11} \mathbf{x}_u + a_{21} \mathbf{x}_v, \\ N_v &= a_{12} \mathbf{x}_u + a_{22} \mathbf{x}_v, \end{aligned} \tag{2}$$

donde los coeficientes Γ_{ij}^k , a_{ij} , $i, j = 1, 2$, se obtienen a partir de E, F, G, e, f, g como si trabajaramos con una superficie.

Las ecuaciones precedentes definen un sistema de ecuaciones en derivadas parciales en $V \times R^9$,

$$\begin{aligned} (\xi_1)_u &= f_1(u, v, \xi_1, \dots, \xi_9), \\ &\vdots \\ &\vdots \\ (\xi_9)_v &= f_{15}(u, v, \xi_1, \dots, \xi_9), \end{aligned} \tag{2a}$$

donde $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \mathbf{x}_u$, $\eta = (\xi_4, \xi_5, \xi_6) = \mathbf{x}_v$, $\zeta = (\xi_7, \xi_8, \xi_9) = N$, y las f_i , $i = 1, \dots, 15$, son funciones lineales de las coordenadas ξ_j , $j = 1, \dots, 9$, cuyos coeficientes dependen de u y de v .

En contraste con lo que sucede en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias, un sistema como el (2a) no es, en general, integrable. Para el caso en cuestión, las condiciones que garantizan la existencia y unicidad de una solución local, sometida a las condiciones iniciales dadas, son

$$\xi_{uv} = \xi_{vu}, \quad \eta_{uv} = \eta_{vu}, \quad \zeta_{uv} = \zeta_{vu}.$$

Una demostración de esta afirmación se encuentra en J. Stoker, *Differential Geometry*, Wiley-Interscience, Nueva York, 1969, apéndice B.

Como se vio en la sec. 4.3, las condiciones de integrabilidad son equivalentes a las ecuaciones de Gauss y Mainardi-Codazzi, las cuales se satisfacen por hipótesis. Por tanto, el sistema (2a) es integrable.

Sea $\{\xi, \eta, \zeta\}$ una solución de (2a) definida en un entorno de $(u_0, v_0) \in V$, con las condiciones iniciales $\xi(u_0, v_0) = \xi_0$, $\eta(u_0, v_0) = \eta_0$, $\zeta(u_0, v_0) = \zeta_0$. Resulta claro que es posible elegir las condiciones iniciales de forma que

$$\begin{aligned} \xi_0^2 &= E(u_0, v_0), \\ \eta_0^2 &= G(u_0, v_0), \\ \langle \xi_0, \eta_0 \rangle &= F(u_0, v_0), \\ \zeta_0^2 &= 1, \\ \langle \xi_0, \zeta_0 \rangle &= \langle \eta_0, \zeta_0 \rangle = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Con la solución dada formamos un nuevo sistema,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= \xi, \\ \mathbf{x}_v &= \eta, \end{aligned} \tag{4}$$

que, como $\xi_v = \eta_u$, es claramente integrable. Sea $\mathbf{x}: \bar{V} \rightarrow R^3$ una solución de (4) definida en un entorno \bar{V} de (u_0, v_0) , con $\mathbf{x}(u_0, v_0) = p_0 \in R^3$. Vamos a demostrar que reduciendo \bar{V} e intercambiando u y v si fuese necesario, $\mathbf{x}(\bar{V})$ es superficie buscada.

Primero demostraremos que la familia $\{\xi, \eta, \zeta\}$, que es una solución de (2a), tiene la propiedad siguiente. Para cada (u, v) donde la solución esté definida, tenemos que

$$\begin{aligned} \xi^2 &= E, \\ \eta^2 &= G, \\ \langle \xi, \eta \rangle &= F \\ \zeta^2 &= 1, \\ \langle \xi, \zeta \rangle &= \langle \eta, \zeta \rangle = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

En efecto, utilizando (2) para expresar las derivadas parciales de

$$\xi^2, \quad \eta^2, \quad \zeta^2, \quad \langle \xi, \eta \rangle, \quad \langle \xi, \zeta \rangle, \quad \langle \eta, \zeta \rangle$$

como funciones de estas 6 cantidades, obtenemos un sistema de 12 ecuaciones diferenciales en derivadas parciales:

$$\begin{aligned} (\xi^2)_u &= B_1(\xi^2, \eta^2, \dots, \langle \eta, \zeta \rangle), \\ (\xi^2)_v &= B_2(\xi^2, \eta^2, \dots, \langle \eta, \zeta \rangle), \\ \langle \eta, \zeta \rangle_v &= B_{12}(\xi^2, \eta^2, \dots, \langle \eta, \zeta \rangle). \end{aligned} \quad (6)$$

Como (6) se ha deducido de (2a) es claro (y puede verificarse directamente) que (6) es integrable y que

$$\begin{aligned} \xi^2 &= E, \\ \eta^2 &= G, \\ \langle \eta, \xi \rangle &= F, \\ \zeta^2 &= 1, \\ \langle \xi, \zeta \rangle &= \langle \eta, \zeta \rangle = 0 \end{aligned}$$

es una solución de (6), sometida a las condiciones iniciales (3). Nuestra afirmación se deduce invocando la propiedad de unicidad.

Se tiene entonces que

$$|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|^2 = \mathbf{x}_u^2 \mathbf{x}_v^2 - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle^2 = EG - F^2 > 0.$$

Por lo tanto, si $\mathbf{x}: \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^3$ está definida por

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in \bar{V},$$

una de las componentes de $\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v$, por ejemplo $\partial(x, y)/\partial(u, v)$, es diferente de cero en (u_0, v_0) . Por tanto, podemos invertir el sistema formado por las dos primeras funciones componentes de \mathbf{x} , en un entorno $U \subset \bar{V}$ de (u_0, v_0) , para obtener una aplicación $F(x, y) = (u, v)$. Restringiendo \mathbf{x} a U , la aplicación $\mathbf{x}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva y su inversa $\mathbf{x}^{-1} = F \circ \pi$ (donde π es la proyección de \mathbb{R}^3 sobre el plano xy) es continua. En consecuencia, $\mathbf{x}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un homeomorfismo diferenciable con $\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \neq 0$; luego, $\mathbf{x}(U)$ es una superficie regular.

A partir de (5) se deduce inmediatamente que E, F, G son los coeficientes de la primera forma fundamental de $\mathbf{x}(U)$ y que ζ es un vector unitario normal a la superficie. Intercambiando, si fuese preciso, u y v , obtenemos

$$\zeta = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|} = N.$$

Los coeficientes de la segunda forma fundamental se calculan a partir de esta identidad mediante (2), dando lugar a

$$\langle \zeta, \mathbf{x}_{uu} \rangle = e, \quad \langle \zeta, \mathbf{x}_{uv} \rangle = f, \quad \langle \zeta, \mathbf{x}_{vv} \rangle = g,$$

lo que prueba que esos coeficientes son e, f, g , concluyendo así la primera parte de la demostración.

Queda por demostrar que si U es conexo, \mathbf{x} es única salvo traslaciones y rotaciones en \mathbb{R}^3 . Para ello, sea $\tilde{\mathbf{x}}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ otra superficie regular con $\tilde{E} = E, \tilde{F} = F, \tilde{G} = G, \tilde{e} = e, \tilde{f} = f$ y $\tilde{g} = g$. Como las formas fundamentales primera y segunda son iguales es posible mover el triángulo

$$\{\tilde{\mathbf{x}}_u(u_0, v_0), \tilde{\mathbf{x}}_v(u_0, v_0), \tilde{N}(u_0, v_0)\}$$

hasta hacerlo coincidir con el triángulo

$$\{\mathbf{x}_u(u_0, v_0), \mathbf{x}_v(u_0, v_0), N(u_0, v_0)\}$$

por medio de una traslación A y una rotación φ .

Se satisface el sistema (1a) para las dos soluciones:

$$\begin{aligned} \xi &= \mathbf{x}_u, & \eta &= \mathbf{x}_v, & \zeta &= N; \\ \xi &= \tilde{\mathbf{x}}_u, & \eta &= \tilde{\mathbf{x}}_v, & \zeta &= \tilde{N}. \end{aligned}$$

Puesto que ambas soluciones coinciden en (u_0, v_0) , tenemos por unicidad que

$$\mathbf{x}_u = \tilde{\mathbf{x}}_u, \quad \mathbf{x}_v = \tilde{\mathbf{x}}_v, \quad N = \tilde{N}, \quad (7)$$

en un entorno de (u_0, v_0) . Por otra parte, el subconjunto de U donde se satisface (7) es, por continuidad, cerrado. Como U es conexo, (7) se verifica para cada $(u, v) \in U$.

De las dos primeras ecuaciones de (7) y del hecho de que U es conexo concluimos entonces que

$$\mathbf{x}(u, v) = \tilde{\mathbf{x}}(u, v) + C,$$

donde C es un vector constante. Como $\mathbf{x}(u_0, v_0) = \tilde{\mathbf{x}}(u_0, v_0)$, tenemos que $C = 0$, lo que completamos la demostración del teorema. Q.E.D

Capítulo 5

GEOMETRIA DIFERENCIAL

GLOBAL

5.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es proporcionar una introducción a la geometría diferencial global. Ya nos hemos tropezado con teoremas globales (algunos ejemplos son la caracterización de superficies compactas orientables en la sec. 2.7 y el teorema de Gauss-Bonnet en la sec. 4.5). Sin embargo, nos encontramos, más o menos de paso, con los resultados mencionados, al ser nuestro cometido principal establecer los fundamentos de la teoría local de superficies regulares en R^3 . Ahora, una vez recorrido ese trecho del camino, ya podemos emprender un estudio más sistemático de las propiedades globales.

La geometría diferencial global se ocupa de las relaciones entre las propiedades locales y las globales (topológicas, por lo general) de curvas y superficies. Hemos tratado de minimizar los requisitos de topología al limitarnos al estudio de subconjuntos de espacios euclídeos. Sólo se han utilizado las propiedades más elementales de los subconjuntos conexos y compactos de espacios euclídeos. En beneficio de la exposición, hemos presentado esta materia con las demostraciones correspondientes, en un apéndice al final del cap. 5.

Al utilizar este capítulo, el lector dispone de un número de elecciones: con esto en mente, presentaremos ahora una descripción del capítulo, sección por sección. Se da, al final de esta introducción, una tabla con la dependencia de las diferentes secciones.

En la sec. 5.2 demostraremos que la esfera es rígida; es decir, si una superficie regular, conexa y compacta $S \subset R^3$ es isométrica a una esfera, entonces S es una esfera. Salvo como motivación para la sec. 5.3, esta sección no se utiliza en el resto del libro.

En la sec. 5.3 introduciremos la noción de superficie completa, un marco natural para teoremas globales. Demostraremos el básico teorema de Hopf-Rinow, que asegura la existencia de una geodésica mínima uniendo dos puntos cualesquiera de una superficie completa.

En la sec. 5.4 deduciremos las fórmulas para las variaciones primera y segunda de la longitud de arco. Como aplicación, demostraremos el teorema de Bonnet: una

superficie completa con curvatura gaussiana positiva y acotada inferiormente lejos de cero es compacta.

En la sec. 5.5 introduciremos la importante noción de campo de Jacobi a lo largo de una geodésica γ , que mide cuán rápidamente se alejan de γ las geodésicas próximas a γ . Demostraremos que si la curvatura gaussiana de una superficie completa S es no positiva, entonces $\exp_p: T_p(S) \rightarrow S$ es un difeomorfismo local.

Esto plantea la cuestión de encontrar condiciones para que un difeomorfismo local sea un difeomorfismo global, lo que motiva la introducción de los espacios recubridores en la sec. 5.6. La parte A de la sec. 5.6 es totalmente independiente de las secciones previas. En la parte B demostraremos dos teoremas debidos a Hadamard: (1) si S es una superficie completa y simplemente conexa cuya curvatura gaussiana es no positiva, entonces S es difeomorfa a un plano; (2) si S es compacta y tiene curvatura gaussiana positiva, entonces la aplicación de Gauss $N: S \rightarrow S^2$ es un difeomorfismo; en particular, S es difeomorfa a una esfera.

En la sec. 5.7 presentaremos algunos teoremas globales para curvas. Esta sección únicamente depende de la parte A de la sec. 5.6.

En la sec. 5.8 demostraremos que una superficie completa en R^3 , cuya curvatura gaussiana es nula, o bien es un plano o bien un cilindro.

En la sec. 5.9 demostraremos el denominado teorema de Jacobi: un arco de geodésica es mínimo con respecto a curvas próximas con los mismos extremos si y solamente si dicho arco no contiene puntos conjugados.

En la sec. 5.10 introduciremos la noción de superficie abstracta y extenderemos a dichas superficies la geometría intrínseca del cap. 4. Esta sección es, exceptuando los ejercicios, totalmente independiente de las anteriores. Al final de esta sección mencionaremos otras posibles generalizaciones, como las variedades diferenciales y las variedades riemannianas.

En la sec. 5.11 demostraremos el teorema de Hilbert, que implica la no existencia de superficies completas en R^3 con curvatura gaussiana negativa y constante.

En el diagrama adjunto presentamos una tabla con la dependencia entre las

Para la sec.

	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6.A5-6.B	5-7	5-8	5-9	5-10	5-11
Se necesita la sec.										
5-3
5-4
5-5
5-6.A
5-6.B
5-7
5-8
5-9
5-10
5-11

secciones de este capítulo. Por ejemplo, para la sec. 5.11 son necesarias las secs. 5.3, 5.4, 5.5, 5.6 y 5.10; para la sec. 5.7, se necesita la parte A de la sec. 5.6; para la sec. 5.8 se necesitan las secs. 5.3, 5.4, 5.5 y la parte A de la sec. 5.6.

5.2. Rigidez de la esfera

Tal vez resulte conveniente empezar con un ejemplo típico, aunque simple, de teorema global. Hemos elegido la rigidez de la esfera.

Vamos a demostrar que la esfera es *rígida* en el sentido siguiente. Sea $\varphi: \Sigma \rightarrow S$ una isometría de una esfera $\Sigma \subset R^3$ sobre una superficie regular $S = \varphi(\Sigma) \subset R^3$. Entonces, S es una esfera. Esto significa intuitivamente que no es posible deformar una esfera hecha de un material flexible pero inelástico.

Realmente, demostraremos el teorema siguiente

TEOREMA 1. *Sea S una superficie regular, conexa y compacta, cuya curvatura gaussiana K es constante. Entonces S es una esfera.*

La rigidez de la esfera se deduce inmediatamente del teorema 1. En efecto, sea $\varphi: \Sigma \rightarrow S$ una isometría de una esfera Σ sobre S . Entonces $\varphi(\Sigma) = S$ tiene curvatura constante, en virtud a que la curvatura es invariante frente a isometrías. Además, $\varphi(\Sigma) = S$, al ser la imagen continua de un conjunto conexo y compacto Σ , es conexa y compacta (apéndice al cap. 5, props. 6 y 12). Se deduce entonces del teorema 1 que S es una esfera.

La primera demostración del teorema 1 se debe a H. Liebman (1899). La demostración que presentamos aquí es una modificación, efectuada por S. S. Chern, de la demostración que dio D. Hilbert (S. S. Chern, «Some New Characterizations of the Euclidean Sphere», *Duke Math. J.* 12 (1945), 270-290; y D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 3.^a ed., Leipzig, 1909, apéndice 15).

Observación 1. Debe resaltarse que hay superficies homeomorfas a una esfera que no son rígidas. Se da un ejemplo en la fig. 5-1. Reemplazamos la región plana P de la superficie S en la fig. 5-1 por un «chichón» hacia el interior de forma que la superficie

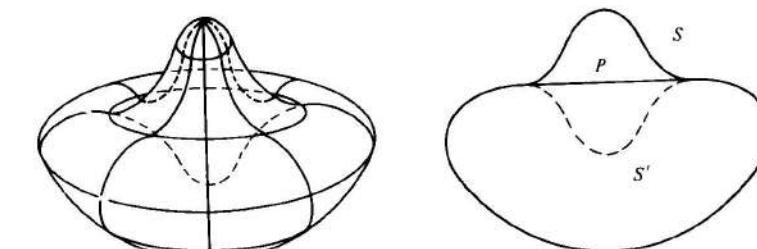


Figura 5-1

resultante S' todavía sea regular. La superficie S'' construida con el «chichón simétrico» es isométrica a S' , pero no existe una aplicación lineal ortogonal que transforme S' en S'' . En consecuencia, S' no es rígida.

Recordamos el convenio siguiente. Elegimos las curvaturas principales k_1 y k_2 de forma que $k_1(q) \geq k_2(q)$ para cada $q \in S$. De esta manera, k_1 y k_2 son funciones continuas en S que también son diferenciables salvo, quizás, en los puntos umbílicos ($k_1 = k_2$) de S .

La demostración del teorema 1 se basa en el lema local siguiente, para el que utilizaremos las ecuaciones de Mainardi-Codazzi (sec. 4-3).

LEMA 1. *Sea S una superficie regular y $p \in S$ un punto de S que satisface las siguientes condiciones:*

1. $K(p) > 0$; es decir, la curvatura gaussiana en p es positiva.
2. p es simultáneamente un punto de máximo local para la función k_1 y un punto de mínimo local para la función k_2 ($k_1 \geq k_2$).

Entonces p es un punto umbílico de S .

Demostración. Admitamos que p no es un punto umbílico y lleguemos a una contradicción.

Si p no es un punto umbílico de S , es posible parametrizar un entorno de p por coordenadas (u, v) de forma que las líneas coordenadas sean líneas de curvatura (sec. 3.4). En estas condiciones, $F = f = 0$ y las curvaturas principales vienen dadas por e/E y g/G . Como el punto p no es umbílico podemos admitir que intercambiando u y v , si fuera preciso, en un entorno de p

$$k_1 = \frac{e}{E}, \quad k_2 = \frac{g}{G}. \quad (1)$$

En el sistema coordenado así obtenido, las ecuaciones de Mainardi-Codazzi se escriben como (sec. 4.3, ecs. (7) y (7a))

$$e_v = \frac{E_v}{2}(k_1 + k_2), \quad (2)$$

$$g_u = \frac{G_u}{2}(k_1 + k_2). \quad (3)$$

Derivando con respecto a v la primera ecuación de (1) y utilizando la ec. (2), obtenemos

$$E(k_1)_v = \frac{E_v}{2}(-k_1 + k_2). \quad (4)$$

Análogamente, derivando con respecto a u la segunda ecuación de (1) y utilizando la ecuación (3),

$$G(k_2)_u = \frac{G_u}{2}(k_1 - k_2). \quad (5)$$

Por otra parte, cuando $F = 0$, la fórmula de Gauss para K se reduce a (sec. 4.3, ejercicio 1)

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\};$$

luego,

$$-2KEG = E_{vv} + G_{uu} + ME_v + NG_u, \quad (6)$$

donde $M = M(u, v)$ y $N = N(u, v)$ son funciones de (u, v) , cuyas expresiones son irrelevantes para la demostración. La misma observación se aplica a las expresiones \bar{M} , \bar{N} , \tilde{M} y \tilde{N} , que se introducirán más adelante.

De las ecs. (4) y (5) obtenemos expresiones para E_v y G_u que, tras ser derivadas e introducidas en la ec. (6), dan lugar a

$$-2KEG = -\frac{2E}{k_1 - k_2}(k_1)_{vv} + \frac{2G}{k_1 - k_2}(k_2)_{uu} + \tilde{M}(k_1)_v + \tilde{N}(k_2)_u;$$

luego,

$$-2(k_1 - k_2)KEG = -2E(k_1)_{vv} + 2G(k_2)_{uu} + \tilde{M}(k_1)_v + \tilde{N}(k_2)_u. \quad (7)$$

Como $K > 0$ y $k_1 > k_2$ en p , el primer miembro de la ec. (7) es estrictamente negativo en p . Como k_1 alcanza un máximo local en p y k_2 alcanza un mínimo local en p , tenemos

$$(k_1)_v = 0, \quad (k_2)_u = 0, \quad (k_1)_{vv} \leq 0, \quad (k_2)_{uu} \geq 0$$

en p . Sin embargo, esto implica que el segundo miembro de la ec. (7) es positivo o cero, lo que constituye una contradicción. Con esto concluye la demostración del lema 1.

Q.E.D.

Debe observarse que no surge contradicción alguna en la demostración si suponemos que k_1 tiene un *mínimo* local y k_2 un *máximo* local en p . En realidad, tal situación puede ocurrir, sin ser p un punto umbílico, en una superficie de curvatura positiva; como se pone de manifiesto en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1. Sea S la superficie de revolución dada por (cf. la sec. 3.3, ejemplo 4)

$$x = \varphi(v) \cos u, \quad y = \varphi(v) \sin u, \quad z = \psi(v), \quad 0 < u < 2\pi,$$

donde

$$\varphi(v) = C \cos v, \quad C > 1,$$

$$\psi(v) = \int \sqrt{1 - C^2 \operatorname{sen}^2 v} dv, \quad \psi(0) = 0.$$

Tomamos $|v| < \operatorname{sen}^{-1}(1/C)$, de forma que $\psi(v)$ está definida.

Utilizando expresiones ya conocidas (sec. 3.3, ejemplo 4) obtenemos

$$E = C^2 \cos^2 v,$$

$$F = 0,$$

$$G = 1,$$

$$e = -C \cos v (\sqrt{1 - C^2 \operatorname{sen}^2 v}),$$

$$f = 0,$$

$$g = -\frac{C \cos v}{\sqrt{1 - C^2 \operatorname{sen}^2 v}};$$

luego

$$k_1 = \frac{e}{E} = -\frac{\sqrt{1 - C^2 \operatorname{sen}^2 v}}{C \cos v} \quad k_2 = \frac{g}{G} = -\frac{C \cos v}{\sqrt{1 - C^2 \operatorname{sen}^2 v}}.$$

Por lo tanto, S tiene curvatura $K = k_1 k_2 = 1 > 0$, es decir, positiva y constante (cf. el ejercicio 7, sec. 3.3).

Se comprueba fácilmente que $k_1 > k_2$ en todos los puntos de S , pues $C > 1$. Por tanto, S carece de puntos umbílicos. Además, como $k_1 = -(1/C)$ para $v = 0$ y

$$k_1 = -\frac{\sqrt{1 - C^2 \operatorname{sen}^2 v}}{C \cos v} > -\frac{1}{C} \quad \text{para } v \neq 0,$$

concluimos que k_1 alcanza un mínimo (por tanto, al ser $K = 1$, k_2 alcanza un máximo) en los puntos del paralelo $v = 0$.

Incidentalmente, este ejemplo prueba que es esencial la hipótesis de compactidad en el teorema 1, ya que la superficie S (véase la fig. 5-2) exhibe curvatura positiva constante y no es una esfera.

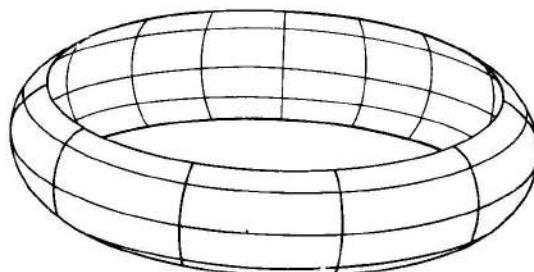


Figura 5-2

El resultado siguiente, que enunciamos en forma de lema, se utilizará en la demostración del teorema 1.

LEMA 2. Una superficie regular compacta $S \subset \mathbb{R}^3$ tiene al menos un punto elíptico.

Demostración. Como S es compacta, S es acotada. Por tanto, existen esferas en \mathbb{R}^3 , con centro en un punto fijo $O \in \mathbb{R}^3$, tal que S está contenida en el interior de la

región delimitada por cualquiera de aquéllas. Consideremos el conjunto de tales esferas. Sea r el ínfimo de los radios de las esferas en ese conjunto y sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la esfera de radio r con centro en O . Resulta claro que Σ y S tienen al menos un punto en común, por ejemplo p . El plano tangente a Σ en p únicamente comparte con S , en un entorno de p , el punto p . Luego, Σ y S son tangentes en p . Al observar las secciones normales en p , es fácil concluir que cualquier curvatura normal de S en p es mayor o igual que la correspondiente curvatura de Σ en p . Por tanto, $K_S(p) \geq K_\Sigma(p) > 0$, de donde se tiene que p es un punto elíptico.

Q.E.D.

Demostración del teorema 1. Como S es compacta, por el lema 2, existe un punto elíptico. Como K es constante, $K > 0$ en S .

En virtud a la compactidad, la función continua k_1 alcanza su máximo en un punto $p \in S$ (apéndice al cap. 5, prop. 13). Puesto que $K = k_1 k_2$ es una constante positiva, k_2 es una función decreciente de k_1 y, en consecuencia, alcanza su mínimo en p . Se deduce entonces del lema 1 que p es un punto umbílico; es decir, $k_1(p) = k_2(p)$.

Sea ahora q cualquier punto fijado en S . Como hemos supuesto que $k_1(q) \geq k_2(q)$, tenemos entonces que

$$k_1(p) \geq k_1(q) \geq k_2(q) \geq k_2(p) = k_1(p).$$

Por tanto, $k_1(q) = k_2(q)$ para cada $q \in S$.

Se deduce así que todos los puntos de S son umbílicos y, por la prop. 5 de la sec. 3.2, S está contenida en una esfera o en un plano. Como $K > 0$, S está contenida en una esfera Σ . Por compactidad, S es cerrada en Σ y, al ser S una superficie regular, S es abierta en Σ . Como Σ es conexa y S es cerrada y abierta en Σ , entonces $S = \Sigma$ (apéndice al cap. 5, prop. 5).

En consecuencia, la superficie S es una esfera.

Q.E.D.

Obsérvese que, en la demostración del teorema 1, la hipótesis de que $K = k_1 k_2$ sea constante sólo se utiliza para garantizar que k_2 es una función decreciente de k_1 . Se obtiene entonces la misma conclusión si suponemos que la curvatura media $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ es constante. Podemos establecer así el

TEOREMA 1a. Sea S una superficie regular, conexa y compacta, con curvatura gaussiana $K > 0$ y cuya curvatura media H es constante. Entonces, S es una esfera.

La demostración es totalmente análoga a la del teorema 1. En realidad, puede aplicarse el mismo argumento siempre que $k_2 = f(k_1)$, donde f es una función decreciente de k_1 . Con precisión, tenemos el

TEOREMA 1b. Sea S una superficie regular, conexa y compacta, con curvatura gaussiana $K > 0$. Si existe en S una relación $k_2 = f(k_1)$, donde f es una función decreciente de k_1 , $k_1 \geq k_2$, entonces S es una esfera.

Observación 2. Aquellas superficies conexas y compactas de R^3 cuya curvatura gaussiana K es positiva se llaman *ovaloides*. De acuerdo con esto, podemos enunciar el teorema 1 en los siguientes términos: *un ovaloide de curvatura media constante es una esfera*.

Por otra parte, como consecuencia directa del teorema de Gauss-Bonnet, se deduce que un ovaloide es *homeomorfo* a una esfera (cf. la sec. 4.5, aplicación 1). H. Hopf demostró una versión aún más fuerte del teorema la: *una superficie regular de curvatura media constante que es homeomorfa a una esfera, es una esfera*. Un teorema debido a Alexandroff, extiende todavía más este resultado al reemplazar la condición «*homeomorfa a una esfera*» por la de compacidad: *una superficie regular, conexa y compacta, de curvatura media constante es una esfera*.

Puede encontrarse una exposición de los resultados que acabamos de mencionar en Hopf [11] (la relación de referencias se encuentra al final del libro).

Observación 3. La rigidez de la esfera puede obtenerse como caso particular de un teorema general sobre la rigidez de los ovaloides. Este teorema, debido a Cohn-Vossen, establece lo siguiente: *dos ovaloides isométricos se diferencian en una transformación ortogonal de R^3* . Una demostración de este resultado puede encontrarse en Chern [10].

El teorema 1 es un resultado típico de la geometría diferencial global, es decir, información sobre entidades locales (en este caso la curvatura) junto con hipótesis globales débiles (en este caso, compacidad y conexidad) implican fuertes restricciones sobre la totalidad de la superficie (en este caso, el ser una esfera). Obsérvese que el único efecto de la conexidad es prevenir la comparecencia de dos o más esferas en la conclusión del teorema 1. Por otra parte, la hipótesis de compacidad es, en varias direcciones, esencial; siendo una de sus funciones la de asegurar que obtenemos una esfera completa y no una superficie contenida en una esfera.

EJERCICIOS

- Sean $S \subset R^3$ una superficie regular compacta y $p_0 \in R^3$ un punto fijo, $p_0 \notin S$. Sea $d: S \rightarrow R$ la función diferenciable definida por $d(q) = \frac{1}{2}|q - p_0|^2$, $q \in S$. Como S es compacta, existe un $q_0 \in S$ tal que $d(q_0) \geq d(q)$ para todo $q \in S$. Demuéstrese que q_0 es un punto elíptico de S (esto proporciona otra demostración del lema 2).
- Sea $S \subset R^3$ una superficie regular de curvatura gaussiana $K > 0$, sin puntos umbílicos. Demostrar que no existen en S puntos donde, simultáneamente, H tiene un máximo y K un mínimo.
- Observación de Kazdan-Warner.* Sea $S \subset R^3$ la superficie de revolución ampliada (véase la observación 4, sec. 2.3) y compacta que se obtiene al rotar la curva

$$\alpha(s) = (0, \varphi(s), \psi(s)),$$

parametrizada por la longitud de arco $s \in [0, l]$, alrededor del eje z . En este caso, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ y $\varphi'(s) > 0$ para todo $s \in [0, l]$. Además, la regularidad de S en los polos implica que $\varphi'(0) = 1$, $\varphi'(l) = -1$ (cf. el ejercicio 10, sec. 2.3). También sabemos ya que la curvatura gaussiana de S viene dada por $K = -\varphi''(s)/\varphi(s)$ (cf. el ejemplo 4, sec. 3.3).

a. Demostrar que

$$\int_0^l K' \varphi^2 ds = 0, \quad K' = \frac{dK}{ds}.$$

b. Conclúyase de la parte a que *no existen superficies de revolución (ampliadas) compactas en R^3 con curvatura monótona creciente*.

El siguiente ejercicio esboza una demostración del teorema de Hopf: *una superficie regular con curvatura media constante que es homeomorfa a una esfera, es una esfera* (cf. la observación 2). La idea principal de Hopf se ha utilizado de nuevo con bastante frecuencia en trabajos recientes. El ejercicio requiere algunos hechos elementales de las funciones de variable compleja.

- Sea $U \subset R^2$ un subconjunto abierto y conexo de R^2 y sea $x: U \rightarrow S$ una parametrización isotérmica (es decir, $E = G, F = 0$, cf. la sec. 4.2) de una superficie regular S . Identificamos R^2 con el plano complejo \mathbb{C} haciendo $u + iv = \zeta$, $(u, v) \in R^2$, $\zeta \in \mathbb{C}$. Se dice que ζ es el *parámetro complejo* correspondiente a x . Sea $\phi: x(U) \rightarrow \mathbb{C}$ la función con valores complejos definida por

$$\phi(\zeta) = \phi(u, v) = \frac{e - g}{2} - if = \phi_1 + i\phi_2,$$

donde e, f, g son los coeficientes de la segunda forma fundamental de S .

- Demuéstrese que, en la parametrización isotérmica x , las ecuaciones de Mainardi-Codazzi (cf. la sec. 4.3) pueden escribirse en la forma

$$\left(\frac{e - g}{2}\right)_u + f_v = EH_u, \quad \left(\frac{e - g}{2}\right)_v - f_u = -EH_v$$

y conclúyase que la curvatura media H de $x(U) \subset S$ es constante si y sólo si ϕ es una función analítica de ζ (es decir, $(\phi_1)_u = (\phi_2)_v$, $(\phi_1)_v = -(\phi_2)_u$).

- Defínase la «derivada compleja»

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right),$$

y demuéstrese que $\phi(\zeta) = -2 \langle x_\zeta, N_\zeta \rangle$, donde, por ejemplo, x_ζ designa el vector con coordenadas complejas

$$x_\zeta = \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta}, \frac{\partial y}{\partial \zeta}, \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right).$$

- Sea $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow V \subset \mathbb{C}$ una función compleja e inyectiva definida por $f(u + iv) = x + iv = \eta$. Demuéstrese que (x, y) son parámetros isotérmicos de S (es decir, η es un parámetro complejo de S) si y sólo si f es analítica y $f'(\zeta) \neq 0$, $\zeta \in U$. Sea $y = x \circ f^{-1}$ la parametrización correspondiente y defínase $\psi(\eta) = -2 \langle y_\eta, N_\eta \rangle$. Demuéstrese que, sobre $x(U) \cap y(V)$ se verifica

$$\phi(\zeta) = \psi(\eta) \left(\frac{d\eta}{d\zeta} \right)^2. \quad (*)$$

- d. Sea S^2 la esfera unidad de \mathbb{R}^3 . Utilícese la proyección estereográfica (cf. el ejercicio 16 sec. 2.2) desde los polos $N = (0, 0, 1)$ y $S = (0, 0, -1)$ para recubrir S^2 mediante los entornos coordenados de dos parámetros (isotermos) complejos ζ y η , con $\zeta(S) = 0$ y $\eta(N) = 0$, de forma que en la intersección W de estos entornos coordinados (la esfera menos los polos) $\eta = \zeta^{-1}$. Admitamos que en cada entorno coordinado existen funciones analíticas, $\varphi(\zeta), \psi(\eta)$, tal que (*) se satisface en W . Utilícese el teorema de Liouville para demostrar que $\varphi(\zeta) = 0$ (luego, $\psi(\eta) = 0$).
e. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular con curvatura media constante, homeomorfa a una esfera. Supongamos que existe un difeomorfismo conforme $\varphi: S \rightarrow S^2$ de S sobre la esfera unidad S^2 (admitiremos aquí este hecho, que es consecuencia del teorema de uniformización para superficies de Riemann). Sean ζ y η los parámetros complejos que se corresponden, a través de φ , con los parámetros ζ y η de S^2 definidos en la parte d. En virtud a la parte a, la función $\varphi(\zeta) = ((e - g)/2) + i\zeta$ es analítica. También es analítica la correspondiente función $\psi(\eta)$ y, en virtud a la parte e, ambas funciones se relacionan a través de (*). Utilícese la parte d para demostrar que $\varphi(\zeta) = 0$ (luego, $\psi(\eta) = 0$). Conclúyase que S está constituida por puntos umbílicos y, por lo tanto, que es una esfera. Con esto se demuestra el teorema de Hopf.

5.3. Superficies completas. Teorema de Hopf-Rinow

De aquí en adelante, todas las superficies a considerar serán regulares y conexas, salvo que se establezca otra cosa.

Las consideraciones del final de la sec. 5.1 anuncianaban que a fin de obtener teoremas globales necesitamos, a parte de la conexidad algunas hipótesis globales que aseguren que la superficie no puede «prolongarse» más como superficie regular. Es claro que la compacidad nos sirve para este propósito. Sin embargo, sería de utilidad disponer de alguna hipótesis más débil que la compacidad que presentase todavía el mismo efecto. Esto nos permitiría esperar la validez de teoremas globales, en un contexto más general que en el de compacidad.

En la siguiente definición se presenta una formulación más precisa del hecho de que una superficie no pueda prolongarse.

DEFINICIÓN 1. Se dice que una superficie regular (conexa) S es prolongable si existe una superficie regular (conexa) \tilde{S} tal que $S \subset \tilde{S}$ como subconjunto propio. Si no existe tal \tilde{S} , se dice que S es no prolongable.

Desafortunadamente, la clase de las superficies no prolongables es demasiado amplia para esperar resultados interesantes. Una hipótesis más adecuada es la de la

DEFINICIÓN 2. Se dice que una superficie regular S es completa si para cada punto $p \in S$, cualquier geodésica parametrizada $\gamma: [0, \epsilon) \rightarrow S$ de S , que comience en $p = \gamma(0)$, puede prolongarse a una geodésica parametrizada $\tilde{\gamma}: \mathbb{R} \rightarrow S$, definida en toda la recta real \mathbb{R} .

En otras palabras, S es completa cuando la aplicación $\exp_p: T_p(S) \rightarrow S$ (sec. 4.6) está definida para cada $v \in T_p(S)$, y esto sucede en todos los puntos $p \in S$.

Más tarde (prop. 1) demostraremos que cada superficie completa es no prolongable y que existen superficies no prolongables que no son completas (Ejemplo 1). Por tanto, la hipótesis de completitud es más fuerte que la de no prolongabilidad. Demostraremos además (prop. 5) que cada superficie cerrada en \mathbb{R}^3 es completa; es decir, la hipótesis de completitud es más débil que la de compacidad.

El objetivo de esta sección es demostrar que dados dos puntos $p, q \in S$ de una superficie completa S , existe una geodésica que une p y q , que es además mínima (es decir, su longitud es menor o igual que la de cualquier otra curva que une p y q). La primera demostración de este resultado fundamental se debe a Hopf y Rinow (H. Hopf, W. Rinow, «Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Flächen», *Comm. Math. Helv.* 3, 1931, 209-225). Este teorema constituye la razón principal por la que las superficies completas son más adecuadas que las no prolongables para la geometría diferencial.

Fijémonos en algunos ejemplos. Está claro que el plano es una superficie completa. El cono menos el vértice no es una superficie completa, pues prolongando suficientemente una generatriz (que es una geodésica) alcanzamos el vértice, que no pertenece a la superficie. Una esfera es una superficie completa, pues sus geodésicas parametrizadas (cuyas trazas son los círculos máximos de la esfera) están definidas para cada valor real. El cilindro también es una superficie completa en virtud a que sus geodésicas, los círculos, rectas y hélices, están definidas en cada valor real.

Por otra parte, una superficie $S - \{p\}$, obtenida al suprimir un punto p de una superficie completa S , no es completa. En efecto, debería pasar por p una geodésica γ de S . Al tomar un punto q , próximo a p sobre γ (fig. 5.3), existe en $S - \{p\}$ una geodésica parametrizada que comienza en q y no puede prolongarse hasta p (este argumento se desarrollará con detalle en la prop. 1). Por tanto, la esfera menos un punto y el cilindro menos un punto no son superficies completas.

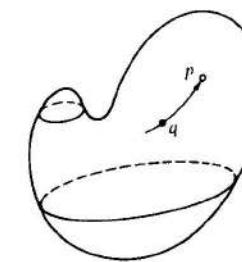


Figura 5-3

PROPOSICIÓN 1. Una superficie completa S es no prolongable.

Demostración. Admitamos que S es prolongable para llegar a una contradicción. Decir que S es prolongable significa que existe una superficie regular (conexa) \tilde{S} con $S \subset \tilde{S}$. Al ser S una superficie regular, S es abierta en \tilde{S} . La frontera (apéndice al

cap. 5, def. 4) $\text{Bd } S^*$ de S en \bar{S} es no vacía; en caso contrario $S = S \cup (\bar{S} - S)$ sería la unión de los dos abiertos disjuntos S y $\bar{S} - S$, lo que contradice la conexidad de \bar{S} (apéndice al cap. 5, def. 10). Por tanto, existe $p \in \text{Bd } S$ y, como S es abierta en \bar{S} , $p \notin S$.

Sea $\tilde{V} \subset \bar{S}$ un entorno de p en \bar{S} tal que cada $q \in \tilde{V}$ puede conectarse con p mediante una única geodésica en \bar{S} (sec. 4.6, prop. 2). Como $p \in \text{Bd } S$, algún $q_0 \in \tilde{V}$ pertenece a S . Sea $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \bar{S}$ una geodésica de \bar{S} , con $\tilde{\gamma}(0) = p$ y $\tilde{\gamma}(1) = q_0$. Está claro que $\varphi: [0, \varepsilon) \rightarrow S$, definida por $\alpha(t) = \tilde{\gamma}(1-t)$, es una geodésica de S , con $\alpha(0) = q_0$, cuya extensión a toda la recta real R debería pasar por p para $t=1$ (fig. 5-4). Como $p \notin S$, esta geodésica no puede prolongarse, lo que contradice la hipótesis de completitud.

Q.E.D.

El recíproco de esta proposición es falso, como muestra el ejemplo siguiente.

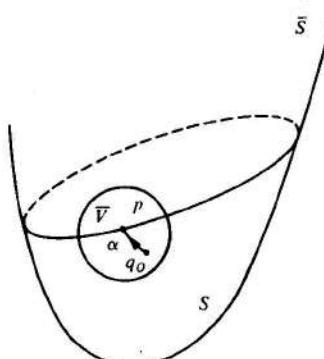


Figura 5-4

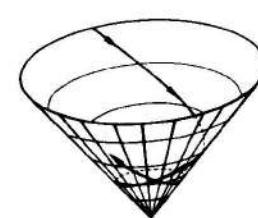


Figura 5-5

Ejemplo 1. Al suprimir el vértice p_0 del cono de una hoja definido por

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in R^2,$$

obtenemos una superficie regular S . La superficie S no es completa pues las generatrices no pueden prolongarse, sin alcanzar el vértice, de forma que estén definidas en cualquier valor de la longitud de arco.

Demostremos que S es no prolongable, suponiendo, para llegar a una contradicción, que $S \subset \bar{S}$, donde $\bar{S} \neq S$ es una superficie regular. El argumento consiste en demostrar que la frontera de S en \bar{S} se reduce al vértice p_0 y que existe un entorno \tilde{W} de p_0 en \bar{S} tal que $\tilde{W} - \{p_0\} \subset S$. Sin embargo, esto contradice el hecho de que el cono (incluido el vértice p_0) no es una superficie regular en p_0 (sec. 2.2, ejemplo 5).

Observemos primero que la única geodésica de S , que comienza en un punto $p \in S$ y que no puede prolongarse para cada valor del parámetro, es el meridiano (la

generatriz) que pasa por p (véase la fig. 5-5). Este hecho, el cual se deja como ejercicio (ejercicio 2), puede probarse fácilmente utilizando, por ejemplo, la relación de Clairaut (sec. 4.4, ejemplo 5).

Sea ahora $p \in \text{Bd } S$, donde $\text{Bd } S$ representa la frontera de S en \bar{S} (como hemos visto en la prop. 1, $\text{Bd } S \neq \emptyset$). Como S es un conjunto abierto en \bar{S} , $p \notin S$. Sea \tilde{V} un entorno de p en \bar{S} tal que cada punto de \tilde{V} puede unirse a p mediante una única geodésica de \bar{S} contenida en \tilde{V} . Como $p \in \text{Bd } S$, existe $q \in \tilde{V} \cap S$. Sea $\tilde{\gamma}$ una geodésica de \bar{S} que une p con q . Como S es un conjunto abierto en \bar{S} , $\tilde{\gamma}$ coincide con una geodésica γ de S en un entorno de q . Sea p_0 el primer punto de $\tilde{\gamma}$ que no pertenece a S . En virtud a la observación precedente, $\tilde{\gamma}$ es un meridiano y p_0 es el vértice de S . Además, $p_0 = p$; en caso contrario tendría que existir un entorno de p que no contiene a p_0 . Repitiendo el argumento para ese entorno, obtendríamos un vértice distinto de p_0 , lo que constituye una contradicción. Se deduce entonces que $\text{Bd } S$ se reduce al vértice p_0 .

Sea ahora \tilde{W} un entorno de p_0 en \bar{S} tal que dos puntos cualesquiera de \tilde{W} pueden unirse mediante una geodésica de \bar{S} (sec. 4.7, prop. 1). Probaremos que $\tilde{W} - \{p_0\} \subset S$. En efecto, los puntos de γ pertenecen a S . Por otra parte, un punto $r \in \tilde{W}$ que no pertenece a γ o a su prolongación puede unirse a un punto t de γ , $t \neq p_0$, $t \in \tilde{W}$, mediante una geodésica α , diferente de γ (véase la fig. 5-6). Por la observación del principio, cada punto de α , en particular r , pertenece a S . Finalmente, los puntos de la prolongación de γ , exceptuando p_0 , pertenecen también a S ; en caso contrario, deberían pertenecer a la frontera de S la cual ya hemos demostrado que está constituida únicamente por el punto p_0 .

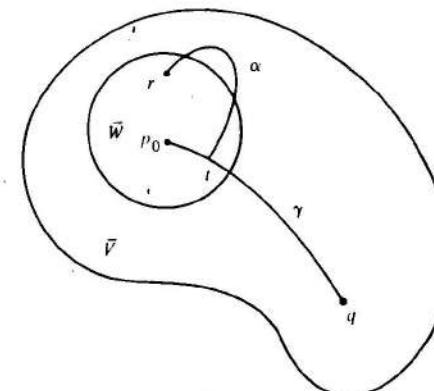


Figura 5-6

Nuestras afirmaciones quedan, de esta manera, completamente demostradas. Obtenemos así el ejemplo de superficie S no prolongable que buscábamos.

Es conveniente introducir, para lo que sigue, una noción de distancia entre dos puntos de S que únicamente dependa de la geometría intrínseca de S y no de la forma en que S está sumergida en R^3 (cf. la observación 1, sec. 4.2). Obsérvese que, como $S \subset R^3$, es posible definir una distancia entre dos puntos de S como la distancia entre estos dos puntos en R^3 . Sin embargo, esta distancia depende de la segunda forma fundamental, por tanto, no es adecuada para los propósitos de este capítulo.

* Bd es la abreviatura de *boundary*, frontera en inglés. [N. del T.]

Necesitamos algunos preliminares.

Se dice que una aplicación continua $\alpha: [a, b] \rightarrow S$, de un intervalo cerrado $[a, b]$ de la recta real R en una superficie S , es una *curva parametrizada diferenciable a trozos* que une $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$ si existe una partición de $[a, b]$ mediante los puntos $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} = b$ tal que α es diferenciable en $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \dots, k$. La longitud $l(\alpha)$ de α se define como

$$l(\alpha) = \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\alpha'(t)| dt.$$

PROPOSICION 2. Dados dos puntos p y $q \in S$ de una superficie regular (conexa) S , existe una curva parametrizada diferenciable a trozos que une a p con q .

Demostración. Al ser S conexa, existe una curva continua $\alpha: [a, b] \rightarrow S$ con $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$. Para $t \in [a, b]$, sea I_t un intervalo abierto en $[a, b]$ que contiene a t , tal que $\alpha(I_t)$ está contenido en un entorno coordenado de $\alpha(t)$. La unión $\bigcup I_t$, $t \in [a, b]$, recubre $[a, b]$ y, por compacidad, $[a, b]$ todavía puede recubrirse con un número finito I_1, \dots, I_n de tales intervalos. En consecuencia, es posible descomponer I mediante puntos $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} = b$ de forma que $[t_i, t_{i+1}]$ está contenido en algún I_j , $j = 1, \dots, n$. Por tanto, $\alpha(t_i, t_{i+1})$ está contenido en algún entorno coordenado.

Ya que $p = \alpha(t_0)$ y $q = \alpha(t_1)$ se hallan en un mismo entorno coordenado $x(U) \subset S$, es posible unirlos mediante una curva diferenciable, a saber, la imagen a través de x de una curva diferenciable en $U \subset R^2$ que une $x^{-1}(\alpha(t_0))$ con $x^{-1}(\alpha(t_1))$. Mediante este proceso, unimos $\alpha(t_i)$ con $\alpha(t_{i+1})$, $i = 0, \dots, k$, mediante una curva diferenciable. Obtenemos así una curva parametrizada, diferenciable a trozos, que une $p = \alpha(t_0)$ con $q = \alpha(t_{k+1})$, concluyendo la demostración de la proposición.

Q.E.D.

Sean ahora $p, q \in S$ dos puntos de una superficie regular S . Denotamos por $\alpha_{p,q}$ una curva parametrizada, diferenciable a trozos que une p y q ; siendo $l(\alpha_{p,q})$ su longitud. La prop. 2 establece que el conjunto de tales $\alpha_{p,q}$ es no vacío. Por tanto, podemos formular la siguiente:

DEFINICION 3. La distancia (intrínseca) $d(p, q)$ del punto $p \in S$ al punto $q \in S$ es el número

$$d(p, q) = \inf l(\alpha_{p,q}),$$

donde se toma el ínfimo sobre todas las curvas parametrizadas y diferenciables a trozos que unen p y q .

PROPOSICION 3. La distancia d que acabamos de introducir tiene las propiedades siguientes,

1. $d(p, q) = d(q, p)$,
2. $d(p, q) + d(q, r) \geq d(p, r)$,
3. $d(p, q) \geq 0$,
4. $d(p, q) = 0$ si y sólo si $p = q$,

donde p, q, r son puntos arbitrarios de S .

Demostración. La propiedad 1 es inmediata pues cada curva parametrizada

$$\alpha: [a, b] \rightarrow S$$

con $\alpha(a) = p$, $\alpha(b) = q$, da lugar a una curva parametrizada $\tilde{\alpha}: [a, b] \rightarrow S$, definida por $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(a - t + b)$. Está claro que $\tilde{\alpha}(a) = q$, $\tilde{\alpha}(b) = p$ y $l(\alpha_{p,q}) = l(\tilde{\alpha}_{p,q})$.

La propiedad 2 es consecuencia del hecho de que, cuando A y B son conjuntos de números reales y $A \subseteq B$, entonces $\inf A \geq \inf B$.

La propiedad 3 se deduce del hecho de que el ínfimo de un conjunto de números positivos es un número positivo o cero.

Demostremos ahora la propiedad 4. Sea $p = q$. Entonces, al tomar la curva constante $\alpha: [a, b] \rightarrow S$, definida por $\alpha(t) = p$, $t \in [a, b]$, obtenemos $l(\alpha) = 0$; luego $d(p, q) = 0$.

Para probar que $d(p, q) = 0$ implica que $p = q$ procedemos de la manera siguiente. Supongamos que $d(p, q) = \inf l(\alpha_{p,q}) = 0$ y $p \neq q$. Sea V un entorno de p en S , con $q \notin V$ y tal que cada punto de V puede unirse a p mediante una única geodésica dentro de V . Sea $B_r(p) \subset V$ la región delimitada por un círculo geodésico de radio r , centrado en p y contenido en V . Por la definición de ínfimo, dado $\varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < r$, existe una curva parametrizada regular a trozos $\alpha: [a, b] \rightarrow S$ que une p y q con $l(\alpha) < \varepsilon$. Como $\alpha([a, b])$ es conexo y $q \notin B_r(p)$, existe un punto $t_0 \in [a, b]$ tal que $\alpha(t_0)$ pertenece a la frontera de $B_r(p)$. Se deduce entonces que $l(\alpha) \geq r > \varepsilon$, lo que constituye una contradicción. Por tanto, $p = q$, con lo que concluye la demostración de la proposición.

COROLARIO. $|d(p, r) - d(r, q)| \leq d(p, q)$.

Basta observar que

$$\begin{aligned} d(p, r) &\leq d(p, q) + d(q, r), \\ d(r, q) &\leq d(r, p) + d(p, q); \end{aligned}$$

luego,

$$-d(p, q) \leq d(p, r) - d(r, q) \leq d(p, q).$$

PROPOSICION 4. Si fijamos un punto $p_0 \in S$, entonces la función $f: S \rightarrow R$ definida por $f(p) = d(p_0, p)$, $p \in S$, es continua en S .

Demostración. Tenemos que demostrar que para cada $p \in S$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $q \in B_\delta(p) \cap S$, donde $B_\delta(p) \subset R^3$ es una bola abierta de R^3 con centro en p y radio δ , entonces $|f(p) - f(q)| = |d(p_0, p) - d(p_0, q)| < \varepsilon$.

Sea $\varepsilon' < \varepsilon$ tal que la aplicación exponencial $\exp_p: T_p(S) \rightarrow S$, es un difeomorfismo en el disco $B_{\varepsilon'}(0) \subset T_p(S)$, donde O es el origen de $T_p(S)$, y pongamos $V =$

$\exp_p(B_\epsilon(O))$. Está claro que V es un conjunto abierto en S ; por tanto, existe una bola abierta $B_\delta(O)$ de R^3 tal que $B_\delta(O) \cap S \subset V$. Luego, si $q \in B_\delta(O) \cap S$,

$$|d(p_0, p) - d(p_0, q)| \leq d(p, q) < \epsilon' < \epsilon,$$

para complementar la demostración.

Q.E.D.

Observación 1. Aquellos lectores con nociones elementales de topología observarán que la prop. 3 establece que la función $d: S \times S \rightarrow R$ dota a S de la estructura de espacio métrico. Por otra parte, $S \subset R^3$, como subconjunto de un espacio métrico, tiene una métrica inducida \bar{d} . Un hecho importante es que estas dos métricas determinan la misma topología, es decir, la misma familia de conjuntos abiertos en S . Esto es consecuencia del hecho de que $\exp_p: U \subset T_p(S) \rightarrow S$ es un difeomorfismo local y su demostración es análoga a la de la prop. 4.

Tras haber concluido con los preliminares, podemos ya establecer la observación siguiente.

PROPOSICION 5. Una superficie cerrada $S \subset R^3$ es completa.

Demuestra. Sea $\gamma: [0, \epsilon] \rightarrow S$ una geodésica parametrizada de S , $\gamma(O) = p \in S$, y supongamos, sin pérdida de generalidad, que está parametrizada por la longitud de arco. Necesitamos demostrar que es posible prolongar γ a una geodésica $\tilde{\gamma}: R \rightarrow S$, definida en toda la recta real. Primero observemos que, cuando $\tilde{\gamma}(s_0)$, $s_0 \in R$, está definida, entonces, en virtud al teorema de existencia y unicidad de geodésicas (sec. 4.4, prop. 5), es posible prolongar $\tilde{\gamma}$ a un entorno de s_0 en R . En consecuencia, el conjunto de todos los $s \in R$ donde $\tilde{\gamma}$ está definida es abierto en R . Si podemos demostrar que este conjunto es cerrado en R (que es conexo), será posible entonces definir $\tilde{\gamma}$ en todo R , lo que probará la proposición.

Admitamos que $\tilde{\gamma}$ está definida para $s < s_0$ y demostremos que $\tilde{\gamma}$ está definida en $s = s_0$. Consideremos una sucesión $\{s_n\} \rightarrow s_0$, con $s_n < s_0$, $n = 1, 2, \dots$

Demostraremos primero que la sucesión $\{\tilde{\gamma}(s_n)\}$ converge en S . En efecto, dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que si $n, m > n_0$, entonces $|s_n - s_m| < \epsilon$. Denotemos por \bar{d} la distancia en R^3 y observemos que si $p, q \in S$, entonces $\bar{d}(p, q)$. De esta forma

$$\bar{d}(\tilde{\gamma}(s_n), \tilde{\gamma}(s_m)) \leq d(\tilde{\gamma}(s_n), \tilde{\gamma}(s_m)) \leq |s_n - s_m| < \epsilon,$$

en donde la segunda desigualdad proviene de la definición de d y de que $|s_n - s_m|$ es igual a la longitud de arco de la curva $\tilde{\gamma}$ entre s_n y s_m . Así pues, $\{\tilde{\gamma}(s_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en R^3 ; luego converge a un punto $q \in R^3$ (apéndice al cap. 5, prop. 4). Como q es un valor límite de $\{\tilde{\gamma}(s_n)\}$ y S es cerrada, $q \in S$, lo que prueba nuestra afirmación.

Sean ahora W y δ el entorno de q y el número positivo dados por la prop. 1 de la sec. 4.7. Sean $\tilde{\gamma}(s_n), \tilde{\gamma}(s_m) \in W$ puntos tales que $|s_n - s_m| < \delta$, y sea γ la única geodésica con $l(\gamma) < \delta$ que une $\tilde{\gamma}(s_n)$ y $\tilde{\gamma}(s_m)$. Es claro que $\tilde{\gamma}$ coincide con γ . Como $\exp_{\tilde{\gamma}(s_n)}$ es un difeomorfismo en $B_\delta(O)$ y $W \subset \exp_{\tilde{\gamma}(s_n)}(B_\delta(O))$, γ extiende a $\tilde{\gamma}$ hasta q . En consecuencia, $\tilde{\gamma}$ está definida en $s = s_0$, lo cual completa la demostración.

Q.E.D.

COROLARIO. Una superficie compacta es completa.

Observación 2. El recíproco de la Prop. 5 no es cierto. Por ejemplo, se ve fácilmente que un cilindro recto, apoyado sobre una curva plana asintótica a un círculo, es una superficie completa que no es cerrada (fig. 5-7).

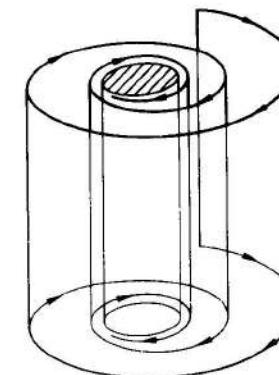


Figura 5-7. Superficie completa no cerrada.

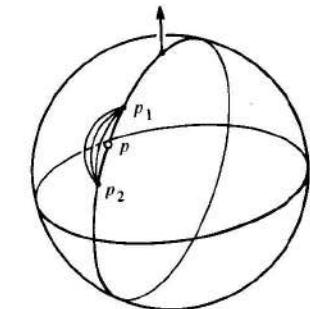


Figura 5-8

Decimos que una geodésica γ que une los puntos $p, q \in S$ es *mínima* si su longitud $l(\gamma)$ es menor o igual que la longitud de cualquier curva regular a trozos que une p y q , (cf. la sec. 4.7). Esto equivale a decir que $l(\gamma) = d(p, q)$, pues dada una curva diferenciable a trozos α que une p y q , podemos encontrar una curva regular a trozos que une p y q la cual es más corta (o al menos no más larga) que α . Se deja como ejercicio la demostración de esta última afirmación.

Obsérvese que, como muestra el ejemplo siguiente, pudiera no existir una geodésica mínima.

Sea $S^2 - \{p\}$ la superficie constituida por la esfera S^2 menos el punto $p \in S^2$. Al tomar, sobre el meridiano que pasa por p , dos puntos p_1 y p_2 , simétricos con respecto a p y suficientemente próximos a p , comprobamos que no existe una geodésica mínima que une p_1 y p_2 en la superficie $S^2 - \{p\}$ (véase la fig. 5-8).

Por otra parte, pueden existir infinitas geodésicas mínimas que unen dos puntos de una superficie, como por ejemplo sucede en el caso de dos puntos antipodales de una esfera; todos los meridianos que unen estos puntos antipodales son geodésicas mínimas.

El principal resultado de esta sección establece que, en una superficie completa, siempre existen geodésicas mínimas que unen dos puntos dados.

TEOREMA (Hopf-Rinow). Sea S una superficie completa. Dados dos puntos $p, q \in S$, existe una geodésica mínima que une p y q .

Demuestra. Sea $r = d(p, q)$ la distancia entre los puntos p y q . Sea $B_\delta(O) \subset T_p(S)$ un disco de radio δ , centrado en el origen O del plano tangente $T_p(S)$ y

contenido en un entorno $U \subset T_p(S)$ del punto O , en el que \exp_p es un difeomorfismo. Sea $B_\delta(p) = \exp_p(B_\delta(O))$. Obsérvese que la frontera $\text{Bd } B_\delta(p) = \Sigma$ es compacta pues es la imagen continua del conjunto compacto $\text{Bd } B_\delta(O) \subset T_p(S)$.

Si $x \in \Sigma$, la función continua $d(x, q)$ alcanza el mínimo en un punto x_0 del conjunto compacto Σ . El punto x_0 se puede escribir en la forma

$$x_0 = \exp_p(\delta v), \quad |v| = 1, \quad v \in T_p(S).$$

Sea γ la geodésica parametrizada por la longitud de arco, definida por (véase la figura 5-9)

$$\gamma(s) = \exp_p(sv).$$

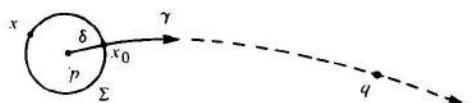


Figura 5-9

Como S es completa, γ está definida para cada $s \in R$. En particular, γ está definida en el intervalo $[0, r]$. Si probamos que $\gamma(r) = q$, entonces γ debe ser una geodésica que une p y q , la cual es mínima, pues $l(\gamma) = r = d(p, q)$. Probado esto, la demostración quedaría concluida.

Para demostrarlo, probaremos que si $s \in [\delta, r]$, entonces

$$d(\gamma(s), q) = r - s. \quad (1)$$

La ecuación (1) implica, para $s = r$, que $\gamma(r) = q$, que es lo que queremos demostrar.

Para demostrar la ec. (1) demostraremos primero que se satisface para $s = \delta$. Ya está claro que el conjunto $A = \{s \in [\delta, r]; \text{ donde la ec. (1) se satisface}\}$ es cerrado en $[0, r]$. Demostramos seguidamente que si $s_0 \in A$ y $s_0 < r$, entonces la ec. (1) se satisface para $s_0 + \delta'$, donde $\delta' > 0$ es suficientemente pequeño. Se sigue entonces que $A = [\delta, r]$ y quedará demostrada la validez de la ec. (1).

Ahora demostraremos que la ec. (1) se satisface para $s = \delta$. En efecto, como cada curva que une p y q intersecta a Σ , tenemos, al denotar por x un punto arbitrario de Σ ,

$$\begin{aligned} d(p, q) &= \inf_{\alpha} l(\alpha_{p,q}) = \inf_{x \in \Sigma} \left\{ \inf_{x \in \Sigma} l(\alpha_{p,x}) + \inf_{x \in \Sigma} l(\alpha_{x,q}) \right\} \\ &= \inf_{x \in \Sigma} (d(p, x) + d(x, q)) = \inf_{x \in \Sigma} (\delta + d(x, q)) \\ &= \delta + d(x_0, q). \end{aligned}$$

Luego,

$$d(\gamma(\delta), q) = r - \delta,$$

que es la ec. (1) para $s = \delta$.

Demostraremos ahora que si la ec. (1) se da para $s_0 \in [\delta, r]$, entonces, para $\delta' > 0$ y suficientemente pequeño, también se satisface para $s_0 + \delta'$.

Sea $B_\delta(O)$ un disco del plano tangente $T_{\gamma(s_0)}(S)$, con centro en el origen O de este plano y contenido en un entorno U' , en donde $\exp_{\gamma(s_0)}$ es un difeomorfismo. Sea $B_\delta(\gamma(s_0)) = \exp_{\gamma(s_0)}(B_\delta(O))$ y $\Sigma' = \text{Bd } (B_\delta(\gamma(s_0)))$. Si $x' \in \Sigma'$, la función continua $d(x', q)$ alcanza su mínimo en $x'_0 \in \Sigma'$ (véase la fig. 5-10). Como en el caso previo se tiene entonces que

$$\begin{aligned} d(\gamma(s_0), q) &= \inf_{x' \in \Sigma'} \{d(\gamma(s_0), x') + d(x', q)\} \\ &= \delta' + d(x'_0, q). \end{aligned}$$

Como la ec. (1) se satisface en s_0 , tenemos que $d(\gamma(s_0), q) = r - s_0$. Por lo tanto,

$$d(x'_0, q) = r - s_0 - \delta'. \quad (2)$$

Además, puesto que

$$d(p, x'_0) \geq d(p, q) - d(q, x'_0),$$

obtenemos de la ec. (2)

$$d(p, x'_0) \geq r - (r - s_0) + \delta' = s_0 + \delta'.$$

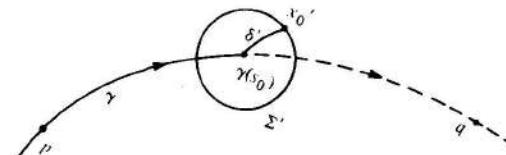


Figura 5-10

Obsérvese ahora que la curva que va de p a $\gamma(s_0)$ a través de γ y de $\gamma(s_0)$ a x'_0 a través de un radio geodésico de $B_\delta(\gamma(s_0))$ tiene una longitud exactamente igual a $s_0 + \delta'$. Como $d(p, x'_0) \geq s_0 + \delta'$, esta curva, que une p y x'_0 , tiene longitud mínima. Se deduce entonces (sec. 4.7, prop. 2) que es una geodésica, luego es regular en todos sus puntos. Por lo tanto, debe coincidir con γ ; luego, $x'_0 = \gamma(s_0 + \delta')$. Puede así reformularse la ec. (2) en los términos siguientes

$$d(\gamma(s_0 + \delta'), q) = r - (s_0 + \delta'),$$

que es la ec. (1) para $s = s_0 + \delta'$.

Esto prueba nuestra afirmación, concluyendo la demostración.

Q.E.D.

COROLARIO 1. Supongamos que S es completa. Entonces, para cada $p \in S$ la aplicación $\exp_p: T_p(S) \rightarrow S$ es sobreyectiva.

La validez de este resultado se debe a que si $q \in S$ y $d(p, q) = r$, entonces $q = \exp_p rv$, donde $v = \gamma'(O)$ es el vector tangente a una geodésica mínima γ , que une p y q , parametrizada por la longitud de arco.

COROLARIO 2. Sea S una superficie completa y acotada en la métrica d (es decir, existe $r > 0$ tal que $d(p, q) < r$ para cada pareja $p, q \in S$). Entonces S es compacta.

Demostración. Fijando un punto $p \in S$, el hecho de que S sea acotada implica la existencia de una bola cerrada $B \subset T_p(S)$ de radio r , con centro en el origen del plano tangente $T_p(S)$, tal que $\exp_p(B) = \exp_p(T_p(S))$. Al ser sobreductiva la aplicación \exp_p tenemos que $S = \exp_p(T_p(S)) = \exp_p(B)$. Como B es compacta y \exp_p es continua, concluimos que S es compacta.

Q.E.D.

De ahora en adelante, las nociones métricas a utilizar se referirán, salvo que se establezca otra cosa, a la distancia d en la def. 3. Por ejemplo, el diámetro $\varrho(S)$ de una superficie es, por definición,

$$\varrho(S) = \sup_{p, q \in S} d(p, q).$$

Con esta definición, el diámetro de la esfera unidad S^2 es $\varrho(S^2) = \pi$.

EJERCICIOS

- Sea $S \subset R^3$ una superficie completa y sea $F \subset S$ un subconjunto cerrado y no vacío de S tal que el complementario $S - F$ es conexo. Demuéstrese que $S - F$ es una superficie regular no completa.
- Sea S el cono de una hoja del ejemplo 1. Demuéstrese que, dado $p \in S$, la única geodésica de S que pasa por p y que no puede prolongarse a cualquier valor del parámetro es el meridiano de S que pasa por p .
- Sea S el cono de una hoja del ejemplo 1. Utilícese la isometría del ejemplo 3 de la sec. 4.2 para demostrar que dos puntos cualesquiera $p, q \in S$ (véase la fig. 5-11) pueden unirse mediante una geodésica mínima en S .

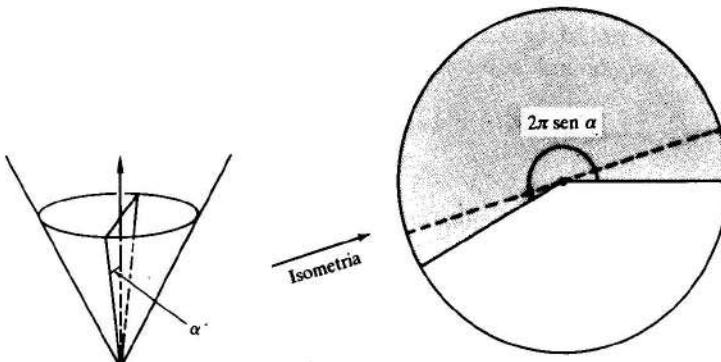


Figura 5-11

- Decimos que una sucesión $\{p_n\}$ de puntos de una superficie regular $S \subset R^3$ converge a un punto $p_0 \in S$ en la distancia (intrínseca) si, dado $\epsilon > 0$, existe un índice n_0 tal que $n \geq n_0$ implica que $d(p_n, p_0) < \epsilon$. Demuéstrese que una sucesión $\{p_n\}$ de puntos en S converge a $p_0 \in S$ en d si y sólo si $\{p_n\}$ converge a p_0 como sucesión de puntos de R^3 (es decir, en la distancia euclídea).
- Sea $S \subset R^3$ una superficie regular. Una sucesión $\{p_n\}$ de puntos de S es una sucesión de Cauchy en la distancia (intrínseca) si, dado $\epsilon > 0$, existe un índice n_0 tal que cuando $n, m \geq n_0$ entonces $d(p_n, p_m) < \epsilon$. Demostrar que S es completa si y sólo si cada sucesión de Cauchy en S converge a un punto de S .
- Una geodésica $\gamma: [0, \infty) \rightarrow S$ en una superficie S es un rayo que parte de $\gamma(O)$ y si realiza la distancia (intrínseca) entre $\gamma(O), \gamma(s)$ para todo $s \in [0, \infty)$. Sea p un punto de una superficie completa y no compacta S . Demostrar que S contiene un rayo que parte de p .
- Una curva divergente en S es una aplicación diferenciable $\alpha: [0, \infty) \rightarrow S$ tal que para cada subconjunto compacto $K \subset S$ existe un $t_0 \in (0, \infty)$ con $\alpha(t) \notin K$ para $t > t_0$ (es decir, «se marcha» de cualquier subconjunto compacto de S). La longitud de una curva divergente se define como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t |\alpha'(t)| dt.$$

Demuéstrese que $S \subset R^3$ es completa si y sólo si la longitud de cada curva divergente es no acotada.

- Sean S y \tilde{S} superficies regulares y $\varphi: S \rightarrow \tilde{S}$ un difeomorfismo. Admitamos que \tilde{S} es completa y que existe una constante $c > 0$ tal que

$$I_p(v) \geq c \tilde{I}_{\varphi(p)}(d\varphi_p(v))$$

para todo $p \in S$ y todo $v \in T_p(S)$, donde, respectivamente, I e \tilde{I} denotan las formas fundamentales primas de S y \tilde{S} . Demostrar que S es completa.

- Sean $S_1 \subset R^3$ una superficie completa (conexa) y $S_2 \subset R^3$ una superficie conexa tal que dos puntos cualesquiera de S_2 pueden unirse mediante una única geodésica. Sea $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ una isometría local. Demuéstrese que φ es una isometría global.
- Sea $S \subset R^3$ una superficie completa. Fijemos un vector unitario $v \in R^3$ y sea $h: S \rightarrow R$ la función altura $h(p) = \langle p, v \rangle$, $p \in S$. Recordamos que el gradiente de h es el campo vectorial (tangente) $\text{grad } h$ en S definido por

$$\langle \text{grad } h(p), w \rangle_p = dh_p(w) \quad \text{para todo } w \in T_p(S)$$

(cf. el ejercicio 14, sec. 2.5). Sea $\alpha(t)$ una trayectoria de $\text{grad } h$; es decir, $\alpha'(t)$ es una curva en S tal que $\alpha'(t) = \text{grad } h(\alpha(t))$. Demostrar que

- $|\text{grad } h(p)| \leq 1$ para todo $p \in S$.
- Cada trayectoria de $\text{grad } h$ está definida para todo $t \in R$.

El ejercicio siguiente requiere la materia de la sec. 3.5, parte B, y un conocimiento a nivel elemental de las funciones de variable compleja.

- 11. Lema de Osserman.** Sea $D_1 = \{\zeta \in \mathbb{C}; |\zeta| \leq 1\}$ el disco unidad del plano complejo \mathbb{C} . Como ya es habitual, identificamos $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ mediante $\zeta = u + iv$. Sea $x: D_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización isoterma de una superficie mínima $x(D_1) \subset \mathbb{R}^3$. Esto significa que (cf. la sec. 3.5, parte B)

$$\langle x_u, x_u \rangle = \langle x_v, x_v \rangle, \quad \langle x_u, x_v \rangle = 0$$

y que (la condición de minimalidad)

$$x_{uu} + x_{vv} = 0.$$

Supongamos que los vectores normales unitarios de $x(D_1)$ no pertenecen a un cierto entorno en la esfera unidad. Con más precisión, supongamos que para algún vector $w \in \mathbb{R}^3$, $|w| = 1$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$\frac{\langle x_u, w \rangle^2}{|x_u|^2} \geq \varepsilon^2 \quad \text{y} \quad \frac{\langle x_v, w \rangle^2}{|x_v|^2} \geq \varepsilon^2. \quad (*)$$

El objetivo de este ejercicio es demostrar que $x(D_1)$ no es una superficie completa (este paso es crucial para la demostración del teorema de Osserman citado al final de la sec. 3.5). Procédase de la manera siguiente:

- a. Definase $\varphi: D_1 \rightarrow \mathbb{C}$ mediante

$$\varphi(u, v) = \varphi(\zeta) = \langle x_u, w \rangle + i\langle x_v, w \rangle.$$

Demostrar que la condición de minimalidad implica que φ es analítica.

- b. Definase $\theta: D_1 \rightarrow \mathbb{C}$ mediante

$$\theta(\zeta) = \int_0^\zeta \varphi(\zeta) d\zeta = \eta.$$

En virtud a la parte a, θ es una función analítica. Demostrar que $\theta(O) = 0$ y que la condición (*) implica que $\theta'(\zeta) \neq 0$. Así, θ admite una inversa analítica θ^{-1} en un entorno de O . Utilizar el teorema de Liouville para demostrar que θ^{-1} no puede prolongarse analíticamente a todo \mathbb{C} .

- c. Por la parte b, existe un disco

$$D_R = \{\eta \in \mathbb{C}; |\eta| \leq R\}$$

y un punto η_0 , con $|\eta_0| = R$, tal que θ^{-1} es analítica en D_R y no puede prolongarse analíticamente a un entorno de η_0 (fig. 5-12). Sea L el segmento de D_R que une η_0 con O , es decir, $L = \{t\eta_0 \in \mathbb{C}; 0 \leq t \leq 1\}$. Definase $\alpha = \theta^{-1}(L)$ y demuéstrese que la longitud de arco l de $x(\alpha)$ es

$$\begin{aligned} l &= \int_a^R \sqrt{2\langle x_u, x_u \rangle \left(\left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \right)} dt \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_a^R \sqrt{\langle x_u, w \rangle^2 + \langle x_v, w \rangle^2} |d\zeta| = \frac{1}{\varepsilon} \int_a^R |\varphi(\zeta)| |d\zeta| \\ &= \frac{R}{\varepsilon} < +\infty. \end{aligned}$$

Utilícese el ejercicio 7 para concluir que $x(D_1)$ no es completa.

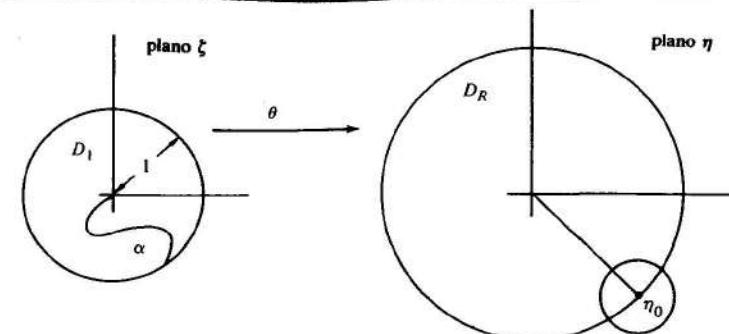


Figura 5-12

5.4. Variaciones primera y segunda de la longitud de arco; teorema de Bonnet

El objetivo de esta sección es demostrar que una superficie completa S con curvatura gaussiana $K \geq \delta > 0$ es compacta (teorema de Bonnet).

El punto crucial de la demostración consiste en demostrar que si $K \geq \delta > 0$, una geodésica γ que une dos puntos arbitrarios $p, q \in S$ y tenga longitud $l(\gamma) > \pi/\sqrt{\delta}$ ya no es mínima; es decir, existe una curva parametrizada que une p y q cuya longitud es más pequeña que $l(\gamma)$.

Una vez se demuestra esto, se tiene entonces que cada geodésica mínima tiene longitud $l \leq \pi/\sqrt{\delta}$; por tanto, S está acotada en la distancia d . Como S es completa, S es compacta (corolario 2, sec. 5.3). A parte de este resultado, obsérvese que obtenemos una estimación del diámetro de S , a saber, $\rho(S) \leq \pi/\sqrt{\delta}$.

Para demostrar la afirmación precedente, necesitamos comparar la longitud de arco de una curva parametrizada con la longitud de arco de «curvas cercanas» a aquélla. Introduciremos, con este fin, una serie de ideas que van a ser útiles para otros problemas de la geometría diferencial. En realidad, estas ideas constituyen la adaptación, para los propósitos de la geometría diferencial, de conceptos más generales cuyos fundamentos pertenecen al cálculo de variaciones. No se necesitan conocimientos previos del cálculo de variaciones.

En esta sección, S denotará una superficie regular (no necesariamente completa).

Para empezar, introduciremos con precisión la idea de curvas cercanas a una curva dada.

DEFINICIÓN 1. Sea $\alpha: [0, l] \rightarrow S$ una curva parametrizada regular, donde el parámetro $s \in [0, l]$ es la longitud de arco. Una variación de α consiste en una aplicación diferenciable $h: [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ tal que

$$h(s, 0) = \alpha(s), \quad s \in [0, l].$$

Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, la curva $h_t: [0, l] \rightarrow S$, definida por $h_t(s) = h(s, t)$, se denomina una curva de la variación h . Se dice que una variación h es propia si

$$h(0, t) = \alpha(0), \quad h(l, t) = \alpha(l), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Una variación de α es, intuitivamente, una familia h_t de curvas que dependen con diferenciabilidad de un parámetro $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y de forma que h_0 coincide con α (fig. 5-13). La condición de ser propia significa que todas las curvas h_t tienen el mismo punto inicial $\alpha(0)$ y el mismo punto final $\alpha(l)$.

Es conveniente adoptar la siguiente notación. Las curvas parametrizadas de R^2 definidas por

$$s \rightarrow (s, t_0),$$

$$t \rightarrow (s_0, t),$$

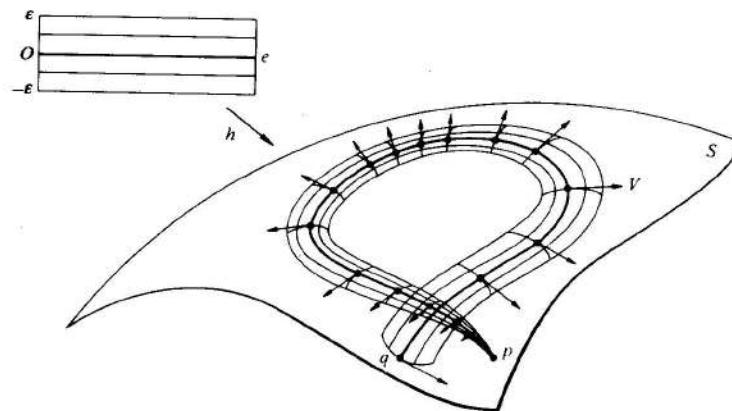


Figura 5-13

pasan por el punto $p_0 = (s_0, t_0) \in R^2$ y tienen a $(1, 0)$ y $(0, 1)$ como vectores tangentes en (s_0, t_0) . Sea $h: [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset R^2 \rightarrow S$ una aplicación diferenciable y $p_0 \in [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Entonces $dh_{p_0}(1, 0)$ es el vector tangente a la curva $s \rightarrow h(s, t_0)$ en $h(p_0)$ y $dh_{p_0}(0, 1)$ es el vector tangente a la curva $t \rightarrow h(s_0, t)$ en $h(p_0)$. Utilizaremos la notación

$$dh_{p_0}(1, 0) = \frac{\partial h}{\partial s}(p_0),$$

$$dh_{p_0}(0, 1) = \frac{\partial h}{\partial t}(p_0).$$

Recordamos que (cf. la sec. 4.4, def. 2) un campo vectorial w a lo largo de una curva $\alpha: I \rightarrow S$ es una correspondencia que asigna a cada $t \in I$ un vector $w(t)$ tangente a la superficie S en $\alpha(t)$. En consecuencia, $\partial h / \partial s$ y $\partial h / \partial t$ son campos vectoriales diferenciales tangentes a lo largo de α .

Se deduce entonces que una variación h de α determina, a lo largo de α , un campo vectorial diferenciable $V(s)$ definido por

$$V(s) = \frac{\partial h}{\partial t}(s, 0), \quad s \in [0, l].$$

Se dice que V es el *campo vectorial variacional* de h ; subrayamos que si h es propia, entonces

$$V(0) = V(l) = 0.$$

Esta terminología está justificada a causa de la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1. Si $V(s)$ es un campo vectorial diferenciable a lo largo de una curva parametrizada regular $\alpha: [0, l] \rightarrow S$ entonces existe una variación $h: [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ de α tal que $V(s)$ es el campo vectorial variacional de h . Además, si $V(0) = V(l) = 0$, es posible elegir h de forma que sea propia.

*Demuestra*o. Primero demostraremos que existe un $\delta > 0$ tal que si $|v| < \delta$, $v \in T_{\alpha(s)}(S)$, entonces $\exp_{\alpha(s)} v$ está bien definida para todo $s \in [0, l]$. En efecto, consideremos para cada $p \in \alpha([0, l]) \subset S$ el entorno W_p (un entorno normal de todos sus puntos) y el número $\delta_p > 0$ cuya existencia garantiza la prop. 1 de la sec. 4.7. La unión $\bigcup_p W_p$ recubre $\alpha([0, l])$ y, por compacidad, todavía recubren $\alpha([0, l])$ un número finito de ellos, por ejemplo, W_1, \dots, W_n . Sea $\delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_n)$, donde δ_i es el número correspondiente al entorno W_i , $i = 1, \dots, n$. Se comprueba fácilmente que δ satisface la condición precedente.

Sean ahora $M = \max_{s \in [0, l]} |V(s)|$, $\varepsilon < \delta/M$ y definamos

$$h(s, t) = \exp_{\alpha(s)} tV(s), \quad s \in [0, l], \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Está claro que h está bien definida. Como además

$$\exp_{\alpha(s)} tV(s) = \gamma(1, \alpha(s), tV(s)),$$

donde γ es la aplicación (diferenciable) del teorema 1 de la sec. 4.7 (es decir, para $t \neq 0$ y $V(s) \neq 0$, $\gamma(1, \alpha(s), tV(s))$ es la geodésica γ de condiciones iniciales $\gamma(0) = \alpha(s)$, $\gamma'(0) = V(s)$), entonces h es diferenciable. Se verifica inmediatamente que $h(s, 0) = \alpha(s)$. Finalmente, el campo vectorial variacional de h viene dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t}(s, 0) &= dh_{(s, 0)}(0, 1) = \frac{d}{dt} (\exp_{\alpha(s)} tV(s)) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \gamma(1, \alpha(s), tV(s)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \gamma(t, \alpha(s), V(s)) \Big|_{t=0} = V(s), \end{aligned}$$

y por la definición de h , está claro que si $V(0) = V(l) = 0$, entonces h es propia.

Q.E.D.

Ahora queremos comparar la longitud de arco de $\alpha (=h_0)$ con la longitud de arco de h_t . Definimos así la función $L: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$L(t) = \int_0^t \left| \frac{\partial h}{\partial s}(s, t) \right| ds, \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon). \quad (1)$$

El estudio de L en un entorno de $t = 0$ nos va a informar sobre el «comportamiento de la longitud arco» de las curvas cercanas a α .

Necesitamos algunos lemas preliminares.

LEMA 1. La función L definida en la ec. (1) es diferenciable en un entorno de $t = 0$: la derivada de L se puede obtener en dicho entorno derivando bajo el signo integral.

Demostración. Como $\alpha: [0, l] \rightarrow S$ está parametrizada por la longitud de arco,

$$\left| \frac{\partial h}{\partial s} \right| = \left| \frac{\partial h}{\partial s}(s, 0) \right| = 1.$$

De la compactidad de $[0, l]$ se deduce la existencia de un $\delta > 0$, $\delta \leq \varepsilon$, tal que

$$\left| \frac{\partial h}{\partial s}(s, t) \right| \neq 0, \quad s \in [0, l], \quad |t| < \delta.$$

Como el valor absoluto de una función diferenciable no nula es también diferenciable, el integrando de la ec. (1) es diferenciable para $|t| < \delta$. Por un teorema clásico del cálculo infinitesimal (véase R. C. Buck, *Advanced Calculus*, 1965, p. 120), concluimos que L es diferenciable para $|t| < \delta$ y que

$$L'(t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{\partial h}{\partial s}(s, t) \right| ds. \quad \text{Q.E.D.}$$

Los lemas 2, 3 y 4 que siguen a continuación tienen interés en sí mismos.

LEMA 2. Sea $w(t)$ un campo vectorial diferenciable a lo largo de la curva parametrizada $\alpha: [a, b] \rightarrow S$ y sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces

$$\frac{D}{dt} (f(t)w(t)) = f(t) \frac{Dw}{dt} + \frac{df}{dt} w(t).$$

Demostración. Basta con utilizar el hecho de que la derivada covariante es la componente tangencial de la derivada usual para concluir que (aquí $(\)_T$ denota la componente tangencial de $(\)$)

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} (f w) &= \left(\frac{df}{dt} w + f \frac{dw}{dt} \right)_T = \frac{df}{dt} w + f \left(\frac{dw}{dt} \right)_T \\ &= \frac{df}{dt} w + f \frac{Dw}{dt}. \end{aligned} \quad \text{Q.E.D.}$$

LEMA 3. Sean $v(t)$ y $w(t)$ campos vectoriales diferenciables a lo largo de la curva parametrizada $\alpha: [a, b] \rightarrow S$. Entonces

$$\frac{d}{dt} \langle v(t), w(t) \rangle = \left\langle \frac{Dv}{dt}, w(t) \right\rangle + \left\langle v(t), \frac{Dw}{dt} \right\rangle.$$

Demostración. Obtenemos, utilizando las observaciones precedentes

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle v, w \rangle &= \left\langle \frac{dv}{dt}, w \right\rangle + \left\langle v, \frac{dw}{dt} \right\rangle = \left\langle \left(\frac{dv}{dt} \right)_T, w \right\rangle + \left\langle v, \left(\frac{dw}{dt} \right)_T \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{Dv}{dt}, w \right\rangle + \left\langle v, \frac{Dw}{dt} \right\rangle. \end{aligned} \quad \text{Q.E.D.}$$

Antes de establecer el próximo lema es conveniente introducir la terminología siguiente. Sea $h: [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una aplicación diferenciable. Un campo vectorial diferenciable a lo largo de h es una aplicación diferenciable

$$V: [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$$

tal que $V(s, t) \in T_{h(s, t)}(S)$ para cada $(s, t) \in [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Esto constituye una generalización de la definición de campo vectorial diferenciable a lo largo de una curva parametrizada (sec. 4.4, def. 2).

Por ejemplo, son campos vectoriales a lo largo de h los campos vectoriales $(\partial h / \partial s)(s, t)$ y $(\partial h / \partial t)(s, t)$ que introdujimos antes.

Si restringimos $V(s, t)$ a las curvas $s = \text{const.}$, $t = \text{const.}$, obtenemos campos vectoriales a lo largo de curvas. En este contexto, la notación $(DV / \partial t)(s, t)$ significa la derivada covariante, en el plano (s, t) , de la restricción de $V(s, t)$ a la curva $s = \text{constante}$.

LEMA 4. Sea $h: [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una aplicación diferenciable. Entonces

$$\frac{D}{ds} \frac{\partial h}{\partial t}(s, t) = \frac{D}{dt} \frac{\partial h}{\partial s}(s, t).$$

Demostración. Sea $x: U \rightarrow S$ una parametrización de S en el punto $h(s, t)$, con parámetros u y v , y sea

$$u = h_1(s, t), \quad v = h_2(s, t)$$

la expresión de h en esta parametrización. Bajo estas condiciones, cuando $(s, t) \in h^{-1}(x(U)) = W$, la curva $h(s, t_0)$ puede expresarse mediante

$$u = h_1(s, t_0), \quad v = h_2(s, t_0).$$

Como $(\partial h/\partial s)(s_0, t_0)$ es tangente a la curva $h(s, t_0)$ en $s = s_0$, tenemos que

$$\frac{\partial h}{\partial s}(s_0, t_0) = \frac{\partial h_1}{\partial s}(s_0, t_0)\mathbf{x}_u + \frac{\partial h_2}{\partial s}(s_0, t_0)\mathbf{x}_v.$$

En virtud a la arbitrariedad de $(s_0, t_0) \in W$, concluimos que

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial h_1}{\partial s}\mathbf{x}_u + \frac{\partial h_2}{\partial s}\mathbf{x}_v,$$

donde, por simplicidad en la notación, omitimos el punto (s, t) .

Análogamente

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h_1}{\partial t}\mathbf{x}_u + \frac{\partial h_2}{\partial t}\mathbf{x}_v.$$

Vamos a calcular ahora las derivadas covariantes $(D/\partial s)(\partial h/\partial t)$ y $(D/\partial t)(\partial h/\partial s)$ utilizando las expresiones de la derivada covariante en términos de los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k (sec. 4.4, ec. (1)) para obtener la igualdad anunciada. En efecto, el coeficiente de \mathbf{x}_u en ambas derivadas viene dado por

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial s \partial t} + \Gamma_{11}^1 \frac{\partial h_1}{\partial t} \frac{\partial h_1}{\partial s} + \Gamma_{12}^1 \frac{\partial h_1}{\partial t} \frac{\partial h_2}{\partial s} + \Gamma_{12}^1 \frac{\partial h_2}{\partial t} \frac{\partial h_1}{\partial s} + \Gamma_{22}^1 \frac{\partial h_2}{\partial t} \frac{\partial h_2}{\partial s}.$$

Se obtiene con el mismo procedimiento, la igualdad de los coeficientes en \mathbf{x}_v . Concluye así la demostración.

Q.E.D.

Ya estamos en condiciones de calcular la derivada primera de L en $t = 0$. Obtenemos entonces la

PROPOSICIÓN 2. Sea $h: [0, l] \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ una variación propia de la curva $\alpha: [0, l] \rightarrow S$ y sea $V(s) = (\partial h/\partial t)(s, 0)$, $s \in [0, l]$ el campo variacional de h . Entonces

$$L'(0) = - \int_0^l \langle A(s), V(s) \rangle ds, \quad (2)$$

donde $A(s) = (D/\partial s)(\partial h/\partial s)(s, 0)$.

Demostración. Si t pertenece al intervalo $(-\delta, \delta)$, dado en el lema 1, entonces

$$L'(t) = \int_0^l \left\{ \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle^{1/2} \right\} ds.$$

Aplicando los lemas 3 y 4, obtenemos

$$L'(t) = \int_t^0 \frac{\left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle}{\left| \frac{\partial h}{\partial s} \right|} ds = \int_0^t \frac{\left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle}{\left| \frac{\partial h}{\partial s} \right|} ds.$$

Como $|\langle \partial h/\partial s \rangle(s, 0)| = 1$, tenemos que

$$L'(0) = \int_0^l \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle ds,$$

donde el integrando se calcula en $(s, 0)$, el cual se omite para simplificar la notación.

De acuerdo con el lema 3,

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{D}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} L'(0) &= \int_0^l \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle ds - \int_0^l \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle ds \\ &= - \int_0^l \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle ds, \end{aligned}$$

pues $(\partial h/\partial t)(0, 0) = (\partial h/\partial t)(l, 0) = 0$, en virtud al hecho de que la variación es propia. Recordando las definiciones de $A(s)$ y $V(s)$, podemos escribir la última expresión en la forma

$$L'(0) = - \int_0^l \langle A(s), V(s) \rangle ds.$$

Q.E.D.

Observación 1. El vector $A(s)$ se denomina el *vector aceleración* de la curva α , y su norma no es otra cosa que el valor absoluto de la curvatura geodésica de α . Obsérvese que $L'(0)$ sólo depende del campo variacional $V(s)$ y no de la propia variación h . Es habitual referirse a la expresión (2) como la *fórmula para la primera variación* de la longitud de arco de la curva α .

Observación 2. La condición de que h es propia solamente se utilizó al final de la demostración para eliminar los términos

$$\left\langle \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle(l, 0) - \left\langle \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle(0, 0).$$

En consecuencia, si h no es propia, obtenemos una fórmula similar a la ec. (2) que contiene además estos términos de contorno.

Una consecuencia interesante de la prop. 2 es una caracterización de las geodésicas como soluciones de un «problema variacional». Concretamente,

PROPOSICIÓN 3. Una curva parametrizada regular $\alpha: [0, l] \rightarrow S$, donde el parámetro $s \in [0, l]$ es la longitud de arco de α , es una geodésica si y sólo si, para cada variación propia $h: [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ de α , $L'(0) = 0$.

Demostración. La necesidad es trivial, pues el vector aceleración $A(s) = (D/\partial s)(\partial\alpha/\partial s)$ de una geodésica α es idénticamente cero. Por tanto, $L'(0) = 0$ para cada variación propia.

Supongamos ahora que $L'(0) = 0$ para cada variación propia de α y consideremos el campo vectorial $V(s) = f(s)A(s)$, donde $f: [0, l] \rightarrow R$ es una función real diferenciable, con $f(s) \geq 0$, $f(0) = f(l) = 0$ y $A(s)$ es el vector aceleración de α . Construyendo una variación asociada a $V(s)$ tenemos que

$$\begin{aligned} L'(0) &= - \int_0^l \langle f(s)A(s), A(s) \rangle ds \\ &= - \int_0^l f(s)|A(s)|^2 ds = 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, como $f(s)|A(s)|^2 \geq 0$, obtenemos

$$f(s)|A(s)|^2 \equiv 0.$$

Vamos a demostrar que esta relación implica que $A(s) = 0$, $s \in [0, l]$. En efecto, si $|A(s_0)| \neq 0$, $s_0 \in (0, l)$, existe un intervalo $I = (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$ tal que $|A(s)| \neq 0$ para $s \in I$. Elijiendo f de forma que $f(s_0) > 0$, contradecimos el hecho de que $f(s_0)|A(s_0)| = 0$. En consecuencia $|A(s)| = 0$ cuando $s \in (0, l)$. Por continuidad, $A(0) = A(l) = 0$, como anunciamos en un principio.

Al ser idénticamente cero el vector aceleración de α , entonces α es una geodésica. **Q.E.D.**

De ahora en adelante, únicamente consideraremos variaciones propias de geodésicas $\gamma: [0, l] \rightarrow S$ parametrizadas por la longitud de arco; es decir, supondremos que $L'(0) = 0$: Para simplificar los cálculos, nos limitaremos al caso de las *variaciones ortogonales*; es decir, admitiremos que el campo variacional $V(s)$ satisface la condición $\langle V(s), \gamma'(s) \rangle = 0$, $s \in [0, l]$. Ahora calcularemos $L''(0)$ para estudiar el comportamiento de L en un entorno de 0.

Para efectuar este cálculo, necesitamos algunos lemas que relacionan la curvatura gaussiana con la derivada covariante.

LEMA 5. Sea $x: U \rightarrow S$ una parametrización en un punto $p \in S$ de una superficie regular S , con parámetros u y v , y sea K la curvatura gaussiana de S . Entonces

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} x_u - \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} x_u = K(x_u \wedge x_v) \wedge x_u.$$

Demostración. Observando que la derivada covariante es la componente de la derivada usual en el plano tangente, tenemos que (sec. 4.3)

$$\frac{\partial}{\partial u} x_u = \Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v.$$

Aplicándole a esta expresión la fórmula de la derivada covariante (sec. 4.4, ec. (1)), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial}{\partial u} x_u \right) &= \{(\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2\} x_u \\ &\quad + \{(\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{11}^2\} x_v. \end{aligned}$$

Por medio de un cálculo similar podemos verificar que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial}{\partial v} x_u \right) &= \{(\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2\} x_u \\ &\quad + \{(\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2\} x_v. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} x_u - \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} x_u &= \{(\Gamma_{11}^1)_v - (\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2\} x_u \\ &\quad + \{(\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{11}^2 \\ &\quad - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1\} x_v. \end{aligned}$$

Utilizamos ahora las expresiones de la curvatura en términos de los símbolos de Christoffel (sec. 4.3, ecs. (5) y (5a)) y concluimos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} x_u - \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} x_u &= -FKx_u + EKx_v \\ &= K\{\langle x_u, x_u \rangle x_v - \langle x_u, x_v \rangle x_u\} \\ &= K(x_u \wedge x_v) \wedge x_u. \end{aligned} \quad \text{Q.E.D.}$$

LEMA 6. Sea $h: [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una aplicación diferenciable y sea $V(s, t)$, $(s, t) \in [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, un campo diferenciable a lo largo de h . Entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} V - \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} V = K(s, t) \left(\frac{\partial h}{\partial s} \wedge \frac{\partial h}{\partial t} \right) \wedge V,$$

donde $K(s, t)$ es la curvatura de S en el punto $h(s, t)$.

Demostración. Sea $x(u, v)$ un sistema de coordenadas de S en torno a $h(s, t)$ y sea

$$V(s, t) = a(s, t)x_u + b(s, t)x_v$$

la expresión de $V(s, t) = V$ en dicho sistema de coordenadas. Por el lema 2 tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial s} V &= \frac{D}{\partial s}(ax_u + bx_v) \\ &= a\frac{\partial}{\partial s}x_u + b\frac{\partial}{\partial s}x_v + \frac{\partial a}{\partial s}x_u + \frac{\partial b}{\partial s}x_v.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}V &= a\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}x_u + b\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}x_v + \frac{\partial a}{\partial s}\frac{D}{\partial t}x_u \\ &\quad + \frac{\partial b}{\partial s}\frac{D}{\partial t}x_v + \frac{\partial a}{\partial t}\frac{D}{\partial s}x_u + \frac{\partial b}{\partial t}\frac{D}{\partial s}x_v + \frac{\partial^2 a}{\partial t\partial s}x_u + \frac{\partial^2 b}{\partial t\partial s}x_v.\end{aligned}$$

Mediante un cálculo análogo obtenemos una fórmula para $(D/\partial s)(D/\partial t)V$, cuya expresión se obtiene al intercambiar s y t en la fórmula precedente. Se deduce entonces que

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}V - \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}V &= a\left(\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}x_u - \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}x_u\right) \\ &\quad + b\left(\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}x_v - \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}x_v\right).\end{aligned}\tag{3}$$

Para calcular $(D/\partial t)(D/\partial s)x_u$, tendremos en cuenta la expresión de h

$$u = h_1(s, t), \quad v = h_2(s, t),$$

en la parametrización $\mathbf{x}(u, v)$, escribiendo

$$\mathbf{x}_u(u, v) = \mathbf{x}_u(h_1(s, t), h_2(s, t)) = \mathbf{x}_u.$$

Como la derivada covariante $(D/\partial s)\mathbf{x}_u$ es la proyección sobre el plano tangente de la derivada usual $(d/ds)\mathbf{x}_u$, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial s}\mathbf{x}_u &= \left\{ \frac{d}{ds}\mathbf{x}_u \right\}_T = \left\{ \mathbf{x}_{uu}\frac{\partial h_1}{\partial s} + \mathbf{x}_{uv}\frac{\partial h_2}{\partial s} \right\}_T \\ &= \frac{\partial h_1}{\partial s}\{\mathbf{x}_{uu}\}_T + \frac{\partial h_2}{\partial s}\{\mathbf{x}_{uv}\}_T \\ &= \frac{\partial h_1}{\partial s}\frac{D}{\partial u}\mathbf{x}_u + \frac{\partial h_2}{\partial s}\frac{D}{\partial v}\mathbf{x}_u,\end{aligned}$$

donde T denota la proyección de un vector sobre el plano tangente.

Con la misma notación obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\mathbf{x}_u &= \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial h_1}{\partial s}\frac{D}{\partial u}\mathbf{x}_u + \frac{\partial h_2}{\partial s}\frac{D}{\partial v}\mathbf{x}_u \right) \right\}_T = \frac{\partial^2 h_1}{\partial t\partial s}\frac{D}{\partial u}\mathbf{x}_u \\ &\quad + \frac{\partial^2 h_2}{\partial t\partial s}\frac{D}{\partial v}\mathbf{x}_u + \frac{\partial h_1}{\partial s}\left(\frac{\partial h_1}{\partial t}\frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial u}\mathbf{x}_u + \frac{\partial h_2}{\partial t}\frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u}\mathbf{x}_u \right) \\ &\quad + \frac{\partial h_2}{\partial s}\left(\frac{\partial h_1}{\partial t}\frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial v}\mathbf{x}_u + \frac{\partial h_2}{\partial t}\frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u}\mathbf{x}_u \right).\end{aligned}$$

De manera análoga obtenemos la expresión de $(D/\partial s)(D/\partial t)\mathbf{x}_u$, la cual se obtiene intercambiando s y t en la última fórmula. Se deduce entonces que

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\mathbf{x}_u - \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\mathbf{x}_u &= \frac{\partial h_2}{\partial s}\frac{\partial h_1}{\partial t}\left(\frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial v}\mathbf{x}_u - \frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u}\mathbf{x}_u \right) \\ &\quad + \frac{\partial h_1}{\partial s}\frac{\partial h_2}{\partial t}\left(\frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u}\mathbf{x}_u - \frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial v}\mathbf{x}_u \right) \\ &= \Delta\left(\frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u}\mathbf{x}_u - \frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial v}\mathbf{x}_u \right),\end{aligned}$$

donde

$$\Delta = \left(\frac{\partial h_1}{\partial s}\frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{\partial h_2}{\partial s}\frac{\partial h_1}{\partial t} \right).$$

Al reemplazar en la última expresión \mathbf{x}_u por \mathbf{x}_v , obtenemos

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\mathbf{x}_v - \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\mathbf{x}_v = \Delta\left(\frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u}\mathbf{x}_v - \frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial v}\mathbf{x}_v \right).$$

Introduciendo esta expresión en la ec. (3) y utilizando el lema 5, concluimos que

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}V - \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}V &= a\Delta K(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \wedge \mathbf{x}_u + b\Delta K(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \wedge \mathbf{x}_v \\ &= K(\Delta\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \wedge (a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v).\end{aligned}$$

Por otra parte, como vimos en la demostración del lema 4,

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial h_1}{\partial s}\mathbf{x}_u + \frac{\partial h_2}{\partial s}\mathbf{x}_v, \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h_1}{\partial t}\mathbf{x}_u + \frac{\partial h_2}{\partial t}\mathbf{x}_v;$$

de donde,

$$\frac{\partial h}{\partial s} \wedge \frac{\partial h}{\partial t} = \Delta\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v.$$

Por lo tanto,

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}V - \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}V = K\left(\frac{\partial h}{\partial s} \wedge \frac{\partial h}{\partial t} \right) \wedge V. \quad \text{Q.E.D.}$$

Ahora ya estamos en condiciones de calcular $L''(0)$.

PROPOSICIÓN 4. Sea $h: [0, l] \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ una variación ortogonal propia de una geodésica $\gamma: [0, l] \rightarrow S$, parametrizada por la longitud de arco $s \in [0, l]$. Sea $V(s) = (\partial h / \partial t)(s, 0)$ el campo vectorial variacional de h . Entonces

$$L''(0) = \int_0^l \left(\left| \frac{D}{ds} V(s) \right|^2 - K(s) |V(s)|^2 \right) ds, \quad (4)$$

donde $K(s) = K(s, 0)$ es la curvatura gaussiana de S en $\gamma(s) = h(s, 0)$.

Demostración. Como vimos en la demostración de la prop. 2,

$$L'(t) = \int_0^l \frac{\left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle}{\left\langle \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle^{1/2}} ds$$

para t recorriendo el intervalo $(-\delta, \delta)$ dado por el lema 1. Obtenemos, derivando la expresión precedente,

$$\begin{aligned} L''(t) &= \int_0^l \frac{\left(\frac{d}{dt} \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle \right) \left\langle \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle^{1/2}}{\left\langle \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle} ds \\ &\quad + \int_0^l \frac{\left(\left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle \right)^2}{\left| \frac{\partial h}{\partial s} \right|^{3/2}} ds. \end{aligned}$$

Ahora obsérvese que, para $t = 0$, $\left|(\partial h / \partial s)(s, 0)\right| = 1$. Además,

$$\frac{d}{ds} \left\langle \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{D}{ds} \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle.$$

Como γ es una geodésica, $(D/\partial s)(\partial h / \partial s) = 0$ para $t = 0$, y como la variación es ortogonal,

$$\left\langle \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle = 0 \quad \text{para } t = 0.$$

Se deduce entonces que

$$L''(0) = \int_0^l \frac{d}{dt} \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle ds, \quad (5)$$

en donde el integrando se ha evaluado en $(s, 0)$.

Transformemos ahora el integrando de la Ec. (5) para expresarlo de una manera más adecuada. Primero obsérvese que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle &= \left\langle \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle + \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{D}{dt} \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle - \left\langle \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle + \left| \frac{D}{ds} \frac{\partial h}{\partial t} \right|^2. \end{aligned}$$

Por otra parte, para $t = 0$,

$$\frac{d}{ds} \left\langle \frac{D}{dt} \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle,$$

pues, debido al hecho de que γ es una geodésica, $(D/\partial s)(\partial h / \partial s)(s, 0) = 0$. Además, en virtud al lema 6 y al hecho de que la variación es ortogonal, obtenemos (para $t = 0$)

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle - \left\langle \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle &= K(s) \left\langle \left(\frac{\partial h}{\partial s} \wedge \frac{\partial h}{\partial t} \right) \wedge \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle \\ &= -K(s) \left\langle |V(s)|^2 \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle \\ &= -K |V(s)|^2. \end{aligned}$$

Al introducir estos valores en la ec. (5), tenemos

$$\begin{aligned} L''(0) &= \int_0^l \left(-K(s) |V(s)|^2 + \left| \frac{D}{ds} V(s) \right|^2 \right) ds \\ &\quad + \left\langle \frac{D}{dt} \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle(l, 0) - \left\langle \frac{D}{dt} \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle(0, 0). \end{aligned}$$

Finalmente, como la variación es propia, $(\partial h / \partial t)(0, t) = (\partial h / \partial t)(l, t) = 0$, $t \in (-\delta, \delta)$. Por tanto,

$$L''(0) = \int_0^l \left(\left| \frac{D}{ds} V(s) \right|^2 - K |V(s)|^2 \right) ds. \quad \text{Q.E.D.}$$

Observación 3. Se conoce a la expresión (4) como la *fórmula de la segunda variación de la longitud de arco* de γ . Obsérvese que sólo depende del campo variacional de h y no de la propia variación h . Algunas veces resulta conveniente indicar esta dependencia escribiendo $L'_V(0)$.

Observación 4. Con frecuencia es conveniente expresar la fórmula (4) de la segunda variación en los términos siguientes:

$$L''(0) = \int_0^l \left\langle \frac{D^2 V}{ds^2} + KV, V \right\rangle ds. \quad (4a)$$

La ec. (4a) proviene de la ec. (4) observando que $V(0) = V(l) = 0$ y que

$$\frac{d}{ds} \left\langle V, \frac{DV}{ds} \right\rangle = \left\langle \frac{DV}{ds}, \frac{DV}{ds} \right\rangle + \left\langle V, \frac{D^2V}{ds^2} \right\rangle.$$

Así

$$\begin{aligned} \int_0^l \left(\left\langle \frac{DV}{ds}, \frac{DV}{ds} \right\rangle - K \langle V, V \rangle \right) ds &= \left[\left\langle V, \frac{DV}{ds} \right\rangle \right]_0^l \\ &\quad - \int_0^l \left\langle \frac{D^2V}{ds^2} + KV, V \right\rangle ds \\ &= - \int_0^l \left\langle \frac{D^2V}{ds^2} + KV, V \right\rangle ds. \end{aligned}$$

La segunda variación $L''(0)$ de la longitud de arco es la herramienta que necesitamos para demostrar el paso crucial, ya mencionado al principio de esta sección, del teorema de Bonnet. Podemos demostrar ya el

TEOREMA (Bonnet). Admitamos que la curvatura gaussiana K de una superficie completa S satisface la condición

$$K \geq \delta > 0.$$

Entonces S es compacta y el diámetro ϱ de S satisface la desigualdad

$$\varrho \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

Demostración. Como S es completa, dados dos puntos $p, q \in S$, existe, en virtud al teorema de Hopf-Rinow, una geodésica mínima γ de S que une p y q . Demostraremos que la longitud $l = d(p, q)$ de esta geodésica satisface la desigualdad

$$l \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

Supondremos que $l > \pi/\sqrt{\delta}$ y consideraremos una variación de la geodésica $\gamma: [0, l] \rightarrow S$, definida como sigue. Sea w_0 un vector unitario de $T_{\gamma(0)}(S)$ tal que $\langle w_0, \gamma'(0) \rangle = 0$ y sea $w(s)$, $s \in [0, l]$, el transporte paralelo de w_0 a lo largo de γ . Está claro que $|w(s)| = 1$ y que $\langle w(s), \gamma'(s) \rangle = 0$, $s \in [0, l]$. Consideraremos el campo vectorial $V(s)$ definido por

$$V(s) = w(s) \operatorname{sen} \frac{\pi}{l} s, \quad s \in [0, l].$$

Como $V(0) = V(l) = 0$ y $\langle V(s), \gamma'(s) \rangle = 0$, el campo vectorial $V(s)$ determina una variación ortogonal propia de γ . Por la prop. 4,

$$L_V''(0) = \int_0^l \left(\left| \frac{D}{ds} V(s) \right|^2 - K(s) |V(s)|^2 \right) ds.$$

Como $w(s)$ es un campo vectorial paralelo,

$$\frac{D}{ds} V(s) = \left(\frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi}{l} s \right) w(s).$$

Así, al ser $l > \pi/\sqrt{\delta}$, como $K \geq \delta > \pi^2/l^2$ obtenemos

$$\begin{aligned} L_V''(0) &= \int_0^l \left(\frac{\pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{\pi}{l} s - K \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{l} s \right) ds \\ &< \int_0^l \frac{\pi^2}{l^2} \left(\cos^2 \frac{\pi}{l} s - \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{l} s \right) ds \\ &= \frac{\pi^2}{l^2} \int_0^l \cos \frac{2\pi}{l} s ds = 0. \end{aligned}$$

Existe, por tanto, una variación de γ para la que $L''(0) < 0$. Sin embargo, como γ es una geodésica mínima, su longitud es menor o igual que la de cualquier curva que une p y q . Así, para cada variación de γ se debería cumplir $L'(0) = 0$ y $L''(0) \geq 0$. Obtenemos, por tanto, una contradicción, lo que prueba que $l = d(p, q) \leq \pi/\sqrt{\delta}$, como habíamos afirmado en un principio.

Como $d(p, q) \leq \pi/\sqrt{\delta}$ para cualquier pareja dada de puntos de S , tenemos que S está acotada y que su diámetro $\varrho \leq \pi/\sqrt{\delta}$. Además, como S es completa y acotada, S es compacta. Q.E.D.

Observación 5. La elección de la variación $V(s) = w(s) \operatorname{sen}(\pi/l)s$ en la demostración precedente puede comprenderse mejor si nos fijamos en la forma (4a) de la segunda variación, introducida en la observación 4. Al ser $K > l^2/\pi^2$, podemos escribir

$$\begin{aligned} L_V''(0) &= - \int_0^l \left\langle V, \frac{D^2V}{ds^2} + \frac{\pi^2}{l^2} V \right\rangle ds - \int_0^l \left(K - \frac{\pi^2}{l^2} \right) |V|^2 ds \\ &< - \int_0^l \left\langle V, \frac{D^2V}{ds^2} + \frac{\pi^2}{l^2} V \right\rangle ds. \end{aligned}$$

Es fácil ahora comprender el por qué de la elección de $V(s)$: anular la última integral. De esta forma, $L_V''(0) < 0$.

Observación 6. La hipótesis $K \geq \delta > 0$ no puede debilitarse a $K > 0$. En efecto, el paraboloide

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 + y^2\}$$

tiene curvatura gaussiana $K > 0$, es completa y no es compacta. Obsérvese que la curvatura del paraboloide tiende a cero cuando la distancia del punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ al origen $(0, 0)$ se hace arbitrariamente grande (cf. más adelante la observación 8).

Observación 7. Como muestra el ejemplo de la esfera; donde $K = 1$ y $\varrho = \pi$, la estimación del diámetro $\varrho \leq \pi/\sqrt{\delta}$ dada en el teorema de Bonnet es la mejor posible.

Observación 8. La primera demostración del teorema precedente fue obtenida por O. Bonnet, «Sur quelque propriétés des lignes géodésiques», *C. R. Ac. Sc. Paris XL* (1850), 1331 y «Note sur les lignes géodésiques», *ibid.*, XLI (1851), 32. Una formulación del teorema, en términos de superficies completas, puede encontrarse en el artículo de Hopf-Rinow ya citado en la sección previa. En realidad, no es necesario que K esté acotada inferiormente lejos de cero sino que no se aproxime muy rápidamente a cero. Véase E. Calabi, «On Ricci Curvature and Geodesics», *Duke Math. J.* 34 (1967), 667-676; o R. Schneider, «Konvexe Flächen mit langsam abnehmender Krümmung», *Archiv der Math.* 23 (1972), 650-654 (cf. también el ejercicio 2 más abajo).

EJERCICIOS

1. ¿Es cierto el recíproco del teorema de Bonnet? Es decir, si S es compacta y tiene diámetro $\varrho \leq \pi/\sqrt{\delta}$, ¿se cumple que $K \geq \delta$?
- *2. **Observación de Kazdan-Warner** (cf. el ejercicio 10, sec. 5.10). Sea $S = \{z = f(x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ una superficie regular no compacta y completa. Demuéstrese que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\inf_{x^2+y^2 \geq r} K(x, y)) \leq 0.$$

3. a. Dedúzcase una fórmula para la primera variación de la longitud de arco sin suponer que la variación es propia.
- b. Sea S una superficie completa. Sea $\gamma(s)$, $s \in R$, una geodésica de S y sea $d(s)$ la distancia $d(\gamma(s), p)$ de $\gamma(s)$ a un punto $p \in S$ que no pertenece a la traza de γ . Demuéstrese que existe un punto $s_0 \in R$ tal que $d(s_0) \leq d(s)$ para todo $s \in R$ y que la geodésica Γ que une p y $\gamma(s_0)$ es perpendicular a γ (Fig. 5-14).
- c. **Cálculo de variaciones.** Las geodésicas constituyen un caso particular de soluciones de un problema variacional. En este ejercicio discutiremos algunos puntos de un problema variacional simple, aunque bastante representativo. En el próximo ejercicio desarrollaremos algunas aplicaciones de las ideas que aquí se presentan.

Sea $y = y(x)$, $x \in [x_1, x_2]$ una curva diferenciable del plano xy y consideremos una variación de y definida por la aplicación $y = y(x, t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Aquí $y(x, 0) = y(x)$ para

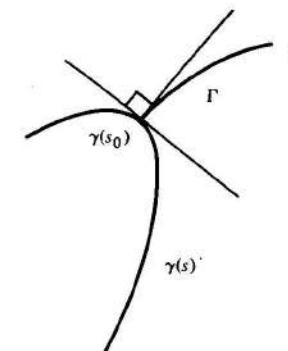


Figura 5-14

todo $x \in [x_1, x_2]$ e $y(x_1, t) = y(x_1)$, $y(x_2, t) = y(x_2)$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ (es decir, son fijos los extremos de la variación). Considérese la integral

$$I(t) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x, t), y'(x, t)) dx, \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

donde $F(x, y, y')$ es una función diferenciable de las tres variables e $y' = \partial y / \partial x$. Se llama *problema variacional con integrando F* al problema de hallar los puntos críticos de $I(t)$.

- a. Admitamos que la curva $y = y(x)$ es un punto crítico de $I(t)$; es decir, $dI/dt = 0$ para $t = 0$. Utilícese la integración por partes para concluir que ($I = dI/dt$)

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_{x_1}^{x_2} \left(F_y \frac{\partial y}{\partial t} + F_{y'} \frac{\partial y'}{\partial t} \right) dx \\ &= \left[\frac{\partial y}{\partial t} F_y \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial y}{\partial t} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) dx. \end{aligned}$$

Obtenemos entonces, utilizando las condiciones de contorno,

$$0 = I(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \eta \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \right\} dx, \quad (*)$$

donde $\eta = (\partial y / \partial t)(x, 0)$; la función η corresponde al campo vectorial variacional de $y(x, t)$.

- b. Demuéstrese que si $I(0) = 0$ para todas las variaciones con extremos fijos (es decir, para toda η en $(*)$ con $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, entonces

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \quad (**)$$

La ecuación $(**)$ se denomina la *ecuación de Euler-Lagrange* para el problema variacional de integrando F .

- c. Demuéstrese que si F no contiene explícitamente a la variable x , es decir, $F = F(y, y')$, entonces, derivando $y'F_y - F$ y utilizando (**) obtenemos que

$$y'F_y - F = \text{const.}$$

5. Cálculo de variaciones; aplicaciones.

- a. *Superficies de revolución de área mínima.* Sea S la superficie de revolución que se genera al rotar la curva $y = f(x)$, $x \in [x_1, x_2]$, alrededor del eje x . Supongamos que S tiene la menor área entre las superficies de revolución generadas por curvas que unen $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$. Consecuentemente, $y = f(x)$ minimiza la integral (cf. el ejercicio 11, sec. 2.5)

$$I(t) = \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + (y')^2} dx$$

para todas las variaciones $y = y(x, t)$ de y con extremos $y(x_1)$ e $y(x_2)$ fijos. Por la parte b del ejercicio 4, $F(y, y') = y\sqrt{1 + (y')^2}$ satisface la ecuación de Euler-Lagrange (**). Utilícese la parte c del ejercicio 4 para obtener que

$$y'F_y - F = -\frac{y}{\sqrt{1 + (y')^2}} = -\frac{1}{c}, \quad c = \text{const.};$$

de donde,

$$y = \frac{1}{c} \cosh(cx + c_1), \quad c_1 = \text{const.}$$

Concluye que si existe una superficie regular de revolución con área mínima que conecta dos círculos paralelos dados, esta superficie es el catenoides que contiene a dichos círculos como paralelos.

- b. *Geodésicas en superficies de revolución.* Sea

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$$

una parametrización de una superficie de revolución S . Sea $u = u(v)$ la ecuación de una geodésica de S que no es ni un paralelo ni un meridiano. Entonces $u = u(v)$ es un punto crítico para la integral de la longitud de arco ($F = 0$)

$$\int \sqrt{E(u')^2 + G} dv, \quad u' = \frac{du}{dv}.$$

Ya que $E = f^2$, $G = (f')^2 + (g')^2$, comprobamos que la ecuación de Euler-Lagrange para este problema variacional es

$$F_u - \frac{d}{dv}F_{u'} = 0, \quad F = \sqrt{f^2(u')^2 + (f')^2 + (g')^2}.$$

Nótese que F no depende de u . Por tanto, $(d/dv)F_{u'} = 0$ y

$$c = \text{const.} = F_{u'} = \frac{u'f^2}{\sqrt{f^2(u')^2 + (f')^2 + (g')^2}}.$$

Obtégase a partir de aquí la siguiente ecuación para la geodésica $u = u(v)$ (cf. el ejemplo 5, sec. 4.4):

$$u = c \int \frac{1}{f} \frac{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}}{f^2 - c^2} dv + \text{const.}$$

5.5. Campos de Jacobi y puntos conjugados

En esta sección vamos a explorar algunos aspectos de las técnicas variacionales que se utilizaron en la demostración del teorema de Bonnet.

Estamos interesados en obtener información sobre el comportamiento de las geodésicas cercanas a una geodésica dada γ . La manera natural de proceder consiste en considerar aquellas variaciones γ que satisfagan además la condición de que las propias curvas de la variación sean geodésicas. El campo variacional de una variación de este tipo da una idea sobre la densidad con la que están distribuidas las geodésicas en un entorno de γ .

Para simplificar la exposición supondremos que las superficies son completas, aunque esta suposición se puede suprimir a costa de invertir más trabajo. La notación $\gamma: [0, l] \rightarrow S$ va a representar una geodésica parametrizada por la longitud de arco sobre la superficie completa S .

DEFINICION 1. Sea $\gamma: [0, l] \rightarrow S$ una geodésica parametrizada en S y sea $h: [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una variación de γ tal que para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ la curva $h_t(s) = h(s, t)$, $s \in [0, l]$, es una geodésica parametrizada (no necesariamente por la longitud de arco). El campo variacional $(\partial h / \partial t)(s, 0) = J(s)$ se denomina un campo de Jacobi a lo largo de γ .

Un ejemplo trivial de campo de Jacobi lo proporciona el campo $\gamma'(s)$, $s \in [0, l]$, de los vectores tangentes a la geodésica γ . En efecto, tomando $h(s, t) = \gamma(s + t)$ tenemos

$$J(s) = \frac{\partial h}{\partial t}(s, 0) = \frac{d\gamma}{ds}.$$

En particular, estamos interesados en el estudio del comportamiento de las geodésicas cercanas a $\gamma: [0, l] \rightarrow S$, que comienzan en $\gamma(0)$. Así, consideraremos variaciones $h: [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ que satisfacen la condición $h(0, t) = \gamma(0)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Por lo tanto, el campo de Jacobi correspondiente satisface la condición $J(0) = 0$ (véase la fig. 5-15).

Antes de presentar un ejemplo no trivial de campo de Jacobi, demostraremos que tales campos se pueden caracterizar mediante una condición analítica.

PROPOSICION 1. Sea $J(s)$ un campo de Jacobi a lo largo de $\gamma: [0, l] \rightarrow S$, $s \in [0, l]$. Entonces J satisface la que se denomina ecuación de Jacobi

$$\frac{D}{ds} \frac{D}{ds} J(s) + K(s)(\gamma'(s) \wedge J(s)) \wedge \gamma'(s) = 0, \quad (1)$$

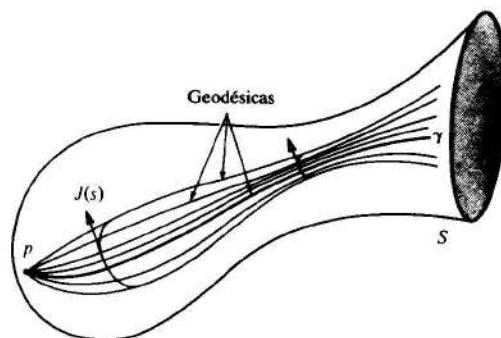


Figura 5-15

donde $K(s)$ es la curvatura gaussiana de S en $\gamma(s)$.

Demostración. Por la definición de $J(s)$, existe una variación

$$h: [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$$

de γ tal que $(dh/\partial t)(s, 0) = J(s)$ y $h_t(s)$ es una geodésica, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Se deduce entonces que $(D/\partial s)(\partial h/\partial s)(s, t) = 0$. Por lo tanto,

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial s}(s, t) = 0, \quad (s, t) \in [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Por otra parte, utilizando el lema 6 de la sec. 5.4 tenemos

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial s} + K(s, t) \left(\frac{\partial h}{\partial s} \wedge \frac{\partial h}{\partial t} \right) \wedge \frac{\partial h}{\partial s} = 0.$$

Como $(D/\partial t)(\partial h/\partial s) = (D/\partial s)(\partial h/\partial t)$, tenemos, para $t = 0$,

$$\frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial s} J(s) + K(s)(\gamma'(s) \wedge J(s)) \wedge \gamma'(s) = 0. \quad \text{Q.E.D.}$$

Para evaluar algunas de las consecuencias de la prop. 1 es conveniente escribir la ecuación de Jacobi (1) de una manera más familiar. Para ello, sean $e_1(0)$ y $e_2(0)$ vectores unitarios ortogonales del plano tangente $T_{\gamma(0)}(S)$ y sean $e_1(s)$ y $e_2(s)$, respectivamente, el transporte paralelo de $e_1(0)$ y $e_2(0)$ a lo largo de $\gamma(s)$.

Admitamos que

$$J(s) = a_1(s)e_1(s) + a_2(s)e_2(s)$$

para algunas funciones $a_1 = a_1(s)$, $a_2 = a_2(s)$. Entonces, utilizando el lema 2 de la última sección y suprimiendo s para simplificar la notación, obtenemos

$$\frac{D}{\partial s} J = a'_1 e_1 + a'_2 e_2,$$

$$\frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial s} J = a''_1 e_1 + a''_2 e_2.$$

Por otra parte, si escribimos

$$(\gamma' \wedge J) \wedge \gamma' = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2,$$

tenemos

$$\begin{aligned} \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 &= (\gamma' \wedge (a_1 e_1 + a_2 e_2)) \wedge \gamma' \\ &= a_1 (\gamma' \wedge e_1) \wedge \gamma' + a_2 (\gamma' \wedge e_2) \wedge \gamma'. \end{aligned}$$

En consecuencia, haciendo $\langle (\gamma' \wedge e_i) \wedge \gamma', e_j \rangle = a_{ij}$, $i, j = 1, 2$, obtenemos

$$\lambda_1 = a_1 a_{11} + a_2 a_{21}, \quad \lambda_2 = a_1 a_{12} + a_2 a_{22}.$$

La ec. (1) puede escribirse entonces en la forma

$$\begin{aligned} a''_1 + K(a_{11} a_1 + a_{21} a_2) &= 0, \\ a''_2 + K(a_{12} a_1 + a_{22} a_2) &= 0, \end{aligned} \tag{1a}$$

en donde todos los elementos son funciones de s . Nótese que (1a) es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. Las soluciones $(a_1(s), a_2(s)) = J(s)$ de tal sistema están definidas para cada $s \in [0, l]$ y constituyen un espacio vectorial. Además, una solución $J(s)$ de (1a) (o (1)) está completamente determinada por las condiciones iniciales $J(0)$, $(DJ/\partial s)(0)$ y el espacio de las soluciones tiene dimensión $2 \times 2 = 4$.

Se puede demostrar que cada campo vectorial $J(s)$ que, a lo largo de una geodésica $\gamma: [0, l] \rightarrow S$, satisface la ec. (1) es, de hecho, un campo de Jacobi. Como únicamente estamos interesados en campos de Jacobi $J(s)$ que satisfagan $J(0) = 0$, sólamente demostraremos la proposición para este caso particular.

Utilizaremos la siguiente notación. Sea $T_p(S)$, $p \in S$, el plano tangente a S en el punto p ; denotamos por $(T_p(S))_v$ el plano tangente en v de $T_p(S)$, considerando este último plano como superficie en R^3 . Como $\exp_p: T_p(S) \rightarrow S$,

$$d(\exp_p)_v: (T_p(S))_v \longrightarrow T_{\exp_p(v)}(S).$$

Con frecuencia cometemos el siguiente abuso de notación: si $v, w \in T_p(S)$, entonces w también representa el vector de $(T_p(S))_v$, que se obtiene a partir de w mediante la traslación de vector v (véase la fig. 5-16). Esto equivale a identificar los espacios $T_p(S)$ y $(T_p(S))_v$ a través de la traslación de vector v .

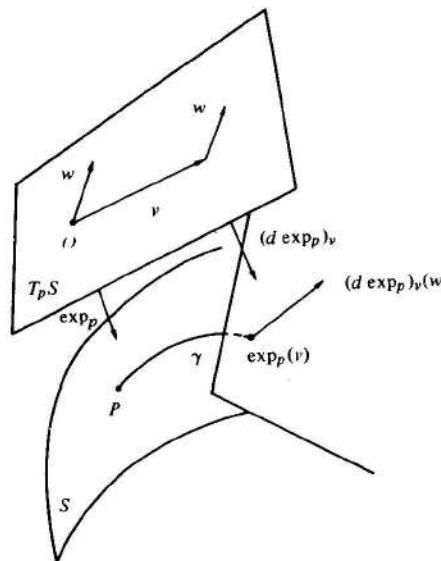


Figura 5-16

LEMÁ 1. Sea $p \in S$ y elegimos $v, w \in T_p(S)$, con $|v| = l$. Sea $\gamma: [0, l] \rightarrow S$ la geodésica de S definida por

$$\gamma(s) = \exp_p(sv), \quad s \in [0, l].$$

Entonces, el campo vectorial $J(s)$, definido a lo largo de γ por

$$J(s) = s(d \exp_p)_{sv}(w), \quad s \in [0, l],$$

es un campo de Jacobi. Además, $J(0) = 0$, $(DJ/ds)(0) = w$.

Demostración. Sea $t \mapsto v(t)$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, una curva parametrizada en $T_p(S)$ tal que $v(0) = v$ y $(dv/dt)(0) = w$ (obsérvese que estamos cometiendo el abuso de notación que ya mencionamos arriba). Definamos (véase la fig. 5-17)

$$h(s, t) = \exp_p(sv(t)), \quad t \in (-\epsilon, \epsilon), s \in [0, l].$$

Resulta obvio que la aplicación h es diferenciable y que las curvas $s \mapsto h_t(s) = h(s, t)$ son las geodésicas $s \mapsto \exp_p(sv(t))$. Por tanto, el campo variacional de h es un campo de Jacobi a lo largo de γ .

Para calcular el campo variacional $(\partial h/\partial t)(s, 0)$, obsérvese que la curva $s = s_0$, $t = t$, en $T_p(S)$, viene dada por $t \mapsto s_0 v(t)$ y que el vector tangente a esta curva en el punto $t = 0$ es

$$s_0 \frac{dv}{dt}(0) = s_0 w.$$

Se deduce entonces que

$$\frac{\partial h}{\partial t}(s, 0) = (d \exp_p)_{sv}(sw) = s(d \exp_p)_{sv}(w).$$

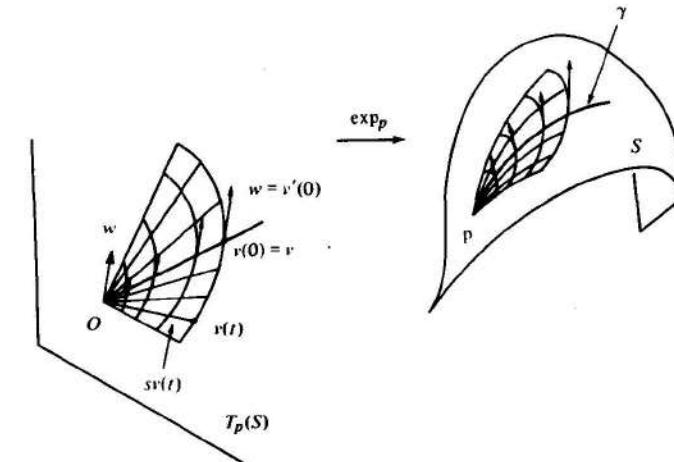


Figura 5-17

El campo vectorial $J(s) = s(d \exp_p)_{sv}(w)$ es, por tanto, un campo de Jacobi. Es inmediato verificar que $J(0) = 0$. Para comprobar la última afirmación del lema, calculamos la derivada covariante de la expresión precedente (cf. el lema 2, sec. 5.4), obteniendo

$$\frac{D}{ds} s(d \exp_p)_{sv}(w) = (d \exp_p)_{sv}(w) + s \frac{D}{ds} (d \exp_p)_{sv}(w).$$

Luego, en $s = 0$,

$$\frac{D J}{ds}(0) = (d \exp_p)_0(w) = w.$$

Q.E.D.

PROPOSICIÓN 2. Si $J(s)$ es un campo vectorial diferenciable a lo largo de $\gamma: [0, l] \rightarrow S$, $s \in [0, l]$, que satisface la ecuación de Jacobi (1), con $J(0) = 0$, entonces $J(s)$ es un campo de Jacobi a lo largo de γ .

Demostración. Sean $w = (DJ/ds)(0)$ y $v = \gamma'(0)$. Por el lema 1, existe un campo de Jacobi s ($d \exp_p|_{sv}(w) = J(s)$, $s \in [0, l]$), satisfaciendo

$$\tilde{J}(0) = 0, \quad \left(\frac{D\tilde{J}}{ds}\right)(0) = w.$$

Entonces, J y \tilde{J} son dos campos vectoriales que satisfacen el sistema (1) con las mismas condiciones iniciales. Pqr unicidad, $J(s) = \tilde{J}(s)$, $s \in [0, l]$; luego, J es un campo de Jacobi.

Q.E.D.

Ahora ya estamos en condiciones de exhibir un ejemplo no trivial de campo de Jacobi.

Ejemplo. Sea $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la esfera unidad y $x(\theta, \varphi)$ una parametrización en $p \in S^2$, utilizando la colatitud θ y la longitud φ (sec. 2.2, ejemplo 1). Considérese, en el paralelo $\theta = \pi/2$, el segmento entre $\varphi_0 = \pi/2$ y $\varphi_1 = 3\pi/2$. Este segmento es una geodésica γ , que supondremos parametrizada por $\varphi - \varphi_0 = s$. Sea $w(s)$ el transporte paralelo a lo largo de γ de un vector $w(0) \in T_{x(0)}(S)$, con $|w(0)| = 1$ y $\langle w(0), \gamma'(0) \rangle = 0$. Demostraremos que el campo vectorial (véase la fig. 5-18)

$$J(s) = (\operatorname{sen} s)w(s), \quad s \in [0, \pi],$$

es un campo de Jacobi a lo largo de γ .

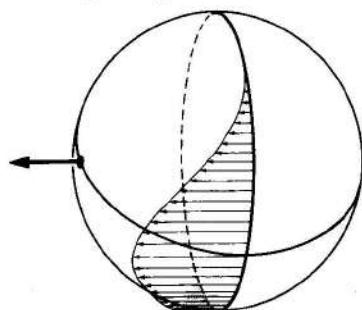


Figura 5-18. Campo de Jacobi sobre una esfera.

En efecto, al ser $J(0) = 0$, basta con verificar que J satisface la ec. (1). Utilizando el hecho de que $K = 1$ y que w es un campo vectorial paralelo obtenemos, sucesivamente, que

$$\frac{DJ}{ds} = (\cos s)w(s),$$

$$\frac{D}{ds} \frac{DJ}{ds} = (-\operatorname{sen} s)w(s),$$

$$\frac{D}{ds} \frac{DJ}{ds} + K(\gamma' \wedge J) \wedge \gamma' = (-\operatorname{sen} s)w(s) + (\operatorname{sen} s)w(s) = 0,$$

lo que prueba que J es un campo de Jacobi. Obsérvese que $J(\pi) = 0$.

DEFINICIÓN 2. Sea $\gamma: [0, l] \rightarrow S$ una geodésica de S con $\gamma(0) = p$. Decimos que el punto $q = \gamma(s_0)$, $s_0 \in [0, l]$, es conjugado a p con respecto a la geodésica γ si existe un campo de Jacobi $J(s)$ a lo largo de γ , no idénticamente nulo, con $J(0) = J(s_0) = 0$.

Como vimos en el ejemplo previo, dado un punto $p \in S^2$ de la esfera unidad S^2 , su punto antipodal es conjugado a p a lo largo de cualquier geodésica que comience en p . Sin embargo, no es típico el ejemplo de la esfera. En general, dado un punto p de una superficie S , el «primer» punto q conjugado a p varía cuando cambiamos la dirección de la geodésica que pasa por p y describe una curva parametrizada. La traza de dicha curva se denomina el *lugar conjugado* a p y se denota por $C(p)$.

La figura 5-19 muestra la situación para el elipsode, que es más típica. Las geodésicas que empiezan en un punto p son tangentes a la curva $C(p)$ de forma que cuando una geodésica $\tilde{\gamma}$, cercana a γ , se aproxima a γ , entonces el punto de intersección de $\tilde{\gamma}$ y γ se aproxima al punto conjugado q de p , con respecto a γ . Esta situación se describía en la terminología clásica diciendo que el punto conjugado es el punto de intersección de dos geodésicas «infinitamente próximas».

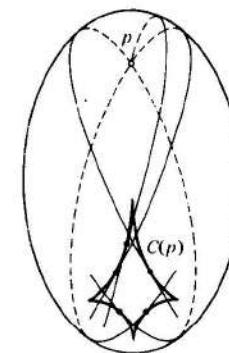


Figura 5-19. El lugar conjugado de un elipsode.

Observación 1. El hecho de que, en la esfera S^2 , el lugar conjugado de cada punto $p \in S^2$ se reduzca a un solo punto (el punto antipodal de p) constituye una situación excepcional. En efecto, puede demostrarse que la esfera es la única superficie que detenta esta propiedad (cf. L. Green, «Aufwiedersehenfläche», *Ann. Math.* 78 (1963), 289-300).

Observación 2. El lugar conjugado de un elipsode general fue determinado por A. Braumühl, «Geodätische Linien auf dreiachsgen Flächen zweiten Grades», *Math. Ann.* 20 (1882), 557-586. Consultese también H. Mangoldt, «Geodätische Linien auf positiv gekrümmten Flächen», *Crelles Journ.* 91 (1881), 23-52.

Una propiedad útil de los campos de Jacobi a lo largo de $\gamma: [0, l] \rightarrow S$ es el hecho de que cuando $J(0) = J(l) = 0$, entonces

$$\langle J(s), \gamma'(s) \rangle = 0$$

para cada $s \in [0, l]$. Esto, en realidad, es consecuencia de las siguientes propiedades de los campos de Jacobi.

PROPOSICION 3. Sean $J_1(s)$ y $J_2(s)$ campos de Jacobi a lo largo de $\gamma: [0, l] \rightarrow S$, $s \in [0, l]$. Entonces

$$\left\langle \frac{D J_1}{ds}, J_2(s) \right\rangle - \left\langle J_1(s), \frac{D J_2}{ds} \right\rangle = \text{const.}$$

Demostración. Basta con derivar la expresión del enunciado y aplicar la prop. 1 (se omite por conveniencia notacional):

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} \left\{ \left\langle \frac{D J_1}{ds}, J_2 \right\rangle - \left\langle J_1, \frac{D J_2}{ds} \right\rangle \right\} \\ &= \left\langle \frac{D}{ds} \frac{D J_1}{ds}, J_2 \right\rangle - \left\langle J_1, \frac{D}{ds} \frac{D J_2}{ds} \right\rangle + \left\langle \frac{D J_1}{ds}, \frac{D J_2}{ds} \right\rangle - \left\langle \frac{D J_1}{ds}, \frac{D J_2}{ds} \right\rangle \\ &= -K \{ \langle \gamma' \wedge J_1 \rangle \wedge \gamma', J_2 \rangle - \langle (\gamma' \wedge J_2) \wedge \gamma', J_1 \rangle \} = 0. \end{aligned}$$

Q.E.D.

PROPOSICION 4. Sea $J(s)$ un campo de Jacobi a lo largo de $\gamma: [0, l] \rightarrow S$, tal que

$$\langle J(s), \gamma'(s) \rangle = \langle J(s_2), \gamma'(s_2) \rangle = 0, \quad s_1, s_2 \in [0, l], s_1 \neq s_2.$$

Entonces

$$\langle J(s), \gamma'(s) \rangle = 0, \quad s \in [0, l].$$

Demostración. Basta con derivar la expresión del enunciado y aplicar la prop. 1 (se omite por conveniencia notacional):

$$\left\langle \frac{D J}{ds}, \gamma'(s) \right\rangle = \text{const.} = A.$$

Por tanto,

$$\frac{d}{ds} \langle J(s), \gamma'(s) \rangle = \left\langle \frac{D J}{ds}, \gamma'(s) \right\rangle = A;$$

luego,

$$\langle J(s), \gamma'(s) \rangle = As + B,$$

donde B es una constante. Al ser cero la expresión lineal $As + B$ para $s_1, s_2 \in [0, l]$, $s_1 \neq s_2$, es entonces idénticamente cero.

Q.E.D.

COROLARIO. Sea $J(s)$ un campo de Jacobi a lo largo de $\gamma: [0, l] \rightarrow S$, tal que $J(0) = J(l) = 0$. Entonces $\langle J(s), \gamma'(s) \rangle = 0$, $s \in [0, l]$.

Ahora demostraremos que los puntos conjugados pueden caracterizarse mediante el comportamiento de la aplicación exponencial. Recuérdese que cuando $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ es una aplicación diferenciable de la superficie regular S_1 en la superficie regular S_2 , se dice que un punto $p \in S_1$ es un punto *crítico* de φ si la aplicación lineal

$$d\varphi_p: T_p(S_1) \longrightarrow T_{\varphi(p)}(S_2)$$

es singular, es decir, si existe $v \in T_p(S_1)$, $v \neq 0$, tal que $d\varphi_p(v) = 0$.

PROPOSICION 5. Sean $p, q \in S$ dos puntos de S y sea $\gamma: [0, l] \rightarrow S$ una geodésica que une $p = \gamma(0)$ con $q = \exp_p(l\gamma'(0))$. Entonces q es conjugado a p con respecto a γ si y sólo si $v = l\gamma'(0)$ es un punto crítico de $\exp_p: T_p(S) \rightarrow S$.

Demostración. Como vimos en el lema 1, para cada $w \in T_p(S)$ (que identificamos con $(T_p(S))_v$) existe un campo de Jacobi $J(s)$ a lo largo de γ tal que

$$\begin{aligned} J(0) &= 0, \\ \frac{D J}{ds}(0) &= w \\ \text{y} \quad J(l) &= l\{(d \exp_p)_v(w)\}. \end{aligned}$$

Si $v \in T_p(S)$ es un punto crítico de \exp_p , existe $w \in (T_p(S))_v$, $w \neq 0$, tal que $(d \exp_p)_v(w) = 0$. Esto implica que el campo vectorial precedente $J(s)$ no es idénticamente cero y que $J(0) = J(l) = 0$; es decir, $\gamma(l)$ es conjugado a $\gamma(0)$ con respecto a γ .

Recíprocamente, si $q = \gamma(l)$ es conjugado a $p = \gamma(0)$ con respecto a γ , existe un campo de Jacobi $\tilde{J}(s)$, no idénticamente nulo, tal que $\tilde{J}(0) = \tilde{J}(l) = 0$. Sea $(D\tilde{J}/ds)(0) = w \neq 0$. Construyendo, como antes, un campo de Jacobi $J(s)$ obtenemos, en virtud a la unicidad, que $\tilde{J}(s) = J(s)$. Como

$$J(l) = l\{(d \exp_p)_v(w)\} = \tilde{J}(l) = 0,$$

concluimos que $(d \exp_p)_v(w) = 0$, con $w \neq 0$. Por tanto v es un punto crítico de \exp_p .

Q.E.D.

El hecho de que la ec. (1) de los campos de Jacobi involucre a la curvatura gaussiana K de S indica que el «despliegue» de las geodésicas que comienzan a partir de un punto $p \in S$ está estrechamente relacionado con la distribución de la curvatura en S (cf. la observación 2, sec. 4.6). Constituye un hecho elemental el que dos geodésicas próximas que comienzan en un punto $p \in S$ se alejan inicialmente. En el

caso de una esfera o un elipsoide ($K > \delta > 0$) éstas vuelven a aproximarse entre sí y se acercan tangencialmente al lugar conjugado $C(p)$. En el caso del plano nunca vuelven a acercarse. El siguiente teorema demuestra que en superficies de curvatura negativa o nula se da una «versión infinitesimal» de la situación del plano (véase la observación 3 tras la demostración del teorema).

TEOREMA. *Admitamos que la curvatura gaussiana K de una superficie S satisface la condición $K \leq 0$. Entonces, para cada $p \in S$, el lugar conjugado de p es vacío. En otras palabras, una superficie con curvatura $K \leq 0$ carece de puntos conjugados.*

Demostración. Sean $p \in S$ y $\gamma: [0, l] \rightarrow S$ una geodésica de S tal que $\gamma(0) = p$. Supongamos que existe un campo de Jacobi no nulo $J(s)$, tal que $J(0) = J(l) = 0$. Demostraremos que esto da lugar a una contradicción.

En efecto, como $J(s)$ es un campo de Jacobi y $J(0) = J(l) = 0$, tenemos, en virtud al corolario de la prop. 4, que $\langle J(s), \gamma'(s) \rangle = 0$, $s \in [0, l]$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{D}{ds} \frac{DJ}{ds} + KJ = 0, \\ \left\langle \frac{D}{ds} \frac{DJ}{ds}, J \right\rangle = -K \langle J, J \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

pues $K \leq 0$.

Se deduce entonces que

$$\frac{d}{ds} \left\langle \frac{DJ}{ds}, J \right\rangle = \left\langle \frac{D}{ds} \frac{DJ}{ds}, J \right\rangle + \left\langle \frac{DJ}{ds}, \frac{DJ}{ds} \right\rangle \geq 0.$$

Por lo tanto, la función $\langle DJ/ds, J \rangle$ no decrece en el intervalo $[0, l]$. Como esta función es cero para $s = 0$ y $s = l$, concluimos que

$$\left\langle \frac{DJ}{ds}, J(s) \right\rangle = 0, \quad s \in [0, l].$$

Finalmente, observando que

$$\frac{d}{ds} \langle J, J \rangle = 2 \left\langle \frac{DJ}{ds}, J \right\rangle = 0,$$

tenemos que $|J|^2 = \text{constante}$. Ya que $J(0) = 0$, concluimos que $|J(s)| = 0$, $s \in [0, l]$. Esto constituye una contradicción.

Q.E.D.

Observación 3. El teorema no afirma que dos geodésicas que empiecen en un punto dado nunca vuelvan a encontrarse. En realidad esto es falso, como muestran las geodésicas cerradas de un cilindro, cuya curvatura es cero. Ni siquiera es cierta la afirmación si consideramos geodésicas que empiecen en un punto dado con «dirección

nes próximas». Basta considerar un meridiano del cilindro y observar que las hélices que siguen direcciones próximas a la del meridiano cortan a dicho meridiano. Lo que afirma la proposición es que el punto de intersección de dos geodésicas «cercanas» se va el «infinito» cuando estas geodésicas se aproximan entre sí (precisamente, esto es lo que ocurre en el cilindro). Con terminología clásica diríamos que dos geodésicas «infinitamente próximas» nunca se encuentran. En este sentido, el teorema constituye una versión infinitesimal de la situación del plano.

El siguiente corolario es consecuencia inmediata de la prop. 5, del teorema precedente y teorema de la función inversa.

COROLARIO. *Admitamos que la curvatura gaussiana K de S es negativa o cero. Entonces, para cada $p \in S$, la aplicación*

$$\exp_p: T_p(S) \longrightarrow S$$

es un difeomorfismo local.

Utilizaremos más adelante el siguiente lema, que generaliza el hecho de que, en un entorno normal de p , los círculos geodésicos son ortogonales a las geodésicas radiales (sec. 4.6, prop. 3 y observación 1).

LEMA 2 (Gauss). *Sea $p \in S$ un punto de una superficie (completa) S , y sean $u \in T_p(S)$ y $w \in (T_p(S))_u$. Entonces*

$$\langle u, w \rangle = \langle (d \exp_p)_u(u), (d \exp_p)_u(w) \rangle,$$

en donde se ha efectuado la identificación $T_p(S) \approx (T_p(S))_u$.

Demostración. Sea $l = |u|$, $v = u/|u|$ y sea $\gamma: [0, l] \rightarrow S$ una geodésica de S dada por

$$\gamma(s) = \exp_p(sv), \quad s \in [0, l].$$

Entonces $\gamma'(0) = v$. Además, si consideramos la curva $s \rightarrow sv$ en $T_p(S)$ que pasa por u para $s = l$ con vector tangente v (véase la fig. 5-20), obtenemos

$$\gamma'(l) = \frac{d}{ds} (\exp_p(sv)) \Big|_{s=l} = (d \exp_p)_u(v).$$

Considérese ahora un campo de Jacobi J a lo largo de γ , dado por $J(0) = 0$, $(DJ/ds)(0) = w$ (cf. el lema 1). Entonces, como $\gamma(s)$ es una geodésica,

$$\frac{d}{ds} \langle \gamma'(s), J(s) \rangle = \langle \gamma'(s), \frac{DJ}{ds} \rangle,$$

y como J es un campo de Jacobi,

$$\frac{d}{ds} \left\langle \gamma'(s), \frac{DJ}{ds} \right\rangle = \left\langle \gamma'(s), \frac{D^2J}{ds^2} \right\rangle = 0.$$

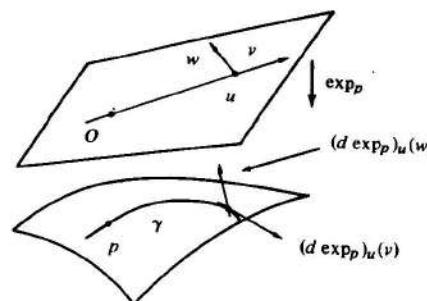


Figura 5-20

Se deduce entonces que

$$\frac{d}{ds} \langle \gamma'(s), J(s) \rangle = \left\langle \gamma'(s), \frac{DJ}{ds} \right\rangle = \text{const.} = C; \quad (2)$$

luego (al ser $J(0) = 0$)

$$\langle \gamma'(s), J(s) \rangle = Cs. \quad (3)$$

Para calcular la constante C , hagamos s igual a l en la ec. (3). Por el lema 1,

$$J(l) = l(d \exp_p)_u(w).$$

Por tanto

$$Cl = \langle \gamma'(l), J(l) \rangle = \langle (d \exp_p)_u(v), l(d \exp_p)_u(w) \rangle.$$

Concluimos de la ec. (2) que

$$\left\langle \gamma'(l), \frac{DJ}{ds}(l) \right\rangle = C = \left\langle \gamma'(0), \frac{DJ}{ds}(0) \right\rangle = \langle v, w \rangle.$$

Utilizando el valor de C , obtenemos de la expresión precedente

$$\langle u, w \rangle = \langle (d \exp_p)_u(u), (d \exp_p)_u(w) \rangle.$$

Q.E.D.

EJERCICIOS

1. a. Sea $\gamma: [0, l] \rightarrow S$ una geodésica parametrizada por la longitud de arco en una superficie S y sea $J(s)$ un campo de Jacobi a lo largo de γ con $J(0) = 0$, $\langle J'(0), \gamma'(0) \rangle = 0$. Demostrar que $\langle J(s), \gamma'(s) \rangle = 0$ para todo $s \in [0, l]$.

- b. Admitamos además que $|J'(0)| = 1$. Efectúese el transporte paralelo de $e_1(0) = \gamma'(0)$ y de $e_2(0) = J'(0)$ a lo largo de γ y obténgase bases ortonormales $\{e_1(s), e_2(s)\}$ para todo $T_{\gamma(s)}(S)$, $s \in [0, l]$. Por la parte a, para alguna función $u = u(s)$, $J(s) = u(s)e_2(s)$. Demuéstrese que la ecuación de Jacobi para J puede escribirse como

$$u''(s) + K(s)u(s) = 0,$$

con datos iniciales $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$.

2. Demuéstrese que el punto $p = (0, 0, 0)$ del parabolóide $z = x^2 + y^2$ carece de punto conjugado con respecto a una geodésica $\gamma(s)$ con $\gamma(0) = p$.

3. *Los teoremas de comparación.* Sean S y \tilde{S} superficies completas. Sean $p \in S$, $\tilde{p} \in \tilde{S}$ y elíjase una isometría lineal $i: T_p(S) \rightarrow T_{\tilde{p}}(\tilde{S})$. Sea $\gamma: [0, \infty) \rightarrow S$ una geodésica en S con $\gamma(0) = p$, $|\gamma'(0)| = 1$ y sea $J(s)$ un campo de Jacobi a lo largo de γ con $J(0) = 0$, $\langle J'(0), \gamma'(0) \rangle = 0$, $|J'(0)| = 1$. Utilizando la isometría lineal i , constrúyase una geodésica $\tilde{\gamma}: [0, \infty) \rightarrow \tilde{S}$ con $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$, $\tilde{\gamma}'(0) = i(\gamma'(0))$, y un campo de Jacobi \tilde{J} a lo largo de $\tilde{\gamma}$ con $\tilde{J}(0) = 0$, $\langle \tilde{J}'(0), \tilde{\gamma}'(0) \rangle = 0$ ($\tilde{J}'(0) = i(J(0))$) (fig. 5-21). Más abajo describiremos dos teoremas (que esencialmente son las interpretaciones geométricas de los clásicos teoremas de comparación de Sturm) que nos permiten comparar los campos de Jacobi J y \tilde{J} a partir de «hipótesis de comparación» sobre las curvaturas de S y de \tilde{S} .

- a. Utilizar el ejercicio 1 para demostrar que $J(s) = v(s)e_2(s)$, $\tilde{J}(s) = u(s)\tilde{e}_2(s)$, donde $u = u(s)$, $v = v(s)$ son funciones diferenciables y $e_2(s)$ (respectivamente, $\tilde{e}_2(s)$) es el transporte paralelo a lo largo de γ (respectivamente, $\tilde{\gamma}$) de $J'(0)$ (respectivamente, $\tilde{J}'(0)$). Conclúyase que las ecuaciones de Jacobi para J y \tilde{J} son, respectivamente,

$$v''(s) + K(s)v(s) = 0, \quad v(0) = 0, v'(0) = 1,$$

$$u''(s) + \tilde{K}(s)u(s) = 0, \quad u(0) = 0, u'(0) = 1,$$

donde K y \tilde{K} denotan las curvaturas gaussianas de S y \tilde{S} .

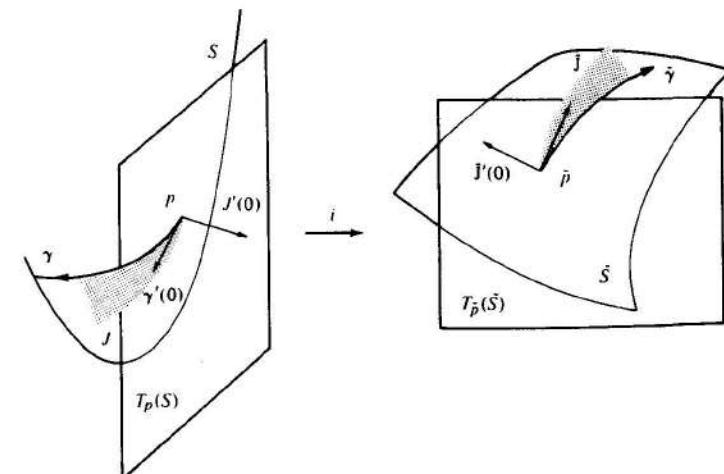


Figura 5-21

*b. Supóngase que $K(s) \leq \tilde{K}(s)$, $s \in [0, \infty)$. Demuéstrese que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^s [u(v'' + Kv) - v(u'' + \tilde{K}u)] ds \\ &= [uv' - vu']_0^s + \int_0^s (K - \tilde{K})uv ds. \end{aligned} \quad (*)$$

Conclúyase que si a es el primer cero de u en $(0, \infty)$ (es decir, $u(a) = 0$ y $u'(a) > 0$ en $(0, a)$) y b es el primer cero de v en $(0, \infty)$, entonces $b \geq a$. Por tanto, si $K(s) \leq \tilde{K}(s)$ para todo s , el primer punto conjugado de p con respecto a γ no aparece antes del primer punto conjugado de \tilde{p} con respecto a $\tilde{\gamma}$. Se llama a este resultado el *primer teorema de comparación*.

c. Admitamos que $K(s) \leq \tilde{K}(s)$, $s \in [0, a]$. Utilícese () y el hecho de que u y v son positivas en $(0, a)$ para obtener que $[uv' - vu']_0^a \geq 0$. Utilícese esta desigualdad para demostrar que $v(s) \geq u(s)$ para todo $s \in (0, a)$. Por tanto, si $K(s) \leq \tilde{K}(s)$ para todos los s precedentes al primer punto conjugado de $\tilde{\gamma}$, entonces $|J(s)| \geq |\tilde{J}(s)|$ para tales s . Este resultado constituye el *segundo teorema de comparación* (por supuesto, éste incluye al primero como caso particular; hemos separado el primer caso porque es más fácil y porque es el que utilizaremos con más frecuencia).

d. Demuéstrese en la parte c que la igualdad $v(s) = u(s)$ se da para todo $s \in [0, a]$ si y sólo si $K(s) = \tilde{K}(s)$, $s \in [0, a]$.

4. Sea S una superficie completa con curvatura gaussiana $K \leq K_0$, donde K_0 es una constante positiva. Compárese S con la esfera $S^2(K_0)$ de curvatura K_0 (es decir, tómese $\tilde{S} = S^2(K_0)$ en el ejercicio 3 y utilícese el primer teorema de comparación de la parte b del ejercicio 3) para concluir que cualquier geodésica $\gamma: [0, \infty) \rightarrow S$ en S carece de punto conjugado a $\gamma(0)$ en el intervalo $(0, \pi/\sqrt{K_0})$.

5. Sea S una superficie completa con $K \geq K_1 > 0$, donde K es la curvatura gaussiana de S y K_1 es una constante. Demostrar que cada geodésica $\gamma: [0, \infty) \rightarrow S$ admite un punto conjugado a $\gamma(0)$ en el intervalo $(0, \pi/\sqrt{K_1})$.

*6. **Teorema de oscilación de Sturm.** Con frecuencia es útil la siguiente generalización, mínima, del primer teorema de comparación (ejercicio 3, parte b). Sea S una superficie completa y sea $\gamma: [0, \infty) \rightarrow S$ una geodésica en S . Sea $J(s)$ un campo de Jacobi a lo largo de γ con $J(0) = J(s_0) = 0$, $s_0 \in (0, \infty)$ y $J(s) \neq 0$ para $s \in (0, s_0)$. Así, $J(s)$ es un campo normal (corolario de la prop. 4). Se deduce entonces que $J(s) = v(s)e_2(s)$, donde $v(s)$ es una solución de

$$v''(s) + K(s)v(s) = 0, \quad s \in [0, \infty),$$

y $e_2(s)$ es el transporte paralelo de un vector unitario en $T_{\gamma(0)}(S)$ normal a $\gamma'(0)$. Admítase que la curvatura gaussiana $K(s)$ de S satisface $K(s) \leq L(s)$, donde L es una función diferenciable en $[0, \infty)$. Demuéstrese que cualquier solución es

$$u''(s) + L(s)u(s) = 0, \quad s \in [0, \infty),$$

tiene un cero en el intervalo $(0, s_0)$ (es decir, existe $s_1 \in (0, s_0)$ con $u(s_1) = 0$).

7. **Criterio de Kneser para puntos conjugados.** Sea S una superficie completa y sea $\gamma: [0, \infty) \rightarrow S$ una geodésica de S con $\gamma(0) = p$. Sea $K(s)$ la curvatura gaussiana de S a lo largo de γ . Supóngase que

$$\int_t^\infty K(s) ds \leq \frac{1}{4(t+1)} \quad \text{para todo } t \geq 0 \quad (*)$$

en el sentido de que el integral converge y está acotada como se indica.

a. Defínase

$$w(t) = \int_t^\infty K(s) ds + \frac{1}{4(t+1)}, \quad t \geq 0,$$

y demuéstrese que $w'(t) + (w(t))^2 \leq -K(t)$.

b. Para $t \geq 0$, póngase $w'(t) + (w(t))^2 = -L(t)$ (de forma que $L(t) \geq K(t)$) y defínase

$$v(t) = \exp\left(\int_0^t w(s) ds\right), \quad t \geq 0.$$

Demuéstrese que $v'(t) + L(t)v(t) = 0$, $v(0) = 1$, $v'(0) = 0$.

c. Obsérvese que $v(t) > 0$ y utilícese el teorema de oscilación de Sturm (ejercicio 6) para demostrar que no existe un campo de Jacobi $J(s)$ a lo largo de $\gamma(s)$ con $J(0) = 0$ y $J(s_0) = 0$, $s_0 \in (0, \infty)$. Por tanto, si se da (*), no existe un punto conjugado a p a lo largo de γ .

*8. Sea $\gamma: [0, l] \rightarrow S$ una geodésica sobre una superficie completa S , y supóngase que $\gamma(l)$ no es conjugado a $\gamma(0)$. Sea $w_0 \in T_{\gamma(0)}(S)$ y $w_1 \in T_{\gamma(l)}(S)$. Demuéstrese que existe un único campo de Jacobi a lo largo de γ con $J(0) = w_0$ y $J(l) = w_1$.

9. Sea $J(s)$ un campo de Jacobi a lo largo de una geodésica $\gamma: [0, l] \rightarrow S$ tal que $\langle J(0), \gamma'(0) \rangle = 0$ y $J'(0) = 0$. Demostrar que $\langle J(s), \gamma'(s) \rangle = 0$ para todo $s \in [0, l]$.

5.6. Espacios recubridores: los teoremas de Hadamard

Vimos en la última sección que cuando la curvatura K de una superficie completa S satisface la condición $K \leq 0$ entonces la aplicación $\exp_p: T_p(S) \rightarrow S$, $p \in S$, es un difeomorfismo local. Es natural plantearse cuándo este difeomorfismo local es un difeomorfismo global. Es conveniente plantear esta cuestión en un marco más general para lo que necesitamos la noción de espacio recubridor.

A. Espacios recubridores

DEFINICION 1. Sean \tilde{B} y B subconjuntos de \mathbb{R}^3 . Decimos que $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ es una aplicación recubridora si

1. π es continua y $\pi(\tilde{B}) = B$.
2. Cada punto $p \in B$ tiene un entorno U en B (que se denominará entorno distinguido de p) tal que

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_a V_a,$$

donde los V_a conjuntos abiertos disjuntos dos a dos tal que la restricción de π a V_a es un homeomorfismo de V_a sobre U .

Se dice entonces que \tilde{B} es un espacio recubridor de B .

Ejemplo 1. Sea $P \subset \mathbb{R}^3$ un plano de \mathbb{R}^3 . Fijando un punto $q_0 \in P$ y dos vectores unitarios ortogonales $e_1, e_2 \in P$, con origen en q_0 , cada punto $q \in P$ está caracterizado por las coordenadas $(u, v) = q$ dadas por

$$q = q_0 + ue_1 + ve_2.$$

Sea ahora $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$ el cilindro circular recto cuyo eje es el eje z , y sea $\pi: P \rightarrow S$ la aplicación definida por

$$\pi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

(la interpretación geométrica de esta aplicación es la de enrollar P alrededor del cilindro S un número infinito de veces; véase la fig. 5-22).

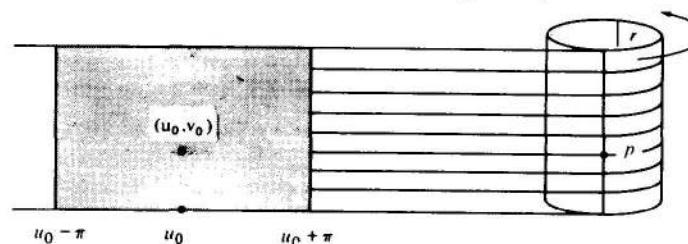


Figura 5-22

Demostraremos que π es una aplicación recubridora. Primero observamos que cuando $(u_0, v_0) \in P$, la restricción de la aplicación π a la banda

$$R = \{(u, v) \in P; u_0 - \pi \leq u \leq u_0 + \pi\}$$

recubre completamente a S . En realidad, π restringida al interior de R es una parametrización de S , cuyo entorno coordenado recubre S excepto una generatriz. Se tiene así que π es continua (en realidad, diferenciable) y que $\pi(P) = S$, verificándose la condición 1.

Para verificar la condición 2, sea $p \in S$ y $U = S - r$, donde r es la generatriz opuesta a la generatriz que pasa por p . Demostraremos que U es un entorno distinguido de p .

Sea $(u_0, v_0) \in P$ tal que $\pi(u_0, v_0) = p$ y tomemos como V_n la banda dada por

$$V_n = \{(u, v) \in P; u_0 + (2n - 1)\pi < u < u_0 + (2n + 1)\pi\}, \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Es inmediato verificar que si $n \neq m$, entonces $V_n \cap V_m = \emptyset$ y que $\bigcup_n V_n = \pi^{-1}(U)$. Además, por la observación inicial, la restricción de π a cualquier V_n es un homeomorfismo sobre U . Se deduce entonces que U es un entorno distinguido de p . Con esto se cumple la condición 2 y se demuestra que el plano P es un espacio recubridor del cilindro S .

Ejemplo 2. Sea H la hélice

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = \cos t, y = \operatorname{sen} t, z = bt, t \in \mathbb{R}\}$$

y sea

$$S^1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$$

el círculo unidad. Sea $\pi: H \rightarrow S^1$ definida por

$$\pi(x, y, z) = (x, y, 0).$$

Demostraremos que π es una aplicación recubridora (véase la fig. 5-23).

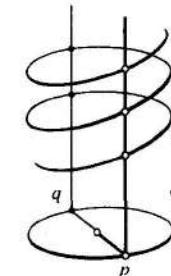


Figura 5-23

Es claro que π es continua y que $\pi(H) = S^1$. Con esto se comprueba la condición 1.

Para verificar la condición 2, sea $p \in S^1$. Demostraremos que $U = S^1 - \{q\}$, donde $q \in S^1$ es el punto simétrico de p , es un entorno distinguido de p . En efecto, sea $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\pi(\cos t_0, \operatorname{sen} t_0, bt_0) = p.$$

Consideremos como V_n el arco de la hélice correspondiente al intervalo

$$(t_0 + (2n - 1)\pi, t_0 + (2n + 1)\pi) \subset R, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Es fácil entonces demostrar que $\pi^{-1}(U) = \bigcup_n V_n$, que los V_n son disjuntos dos a dos, y que la restricción de π a V_n es un homeomorfismo sobre U . Con esto comprobamos la condición 2 y concluimos el ejemplo.

Sea ahora $\pi: \tilde{B} \rightarrow$ una aplicación recubridora. Como $\pi(\tilde{B}) = B$, cada punto $\tilde{p} \in \tilde{B}$ es tal que $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ para algún $p \in B$. Por tanto, existe un entorno V_a de \tilde{p} tal que la restricción de π a V_a es un homeomorfismo. Se tiene entonces que π es un homeomorfismo local. Sin embargo, el siguiente ejemplo demuestra que existen homeomorfismos locales que no son aplicaciones recubridoras.

Antes de presentar el ejemplo debería observarse que si U es un entorno distinguido de p , entonces cada entorno \tilde{U} de \tilde{p} tal que $\tilde{U} \subset U$ es también un entorno distinguido de p . Como $\pi^{-1}(\tilde{U}) \subset \bigcup_a V_a$ y los V_a son disjuntos dos a dos, obtenemos

$$\pi^{-1}(\tilde{U}) = \bigcup_a W_a,$$

donde los conjuntos $W_\alpha = \pi^{-1}(\bar{U}) \cap V_\alpha$ satisfacen la propiedad de intersección vacía de la condición 2 en la def. 1. De esta manera, al tratar con entornos distinguidos, podemos restringirnos a entornos «pequeños».

Ejemplo 3. Considérese en el ejemplo 2 el segmento \tilde{H} de la hélice H correspondiente al intervalo $(\pi, 4\pi) \subset R$. Es claro que la restricción $\tilde{\pi}$ de π a este segmento abierto de hélice todavía es un homeomorfismo local y que $\tilde{\pi}(\tilde{H}) = S^1$. Sin embargo, ningún entorno de

$$\pi(\cos 3\pi, \sin 3\pi, b3\pi) = (-1, 0, 0) = p \in S^1$$

puede ser un entorno distinguido. En efecto, tomando U suficientemente pequeño, $\pi^{-1}(U) = V_1 \cup V_2$, donde V_1 es el segmento de hélice correspondiente a $t \in (\pi, \pi + \varepsilon)$ y V_2 es el segmento correspondiente a $t \in (3\pi - \varepsilon, 3\pi + \varepsilon)$. Ahora, la restricción de $\tilde{\pi}$ a V_1 no es un homeomorfismo sobre U pues $\tilde{\pi}(V_1)$ ni siquiera contiene a p . Así, $\tilde{\pi}: \tilde{H} \rightarrow S^1$ es un homeomorfismo local sobre S^1 pero no es una aplicación recubridora.

Podemos ahora replantear la cuestión propuesta al comienzo de esta sección en los siguientes términos, más generales: ¿bajo qué condiciones es homeomorfismo global un homeomorfismo local?

La noción de espacio recubridor nos permite desglosar esta cuestión en otras dos, de la manera siguiente:

1. ¿Bajo qué condiciones es aplicación recubridora un homeomorfismo local?
2. ¿Bajo qué condiciones es homeomorfismo global una aplicación recubridora?

La siguiente proposición da una respuesta simple a la cuestión 1.

PROPOSICIÓN 1. Sea $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ un homeomorfismo local, \tilde{B} compacto y B conexo. Entonces π es una aplicación recubridora.

Demostración. Como π es un homeomorfismo local $\pi(\tilde{B}) \subset B$ es abierto en B . Además, por la continuidad de π , $\pi(\tilde{B})$ es compacto y, por tanto, cerrado en B . Como $\pi(\tilde{B}) \subset B$ es abierto y cerrado en el conjunto conexo B , $\pi(\tilde{B}) = B$. Se verifica así, la condición 1 de la def. 1.

Para comprobar la condición 2, sea $b \in B$. Entonces $\pi^{-1}(b) \subset \tilde{B}$ es finito. En caso contrario, tendría un punto límite $\tilde{q} \in \tilde{B}$ lo que contradeciría el hecho de que $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ es un homeomorfismo local. Por tanto, podemos escribir $\pi^{-1}(b) = \{b_1, \dots, b_k\}$.

Sea W_i un entorno de b_i , $i = 1, \dots, k$, tal que la restricción de π a W_i sea un homeomorfismo (π es un homeomorfismo local). Como $\pi^{-1}(b)$ es finito, es posible elegir los W_i lo suficientemente pequeños como para que sean disjuntos dos a dos. Es claro que existe un entorno U de b tal que $U \subset \bigcap (\pi(W_i))$ (véase la fig. 5-24). Poniendo $V_i = \pi^{-1}(U) \cap W_i$ tenemos que

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_i V_i$$

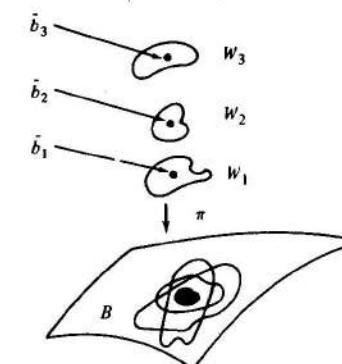


Figura 5-24

y que los V_i son disjuntos dos a dos. Además, es claro que la restricción de π a V_i es un homeomorfismo sobre U . Por tanto, U es un entorno distinguido de p y se concluye la variación de la condición 2.

Q.E.D.

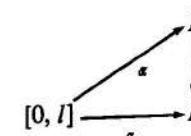
Cuando \tilde{B} no es compacto hay pocos criterios útiles para afirmar que un homeomorfismo local es una aplicación recubridora. Un caso especial se considerará después. Tanto para este caso especial como para tratar la cuestión 2 necesitamos volver a los espacios recubridores.

La propiedad más importante de una aplicación recubridora consiste en la posibilidad de «elevar» a \tilde{B} curvas continuas en B . Para ser más concretos introduciremos la terminología siguiente.

Sea $B \subset R^3$. Recordemos que una aplicación continua $\alpha: [0, l] \rightarrow B$, $[0, l] \subset R$, se denomina un arco de B (véase el apéndice al cap. 5, def. 8). Sean ahora, B y \tilde{B} subconjuntos de R^3 . Sea $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ una aplicación continua y $\alpha: [0, l] \rightarrow B$ un arco de B . Si existe un arco de \tilde{B} ,

$$\tilde{\alpha}: [0, l] \longrightarrow \tilde{B},$$

con $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$, se dice que $\tilde{\alpha}$ es una elevación de α con origen en $\tilde{\alpha}(0) \in \tilde{B}$. En el diagrama adjunto se describe la situación.



Con la terminología precedente, la proposición siguiente de existencia y unicidad, expresa una propiedad fundamental de los espacios recubridores.

PROPOSICIÓN 2. Sean $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ una aplicación recubridora, $\alpha: [0, l] \rightarrow B$ un arco en B y $\tilde{p}_0 \in \tilde{B}$ un punto de \tilde{B} tal que $\alpha(\tilde{p}_0) = \alpha(0) = p_0$. Entonces existe una única elevación $\tilde{\alpha}: [0, l] \rightarrow \tilde{B}$ de α con origen en \tilde{p}_0 , es decir, con $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{p}_0$.

Demostración. Primero demostramos la unicidad. Sean $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}: [0, l] \rightarrow \tilde{B}$ dos elevaciones de α con origen en \tilde{p}_0 . Sea $A \subset [0, l]$ el conjunto de puntos $t \in [0, l]$ tales que $\tilde{\alpha}(t) = \tilde{\beta}(t)$. A es no vacío y claramente es cerrado en $[0, l]$.

Demostraremos que A es abierto en $[0, l]$. Supongamos que $\tilde{\alpha}(t) = \tilde{\beta}(t) = \tilde{p}$. Consideremos un entorno V de \tilde{p} en el que π sea un homeomorfismo. Como $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ son aplicaciones continuas, existe un intervalo abierto $I_t \subset [0, l]$ que contiene a t , tal que $\alpha(I_t) \subset V$ y $\tilde{\beta}(I_t) \subset V$. Como $\pi \circ \tilde{\alpha} = \pi \circ \tilde{\beta}$ y π es un homeomorfismo en V , $\alpha = \tilde{\beta}$ en I_t , luego A es abierto. Por tanto $A = [0, l]$ y las dos elevaciones coinciden para cada $t \in [0, l]$.

Demostremos ahora la existencia. Como α es continua, para cada $\alpha(t) \in B$ existe un intervalo $I_t \subset [0, l]$ que contiene a t tal que $\alpha(I_t)$ está contenido en un entorno distinguido de $\alpha(t)$. La familia I_t , $t \in [0, l]$, es un recubrimiento abierto de $[0, l]$ que, por compacidad, admite un subrecubrimiento finito, por ejemplo, I_0, \dots, I_n .

Admitamos que $0 \in I_0$ (si no, podemos cambiar la numeración de los intervalos). Como $\alpha(I_0)$ está contenido en un entorno distinguido U_0 de p , existe un entorno V_0 de \tilde{p}_0 tal que la restricción π_0 de π a V_0 es un homeomorfismo sobre U_0 . Definimos, para $t \in I_0$ (véase la fig. 5-25),

$$\tilde{\alpha}(t) = \pi_0^{-1} \circ \alpha(t),$$

donde π_0^{-1} es la aplicación inversa en U_0 del homeomorfismo π_0 . Es claro que

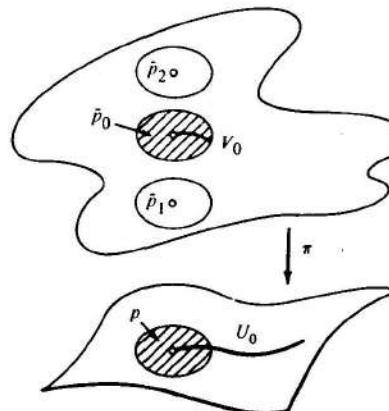


Figura 5-25

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}(0) &= \tilde{p}_0, \\ \pi \circ \tilde{\alpha}(t) &= \alpha(t), \quad t \in I_0.\end{aligned}$$

Supongamos ahora que $I_1 \cap I_0 \neq \emptyset$ (en otro caso podemos cambiar el orden de los intervalos). Sea $t_1 \in I_1 \cap I_0$. Como $\alpha(I_1)$ está contenido en un entorno distinguido U_1 de $\alpha(t_1)$, podemos definir una elevación de α en I_1 con origen en $\tilde{\alpha}(t_1)$. Por unicidad, este arco coincide con $\tilde{\alpha}$ en $I_1 \cap I_0$, y, por tanto, es una extensión de $\tilde{\alpha}$ a $I_1 \cup I_0$. Procediendo de esta manera, construimos un arco $\tilde{\alpha}: [0, l] \rightarrow \tilde{B}$ tal que $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{p}_0$ y $\pi \circ \tilde{\alpha}(t) = \alpha(t)$, $t \in [0, l]$.

Q.E.D.

Una consecuencia interesante de la propiedad de elevación de arcos para una aplicación recubridora $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ es el hecho de que cuando B es conexo por arcos existe una correspondencia inyectiva entre los conjuntos $\pi^{-1}(p)$ y $\pi^{-1}(q)$, donde p y q son dos puntos arbitrarios de B . En efecto, si B es conexo por arcos, existe un arco $\alpha: [0, l] \rightarrow B$, con $\alpha(0) = p$ y $\alpha(l) = q$. Para cada $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$, hay una elevación $\alpha_{\tilde{p}}: [0, l] \rightarrow \tilde{B}$, con $\alpha_{\tilde{p}}(0) = \tilde{p}$. Definamos ahora $\varphi: \pi^{-1}(p) \rightarrow \pi^{-1}(q)$ mediante $\varphi(\tilde{p}) = \alpha_{\tilde{p}}(l)$; es decir, sea $\varphi(\tilde{p})$ el extremo de la elevación de α con origen \tilde{p} . Por la unicidad de la elevación, φ es una correspondencia inyectiva como habíamos afirmado.

Se deduce entonces que el «número» de puntos de $\pi^{-1}(p)$, $p \in B$, no depende de p cuando B es conexo por arcos. Si dicho número es finito, se denomina el *número de hojas* del recubrimiento. Si $\pi^{-1}(p)$ no es finito, decimos que el recubrimiento es infinito. Los ejemplos 1 y 2 recubrimientos infinitos. Obsérvese que cuando \tilde{B} es compacto el recubrimiento siempre es finito.

Ejemplo 4. Sea

$$S_1 = \{(x, y) \in R^2; x = \cos t, y = \operatorname{sen} t, t \in R\}$$

el círculo unidad y definamos la aplicación $\pi: S^1 \rightarrow S^1$ mediante

$$\pi(\cos t, \operatorname{sen} t) = (\cos kt, \operatorname{sen} kt),$$

donde k es un entero positivo y $t \in R$. Por el teorema de la función inversa, π es un difeomorfismo local, por tanto, un homeomorfismo local. Como S^1 es compacto, podemos aplicar la prop. 1. Así, $\pi: S^1 \rightarrow S^1$ es una aplicación recubridora.

Geométricamente, π envuelve k veces el primer S^1 en el segundo S^1 . Nótese que la imagen inversa de un punto $p \in S^1$ contiene exactamente k puntos. Por tanto, π es un recubrimiento con k hojas de S^1 .

Para el tratamiento de la cuestión 2 necesitamos precisar también algunas ideas intuitivas que surgen a partir de las consideraciones siguientes. Para que una aplicación recubridora $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ sea un homeomorfismo basta con que sea una aplicación inyectiva. En consecuencia, tenemos que hallar una condición que asegure que cuando dos puntos $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2 \in \tilde{B}$ se proyecten sobre el mismo punto

$$p = \pi(\tilde{p}_1) = \pi(\tilde{p}_2)$$

de B , ello implica que $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2$. Supondremos que \tilde{B} es conexo por arcos. Proyectemos un arco $\tilde{\alpha}$ de \tilde{B} , que una \tilde{p}_1 con \tilde{p}_2 , sobre un arco cerrado α de B que una p con p (véase la fig. 5-26). Si B carece de «agujeros» (en el sentido que precisaremos), es posible «deformar continuamente α al punto p ». Es decir, existe una familia de arcos α_t , continua en t , $t \in [0, 1]$, con $\alpha_0 = \alpha$ y α_1 igual al arco constante p . Como $\tilde{\alpha}$ es una elevación de α , es natural esperar que los arcos α_t puedan elevarse también a una familia $\tilde{\alpha}_t$, continua en t , $t \in [0, 1]$, con $\tilde{\alpha}_0 = \tilde{\alpha}$. Se deduce entonces que $\tilde{\alpha}_1$ es una elevación del arco constante p y, en consecuencia, se reduce a un único punto. Por otra parte, $\tilde{\alpha}_1$ une \tilde{p}_1 con \tilde{p}_2 ; concluimos así que $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2$.

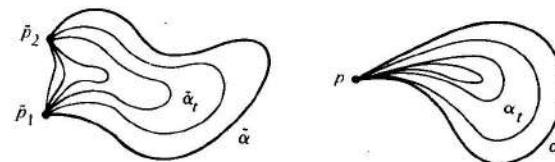


Figura 5-26

Para asentar con rigor los argumentos heurísticos precedentes tenemos que definir qué se entiende por una «familia continua de arcos que une dos arcos dados» y demostrar que tal familia se puede «elevar».

DEFINICIÓN 2. Sea $B \subset \mathbb{R}^3$ y sean $\alpha_0: [0, l] \rightarrow B$, $\alpha_1: [0, l] \rightarrow B$ dos arcos de B que unen los puntos

$$p = \alpha_0(0) = \alpha_1(0) \quad y \quad q = \alpha_0(l) = \alpha_1(l).$$

Decimos que α_0 y α_1 son homotópicos si existe una aplicación continua $H: [0, l] \times [0, 1] \rightarrow B$ tal que

1. $H(s, 0) = \alpha_0(s)$, $H(s, 1) = \alpha_1(s)$, $s \in [0, l]$.
2. $H(0, t) = p$, $H(l, t) = q$, $t \in [0, 1]$.

La aplicación H se denomina una homotopía entre α_0 y α_1 .

Para cada $t \in [0, 1]$, el arco $\alpha_t: [0, l] \rightarrow B$ dado por $\alpha_t(s) = H(t, s)$ se denomina arco de la homotopía H . Por tanto, la homotopía es una familia de arcos α_t , $t \in [0, 1]$, que constituye una deformación continua de α_0 en α_1 (véase la fig. 5-27) de forma que los extremos p y q de los arcos α_t permanecen fijos durante la deformación (condición 2).

El concepto de elevación de homotopías es completamente análogo al de elevación de arcos. Sea $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ una aplicación continua y sean $\alpha_0, \alpha_1: [0, l] \rightarrow B$ dos arcos de B que unen los puntos p y q . Sea $H: [0, l] \times [0, 1] \rightarrow B$ una homotopía entre α_0 y α_1 . Si existe una aplicación continua

$$\tilde{H}: [0, l] \times [0, 1] \rightarrow \tilde{B}$$

tal que $\pi \circ \tilde{H} = H$, decimos que \tilde{H} es una elevación de la homotopía H , con origen en $\tilde{H}(0, 0) = \tilde{p} \in \tilde{B}$.

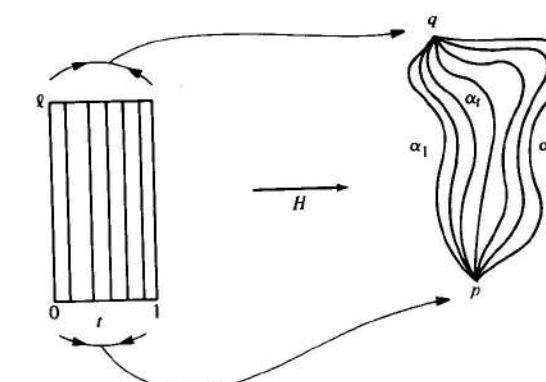


Figura 5-27

Demostraremos ahora que una aplicación recubridora detenta la propiedad de elevación de homotopías. En realidad, demostraremos una proposición más general. Obsérvese que una aplicación recubridora $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ es un homeomorfismo local y, además, que cada arco de B puede elevarse a un arco de \tilde{B} . Solamente utilizaremos estas propiedades de las aplicaciones recubridoras en las demostraciones de las props. 3, 4 y 5 que siguen a continuación, y así, para su uso ulterior, estableceremos dichas proposiciones con este grado de generalidad.

Diremos entonces que una aplicación continua $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ tiene la *propiedad de elevación de arcos* cuando se puede elevar cada arco de B . Nótese que esto implica que π aplica \tilde{B} sobre B (es decir, π es sobreyectiva).

PROPOSICIÓN 3. Sea $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ un homeomorfismo local con la propiedad de elevación de arcos. Sean $\alpha_0, \alpha_1: [0, l] \rightarrow B$ dos arcos de B que unen los puntos p y q , y sean

$$H: [0, l] \times [0, 1] \longrightarrow B$$

una homotopía entre α_0 y α_1 , \tilde{p} un punto de \tilde{B} tal que $\pi(\tilde{p}) = p$. Entonces existe una única elevación \tilde{H} de H con origen en \tilde{p} .

*Demuestra*ción. La demostración de la unicidad es totalmente análoga a la de elevación de arcos. Sean \tilde{H}_1 y \tilde{H}_2 dos elevaciones de H con $\tilde{H}_1(0, 0) = \tilde{H}_2(0, 0) = \tilde{p}$. Entonces, el conjunto A de puntos $(s, t) \in [0, l] \times [0, 1] = Q$ tales que $\tilde{H}_1(s, t) = \tilde{H}_2(s, t)$ es no vacío y cerrado en Q . Como \tilde{H}_1 y \tilde{H}_2 son continuas y π es un homeomorfismo local entonces A es abierto en Q . Por la conexidad de Q , $A = Q$; luego $\tilde{H}_1 = \tilde{H}_2$.

Para demostrar la existencia, sea $\alpha_t(s) = H(s, t)$ un arco de la homotopía H . Definamos \tilde{H} por

$$\tilde{H}(s, t) = \tilde{\alpha}_t(s), \quad s \in [0, l], t \in [0, 1],$$

donde $\tilde{\alpha}_t$ es la elevación de α_t con origen en \tilde{p} . Resulta claro que

$$\begin{aligned}\pi \circ \tilde{H}(s, t) &= \alpha_t(s) = H(s, t), \quad s \in [0, l], t \in [0, 1], \\ \tilde{H}(0, 0) &= \tilde{\alpha}_0(0) = \tilde{p}.\end{aligned}$$

Demostremos ahora que \tilde{H} es continua. Sea $(s_0, t_0) \in [0, l] \times [0, 1]$. Como π es un homeomorfismo local, existe un entorno V de $\tilde{H}(s_0, t_0)$ tal que la restricción π_0 de π a V es un homeomorfismo sobre un entorno U de $H(s_0, t_0)$. Sea $Q_0 \subset H^{-1}(U) \subset [0, l] \times [0, 1]$ el cuadrado abierto definido por

$$s_0 - \varepsilon < s < s_0 + \varepsilon, \quad t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon.$$

Basta demostrar que la restricción de \tilde{H} a Q_0 puede escribirse como $\tilde{H} = \pi_0^{-1} \circ H$ para concluir que \tilde{H} es continua en (s_0, t_0) . Como (s_0, t_0) es arbitrario, \tilde{H} es continua en $[0, l] \times [0, 1]$; que es lo que deseamos demostrar.

Para ello observamos que

$$t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$$

es una elevación del arco $H(s_0, t)$ que pasa por $\tilde{H}(s_0, t_0)$. Por unicidad $\pi_0^{-1}(H(s_0, t)) = \tilde{H}(s_0, t)$. Como Q_0 es un cuadrado, para cada $(s_1, t_1) \in Q_0$ existe un arco $H(s, t_1)$ en U , $s \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$, que intersecta al arco $H(s_0, t)$. Al ser $\pi_0^{-1}(H(s_0, t_1)) = \tilde{H}(s_0, t_1)$, el arco $\pi_0^{-1}(H(s, t_1))$ es la elevación de $H(s, t_1)$ que pasa por $\tilde{H}(s_0, t_1)$. Por unicidad $\pi_0^{-1}(H(s, t_1)) = \tilde{H}(s, t_1)$; luego, $\pi_0^{-1}(H(s_1, t_1)) = \tilde{H}(s_1, t_1)$. Por la arbitrariedad de $(s_1, t_1) \in Q_0$ concluimos que $\pi_0^{-1}(H(s, t)) = \tilde{H}(s, t)$, $(s, t) \in Q_0$, con lo que termina la demostración.

Q.E.D.

Una consecuencia de la prop. 3 es el hecho de que si $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ es una aplicación recubridora, entonces, arcos homotópicos de B se elevan en arcos homotópicos de \tilde{B} . Esto puede expresarse de una manera más general y precisa en la forma siguiente.

PROPOSICION 4. Sea $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ un homeomorfismo local con la propiedad de elevación de arcos. Sean $\alpha_0, \alpha_1: [0, l] \rightarrow B$ dos arcos de B que unen los puntos p y q y tomemos $\tilde{p} \in \tilde{B}$ tal que $\pi(\tilde{p}) = p$. Si α_0 y α_1 son homotópicos, entonces las elevaciones $\tilde{\alpha}_0$ y $\tilde{\alpha}_1$ de α_0 y α_1 , respectivamente, con origen en \tilde{p} , son homotópicas.

Demostración. Sea H la homotopía entre α_0 y α_1 y sea \tilde{H} su elevación, con origen en \tilde{p} . Demostraremos que \tilde{H} es una homotopía entre $\tilde{\alpha}_0$ y $\tilde{\alpha}_1$ (véase la fig. 5-28).

En efecto, por la unicidad de la elevación de arcos,

$$\tilde{H}(s, 0) = \tilde{\alpha}_0(s), \quad \tilde{H}(s, 1) = \tilde{\alpha}_1(s), \quad s \in [0, l],$$

lo que verifica la condición 1 en la def. 2. Además, $\tilde{H}(0, t)$ es la elevación del arco «constante» $H(0, t) = p$, con origen en \tilde{p} . Por unicidad,

$$\tilde{H}(0, t) = \tilde{p}, \quad t \in [0, 1].$$

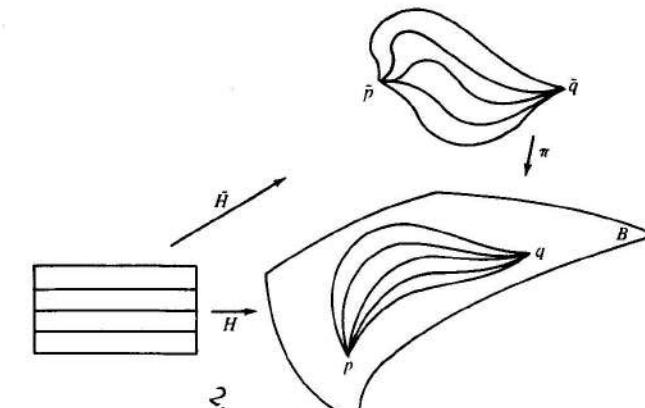


Figura 5-28

Análogamente, $\tilde{H}(l, t)$ es la elevación de $H(l, t) = q$, con origen en $\tilde{\alpha}_0(l) = \tilde{q}$; luego,

$$\tilde{H}(l, t) = \tilde{q} = \tilde{\alpha}_1(l), \quad t \in [0, 1].$$

Por tanto, queda verificada la condición 2 en la def. 2, demostrándose así que \tilde{H} es una homotopía entre $\tilde{\alpha}_0$ y $\tilde{\alpha}_1$.

Q.E.D.

Volviendo al argumento heurístico que nos condujo al concepto de homotopía, observamos que todavía queda por explicar qué se entiende por un espacio sin «agujeros». Por supuesto, tomaremos precisamente como definición de un espacio de ese tipo aquella propiedad que utilizaremos en el argumento heurístico.

DEFINICION 3. Un conjunto conexo por arcos $B \subset \mathbb{R}^3$ es simplemente conexo si dados dos puntos p y $q \in B$ y dos arcos $\alpha_0: [0, l] \rightarrow B$, $\alpha_1: [0, l] \rightarrow B$ que unen p y q , existe una homotopía en B entre α_0 y α_1 . En particular, cualquier arco cerrado de B , $\alpha: [0, l] \rightarrow B$ (cerrado significa que $\alpha(0) = \alpha(l) = p$), es homotópico al arco «constante» $\alpha(s) = p$, $s \in [0, l]$; en el ejercicio 5 se indica que esta última propiedad es realmente equivalente a la primera.

Intuitivamente, un conjunto conexo por arcos B es simplemente conexo si cada arco cerrado en B puede deformarse continuamente en un punto. Es posible demostrar que el plano y la esfera son simplemente conexos pero que el cilindro y el toro no son simplemente conexos (cf. el ejercicio 5).

Podemos ahora establecer y demostrar una respuesta a la cuestión 2 de esta sección. Se deducirá como corolario de la siguiente proposición.

PROPOSICION 5. Sea $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ un homeomorfismo local con la propiedad de elevación de arcos. Sea \tilde{B} conexo por arcos y B simplemente conexo. Entonces π es un homeomorfismo.

Demostración. La demostración es esencialmente la misma que en el argumento heurístico.

Necesitamos demostrar que π es inyectiva. Para ello, sean \tilde{p}_1 y \tilde{p}_2 dos puntos de \tilde{B} , con $\pi(\tilde{p}_1) = \pi(\tilde{p}_2) = p$. Como \tilde{B} es conexo por arcos, existe un arco $\tilde{\alpha}_0$ de \tilde{B} , uniendo \tilde{p}_1 y \tilde{p}_2 . Entonces $\pi \circ \tilde{\alpha}_0 = \alpha_0$ es un arco cerrado de B . Como B es simplemente conexo, α_0 es homotópico al arco constante $\alpha_1(s) = p$, $s \in [0, l]$. Por la prop. 4, $\tilde{\alpha}_0$ es homotópico a la elevación $\tilde{\alpha}_1$ de α_1 cuyo origen es p . Al ser $\tilde{\alpha}_1$ el arco constante que une los puntos \tilde{p}_1 y \tilde{p}_2 , concluimos que $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2$.

Q.E.D.

COROLARIO. Sean $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ una aplicación recubridora, \tilde{B} conexo por arcos y B simplemente conexo. Entonces π es un homeomorfismo.

Que hayamos demostrado las props. 3, 4 y 5 con más generalidad que la estrictamente necesaria nos va a permitir dar, como veremos a continuación, otra respuesta a la cuestión 1.

Sea $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ un homeomorfismo local con la propiedad de elevación de arcos y admitamos que \tilde{B} y B se «comportan bien» localmente (en un sentido a precisar). Entonces π es, de hecho, una aplicación recubridora.

Las propiedades locales que se necesitan se describen en los términos siguientes. Recordemos que $B \subset R^3$ es localmente conexo por arcos si cualquier entorno de cada punto contiene un entorno conexo por arcos (apéndice al cap. 5, def. 12).

DEFINICION 4. B es localmente simplemente conexo si cualquier entorno de cada punto contiene un entorno simplemente conexo.

En otras palabras, B es localmente simplemente conexo si cada punto admite entornos simplemente conexos arbitrariamente pequeños. Es claro que si B es localmente simplemente conexo entonces B es localmente conexo por arcos.

Resaltamos que una superficie regular S es localmente simplemente conexa, pues $p \in S$ admite entornos, arbitrariamente pequeños, que son homeomorfos al interior de un disco en el plano.

Necesitaremos, en la próxima proposición, las siguientes propiedades de los conjuntos localmente conexos por arcos $B \subset R^3$ (cf. la parte D del apéndice al cap. 5). Es claro que la unión A , de todos los subconjuntos conexos por arcos de B que contienen a un punto $p \in B$, es un conjunto conexo por arcos denominado la *componente conexa por arcos* de B que contiene a p . Como B es localmente conexo por arcos, A es abierto en B . Así, B se puede escribir como la unión $B = \bigcup_a A_a$ de sus componentes A_a , que son abiertos disjuntos dos a dos.

Resaltamos también que una superficie regular S es localmente conexa por arcos. Por tanto, en la proposición siguiente, las hipótesis sobre B y \tilde{B} se satisfacen cuando B y \tilde{B} son superficies regulares.

PROPOSICION 6. Sea $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ un homeomorfismo local con la propiedad de elevación de arcos. Admitamos que B es localmente simplemente conexo y que \tilde{B} es localmente conexo por arcos. Entonces π es una aplicación recubridora.

Demostración. Sea $p \in B$ y sea V un entorno simplemente conexo de p en B . El conjunto $\pi^{-1}(V)$ es la unión de sus componentes conexas por arcos; es decir,

$$\pi^{-1}(V) = \bigcup_a \tilde{V}_a,$$

donde los \tilde{V}_a son conjuntos abiertos, conexos por arcos y disjuntos dos a dos. Considerese la restricción $\pi: \tilde{V}_a \rightarrow V$. Si demostramos que π es un homeomorfismo de \tilde{V}_a sobre V , π cumplirá las condiciones de la definición de aplicación recubridora.

Primero demostramos que $\pi(\tilde{V}_a) = V$. En efecto, $\pi(\tilde{V}_a) \subset V$. Admitamos que existe un punto $p \in V$, $p \notin \pi(\tilde{V}_a)$. Entonces, al ser V conexo por arcos, existe un arco $\alpha: [a, b] \rightarrow V$ que une un punto $q \in \pi(\tilde{V}_a)$ con p . La elevación $\tilde{\alpha}: [a, b] \rightarrow \tilde{B}$ de α con origen en $\tilde{q} \in \tilde{V}_a$, donde $\pi(\tilde{q}) = q$, es un arco en \tilde{V}_a , pues \tilde{V}_a es una componente conexa por arcos de B . Por tanto,

$$\pi(\tilde{\alpha}(b)) = p \in \pi(\tilde{V}_a),$$

que es una contradicción y prueba que $\pi(\tilde{V}_a) = V$.

A continuación, observemos que $\pi: \tilde{V}_a \rightarrow V$ también es un homeomorfismo local pues \tilde{V}_a es un abierto. Además, por la discusión precedente, la aplicación $\pi: \tilde{V}_a \rightarrow V$ todavía preserva la propiedad de elevación de arcos. En consecuencia, hemos verificado las condiciones de la prop. 5; luego π es un homeomorfismo.

Q.E.D.

B. Los teoremas de Hadamard

Volvamos sobre la cuestión que planteamos al comienzo de esta sección, a saber, bajo qué condiciones el difeomorfismo local $\exp_p: T_p(S) \rightarrow S$, donde p es un punto de una superficie completa S de curvatura $K \leq 0$, es un difeomorfismo global de $T_p(S)$ sobre S . Las proposiciones siguientes, que sirven para «descomponer» la cuestión propuesta en las cuestiones 1 y 2, proporcionan una respuesta al problema.

Necesitamos el lema siguiente.

LEMA 1. Sea S una superficie completa de curvatura $K \leq 0$. Entonces $\exp_p: T_p(S) \rightarrow S$, $p \in S$, es creciente con respecto a la longitud en el sentido siguiente: si $u, w \in T_p(S)$, tenemos que

$$\langle (d\exp_p)_u(w), (d\exp_p)_u(w) \rangle \geq \langle w, w \rangle,$$

donde, como ya es habitual, w representa un vector de $(T_p(S))_u$ que se obtiene de w mediante la traslación u .

Demostración. La igualdad se satisface trivialmente en el caso $u = 0$. Así, sea $v = u/|u|$, $u \neq 0$, y sea $\gamma: [0, l] \rightarrow S$, la geodésica

$$\gamma(s) = \exp_p sv, \quad s \in [0, l].$$

Por el lema de Gauss podemos suponer que $\langle w, v \rangle = 0$. Sea $J(s) = s(d \exp_p)_{sv}(w)$ el campo de Jacobi a lo largo de v que se obtiene en lema 1 de la sec. 5.5. Sabemos que $J(0) = 0$, $(DJ/ds)(0) = w$ y que $\langle J(s), \gamma'(s) \rangle = 0$, $s \in [0, l]$.

Ahora obsérvese que, al ser $K \leq 0$ (cf. la ec. (1), sec. 5.5),

$$\frac{d}{ds} \left\langle J, \frac{DJ}{ds} \right\rangle = \left\langle \frac{DJ}{ds}, \frac{DJ}{ds} \right\rangle + \left\langle J, \frac{D^2J}{ds^2} \right\rangle = \left| \frac{DJ}{ds} \right|^2 - K|J|^2 \geq 0.$$

Esto implica que

$$\left\langle J, \frac{DJ}{ds} \right\rangle \geq 0;$$

luego,

$$\frac{d}{ds} \left\langle \frac{DJ}{ds}, \frac{DJ}{ds} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{DJ}{ds}, \frac{D^2J}{ds^2} \right\rangle = -2K \left\langle \frac{DJ}{ds}, J \right\rangle \geq 0. \quad (1)$$

Se deduce entonces que

$$\left\langle \frac{DJ}{ds}, \frac{DJ}{ds} \right\rangle \geq \left\langle \frac{DJ}{ds}(0), \frac{DJ}{ds}(0) \right\rangle = \langle w, w \rangle = C; \quad (2)$$

por tanto,

$$\frac{d^2}{ds^2} \langle J, J \rangle = 2 \left\langle \frac{DJ}{ds}, \frac{DJ}{ds} \right\rangle + 2 \left\langle J, \frac{D^2J}{ds^2} \right\rangle \geq 2 \left\langle \frac{DJ}{ds}, \frac{DJ}{ds} \right\rangle \geq 2C. \quad (3)$$

Integrando ambos miembros de la última desigualdad obtenemos

$$\frac{d}{ds} \langle J, J \rangle \geq 2Cs + \left(\frac{d}{ds} \langle J, J \rangle \right)_{s=0} = 2Cs + 2 \left\langle \frac{DJ}{ds}(0), J(0) \right\rangle = 2Cs.$$

Otra integración da lugar a

$$\langle J, J \rangle \geq Cs^2 + \langle J(0), J(0) \rangle = Cs^2.$$

Poniendo $s = l$ en la expresión precedente y observando que $C = \langle w, w \rangle$, obtenemos

$$\langle J(l), J(l) \rangle \geq l^2 \langle w, w \rangle.$$

Como $J(l) = l(d \exp_p)_{lv}(w)$, concluimos finalmente que

$$\langle (d \exp_p)_h(w), (d \exp)_{hv}(w) \rangle \geq \langle w, w \rangle.$$

Q.E.D.

Para su uso posterior, es conveniente establecer la siguiente consecuencia de la demostración precedente.

COROLARIO (de la demostración). Sea $K = 0$. Entonces $\exp_p: T_p(S) \rightarrow S$, $p \in S$, es una isometría local.

Basta con observar que si $K = 0$, entonces es posible substituir « ≥ 0 » por « $= 0$ » en las ecs. (1), (2) y (3) de la demostración.

PROPOSICIÓN 7. Sea S una superficie completa con curvatura gaussiana $K \leq 0$. Entonces la aplicación $\exp_p: T_p(S) \rightarrow S$, $p \in S$, es una aplicación recubridora.

Demostración. Como sabemos que \exp_p es un difeomorfismo local, basta (en virtud a la prop. 6) con demostrar que \exp_p tiene la propiedad de elevación de arcos.

Sea $\alpha: [0, l] \rightarrow S$ un arco en S y sea también $v \in T_p(S)$ tal que $\exp_p v = \alpha(0)$. Tal v existe pues S es completa. Al ser \exp_p un difeomorfismo local, existe un entorno U de v en $T_p(S)$ tal que la restricción de \exp_p a U es un difeomorfismo. Utilizando \exp_p^{-1} en $\exp_p(U)$, es posible definir $\tilde{\alpha}$ en un entorno de 0.

Representemos ahora por A el conjunto de $t \in [0, l]$ tal que $\tilde{\alpha}$ está definida en $[0, t]$. A es no vacío y si está definido $\tilde{\alpha}(t_0)$, entonces el arco $\tilde{\alpha}$ está definido en un entorno de t_0 ; es decir, A es abierto en $[0, l]$. Cuando demostremos que A es cerrado en $[0, l]$, habremos probado, por la conexidad de $[0, l]$, que $A = [0, l]$ y habremos elevado completamente a α .

Por tanto, el punto crucial de la demostración consiste en demostrar que A es cerrado en $[0, l]$. Para ello, sea $t_0 \in [0, l]$ un punto de acumulación de A y $\{t_n\}$ una sucesión con $\{t_n\} \rightarrow t_0$, $t_n \in A$, $n = 1, 2, \dots$. Primero demostraremos que $\tilde{\alpha}(t_n)$ tiene un punto de acumulación.

Admitamos que $\tilde{\alpha}(t_n)$ no tiene un punto de acumulación en $T_p(S)$. Entonces, dado un disco cerrado D en $T_p(S)$, con centro $\tilde{\alpha}(0)$, existe un n_0 tal que $\tilde{\alpha}(t_{n_0}) \notin D$. Se deduce entonces que la distancia, en $T_p(S)$, de $\tilde{\alpha}(0)$ a $\tilde{\alpha}(t_{n_0})$ se hace arbitrariamente grande. Como por el lema 1, $\exp_p: T_p(S) \rightarrow S$ crece con la longitud de los vectores, resulta claro que la distancia intrínseca en S de $\alpha(0)$ a $\alpha(t_{n_0})$ se hace arbitrariamente intrínseca de $\alpha(0)$ a $\alpha(t_0) = \lim_{n \rightarrow n_0} \alpha(t_n)$ es finita, lo que prueba nuestra afirmación.

Denotemos por q a un punto de acumulación de $\tilde{\alpha}(t_n)$.

Sea ahora V un entorno de q en $T_p(S)$ tal que la restricción de \exp_p a V sea un difeomorfismo. Como q es un punto de acumulación de $\{\tilde{\alpha}(t_n)\}$, entonces existe un n_1 tal que $\tilde{\alpha}(t_{n_1}) \in V$. Además, como α es continua, existe un intervalo abierto $I \subset [0, l]$, $t_0 \in I$, tal que $\alpha(I) \subset \exp_p(V) = U$. Utilizando la restricción de \exp_p^{-1} en U es posible definir una elevación de α en I , con origen en $\tilde{\alpha}(t_{n_1})$. Como \exp_p es un difeomorfismo local, esta elevación coincide con $\tilde{\alpha}$ en $[0, t_0] \cap I$ y por tanto es una extensión de $\tilde{\alpha}$ a un intervalo que contiene a t_0 . Por tanto A es cerrado y concluimos la demostración de la prop. 7.

Q.E.D.

Observación 1. Nótese que la condición de curvatura $K \leq 0$ sólo se utilizó para garantizar que $\exp_p: T_p(S) \rightarrow S$ es un difeomorfismo local creciente con respecto a la longitud. Consecuentemente, hemos demostrado en realidad que si $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ es un

difeomorfismo local de una superficie completa S_1 sobre una superficie S_2 , que es creciente con respecto a la longitud, entonces φ es una aplicación recubridora.

La proposición siguiente, conocida como el teorema de Hadamard, describe la estructura topológica de una superficie completa con curvatura $K \leq 0$.

TEOREMA 1 (Hadamard). Sea S una superficie completa, simplemente conexa, con curvatura gaussiana $K \leq 0$. Entonces $\exp_p: T_p(S) \rightarrow S$, $p \in S$, es un difeomorfismo; es decir, S es difeomorfa a un plano.

*Demuestra*ción. Por la prop. 7, $\exp_p: T_p(S) \rightarrow S$ es una aplicación recubridora. Por el corolario de la prop. 5, \exp_p es un homeomorfismo. Como \exp_p es un difeomorfismo local, su aplicación inversa es diferenciable y \exp_p es un difeomorfismo.

Q.E.D.

También presentaremos ahora otra aplicación geométrica de los espacios recubridores, que se conoce asimismo como el teorema de Hadamard. Recordemos que una superficie regular compacta, conexa y con curvatura gaussiana $K > 0$ se denomina un ovaloide (cf. la observación 1, sec. 5.2).

TEOREMA 2 (Hadamard). Sea S un ovaloide. Entonces, la aplicación de Gauss $N: S \rightarrow S^2$ es un difeomorfismo. En particular, S es difeomorfa a una esfera.

*Demuestra*ción. Como para cada $p \in S$, la curvatura gaussiana de S , $K = \det(dN_p)$, es positiva, N es un difeomorfismo local. Por la prop. 1, N es una aplicación recubridora. Al ser la esfera S^2 simplemente conexa, concluimos del corolario a la prop. 5 que $N: S \rightarrow S^2$ es un homeomorfismo de S sobre la esfera unidad S^2 . Al ser N un difeomorfismo local, su aplicación inversa es diferenciable. Por tanto, N es un difeomorfismo.

Q.E.D.

Observación 2. Hemos probado en realidad algo más. En virtud a que la aplicación de Gauss N es un difeomorfismo, cada vector unitario $v \in R^3$ comparece exactamente una vez como vector unitario normal a S . Tomando un plano normal a v , alejado de la superficie, y desplazándolo paralelamente a sí mismo hasta que toque a la superficie concluimos que S se halla a un lado de cada uno de sus planos tangentes. Esto puede expresarse diciendo que un ovaloide S es *localmente convexo*. Partiendo de este hecho puede demostrarse que S es, en realidad, la frontera de un conjunto convexo (es decir, un conjunto $K \subset R^3$ tal que el segmento rectilíneo que une dos puntos cualesquiera $p, q \in K$ está completamente contenido en K).

Observación 3. El resultado de que las superficies compactas con $K > 0$ son homeomorfas a las esferas fue extendido por S. S. Chern y R. K. Lashof a superficies compactas con $K \geq 0$. («On the Total Curvature of Immersed Manifolds», *Michigan*

Math. J. 5 (1958), 5-12). J. J. Stoker fue el primero en obtener una generalización a superficies completas («Über die Gestalt der positiv gerkrümmten offenen Fläche», *Compositio Math.* 3 (1936), 58-89), demostrando, entre otras cosas, lo siguiente: *una superficie completa con $K > 0$ es homeomorfa a una esfera o a un plano*. Este resultado también es cierto para $K \geq 0$ si uno supone que $K > 0$ en algún punto (se encuentra una demostración de este hecho en M. do Carmo y E. Lima, «Isometric Immersions with Non-negative Sectional Curvatures», *Boletim da Soc. Bras. Mat.* 2 (1971), 9-22, así como una recapitulación de resultados sobre este problema).

EJERCICIOS

1. Demuéstrese que la aplicación $\pi: R \rightarrow S^1 = \{(x, y) \in R^2; x^2 + y^2 = 1\}$ definida por $\pi(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in R$, es una aplicación recubridora.

2. Demuéstrese que la aplicación $\pi: R^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow R^2 - \{(0, 0)\}$ definida por

$$\pi(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy), \quad (x, y) \in R^2,$$

es una aplicación recubridora con dos hojas.

3. Sea S el helicoide generado por las normales a la hélice $(\cos t, \sin t, bt)$. Denotemos por L al eje z y sea $\pi: S - L \rightarrow R^2 - \{(0, 0)\}$ la proyección $\pi(x, y, z) = (x, y)$. Demuéstrese que π es una aplicación recubridora.

4. Los que estén familiarizados con las funciones de una variable compleja habrán observado que la aplicación π del ejercicio 2 no es otra cosa que la aplicación $\pi(z) = z^2$ de $C - \{0\}$ en $C - \{0\}$; siendo C el plano complejo y $z \in C$. Generalícese el ejercicio 2 demostrando que la aplicación $\pi: C - \{0\} \rightarrow C - \{0\}$ dada por $\pi(z) = z^n$ es una aplicación recubridora de n hojas.

5. Sea $B \subset R^3$ un conjunto conexo por arcos. Demuéstrese que las siguientes propiedades son equivalentes (cf. la def. 3):

1. Para cualquier par de puntos $p, q \in B$ y cualquier par de arcos $\alpha_0: [0, l] \rightarrow B$, $\alpha_1: [0, l] \rightarrow B$, existe una homotopía en B que une α_0 y α_1 .

2. Para cualquier $p \in B$ y cualquier arco $\alpha: [0, l] \rightarrow B$ con $\alpha(0) = \alpha(l) = p$ (es decir, α es un arco cerrado cuyos puntos inicial y final son p) existe una homotopía que une α con el arco constante $\alpha(s) = p$, $s \in [0, l]$.

6. Fíjese un punto $p_0 \in R^2$ y defínase la familia de aplicaciones $\varphi_t: R^2 \rightarrow R^2$, $t \in [0, 1]$, mediante $\varphi_t(p) = t_{p_0} + (1-t)p$, $p \in R^2$. Obsérvese que $\varphi_0(p) = p$, $\varphi_1(p) = p_0$. En consecuencia, φ_t es una familia continua de aplicaciones que empieza en la aplicación identidad y termina en la aplicación constante p_0 . Utilíicense estas consideraciones para demostrar que R^2 es simplemente conexo.

7. a. Utilíicense la proyección estereográfica y el ejercicio 6 para demostrar que cualquier arco cerrado sobre una esfera S^2 , que no contenga al menos un punto de S^2 , es homotópico a un arco constante.

b. Demuéstrese que cualquier arco cerrado en S^2 es homotópico a un arco cerrado de S^2 que excluye al menos un punto de S^2 .

- c. Partiendo de a y b concluir que S^2 es simplemente conexo. ¿Por qué es necesaria la parte b?
8. **Lema de Klingenberg.** Sea $S \subset R^3$ una superficie completa con curvatura gaussiana $K \leq K_0$, donde K_0 es una constante no negativa. Sean $p, q \in S$ y sean γ_0 y γ_1 dos geodésicas distintas que unen p con q , tal que $l(\gamma_0) \leq l(\gamma_1)$; donde $l(\cdot)$ representa la longitud de la curva correspondiente. Admitamos que γ_0 es homotópica a γ_1 ; es decir, existe una familia continua de curvas α_t , $t \in [0, 1]$, que unen p con q , tal que $\alpha_1 = \gamma_1$. El objetivo de este ejercicio es demostrar que existe un $t_0 \in [0, 1]$ tal que

$$l(\gamma_0) + l(\alpha_{t_0}) \geq \frac{2\pi}{\sqrt{K_0}}.$$

(En consecuencia, la homotopía tiene que «pasar» por una curva «larga». Véase la fig. 5-29.) Supóngase que $l(\gamma_0) < \pi/\sqrt{K_0}$ (en caso contrario no habría nada que demostrar) y procédase como se indica a continuación.

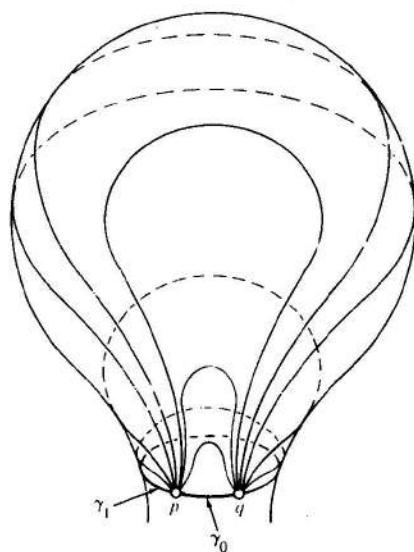


Figura 5-29. Lema de Klingenberg.

- a. Utilizar el primer teorema de comparación (cf. el ejercicio 3, sec. 5.5) para demostrar que $\exp_p: T_p(S) \rightarrow S$ carece de puntos críticos en el disco abierto B de radio $\pi/\sqrt{K_0}$ y centro p .
- b. Demostrar que, para t pequeño, es posible elevar la curva α_t al plano tangente $T_p(S)$; es decir, existe una curva $\tilde{\alpha}_t$ que une $\exp_p^{-1}(p) = 0$ con $\exp_p^{-1}(q) = \bar{q}$ y es tal que $\exp_p \circ \tilde{\alpha}_t = \alpha_t$.
- c. Demuéstrese que la elevación de la parte b no puede definirse para todo $t \in [0, 1]$. Conclúyase que para cada $\epsilon > 0$ existe un $t(\epsilon)$ tal que $\alpha_{t(\epsilon)}$ puede elevarse a $\tilde{\alpha}_{t(\epsilon)}$ y que $\tilde{\alpha}_{t(\epsilon)}$ contiene puntos que están a una distancia $< \epsilon$ de la frontera de B . En consecuencia,

$$l(\gamma_0) + l(\alpha_{t(\epsilon)}) \geq \frac{2\pi}{\sqrt{K_0}} - 2\epsilon$$

- d. En la parte c, elijase una sucesión de números ϵ_n , $\{\epsilon_n\} \rightarrow 0$, y tómese una subsucesión convergente de $\{t(\epsilon_n)\}$. Conclúyase que existe una curva α_{t_0} , $t_0 \in [0, 1]$, tal que

$$l(\gamma_0) + l(\alpha_{t_0}) \geq \frac{2\pi}{\sqrt{K_0}}.$$

9. a. Utilizar el lema de Klingenberg para demostrar que si S es una superficie simplemente conexa, completa, con $K \leq 0$, entonces $\exp_p: T_p(S) \rightarrow S$ es inyectiva.
b. Utilizar la parte a para obtener una demostración simple del teorema de Hadamard (teorema 1).

- *10. **Lema de Synge.** Recordamos que una curva diferenciable cerrada sobre una superficie S es una aplicación diferenciable $\alpha: [0, l] \rightarrow S$ tal que α y todas sus derivadas coinciden en 0 y l . Se dice que dos curvas diferenciables cerradas $\alpha_0, \alpha_1: [0, l] \rightarrow S$ son *libremente homotópicas* si existe una aplicación continua $H: [0, l] \times [0, 1] \rightarrow S$ tal que $H(s, 0) = \alpha_0(s), H(s, 1) = \alpha_1(s)$, $s \in [0, l]$. La aplicación H se denomina una *homotopía libre* (los extremos no permanecen fijos) entre α_0 y α_1 . Admitamos que S es orientable y que tiene curvatura gaussiana positiva. Demostrar que cualquier geodésica cerrada y simple de S es libremente homotópica a una curva cerrada de menor longitud.

11. Sea S una superficie completa. Se dice que un punto $p \in S$ es un *polo* si cada geodésica $\gamma: [0, \infty) \rightarrow S$ con $\gamma(0) = p$ carece de punto conjugado a p con respecto a γ . Utilízense las técnicas del lema de Klingenberg (ejercicio 8) para demostrar que si S es simplemente conexa y tiene un polo p , entonces $\exp_p: T_p(S) \rightarrow S$ es un difeomorfismo.

5.7. Teoremas globales para curvas: el teorema de Fary-Milnor

En esta sección se van a presentar algunos teoremas globales para curvas cerradas. La principal herramienta que se utilizará es la teoría del grado para aplicaciones continuas del círculo. Para introducir la noción de grado, usaremos algunas de las propiedades de las aplicaciones recubridoras que se desarrollaron en la sec. 5.6.

Sea $S^1 = \{(x, y) \in R^2; x^2 + y^2 = 1\}$ y $\pi: R \rightarrow S^1$ el recubrimiento de S^1 por la recta real R dado por

$$\pi(x) = (\cos x, \sin x), \quad x \in R.$$

Sea $\varphi: S^1 \rightarrow S^1$ una aplicación continua. El grado de φ se define como sigue. Podemos imaginarnos el primer S^1 de la aplicación $\varphi: S^1 \rightarrow S^1$ como un intervalo cerrado $[0, l]$ cuyos puntos extremos 0 y l se han identificado. Así, nos podemos imaginar a φ como una aplicación continua $\varphi: [0, l] \rightarrow S^1$, con $\varphi(0) = \varphi(l) = p \in S^1$. Por tanto, φ es un arco cerrado en S^1 , que pasa por p , el cual, en virtud a la prop. 2 de la sec. 5.6, puede elevarse a un arco único $\tilde{\varphi}: [0, l] \rightarrow R$, que empieza en un punto $x \in R$ con $\pi(x) = p$. Como $\pi(\varphi(0)) = \pi(\varphi(l))$, la diferencia $\tilde{\varphi}(l) - \tilde{\varphi}(0)$ es un múltiplo entero de 2π . El número entero $\deg \varphi$ definido por

$$\tilde{\varphi}(l) - \tilde{\varphi}(0) = (\deg \varphi)2\pi$$

se denomina el *grado* de φ .

* *deg* es la abreviatura de *degree*, grado en inglés (N. del T.).

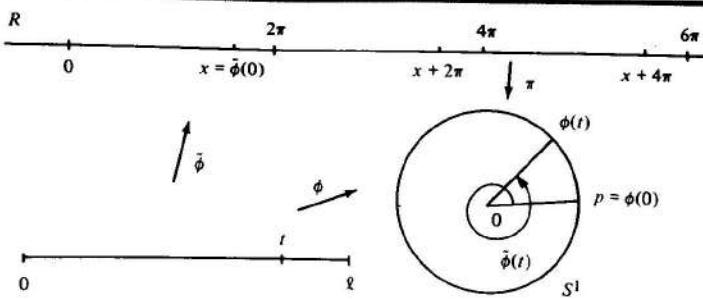


Figura 5-30

Intuitivamente, $\deg \varphi$ es el número de veces que $\varphi: [0, l] \rightarrow S^1$ «envuelve» a $[0, l]$ alrededor de S^1 (fig. 5-30). Nótese que la función $\tilde{\varphi}: [0, l] \rightarrow R$ constituye una determinación continua del ángulo positivo que forma el vector fijo $\varphi(0) - O$ con $\varphi(t) - O$, $t \in [0, l]$, $O = (0, 0)$. Por ejemplo, la aplicación $\pi: S^1 \rightarrow S^1$ descrita en el ejemplo 4 de la sec. 5.6, parte A, tiene grado k .

Tenemos que demostrar que la definición de grado es independiente de las elecciones de p y de x .

Primero, $\deg \varphi$ no depende de la elección de x . En efecto, sea $x_1 > x$, un punto de R tal que $\pi(x_1) = p$, y sea $\tilde{\varphi}_1(t) = \tilde{\varphi}(t) + (x_1 - x)$, $t \in [0, l]$. Como $x_1 - x$ es un múltiplo entero de 2π , $\tilde{\varphi}_1$ es una elevación de $\tilde{\varphi}$ que empieza en x_1 . En virtud a la parte de unicidad de la prop. 2 de la sec. 5.6, $\tilde{\varphi}_1$ es la elevación de $\tilde{\varphi}$ que empieza en x_1 . Al ser

$$\tilde{\varphi}_1(l) - \tilde{\varphi}_1(0) = \tilde{\varphi}(l) - \tilde{\varphi}(0) = (\deg \varphi)2\pi,$$

obtenemos el mismo grado, tanto si se calcula en x como si se calcula en x_1 .

En segundo lugar, $\deg \varphi$ no depende de la elección de $p \in S^1$. En efecto, cada punto $p_1 \in S^1$, exceptuando el punto antipodal a p , pertenece a un entorno distinguido U_1 de p . Elijamos x_1 en la componente conexa de $\pi^{-1}(U_1)$ que contiene a x , de suerte que $\pi(x_1) = p_1$, y sea $\tilde{\varphi}_1$ la elevación de

$$\varphi: [0, l] \rightarrow S^1, \varphi(0) = p_1,$$

que empieza en x_1 . Es claro que $|\tilde{\varphi}_1(0) - \tilde{\varphi}(0)| < 2\pi$. Por tanto, mediante el proceso de etapas sucesivas con el que se construyen las elevaciones (cf. la demostración de la prop. 2, sec. 5.6) se obtiene que $|\tilde{\varphi}_1(l) - \tilde{\varphi}(l)| < 2\pi$. Como las dos diferencias $\tilde{\varphi}_1(l) - \tilde{\varphi}_1(0)$, $\tilde{\varphi}_1(l) - \tilde{\varphi}(0)$ tienen que ser múltiplos enteros de 2π , sus valores en realidad son iguales. Por continuidad, la conclusión también es cierta para el punto antipodal de p . Con esto ya hemos demostrado nuestra afirmación.

La propiedad más importante del grado es su invarianza frente a homotopías. Con más precisión, sean $\varphi_1, \varphi_2: S^1 \rightarrow S^1$ aplicaciones continuas. Fijemos un punto $p \in S^1$, obteniendo así dos arcos cerrados en p , $\varphi_1, \varphi_2: [0, l] \rightarrow S^1$, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = p$. Si φ_1 y φ_2 son homotópicos, entonces $\deg \varphi_1 = \deg \varphi_2$. Esto se deduce de manera inmediata,

a partir del hecho de que (prop. 4, sec. 5.6) las elevaciones de φ_1 y de φ_2 , que empiezan en un punto fijo $x \in R$, son homotópicas; en consecuencia, tienen los mismos extremos.

Debe subrayarse que si $\varphi: [0, l] \rightarrow S^1$ es diferenciable, determina funciones diferenciables $a = a(t)$, $b = b(t)$, dadas por $\varphi(t) = (a(t), b(t))$, que satisfacen la condición $a^2 + b^2 = 1$. En este caso, la elevación $\tilde{\varphi}$ que empieza en $\tilde{\varphi}_0 = x$ es precisamente la función diferenciable (cf. el lema 1, sec. 4.4)

$$\tilde{\varphi}(t) = \tilde{\varphi}_0 + \int_0^t (ab' - ba') dt.$$

Ello se deduce de la unicidad de la elevación y del hecho de que $\cos \tilde{\varphi}(t) = a(t)$, sen $\tilde{\varphi}(t) = b(t)$, $\tilde{\varphi}(0) = \tilde{\varphi}_0$. Por tanto, en el caso diferenciable, el grado de φ puede expresarse por la integral,

$$\deg \varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{d\varphi}{dt} dt.$$

Bajo esta forma, la noción de grado ya ha aparecido varias veces en este libro. Por ejemplo, cuando $v: U \subset R^2 \rightarrow R^2$, $S^1 \subset U$ es un campo vectorial y $(0, 0)$ es su única singularidad, el índice de v en $(0, 0)$ puede interpretarse como el grado de la aplicación $\varphi: S^1 \rightarrow S^1$, definida por $\varphi(p) = v(p)/|v(p)|$, $p \in S^1$ (cf. la sec. 4.5, aplicación 5).

Antes de abordar más ejemplos, recordemos que una curva (diferenciable) cerrada es una aplicación diferenciable $\alpha: [0, l] \rightarrow R^3$ (o R^2 , si la curva es plana) tal que las componentes de α , junto con todas sus derivadas, coinciden en 0 y l . La curva α es regular si $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in [0, l]$, y, si para cualesquiera $t_1, t_2 \in [0, l]$, $t_1 \neq t_2$, se tiene $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$, entonces α es simple. Algunas veces es conveniente admitir que α es solamente continua; en este caso, diremos explícitamente que α es una curva cerrada continua.

Ejemplo 1 (El número de vueltas de una curva). Sea $\alpha: [0, l] \rightarrow R^2$ una curva cerrada continua y plana. Elijamos un punto $p_0 \in R^2$, $p_0 \notin \alpha([0, l])$ y definamos $\varphi: [0, l] \rightarrow S^1$ mediante

$$\varphi(t) = \frac{\alpha(t) - p_0}{|\alpha(t) - p_0|}, \quad t \in [0, l].$$

Es claro que $\varphi(0) = \varphi(l)$ y que podemos imaginarnos a φ como una aplicación de S^1 en S^1 ; se denomina la aplicación de posición de α con respecto a p_0 . El grado de φ se denomina el número de vueltas (o el índice) de la curva α con respecto a p_0 (fig. 5-31).

Nótese que movimiento p_0 a lo largo de un arco β que no corte a $\alpha([0, l])$ el número de vueltas no varía. De hecho, las aplicaciones de posición de α con respecto a cualquier pareja de puntos de β pueden unirse claramente mediante una homotopía. Se deduce entonces que el número de vueltas de α con respecto a q es constante cuando q recorre una componente conexa de $R^2 - \alpha([0, l])$.

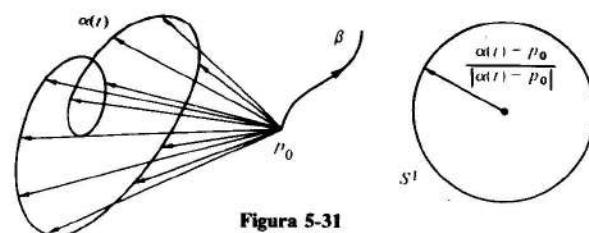


Figura 5-31

Ejemplo 2 (El índice de rotación de una curva). Sea $\alpha: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular, cerrada y plana, y sea $\varphi: [0, l] \rightarrow S^1$ la aplicación definida por

$$\varphi(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}, \quad t \in [0, l].$$

Está claro que φ es diferenciable y $\varphi(0) = \varphi(l)$. Se denomina a φ la *aplicación tangente* de α , y se denomina *índice de rotación* de α al grado de φ . Intuitivamente, el índice de rotación de una curva cerrada es el número completo de vueltas que efectúa el campo vectorial tangente a lo largo de la curva (fig. 1-27, sec. 1.7).

Es posible extender la noción de índice de rotación a curvas regulares a trozos utilizando los ángulos de los vértices (véase la sec. 4.5) y demostrar que el índice de rotación de una curva cerrada, simple y regular a trozos es ± 1 (teorema de rotación de tangentes). Se utiliza este hecho en la demostración del teorema de Gauss-Bonnet. Demostraremos más adelante en esta sección una versión diferenciable del teorema de rotación de tangentes.

Nuestro primer teorema global va a constituir una versión diferenciable del denominado teorema de la curva de Jordan. Para la demostración se presupone alguna familiaridad con la materia de la sec. 2-7.

TEOREMA 1 (El teorema de la curva de Jordan diferenciable). Sea $\alpha: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular, cerrada, plana y simple. Entonces $\mathbb{R}^2 - \alpha([0, l])$ tiene exactamente dos componentes conexas, siendo $\alpha([0, l])$ su frontera común.

Demostración. Sea $N_\epsilon(\alpha)$ un entorno tubular de $\alpha([0, l])$. Este se construye de la misma manera que el entorno tubular de una superficie compacta ya utilizado (cf. la sec. 2.7). Recordamos que $N_\epsilon(\alpha)$ es la unión de segmentos normales abiertos $I_\epsilon(t)$, de longitud 2ϵ y centro en $\alpha(t)$. Es claro que $N_\epsilon(\alpha) - \alpha([0, l])$ tiene dos componentes conexas T_1 y T_2 . Denotemos por $w(p)$ al número de vueltas de α con respecto a $p \in \mathbb{R}^2 - \alpha([0, l])$. El punto crucial de la demostración consiste en probar que si tanto p_1 como p_2 pertenecen a componentes conexas distintas de $N_\epsilon(\alpha) - \alpha([0, l])$ y al mismo $I_\epsilon(t_0)$, $t_0 \in [0, l]$, entonces $w(p_1) - w(p_2) = \pm 1$, donde el signo depende de la orientación de α .

Elijanese los puntos $A = \alpha(t_1)$, $D = \alpha(t_2)$, $t_1 < t_0 < t_2$ lo suficientemente próximos a t_0 como para que el arco AD de α se pueda deformar homotópicamente sobre el polígono $ABCD$ de la fig. 5-32. Aquí BC es un segmento de la recta tangente en $\alpha(t)$ y BA y CD son paralelos a la recta normal en $\alpha(t_0)$.

Denotemos por $\beta: [0, l] \rightarrow S^1$ las aplicaciones de posición de β asociadas, respectivamente, a p_1 y p_2 (cf. el Ejemplo 1), y sean $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ sus elevaciones desde un punto fijo, por ejemplo, $O \in \mathbb{R}$. Por conveniencia, admitamos que la orientación de β es la que se muestra en la fig. 5-32.

Resaltamos en primer lugar que si $t \in [t_3, l]$, las distancias de $\alpha(t)$ a p_1 y p_2 están acotadas inferiormente por un número que no depende de t , a saber, el menor de los números $\text{dist}(p_1, \text{Bd } N_\epsilon(\alpha))$ y $\text{dist}(p_2, \text{Bd } N_\epsilon(\alpha))$. Se deduce entonces que el ángulo entre $\alpha(t) - p_1$ y $\alpha(t) - p_2$ tiende a cero uniformemente en $[t_3, l]$ cuando p_1 se approxima a p_2 .

Está claro ahora que es posible elegir p_1 y p_2 lo suficientemente próximos entre sí como para que $\tilde{\varphi}_1(t_3) - \tilde{\varphi}_1(0) = \pi - \epsilon_1$ y $\tilde{\varphi}_2(t_3) - \tilde{\varphi}_2(0) = -(\pi + \epsilon_2)$, con ϵ_1 y ϵ_2 más pequeños que $\pi/3$. Además,

$$\begin{aligned} 2\pi(w(p_1) - w(p_2)) &= (\tilde{\varphi}_1(l) - \tilde{\varphi}_1(0)) - (\tilde{\varphi}_2(l) - \tilde{\varphi}_2(0)) \\ &= \{(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2)(l) - (\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2)(t_3)\} \\ &\quad + \{(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2)(t_3) - (\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2)(0)\}. \end{aligned}$$

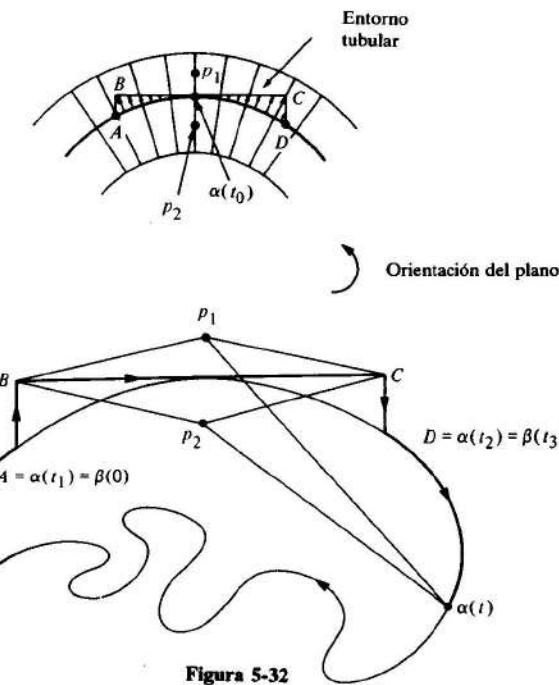


Figura 5-32

Por la observación precedente, si p_1 es lo suficientemente próximo a p_2 , el primer término puede hacerse arbitrariamente pequeño, por ejemplo, igual a $\epsilon_3 < \pi/3$. Así,

$$2\pi(w(p_1) - w(p_2)) = \epsilon_3 + \pi - \epsilon_1 - (-\pi - \epsilon_2) = 2\pi + \epsilon,$$

donde $\varepsilon < \pi$ si p_1 es lo suficientemente próximo a p_2 . Se deduce entonces que $w(p_1) - w(p_2) = 1$; como habíamos afirmado.

Es fácil ahora completar la demostración. Como $w(p)$ es constante en cada componente conexa de $R^2 - \alpha([0, l]) = W$, se deduce de lo dicho más arriba que hay al menos dos componentes conexas en W . Demostraremos ahora que hay exactamente dos componentes.

En efecto, sea C una componente conexa de W . Está claro que $Bd C \neq \emptyset$ y que $Bd C \subset \alpha([0, l])$. Por otra parte, si $p \in \alpha([0, l])$, existe un entorno de p que sólo contiene puntos de $\alpha([0, l])$, puntos de T_1 y puntos de T_2 (T_1 y T_2 son las componentes conexas de $N_\varepsilon(\alpha) - \alpha([0, l])$). En consecuencia, o T_1 intersecta a C o T_2 intersecta a C . Como C es una componente conexa, $T_1 \subset C$ o $T_2 \subset C$. Por lo tanto, a lo más existen dos (luego, dos con exactitud) componentes conexas de W . Llamémoslas C_1 y C_2 . El argumento también prueba que $Bd C_1 = \alpha([0, l]) = Bd C_2$.

Q.E.D.

Las dos componentes conexas que se obtienen en el teorema 1 se pueden distinguir fácilmente entre sí. Una parte de la observación de que si p_0 está fuera de un disco cerrado D que contiene a $\alpha([0, l])$ (tal disco existe pues $[0, l]$ es compacto), entonces el número de vueltas de α con respecto a p_0 es cero. Ello se deduce del hecho de que todas las rectas que unen p_0 con $\alpha(t)$, $t \in [0, l]$, se hallan dentro de una región que contiene a D y que está delimitada por las dos tangentes al círculo $Bd D$ que pueden trazarse desde p_0 . Por tanto, la componente conexa que tiene número de vueltas cero es no acotada y contiene a todos los puntos exteriores a un cierto disco. Está claro que la componente conexa restante tiene un número de vueltas igual a ± 1 y está acotada. Es habitual denominarlas, respectivamente, el *exterior* y el *interior* de α .

Observación 1. Un complemento útil al teorema precedente, que ya se utilizó en las aplicaciones del teorema de Gauss-Bonnet (sec. 4.5), es el hecho de que el interior de α es homeomorfo a un disco abierto. En J. J. Stoker, *Differential Geometry*, Wiley-Interscience, Nueva York, 1969, pp. 43-45, se puede encontrar una demostración de este hecho.

Ahora demostraremos una versión diferenciable del teorema de rotación de tangentes.

TEOREMA 2. Sea $\beta: [0, l] \rightarrow R^2$ una curva regular, plana, cerrada y simple. Entonces el índice de rotación de β es ± 1 (dependiendo de la orientación de β).

Demostración. Consideremos una recta que no corta a la curva y desplácesela paralelamente a sí misma hasta que sea tangente a la curva. Denotemos por l esta posición de la recta y por p a un punto de tangencia de la curva con l . Está claro que la curva se halla totalmente contenida a un lado de l (fig. 5-33). Elijamos una nueva parametrización $\alpha: [0, l] \rightarrow R^2$ para la curva de forma que $\alpha(0) = p$. Definamos ahora el triángulo

$$T = \{(t_1, t_2) \in [0, l] \times [0, l]; 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq l\}$$

y también la «aplicación secante» $\psi: T \rightarrow S^1$ mediante

$$\begin{aligned} \psi(t_1, t_2) &= \frac{\alpha(t_2) - \alpha(t_1)}{|\alpha(t_2) - \alpha(t_1)|} \quad \text{para } t_1 \neq t_2, (t_1, t_2) \in T - \{(0, l)\} \\ \psi(t, t) &= \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}, \quad \psi(0, l) = -\frac{\alpha'(0)}{|\alpha'(0)|} \end{aligned}$$

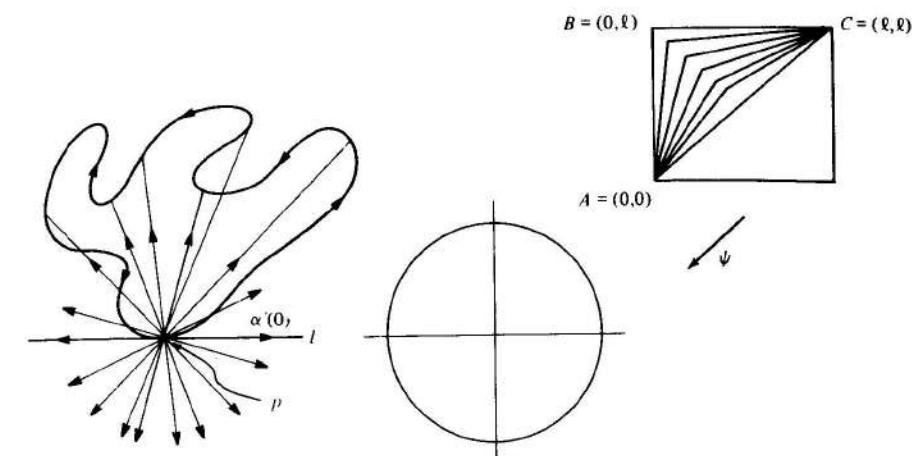


Figura 5-33

Como α es regular, es fácil ver que ψ es continua. Sean $A = (0, 0)$, $B = (0, l)$, $C = (l, l)$ los vértices de T . Nótese que la restricción de ψ al lado AC es la aplicación tangente de α , cuyo grado es el número de rotación de α . Está claro (fig. 5-33) que la aplicación tangente es homotópica a la restricción de ψ a los lados restantes AB y BC . Por tanto, hemos reducido el problema a probar que el grado de esta última aplicación es ± 1 .

Admitamos que las orientaciones del plano y de la curva son tales que el ángulo orientado de $\alpha'(0)$ a $-\alpha'(0)$ es π . Entonces la restricción de ψ a AB recubre una mitad de S^1 en la dirección positiva, y la restricción de ψ a BC recubre la mitad restante también en la dirección positiva (fig. 5-33). Por tanto, el grado de la restricción de ψ a AB y BC es $+1$. Invertiendo la orientación obtenemos que dicho grado es -1 . Con esto concluye la demostración.

Q.E.D.

El teorema de rotación de tangentes puede utilizarse para establecer una caracterización de una clase importante de curvas, a saber, las curvas convexas.

Una curva regular, cerrada y plana $\alpha: [0, l] \rightarrow R^2$ es *convexa* si, para cada $t \in [0, l]$ la curva se encuentra en uno de los semiplanos cerrados determinados por la recta tangente en t (fig. 5-34, cf. también la sec. 1.7). Si α es simple, la convexidad se puede expresar en términos de la curvatura. Recordamos que, para curvas planas, siempre se entiende que la curvatura está dotada de signo (sec. 1.5, observación 1).

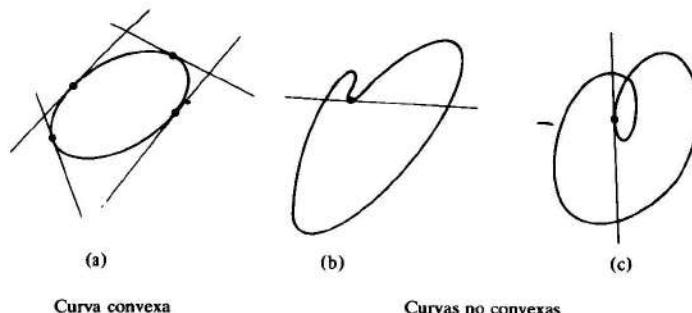


Figura 5-34

PROPOSICIÓN 1. Una curva regular y plana es convexa si y solamente si es simple y su curvatura k no cambia de signo.

Demostración. Sea $\varphi: [0, l] \rightarrow S^1$ la aplicación tangente de α y $\bar{\varphi}: [0, l] \rightarrow R$ la elevación de α que empieza en $0 \in R$. Primero observamos que la condición de que k no cambie de signo es equivalente a la condición de que $\bar{\varphi}$ sea monótona (no decreciente si $k \geq 0$, o no creciente si $k \leq 0$).

Supongamos ahora que α es simple y que k no cambia de signo. Podemos orientar el plano de la curva de forma que $k \geq 0$. Supongamos que α no es convexa. Entonces existe un $t_0 \in [0, l]$ tal que pueden encontrarse puntos de $\alpha([0, l])$ en los dos semiplanos determinados por la recta tangente T en $\alpha(t_0)$. Sea $n = n(t_0)$ el vector normal en t_0 y definamos

$$h_n(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), n \rangle, \quad t \in [0, l].$$

Como $[0, l]$ es compacto y los dos semiplanos asociados a T contienen puntos de la curva, la «función altura» h_n tiene un máximo en $t_1 \neq t_0$ y un mínimo en $t_2 \neq t_0$. Los vectores tangentes en los puntos t_0, t_1, t_2 son paralelos, por tanto, dos de ellos, pongamos por caso $\alpha'(t_0)$ y $\alpha'(t_1)$, tienen la misma dirección. Entonces $\varphi(t_0) = \varphi(t_1)$ y, por el teorema 2 (α es simple), $\bar{\varphi}(t_0) = \varphi(t_1)$. Supongamos que $t_1 > t_0$. Por la observación precedente, $\bar{\varphi}$ es monótona no decreciente, luego es constante sobre $[t_0, t_1]$. Esto significa que $\alpha([t_0, t_1]) \subset T$. Sin embargo, esto contradice la elección de T , demostrándose así que α es convexa.

Recíprocamente, supongamos que α es convexa. Se deja como ejercicio el demostrar que α no es simple, entonces se viola la condición de convexidad en un punto de autointersección (fig. 5-35(a)) o en las proximidades del mismo (fig. 5-35(b)). Luego α es simple.

Admitamos ahora que α es convexa y que k cambia de signo en $[0, l]$. Existe entonces puntos $t_1, t_2 \in [0, l]$, $t_1 < t_2$, con $\bar{\varphi}(t_1) = \bar{\varphi}(t_2)$, no siendo $\bar{\varphi}$ constante sobre $[t_1, t_2]$.

La demostración concluirá cuando probemos que esto último conduce a una contradicción. Por el teorema 2, existe un $t_3 \in [0, l)$ con $\varphi(t_3) = -\varphi(t_1)$. Por convexidad, dos de las tres tangentes paralelas en los puntos $a(t_1)$, $a(t_2)$, $a(t_3)$ deben

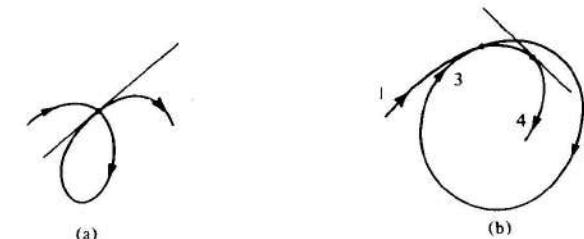


Figura 5-39

coincidir. Supongamos que es ése el caso para $\alpha(t_1) = p$, $\alpha(t_3) = q$, $t_3 > t_1$. Afirmando que el arco de α comprendido entre p y q es el segmento rectilíneo pq .

En efecto, admitamos que $r \neq q$ es el último punto para el que este arco es un segmento rectilíneo (r podría coincidir con p). Como la curva se halla en el mismo lado de la recta pq , se ve fácilmente que alguna tangente T en las proximidades de p va a cortar al segmento \overline{pq} en un punto interior (fig. 5-36). Entonces p y q se encuentran en lados distintos de T . Como esto es una contradicción, nuestra afirmación queda demostrada.

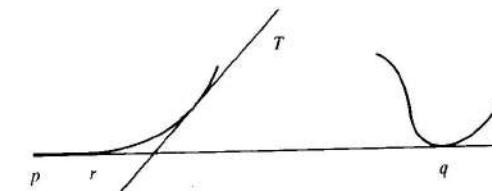


Figura 5-3

Se deduce entonces que las rectas tangentes coincidentes tienen las mismas direcciones; es decir, son realmente las rectas tangentes en $\alpha(t_1)$ y $\alpha(t_2)$. Por tanto, $\dot{\varphi}$ es constante en $[t_1, t_2]$, y esta contradicción demuestra que k no cambia de signo en $[0, l]$.

Observación 2. La condición de que α sea simple es esencial para la demostración, como muestra el ejemplo de la curva en la fig. 5-34(c).

Observación 3. La proposición debe confrontarse con las observaciones 2 y 3 de la sec. 5.6; se establece allí que una situación similar se da para superficies. Debe observarse que, en el caso de superficies, la no existencia de autointersecciones no es una hipótesis sino una consecuencia.

Observación 4. Puede demostrarse que una curva regular, cerrada y plana es convexa si y solamente si su interior es un conjunto convexo $K \subset R^2$ (cf. el ejercicio 4).

Ahora centraremos nuestra atención sobre curvas en el espacio. De aquí en adelante, la palabra curva se usará para dar a entender una curva parametrizada regular $\alpha: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^3$ donde el parámetro s es la longitud de arco. Si α es una curva plana, la curvatura $k(s)$ es la curvatura con signo de α (cf. la sec. 1.5); en otro caso, se supone que $k(s)$ es positiva para todo $s \in [0, l]$. Es conveniente llamar a

$$\int_0^l |k(s)| ds$$

la curvatura total de α .

El teorema global para curvas en el espacio más celebre es probablemente el que se conoce como teorema de Fenchel.

TEOREMA (Teorema de Fenchel). La curvatura total de una curva cerrada y simple es $\geq 2\pi$, dándose la igualdad si y solamente si la curva es plana y convexa.

Antes de abordar la demostración, vamos a introducir una superficie auxiliar que también será de utilidad para la demostración del teorema 4.

El tubo de radio r alrededor de la curva α es la superficie parametrizada

$$\mathbf{x}(s, v) = \alpha(s) + r(n \cos v + b \operatorname{sen} v), \quad s \in [0, l], v \in [0, 2\pi],$$

donde $n = n(s)$ y $b = b(s)$ son, respectivamente, los vectores normal y binormal de α . Se comprueba fácilmente que

$$|\mathbf{x}_s \wedge \mathbf{x}_v| = EG - F^2 = r^2(1 - rk \cos v)^2.$$

Supongamos que r es lo suficientemente pequeño como para que $rk_0 < 1$, donde $k_0 < \max |k(s)|$, $s \in [0, l]$. Entonces \mathbf{x} es regular y un cálculo inmediato prueba que

$$\begin{aligned} N &= -(n \cos v + b \operatorname{sen} v), \\ \mathbf{x}_s \wedge \mathbf{x}_v &= r(1 - rk \cos v)N, \\ N_s \wedge N_v &= k \cos v (n \cos v + b \operatorname{sen} v) = -kN \cos v \\ &= -\frac{k \cos v}{r(1 - rk \cos v)} \mathbf{x}_v \wedge \mathbf{x}_s. \end{aligned}$$

Entonces, la curvatura gaussiana $K = K(s, v)$ del tubo viene dada por

$$K(s, v) = -\frac{k \cos v}{r(1 - rk \cos v)}.$$

Nótese que la traza T de \mathbf{x} puede tener autointersecciones. Sin embargo, si α es simple, es posible elegir r lo suficientemente pequeño como para que esto no ocurra; utilizamos la compacidad de $[0, l]$ y procedemos como en el caso del entorno tubular que se construyó en la sec. 2.7. Si además α es cerrada, T es una superficie regular homeomorfa a un toro que también se denomina *tubo alrededor de α* . De aquí en adelante, admitiremos que nos encontramos en este caso.

Demostración del teorema 3. Sea T un tubo alrededor de α , y ser $R \subset T$ la región de T donde la curvatura gaussiana de T es no negativa. Por una parte,

$$\begin{aligned} \iint_R K d\sigma &= \iint_R K \sqrt{EG - F^2} ds dv \\ &= \int_0^l k ds \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos v dv = 2 \int_0^l k(s) ds. \end{aligned}$$

Por otra parte, cada semirecta L trazada desde el origen de \mathbb{R}^3 comparece al menos una vez como dirección normal a R . En efecto, si tomamos un plano P perpendicular a L tal que $P \cap T = \phi$ y movemos P paralelamente a sí mismo hasta que toque a T por vez primera, se tendrá que $K \geq 0$ en los puntos de contacto.

Se tiene entonces que la aplicación de Gauss N de R recubre al menos una vez toda la esfera unidad S^2 ; luego $\iint_R K d\sigma \geq 4\pi$. Por lo tanto, la curvatura total de α es $\geq 2\pi$, y hemos demostrado así la primera parte del teorema 3.

Obsérvese que la restricción de la aplicación de Gauss N a cada círculo $s = \text{const.}$ es inyectiva y que su imagen es un círculo máximo $\Gamma_s \subset S^2$. Denotaremos por $\Gamma_s^+ \subset \Gamma_s$ al semicírculo cerrado que corresponde a los puntos donde $K \geq 0$.

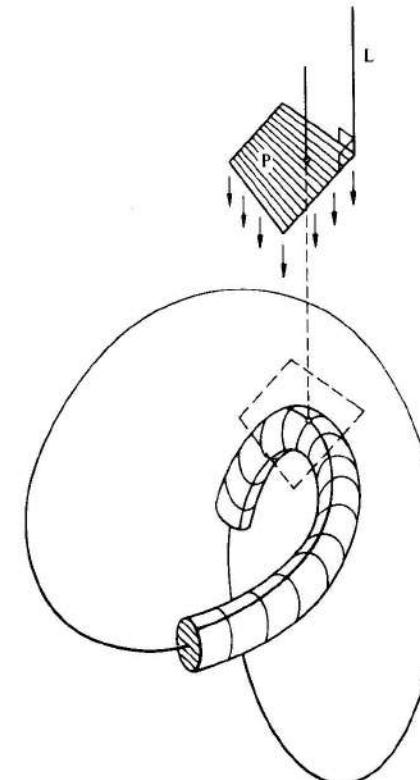


Figura 5-37

Supongamos que α es una curva convexa y plana. Entonces todos los Γ_s^+ tienen los mismos puntos extremos p, q y, por convexidad, $\Gamma_{s_1} \cap \Gamma_{s_2} = \{p\} \cup \{q\}$ para $s_1 \neq s_2$, $s_1, s_2 \in [0, l]$. Se deduce en virtud a la primera parte del teorema que $\iint_R K d\sigma = 4\pi$; luego la curvatura total de α es igual a 2π .

Supongamos ahora que la curvatura total de α es igual a 2π . Por la primera parte del teorema $\iint_R K d\sigma = 4\pi$. Afirmamos que todos los Γ_s^+ tienen los mismos puntos extremos p y q . En caso contrario, existirían dos círculos máximos $\Gamma_{s_1}, \Gamma_{s_2}$, s_1 arbitrariamente próximo a s_2 , que se cortarían en dos puntos antipodales que no se hallan en $N(R \cap Q)$, donde Q es el conjunto de puntos de T con curvatura no positiva. Se deduce entonces la existencia de dos puntos con curvatura positiva que se aplican mediante N en un único punto de S^2 . Como N es un difeomorfismo local en dichos puntos y cada punto de S^2 es la imagen de, por lo menos, un punto de R , concluiríamos que $\iint_R K d\sigma > 4\pi$, que es una contradicción.

Observando que los puntos de T con curvatura Gaussiana cero son las intersecciones de la binormal de α con T , vemos que el vector binormal de α es paralelo a la recta pq . Por tanto, α está contenida en un plano normal a esta recta.

Finalmente, demostraremos que α es convexa. Podemos suponer que α está orientada de forma que su número de rotación sea positivo. Como la curvatura total de α es 2π , tenemos que

$$2\pi = \int_0^l |k| ds \geq \int_0^l k ds.$$

Por otra parte,

$$\int_J k ds \geq 2\pi,$$

donde $J = \{s \in [0, l]; k(s) \geq 0\}$. Esto se da para cualquier curva cerrada plana y se deduce a partir de un argumento completamente similar al que se utilizó para $R \subset T$, al comienzo de esta sección. Así,

$$\int_0^l k ds = \int_0^l |k| ds = 2\pi.$$

Por lo tanto $k \geq 0$, y α es una curva plana y convexa.

Q.E.D.

Observación 5. No es difícil ver que la demostración es válida incluso si α no es simple. En este caso el tubo presentará autointersecciones, pero esto es irrelevante para el argumento. En la última etapa de la demostración (la convexidad de α), uno debe tener en cuenta que en realidad ya hemos demostrado que la curvatura de α es positiva y que su índice de rotación es igual a 1. Revisando entonces la primera parte de la demostración de la prop. 1, se ve fácilmente que esto implica la convexidad de α .

Vamos a utilizar la técnica de la demostración del teorema de Fenchel para obtener una mejora de dicho resultado, el cual establece que si una curva en el espacio está anudada (concepto que introduciremos inmediatamente), entonces la curvatura total es en realidad mayor que 4π .

Una curva continua, cerrada y simple $C \subset R^3$ está *no anudada* si existe una homotopía $H: S^1 \times I \rightarrow R^3$, $I = [0, 1]$, tal que

$$\begin{aligned} H(S^1 \times \{0\}) &= S^1 \\ H(S^1 \times \{1\}) &= C; \\ \text{and } H(S^1 \times \{t\}) &\stackrel{\sim}{=} C_t \subset R^3 \end{aligned}$$

es homeomorfa a S^1 para todo $t \in [0, 1]$. Intuitivamente, esto significa que C se puede deformar continuamente en el círculo S^1 de forma tal que las posiciones intermedias son homeomorfas a S^1 . Tal homotopía se llama una *isotopía*; entonces, una curva no anudada es aquella curva que es isotópa a S^1 . Cuando esto no ocurre, se dice que C está *anudada* (fig. 5-38).

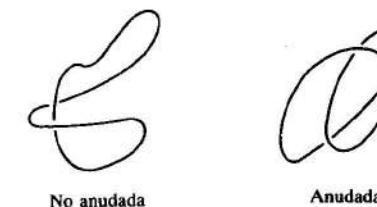


Figura 5-38

TEOREMA 4 (Fary-Milnor). La curvatura total de una curva cerrada, simple y anudada es mayor que 4π .

Demostración. Sean $C = \alpha([0, l])$, T un tubo alrededor de α y $R \subset T$ la región de T donde $K \geq 0$. Sea $b = b(s)$ el vector binormal de α y sea $v \in R^3$ un vector unitario, $v \neq b(s)$, para todo $s \in [0, l]$. Sea $h_v: [0, l] \rightarrow R$ la función altura de α en la dirección de v ; es decir, $h_v(s) = \langle \alpha(s) - 0, v \rangle$, $s \in [0, l]$. Es claro que s es un punto crítico de h_v si y sólo si v es perpendicular a la recta tangente en $\alpha(s)$. Además, en un punto crítico,

$$\frac{d}{ds^2}(h_v) = \left\langle \frac{d^2\alpha}{ds^2}, v \right\rangle = k \langle n, v \rangle \neq 0,$$

pues $\alpha y \neq b(s)$ para todo s y $k > 0$. Por tanto, los puntos críticos de h_v o son máximos o son mínimos.

Supongamos ahora que la curvatura total de α es menor o igual que 4π . Esto significa que

$$\iint_R K d\sigma = 2 \int k ds \leq 8\pi.$$

Afirmamos que, para algún $v_0 \notin b([0, l])$, h_{v_0} tiene exactamente dos puntos críticos (como $[0, l]$ es compacto, tales puntos corresponderán a un máximo y un mínimo de h_{v_0}). Supongamos que lo contrario es cierto. Entonces, para cada $v \notin b([0, l])$, h_v tiene al menos tres puntos críticos. Admitiremos que dos de ellos, s_1 y s_2 , son puntos de mínimo; el caso correspondiente a dos máximos se trataría de manera similar.

Considérese un plano P perpendicular a v tal que $P \cap T = \phi$ y desplácesmos hacia T , paralelamente a sí mismo. O bien $h_v(s_1) = h_v(s_2)$ o bien, por ejemplo, $h_v(s_1) < h_v(s_2)$. En el primer caso, P corta a T en puntos $q_1 \neq q_2$, y como $v \notin b([0, l])$, $K(q_1)$ y $K(q_2)$ son positivos. En el segundo caso, antes de incidir con $\alpha(s_1)$, P cortará a T en un punto q_1 con $K(q_1) > 0$. Considérese un segundo plano \tilde{P} , paralelo a P y a una distancia r por encima de éste (r es el radio del tubo). Desplácese \tilde{P} más arriba hasta que alcance $\alpha(s_2)$; entonces P cortará a T en un punto $q_2 \neq q_1$ (fig. 5-39). Como s_2 es un punto de mínimo y $v \notin b([0, l])$, $K(q_2) > 0$. En cualquier caso, existen dos puntos distintos en T donde $K > 0$ que se aplican mediante N en un sólo punto de S^2 . Esto contradice al hecho de $\iint_R K d\sigma \leq 8\pi$ y prueba nuestra afirmación.

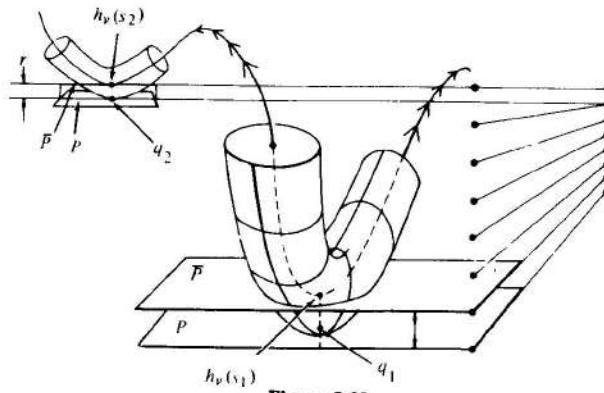


Figura 5-39

Sean s_1 y s_2 los puntos críticos de h_{v_0} y sean P_1 y P_2 dos planos perpendiculares a v_0 que pasan, respectivamente, por $\alpha(s_1)$ y $\alpha(s_2)$. Cada plano perpendicular a v_0 y comprendido entre P_1 y P_2 cortará a C exactamente en dos puntos. Uniendo estos pares de puntos mediante segmentos rectilíneos generamos una superficie delimitada por C que es, como puede comprobarse fácilmente, homeomorfa a un disco. Por tanto, C es no anudada y esta contradicción implica el final de la demostración.

Q.E.D.

EJERCICIOS

- Determine los índices de rotación de las curvas (a), (b), (c) y (d) de la fig. 5-40.
- Sea $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, l]$, una curva diferenciable, plana y cerrada. Sea $p_0 = (x_0, y_0) \in R^2$, $(x_0, y_0) \notin \alpha([0, l])$ y defínase las funciones

$$a(t) = \frac{x(t) - x_0}{\{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2\}^{1/2}},$$

$$b(t) = \frac{y(t) - y_0}{\{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2\}^{1/2}}.$$

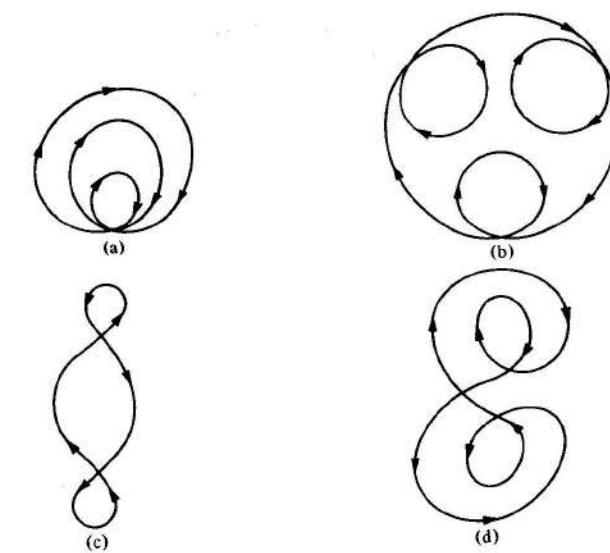


Figura 5-40

- Utilizar el lema 1 de la sec. 4.4 para demostrar que la función diferenciable

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t (ab' - ba') dt, \quad a' = \frac{da}{dt}, b' = \frac{db}{dt},$$

es una determinación del ángulo que forma el eje x con el vector de posición $(\alpha(t) - p_0)/|\alpha(t) - p_0|$.

- Utilícese la parte a para demostrar que cuando α es una curva diferenciable cerrada y plana, el número de vueltas de α con respecto a p_0 viene expresado por la integral

$$w = \frac{1}{2\pi} \int_0^l (ab' - ba') dt.$$

- Sean $\alpha: [0, l] \rightarrow R^2$ y $\beta: [0, l] \rightarrow R^2$ dos curvas diferenciables cerradas y planas y sea $p_0 \in R^2$ un punto tal que $p_0 \notin \alpha([0, l])$ y $p_0 \notin \beta([0, l])$. Supóngase que, para cada $t \in [0, l]$, los puntos $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ están más próximos que los puntos $\alpha(t)$ y p_0 ; es decir,

$$|\alpha(t) - \beta(t)| < |\alpha(t) - p_0|.$$

Utilícese el ejercicio 2 para probar que el número de vueltas de α con respecto a p_0 es igual al número de vueltas de β con respecto a p_0 .

- Sea C una curva regular, plana, cerrada y convexa. Como C es simple, determina, en virtud al teorema de la curva de Jordan, una región interior $K \subset R^2$. Demuéstrese que K es un conjunto convexo (es decir, dados $p, q \in K$, el segmento rectilíneo \overline{pq} está contenido en K ; cf. el ejercicio 9, sec. 1.7).

- b. Recíprocamente, sea C una curva regular plana (no necesariamente cerrada) y supóngase que C es la frontera de una región convexa. Demuéstrese que C es convexa.
5. Sea C una curva regular, plana, cerrada y convexa. Por el ejercicio 4, el interior de C es un conjunto convexo K . Sea $p_0 \in K$, $p_0 \notin C$.
- Demuéstrese que la recta que une p_0 con un punto arbitrario $q \in C$ no es tangente a C en q .
 - Conclúyase de la parte a que el índice de rotación de C es igual al número de vueltas de C con respecto a p_0 .
 - Obténgase de la parte b una demostración simple del hecho de que el índice de rotación de una curva cerrada convexa es ± 1 .
6. Sea $\alpha: [0, l] \rightarrow R^3$ una curva regular cerrada parametrizada por la longitud de arco. Admítase que $0 \neq |k(s)| \leq 1$ para todo $s \in [0, l]$. Demuéstrese que $l \geq 2\pi$ y que $l = 2\pi$ si y sólo si α es una curva plana y convexa.
7. *Teorema de Schur para curvas planas.* Sean $\alpha: [0, l] \rightarrow R^2$ y $\tilde{\alpha}: [0, l] \rightarrow R^2$ dos curvas planas convexas parametrizadas por la longitud de arco y con la misma longitud l . Denótense por k y \tilde{k} , respectivamente, las curvaturas de α y $\tilde{\alpha}$, y por d y \tilde{d} , respectivamente, las longitudes de las cuerdas de α y $\tilde{\alpha}$; es decir,

$$d(s) = |\alpha(s) - \alpha(0)|, \quad \tilde{d}(s) = |\tilde{\alpha}(s) - \tilde{\alpha}(0)|.$$

Supóngase que $k(s) \geq \tilde{k}(s)$, $s \in [0, l]$. Queremos demostrar que $d(s) \leq \tilde{d}(s)$, $s \in [0, l]$ (es decir, si estiramos una curva, sus cuerdas se vuelven más grandes) y que la igualdad se da para $s \in [0, l]$ si y sólo si las dos curvas se diferencian en un movimiento rígido. Subrayamos que el teorema se puede extender al caso en el que $\tilde{\alpha}$ es una curva en el espacio y que tiene un buen número de aplicaciones. Consultar S. S. Chern [10].

El siguiente esbozo puede ser útil.

- a. Fíjese un punto $s = s_1$. Tómense ambas curvas $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, $\tilde{\alpha}(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s))$ en el semiplano inferior $y \leq 0$ de forma que $\alpha(0)$, $\alpha(s_1)$, $\tilde{\alpha}(0)$ y $\tilde{\alpha}(s_1)$ se hallen en el eje x y de forma que $x(s_1) > x(0)$, $\tilde{x}(s_1) > \tilde{x}(0)$ (véase la fig. 5-41). Sea $s_0 \in [0, s_1]$ tal que $\alpha'(s_0)$ es paralelo al eje x . Elíjase la función $\theta(s)$, la cual proporciona una determinación diferenciable del ángulo que forma el eje x con $\alpha'(s)$, de forma que $\theta(s_0) = 0$. Demuéstrese que, por convexidad, $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

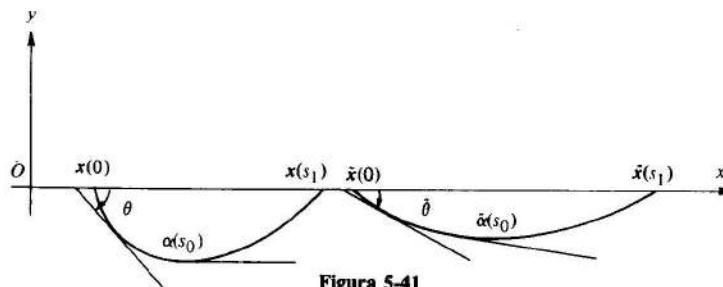


Figura 5-41

- b. Sea $\tilde{\theta}(s)$, $\tilde{\theta}(s_0) = 0$, una determinación diferenciable del ángulo que forma el eje x con $\tilde{\alpha}'(s)$ (nótese que $\tilde{\alpha}'(s_0)$ no puede ser paralelo al eje x). Demuéstrese que $\tilde{\theta}(s) \leq \theta(s)$ y utilícese la parte a para concluir que

$$d(s_1) = \int_0^{s_1} \cos \theta(s) ds \leq \int_0^{s_1} \cos \tilde{\theta}(s) ds \leq \tilde{d}(s_1).$$

A efectos de la igualdad, repítanse los pasos hacia atrás y aplíquese el teorema de unicidad para curvas planas.

8. *Teorema de Stoker para curvas planas.* Sea $\alpha: R \rightarrow R^2$ una curva regular plana parametrizada por la longitud de arco. Supóngase que α satisface las condiciones siguientes:

- La curvatura de α es estrictamente positiva.
- $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} |\alpha(s)| = \infty$; es decir, la curva se va a infinito en las dos direcciones.
- α no presenta autointersecciones.

El objetivo del ejercicio es demostrar que la curvatura total de α es $\leq \pi$.

Las siguientes indicaciones pueden ser de utilidad. Supóngase que la curvatura total es $>\pi$ y que α carece de autointersecciones. Procédase de la manera siguiente para llegar a una contradicción:

- Demuéstrese que existen puntos, por ejemplo, $p = \alpha(0)$, $q = \alpha(s_1)$, $s_1 > 0$, tales que las rectas tangentes T_p y T_q en los puntos p y q , respectivamente, son paralelas y no existe una recta tangente en el arco $\alpha([0, s_1])$ que sea paralela a T_p .
- Demuéstrese que cuando s crece, $\alpha(s)$ corta a T_p en un punto, por ejemplo, r (fig. 5-42).
- El arco $\alpha((-\infty, 0))$ debe cortar a T_p en un punto t comprendido entre p y r .
- Complétense el arco $tpqr$ de α con un arco sin autointersecciones β que conecte r con t , obteniendo, por este procedimiento, una curva cerrada C . Demuéstrese que el índice de rotación de C es ≥ 2 . Demuéstrese que esto implica que α tiene autointersecciones, lo que constituye una contradicción.

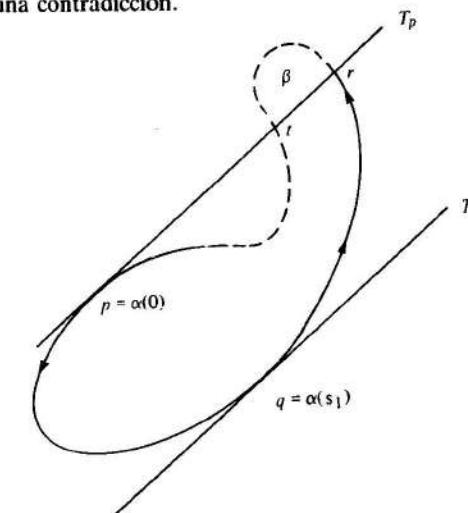


Figura 5-42

9. Sea $\alpha: [0, l] \rightarrow S^2$ una curva regular cerrada sobre la esfera $S^2 = \{(s, y, z) \in R^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Supóngase que α está parametrizada por la longitud de arco y que la curvatura $k(s)$ no se anula nunca. Demuéstrese que

$$\int_0^l \kappa(s) ds = 0.$$

(en realidad, la identidad precedente constituye una condición suficiente para que una curva no plana se halle en la superficie de una esfera. Véanse H. Geppert, «Sopra una caratterizzazione della sfera», *Ann. di Mat. Pura ed App.* XX (1941), 59-66; y B. Segre, «Una nuova caratterizzazione della sfera», *Atti Accad. Naz. dei Lincei* 3 (1947), 420-422; para encontrar una demostración de este hecho y otros resultados relacionados).

5.8. Superficies con curvatura gaussiana nula

Ya hemos visto (sec. 4.6) que las superficies regulares con curvatura Gaussiana idénticamente nula son localmente isométricas a un plano. En esta sección, consideraremos tales superficies desde el punto de vista de su posición en R^3 y demostraremos el siguiente teorema global.

TEOREMA. *Sea $S \subset R^3$ una superficie completa con curvatura gaussiana nula. Entonces S es un cilindro o un plano.*

Un *cilindro* es, por definición, una superficie regular S tal que por cada punto $p \in S$ pasa una única recta $R(p) \subset S$ (la generatriz que pasa por p), que satisface la condición de que si $q \neq p$, entonces las rectas $R(p)$ y $R(q)$ son paralelas o iguales.

Es un hecho extraño en la historia de la geometría diferencial que, en algún sentido, dicho teorema se demostrase después de su desarrollo. La primera demostración surgió como corolario de un teorema de P. Hartman y L. Nirenberg («On Spherical Images Whose Jacobians Do Not Change Signs», *Amer. J. Math.* 81, 1959, 901-920) que versaba sobre una situación mucho más general que la nuestra. Posteriormente, W. S. Massey («Surfaces of Gaussian Curvature Zero in Euclidean Space», *Tohoku Math. J.* 14, 1962, 73-79) y J. J. Stoker («Developable Surfaces in the Large», *Comm. Pure and Appl. Math.* 14, 1961, 627-635) obtuvieron demostraciones elementales y directas del teorema. La demostración que presentamos aquí es una modificación de la de Massey. Debe subrayarse que el artículo de Stoker contiene un teorema ligeramente más general.

Comenzaremos estudiando algunas propiedades locales de una superficie con curvatura nula.

Sea $S \subset R^3$ una superficie regular con curvatura gaussiana $K = 0$. Como $K = k_1 k_2$, donde k_1 y k_2 son las curvaturas principales, los puntos de S son puntos parabólicos o bien son puntos planos. Denotaremos por P al conjunto de puntos planos y por $U = S - P$ al conjunto de puntos parabólicos de S .

El conjunto P es cerrado en S . En efecto, los puntos de P satisfacen la condición de que la curvatura media $\frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ es cero. Por la continuidad de H , un punto de acumulación de P tiene curvatura media nula; por lo tanto, pertenece a P . Se deduce entonces que $U = S - P$ es abierto en S .

El ejemplo siguiente constituye una muestra instructiva de las relaciones que existen entre los conjuntos P y U .

Ejemplo 1. Considerese el triángulo abierto ABC y péguese en cada lado una superficie cilíndrica, cuyas generatrices sean paralelas al lado en cuestión (véase la fig. 5-43). Es posible efectuar esta construcción de forma que la superficie resultante sea una superficie regular. Por ejemplo, para garantizar la regularidad a lo largo de segmento abierto BC , basta con que la sección FG mediante un plano normal a BC de la banda cilíndrica $BCDE$ sea una curva de la forma

$$\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Obsérvese que no pertenecen a S los vértices A , B y C del triángulo ni las aristas BE , CD , etc., de las bandas cilíndricas.

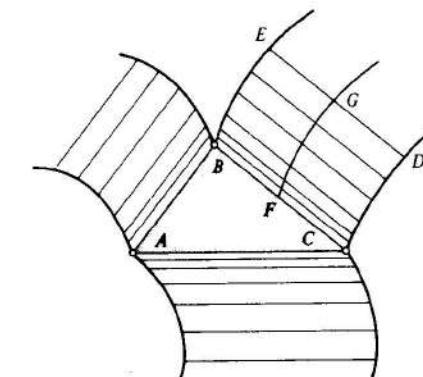


Figura 5-43

La superficie construida por este procedimiento tiene curvatura $K = 0$. El conjunto P está constituido por los puntos del triángulo cerrado ABC exceptuando lo vértices. Nótese que P es cerrado en S pero no en R^3 . El conjunto U está formado por los puntos interiores a las bandas cilíndricas. Por cada punto de U pasa una única recta que nunca intersecta a P . La frontera de P está constituida por los segmentos abiertos AB , BC y CA .

Probaremos, en lo que sigue, que las propiedades relevantes de este ejemplo comparecen en el caso general.

En primer lugar, sea $p \in U$. Al ser p un punto parabólico, una de las direcciones principales en p es una dirección asintótica, no existiendo otras direcciones asintóticas en p . Demostraremos que la única curva asintótica que pasa por p es un segmento de recta.

PROPOSICIÓN 1. *La única curva asintótica que pasa por un punto parabólico $p \in U \subset S$ de una superficie S con curvatura $K = 0$ es un segmento (abierto) de una recta contenida en S .*

Demostración. Como p no es umbílico, es posible parametrizar un entorno $V \subset U$ de p mediante $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{x}$ de forma que las curvas coordenadas sean líneas de curvatura. Supongamos que $v = \text{const.}$ es una curva asintótica; es decir, tiene curvatura normal cero. Entonces, en virtud al teorema de Olinde Rodrigues (sec. 3.2, Prop. 4), $N_u = 0$ a lo largo de $v = \text{const.}$. Ya que por cada punto de entorno V pasa una curva $v = \text{const.}$, la relación $N_u = 0$ se verifica en cada punto de V .

Se deduce entonces que en V

$$\langle \mathbf{x}, N \rangle_u = \langle \mathbf{x}_u, N \rangle + \langle \mathbf{x}, N_u \rangle = 0.$$

Por lo tanto,

$$\langle \mathbf{x}, N \rangle = \varphi(v), \quad (1)$$

donde $\varphi(v)$ es una función diferenciable que sólo depende de v . Derivando la ec. (1) con respecto a v obtenemos,

$$\langle \mathbf{x}, N_v \rangle = \varphi'(v). \quad (2)$$

Por otra parte, N_v es ortogonal a N y diferente de cero, pues los puntos de V son parabólicos. En consecuencia, N y N_v son linealmente independientes. Además, $N_{vu} = N_{uv} = 0$ en V .

Observamos ahora que a lo largo de la curva $v = \text{const.} = v_0$ el vector $N(u) = N_0$ y que $N_v(u) = (N_v)_0 = \text{constante}$. Así, la ec. (1) implica que la curva $\mathbf{x}(u, v_0)$ está contenida en un plano normal al vector constante N_0 y la ec. (2) implica que dicha curva está contenida en un plano normal al vector constante $(N_v)_0$. Por tanto, la curva está contenida en la intersección de dos planos (la intersección es no vacía ya que N_0 y $(N_v)_0$ son linealmente independientes); luego es un segmento rectilíneo.

Q.E.D.

Observación. En la proposición precedente es esencial que $K = 0$. En efecto, el paralelo superior de un toro de revolución es una curva asintótica constituida por puntos parabólicos que no es un segmento de recta.

Ahora vamos a ver qué sucede cuando prolongamos este segmento de recta. La siguiente proposición prueba que (cf. el ejemplo 1) la prolongación de la recta nunca corta al conjunto P ; o «termina» en un punto de la frontera de S o bien permanece indefinidamente en U .

Resulta conveniente utilizar la siguiente terminología. Se dice que una curva asintótica que pasa por un punto $p \in S$ es *maximal* si no es un subconjunto propio de alguna curva asintótica que pase por p .

PROPOSICIÓN 2 (Massey, *trab. cit.*). *Sea r una curva asintótica maximal que pasa por un punto parabólico $p \in U \subset S$ de una superficie S con curvatura $K = 0$ y sea $P \subset S$ el conjunto de los puntos planos de S . Entonces $r \cap P = \emptyset$.*

La demostración de la prop. 2 se apoya en el lema local siguiente, en el que utilizaremos las ecuaciones de Mainardi-Codazzi (cf. la sec. 4.3).

LEMA 1. *Sea s la longitud de arco de la curva asintótica que pasa por un punto parabólico p de una superficie S , con curvatura nula, y sea $H = H(s)$ la curvatura media de S a lo largo de dicha curva. Entonces,*

$$\frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{H} \right) = 0$$

en U

Demostración del lema 1. Introducimos, en un entorno $V \subset U$ de p , un sistema de coordenadas (u, v) tal que las curvas coordenadas son líneas de curvatura y las curvas $v = \text{const.}$ son curvas asintóticas de V . Sean e, f y g los coeficientes de la segunda forma fundamental con respecto a esta parametrización. Como $f = 0$ y la curva $v = \text{const.}$, $u = u(s)$ debe satisfacer la ecuación diferencial de las curvas asintóticas

$$e \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2f \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + g \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 0,$$

entonces concluimos que $e = 0$. Bajo estas condiciones, la curvatura media H viene dada por

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) = \frac{1}{2} \frac{g}{G}. \quad (3)$$

Introduciendo los valores $F = f = e = 0$ en las ecuaciones de Mainardi-Codazzi (sec. 4.1, ecs. (7) y (7a)), obtenemos

$$0 = \frac{1}{2} \frac{g E_v}{G}, \quad g_u = \frac{1}{2} \frac{g G_u}{G}. \quad (4)$$

Se deduce de la primera ecuación de (4) que $E_v = 0$. Por tanto, $E = E(u)$ es una función que sólo depende de u . Así, es posible efectuar el cambio de parámetros:

$$\tilde{v} = v, \quad \tilde{u} = \int \sqrt{E(u)} du.$$

Volveremos a llamar u y v a los nuevos parámetros. El parámetro u mide ahora la longitud de arco a lo largo de $v = \text{const.}$, por tanto $E = 1$.

En la nueva parametrización ($F = 0, E = 1$) la expresión de la curvatura gaussiana es

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} (\sqrt{G})_{uu} = 0.$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{G} = c_1(v)u + c_2(v), \quad (5)$$

donde $c_1(v)$ y $c_2(v)$ son funciones que sólo dependen de v .

Por otra parte la segunda ecuación en (4) puede escribirse en la forma ($g \neq 0$)

$$\frac{g_u}{g} = \frac{1}{2} \frac{G_u}{\sqrt{G} \sqrt{G}} = \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{G}};$$

luego,

$$g = c_3(v) \sqrt{G}, \quad (6)$$

donde $c_3(v)$ es una función de v . Introduciendo las ecs. (5) y (6) en la ec. (3) obtenemos

$$H = \frac{1}{2} \frac{c_3(v)}{\sqrt{G}} \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G}} = \frac{1}{2} \frac{c_3(v)}{c_1(v)u + c_2(v)}.$$

Finalmente, recordando que $u = s$ y derivando la expresión precedente con respecto a s , concluimos que

$$\frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{H} \right) = 0, \quad \text{Q.E.D.}$$

Demostración de la prop. 2. Supóngase que la curva asintótica maximal r que pasa por p , está parametrizada por la longitud de arco s y contiene un punto $q \in P$. Como r es conexa y U es abierto, existe un punto p_0 de r , correspondiente a s_0 , tal que $p_0 \in P$ y los puntos de r con $s < s_0$ pertenecen a U .

Por otra parte, concluimos del lema 1 que a lo largo de r y para $s < s_0$,

$$H(s) = \frac{1}{as + b},$$

donde a y b son constantes. Al tener los puntos de P curvatura media cero, obtenemos

$$H(p_0) = 0 = \lim_{s \rightarrow s_0} H(s) = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{1}{as + b},$$

lo cual constituye una contradicción. Q.E.D.

Sea ahora $Bd(U)$ la frontera de U en S ; es decir, $Bd(U)$ es el conjunto de los puntos de $p \in S$ tal que cada entorno de p en S contiene puntos de U y puntos de $S - U = P$. Como U es abierto en S se deduce que $Bd(U) \subset P$. Además, como la definición de punto frontera es simétrica para U y para P tenemos que

$$Bd(U) = Bd(P).$$

La proposición siguiente demuestra que (como en el ejemplo 1) el conjunto $Bd(U) = Bd(P)$ está constituido por segmentos rectilíneos.

PROPOSICIÓN 3 (Massey). *Sea $p \in Bd(U) \subset S$ un punto de la frontera del conjunto U de puntos parabólicos de una superficie S con curvatura $K \equiv 0$. Entonces por p pasa un único segmento abierto de recta $C(p) \subset S$. Además, $C(p) \subset Bd(U)$; es decir, la frontera de U está constituida por segmentos rectilíneos.*

Demostración. Sea $p \in Bd(U)$. Al ser p un punto límite de U , es posible elegir una sucesión $\{p_n\}_n$, $p_n \in U$, con $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$. Para cada p_n , sea $C(p_n)$ la única curva asintótica maximal (un segmento abierto de recta) que pasa por p_n (cf. la prop. 1). Demostraremos que, cuando $n \rightarrow \infty$, las direcciones de los segmentos $C(p_n)$ convergen hacia una cierta dirección que no depende de la elección de la sucesión $\{p_n\}$.

En efecto, sea $\Sigma \subset R^3$ una esfera con centro en p suficientemente pequeña. Como la esfera Σ es compacta, los puntos de intersección $\{q_n\}$ de $C(p_n)$ con Σ tienen al menos un punto de acumulación $q \in \Sigma$, dándose simultáneamente esta propiedad para el punto antipodal de q . Si hubiera, además de q y de su punto antipodal, otro punto de acumulación r , entonces, en cada par de puntos p_n y p_m , arbitrariamente próximos, las curvas asintóticas $C(p_n)$ y $C(p_m)$ deberían formar un ángulo mayor que

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{ang}(pq, pr),$$

lo cual iría en contradicción con la continuidad de las curvas asintóticas. Se deduce entonces que las curvas $C(p_n)$ tienden a una dirección límite. Con un argumento análogo se demuestra que esta dirección límite no depende de la sucesión $\{p_n\}$, con $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$, elegida; que es lo que habíamos afirmado previamente.

Como las direcciones de los $C(p_n)$ convergen y $p_n \rightarrow p$, los segmentos rectilíneos $C(p_n)$ convergen a un segmento $C(p) \subset S$ que pasa por p . El segmento $C(p)$ no se reduce solamente al punto p , pues en caso contrario, como $C(p_n)$ es maximal, $p \in S$ sería un punto de acumulación de los extremos de los $C(p_n)$, que no pertenecen a S (cf. la prop. 2). Por el mismo razonamiento se tiene que el segmento $C(p)$ no contiene a sus puntos extremos.

Demostraremos finalmente que $C(p) \subset Bd(U)$. En efecto, si $q \in C(p)$, existe una sucesión

$$\{q_n\}, q_n \in C(p_n) \subset U, \quad \text{con } \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q.$$

Entonces $q \in U \cup Bd(U)$. Supóngase que $q \notin Bd(U)$. Entonces $q \in U$, y, por la continuidad de las direcciones asintóticas, $C(p)$ es la única curva asintótica que pasa por q . Esto implica, en virtud a la prop. 2, que $p \in U$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $q \in Bd(U)$, es decir, $C(p) \subset Bd(U)$ y la demostración ha concluido. Q.E.D.

Ahora ya estamos en condiciones de probar el resultado global que enunciamos al comienzo de esta sección.

Demostración del teorema. Admitamos que S no es un plano. Entonces (sec. 3.2, prop. 5) S contiene puntos parabólicos. Sea U el conjunto (abierto) de los puntos

parabólicos de S y P el conjunto (cerrado) de los puntos planos de S . Denotaremos por $\text{int } P$, el *interior* de P , al conjunto de puntos que tienen un entorno contenido completamente en P . El conjunto $\text{int } P$ es un abierto en S que sólo contiene puntos planos. En consecuencia, cada componente conexa de $\text{int } P$ está contenida en un plano (sec. 3.2, prop. 5).

Primero demostraremos que si $q \in S$ y $q \notin \text{int } P$, entonces por q pasa una única recta $R(q) \subset S$ y, dos rectas de este tipo, o son iguales o no se cortan.

En efecto, cuando $q \in U$, entonces existe una única curva maximal asintótica r que pasa por q ; r es un segmento de recta (por tanto, una geodésica) y $r \cap P = \emptyset$ (cf. las props. 1 y 2). Parametrizando r por la longitud de arco comprobamos que r no es un segmento finito. En caso contrario, existiría una geodésica que no puede prolongarse a todos los valores del parámetro y ello iría en contradicción con la completitud de S . Por tanto r es la totalidad de una recta $R(q)$ y como $r \cap P = \emptyset$, concluimos que $R(q) \subset U$. Se deduce entonces que cuando p es otro punto de U , $p \notin R(q)$, $R(p) \cap R(q) = \emptyset$. En caso contrario, por el punto de intersección deberían pasar dos curvas asintóticas, lo que contradice la propiedad de unicidad.

Por otra parte, si $q \in \text{Bd}(U) = \text{Bd}(P)$, entonces (cf. la prop. 3) por q pasa un único segmento abierto de recta que está contenido en $\text{Bd}(U)$. Mediante el argumento previo, este segmento puede prolongarse a la totalidad de una recta $R(q) \subset \text{Bd}(U)$ y si $p \in \text{Bd}(U)$, $p \notin R(q)$, entonces $R(p) \cap R(q) = \emptyset$.

Está claro que, al ser U un abierto, si $q \in U$ y $p \in \text{Bd}(U)$, entonces $R(p) \cap R(q) = \emptyset$. De esta manera, por cada punto de $S - \text{int } P = U \cup \text{Bd}(U)$ pasa una única recta contenida en $S - \text{int } P$ y, como habíamos afirmado, dos rectas de este tipo o son iguales o bien no se cortan. Si demostramos que estas rectas son paralelas, concluiremos que $\text{Bd}(U)$ ($= \text{Bd}(P)$) está constituido por rectas paralelas y que cada componente conexa de $\text{int } P$ es un conjunto abierto de un plano, delimitado por dos rectas paralelas. Por tanto, por cada punto $t \in \text{int } P$ pasa una única recta $R(t) \subset \text{int } P$, paralela a la dirección común. Se deduce entonces que por cada punto de S pasa una única generatriz y que las generatrices son paralelas, es decir, S es un cilindro; el objetivo de la demostración.

Para demostrar que las rectas que pasan por los puntos de $U \cup \text{Bd}(U)$ son paralelas, procedemos de la manera siguiente. Sea $q \in U \cup \text{Bd}(U)$ y $p \in U$. Como S es conexa, existe un arco $\alpha: [0, l] \rightarrow S$, con $\alpha(0) = p$, $\alpha(l) = q$. La aplicación $\exp_p: T_p(S) \rightarrow S$ es una aplicación recubridora (prop. 7, sec. 5.6) y una isometría local (corolario al lema 2, sec. 5.6). Sea $\tilde{\alpha}: [0, l] \rightarrow T_p(S)$ una elevación de α , con origen en el punto $0 \in T_p(S)$. Para cada $\tilde{\alpha}(t)$, con $\exp_p \tilde{\alpha}(t) = \alpha(t) \in U \cup \text{Bd}(U)$, sea r_t la elevación de $R(\alpha(t))$ con origen en $\tilde{\alpha}(t)$. Como \exp_p es una isometría local, r_t es una recta en $T_p(S)$.

Demostraremos que cuando $\tilde{\alpha}(t_1) \neq \tilde{\alpha}(t_2)$, $t_1, t_2 \in [0, l]$, las rectas r_{t_1} y r_{t_2} son paralelas. En efecto si $v \in r_{t_1} \cap r_{t_2}$, entonces

$$\exp_p(v) \in R(\alpha(t_1)) \cap R(\alpha(t_2)),$$

lo que constituye una contradicción.

Hasta ahora no hemos definido $R(\alpha(t))$ cuando $\alpha(t) \in \text{int } P$. Esto es lo que vamos a hacer ahora. Cuando $\alpha(t)$ es tal que $\exp_p \tilde{\alpha}(t) = \alpha(t) \in \text{int } P$, por $\tilde{\alpha}(t)$ trazamos una recta r en $T_p(S)$ paralela a la dirección común que acabamos de obtener hace un

momento. Está claro que $\exp_p(r) \subset \text{int } P$ y como $\exp_p(r)$ es una geodésica, $\exp_p(r)$ es una recta completa contenida en S . De esta manera, la recta $R(\alpha(t))$ está definida para cada $t \in [0, l]$.

Ahora demostraremos que las rectas $R(\alpha(t))$, $t \in [0, l]$, son paralelas. En efecto, por el argumento habitual de compacidad, es posible recubrir el intervalo $[0, l]$ con un número finito de intervalos abiertos (en $[0, l]$) I_1, \dots, I_n tal que $\tilde{\alpha}(I_i)$ está contenido en un entorno V_i de $\alpha(I_i)$, $t_i \in I_i$, donde la restricción de \exp_p es una isometría en V_i . Ahora obsérvese que, cuando $t_1, t_2 \in I_i$ y $\tilde{\alpha}(t_1) \neq \tilde{\alpha}(t_2)$, entonces $R(\alpha(t_1))$ es paralela a $R(\alpha(t_2))$. En efecto, como r_{t_1} es paralela a r_{t_2} y \exp_p es una isometría en V_i , el segmento abierto $\exp_p(r_{t_1} \cap V_i)$ es paralelo a $\exp_p(r_{t_2} \cap V_i)$; esto significa que las rectas $\exp_p r_{t_1} = R(\alpha(t_1))$ y $\exp_p r_{t_2} = R(\alpha(t_2))$ contienen sendos segmentos abiertos que son paralelos; luego son paralelas. Pero entonces, utilizando la descomposición de $[0, l]$ en I_1, \dots, I_n , podemos demostrar, por etapas sucesivas, que las rectas $R(\alpha(t))$ son paralelas.

En particular, la recta $R(q)$ es paralela a $R(p)$. Si s es otro punto de $U \cup \text{Bd}(U)$, entonces, por el mismo argumento, $R(s)$ es paralela a $R(p)$ y, por tanto, paralela a $R(q)$. De esta forma, se ha probado que todas las rectas que pasan por $U \cup \text{Bd}(U)$ son paralelas. Concluye así la demostración del teorema.

Q.E.D.

5.9. Teoremas de Jacobi

Una propiedad fundamental de una geodésica γ (sec. 4.6, prop. 4) es que, cuando dos puntos p y q de γ están lo suficientemente próximos, entonces γ minimiza la longitud de arco entre p y q . Esto quiere decir que la longitud de arco de γ entre p y q es menor o igual que la longitud de arco de otra curva cualquiera que une p y q . Supongamos ahora que seguimos la trayectoria de una geodésica γ que comienza en un punto p . Es natural preguntarse hasta dónde minimiza la longitud de arco la geodésica γ . En el caso de una esfera, por ejemplo, una geodésica γ (un meridiano) que empieza en un punto p minimiza la longitud de arco hasta el primer punto conjugado de p con respecto a γ (es decir, hasta el punto antipodal del punto p). Una vez pasado el punto antipodal de p , la geodésica deja de ser mínima, como podemos comprobar intuitivamente mediante las consideraciones siguientes.

Podemos imaginarnos a una geodésica que une dos puntos p y q de una esfera como un hilo tensado sobre la esfera que une los dos puntos dados. Cuando el arco pq es menor que un semimeridiano y los puntos p y q se mantienen fijos, no es posible mover el hilo sin aumentar su longitud. Por otra parte, cuando el arco pq es mayor que un semimeridiano, un pequeño desplazamiento del hilo (con p y q fijos) «afloja» el hilo (véase la fig. 5-44). En otras palabras, cuando q está más lejos que el punto antipodal de p , es posible obtener curvas próximas al arco geodésico pq , que unen p y q , y que son más cortas que dicho arco. Es claro que estas observaciones distan mucho de ser un argumento matemático.

En esta sección abordaremos el estudio de esta cuestión y probaremos un resultado, debido a Jacobi, que puede describirse, en líneas generales, como sigue. Una geodésica γ que empieza en un punto p solamente minimiza la longitud de arco, con respecto a curvas «próximas» a γ , hasta el «primer» punto-conjugado de p con

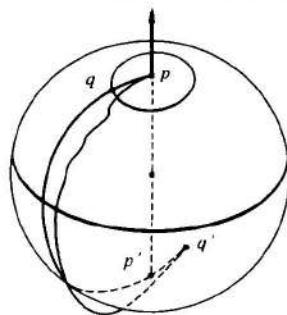


Figura 5-44

respecto a γ (más adelante se introducirán enunciados más precisos; véanse los teoremas 1 y 2).

Se admitirá, por simplicidad, que las superficies a considerar en esta sección son completas y que las geodésicas están parametrizadas por la longitud de arco.

Necesitamos algunos resultados preliminares.

En el lema siguiente se demuestra que la imagen mediante $\exp_p: T_p(S) \rightarrow S$ de un segmento de recta de $T_p(S)$ con origen en $O \in T_p(S)$ (una geodésica que comienza en p) es mínima con respecto a las imágenes mediante \exp_p de curvas contenidas en $T_p(S)$ que unen los extremos de dicho segmento.

Con más precisión, sean

$$p \in S, \quad u \in T_p(S), \quad l = |u| \neq 0,$$

y sea $\tilde{\gamma}: [0, l] \rightarrow T_p(S)$ la recta de $T_p(S)$ definida por

$$\tilde{\gamma}(s) = sv, \quad s \in [0, l], \quad v = \frac{u}{|u|}.$$

Sea $\tilde{\alpha}: [0, l] \rightarrow T_p(S)$ una curva parametrizada diferenciable de $T_p(S)$, con $\tilde{\alpha}(0) = p$, $\tilde{\alpha}(l) = u$ y $\tilde{\alpha}'(s) \neq 0$ si $s \neq 0$. Además, sean (fig. 5-45)

$$\alpha(s) = \exp_p \tilde{\alpha}(s) \quad \text{and} \quad \gamma(s) = \exp_p \tilde{\gamma}(s).$$

LEMA 1. Con la notación precedente tenemos que

1. $l(\alpha) \geq l(\gamma)$, donde $l(\)$ representa la longitud de arco de la curva correspondiente.

Si además, $\tilde{\alpha}(s)$ no es un punto crítico de \exp_p , $s \in [0, l]$, y si las trazas de α y de γ son distintas, entonces

2. $l(\alpha) > l(\gamma)$.

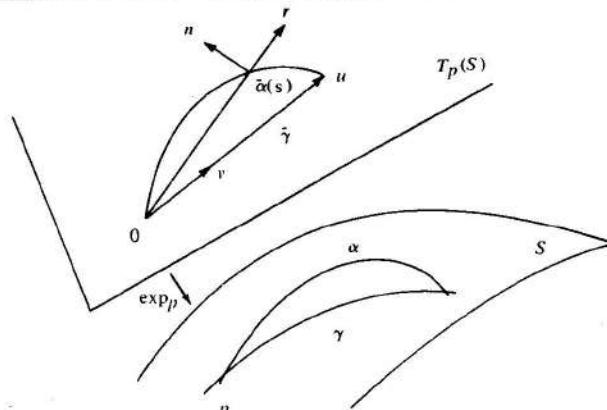


Figura 5-45

Demostración. Sea $\tilde{\alpha}(s)/|\tilde{\alpha}(s)| = r$ y sea n un vector unitario de $T_p(S)$, con $\langle r, n \rangle = 0$. En la base $\{r, n\}$ de $T_p(S)$ podemos escribir (fig. 5-45)

$$\tilde{\alpha}'(s) = ar + bn,$$

donde

$$\begin{aligned} a &= \langle \tilde{\alpha}'(s), r \rangle, \\ b &= \langle \tilde{\alpha}'(s), n \rangle. \end{aligned}$$

Por definición

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= (d \exp_p)_{\tilde{\alpha}(s)}(\tilde{\alpha}'(s)) \\ &= a(d \exp_p)_{\tilde{\alpha}(s)}(r) + b(d \exp_p)_{\tilde{\alpha}(s)}(n). \end{aligned}$$

Por tanto, utilizando el lema de Gauss (cf. la sec. 5.5, lema 2) obtenemos

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = a^2 + c^2,$$

donde

$$c^2 = b^2 |(d \exp_p)_{\tilde{\alpha}(s)}(n)|^2.$$

Se deduce entonces que

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle \geq a^2.$$

Por otra parte,

$$\frac{d}{ds} \langle \tilde{\alpha}(s), \tilde{\alpha}(s) \rangle^{1/2} = \frac{\langle \tilde{\alpha}'(s), \tilde{\alpha}(s) \rangle}{\langle \tilde{\alpha}(s), \tilde{\alpha}(s) \rangle^{1/2}} = \langle \tilde{\alpha}'(s), r \rangle = a.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} l(\alpha) &= \int_0^l \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle^{1/2} ds \geq \int_0^l a ds \\ &= \int_0^l \frac{d}{ds} \langle \tilde{\alpha}(s), \tilde{\alpha}(s) \rangle^{1/2} ds = |\tilde{\alpha}(l)| = l = l(\gamma), \end{aligned}$$

y esto prueba la parte 1.

Para demostrar la parte 2, admitamos que $l(\alpha) = l(\gamma)$. Entonces

$$\int_0^l \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle^{1/2} ds = \int_0^l a ds,$$

y al ser

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle^{1/2} \geq a,$$

debe darse la igualdad en la última expresión para cada $s \in [0, l]$. Por tanto,

$$c = |b| |(d \exp_p)_{\alpha(s)}(n)| = 0.$$

Como $\tilde{\alpha}(s)$ no es un punto crítico de \exp_p , concluimos que $b = 0$. Se deduce entonces que todas las rectas tangentes a la curva $\tilde{\alpha}$ pasan por el origen O de $T_p(S)$. Así, $\tilde{\alpha}$ es una recta de $T_p(S)$ que pasa por O . Como $\tilde{\alpha}(l) = \gamma(l)$, las líneas $\tilde{\alpha}$ y γ coinciden, contradiciendo así la hipótesis de que las trazas de α y γ son distintas. A partir de esta contradicción se deduce que $l(\alpha) > l(\gamma)$, lo que prueba la parte 2 y completa la demostración del lema.

Q.E.D.

Ahora ya estamos listos para demostrar que si un arco de geodésica carece de puntos conjugados, da lugar a un mínimo local para la longitud de arco. Con más precisión tenemos

TEOREMA 1 (Jacobi). Sea $\gamma: [0, l] \rightarrow S$, $\gamma(0) = p$, una geodésica sin puntos conjugados; es decir, $\exp_p: T_p(S) \rightarrow S$ es regular en los puntos de la recta $\gamma(s) = s\gamma'(0)$ de $T_p(S)$, $s \in [0, l]$. Sea $h: [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una variación propia de γ . Entonces

1. Existe un $\delta > 0$, $\delta \leq \varepsilon$, tal que si $t \in (-\delta, \delta)$,

$$L(t) \geq L(0),$$

donde $L(t)$ es la longitud de la curva $h_t: [0, l] \rightarrow S$ definida por $h_t(s) = h(s, t)$.

2. Si, además, la traza de h_t es distinta de la traza de γ , $L(t) > L(0)$.

Demostración. Esencialmente, la demostración consiste en probar que es posible elevar, para cada $t \in (-\delta, \delta)$, la curva h_t a una curva \tilde{h}_t en $T_p(S)$ tal que $\tilde{h}_t(0) = 0$, $\tilde{h}_t(l) = \gamma(l)$ y aplicar entonces el lema 1.

Como \exp_p es regular en los puntos de la recta γ de $T_p(S)$, para cada $s \in [0, l]$ existe un entorno U_s de $\gamma(s)$ tal que la restricción de \exp_p a U_s es un difeomorfismo. La familia $\{U_s\}$, $s \in [0, l]$, recubre $\gamma([0, l])$, y, por compacidad, es posible obtener una subfamilia finita, por ejemplo, U_1, \dots, U_n que todavía recubre $\gamma([0, l])$. Se deduce entonces que podemos dividir el intervalo $[0, l]$ mediante puntos

$$0 = s_1 < s_2 < \dots < s_n < s_{n+1} = l$$

de manera que $\gamma([s_i, s_{i+1}]) \subset U_i$, $i = 1, \dots, n$. Al ser h continua y $[s_i, s_{i+1}]$ compacto, existe un $\delta_i > 0$ tal que

$$h([s_i, s_{i+1}] \times (-\delta_i, \delta_i)) \subset \exp_p(U_i) = V_i$$

Sea $\delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_n)$. Para $t \in (-\delta, \delta)$, la curva $h_t: [0, l] \rightarrow S$ se puede elevar a una curva $\tilde{h}_t: [0, l] \rightarrow T_p(S)$, con origen $\tilde{h}_t(0) = 0$, de la forma siguiente. Sea $s \in [s_1, s_2]$. Entonces

$$\tilde{h}_t(s) = \exp_p^{-1}(h_t(s)),$$

donde \exp_p^{-1} es la inversa de la aplicación $\exp_p: U_1 \rightarrow V_1$. Aplicando la misma técnica que utilizamos en espacios recubridores (cf. la prop. 2, sec. 5.6), podemos extender \tilde{h}_t a todo $s \in [0, l]$ y obtener $\tilde{h}_t(l) = \gamma(l)$.

De esta forma, concluimos que $\gamma(s) = \exp_p \tilde{\gamma}(s)$ y que $h_t(s) = \exp_p \tilde{h}_t(s)$, $t \in (-\delta, \delta)$, con $\tilde{h}_t(0) = 0$, $\tilde{h}_t(l) = \gamma(l)$. Obtenemos entonces las conclusiones deseadas al aplicar el lema 1 a la presente situación.

Q.E.D.

Observación 1. Una geodésica γ que carece de puntos conjugados muy bien pudiera ser no mínima con respecto a las curvas que no se hallen en un entorno de γ . Tal situación ocurre, por ejemplo, en el cilindro (que no tiene puntos conjugados), como puede comprobar fácilmente el lector observando una geodésica cerrada en el cilindro.

Esta situación está relacionada con el hecho de que los puntos conjugados solamente nos informan sobre la diferencial de la aplicación exponencial, es decir, sobre el grado de «dispersión» de las geodésicas próximas a una geodésica dada. Por otra parte, el comportamiento global de las geodésicas está controlado por la propia aplicación exponencial, la cual podría no ser globalmente inyectiva incluso cuando su diferencial sea no singular en todos los puntos.

Otro ejemplo (esta vez simplemente conexo) donde ocurre el mismo hecho es el elipsoide, como puede comprobar el lector observando la figura del elipsoide en la sec. 5.5 (fig. 5-19).

El estudio del lugar geométrico de los puntos donde las geodésicas que empiezan en p dejan de minimizar globalmente la longitud de arco (conocido como el *lugar de corte de p*) es de fundamental importancia para ciertos teoremas globales de la geometría diferencial, pero no lo vamos a considerar en este libro.

Ahora procederemos a demostrar que una geodésica γ que contiene puntos conjugados no es un mínimo local para la longitud de arco; es decir, existe una curva

«arbitrariamente próxima» a γ , que une sus extremos, cuya longitud es menor que la de γ .

Necesitaremos algunos preliminares, el primero de los cuales es una extensión de la definición de variación de una geodésica al caso en el que se admiten funciones diferenciables a trozos.

DEFINICIÓN 1. Sea $\gamma: [0, l] \rightarrow S$ una geodésica de S y sea

$$h: [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$$

una aplicación continua con

$$h(s, 0) = \gamma(s), \quad s \in [0, l].$$

Se dice que h es una variación regular a trozos de γ si existe una partición

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{n-1} < s_n = l$$

de $[0, l]$ tal que

$$h: [s_i, s_{i+1}] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S, i = 0, 1, \dots, n - 1,$$

es diferenciable. Se dice que la variación regular a trozos es propia si $h(0, t) = \gamma(0)$, $h(l, t) = \gamma(l)$ para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Ahora, las curvas $h_t(s)$, $s \in [0, l]$ de la variación son curvas diferenciables a trozos. El campo vectorial variacional $V(s) = (\partial h / \partial t)(s, 0)$ es un campo vectorial diferenciable a trozos a lo largo de γ ; es decir, $V: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación continua que es diferenciable en cada $[t_i, t_{i+1}]$. Se dice que la variación regular a trozos es ortogonal si $\langle V(s), \gamma'(s) \rangle = 0$, $s \in [0, l]$.

Es posible demostrar, de una manera totalmente análoga a como se hizo en la prop. 1 de la sec. 5.4, que un campo vectorial diferenciable a trozos V a lo largo de γ genera una variación regular a trozos de γ cuyo campo variacional es V . Si además,

$$V(0) = V(l) = 0,$$

la variación se puede tomar propia.

Se define, de manera similar, la función $L: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ (la longitud de arco de una curva de la variación) mediante

$$\begin{aligned} L(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left| \frac{\partial h}{\partial s}(s, t) \right| ds \\ &= \int_0^l \left| \frac{\partial h}{\partial s}(s, t) \right| ds. \end{aligned}$$

En virtud al lema 1 de la sec. 5.4, cada uno de los sumandos de la suma precedente es diferenciable en un entorno de 0. Por tanto, L es diferenciable en $(-\delta, \delta)$ si δ es suficientemente pequeño.

La expresión de la variación segunda de la longitud de arco ($L''(0)$), para una variación regular a trozos, propia y ortogonal, es, como puede comprobarse fácilmente, exactamente la misma que la que se obtuvo en la prop. 4 de la sec. 5.4. Así, si V es un campo vectorial diferenciable a trozos a lo largo de una geodésica $\gamma: [0, l] \rightarrow S$ tal que

$$\langle V(s), \gamma'(s) \rangle = 0, \quad s \in [0, l], \quad \text{y} \quad V(0) = V(l) = 0,$$

tenemos

$$L''_V(0) = \int_0^l \left(\left\langle \frac{DV}{ds}, \frac{DV}{ds} \right\rangle - K(s) \langle V(s), V(s) \rangle \right) ds.$$

Sea ahora $\gamma: [0, l] \rightarrow S$ una geodésica y denotemos por \mathcal{B} al conjunto de todos los campos vectoriales diferenciables a trozos, a lo largo de γ , que son ortogonales a γ ; es decir, si $V \in \mathcal{B}$, entonces $\langle V(s), \gamma'(s) \rangle = 0$ para todo $s \in [0, l]$. Obsérvese que \mathcal{B} , dotado de las operaciones naturales de suma y multiplicación por un número real, constituye un espacio vectorial. Defínase la aplicación $I: \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$I(V, W) = \int_0^l \left(\left\langle \frac{DV}{ds}, \frac{DW}{ds} \right\rangle - K(s) \langle V(s), W(s) \rangle \right) ds,$$

donde, $V, W \in \mathcal{B}$.

Es inmediato comprobar que I es una aplicación bilineal simétrica; es decir, I es lineal en cada variable por separado e $I(V, W) = I(W, V)$. Por tanto, I determina una forma cuadrática en \mathcal{B} , expresada por $I(V, V)$. Esta forma cuadrática se denomina la forma índice de γ .

Observación 2. La forma índice de una geodésica γ fue introducida por M. Morse quien demostró el resultado siguiente. Sea $\gamma(s_0)$ un punto conjugado de $\gamma(0) = p$, con respecto a la geodésica $\gamma: [0, l] \rightarrow S$, $s_0 \in [0, l]$. La multiplicidad del punto conjugado $\gamma(s_0)$ es la dimensión del mayor subespacio E de $T_p(S)$ tal que $(d \exp_p)_{\gamma(s_0)}(u) = 0$ para cada $u \in E$. El índice de una forma cuadrática $Q: E \rightarrow \mathbb{R}$ en un espacio vectorial E es la dimensión del mayor subespacio L de E tal que $Q(u) < 0$, $u \in L$. Con esta terminología, el teorema del índice de Morse se establece en los términos siguientes. Sea $\gamma: [0, l] \rightarrow S$ una geodésica. El índice de la forma cuadrática I de γ es finito y es igual al número de puntos conjugados a $\gamma(0)$ en $\gamma([0, l])$, contados cada uno de éstos con su multiplicidad. Se puede encontrar una demostración de este teorema en J. Milnor, «Morse Theory», Annals of Mathematics Studies, vol. 51, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1963.

Para nuestros propósitos solamente necesitamos el lema siguiente.

LEMÁ 2. Sea $V \in \mathcal{B}$ un campo de Jacobi a lo largo de una geodésica $\gamma: [0, l] \rightarrow S$ y sea $W \in \mathcal{B}$. Entonces

$$I(V, W) = \left\langle \frac{DV}{ds}(l), W(l) \right\rangle - \left\langle \frac{DV}{ds}(0), W(0) \right\rangle.$$

Demostración. Observando que

$$\frac{d}{ds} \left\langle \frac{DV}{ds}, W \right\rangle = \left\langle \frac{D^2V}{ds^2}, W \right\rangle + \left\langle \frac{DV}{ds}, \frac{DW}{ds} \right\rangle,$$

podemos escribir I en la forma (cf. la observación 4, sec. 5.4)

$$I(V, W) = \left\langle \frac{DV}{ds}, W \right\rangle \Big|_0^l - \int_0^l \left(\left\langle \frac{D^2V}{ds^2} - K(s)V(s), W(s) \right\rangle \right) ds.$$

Del hecho de que V es un campo de Jacobi ortogonal a γ , concluimos que el integrando del segundo miembro es cero. Por tanto,

$$I(V, W) = \left\langle \frac{DV}{ds}(l), W(l) \right\rangle - \left\langle \frac{DV}{ds}(0), W(0) \right\rangle. \quad \text{Q.E.D.}$$

Ahora ya estamos en condiciones de probar el

TEOREMA 2 (Jacobi). Sean $\gamma: [0, l] \rightarrow S$ una geodésica de S y $\gamma(s_0) \in \gamma(0, l)$ un punto conjugado a $\gamma(0) = p$ con respecto a γ ; entonces existe una variación regular a trozos y propia $h: [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ de γ y un número real $\delta > 0$, $\delta \leq \varepsilon$, tal que si $t \in (-\delta, \delta)$ tenemos que $L(t) < L(0)$.

Demostración. Como $\gamma(s_0)$ es conjugado a p con respecto a γ , existe un campo de Jacobi no idénticamente cero J , a lo largo de γ , con $J(0) = J(s_0) = 0$. Por la prop. 4 de la sec. 5.5, se deduce que $\langle J(s), \gamma'(s) \rangle = 0$, $s \in [0, l]$. Además, $(DJ/ds)(s_0) \neq 0$; pues, en caso contrario, $J(s) \equiv 0$.

Sea ahora \tilde{Z} un campo vectorial paralelo a lo largo de γ , con $\tilde{Z}(s_0) = -(DJ/ds)(s_0)$, y sea $f: [0, l] \rightarrow R$ una función diferenciable con $f(0) = f(l) = 0$, $f(s_0) = 1$. Defínase $Z(s) = f(s)\tilde{Z}(s)$, $s \in [0, l]$.

Para cada número real $\eta > 0$, defínase el campo vectorial Y_η a lo largo de γ mediante

$$\begin{aligned} Y_\eta &= J(s) + \eta Z(s), & s \in [0, s_0], \\ &= \eta Z(s) & s \in [s_0, l]. \end{aligned}$$

El campo vectorial Y_η es diferenciable a trozos y ortogonal a γ . Como $Y_{\eta(0)} = Y_\eta(l) = 0$, Y_η genera una variación regular a trozos, propia y ortogonal de γ . Vamos a calcular $L''(0) = I(Y_\eta, Y_\eta)$.

Para el segmento de geodésica entre 0 y s_0 , utilizaremos la bilinealidad de I y el lema 2 para obtener

$$\begin{aligned} I_{s_0}(Y_\eta, Y_\eta) &= I_{s_0}(J + \eta Z, J + \eta Z) \\ &= I_{s_0}(J, J) + 2\eta I_{s_0}(J, Z) + \eta^2 I_{s_0}(Z, Z) \\ &= 2\eta \left\langle \frac{DJ}{ds}(s_0), Z(s_0) \right\rangle + \eta^2 I_{s_0}(Z, Z) \\ &= -2\eta \left| \frac{DJ}{ds}(s_0) \right|^2 + \eta^2 I_{s_0}(Z, Z), \end{aligned}$$

en donde I_{s_0} indica que la integral correspondiente se evalúa entre 0 y s_0 . Utilizando I para denotar la integral entre 0 y l y observando que la integral es aditiva, tenemos que

$$I(Y_\eta, Y_\eta) = -2\eta \left| \frac{DJ}{ds}(s_0) \right|^2 + \eta^2 I(Z, Z).$$

Obsérvese ahora que si $\eta = \eta_0$ es suficientemente pequeño, la expresión precedente es negativa. Por lo tanto, al tomar Y_{η_0} , obtendremos una variación regular a trozos y propia con $L''(0) < 0$. Como $L'(0) = 0$, esto significa que 0 es un punto de máximo local para L ; es decir, existe un $\delta > 0$ tal que si $t \in (-\delta, \delta)$, $t \neq 0$, entonces $L(t) < L(0)$.

Q.E.D.

Observación 3. El teorema de Jacobi es un caso particular del teorema del índice de Morse, citado en la observación 2. En realidad, el punto crucial de la demostración del teorema del índice consiste esencialmente en una extensión de las ideas que se introdujeron en la demostración del teorema 2.

EJERCICIOS

1. *Teorema de Bonnet.* Sea S una superficie completa con curvatura gaussiana $K > \delta > 0$. Por el ejercicio 5 de la sec. 5.5, cada geodésica $\gamma: [0, \infty) \rightarrow S$ tiene un punto conjugado a $\gamma(0)$ en el intervalo $(0, \pi/\sqrt{\delta})$. Utilízense los teoremas de Jacobi para demostrar que esto implica que S es compacta y que el diámetro $\varrho(S) \leq \pi/\sqrt{\delta}$ (esto constituye una nueva demostración del teorema de Bonnet de la sec. 5.4).
2. *Líneas sobre superficies completas.* Una geodésica $\gamma: (-\infty, \infty) \rightarrow S$ se denomina una *línea* si su longitud realiza la distancia (intrínseca) entre dos puntos cualesquiera de su traza.
 - a. Demuéstrese que por cada punto del cilindro completo $x^2 + y^2 = 1$ pasa una línea.
 - b. Admitamos que S es una superficie completa con curvatura gaussiana $K > 0$. Sea $\gamma: (-\infty, \infty) \rightarrow S$ una geodésica sobre S y sea $J(s)$ un campo de Jacobi a lo largo de γ definido por $\langle J(0), \gamma'(0) \rangle = 0$, $|J(0)| = 1$, $J'(0) = 0$. Elíjase una base ortonormal $\{e_1(0) = \gamma'(0), e_2(0)\}$ en $T_{\gamma(0)}(S)$ y prolónguese mediante transporte paralelo a lo largo de γ para obtener una base $\{e_1(s), e_2(s)\}$ en cada $T_{\gamma(s)}(S)$. Demuéstrese que, para alguna función diferenciable $u(s)$, $J(s) = u(s)e_2(s)$ y que la ecuación de Jacobi para J es

$$u'' + Ku = 0, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0. \quad (*)$$

- c. Extiéndase a la presente situación el teorema de comparación de la parte b del ejercicio 3, sec. 5.5. Utilícese el hecho de que $K > 0$ para demostrar que es posible elegir $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeño, de forma que

$$u(\varepsilon) > 0, \quad u(-\varepsilon) > 0, \quad u'(\varepsilon) > 0, \quad u'(-\varepsilon) > 0,$$

donde $u(s)$ es una solución de (*). Compárese (*) con

$$v''(s) = 0, \quad v(\varepsilon) = u(\varepsilon), \quad v(\varepsilon) = u'(\varepsilon) \quad \text{para } s \in [\varepsilon, \infty)$$

y con

$$w''(s) = 0, \quad w(-\varepsilon) = u(-\varepsilon), \quad w'(-\varepsilon) = u'(-\varepsilon) \quad \text{para } s \in (-\infty, -\varepsilon]$$

para concluir que si s_0 es suficientemente grande, entonces $J(s)$ tiene dos ceros en el intervalo $(-s_0, s_0)$.

- d. Utilízense los resultados precedentes para demostrar que *una superficie completa con curvatura gaussiana positiva no contiene líneas*.

5.10. Superficies abstractas: otras generalizaciones

En la sec. 5.11 demostraremos un teorema, debido a Hilbert, el cual afirma que no existen superficies regulares completas en R^3 con curvatura gaussiana constante y negativa.

En realidad, el teorema es algo más fuerte. Para comprender el enunciado preciso y la demostración del teorema de Hilbert, es conveniente introducir la noción de superficies geométrica abstracta que surge de las consideraciones siguientes.

Hasta el momento presente, las superficies con las que hemos tratado son subconjuntos S de R^3 sobre los que tienen sentido las funciones diferenciables. Definimos un plano tangente $T_p(S)$ en cada $p \in S$ y desarrollamos la geometría diferencial en torno a p mediante el estudio de la variación de $T_p(S)$. Sin embargo, hemos observado que todas las nociones de la geometría intrínseca (curvatura gaussiana, geodésicas, completitud, etc.) sólo dependen de la elección de un producto interior en cada $T_p(S)$. Si fuésemos capaces de definir un conjunto S de manera abstracta (es decir, sin referencia alguna a R^3) sobre el que las funciones diferenciables tengan sentido, posiblemente podríamos extender la geometría intrínseca a tales conjuntos.

La definición que daremos un poco más abajo es fruto de nuestra experiencia en el cap. 2. Históricamente, tardó bastante tiempo en aparecer, lo que probablemente fue debido al hecho de que no se comprendía claramente el papel fundamental que juega el cambio de parámetros en la definición de superficie en R^3 .

DEFINICION 1. Una superficie abstracta (*variedad diferenciable de dimensión 2*) es un conjunto S dotado de una familia de aplicaciones inyectivas $x_a: U_a \rightarrow S$ definidas en conjuntos abiertos $U_a \subset R^2$ con valores en S tales que

1. $\bigcup_a x_a(U_a) = S$.
2. Para cada pareja α, β con $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, tenemos que $x_\alpha^{-1}(W)$ y $x_\beta^{-1}(W)$ son conjuntos abiertos en R^2 y $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha, x_\alpha^{-1} \circ x_\beta$ son aplicaciones diferenciables (fig. 5-46).

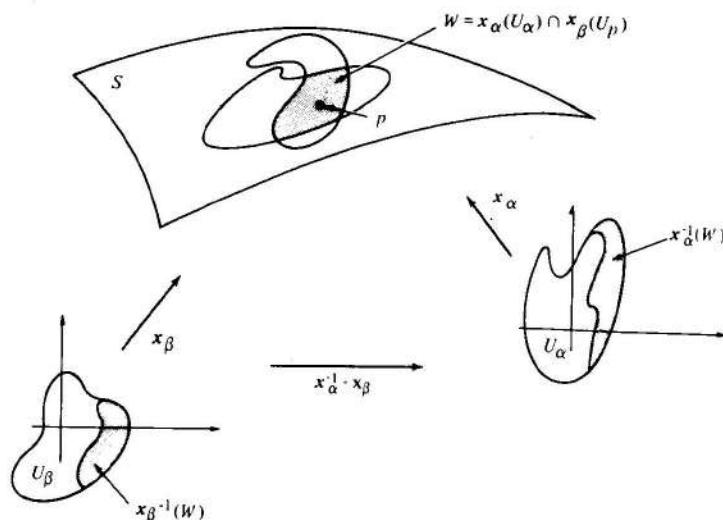


Figura 5-46

La pareja (U_α, x_α) con $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ se denomina una *parametrización* (o sistema coordenado) de S en torno a p . El conjunto $x_\alpha(U_\alpha)$ se denomina *un entorno coordenado* y si $q = x_\alpha(u_\alpha, v_\alpha) \in S$ decimos que (u_α, v_α) son las *coordenadas* de q en dicho sistema coordinado. La familia $\{U_\alpha, x_\alpha\}$ se llama una *estructura diferenciable* de S .

Se deduce inmediatamente de la condición 2 que el «cambio de parámetros»

$$x_\beta^{-1} \circ x_\alpha: x_\alpha^{-1}(W) \longrightarrow x_\beta^{-1}(W)$$

es un difeomorfismo.

Observación 1. Algunas veces es conveniente añadir otro axioma a la def. 1 y decir que la estructura diferenciable debe ser *maximal* con respecto a las condiciones 1 y 2. Esto quiere decir que cualquier otra familia que satisfaga las condiciones 1 y 2 ya está contenida en la familia $\{U_\alpha, x_\alpha\}$.

Al comparar la definición precedente con la definición de superficie regular en R^3 (sec. 2.2, def. 1) se pone de manifiesto que el punto principal es la inclusión de la ley del cambio de parámetros (la cual es un teorema en las superficies de R^3 , cf. la sec. 2.3, prop. 1) en la definición de superficie abstracta. Ya que ésta era la propiedad que nos permitía definir las funciones diferenciables sobre las superficies de R^3 (sec. 2.3, def. 1), podemos introducir la

DEFINICION 2. Sean S_1 y S_2 superficies abstractas. Una aplicación $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ es diferenciable en $p \in S_1$ si dada una parametrización $y: V \subset R^2 \rightarrow S_2$ en torno a $\varphi(p)$

existe una parametrización $x: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1$ en torno a p tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ y tal que la aplicación

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

es diferenciable en $x^{-1}(p)$. Se dice que φ es diferenciable en S_1 si es diferenciable en cada $p \in S_1$ (fig. 5-47).

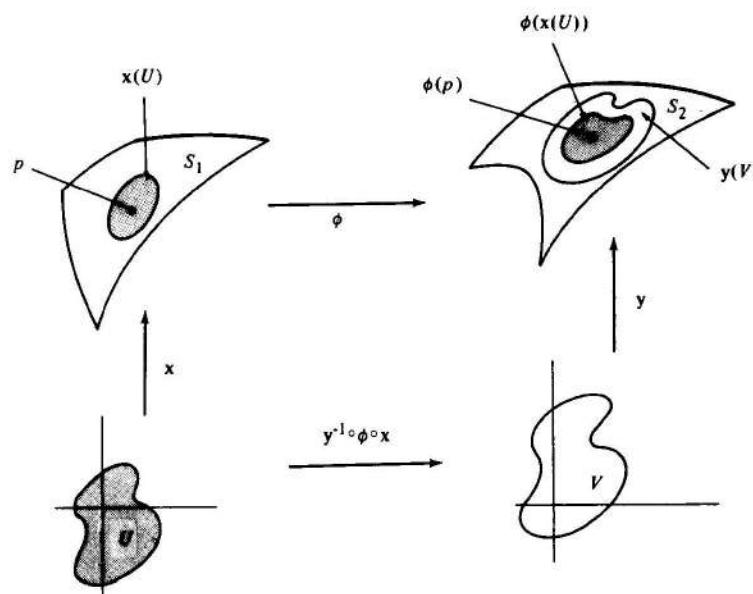


Figura 5-47

En virtud a la condición 2, está claro que esta definición no depende de las elecciones de las parametrizaciones. La aplicación (1) se denomina la *expresión de φ* en las parametrizaciones x e y .

Por tanto, en una superficie abstracta tiene sentido hablar de funciones diferenciables y hemos dado el primer paso hacia la generalización de la geometría intrínseca.

Ejemplo 1. Sea $S^2 = \{(s, y, z) \in \mathbb{R}^3; s^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la esfera unidad y sea $A: S^2 \rightarrow S^2$ la aplicación antipodal; es decir, $A(x, y, z) = (-x, -y, -z)$. Sea P^2 el conjunto que se deduce de S^2 identificando p con $A(p)$ y denótese por $\pi: S^2 \rightarrow P^2$ la aplicación natural $\pi(p) = \{p, A(p)\}$. Recúbrase S^2 mediante parametrizaciones $x_a: U_a \rightarrow S^2$ tal que $x_a(U_a) \cap A \circ x_a(U_a) = \emptyset$. Del hecho de que S^2 es una superficie regular y de que A es un difeomorfismo, se deduce que P^2 dotado de la familia $\{U_a, \pi \circ x_a\}$ es una superficie abstracta, que también se denominará por P^2 . Se denominará a P^2 el *plano proyectivo real*.

Ejemplo 2. Sea $T \subset \mathbb{R}^3$ un toro de revolución (sec. 2.2, ejemplo 4) con centro en $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ y sea $A: T \rightarrow T$ definida por $A(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ (fig. 5-48). Sea K el espacio cociente de T mediante la relación de equivalencia $p \sim A(p)$ y denótese por $\pi: T \rightarrow K$ la aplicación $\pi(p) = \{p, A(p)\}$. Recúbrase T mediante parametrizaciones $x_a: U_a \rightarrow T$ tal que $x_a(U_a) \cap A \circ x_a(U_a) = \emptyset$. Como antes, es posible demostrar que K con la familia $\{U_a, \pi \circ x_a\}$ es una superficie abstracta que se denomina la *botella de Klein*.

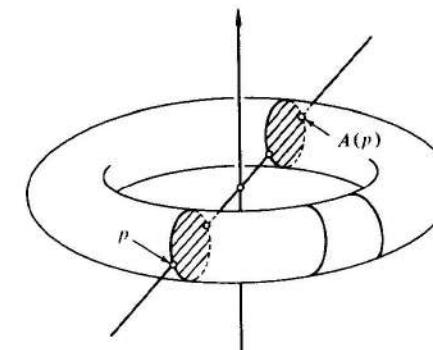


Figura 5-48

Necesitamos ahora asociar a cada punto de una superficie abstracta S un plano tangente. De nuevo es conveniente hacer uso de nuestra experiencia con las superficies en \mathbb{R}^3 (sec. 2.4). Allí el plano tangente estaba constituido por el conjunto de vectores tangentes en un punto, donde un vector tangente en un punto se definía como el vector velocidad en ese punto de una curva sobre la superficie. En consecuencia, tenemos que definir qué es el vector tangente de una curva sobre una superficie abstracta. Como no disponemos del soporte de \mathbb{R}^3 , tenemos que buscar una propiedad característica de los vectores tangentes a las curvas que sea independiente de \mathbb{R}^3 .

Las siguientes consideraciones van a motivar la definición que introduciremos dentro de un momento. Sea $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva diferenciable en \mathbb{R}^2 , con $\alpha(0) = p$. Definamos $\alpha(t) = (u(t), v(t))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y $\alpha'(0) = (u'(0), v'(0)) = w$. Sea f una función diferenciable definida en un entorno de p . Podemos restringir f a α y escribir la derivada direccional de f con respecto a w de la manera siguiente:

$$\frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \Big|_{t=0} = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \Big|_{t=0} = \left\{ u'(0) \frac{\partial}{\partial u} + v'(0) \frac{\partial}{\partial v} \right\} f.$$

Así, la derivada direccional en la dirección del vector w es un operador sobre funciones diferenciables que sólo depende de w . Esta es la propiedad característica de los vectores tangentes que estábamos buscando.

DEFINICIÓN 3. Una aplicación diferenciable $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ se denomina una curva sobre S . Supóngase que $\alpha(0) = p$ y sea D el conjunto de las funciones sobre S que

son diferenciables en p . El vector tangente a la curva α en $t = 0$ es la función $\alpha'(0)$: $D \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\alpha'(0)(f) = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in D.$$

Un vector tangente en un punto $p \in S$ es el vector tangente en $t = 0$ a alguna curva α : $(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ con $\alpha(0) = p$.

Eligiendo una parametrización $x: U \rightarrow S$ en torno a $p = x(0, 0)$ podemos expresar la función f y la curva α en x mediante $f(u, v)$ y $(u(t), v(t))$, respectivamente. Por tanto

$$\begin{aligned} \alpha'(0)(f) &= \left. \frac{d}{dt}(f \circ \alpha) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(f(u(t), v(t))) \right|_{t=0} \\ &= u'(0)\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_0 + v'(0)\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_0 = \left\{ u'(0)\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_0 + v'(0)\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_0 \right\}(f). \end{aligned}$$

Dadas las coordenadas (u, v) en torno a p , esto sugiere que denotemos por $(\partial/\partial u)_0$ al vector tangente en p que aplica una función f en $(\partial f/\partial u)_0$; asociaremos un significado análogo al símbolo $(\partial/\partial v)_0$. Subrayamos que $(\partial/\partial u)_0$ y $(\partial/\partial v)_0$ pueden interpretarse como los vectores tangentes en p a las «curvas coordenadas»

$$u \longrightarrow x(u, 0), \quad v \longrightarrow x(0, v),$$

respectivamente (fig. 5-49).

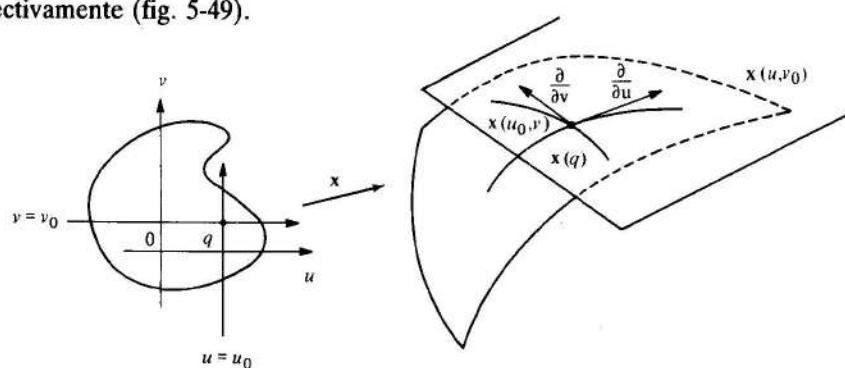


Figura 5-49

En virtud a todo lo dicho, se tiene que el conjunto de los vectores tangentes en p , con las operaciones usuales, es un espacio vectorial bidimensional $T_p(S)$ que se denomina el *espacio tangente* de S en p . También resulta claro que la elección de una parametrización $x: U \rightarrow S$ en torno a p determina una *base asociada* $\{(\partial/\partial u)_q, (\partial/\partial v)_q\}$ de $T_q(S)$ para todo $q \in x(U)$.

A partir de la noción de espacio tangente, podemos extender a superficies abstractas la definición de diferencial.

DEFINICIÓN 4. Sean S_1 y S_2 superficies abstractas y sea $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación diferenciable. Para cada $p \in S_1$ y cada $w \in T_p(S_1)$, considérese una curva diferenciable $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_1$, con $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w$. Sea $\beta = \varphi \circ \alpha$. La aplicación $d\varphi_p: T_p(S_1) \rightarrow T_{\varphi(p)}(S_2)$ dada por $d\varphi_p(w) = \beta'(0)$ es una aplicación lineal bien definida, denominada la *diferencial de φ en p* .

La demostración de que $d\varphi_p$ está bien definida y de que es lineal es exactamente la misma que la de la prop. 2 en la sec. 2.4.

Estamos ya en condiciones de abordar la etapa final en nuestra generalización de la geometría intrínseca.

DEFINICIÓN 5. Una superficie geométrica (*variedad riemanniana de dimensión dos*) es una superficie abstracta S dotada de un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ en cada $T_p(S)$, $p \in S$, que varía diferenciablemente con respecto a p en el sentido siguiente. Para alguna (por tanto, para toda) parametrización $x: U \rightarrow S$ en torno a p , las funciones

$$E(u, v) = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle, \quad F(u, v) = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle, \quad G(u, v) = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle$$

son funciones diferenciables en U . El producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se denomina habitualmente una *métrica (riemanniana) sobre S* .

Ahora es una cuestión simple extender a superficies geométricas las nociones de la geometría intrínseca. De hecho, con las funciones E , F y G definimos los símbolos de Christoffel de S mediante el sistema 2 de la sec. 4.3. Como todas las nociones de la geometría intrínseca se definieron en términos de los símbolos de Christoffel, éstas se pueden definir ahora en S .

Así, las derivadas covariantes de campos vectoriales a lo largo de curvas están definidas por la ec. (1) de la sec. 4.4. La existencia del transporte paralelo se deduce de la prop. 2 de la sec. 4.4 y una geodésica es una curva tal que el campo de sus vectores tangentes tiene derivada covariante cero. La curvatura gaussiana se puede definir mediante la ec. (5) de la sec. 4.3 o bien en términos del transporte paralelo, como hicimos en la sec. 4.5.

La discusión precedente da pie para que entren en escena objetos nuevos e interesantes, como se pone de manifiesto en las consideraciones que siguen a continuación. Empezaremos con un ejemplo relacionado con el teorema de Hilbert.

Ejemplo 3. Sea $S = \mathbb{R}^2$ un plano de coordenadas (u, v) y defínase en cada punto $q = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ el producto interior asociado a

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle_q &= E = 1, & \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle_q &= F = 0, \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle_q &= G = e^{2u}. \end{aligned}$$

Con esta elección del producto interior \mathbb{R}^2 es una superficie geométrica H que se llama

el *plano hiperbólico*. La geometría de H difiere de la geometría usual de R^2 . Por ejemplo, la curvatura de H es (sec. 4.3, ejercicio 1)

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\} = -\frac{1}{2e^u} \left(\frac{2e^{2u}}{e^u} \right)_u = -1.$$

En realidad, la geometría de H constituye un modelo exacto para la geometría no euclídea de Lobachevski, en la que se admiten todos los axiomas de Euclides exceptuando el axioma de las paralelas (cf. la sec. 4.5). Calcularemos, a efectos de aclarar este punto, las geodésicas de H .

Si nos fijamos en las ecuaciones diferenciales de las geodésicas cuando $E = 1, F = 0$ (sec. 4.6, ejercicio 2), comprobamos inmediatamente que las curvas $v = \text{const.}$ son geodésicas. Para hallar las otras, es conveniente definir la aplicación

$$\phi: H \longrightarrow R_+^2 = \{(x, y) \in R^2; y > 0\}$$

mediante $\phi(u, v) = (v, e^{-u})$. Se comprueba fácilmente que ϕ es diferenciable y que, al ser $y > 0$, admite una inversa diferenciable. Así, ϕ es un difeomorfismo y podemos inducir un producto interior en R_+^2 poniendo

$$\langle d\phi(w_1), d\phi(w_2) \rangle_{\phi(q)} = \langle w_1, w_2 \rangle_q.$$

Para calcular este producto interior observemos que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = -e^u \frac{\partial}{\partial u},$$

luego,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = e^{2u} = \frac{1}{y^2}, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \frac{1}{y^2}.$$

Con este producto interior, R_+^2 es isométrico a H y algunas veces se le denomina el *semiplano de Poincaré*.

Para determinar las geodésicas de H , trabajamos en el semiplano de Poincaré y efectuamos además dos cambios de coordenadas.

Primero, fíjese un punto $(x_0, 0)$ y póngase (fig. 5-50)

$$x - x_0 = \varrho \cos \theta, \quad y = \varrho \sin \theta,$$

$0 < \theta < \pi, 0 < \varrho < +\infty$. Esto constituye un difeomorfismo de R_+^2 en sí mismo, y

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \varrho}, \frac{\partial}{\partial \varrho} \right\rangle = \frac{1}{\varrho^2 \sin^2 \theta}, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial \varrho}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle = \frac{1}{\sin^2 \theta}.$$

Consideremos seguidamente el difeomorfismo de R_+^2 definido por (queremos cambiar θ por un parámetro que mida la longitud de arco a lo largo de $\varrho = \text{const.}$)

$$\varrho_1 = \varrho, \quad \theta_1 = \int_0^\theta \frac{1}{\sin \theta} d\theta,$$

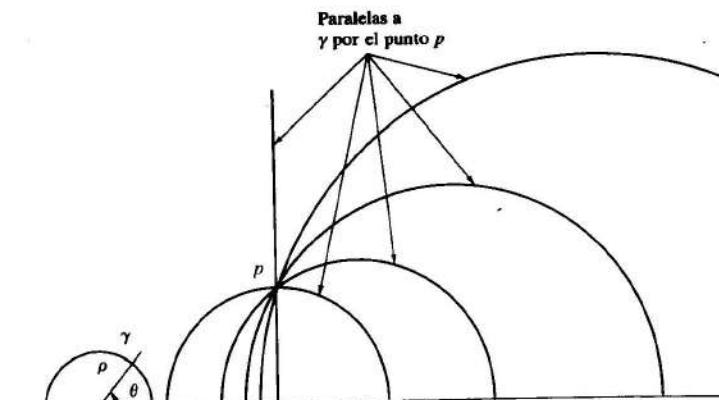


Figura 5-50

que da lugar a

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \varrho_1}, \frac{\partial}{\partial \varrho_1} \right\rangle = \frac{1}{\varrho_1^2 \sin^2 \theta}, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial \varrho_1}, \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta_1}, \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right\rangle = 1.$$

Fijándonos de nuevo en las ecuaciones diferenciales de las geodésicas ($F = 0, G = 1$), vemos que $\varrho_1 = \varrho = \text{const.}$ son geodésicas (en el ejercicio 8 se plantea otra forma de hallar las geodésicas de R_+^2).

Recopilando nuestras observaciones concluimos que las rectas y los semicírculos que son perpendiculares al eje $y = 0$ son geodésicas del semiplano de Poincaré R_+^2 . Son éstas todas las geodésicas de R_+^2 , pues por cada punto $q \in R_+^2$ y cada dirección que se apoya en q pasa un círculo tangente a esa recta y normal al eje $y = 0$ o bien una recta vertical (cuando la dirección es vertical).

La superficie geométrica R_+^2 es completa; es decir, las geodésicas se pueden definir para todos los valores del parámetro. Se deja como ejercicio la demostración de este hecho (ejercicio 7, cf. también el ejercicio 6).

Ahora es fácil ver que, si definimos una recta de R_+^2 como una geodésica, se cumplen todos los axiomas de Euclides en esta geometría salvo el axioma de las paralelas. El axioma de las paralelas en el plano euclídeo P afirma que desde un punto que no pertenece a una recta $r \subset P$ se puede trazar una única recta $r' \subset P$ que no corta a r . En R_+^2 , pueden trazarse, en realidad, desde un punto que no pertenece a una geodésica γ , un número infinito de geodésicas que no cortan a γ .

Una cuestión que surge es si sería posible hallar una superficie de este tipo que sea una superficie regular en R^3 . La siguiente definición establece el contexto natural para esta cuestión.

DEFINICIÓN 6. Se dice que una aplicación diferenciable $\varphi: S \rightarrow R^3$, de una superficie abstracta S en R^3 , es una inmersión si la diferencial $d\varphi_p: T_p(S) \rightarrow T_{\varphi(p)}(R^3)$ es inyectiva. Si, además, S tiene una métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\langle d\varphi_p(v), d\varphi_p(w) \rangle_{\varphi(p)} = \langle v, w \rangle_p, \forall v, w \in T_p(S)$, se dice entonces que φ es una inmersión isométrica.

Nótese que el primer producto interior en la relación precedente es el producto interior usual de R^3 , mientras que el segundo es el que proporciona la métrica riemanniana en S . Esto significa que en el caso de una inmersión isométrica, la métrica «inducida» por R^3 en S coincide con la métrica dada en S .

El teorema de Hilbert, que demostraremos en la Sec. 5.11, establece que no existe una inmersión isométrica del plano hiperbólico completo en R^3 . En particular, no se puede hallar un modelo de la geometría de Lobachewski bajo la forma de una superficie regular en R^3 .

En realidad, no hay razón para que nos limitemos a R^3 . La definición precedente de inmersión isométrica tiene perfecto sentido cuando reemplazamos R^3 por R^4 o, a estos efectos, por un R^n arbitrario. De esta manera, podemos ampliar nuestra cuestión inicial y plantearnos: *¿para qué valores de n existe una inmersión isométrica del plano hiperbólico completo en R^n ?* El teorema de Hilbert establece que $n \geq 4$. Con los conocimientos de que disponemos, el caso $n = 4$ todavía está por definir.

Consecuentemente, la introducción de las superficies abstractas hace entrar en escena objetos nuevos, iluminando la forma de abordar cuestiones que son importantes.

En el resto de esta sección vamos a explorar con más detalle algunas de las ideas que acabamos de introducir y demostraremos cómo éstas dan lugar, de una manera natural, a otras generalizaciones importantes. Esta parte no será necesaria para la comprensión de la próxima sección.

Examinemos algunos ejemplos más.

Ejemplo 4. Sea R^2 un plano de coordenadas (x, y) y sea $T_{m,n}: R^2 \rightarrow R^2$ la aplicación (traslación) $T_{m,n}(x, y) = (x + m, y + n)$, donde m y n son números enteros. Defínase en R^2 una relación de equivalencia mediante $(x, y) \sim (x_1, y_1)$ si existen enteros m y n tales que $T_{m,n}(x, y) = (x_1, y_1)$. Sea T el espacio cociente de R^2 mediante esta relación de equivalencia y sea $\pi: R^2 \rightarrow T$ la aplicación proyección natural $\pi(x, y) = \{T_{m,n}(x, y); m, n \text{ recorriendo los enteros}\}$. Así, en cada cuadrado unitario y abierto cuyos vértices tengan coordenadas enteras sólo hay un representante de T ; podemos, por tanto, imaginarnos a T como un cuadrado cerrado donde se identifican los lados opuestos (véase la fig. 5-51; nótese que allí todos los puntos de R^2 señalados con una x representan el mismo punto p de T).

Sea $i_a: U_a \subset R^2 \rightarrow R^2$ una familia de parametrizaciones de R^2 , donde i_a es la aplicación identidad, tal que $U_a \cap T_{m,n}(U_a) = \emptyset$ para todos los m, n . Como $T_{m,n}$ es un difeomorfismo, se comprueba fácilmente que la familia $(U_a, \pi \circ i_a)$ constituye una estructura diferenciable para T . Se dice que T es un toro (diferenciable). De la propia forma que tiene la estructura diferenciable de T se deduce que $\pi: R^2 \rightarrow T$ es una aplicación diferenciable y un difeomorfismo local (la construcción que se describe en la fig. 5-51 indica que T es difeomorfo al toro estándar de R^3).

Nótese ahora que $T_{m,n}$ es una isometría de R^2 y que induce, como veremos a continuación, una estructura geométrica (riemanniana) en T . Sean $p \in T$ y $v \in T_p(T)$. Sean $q_1, q_2 \in R^2$ y $w_1, w_2 \in R^2$ tales que $\pi(q_1) = \pi(q_2) = p$ y $d\pi_{q_1}(w_1) = d\pi_{q_2}(w_2) = v$. Entonces $q_1 \sim q_2$; luego existe $T_{m,n}$ tal que $T_{m,n}(q_1) = q_2$, $d(T_{m,n})_{q_1}w_1 = w_2$. Como $T_{m,n}$ es una isometría, $|w_1| = |w_2|$. Defínase ahora la longitud de v en $T_p(T)$ como $|v| = |d\pi_q(w_1)| = |w_1|$. Por todo lo dicho, esta longitud está bien definida. Está claro que

genera un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ en $T_p(T)$ para cada $p \in T$. Como éste es en esencia el producto interior de R^2 y π es un difeomorfismo local, entonces $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ varía diferenciablemente con respecto a p .

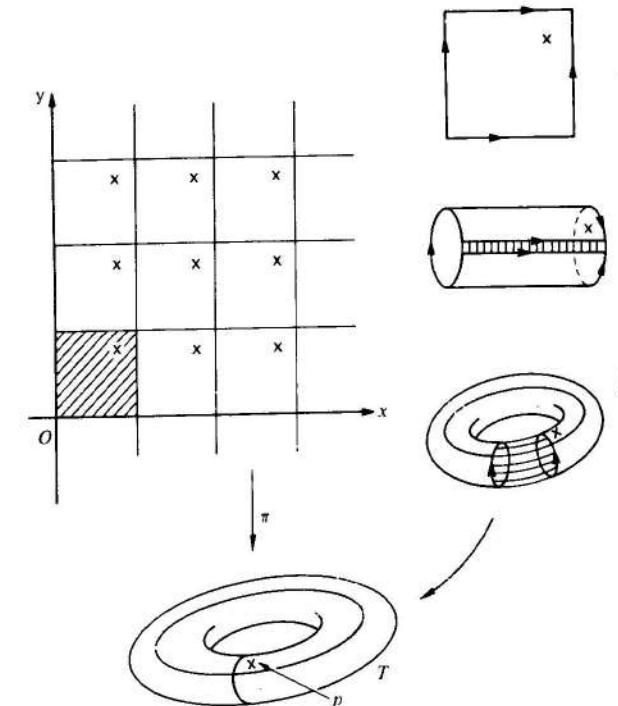


Figura 5-51. El toro.

Obsérvese que los coeficientes de la primera forma fundamental de T , en cualquiera de las parametrizaciones de la familia $\{U_a, \alpha \circ i_a\}$, son $E = G = 1, F = 0$. Así, este toro se comporta localmente como un espacio euclídeo. Por ejemplo, su curvatura gaussiana es idénticamente cero (cf. el ejercicio 1, sec. 4.3). Este hecho justifica el nombre de *toro plano*, con el que se conoce habitualmente a T , dotado del producto interior que acabamos de describir.

Está claro que el toro plano no se puede aplicar en R^3 mediante una inmersión isométrica, pues, por defecto de la compactitud, debería tener en tal caso un punto con curvatura positiva (cf. el ejercicio 16, sec. 3.3, o el lema 1, sec. 5.2). Sin embargo, sí se puede aplicar en R^4 mediante una inmersión isométrica.

En efecto, sea $F: R^2 \rightarrow R^4$ la aplicación definida por

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi} (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x, \cos 2\pi y, \sin 2\pi y).$$

Al ser $F(x + m, y + n) = F(x, y)$ para todos los m, n , podemos definir la aplicación $\varphi: T \rightarrow R^4$ como $\varphi(p) = F(q)$, donde $q \in \pi^{-1}(p)$. Está claro que $\varphi \circ \pi = F$ y, al ser $\pi: R^2 \rightarrow T$

→ T un difeomorfismo local, se tiene que φ es diferenciable. Además, el rango de $d\varphi$ es igual al rango de dF , que, como se comprueba fácilmente, es 2. Por tanto, φ es una inmersión. Para ver que la inmersión es isométrica, obsérvese primero que si $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ son los vectores de la base canónica de R^2 , los vectores $d\pi_q(e_1) = f_1$, $d\pi_q(e_2) = f_2$, $q \in R^2$, forman una base de $T_{\varphi(q)}(T)$. Por la definición que se dio para el producto interior en T , $\langle f_i, f_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle$, $i, j = 1, 2$. Calculamos a continuación

$$\frac{\partial F}{\partial x} = dF(e_1) = (-\operatorname{sen} 2\pi x, \cos 2\pi x, 0, 0),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = dF(e_2) = (0, 0, -\operatorname{sen} 2\pi y, \cos 2\pi y),$$

y obtenemos que

$$\langle dF(e_i), dF(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \langle f_i, f_j \rangle.$$

Por tanto,

$$\langle d\varphi(f_i), d\varphi(f_j) \rangle = \langle d\varphi(d\pi(e_i)), d\varphi(d\pi(e_j)) \rangle = \langle f_i, f_j \rangle.$$

Se deduce entonces que, como habíamos afirmado, φ es una inmersión isométrica.

Debe subrayarse que la imagen $\varphi(S)$ de una inmersión $\varphi: S \rightarrow R^n$ puede presentar autointersecciones. En el ejemplo previo, $\varphi: T \rightarrow R^4$ es inyectiva y además es un homeomorfismo sobre su imagen. Es conveniente hacer uso de la terminología siguiente.

DEFINICIÓN 7. Sea S una superficie abstracta. Una aplicación diferenciable $\varphi: S \rightarrow R^n$ es una sumersión* cuando φ es una inmersión y un homeomorfismo sobre su imagen.

Por ejemplo, una superficie regular en R^3 puede caracterizarse como la imagen de una superficie abstracta S mediante una sumersión $\varphi: S \rightarrow R^3$. Esto quiere decir que las únicas superficies abstractas en R^3 que estábamos en condiciones de detectar, a partir de nuestro estudio previo de las superficies regulares en R^3 , son aquellas que están sumergidas* en R^3 . Esto constituye una restricción seria como muestra el ejemplo que sigue.

Ejemplo 5. Subrayemos primero que la definición de orientabilidad (cf. la sec. 2.6, def. 1) se puede extender a superficies abstractas, sin cambiar una sola palabra. Consideremos ahora el plano proyectivo real P^2 del ejemplo 1. Afirmando que P^2 es no orientable.

* Hemos traducido así el término técnico «embedding» (N. del T.).

Para demostrarlo, hacemos primero la siguiente observación general. Siempre que una superficie abstracta S contenga un conjunto abierto M difeomorfo a una banda de Möbius (sec. 2.6, ejemplo 3), se tendrá que S es no orientable. En caso contrario, existiría una familia de parametrizaciones que recubren S con la propiedad de que todos los cambios de coordenadas tienen jacobiano positivo; la restricción de dicha familia a M induciría una orientación en M lo que constituye una contradicción.

Ahora, P^2 se deduce de la esfera S^2 identificando los puntos antipodales. Considerese en S^2 una banda delgada B constituida por segmentos abiertos sobre los meridianos, cuyos centros se hallen en medio ecuador (fig. 5-52). B se convierte claramente en una banda abierta de Möbius en P^2 , cuando efectuamos la identificación de puntos antipodales. Por tanto, P^2 no es orientable.

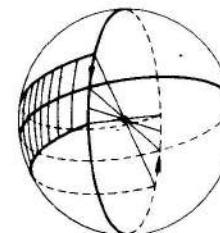


Figura 5-52. El plano proyectivo contiene una banda de Möbius.

Se puede demostrar, mediante un argumento similar, que la botella de Klein K del ejemplo 2 es también no orientable. En general, siempre que una superficie regular $S \subset R^3$ es simétrica con respecto al origen de R^3 , la identificación de puntos simétricos da lugar a una superficie abstracta no orientable.

Se puede probar que una superficie regular compacta en R^3 es orientable (cf. la observación 2, sec. 2.7). Por tanto, P^2 y K no pueden sumergirse en R^3 y lo mismo sucede con las superficies compactas orientables generadas por el procedimiento que acabamos de describir. Perdemos así, un gran número de superficies en R^3 .

Sin embargo, P^2 y K se pueden sumergir en R^4 . Para la botella de Klein, considérese la aplicación $G: R^2 \rightarrow R^4$ definida por

$$G(u, v) = ((r \cos v + a) \cos u, (r \cos v + a) \sin u,$$

$$r \sin v \cos \frac{u}{2}, r \sin v \sin \frac{u}{2}),$$

Nótese que $G(u, v) = G(u + 2m\pi, 2n\pi - v)$, donde m y n son números enteros. Así, G induce una aplicación ψ del espacio que se obtiene a partir del cuadrado

$$[0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset R^2$$

reflejando primero uno de sus lados en el centro de dicho lado e identificando después los lados opuestos (véase la fig. 5-53). Este procedimiento da lugar a la botella de

Klein, tal como se definió en el ejemplo 2. Para comprobarlo, basta con estirar una mitad abierta del toro, en el que se han identificado los puntos antipodales, y observar que ambos procedimientos dan lugar a la misma superficie (fig. 5-53).

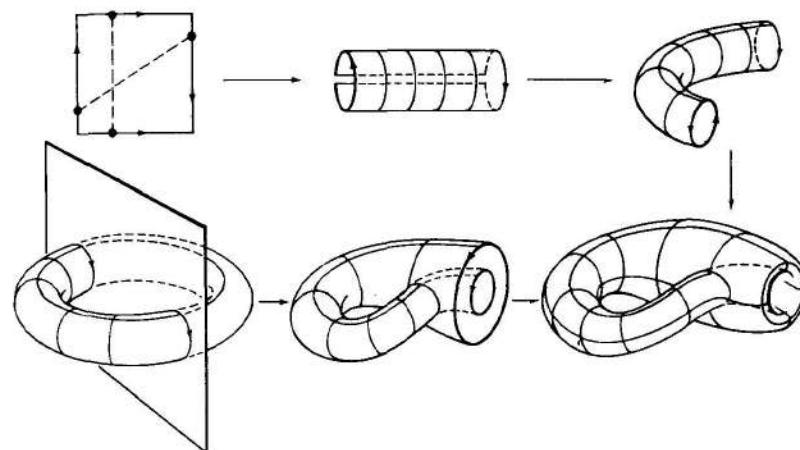


Figura 5-53. Imagen en \mathbb{R}^2 de la botella de Klein mediante una inmersión. Obsérvese las autointersecciones.

Por tanto, ψ es una aplicación de K en \mathbb{R}^4 . Obsérvese además que

$$G(u + 4m\pi, v + 2m\pi) = G(u, v).$$

Se deduce entonces que $G = \psi \circ \pi_1 \circ \pi$, donde $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow T$ es esencialmente la proyección natural sobre el toro T (cf. el ejemplo 4) y $\pi_1: T \rightarrow K$ corresponde a la identificación «antipodal» en T . Por la definición de las estructuras diferenciables de T y K , π y π_1 son difeomorfismos locales. Así, $\psi: K \rightarrow \mathbb{R}^4$ es diferenciable y el rango de $d\psi$ es el mismo que el de dG . Calculando, se comprueba sin dificultad que éste último es 2; luego ψ es una inmersión. Como K es compacta y ψ es inyectiva, se ve fácilmente que ψ^{-1} es continua en $\psi(K)$. Por tanto, como pretendíamos demostrar, ψ es una sumersión.

Para el plano proyectivo P^2 , considérese la aplicación $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$F(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz).$$

Sea $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la esfera unidad con centro en el origen de \mathbb{R}^3 . Está claro que la restricción $\varphi = F|_{S^2}$ es tal que $\varphi(p) = \varphi(-p)$. Por tanto, φ induce una aplicación

$$\tilde{\varphi}: P^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \text{ donde } \tilde{\varphi}([p, -p]) = \varphi(p).$$

Para ver que φ (luego $\tilde{\varphi}$) es una inmersión, considérese la parametrización x de S^2 dada por $x(x, y) = (x, y, +\sqrt{1 - x^2 - y^2})$, donde $x^2 + y^2 \leq 1$. Entonces,

$$\varphi \circ x(x, y) = (x^2 - y^2, xy, xD, yD), \quad D = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Se comprueba fácilmente que la matriz de $d(\varphi \circ x)$ tiene rango 2. Por tanto $\tilde{\varphi}$ es una inmersión.

Para ver que $\tilde{\varphi}$ es inyectiva, definamos

$$x^2 - y^2 = a, \quad xy = b, \quad xz = c, \quad yz = d. \quad (2)$$

Basta con demostrar que, bajo la condición $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, las ecuaciones precedentes solamente tienen dos soluciones que son de la forma (x, y, z) y $(-x, -y, -z)$. En efecto, podemos escribir

$$\begin{aligned} x^2d &= bc, & y^2c &= bd, \\ z^2b &= cd, & x^2 - y^2 &= a, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 & & \end{aligned} \quad (3)$$

donde las tres primeras ecuaciones proceden de las tres últimas identidades de (2).

Ahora, si uno de los números b, c, d es no nulo, las ecuaciones de (3) dan los valores de x^2, y^2 , y z^2 ; determinando las ecuaciones de (2) el signo de dos coordenadas, una vez se conozca el signo de la variable restante. Si $b = c = d = 0$, las ecuaciones de (2) y la última ecuación de (3) prueban que dos coordenadas son exactamente cero, siendo la coordenada restante ± 1 . En cualquier caso, las soluciones tienen la forma anunciada y $\tilde{\varphi}$ es inyectiva.

Por compacidad, $\tilde{\varphi}$ es una sumersión, concluyendo así el ejemplo.

Si repasamos la definición de superficie abstracta, comprobamos que el número 2· no desempeña ningún papel especial. Podemos extender así la definición a un n arbitrario. Ello es de gran utilidad, como veremos muy pronto.

DEFINICIÓN 1.^a. Una variedad diferenciable de dimensión n es un conjunto M dotado de una familia de aplicaciones inyectivas $x_a: U_a \rightarrow M$ definidas en conjuntos abiertos $U_a \subset \mathbb{R}^n$ con valores en M tales que

1. $\bigcup_a x_a(U_a) = M$.
2. Para cada pareja α, β con $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, tenemos que $x_\alpha^{-1}(W)$ y $x_\beta^{-1}(W)$ son conjuntos abiertos en \mathbb{R}^n y $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha, x_\alpha^{-1} \circ x_\beta$ son aplicaciones diferenciables.
3. La familia $\{U_a, x_a\}$ es maximal con respecto a las condiciones 1 y 2.

Una familia $\{U_a, x_a\}$ que satisface las condiciones 1 y 2 se denomina una *estructura diferenciable* en M . Dada una estructura diferenciable en M podemos completarla fácilmente, a fin de obtener una maximal, mediante el procedimiento de añadirle todas las parametrizaciones posibles que, junto con alguna parametrización de la familia $\{U_a, x_a\}$, satisfagan la condición 2. Podemos decir así, cometiendo un abuso de lenguaje, que una variedad diferenciable es un conjunto dotado de una estructura diferenciable.

Observación. En M se puede definir una familia de conjuntos abiertos mediante la condición siguiente: $V \subset M$ es un conjunto abierto si $x_\alpha^{-1}(V \cap x_\alpha(U_\alpha))$ es un conjunto abierto en R^n , para cada α . Los lectores con algunas nociones de topología general observarán que tal familia define una topología natural en M . En esta topología, las aplicaciones x_α son continuas y los conjuntos $x_\alpha(U_\alpha)$ son abiertos en M . En algunos teoremas más profundos sobre variedades, resulta necesario imponer algunas condiciones sobre la topología natural de M .

Las definiciones de aplicación diferenciable y de vector tangente se traslada, palabra por palabra, a variedades diferenciables. Como es natural, el espacio tangente es ahora un espacio vectorial n -dimensional. Las definiciones de diferencial y orientabilidad también se extienden sin mayores dificultades a la situación presente.

En el ejemplo siguiente mostraremos cómo algunas cuestiones sobre variedades bidimensionales conducen de manera natural al estudio de variedades de dimensión superior.

Ejemplo 6. (El fibrado tangente). Sea S una superficie abstracta y sea $T(S) = \{(p, w), p \in S, w \in T_p(S)\}$. Demostraremos que el conjunto $T(S)$ puede dotarse de una estructura diferenciable (de dimensión 4) que se denomina el *fibrado tangente* de S .

Sea $\{U_\alpha, x_\alpha\}$ una estructura diferenciable para S . Denotaremos por (u_α, v_α) a las coordenadas de U_α y por $\{\partial/\partial u_\alpha, \partial/\partial v_\alpha\}$ a las bases asociadas en los planos tangentes de los puntos de $x_\alpha(U_\alpha)$. Definamos, para cada α , la aplicación $y_\alpha: U_\alpha \times R^2 \rightarrow T(S)$ mediante

$$y_\alpha(u_\alpha, v_\alpha, x, y) = \left(x_\alpha(u_\alpha, v_\alpha), x \frac{\partial}{\partial u_\alpha} + y \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \right), \quad (x, y) \in R^2.$$

Esto significa geométricamente que tomaremos como coordenadas de un punto $(p, w) \in T(S)$ a las coordenadas u_α, v_α de p añadiéndole las coordenadas de w en la base $\{\partial/\partial u_\alpha, \partial/\partial v_\alpha\}$.

Demostraremos que $\{U_\alpha \times R^2, y_\alpha\}$ es una estructura diferenciable para $T(S)$. Al ser $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = S$ y $(dx_\alpha)_q(R^2) = T_{x_\alpha(q)}(S)$, $q \in U_\alpha$, tenemos que

$$\bigcup_\alpha y_\alpha(U_\alpha \times R^2) = T(S),$$

con lo que se verifica la condición 1 de la def. 1.^a. Sea ahora

$$(p, w) \in y_\alpha(U_\alpha \times R^2) \cap y_\beta(U_\beta \times R^2).$$

Entonces

$$(p, w) = (x_\alpha(q_\alpha), dx_\alpha(w_\alpha)) = (y_\beta(q_\beta), dx_\beta(w_\beta)),$$

donde $q_\alpha \in U_\alpha$, $q_\beta \in U_\beta$, $w_\alpha, w_\beta \in R^2$. Por tanto,

$$\begin{aligned} y_\beta^{-1} \circ y_\alpha(q_\alpha, w_\alpha) &= y_\beta^{-1}(x_\alpha(q_\alpha), dx_\alpha(w_\alpha)) \\ &= ((x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)(q_\alpha), d(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)(w_\alpha)). \end{aligned}$$

Como $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ es diferenciable también lo es $d(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)$. Se tiene entonces que $y_\beta^{-1} \circ y_\alpha$ es diferenciable, luego se cumple la condición 2 de la def. 1.^a.

El fibrado tangente de S es el espacio natural de trabajo cuando se trata con ecuaciones diferenciables de segundo orden en S . Por ejemplo, las ecuaciones de una geodésica sobre una superficie geométrica S pueden escribirse, en un entorno coordenado, de la manera siguiente (cf. la sec. 4.7)

$$\begin{aligned} u'' &= f_1(u, v, u', v'), \\ v'' &= f_2(u, v, u', v'). \end{aligned}$$

El «truco» clásico de introducir las nuevas variables $x = u'$, $y = v'$ para reducir la ecuación precedente al sistema de primer orden

$$\begin{aligned} x' &= f_1(u, v, x, y), \\ y' &= f_2(u, v, x, y), \\ u' &= f_3(u, v, x, y), \\ v' &= f_4(u, v, x, y) \end{aligned} \tag{4}$$

puede interpretarse como una manera de hacer intervenir el fibrado tangente $T(S)$, con coordenadas (u, v, x, y) , y como una manera de hallar las geodésicas como las trayectorias de un campo vectorial, definido localmente en $T(S)$ por (4). Se puede demostrar que dicho campo vectorial está bien definido en la totalidad de $T(S)$; es decir, en la intersección de dos entornos coordinados, los campos vectoriales definidos por (4) coinciden. Este campo (o mejor, sus trayectorias) se denomina el *flujo geodésico* en $T(S)$. Constituye una herramienta bastante natural cuando se estudian las propiedades globales de las geodésicas de S .

Si se repasa la sec. 4.7, se comprobará que hemos utilizado la variedad $T(S)$ de una forma distinguida. Como sólo estabamos interesados en las propiedades locales, nos las podíamos arreglar con un sólo entorno coordenado (que es esencialmente un conjunto abierto de R^4). Sin embargo, incluso en este marco local, los resultados aparecen más claros cuando tenemos en consideración la noción de fibrado tangente.

Como es natural, podemos definir también el fibrado tangente de una variedad diferenciable n -dimensional arbitraria. Salvo por la notación, los detalles son los mismos y se deja como ejercicio.

También podemos extender a una dimensión arbitraria la noción de superficie geométrica.

DEFINICIÓN 5a. Una variedad riemanniana es una variedad diferenciable n -dimensional M , dotada de un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ en $T_p(M)$, para cada $p \in M$, que varía diferenciablemente con respecto a p en el sentido siguiente. Para alguna parametrización (luego para todas) $x_\alpha: U_\alpha \rightarrow M$ con $p \in U_\alpha$, las funciones

$$g_{ij}(u_1, \dots, u_n) = \left\langle \frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j} \right\rangle, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

son diferenciables en $x_\alpha^{-1}(p)$; donde (u_1, \dots, u_n) son las coordenadas de $U_\alpha \subset R^n$.

La familia diferenciable $\{\langle \cdot, \cdot \rangle_p, p \in M\}$ se denomina una *estructura riemanniana* (o *métrica riemanniana*) sobre M .

Nótese que en el caso de superficies hemos utilizado la notación tradicional $g_{11} = E, g_{12} = g_{21} = F, g_{22} = G$.

La extensión de las nociones de la geometría intrínseca a variedades riemannianas no es tan inmediata como en el caso de variedades diferenciables.

En primer lugar, tenemos que definir una noción de derivada covariante para variedades riemannianas. Para ello, sea $x: U \rightarrow M$ una parametrización con coordenadas (u_1, \dots, u_n) y sea $x_i = \partial/\partial u_i$. Entonces, $g_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle$.

Pretendemos definir la derivada covariante $D_w v$ de un campo vectorial v con respecto a un campo vectorial w . Desearíamos que $D_w v$ tuviera las propiedades que hemos utilizado ya y que demostraron ser efectivas en el pasado. En primer lugar, debería cumplir las propiedades distributivas de la antigua derivada covariante. Por tanto, si u, v, w son campos vectoriales en M y si f, g son funciones diferenciables en M , queremos que

$$D_{fu+gw}(v) = fD_u v + gD_w v, \quad (5)$$

$$D_u(fv + gw) = fD_u v + \frac{\partial f}{\partial u} v + gD_u w + \frac{\partial g}{\partial u} w, \quad (6)$$

donde, por ejemplo, $\partial f/\partial u$ es una función cuyo valor en $p \in M$ es la derivada $(f \circ \alpha)'(0)$ de la restricción de f a una curva $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M, \alpha(0) = p, \alpha'(0) = u$.

Las ecuaciones (5) y (6) muestran que la derivada covariante D está completamente determinada una vez conozcamos sus valores sobre los vectores de la base

$$D_{x_i} x_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k x_k, \quad i, j, k = 1, \dots, n,$$

siendo los coeficientes Γ_{ij}^k funciones por determinar.

En segundo lugar, queremos que los Γ_{ij}^k sean simétricos en u y en j ($\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$); es decir,

$$D_{x_i} x_j = D_{x_j} x_i \quad \text{para todo } i, j. \quad (7)$$

En tercer lugar, queremos que se verifique la ley de los productos; es decir,

$$\frac{\partial}{\partial u_k} \langle x_i, x_j \rangle = \langle D_{x_i} x_i, x_j \rangle + \langle x_i, D_{x_i} x_j \rangle. \quad (8)$$

De las ecs. (7) y (8) se deduce que

$$\frac{\partial}{\partial u_k} \langle x_i, x_j \rangle + \frac{\partial}{\partial u_i} \langle x_j, x_k \rangle - \frac{\partial}{\partial u_j} \langle x_k, x_i \rangle = 2 \langle D_{x_i} x_k, x_j \rangle,$$

o, equivalentemente,

$$\frac{\partial}{\partial u_k} g_{ij} + \frac{\partial}{\partial u_i} g_{jk} - \frac{\partial}{\partial u_j} g_{ki} = 2 \sum_l \Gamma_{ik}^l g_{lj}.$$

Como $\det(t_{ij}) \neq 0$, podemos resolver el último sistema y obtener los Γ_{ij}^k como funciones de la métrica riemanniana g_{ij} y de sus derivadas (el lector debería comparar el sistema precedente con el sistema (2) de la sec. 4.3). Si nos imaginamos a los g_{ij} como una matriz y escribimos su inversa como g^{ij} , la solución del sistema precedente es

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_l} \right).$$

Por tanto, dada una estructura riemanniana para M , existe una única derivada covariante en M (también denominada la conexión de Levi-Civita de la estructura riemanniana en cuestión) que satisface las ecs. (5)-(8).

A partir de la derivada covariante, podemos definir el transporte paralelo, las geodésicas, la curvatura geodésica, la aplicación exponencial, la completitud, etc. Las definiciones son exactamente las mismas que las que hemos dado con anterioridad. Sin embargo, la noción de curvatura requiere un proceso más elaborado. El concepto siguiente, debido a Riemann, probablemente constituye el mejor análogo de la curvatura gaussiana en la geometría riemanniana.

Sea $p \in M$ y sea $\sigma \subset T_p(M)$ un subespacio bidimensional del espacio tangente $T_p(M)$. Considerérese todas las geodésicas de M que empiezan en p y que son tangentes a σ . En virtud al hecho de que la aplicación exponencial es un difeomorfismo local en el origen de $T_p(M)$, puede demostrarse que tomando segmentos pequeños de tales geodésicas se construye una superficie abstracta S que contiene a p . La superficie S tiene una estructura geométrica natural inducida por la estructura riemanniana de M . La curvatura gaussiana de S en p se denomina la *curvatura seccional* $K(p, \sigma)$ de M en p , a lo largo de σ .

Es posible formalizar la curvatura seccional en términos de la conexión de Levi-Civita pero ello es demasiado técnico como para describirlo aquí. Mencionaremos solamente que la mayoría de los teoremas de este capítulo pueden plantearse como cuestiones naturales en la geometría riemanniana. Algunas de éstas son ciertas modificando poco, o nada, las demostraciones que se dieron (el teorema de Hopf-Rinow, el teorema de Bonnet, el primer teorema de Hadamard y los teoremas de Jacobi pertenecen todos a esta clase de resultados). Si embargo, otros requieren más hipótesis para ser ciertos (por ejemplo, el segundo teorema de Hadamard) y de su estudio pueden recolectarse otros desarrollos.

Un análisis pormenorizado de las ideas que acabamos de exponer nos llevaría a los dominios de la geometría riemanniana. Sin embargo, tenemos que detenernos aquí y recomendar al lector la bibliografía que se incluye al final del libro.

EJERCICIOS

- Definase una métrica sobre el plano proyectivo P^2 (cf. el ejemplo 1) de forma que la proyección natural $\pi: S^2 \rightarrow P^2$ sea una isometría local. ¿Cuánto vale la curvatura (gaussiana) de dicha métrica?

2. La banda de Möbius infinita. Sea

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$$

un cilindro y sea $A: C \rightarrow C$ la aplicación (antipodal) $A(x, y, z) = (-x, -y, -z)$. Sea M el cociente de C mediante la relación de equivalencia $p \sim A(p)$ y sea $\pi: C \rightarrow M$ la aplicación $\pi(p) = \{p, A(p)\}, p \in C$.

- Demuéstrese que se puede dotar a M de una estructura diferenciable de forma que π sea un difeomorfismo local (se denomina a M la *banda de Möbius infinita*).
- Demuéstrese que M es no orientable.
- Defínase en M una métrica riemanniana de forma que π sea una isometría local. ¿Cuánto vale la curvatura de dicha métrica?
- Demuéstrese que la proyección $\pi: S^2 \rightarrow P^2$ de la esfera sobre el plano proyectivo tiene las siguientes propiedades: (1) π es continua y $\pi(S^2) = P^2$; (2) cada punto $p \in P^2$ admite un entorno U tal que $\pi^{-1}(U) = V_1 \cup V_2$, donde V_1 y V_2 son subconjuntos abiertos disjuntos de S^2 y la restricción de π a cada uno de los $V_i, i = 1, 2$, es un homeomorfismo sobre U . Por tanto, π satisface formalmente las condiciones de aplicación recubridora (véase la sec. 5.6, def. 1) con dos hojas. Por esta razón decimos que S^2 constituye un *recubrimiento orientable doble de P^2* .
- Demuéstrese que, en este sentido, el toro T es un recubrimiento orientable doble de la botella de Klein K (cf. el ejemplo 2) y que el cilindro es un recubrimiento orientable doble de la banda de Möbius infinita (cf. el ejercicio 2).
- El recubrimiento orientable doble.* Este ejercicio proporciona una construcción general para el recubrimiento orientable doble de una superficie no orientable. Sea S una superficie abstracta, conexa y no orientable. Para cada $p \in S$ considérese el conjunto B de todas las bases de $T_p(S)$ y defínanse como *equivalentes*, dos bases de $T_p(S)$ cuya matriz de cambio de coordenadas tiene determinante positivo. Está claro que esta definición da lugar a una relación de equivalencia que divide a B en dos conjuntos disjuntos (cf. la sec. 1.4). Sea \mathcal{O}_p el espacio cociente de B mediante esta relación de equivalencia. El conjunto \mathcal{O}_p tiene dos elementos y cada uno de estos elementos $O_p \in \mathcal{O}_p$ es una orientación de $T_p(S)$ (cf. la sec. 1.4). Sea \tilde{S} el conjunto

$$\tilde{S} = \{(p, O_p); p \in S; O_p \in \mathcal{O}_p\}.$$

Para dotar a \tilde{S} de una estructura diferenciable, sea $\{U_a, x_a\}$ una estructura diferenciable maximal de S y defínase $\tilde{x}_a: U_a \rightarrow \tilde{S}$ mediante

$$\tilde{x}_a(u_a, v_a) = \left(x_a(u_a, v_a), \left[\frac{\partial}{\partial u_a}, \frac{\partial}{\partial v_a} \right] \right),$$

donde $(u_a, v_a) \in U_a$ y donde $[\partial/\partial u_a, \partial/\partial v_a]$ representa el elemento de \mathcal{O}_p determinado por la base $\{\partial/\partial u_a, \partial/\partial v_a\}$. Demuéstrese que

- $\{U_a, \tilde{x}_a\}$ es una estructura diferenciable en \tilde{S} y que, con dicha estructura diferenciable, \tilde{S} es una superficie orientable.
- La aplicación $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$ definida por $\pi(p, O_p) = p$ es una aplicación diferenciable y sobreyectiva. Además, cada punto $p \in S$ tiene un entorno U tal que $\pi^{-1}(U) = V_1 \cup V_2$, donde V_1 y V_2 son subconjuntos abiertos disjuntos de \tilde{S} tales que la restricción de π a cada $V_i, i = 1, 2$, es un difeomorfismo sobre U . Por esta razón se llama a \tilde{S} un *recubrimiento orientable doble de S* .

- Generalícese el teorema de Gauss-Bonnet (véase la sec. 4.5) al caso de superficies geométricas orientables y utilícese dicha generalización para demostrar los hechos siguientes:

- No es posible definir una métrica riemanniana sobre una superficie abstracta T , difeomorfa a un toro, tal que su curvatura sea positiva (o negativa) en todos los puntos de T .
- Sean T y S^2 superficies abstractas que son difeomorfas, respectivamente, al toro y a la esfera, y sea $\varphi: T \rightarrow S^2$ una aplicación diferenciable. Entonces φ tiene al menos un punto crítico, es decir, un punto p tal que $d\varphi_p = 0$.
- Considérese el semiplano superior R_+^2 (cf. el ejemplo 3) con la métrica

$$E(x, y) = 1, \quad F(x, y) = 0, \quad G(x, y) = \frac{1}{y}, \quad (x, y) \in R_+^2.$$

Demuéstrese que las longitudes de los vectores se vuelven arbitrariamente grandes cuando nos aproximamos a la frontera de R_+^2 y que, aún así, la longitud del segmento vertical

$$x = 0, \quad 0 < \varepsilon \leq y \leq 1,$$

se aproxima a 2 cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Conclúyase que tal métrica no es completa.

- Demuéstrese que el semiplano de Poincaré (cf. el ejemplo 3) es una superficie geométrica completa. Conclúyase que el plano hiperbólico es completo.
- Otra manera de hallar las geodésicas del semiplano de Poincaré (cf. el ejemplo 3) consiste en utilizar las ecuaciones de Euler-Lagrange del problema variacional correspondiente (cf. el ejercicio 4, sec. 5.4). Puesto que ya sabemos que las rectas verticales son geodésicas, nos podemos limitar al estudio de las geodésicas del tipo $y = y(x)$. En consecuencia, debemos hallar los puntos críticos de la integral ($F = 0$)

$$\int \sqrt{E + G(y')^2} dx = \int \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{y} dx,$$

ya que $E = G = 1/y^2$. Utilícese el ejercicio 4, sec. 5.4, para demostrar que la solución (general) de este problema variacional es una familia de círculos de la forma

$$(x + k_1)^2 + y^2 = k_2^2, \quad k_1, k_2 = \text{const.}$$

- Sean S y \tilde{S} superficies geométricas conexas y sea $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$ una aplicación diferenciable y sobreyectiva con la propiedad siguiente: para cada $p \in S$, existe un entorno U de p tal que $\pi^{-1}(U) = \bigcup_a V_a$, siendo los V_a subconjuntos abiertos disjuntos de \tilde{S} tales que la restricción de π a cada V_a es una isometría sobre U (por tanto, π es, en esencia, una aplicación recubridora y una isometría local).

- Demuéstrese que S es completa si y solamente si \tilde{S} es completa.
- Considérese la métrica de la banda infinita de Möbius que se introdujo en la parte c del ejercicio 2. ¿Es esta métrica completa?

10. Resultados de Kazdan-Warner.

- Considérese en \mathbb{R}^2 la métrica definida por

$$E(x, y) = 1, \quad F(x, y) = 0, \quad G(x, y) > 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Demuéstrese que la curvatura de esta métrica viene dada por

$$\frac{\partial^2(\sqrt{G})}{\partial x^2} + K(x, y)\sqrt{G} = 0. \quad (*)$$

- b. Recíprocamente, tómese una función $K(x, y)$ definida en R^2 , considérese a y como parámetro y sea \sqrt{G} una solución de $(*)$ sujeta a las condiciones iniciales

$$\sqrt{G}(x_0, y) = 1, \quad \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x}(x_0, y) = 0.$$

Demuéstrese que G es positiva en un entorno de (x_0, y) y que, por tanto, define una métrica en dicho entorno. Esto demuestra que *cada función diferenciable es localmente la curvatura de alguna métrica (abstrac)*.

- *c. Admitase que $K(x, y) \leq 0$ para todo $(x, y) \in R^2$. Demuéstrese que la solución de la parte b satisface

$$\sqrt{G}(x, y) \geq \sqrt{G}(x_0, y) = 1 \quad \text{para todo } x.$$

Por tanto, $G(x, y)$ define una métrica en todo R^2 . Demuéstrese también que esta métrica es completa. Esto prueba que *cualquier función diferenciable y no negativa, definida en R^2 , es la curvatura de alguna métrica completa en R^2* . Si no exigimos la completitud de la métrica, el resultado es válido para cualquier función diferenciable K definida en R^2 . Consultese J. Kazdan y F. Warner, «Curvature Functions for Open 2-Manifolds», *Ann. of Math.* 99, 1974, 203-219, allí se demuestra también que la condición que se impone a K en el ejercicio 2 de la sec. 5.4, es necesaria y suficiente para que la métrica sea completa.

5.11. El teorema de Hilbert

El teorema de Hilbert se puede enunciar en los términos siguientes.

TEOREMA. Una superficie geométrica completa S con curvatura constante y negativa, no se puede aplicar en R^3 mediante una inmersión isométrica.

Observación 1. El teorema de Hilbert aparece por primera vez en D. Hilbert, «Über Flächen von konstanter Gausscher Krümmung», *Trans. Amer. Math. Soc.* 2 (1901), 87-99. Poco después, E. Holmgren publicó otra demostración diferente en su trabajo «Sur les surfaces à courbure constante négative», *C. R. Acad. Sci. Paris* 134 (1902), 740-743. La demostración que presentaremos aquí reproduce las ideas originales de Hilbert. La parte local es esencialmente la misma que se recoge en el artículo de Hilbert; sin embargo, la parte global es substancialmente distinta. Agradecemos a J. A. Scheinkman la ayuda que nos prestó en el desarrollo de esta demostración y a M. Spivak el haberlos sugerido el lema 7 que aparece un poco más adelante.

Comenzaremos con algunas observaciones. Al multiplicar el producto interior por un factor constante, siempre podemos suponer que la curvatura $K \equiv -1$. Además, al

ser $\exp_p: T_p(S) \rightarrow S$ un difeomorfismo local (corolario del teorema de la sec. 5.5), esta aplicación induce un producto interior en $T_p(S)$. Denótese por S' a la superficie geométrica $T_p(S)$ dotada de este producto interior. Si $\psi: S \rightarrow R^3$ es una inmersión isométrica, lo mismo es cierto para $\varphi = \psi \circ \exp_p: S' \rightarrow R^3$. Por tanto, hemos reducido la demostración a probar que no existe una inmersión isométrica $\varphi: S' \rightarrow R^3$ de un plano S' , con un producto interior tal que $K \equiv -1$, en R^3 .

Lema 1. El área de S' es infinita.

Demostración. Demostraremos que S' es isométrica (globalmente) al plano hiperbólico H . Como el área de éste último es (cf. el ejemplo 3, sec. 5.10)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^u du dv = \infty,$$

este hecho implica la validez de lo que se afirma en el lema.

Sean $p \in H$, $p' \in S'$ y elijase una isometría lineal $\psi: T_p(S) \rightarrow T_{p'}(S')$ entre sus espacios tangentes. Defínase la aplicación $\varphi: H \rightarrow S'$ mediante $\varphi = \exp_{p'} \circ \psi \circ \exp_p^{-1}$. La aplicación φ está bien definida pues cada punto de H está unido a p mediante una única geodésica mínima.

Utilizamos ahora las coordenadas polares (ρ, θ) y (ρ', θ') en torno a p y p' , respectivamente, exigiéndole a φ que aplique el eje $\theta = 0$ en el eje $\theta' = 0$. En virtud a los resultados de la sec. 4.6, φ preserva la primera forma fundamental; luego es una isometría local. Utilizando la observación que sigue al teorema de Hadamard, podemos concluir que φ es una aplicación recubridora. Como S' es simplemente conexa entonces φ es un homeomorfismo; por tanto, una isometría (global).

Q.E.D.

En el resto de esta sección admitiremos que existe una inmersión isométrica $\varphi: S' \rightarrow R^3$, donde S' es una superficie geométrica homeomorfa a un plano y con $K \equiv -1$.

A fin de evitar las dificultades asociadas a posibles autointersecciones en $\varphi(S')$, trabajaremos con S' y utilizaremos la inmersión φ para inducir en S' la geometría no intrínseca local de $\varphi(S') \subset R^3$. Concretamente, al ser φ una inmersión, para cada $p \in S'$ existe un entorno $V' \subset S'$ de p tal que la restricción $\varphi|V' = \bar{\varphi}$ es un difeomorfismo. En cada $\bar{\varphi}(q) \in \varphi(V')$, existen, por ejemplo, dos direcciones asintóticas. Por medio de $\bar{\varphi}$, estas direcciones inducen dos direcciones en $q \in S'$, que se denominan *las direcciones asintóticas de S' en q* . De esta forma, tiene sentido hablar de curvas asintóticas en S' , y el *mismo procedimiento se puede aplicar a cualquier otra entidad local de $\varphi(S')$* .

Recordemos ahora que las curvas coordinadas de una parametrización constituyen una *red de Tchebyshov*, cuando tienen igual longitud los lados opuestos de cualquier cuadrilátero formado por dichas curvas (cf. el ejercicio 7, sec. 2.5). En este caso, es posible reparametrizar el entorno coordinado de forma que $E = 1$, $F = \cos \theta$, $G = 1$; donde θ es el ángulo que forman las curvas coordinadas (sec. 2.5, ejercicio 8). Además, en este caso, $K = -(\theta_{uv}/\sin \theta)$ (sec. 4.3, ejercicio 5).

LEMA 2. Para cada $p \in S'$ existe una parametrización $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S'$, tal que las curvas coordenadas de \mathbf{x} son curvas asintóticas de $\mathbf{x}(U) = V'$ y constituyen una red de Tchebyshief (expresaremos este hecho diciendo que las curvas asintóticas de V' forman una red de Tchebyshief).

Demostración. Como $K < 0$, se puede parametrizar un entorno $V' \subset S'$ de p por $\mathbf{x}(u, v)$, de forma que las curvas coordenadas de \mathbf{x} sean curvas asintóticas de V' . Así, si e, f y g son los coeficientes de la segunda forma fundamental de S' en dicha parametrización, tenemos que $e = g = 0$. Nótese que estamos utilizando la convención precedente, de referir la segunda forma fundamental de S' a la segunda forma fundamental que $\varphi(S') \subset \mathbb{R}^3$.

Ahora, en $\varphi(V') \subset \mathbb{R}^3$ tenemos que

$$N_u \wedge N_v = K(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v);$$

luego, poniendo $D = \sqrt{EG - F^2}$,

$$(N \wedge N_v)_u - (N \wedge N_u)_v = 2(N_u \wedge N_v) = 2KDN.$$

Además,

$$\begin{aligned} N \wedge N_u &= \frac{1}{D}\{(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \wedge N_u\} = \frac{1}{D}\{\langle \mathbf{x}_u, N_u \rangle \mathbf{x}_v - \langle \mathbf{x}_v, N_u \rangle \mathbf{x}_u\} \\ &= \frac{1}{D}(f\mathbf{x}_u - e\mathbf{x}_v), \end{aligned}$$

y, análogamente,

$$N \wedge N_v = \frac{1}{D}(g\mathbf{x}_u - f\mathbf{x}_v).$$

Como $K = -1 = -(f^2/D^2)$ y $e = g = 0$, obtenemos que

$$N \wedge N_u = \pm \mathbf{x}_u, \quad N \wedge N_v = \pm \mathbf{x}_v;$$

luego,

$$2KDN = -2DN = \pm \mathbf{x}_{uv} \pm \mathbf{x}_{vu} = \pm 2\mathbf{x}_{uv}.$$

Se deduce entonces que \mathbf{x}_{uv} es paralelo a N ; luego, $E_v = 2\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle = 0$ y $G_u = 2\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle = 0$. Pero $E_v = G_u = 0$ implica (sec. 2.5, ejercicio 7) que las curvas coordenadas forman una red de Tchebyshief.

Q.E.D.

LEMA 3. Sea $V' \subset S'$ un entorno coordenado de S' tal que las curvas coordenadas son las curvas asintóticas de V' . Entonces el área A de cualquier cuadrilátero formado por las curvas coordenadas es menor que 2π .

Demostración. Sean (\bar{u}, \bar{v}) las coordenadas de V' . Por el argumento del lema 1, las curvas coordenadas constituyen una red de Tchebyshief. Por tanto, es posible reparametrizar V' mediante (u, v) , por ejemplo, de forma que $E = G = 1$ y $F = \cos \theta$. Sea R un cuadrilátero formado por las curvas coordenadas con vértices $(u_1, v_1), (u_2, v_1), (u_2, v_2), (u_1, v_2)$ y con ángulos interiores $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, respectivamente (fig. 5.54). Al ser $E = G = 1$, $F = \cos \theta$ y $\theta_{uv} = \operatorname{sen} \theta$, obtenemos que

$$\begin{aligned} A &= \int_R dA = \int_R \sin \theta \, du \, dv = \int_R \theta_{uv} \, du \, dv \\ &= \theta(u_1, v_1) - \theta(u_2, v_1) + \theta(u_2, v_2) - \theta(u_1, v_2) \\ &= \alpha_1 + \alpha_3 - (\pi - \alpha_2) - (\pi - \alpha_4) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i - 2\pi < 2\pi, \end{aligned}$$

pues $\alpha_i < \pi$.

Q.E.D.

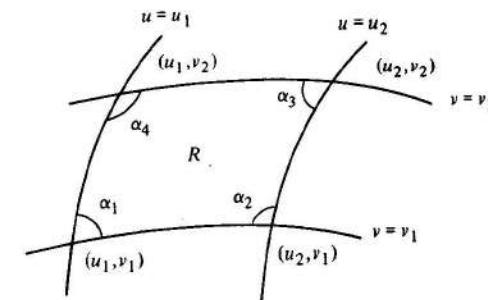


Figura 5.54

Hasta el momento presente, las consideraciones han sido de tipo local. Ahora vamos a definir una aplicación $\mathbf{x}: \mathbb{R}^2 \rightarrow S'$ demostrando que \mathbf{x} es una parametrización para la totalidad de S' .

La aplicación \mathbf{x} se define de la manera siguiente (fig. 5.55). Fijemos un punto $O \in S'$ y elijamos una orientación en cada una de las curvas asintóticas que pasan por O . Efectuemos una elección definitiva de una de las curvas asintóticas, a la que llamaremos a_1 , denotando a la otra por a_2 . Para cada $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, nos alejamos una distancia s , medida en longitud, del punto O , sobre la curva a_1 . Sea p' el punto obtenido por este procedimiento. Por p' pasan dos curvas asintóticas, siendo a_1 una de ellas. Elijamos la otra y dotémosla de la orientación que se obtiene por prolongación continua de la orientación de a_2 , a lo largo de a_1 . Nos alejamos ahora del punto p' a una distancia, medida en longitud, igual a t , efectuando el recorrido sobre la curva asintótica orientada que acabamos de elegir. El punto que así se obtiene se representa por $\mathbf{x}(s, t)$.

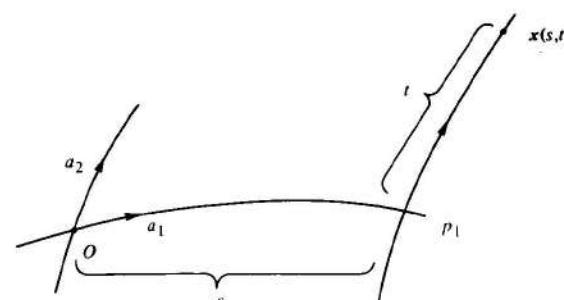


Figura 5-55

La aplicación $x(s, t)$ está bien definida para todo $(s, t) \in R^2$. En efecto, si $x(s, 0)$ no está definido, existe s_1 tal que $a_1(s)$ está definido para $s < s_1$, pero no en $s = s_1$. Sea $q = \lim_{s \rightarrow s_1} a_1(s)$. Por completitud, $q \in S'$. Utilizando el lema 2, vemos que $a_1(s_1)$ está definido, lo que constituye una contradicción; por tanto $x(s, 0)$ está definido para todo $s \in R$. Con el mismo argumento demostramos que $x(s, t)$ está bien definido para todo $t \in R$.

Tenemos que demostrar ahora que x es una parametrización de S' . Para ello, procederemos mediante una serie de lemas.

LEMA 4. *Para un t fijo, la curva $x(s, t)$, $-\infty < s < \infty$, es una curva asintótica cuya longitud de arco es s .*

Demuestração. Para cada punto $x(s', t') \in S'$, existe, en virtud al lema 2, un entorno «rectangular» (es decir, de la forma $t_a < t < t_b, s_a < s < s_b$) tal que las curvas asintóticas de dicho entorno forman una red de Tchebyshef. Primero observamos que si, para algún t_0 , $t_a < t_0 < t_b$, la curva $x(s, t_0)$, $s_a < s < s_b$, es una curva asintótica, entonces lo mismo es válido para cada curva $x(s, t)$, $t_a < t < t_b$. En efecto, el punto $x(s, t)$ se obtiene cuando nos alejamos de $x(s, 0)$ sobre un segmento de longitud \bar{t} ; esto es equivalente a alejarnos de $x(s, t_0)$, sobre un segmento de longitud $\bar{t} - t_0$. La afirmación se deduce entonces del hecho de que las curvas asintóticas formen una red de Tchebyshef en dicho entorno.

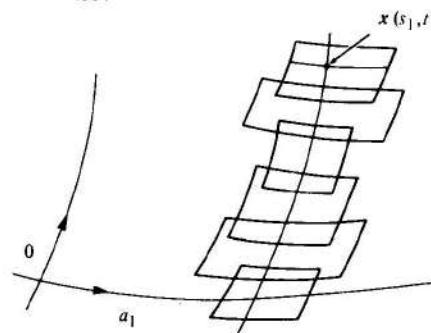


Figura 5-56

Sea ahora $x(s_1, t_1) \in S'$, un punto arbitrario. Por la compacidad del segmento $x(s_1, t)$, $0 \leq t \leq t_1$, es posible recubrirlo mediante un número finito de entornos rectangulares, tales que las curvas asintóticas de cada uno de ellos constituyen una red de Tchebyshef (fig. 5.56). Como $x(s, 0)$ es una curva asintótica, iteramos la observación previa y demostramos que $x(s, t_1)$ es una curva asintótica en un entorno de s_1 . Como (s_1, t_1) era arbitrario, deducimos la afirmación del lema.

Q.E.D.

LEMA 5. *x es un difeomorfismo local.*

Demuestracción. Esto se deduce de que, por una parte, $x(s_0, t)$ y $x(s, t_0)$ son curvas asintóticas parametrizadas por la longitud de arco; por otra, de que S' se puede parametrizar localmente de forma que las curvas coordenadas son curvas asintóticas de S' y $E = G = 1$. Por tanto, x coincide localmente con dicha parametrización.

Q.E.D.

LEMA 6. *x es sobreyectiva.*

Demuestracción. Sea $Q = x(R^2)$. Al ser x un difeomorfismo local, Q es un abierto de S' . Recorremos además que si $p' = x(s_0, t_0)$, entonces, las dos curvas asintóticas que pasan por p' están contenidas completamente en Q .

Admitamos que $Q \neq S'$. Como S' es conexa, la frontera $Bd Q \neq \emptyset$. Sea $p \in Bd Q$. Al ser Q abierto en S' , $p \notin Q$. Considérese ahora un entorno rectangular R de p en el que las curvas asintóticas constituyen una red de Tchebyshef (fig. 5.57). Sea $q \in Q \cap R$. Entonces, una de las curvas asintóticas que pasa por q intersecta a una de las curvas asintóticas que pasa por p . En virtud a la observación precedente, esto constituye una contradicción.

Q.E.D.

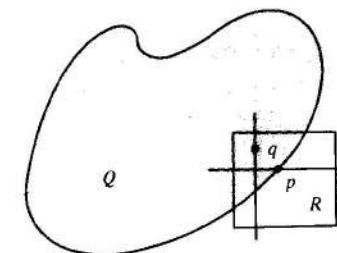


Figura 5-57

LEMA 7. *Existen en S' dos campos vectoriales diferenciables linealmente independientes que son tangentes a las curvas asintóticas de S' .*

Demuestracción. Por cada punto de S' pasan dos curvas asintóticas distintas. Fíjese un punto $p \in S'$ y elijanse dos vectores unitarios $v_1(p)$ y $v_2(p)$, tangentes a las curvas

asintóticas que pasan por p . Sea $q \in S'$ un punto arbitrario y sea $\alpha_0: [0, l] \rightarrow S'$ un arco tal que $\alpha_0(0) = p$, $\alpha_0(l) = q$. Defínase $v_1(\alpha_0(s))$, $s \in [0, l]$, como la única extensión continua de $v_1(p)$ a lo largo de α_0 que es tangente a una curva asintótica. Defínase, $v_2(\alpha_0(s))$, $s \in [0, l]$, de manera análoga. Afirmamos que $v_1(q)$ y $v_2(q)$ no dependen de la elección que se efectuó del arco que une p y q . Por tanto, v_1 y v_2 son campos vectoriales bien definidos y continuos en S' , que son tangentes a las curvas asintóticas. Luego, v_1 y v_2 son diferenciables y la demostración del lema quedaría concluida.

Para demostrar la afirmación que se ha hecho, trabajemos con v_1 , siendo análogo el caso de v_2 . Sea $\alpha_1: [0, l] \rightarrow S'$ otro arco con $\alpha_1(0) = p$, $\alpha_1(l) = q$. Como S' (que es homeomorfa a un plano) es simplemente conexa (cf. la sec. 5.6, def. 3), existe una homotopía $\alpha_t(s) = H(s, t)$, $s \in [0, l]$, $t \in [0, 1]$, entre α_0 y α_1 (cf. la sec. 5.6, def. 2); es decir, $\alpha_t(s)$ es una familia continua de arcos que unen p y q . En virtud a la continuidad de las direcciones asintóticas y a la compacidad de $[0, l]$, se deduce que dado un $\varepsilon > 0$ existe un $t_0 \in [0, 1]$ tal que si $t < t_0$, entonces $|v_1(\alpha_t(l)) - v_1(\alpha_0(l))| < \varepsilon$. Por tanto, si t_0 es suficientemente pequeño, tenemos que $v_1(\alpha_t(l)) = v_1(\alpha_0(l))$ para $t < t_0$. Como $[0, 1]$ es compacto, podemos aplicar por etapas este argumento a todos los $t \in [0, 1]$. Luego, $v_1(\alpha_1(l)) = v_1(\alpha_0(l))$.

Con esto concluye la demostración del lema.

Q.E.D.

LEMA 8. x es inyectiva.

Demostración. Queremos demostrar que $x(s_0, t_0) = x(s_1, t_1)$ implica que $(s_0, t_0) = (s_1, t_1)$.

Primero suponemos que $x(s_0, t_0) = x(s_1, t_1)$ con $s_1 > s_0$ y demostraremos que esto conduce a una contradicción. Por el lema 7, una curva asintótica no puede cortarse a sí misma salvo que las rectas tangentes en el punto de intersección coincidan. Al ser x un difeomorfismo local, existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$x(s_0, t) = x(s_1, t), t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon.$$

Por la misma razón, los puntos de la curva $x(s_0, t)$ para los que

$$x(s_0, t) = x(s_1, t)$$

constituyen un subconjunto abierto y cerrado de dicha curva; luego, $x(s_0, t) = x(s_1, t)$ para todo t . Además, en virtud a la construcción de la aplicación x , $x(s_0 + a, t_0) = x(s_1 + a, t_0)$, $0 \leq a \leq s_1 - s_0$; luego, $x(s_0 + a, t) = x(s_1 + a, t)$ para todo t . Por tanto

1. $x(s_0, t_0) \neq x(s_0, t)$ para $t > t_0$, o bien
2. Existe $t = t_1 > t_0$ tal que $x(s_0, t_0) = x(s_0, t_1)$; por un argumento similar, demostraremos entonces que $x(s, t_0 + b) = x(s, t_1 + b)$ para todo s , $0 \leq b \leq t_1 - t_0$.

En el caso 1, x aplica cada banda de R^2 , comprendida entre dos rectas verticales situadas a una distancia $s_1 - s_0$, sobre S' e identifica los puntos de estas rectas que

tengan el mismo t . Esto implica que S' es homeomorfa a un cilindro, lo que constituye una contradicción (fig. 5.58).

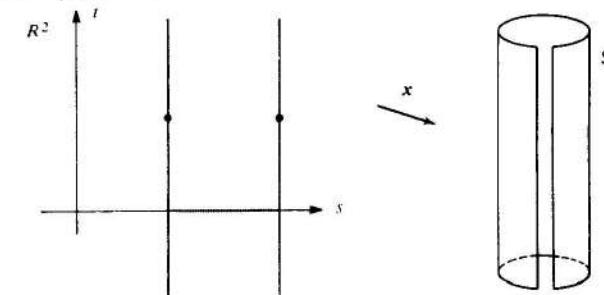


Figura 5.58

En el caso 2, x aplica sobre S' cada cuadrado constituido por dos rectas horizontales a una distancia $s_1 - s_0$ y dos rectas verticales a una distancia $t_1 - t_0$, e identifica los puntos correspondientes, situados en lados opuestos de la frontera. Esto implica que S' es homeomorfa a un toro, lo que también constituye una contradicción (fig. 5.59).

Mediante un argumento similar, podemos demostrar que $x(s_0, t_0) = x(s_0, t_1)$, $t_1 > t_0$, conduce a la misma contradicción.

Consideraremos ahora el caso $x(s_0, t_0) = x(s_1, t_1)$, $s_1 > s_0$, $t_1 > t_0$. Utilizando el hecho de que x es un difeomorfismo local y la conexidad de S' , comprobamos que x aplica sobre S' , una banda de R^2 comprendida entre dos rectas perpendiculares al vector $(s_1 - s_0, t_1 - t_0) \in R^2$ y situadas a una distancia $\sqrt{(s_1 - s_0)^2 + (t_1 - t_0)^2}$. Ahora podemos considerar los casos 1 y 2 como en el argumento previo para demostrar que entonces S' o es homeomorfa a un cilindro o bien lo es a un toro. En cualquier caso, llegaremos a una contradicción.

Q.E.D.

Ahora ya es fácil obtener la demostración del teorema de Hilbert.

Demostración del teorema. Admitamos la existencia de una inmersión isométrica $\psi: S \rightarrow R^3$, donde S es una superficie completa con $K \equiv -1$. Sea $p \in S$ y denótese por S' al plano tangente $T_p(S)$ dotado con la métrica que induce $\exp_p: T_p(S) \rightarrow S$. Entonces $\varphi = \psi \circ \exp_p: S' \rightarrow R^3$ es una inmersión isométrica y, en virtud a los lemas 5, 6 y 8, existirá una parametrización $x: R^2 \rightarrow S'$, para la totalidad de S' , tal que las curvas coordenadas de x son curvas asintóticas de S' (lema 4). Así, podemos recubrir S' mediante una unión de «cuadriláteros coordinados» Q_n , donde $Q_n \subset Q_{n+1}$. Por el lema 3, el área de cada Q_n es menor que 2π . Por otra parte, en virtud al lema 1, el área de S' es no acotada. Esto constituye una contradicción, luego la demostración ha concluido.

Q.E.D.

Observación 2. El teorema de Hilbert fue generalizado por N. Efimov, «Appearance of Singularities on Surfaces of Negative Curvature», Math. Sb. 106 (1954), en la serie 2 de traducciones de la A.M.S., vol. 66, 1968, 154-190. El autor demostró en

dicho trabajo la siguiente conjetura de Cohn-Vossen: *Sea S una superficie completa cuya curvatura K satisface $K \leq \delta < 0$. Entonces, no existe una inmersión isométrica de S en \mathbb{R}^3 .* La demostración de Efimov es muy larga y sería deseable la elaboración de una demostración más breve.

El artículo de T. Klotz Milnor, «Efimov's Theorem About Complete Immersed Surfaces of Negative Curvature», *Advances in Mathematics* 8 (1972), 474-543; contiene una excelente exposición sobre la demostración de Efimov. Este artículo contiene también otra demostración del teorema de Hilbert que es válida para superficies de clase C^2 .

Para consultar otros detalles sobre la inmersión del plano hiperbólico véase M. L. Gromov y V. A. Rokhlin, «Embeddings and Immersions in Riemannian Geometry», *Russian Math. Surveys* (1970), 1-57; en especial la pág. 15.

EJERCICIOS

1. *Observación de Stoker.* Sea S una superficie geométrica completa. Supóngase que la curvatura gaussiana K satisface $K \leq \delta < 0$. Demuéstrese que no existe una inmersión isométrica $\varphi: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que esté acotado el valor absoluto de la curvatura media H . Este hecho demuestra el teorema de Efimov, citado en la observación 2, con la condición adicional que se impone a la curvatura media. Puede ser de utilidad el esbozo siguiente:

- a. Supóngase que existe una φ de ese tipo y considérese la aplicación de Gauss $N: \varphi(S) \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow S^2$, donde S^2 es la esfera unidad. Como $K \neq 0$ en todos los puntos, N induce una nueva métrica (\cdot, \cdot) sobre S al exigir a $N \circ \varphi: S \rightarrow S^2$ que sea una isometría local. Elíjase un sistema de coordenadas en S de forma que las imágenes mediante φ de las curvas coordinadas sean líneas de curvatura de $\varphi(S)$. Demuéstrese que, en este sistema coordinado, los coeficientes de la nueva métrica son

$$g_{11} = (k_1)^2 E, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = (k_2)^2 G,$$

donde $E, F (=0)$ y G son los coeficientes de la métrica inicial en el mismo sistema coordinado.

- b. Demuéstrese que existe una constante $M > 0$ tal que $k_1^2 < M, k_2^2 < M$. Utilícese el hecho de que la métrica inicial es completa para concluir que la nueva métrica también es completa.
c. Utilícese la parte b para demostrar que S es compacta; luego admite puntos con curvatura positiva, lo que constituye una contradicción.

2. El objetivo de este ejercicio es demostrar que no existe una superficie regular completa de revolución S en \mathbb{R}^3 con $K \leq \delta < 0$ (esto constituye una demostración del teorema de Efimov para superficies de revolución). Admítase la existencia de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ de ese tipo.
a. Demuéstrese que las únicas formas posibles que puede adoptar la curva generatriz de S son las que se muestran en la fig. 5.60 (a) y (b), en donde la curva meridiano tiende a infinito en las dos direcciones. Nótese que en la fig. 5.60 (b) la parte inferior del meridiano tiende asintóticamente al eje z .

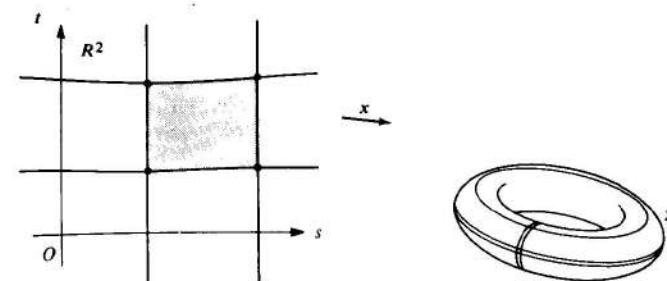


Figura 5.59

- b. Parametrizar la curva generatriz $(\varphi(s), \psi(s))$ por la longitud de arco $s \in R$ de forma que $\psi(0) = 0$. Utilizar las relaciones $\varphi' + K\varphi = 0$ (cf. el ejemplo 4, sec. 3.3, ec. (9)) y $K \leq \delta < 0$ para concluir que existe un punto $s_0 \in [0, +\infty)$ tal que $(\varphi'(s_0))^2 = 1$.
c. Demuéstrese que cada una de las tres posibilidades que tiene el meridiano $(\varphi(s), \psi(s))$, que pasa por $p_0 = (\varphi(s_0), \psi(s_0))$, de evolucionar a partir de p_0 (descritas en la fig. 5.60 (c) como I, II y III) da lugar a una contradicción. En consecuencia, S no es completa.

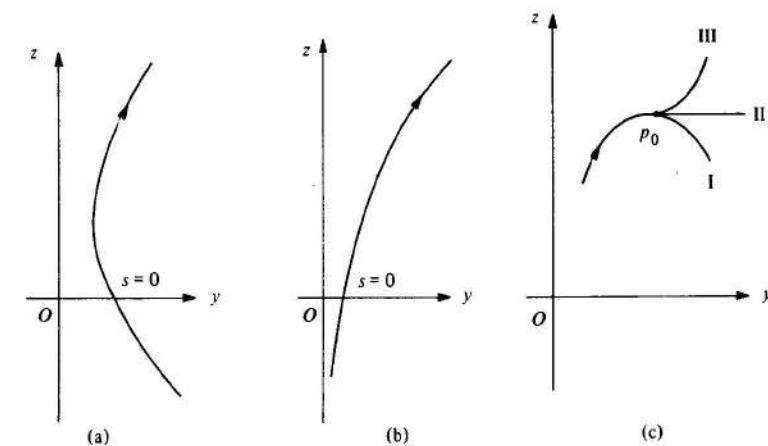


Figura 5.60

3. *Demostración de T. K. Milnor del teorema de Hilbert.* Sea S un plano dotado de una métrica completa g_1 tal que su curvatura $K \equiv -1$. Supóngase que existe una inmersión isométrica $\varphi: S \rightarrow \mathbb{R}^3$. Procédase de la manera siguiente, para obtener una contradicción:
a. Considérese la aplicación de Gauss $N: \varphi(S) \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow S^2$ y sea g_2 la métrica que se obtiene en S al exigir que $N \circ \varphi: S \rightarrow S^2$ sea una isometría local. Elíjase un sistema de coordenadas locales en S de forma que las imágenes mediante φ de las curvas coordinadas sean las curvas asintóticas de $\varphi(S)$. Demuéstrese que, en tal sistema de coordenadas, g_1 se puede describir en la forma

$$du^2 + 2 \cos \theta du dv + dv^2$$

y que g_2 se puede escribir en la forma

$$du^2 - 2 \cos \theta \, du \, dv + dv^2.$$

- b. Demuéstrese que $g_3 = \frac{1}{2}(g_1 + g_2)$ es una métrica en S cuya curvatura es nula. Utilícese el hecho de que g_1 es una métrica completa y que $3t_3 > g_1$ para concluir que la métrica g_3 es completa.
- c. Demuéstrese que el plano, dotado de la métrica g_3 , es isométrico globalmente al plano (euclídeo) estándar R^2 . Por tanto, existe una isometría $\varphi: S \rightarrow R^2$. Demuéstrese además que φ aplica las curvas asintóticas de S , parametrizadas por la longitud de arco, en un sistema rectangular de rectas en R^2 , parametrizadas también por la longitud de arco.
- d. Utilícese el sistema global de coordenadas de S que se ha obtenido en la parte c para llegar a una contradicción, como se hizo en la demostración del teorema de Hilbert desarrollada en el texto.

Apéndice TOPOLOGIA DE CONJUNTOS DE PUNTOS EN ESPACIOS EUCLIDEOS

En el cap. 5 hemos utilizado con total libertad algunas propiedades topológicas de R^n . Esencialmente, las propiedades que necesitamos son las habituales de los subconjuntos compactos y conexos de R^n , tal y como aparecen en los cursos avanzados de cálculo infinitesimal. A efectos de completitud, introduciremos aquí una breve presentación de esta materia junto con las demostraciones correspondientes. Tomaremos como punto de partida la materia contenida en el apéndice al cap. 2, parte A, y las propiedades básicas de los números reales.

A. Preliminares

Aquí vamos a completar algunos puntos de la materia que se recoge en el apéndice al cap. 2, parte A.

De aquí en adelante $U \subset R^n$ representará un conjunto abierto de R^n . El índice i varía en el rango $1, 2, \dots, m, \dots$, y si $p = (x_1, \dots, x_n)$, $q = (y_1, \dots, y_n)$, entonces $|p - q|$ representará la distancia de p a q ; es decir,

$$|p - q|^2 = \sum_j (x_j - y_j)^2, \quad j = 1, \dots, n.$$

DEFINICION 1. Una sucesión $p_1, \dots, p_i, \dots \in R^n$ convierte a $p_0 \in R^n$ si dado un $\epsilon > 0$, existe un índice i_0 de la sucesión tal que $p_i \in B_\epsilon(p_0)$ para todo $i > i_0$. En este caso, p_0 es el límite de la sucesión $\{p_i\}$, lo que se denota por $\{p_i\} \rightarrow p_0$.

La convergencia se relaciona con la continuidad mediante la propiedad siguiente.

PROPOSICION 1. Una aplicación $F: U \subset R^n \rightarrow R^m$ es continua en $p_0 \in U$ si y sólo si para cada sucesión convergente $\{p_i\} \rightarrow p_0$ en U , la sucesión $\{F(p_i)\}$ converge a $F(p_0)$.

Demostración. Admitamos que F es continua en p_0 y sea $\epsilon > 0$, un número fijado. Por continuidad, existe un $\delta > 0$ tal que $F(B_\delta(p_0)) \subset B_\epsilon(F(p_0))$. Sea $\{p_i\}$ una sucesión en U , con $\{p_i\} \rightarrow p_0 \in U$. Entonces existe, en correspondencia con δ , un índice i_0 tal que $p_i \in B_\delta(p_0)$ para $i > i_0$. Por tanto, para $i > i_0$,

$$F(p_i) \in F(B_\delta(p_0)) \subset B_\epsilon(F(p_0)),$$

lo que implica que $\{F(p_i)\} \rightarrow F(p_0)$.

Supongamos ahora que F no es continua en p_0 . Entonces existe un número $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ podemos encontrar un punto $p \in B_\delta(p_0)$, con $F(p) \notin B_\epsilon(F(p_0))$. Fijemos tal ϵ y tomemos $\delta = 1, 1/2, \dots, 1/i, \dots$, obteniendo así una sucesión $\{p_i\}$ que converge a p_0 . Sin embargo, como $F(p_i) \notin B_\epsilon(F(p_0))$, la sucesión $\{F(p_i)\}$ no converge a $F(p_0)$.

Q.E.D.

DEFINICIÓN 2. Se dice que $p \in R^n$ es un punto límite de un conjunto $A \subset R^n$ si cada entorno de p en R^n contiene un punto de A distinto de p .

Para evitar posibles confusiones con la noción de límite de una sucesión, a menudo se llama a un punto límite *punto de aglomeración* o *punto de acumulación*.

La definición 2 equivale a decir que cada entorno V de p contiene infinitos puntos de A . En efecto, sea $q_1 \neq p$ el punto de A que se menciona en la definición y considérese una bola $B_\epsilon(p) \subset V$ tal que $q_1 \notin B_\epsilon(p)$. Existe entonces un punto $q_2 \neq p, q_2 \in A \cap B_\epsilon(p)$. Repitiendo este proceso, obtenemos una sucesión $\{q_i\}$ en V , donde todos los $q_i \in A$ son distintos. Como $\{q_i\} \rightarrow p$, el argumento también demuestra que p es un punto límite de A si y sólo si p es el límite de alguna sucesión constituida por puntos distintos de A .

Ejemplo 1. La sucesión $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/i, \dots$ converge a 0. La sucesión $3/2, 4/3, \dots, 1 + 1/i, \dots$ converge a 1. La sucesión que se obtiene al «intercalar» estas dos, $1, 3/2, 1/2, 4/3, 1/3, \dots, 1 + 1/i, 1/i, \dots$ no converge y tiene dos puntos límite, a saber 0 y 1 (fig. A5-1).



Figura A5-1

Debe observarse que el límite p_0 de una sucesión convergente tiene la propiedad de que cualquier entorno de p_0 contiene todos los puntos de la sucesión, exceptuando quizás un número finito de dichos puntos. Sin embargo un punto límite p de un conjunto cumple la propiedad más débil de que cualquier entorno de p contiene infinitos puntos del conjunto. Por tanto, una sucesión que no contenga subsucesiones constantes es convergente si y sólo si, como conjunto, tiene un único punto límite.

El conjunto de los números racionales Q constituye un ejemplo interesante. Se puede probar que Q es numerable; es decir, se puede escribir en forma de sucesión. Como existen números racionales arbitrariamente próximos a cualquier número real fijado, el conjunto de puntos límite de la sucesión Q es toda la recta real R .

DEFINICIÓN 3. Un conjunto $F \subset R^n$ es cerrado si cada punto límite de F pertenece a F . La clausura de $A \subset R^n$, que se denota por \bar{A} , es la unión de A con sus puntos límite.

Intuitivamente, F es cerrado si contiene el límite de todas sus sucesiones convergentes, o, con otras palabras, si es invariante frente a la operación de paso al límite.

Resulta obvio que la clausura de un conjunto es un conjunto cerrado. Es conveniente adoptar el convenio de que el conjunto vacío \emptyset es simultáneamente abierto y cerrado.

Se satisface una relación simple entre los conjuntos abiertos y los conjuntos cerrados.

PROPOSICIÓN 2. $F \subset R^n$ es cerrado si y sólo si el complementario $R^n - F$ de F es abierto.

Demostración. Admitamos que F es cerrado y que $p \in R^n - F$. Como p no es un punto límite de F , existe una bola $B_\epsilon(p)$ que no contiene puntos de F . Por tanto, $B_\epsilon \subset R^n - F$; luego $R^n - F$ es abierto.

Recíprocamente, supongamos que $R^n - F$ es abierto y que p es un punto límite de F . Pretendemos probar que $p \in F$. Admitamos lo contrario. Existe entonces una bola $B_\epsilon(p) \subset R^n - F$. Esto implica que $B_\epsilon(p)$ no contiene puntos de F y contradice al hecho de que p es un punto límite de F .

Q.E.D.

También puede expresarse la continuidad en términos de conjuntos cerrados. Esto es consecuencia del hecho siguiente.

PROPOSICIÓN 3. Una aplicación $F: U \subset R^n \rightarrow R^m$ es continua si y sólo si para cada conjunto abierto $V \subset R^m$, $F^{-1}(V)$ es un conjunto abierto.

Demostración. Supongamos que F es continua y sea $V \subset R^m$ un conjunto abierto de R^m . Si $F^{-1}(V) = \emptyset$, no hay nada que demostrar, pues hemos adoptado el convenio de que el conjunto vacío es abierto. Si $F^{-1}(V) \neq \emptyset$, sea $p \in F^{-1}(V)$. Entonces $F(p) \in V$, y como V es abierto, existe una bola $B_\epsilon(F(p)) \subset V$. Por la continuidad de F , existe una bola $B_\delta(p)$ tal que

$$F(B_\delta(p)) \subset B_\epsilon(F(p)) \subset V.$$

Por tanto, $B_\delta(p) \subset F^{-1}(V)$; luego $F^{-1}(V)$ es abierto.

Supongamos ahora que $F^{-1}(V)$ es abierto para cada conjunto abierto $V \subset R^m$. Sea $p \in U$ y sea $\epsilon > 0$ un número dado. Entonces $A = F^{-1}(B_\epsilon(F(p)))$ es abierto. Por tanto, existe un $\delta > 0$ tal que $B_\delta(p) \subset A$. Luego,

$$F(B_\delta(p)) \subset F(A) \subset B_\epsilon(F(p));$$

es decir; F es continua en p .

Q.E.D.

COROLARIO. $F: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es continua si y sólo si para cada conjunto cerrado $A \subset \mathbb{R}^m$, $F^{-1}(A)$ es un conjunto cerrado.

Ejemplo 2. La proposición 3 y su corolario proporcionan la que probablemente es la mejor manera de describir los subconjuntos abiertos y los subconjuntos cerrados de \mathbb{R}^n . Por ejemplo, definamos $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(x, y) = (x^2/a^2) - (y^2/b^2) - 1$. Obsérvese que f es continua, que $0 \in \mathbb{R}$ es un conjunto cerrado en \mathbb{R} y que $(0, +\infty)$ es un conjunto abierto en \mathbb{R} . Así, el conjunto

$$F_1 = \{(x, y); f(x, y) = 0\} = f^{-1}(0)$$

es cerrado en \mathbb{R}^2 , y los conjuntos

$$U_1 = \{(x, y); f(x, y) > 0\},$$

$$U_2 = \{(x, y); f(x, y) < 0\}$$

son abiertos en \mathbb{R}^2 . Por otra parte, el conjunto

$$\begin{aligned} A = & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\} \\ & \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0\} \end{aligned}$$

no es ni abierto ni cerrado (fig. A5-2).

El último ejemplo sugiere la definición siguiente.

DEFINICION 4. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. La frontera $Bd A^*$ de A es el conjunto de los puntos p en \mathbb{R}^n tales que cada entorno de p contiene puntos de A y puntos de $\mathbb{R}^n - A$.

Así, si A es el conjunto del ejemplo 2, $Bd A$ es el círculo $x^2 + y^2 = 1$. Está claro que $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto si y sólo si ningún punto de $Bd A$ pertenece a A y que $B \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado si y sólo si todos los puntos de $Bd B$ pertenecen a B .

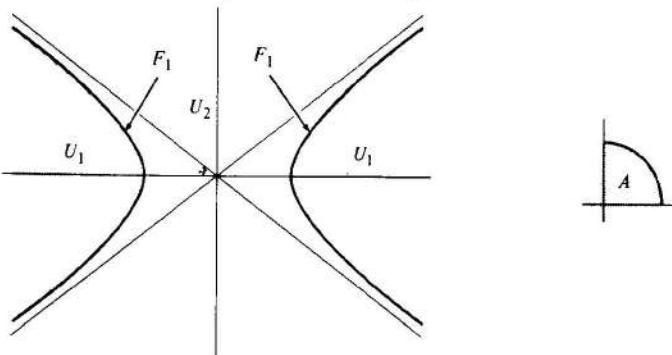


Figura A5-2

* Bd es la abreviatura de la palabra inglesa *boundary* (N. del T.).

Hagamos una observación final a estas nociones preliminares: en las definiciones que se dieron, tanto aquí, como en el apéndice al cap. 2, se consideró la hipótesis de que el espacio «ambiente» era \mathbb{R}^n . Como ya se subrayó en el apéndice al cap. 2, a menudo es conveniente extender tales definiciones a subconjuntos arbitrarios $A \subset \mathbb{R}^n$. Para ello, adoptaremos la definición siguiente.

DEFINICION 5. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que $V \subset A$ es un conjunto abierto en A si existe un conjunto abierto U en \mathbb{R}^n tal que $V = U \cap A$. Un entorno de $p \in A$ en A es un conjunto abierto de A que contiene a p .

Con esta noción de «proximidad» en A , es una cuestión bastante sencilla extender las definiciones previas a subconjuntos de A así como comprobar que las proposiciones que ya se demostraron siguen siendo válidas con las nuevas definiciones.

Ahora vamos a recordar una propiedad básica de los números reales. Para ello necesitamos algunas definiciones.

DEFINICION 6. Se dice que un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ de la recta real \mathbb{R} está acotado superiormente si existe un $M \in \mathbb{R}$ tal que $M \geq a$ para todo $a \in A$. El número M se denomina una cota superior de A . Cuando A está acotado superiormente, se denomina supremo o cota superior mínima de A , y se escribe $\sup A$ (o c.s.m. A), a una cota superior M de A que satisface la condición siguiente: dado $\varepsilon > 0$, existe un $a \in A$ tal que $M - \varepsilon < a$. De manera análoga podemos definir, cambiando el sentido de las desigualdades precedentes, los conceptos de cota inferior y de ínfimo (o cota inferior máxima) de A , denotándose este último por $\inf A$ (o c.i.m. A).

AXIOMA DE COMPLETITUD DE LOS NUMEROS REALES. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente (inferiormente). Entonces existe el $\sup A$ ($\inf A$).

Existen varias formas equivalentes de expresar esta propiedad básica de completitud del sistema de los números reales. Hemos elegido ésta porque, aún no siendo la más intuitiva, probablemente es la más efectiva.

Es conveniente adoptar el convenio siguiente. Si $A \subset \mathbb{R}$ no está acotado superiormente (inferiormente), decimos que $\sup A = +\infty$ ($\inf A = -\infty$). Con este convenio el axioma precedente se puede reformular así: cada subconjunto no vacío de los números reales admite un sup y un inf.

Ejemplo 3. El sup del conjunto $(0, 1)$ es 1, que no pertenece al conjunto. El sup del conjunto

$$B = \{x \in \mathbb{R}; 0 < x < 1\} \cup \{2\}$$

es 2. El punto 2 es un punto aislado de B ; es decir, pertenece a B pero no es un punto límite de B . Obsérvese que el mayor punto límite de B es 1, que no es sup B . Sin embargo, si un conjunto acotado carece de puntos aislados, entonces sí es cierto que el sup es un punto límite del conjunto.

Una consecuencia importante de la completitud de los números reales es la siguiente caracterización «intrínseca» de la convergencia, que en realidad es equivalente a la completitud (sin embargo, esto no lo vamos a demostrar).

LEMA 1. Defínase como sucesión de Cauchy a toda sucesión $\{x_i\}$ de números reales que satisface la condición siguiente: dado $\epsilon > 0$, existe i_0 tal que $|x_i - x_j| < \epsilon$ para todo $i, j > i_0$. Una sucesión es convergente si y sólo si es una sucesión de Cauchy.

Demostración. Sea $\{x_i\} \rightarrow x_0$. Entonces, si $\epsilon > 0$ es un número dado, existe i_0 tal que $|x_i - x_0| < \epsilon/2$ para $i > i_0$. Así, para $i, j > i_0$ tenemos que

$$|x_i - x_j| \leq |x_i - x_0| + |x_j - x_0| < \epsilon;$$

luego, $\{x_i\}$ es una sucesión de Cauchy.

Recíprocamente, sea $\{x_i\}$ una sucesión de Cauchy. Está claro que el conjunto $\{x_i\}$ es un conjunto acotado. Sean $a_1 = \inf \{x_i\}$, $b_1 = \sup \{x_i\}$. Entonces, o uno de estos puntos es un punto límite de $\{x_i\}$ y en ese caso $\{x_i\}$ converge a dicho punto, o bien ambos puntos son puntos aislados de $\{x_i\}$. En el último caso, considérese el conjunto de puntos de la sucesión en el intervalo (a_1, b_1) y sean a_2 y b_2 , respectivamente, el inf y el sup de dicho conjunto. Procediendo de esta manera obtenemos que o $\{x_i\}$ converge o bien existen dos sucesiones acotadas $a_1 < a_2 < \dots$ y $b_1 > b_2 > \dots$. Sean $a = \sup \{a_i\}$ y $b = \inf \{b_i\}$. Como $\{x_i\}$ es una sucesión de Cauchy, $a = b$, y este valor común x_0 es el único punto límite de $\{x_i\}$. Por tanto, $\{x_i\} \rightarrow x_0$.

Q.E.D.

Esta versión de la completitud se extiende de manera natural a espacios euclídeos.

DEFINICION 7. Una sucesión $\{p_i\}$, $p_i \in \mathbb{R}^n$, es una sucesión de Cauchy si, dado un $\epsilon > 0$, existe un índice i_0 tal que la distancia $|p_i - p_j| < \epsilon$ para todos los $i, j > i_0$.

PROPOSICION 4. Una sucesión $\{p_i\}$, $p_i \in \mathbb{R}^n$, converge si y sólo si es una sucesión de Cauchy.

Demostración. Está claro que una sucesión convergente es una sucesión de Cauchy (véase el argumento del lema 1). Recíprocamente, sea $\{p_i\}$ una sucesión de Cauchy y considérese su proyección sobre el eje j de \mathbb{R}^n , $j = 1, \dots, n$. Este procedimiento genera una sucesión de números reales $\{x_{ji}\}$ que, en virtud al hecho de que la proyección hace decrecer las distancias, es de nuevo una sucesión de Cauchy. Por el lema 1, $\{x_{ji}\} \rightarrow x_{j0}$. Se deduce entonces que $\{p_i\} \rightarrow p_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$.

Q.E.D.

B. Conjuntos conexos

DEFINICION 8. Una curva continua $\alpha: [a, b] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^n$ se denomina un arco en A que une $\alpha(a)$ con $\alpha(b)$.

DEFINICION 9. Se dice que $A \subset \mathbb{R}^n$ es conexo por arcos si, cualesquiera que sean los puntos $p, q \in A$, existe un arco en A que une p con q .

A lo largo del libro se ha utilizado la palabra conexo con el significado de conexo por arcos (sec. 2.2). Debido a que únicamente se consideraron superficies regulares, esta interpretación del término conexo se puede justificar. Ello es precisamente lo que vamos a hacer a continuación. Sin embargo, para subconjuntos generales de \mathbb{R}^n , la noción de conexidad por arcos es mucho más restrictiva; por eso es conveniente utilizar la definición siguiente.

DEFINICION 10. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es conexo cuando no es posible representarlo en la forma $A = U_1 \cup U_2$, donde U_1 y U_2 son subconjuntos abiertos no vacíos de A y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Esto significa, intuitivamente, que no es posible descomponer A en dos trozos disjuntos. Por ejemplo, los conjuntos U_1 y F_1 del ejemplo 2 no son conexos. Tomando los complementarios de U_1 y U_2 , se observa que podemos reemplazar en la def. 10 la palabra «abierto» por la palabra «cerrado».

PROPOSICION 5. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conexo y sea $B \subset A$ abierto y cerrado simultáneamente en A . Entonces $o B = \emptyset$ o bien $B = A$.

Demostración. Supongamos que $B \neq \emptyset$ y que $B \neq A$ y escribamos $A = B \cup (A - B)$. Como B es cerrado en A , $A - B$ es abierto en A . Así, A es la unión disjunta de dos abiertos no vacíos, a saber, B y $A - B$. Esto contradice la conexidad de A .

Q.E.D.

La siguiente proposición establece que la imagen continua de un conjunto conexo es un conexo.

PROPOSICION 6. Sea $F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ continua y sea A un conexo. Entonces $F(A)$ es un conexo.

Demostración. Supongamos que $F(A) = U_1 \cup U_2$, donde U_1 y U_2 son subconjuntos abiertos, disjuntos y no vacíos de $F(A)$. Como F es continua, $F^{-1}(U_1)$ y $F^{-1}(U_2)$ son también subconjuntos abiertos, disjuntos y no vacíos de A . Al ser $A = F^{-1}(U_1) \cup F^{-1}(U_2)$, se llega a una contradicción, en virtud a la conexidad de A .

Q.E.D..

A los efectos de esta sección, es conveniente extender la definición de intervalo de la manera siguiente;

DEFINICION 11. Un intervalo de la recta real \mathbb{R} es cualquiera de los conjuntos $a < x < b$, $a \leq x \leq b$, $a < x \leq b$, $a \leq x < b$, $x \in \mathbb{R}$. No se excluyen los casos $a = b$, $a = -\infty$ y $b = +\infty$, de esta manera, un intervalo puede ser un punto, una semirecta o el propio \mathbb{R} .

PROPOSICION 7. Un conjunto $A \subset R^n$ es conexo si y sólo si A es un intervalo.

*Demuestra*ón. Sea $A \subset R$ un intervalo y supongamos que A no es conexo. Llegaremos entonces a una contradicción.

Como A no es conexo, $A = U_1 \cup U_2$, donde U_1 y U_2 son subconjuntos abiertos, disjuntos y no vacíos de A . Sean $a_1 \in U_1$, $b_1 \in U_2$ y supongamos que $a_1 < b_1$. Al dividir el intervalo cerrado $[a_1, b_1] = I_1$ por el punto medio $(a_1 + b_1)/2$, obtenemos dos intervalos de forma que uno de ellos, al que llamaremos I_2 , tiene uno de sus puntos extremos en U_1 y el otro punto extremo en U_2 . Considerando el punto medio de I_2 y procediendo como antes, obtenemos un intervalo $I_3 \subset I_2 \subset I_1$. Así, obtenemos una familia de intervalos cerrados $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$ cuyas longitudes tienden a cero. Reescribamos $I_i = [c_i, d_i]$. Entonces $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n \leq \dots$, y $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq \dots$. Sean $c = \sup \{c_i\}$ y $d = \inf \{d_i\}$. Como $d_i - c_i$ puede hacerse arbitrariamente pequeño, $c = d$. Además, cualquier entorno de c contiene a algún I_i para i suficientemente grande. En consecuencia, c es, simultáneamente, un punto límite de U_1 y de U_2 . Como U_1 y U_2 son cerrados, $c \in U_1 \cap U_2$, lo que contradice el que U_1 y U_2 sean disjuntos.

Recíprocamente, admitamos que A es conexo. Si A sólo tiene un elemento, es trivial que A es un intervalo. Supongamos que A tiene al menos dos elementos y sean $a = \inf A$, $b = \sup B$, $a \neq b$. Está claro que A es un intervalo. Supongamos lo contrario; es decir, que existe t , $a < t < b$, tal que $t \notin A$. Los conjuntos $A \cap (-\infty, t) = V_1$ y $A \cap (t, +\infty) = V_2$ son abiertos en $A = V_1 \cup V_2$. Al ser A conexo, uno de estos conjuntos, por ejemplo V_2 , es vacío. Como $b \in (t, +\infty)$ esto implica simultáneamente que $b \notin A$ y que b no es un punto límite de A . Por tanto, se contradice el hecho de que $b = \sup A$. Procediendo de la misma manera, si $V_1 = \emptyset$, llegamos a una contradicción con el hecho de que $a = \inf A$.

Q.E.D.

PROPOSICION 8. Sea $f: A \subset R^n \rightarrow R$ una función continua y sea A conexo. Supóngase que $f(q) \neq 0$ para todo $q \in A$. Entonces f no cambia de signo en A .

*Demuestra*ón. Por la prop. 5, $f(A) \subset R$ es un conexo. Por la prop. 7, $f(A)$ es un intervalo. Por hipótesis, $f(A)$ no contiene al cero. En consecuencia, todos los puntos de A tienen el mismo signo.

Q.E.D.

Proposición 9. Sea $A \subset R^n$ un conjunto conexo por arcos. Entonces A es conexo.

*Demuestra*ón. Supongamos que A no es conexo. Entonces $A = U_1 \cup U_2$, donde U_1 y U_2 son subconjuntos abiertos, disjuntos y no vacíos de A . Sean $p \in U_1$, $q \in U_2$. Al ser A conexo por arcos, existe un arco $\alpha: [a, b] \rightarrow A$ que une p con q . Como α es continua, $B = \alpha([a, b]) \subset A$ es conexo. Sean $V_1 = B \cap U_1$. Entonces $B = V_1 \cup V_2$, donde V_1 y V_2 son subconjuntos abiertos, disjuntos y no vacíos de B , lo que constituye una contradicción.

Q.E.D.

En general, el recíproco es falso. No obstante, hay un caso especial importante donde el recíproco es válido.

DEFINICION 12. Un conjunto $A \subset R^n$ es localmente conexo por arcos si para cada $p \in A$ y cada entorno V de p en A , existe un entorno conexo por arcos $U \subset V$ de p en A .

Esto significa, intuitivamente, que cada punto de A admite entornos conexos por arcos arbitrariamente pequeños. Una superficie regular en R^3 es un ejemplo simple de conjunto localmente conexo por arcos. En efecto, para cada $p \in S$ y cada entorno W de p en R^3 , existe un entorno $V \subset W$ de p en R^3 tal que $V \cap S$ es homeomorfo a un disco de R^2 ; como los discos abiertos son conexos por arcos, cada entorno $W \cap S$ de $p \in S$ contiene un entorno conexo por arcos.

La proposición siguiente establece que el uso que hicimos del término conexo, en lugar de conexo por arcos, estaba completamente justificado.

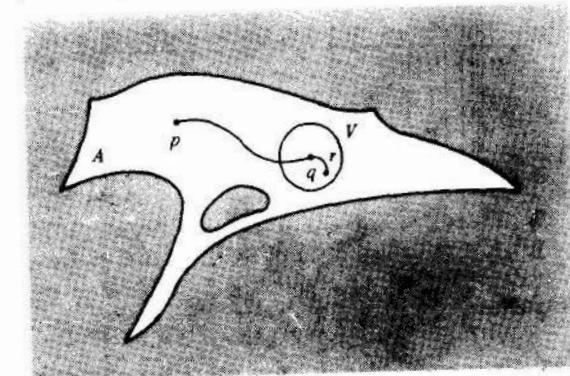


Figura A5-3

PROPOSICION 10. Sea $A \subset R^n$ un conjunto localmente conexo por arcos. Entonces A es conexo si y sólo si A es conexo por arcos.

*Demuestra*ón. La mitad de la proposición ya se demostró en la prop. 9. Admitamos ahora que A es conexo. Sea $p \in A$ y sea A_1 el conjunto de los puntos de A que pueden unirse con p mediante algún arco en A . Afirmamos que A_1 es un conjunto abierto en A .

En efecto, sea $q \in A_1$ y sea $\alpha: [a, b] \rightarrow A$ un arco que une p con q . Como A es localmente conexo por arcos, existe un entorno V de q en A tal que q se puede unir con cualquier $r \in V$ mediante un arco $\beta: [b, c] \rightarrow V$ (fig. A5-3). Se deduce entonces que el arco en A , definido por

$$\alpha \circ \beta = \begin{cases} \alpha(t), & t \in [a, b], \\ \beta(t), & t \in [b, c], \end{cases}$$

une p con r , lo que prueba nuestra afirmación.

Mediante un argumento similar, se puede demostrar que el complementario de A_1 también es abierto en A . Así, A_1 es abierto y cerrado en A . Como A es localmente conexo por arcos, A_1 es no vacío. Al ser A conexo, $A_1 = A$.

Q.E.D.

Ejemplo 4. Un conjunto puede ser conexo por arcos sin ser localmente conexo por arcos. Por ejemplo, sea $A \subset R^2$ el conjunto formado por las rectas verticales que pasan por los puntos $(1/n, 0)$, $n = 1, \dots$, añadiéndole además los ejes x e y . Está claro que A es conexo por arcos; sin embargo, no es conexo por arcos un entorno suficientemente pequeño de los puntos $(0, y)$, $y \neq 0$. Esto proviene del hecho de que, aunque existe un arco «grande» que une dos puntos cualesquiera $p, q \in A$, puede no existir un arco pequeño que una dichos puntos (fig. A5-4).

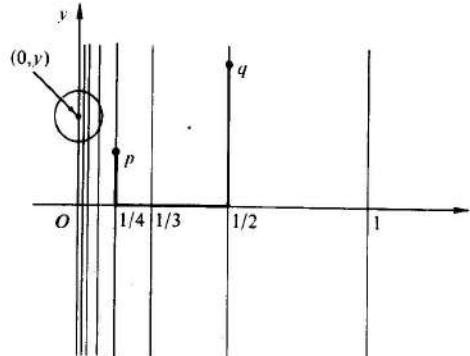


Figura A5-4

C. Conjuntos compactos

DEFINICION 13. Un conjunto $A \subset R^n$ es acotado si está contenido en alguna bola de R^n . Un conjunto $K \subset R^n$ es compacto si es cerrado y acotado.

Ya nos hemos tropezado con los conjuntos compactos en la sec. 2.7. A efectos de completitud, vamos a demostrar ahora las propiedades 1 y 2 de los conjuntos compactos, que se admitieron sin demostración en la sec. 2.7.

DEFINICION 14. Un recubrimiento abierto de un conjunto $A \subset R^n$ es una familia de abiertos $\{U_\alpha\}$, $\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $\bigcup_\alpha U_\alpha = A$. Cuando solamente hay un número finito de abiertos en la familia decimos que el recubrimiento es finito. Si la subfamilia $\{U_\beta\}$, $\beta \in \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, todavía recubre A , es decir $\bigcup_\beta U_\beta = A$, decimos que $\{U_\beta\}$ es un subrecubrimiento de $\{U_\alpha\}$.

PROPOSICION 11. Para un conjunto $K \subset R^n$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. K es compacto.
2. Cada recubrimiento abierto de K admite un subrecubrimiento finito (Heine-Borel).
3. Cada subconjunto infinito de K admite un punto límite en K (Bolzano-Weierstrass).

Demostración. Demostraremos que $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$.

$1 \Rightarrow 2$. Sea $\{U_\alpha\}$, $\alpha \in \mathcal{A}$, un recubrimiento abierto del compacto K y supongamos que $\{U_\alpha\}$ no admite un subrecubrimiento finito. Demostraremos que esto da lugar a una contradicción.

Al ser K compacto, está contenido en una región rectangular cerrada

$$B = \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n; a_j \leq x_j \leq b_j, \quad j = 1, \dots, n\}.$$

Dividamos a B mediante los hiperplanos $x_j = (a_j + b_j)/2$ (por ejemplo, si $K \subset R^2$, B es un rectángulo al que estamos dividiendo en $2^2 = 4$ rectángulos). Obtenemos así 2^n regiones rectangulares cerradas más pequeñas. Por hipótesis, al menos una de estas regiones, a la que llamaremos B_1 , satisface que $B_1 \cap K$ no está recubierto por un número finito de abiertos de la familia $\{U_\alpha\}$. Ahora dividimos a B_1 de la misma manera y, repitiendo el proceso, obtenemos una sucesión de regiones rectangulares cerradas (fig. A5-5)

$$B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_i \supset \dots$$

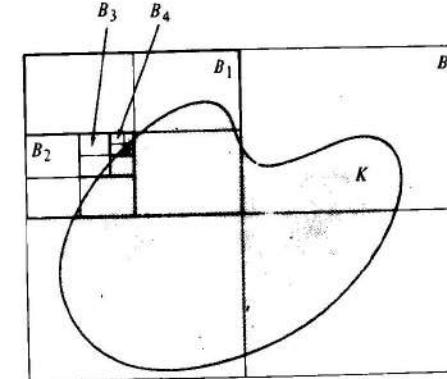


Figura A5-5

la cual satisface que ningún conjunto $B_i \cap K$ está recubierto por un número finito de abiertos de la familia $\{U_\alpha\}$ y que el lado de longitud máxima de B_i tiende a cero.

Afirmamos que existe un $p \in \bigcap B_i$. En efecto, proyectando cada B_i sobre el eje j de R^n , $j = 1, \dots, n$, obtenemos una sucesión de intervalos cerrados

$$[a_{j1}, b_{j1}] \supset [a_{j2}, b_{j2}] \supset \dots \supset [a_{ji}, b_{ji}] \supset \dots$$

Como $(b_{ji} - a_{ji})$ puede hacerse arbitrariamente pequeño comprobamos entonces que

$$a_j = \sup\{a_{ji}\} = \inf\{b_{ji}\} = b_j;$$

luego

$$a_j \in \bigcap_i [a_{ji}, b_{ji}].$$

Por tanto, $p = (a_1, \dots, a_n) \in \bigcap_i B_i$, como habíamos afirmado.

Ahora, cualquier entorno de p contiene a algún B_i para i suficientemente grande; luego contiene infinitos puntos de K . Por tanto, p es un punto límite de K y como K es cerrado, $p \in K$. Sea U_0 un elemento de la familia $\{U_a\}$ que contiene a p . Como U_0 es abierto, existe una bola $B_\epsilon(p) \subset U_0$. Por otra parte, para i suficientemente grande, $B_i \subset B_\epsilon(p) \subset U_0$. Esto contradice al hecho de que ningún conjunto $B_i \cap K$ puede recubrirse mediante un número finito de abiertos U_a . Hemos demostrado así la implicación $1 \Rightarrow 2$.

$2 \Rightarrow 3$. Supongamos que $A \subset K$ es un subconjunto infinito de K y que no existen en K puntos límite de A . Es posible entonces elegir, para cada $p \in K, p \notin A$, un entorno V_p de p tal que $V_p \cap A = \emptyset$. También es posible elegir, para cada $q \in A$, un entorno W_q de q tal que $W_q \cap A = \{q\}$. En consecuencia, la familia $\{V_p, W_q\}, p \in K - A, q \in A$, constituye un recubrimiento abierto de K . Como A es infinito y la supresión de cualquier W_q de la familia implica el no recubrir al punto q , se tiene entonces que la familia $\{V_p, W_q\}$ no admite ningún subrecubrimiento finito. Esto contradice a la afirmación 2.

$3 \Rightarrow 1$. Tenemos que demostrar que K es cerrado y acotado. El conjunto K es cerrado porque si p es un punto límite de K , tomando bolas concéntricas $B_{1/i}(p) = B_i$, obtenemos una sucesión $p_1 \in B_1, p_2 \in B_2 - B_1, \dots, p_i \in B_i - B_{i+1}, \dots$ que tiene a p como punto límite. Por la afirmación 3, $p \in K$.

K es un conjunto acotado. En caso contrario, considerando bolas concéntricas $B_i(p)$, de radios $1, 2, \dots, i, \dots$, obtendremos una sucesión $p_1 \in B_1, p_2 \in B_2 - B_1, \dots, p_i \in B_i - B_{i-1}, \dots$ que carece de puntos límite. Esto prueba la implicación $3 \Rightarrow 1$.

Q.E.D.

La siguiente proposición establece que la imagen continua de un conjunto compacto es también un conjunto compacto.

PROPOSICION 12. *Sea $F: K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación continua y sea K un compacto. Entonces $F(K)$ es un compacto.*

Demostración. Si $F(K)$ es finito entonces es, trivialmente, un compacto. Admitamos que $F(K)$ no es finito y consideremos un subconjunto infinito $\{F(p_a)\} \subset F(K), p_a \in K$. Está claro que el conjunto $\{p_a\} \subset K$ es infinito y admite, por compacidad, un punto límite $q \in K$. Por tanto, existe una sucesión $p_1, \dots, p_i, \dots \rightarrow q, p_i \in \{p_a\}$. Por la continuidad de F , la sucesión $F(p_i) \rightarrow F(q) \in F(K)$ (prop. 1). En consecuencia, $\{F(p_a)\}$ admite un punto límite $F(q) \in F(K)$; luego $F(K)$ es compacto.

Q.E.D.

La siguiente propiedad es probablemente la más importante de los conjuntos compactos.

PROPOSICION 13. *Sea $f: K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida sobre un conjunto compacto K . Entonces existen $p_1, p_2 \in K$ tales que*

$$f(p_2) \leq f(p) \leq f(p_1) \quad \text{para todo } p \in K;$$

es decir, f alcanza el máximo en p_1 y el mínimo en p_2 .

Demostración. Demostraremos la existencia de p_1 ; el caso del mínimo se trata de una manera similar.

Por la prop. 12, $f(K)$ es compacto, luego es cerrado y acotado. Por tanto, existe $\sup f(K) = x_1$. Como $f(K)$ es cerrado, $x_1 \in f(K)$. Se deduce entonces que existe $p_1 \in K$ con $x_1 = f(p_1)$. Está claro que $f(p) \leq f(p_1) = x_1$ para todo $p \in K$.

Q.E.D.

Aunque no vamos a hacer uso de ella, la noción de continuidad uniforme se adapta de una manera tan natural al presente contexto que debemos decir unas pocas palabras sobre dicha noción.

Se dice que una aplicación $F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es *uniformemente continua* en A si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $F(B_\delta(p)) \subset B_\epsilon(F(p))$ para todo $p \in A$.

Formalmente, la diferencia entre esta definición y la de continuidad (simple) se halla en el hecho de que, dado ϵ , el número δ es el mismo para todos los $p \in A$, mientras que en la continuidad simple, dado ϵ , el número δ puede variar con p . Por tanto, la continuidad uniforme es más una noción global que local.

Constituye un hecho importante el que sobre conjuntos compactos las dos nociones coinciden. Con más precisión, sea $F: K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ continua y K compacto. Entonces F es *uniformemente continua* en K .

La demostración de este hecho es simple si recordamos la noción de número de Lebesgue de un recubrimiento abierto, que se introdujo en la sec. 2.7. En efecto, dado $\epsilon > 0$, para cada $p \in K$ existe un número $\delta(p) > 0$ tal que $F(B_{\delta(p)}(p)) \subset B_{\epsilon/2}(F(p))$. La familia $\{B_{\delta(p)}(p), p \in K\}$ es un recubrimiento abierto de K . Sea $\delta > 0$ el número de Lebesgue de esta familia (sec. 2.7, propiedad 3). Si $q \in B_\delta(p), p \in K$, entonces q y p pertenecen al mismo elemento del recubrimiento abierto. Por tanto, $|F(p) - F(q)| < \epsilon$. Al ser q arbitrario, $F(B_\delta(p)) \subset B_\epsilon(F(p))$. Esto prueba que δ satisface la definición de convergencia uniforme, que es lo que pretendíamos demostrar.

D. Componentes conexas

Cuando un conjunto no es conexo, puede descomponerse en componentes conexas. Para precisar esta idea, demostraremos en primer lugar la proposición siguiente.

PROPOSICION 14. *Sea $C_a \subset \mathbb{R}^n$ una familia de conjuntos conexos tales que*

$$\bigcap_a C_a \neq \emptyset.$$

Entonces $\bigcup_a C_a = C$ es un conjunto conexo.

Demostración. Supongamos que $C = U_1 \cup U_2$, donde U_1 y U_2 son dos abiertos, disjuntos y no vacíos de C y supongamos que algún punto $p \in \bigcap_a C_a$ pertenece a U_1 . Sea $q \in U_2$. Como $C = \bigcup_a C_a$ y $p \in \bigcap_a C_a$, entonces existe algún C_a tal que $p, q \in C_a$. Además $C_a \cap U_1$ y $C_a \cap U_2$ son dos abiertos, disjuntos y no vacíos de C_a . Esto contradice la conexidad de C_a , probando entonces que C es conexo.

Q.E.D.

DEFINICION 15. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y $p \in A$. La unión de todos los subconjuntos conexos de A que contienen al punto p se llama la componente conexa de A que contiene a p .

Por la prop. 14, una componente conexa es un conjunto conexo. Intuitivamente, la componente conexa de A que contiene a $p \in A$ es el mayor subconjunto conexo de A que contiene a p (es decir, no está contenido en ningún subconjunto conexo de A que contenga a p).

Una componente conexa de A es siempre un conjunto cerrado de A . Ello es consecuencia de la proposición siguiente.

PROPOSICION 15. Sea $C \subset A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto conexo. Entonces la adherencia \bar{C} de C en A es un conexo.

Demostración. Supongamos que $\bar{C} = U_1 \cup U_2$, donde U_1 y U_2 son dos abiertos disjuntos y no vacíos de \bar{C} . Como $\bar{C} \supset C$, los conjuntos $C \cap U_1 = V_1$, $C \cap U_2 = V_2$ son abiertos en C , disjuntos y además $V_1 \cup V_2 = C$. Demostraremos que V_1 y V_2 son no vacíos, lo que implica una contradicción, teniendo en cuenta la conexidad de C .

Sea $p \in U_1$. Al ser U_1 abierto en \bar{C} existe entonces un entorno W de p en A tal que $W \cap \bar{C} \subset U_1$. Como p es un punto límite de C , existe $q \in W \cap C \subset W \cap \bar{C} \subset U_1$. Por tanto $q \in C \cap U_1 = V_1$, y V_1 es no vacío. Se puede demostrar, de manera análoga, que V_2 es no vacío.

Q.E.D.

COROLARIO. Una componente conexa $C \subset A \subset \mathbb{R}^n$ de un conjunto A es un cerrado en A .

En efecto, si $\bar{C} \neq C$, entonces existe un subconjunto conexo de A , a saber \bar{C} , que contiene propiamente a C . Esto contradice el carácter maximal de la componente conexa C .

En algunos casos especiales, una componente conexa también es un conjunto abierto en A .

PROPOSICION 16. Sea $\bar{C} \subset A \subset \mathbb{R}^n$ una componente conexa de un conjunto localmente conexo por arcos A . Entonces C es un abierto de A .

Demostración. Sea $p \in C \subset A$. Como A es localmente conexo por arcos, existe un entorno conexo por arcos V de p en A . En virtud a la prop. 9, V es conexo. Como C es maximal, $C \supset V$; luego C es un abierto de A .

Q.E.D.

BIBLIOGRAFIA Y COMENTARIOS

El artículo de Gauss «Disquisiciones generales circa superficies curvas», *Comm. Soc. Göttingen* Bd 6, 1823-1827, constituye la obra básica de la geometría diferencial de superficies. Existen traducciones a varias lenguas, por ejemplo,

1. Gauss, K. F., *General Investigations of Curved Surfaces*, Raven Press, Nueva York, 1965.

Pensamos que el lector del presente libro ya está en condiciones de tratar de comprender este artículo. Se precisa paciencia e ideas claras, pero la experiencia es de lo más gratificante.

La fuente clásica de la geometría diferencial de superficies es el tratado en cuatro volúmenes de Darboux:

2. Darboux, G., *Théorie des Surfaces*, Gauthier-Villars, París, 1887, 1889, 1894, 1896. Existe una reimpresión publicada por Chelsea Publishing Co., Inc., Nueva York.

Esta obra puede resultar a los principiantes ardua de leer. Sin embargo, detrás de la abundante cantidad de información, todavía hay muchas ideas por explorar en este libro, por lo que merece la pena consultarla de tiempo en tiempo.

El texto clásico más influyente en lengua inglesa probablemente fue

3. Eisenhart, L. P., *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Ginn and Company, Boston, 1909, reimpresso por Dover, Nueva York, 1960.

Una excelente presentación de algunas ideas intuitivas de la geometría diferencial clásica se puede encontrar en el cap. 4 de

4. Hilbert, D., y S. Cohn-Vossen, *Geometry and Imagination*, Chelsea Publishing Company, Inc., Nueva York, 1962 (traducción de un libro publicado en alemán por primera vez en 1932).

Presentamos a continuación, en orden cronológico, unos pocos libros más. Se han seleccionado con un nivel más o menos análogo al del presente libro. Se puede consultar una lista más completa en [9], que además contiene un buen número de teoremas globales.

5. Struik, D. J., *Lectures on Classical Differential Geometry*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1950.
6. Pogorelov, A. V., *Differential Geometry*, Noordhoff, Groningen, Holanda, 1958.
7. Willmore, T. J., *An Introduction to Differential Geometry*, Oxford University Press, Inc., Londres 1959.
8. O'Neill, B., *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, Nueva York, 1966.
9. Stoker, J. J., *Differential Geometry*, Wiley-Interscience, Nueva York, 1969.

En la referencia [8] se puede encontrar una exposición clara y elemental del método de las referencias móviles, que no se ha estudiado en el presente libro. Para encontrar más detalles sobre la teoría de curvas, tema que aquí se trató con brevedad, pueden consultarse también [5], [6] y [9].

Las siguientes referencias, aunque no pueden considerarse libros de texto, deben incluirse. La referencia [10] constituye una bella presentación de algunos teoremas globales sobre curvas y superficies y [11] es un conjunto de apuntes que se ha convertido en un clásico del tema.

10. Chern, S. S., *Curves and Surfaces in Euclidean Spaces*, Studies in Global Geometry and Analysis, MAA Studies in Mathematics, The Mathematical Association of America, 1967.

11. Hopf, H., *Lectures on Differential Geometry in the Large*, apuntes publicados por la Universidad de Stanford, 1955.

Para acometer la lectura de obras más avanzadas, probablemente se debe empezar por aprender algo sobre variedades diferenciables y grupos de Lie. Por ejemplo,

12. Spivak, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. 1, Universidad de Brandeis, 1970.

13. Warner, F., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott, Foresman, Glenview, Illinois, 1971.

La referencia [12] es una lectura amena. Los capítulos 1-4 de [13] constituyen un compendio breve y eficiente sobre los fundamentos del tema.

Después de esto, hay un amplio espectro de literatura donde elegir, en función de los gustos e intereses del lector. Incluimos más abajo una de las selecciones posibles, que de ninguna manera es única. Se pueden encontrar en [17] y [18] listas extensas de libros y artículos.

14. Berger, M., P. Gauduchon y E. Mazet, *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lecture Notes 194, Springer, Berlín, 1971.

15. Bishop, R. L., y R. J. Crittenden, *Geometry of Manifolds*, Academic Press, Nueva York, 1964.
16. Cheeger, J., y D. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North-Holland, Amsterdam, 1974.
17. Helgason, S., *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, Nueva York, 1963.
18. Kobayashi, S. y K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, vols. I y II, Wiley-Interscience, Nueva York, 1963 y 1969.
19. Klingenberg, W., D. Gromoll y W. Meyer, *Riemannsche Geometrie im Grossen*, Lecture Notes 55, Springer-Verlag, Berlín, 1968.
20. Lawson, B., *Lectures on Minimal Submanifolds*, Monografías de Matemática, IMPA, Río de Janeiro, 1973.
21. Milnor, J., *Morse Theory*, Princeton University Press, Princeton, Nueva Jersey, 1963.
22. Spivak, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. II, Universidad de Brandeis, 1970.

La teoría de superficies mínimas [20] y referencias que se citan allí; los problemas asociados al espectro [14] y el comportamiento topológico de las superficies con curvatura positiva [16] y [19], son sólo tres de los muchos temas interesantes de actualidad en la geometría diferencial.

INDICACIONES Y RESPUESTAS DE ALGUNOS EJERCICIOS

SECCION 1.3

2. a. $\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$; véase la fig. 1-7. Puntos singulares: $t = 2\pi n$, donde n es un entero cualquiera.
7. b. Aplicar el teorema del valor medio a cada una de las funciones x, y, z para demostrar que el vector $(\alpha(t+h) - \alpha(t+k))/(h-k)$ converge al vector $\alpha'(t)$ cuando $h, k \rightarrow 0$. Como $\alpha'(t) \neq 0$, la recta determinada por $\alpha(t+h)$ y $\alpha(t+k)$ converge a la recta determinada por $\alpha'(t)$.
8. Por la definición de integral, dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta' > 0$ tal que si $|P| < \delta'$, entonces

$$\left| \left(\int_a^b |\alpha'(b)| dt \right) - \sum (t_i - t_{i-1}) |\alpha'(t_i)| \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por otra parte, como α' es uniformemente continua en $[a, b]$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta'' > 0$ tal que si $t, s \in [a, b]$ con $|t - s| < \delta''$, entonces

$$|\alpha'(t) - \alpha'(s)| < \epsilon/2(b-a).$$

Definamos $\delta = \min(\delta', \delta'')$. Entonces si $|P| < \delta$, obtenemos, utilizando el teorema del valor medio para funciones vectoriales,

$$\begin{aligned} & \left| \sum |\alpha(t_{i-1}) - \alpha(t_i)| - \sum (t_{i-1} - t_i) |\alpha'(t_i)| \right| \\ & \leq \left| \sum (t_{i-1} - t_i) \sup_{s_i} |\alpha'(s_i)| - \sum (t_{i-1} - t_i) |\alpha'(t_i)| \right| \\ & \leq \left| \sum (t_{i-1} - t_i) \sup_{s_i} |\alpha'(s_i) - \alpha'(t_i)| \right| \leq \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

donde $t_{i-1} \leq s_i \leq t_i$. La desigualdad requerida se deduce entonces de dos resultados precedentes.

SECCION 1.4

2. Los puntos $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $p = (x, y, z)$ pertenecen al plano P . Entonces $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 = ax + by + cz + d$. Por tanto, $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$. Como el vector $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ es paralelo a P , el vector (a, b, c) es normal a P . Dado un punto $p = (x, y, z) \in P$, la distancia ρ del plano P al origen O viene dada por $\rho = |p| \cos \theta = |p \cdot v|/|v|$, donde θ es el ángulo de Op con el vector normal v . Como $p \cdot v = -d$,

$$\rho = \frac{p \cdot v}{|v|} = -\frac{d}{|v|}.$$

3. Este es el ángulo de sus vectores normales.
 4. Dos planos son paralelos si y sólo si sus vectores normales son paralelos.
 6. Los vectores v_1 y v_2 son perpendiculares, simultáneamente, a la recta de intersección. Así, $v_1 \wedge v_2$ es paralelo a dicha recta.
 7. Un plano y una recta son paralelos cuando un vector normal al plano es perpendicular a la dirección de la recta.
 8. La dirección de la perpendicular común a las rectas dadas es la dirección de $u \wedge v$. La distancia entre estas rectas se obtiene al proyectar el vector $r = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$ sobre la perpendicular común. Está claro que dicha proyección es el producto interior de r con el vector unitario $(u \wedge v)/|u \wedge v|$.

SECCION 1.5

2. Utilícese el hecho de que $\alpha' = t$, $\alpha'' = kn$, $\alpha''' = kn' + k'n = -k^2t + k'n - k\tau b$.

4. Derívese $\alpha(s) + \lambda(s)n(s) = \text{const.}$ para obtener

$$(1 - \lambda k)t + \lambda'n - \lambda\tau b = 0.$$

Se deduce entonces que $\tau = 0$ (la curva está contenida en un plano) y que $\lambda = \text{const.} = 1/k$.

7. a. Parametrícese α por la longitud de arco.
 b. Parametrícese α por la longitud de arco s . Las rectas normales en s_1 y en s_2 son, respectivamente,

$$\beta_1(t) = \alpha(s_1) + tn(s_1), \quad \beta_2(\tau) = \alpha(s_2) + \tau n(s_2), \quad t \in R, \tau \in R,$$

Si punto de intersección se obtendrá a partir de los valores de t y τ que satisfacen

$$\frac{\alpha(s_2) - \alpha(s_1)}{s_2 - s_1} = \frac{tn(s_1) - \tau n(s_2)}{s_2 - s_1}.$$

Efectúese el producto interior de esta cantidad con $\alpha'(s_1)$ para obtener que $1 = (-\lim_{s_2 \rightarrow s_1} \tau) \cdot (\alpha'(s_1), n'(s_1))$. Se deduce entonces que τ converge a $1/k$ cuando $s_2 \rightarrow s_1$.

13. Para demostrar que la condición es necesaria, derívese tres veces la cantidad $|\alpha(s)|^2 = \text{const.}$, obteniendo $\alpha(s) = -Rn + R'Tb$. Para la suficiencia, derívese $\beta(s) = \alpha(s) + Rn - R'Tb$, obteniendo

$$\beta'(s) = t + R(-kt - \tau b) + R'n - (TR')'b - R'n = -(R\tau + (TR'))b.$$

Por otra parte, derivando $R^2 + (TR')^2 = \text{const.}$, se obtiene

$$0 = 2RR' + 2(TR')(TR')' = \frac{2R'}{\tau}(R\tau + (TR')),$$

pues $k' \neq 0$ y $\tau \neq 0$. Luego, $\beta(s)$ es una constante p_0 , y

$$|\alpha(s) - p_0|^2 = R^2 + (TR')^2 = \text{const.}$$

15. Como se conoce $b' = \tau n$, entonces $|\tau| = |b'|$. Por tanto, salvo el signo, se puede determinar n . La curvatura también se puede determinar pues ésta es positiva, $t = n \wedge b$ y se conoce $t' = kn$.

16. Demuéstrese primero que

$$\frac{n \wedge n' \cdot n''}{|n'|^2} = \frac{\frac{k'}{\tau}}{\left(\frac{k}{\tau}\right)^2 + 1} = a(s).$$

Así, $\int a(s) ds = \text{arc tan}(k/\tau)$; luego se puede determinar k/τ ; como k es positiva, también se determina el signo de τ . Además, también se conoce $|n'|^2 = |-kt - \tau b|^2 = k^2 + \tau^2$. Al conocer k/τ , sólo resta determinar k^2 y τ^2 .

17. a. Sea a el vector unitario de la dirección fijada y sea θ el ángulo constante. Entonces $t \cdot a = \cos \theta = \text{const.}$; derivando: $n \cdot a = 0$. Por tanto, $a = t \cos \theta + b \sin \theta$; y derivando se obtiene $k \cos \theta + \tau \sin \theta = 0$, o $k/\theta = -\tan \theta = \text{constante}$. Recíprocamente, si $k/\tau = \text{const.} = -\tan \theta = -(\sin \theta / \cos \theta)$, podemos invertir el argumento y obtener que $t \cos \theta + b \sin \theta$ es un vector constante a . Por tanto, $t \cdot a = \cos \theta = \text{const.}$
 b. Del argumento de la parte a, se deduce inmediatamente que $t \cdot a = \text{const.}$ implica que $n \cdot a = 0$; la última condición quiere decir que n es paralelo a un plano normal a a . Recíprocamente, si $n \cdot a = 0$ entonces $(dt/ds) \cdot a = 0$, luego $t \cdot a = \text{constante}$.
 c. Por el argumento de la parte a, se deduce que $t \cdot a = \text{const.}$ implica que $b \cdot a = \text{constante}$. Recíprocamente, si $b \cdot a = \text{const.}$, derivando llegamos a que $n \cdot a = 0$.
 18. a. Parametrícese α por la longitud de arco s y derívese $\bar{\alpha} = \alpha + rn$ con respecto a s , obteniendo

$$\frac{d\bar{\alpha}}{ds} = (1 - rk)t + r'n - r\tau b.$$

Como $d\bar{\alpha}/ds$ es tangente a $\bar{\alpha}$, $(d\bar{\alpha}/ds) \cdot n = 0$; luego, $r' = 0$.

- b. Parametrícese α por la longitud de arco s y denótense por \tilde{s} y \tilde{l} la longitud de arco y el vector unitario tangente de $\bar{\alpha}$. Como $d\tilde{l}/ds = (d\tilde{l}/d\tilde{s})(d\tilde{s}/ds)$, obtenemos que

$$\frac{d}{ds}(t \cdot \tilde{l}) = t \cdot \frac{d\tilde{l}}{d\tilde{s}} + \frac{dt}{ds} \cdot \tilde{l} = 0;$$

luego $t \cdot \tilde{l} = \text{const.} = \cos \theta$. Utilizando entonces que $\bar{\alpha} = \alpha + rn$, tenemos que

$$\cos \theta = \tilde{l} \cdot t = \frac{d\bar{\alpha}}{ds} \frac{ds}{d\tilde{s}} \cdot t = \frac{ds}{d\tilde{s}}(1 - rk),$$

$$|\sin \theta| = |\tilde{l} \wedge t| = \left| \frac{ds}{d\tilde{s}}((t + rn) \wedge t) \right| = \left| \frac{ds}{d\tilde{s}}r\tau \right|.$$

De estas dos relaciones se deduce que

$$\frac{1 - rk}{r\tau} = \text{const.} = \frac{B}{r}.$$

Así, poniendo $r = A$ obtenemos finalmente que $Ak + B\tau = 1$. Recíprocamente, si se satisface la última relación, ponemos $A = r$ y definimos $\tilde{\alpha} = \alpha + rn$. Utilizando otra vez dicha relación obtenemos que

$$\frac{d\tilde{\alpha}}{ds} = (1 - rk)t - r\tau b = \tau(Bt - rb).$$

Así, un vector unitario \tilde{i} a $\tilde{\alpha}$ es $(Bt - rb)/\sqrt{B^2 + r^2} = \tilde{i}$. Se deduce entonces que $d\tilde{i}/ds = ((Bk - rt)/\sqrt{B^2 + r^2})n$. Por tanto, $\tilde{n}(s) = \pm n(s)$ y las rectas normales de $\tilde{\alpha}$ y α coinciden en s . En consecuencia, α es una curva de Bertrand.

- c. Supongamos la existencia de dos representaciones de Bertrand distintas $\tilde{\alpha} = \alpha + \tilde{r}n$ y $\tilde{\alpha} = \alpha + \tilde{r}n$. Por la parte b , existen dos constantes c_1 y c_2 tales que $1 - \tilde{r}k = c_1(\tilde{r}\tau)$ y $1 - \tilde{r}k = c_2(\tilde{r}\tau)$. Está claro que $c_1 \neq c_2$. Derivando estas expresiones obtenemos que, respectivamente, $k' = \tau c_1$ y $k' = \tau c_2$. Ello implica que $k' = \tau' = 0$. Utilizando la parte de unicidad del teorema fundamental de la teoría local de curvas es fácil comprobar que la hélice circular es la única curva de este tipo.

SECCION 1.6

1. Supóngase que $s = 0$ y considérese la forma canónica alrededor de $s = 0$. Por la condición 1, P debe presentar la forma $z = cy$ o $y = 0$. El plano $y = 0$ es el plano rectificante, que no satisface la condición 2. Ahora obsérvese que si $|s|$ es suficientemente pequeño, $y(s) > 0$ y $z(s)$ tiene el mismo signo que s . Por la condición 2, $c = z/y$ es a la vez positivo y negativo. Por tanto, P es el plano $z = 0$.

2. a. Considérese la forma canónica de $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ en un entorno de $s = 0$. Sea $ax + by + cz = 0$ el plano que pasa por $\alpha(0)$, $\alpha(0 + h_1)$ y $\alpha(0 + h_2)$. Defínase la función $F(s) = ax(s) + by(s) + cz(s)$ y nótese que $F(0) = F(h_1) = F(h_2) = 0$. Utilícese la forma canónica para demostrar que $F'(0) = a$, $F''(0) = bk$. Utilícese el teorema del valor medio para demostrar que cuando $h_1, h_2 \rightarrow 0$ entonces $a \rightarrow 0$ y $b \rightarrow 0$. En consecuencia, cuando $h_1, h_2 \rightarrow 0$, el plano $ax + by + cz = 0$ se aproxima al plano $z = 0$, es decir, al plano osculador.

SECCION 1.7

1. No. Utilizar la desigualdad isoperimétrica.
2. Sea S^1 un círculo que admite al segmento \overline{AB} como cuerda, de forma que uno de los dos arcos α y β determinados por A y B sobre S^1 , por ejemplo α , tiene longitud 1. Considérese la curva cerrada de clase C^1 a trozos (véase la observación 2 después del teorema 1) formada por β y C . Fijemos β y hagamos variar C en la familia de todas las curvas que, con longitud l , unen A y B . En virtud a la desigualdad isoperimétrica para curvas C^1 a trozos, la curva de la familia que delimita un área máxima es S^1 . Como β está fijo, el arco α del círculo es la solución de nuestro problema.

4. Elíjase un sistema de coordenadas tal que el centro O esté en p y tal que los ejes x e y se dirijan, respectivamente, según los vectores tangente y la normal en p . Parametrícese C por la longitud de arco, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ y supóngase que $\alpha(0) = p$. Considérese el desarrollo de Taylor (finito)

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \alpha'(0)s + \alpha''(0)\frac{s^2}{2} + R,$$

donde $\lim_{s \rightarrow 0} R/s^2 = 0$. Sea k la curvatura de α en $s = 0$ y dedúzcase que:

$$x(s) = s + R_x, \quad y(s) = \pm \frac{ks^2}{2} + R_y,$$

donde $R = (R_x, R_y)$ y el signo depende de la orientación de α . Así,

$$|k| = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2|y(s)|}{s^2} = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{2h}{d^2}.$$

5. Sea O el centro del disco D . Mediante una familia de círculos concéntricos, efectúese una contracción de la frontera de D hasta que ésta intersecte a la curva G en un punto p . Utilícese el ejercicio 4 para demostrar que la curvatura k de C en p satisface $|k| \geq 1/r$.

8. Como α es simple, tenemos, en virtud al teorema de rotación de tangentes, que:

$$\int_0^l k(s) ds = \theta(l) - \theta(0) = 2\pi.$$

Al ser $k(s) \leq c$, obtenemos que

$$2\pi = \int_0^l k(s) ds \leq c \int_0^l ds = cl.$$

9. Por el teorema de la curva de Jordan, una curva simple y cerrada C delimita un conjunto K . Si K no es convexo, existen puntos $p, q \in K$ tal que el segmento \overline{pq} contiene puntos que no pertenecen a K y \overline{pq} corta a C en un punto r , $r \neq p, q$. Utilícese el argumento que se empleó hacia la mitad de la demostración del teorema de los cuatro vértices para demostrar que la recta L , determinando por p y q , es tangente a C en los puntos p, q, r , y que el segmento \overline{pq} está contenido en $C \subset K$. Esto es una contradicción.

11. Obsérvese que el área delimitada por H es mayor o igual que el área delimitada por C , y que la longitud de H es menor o igual que la longitud de C . Expandir H mediante una familia de curvas paralelas a H (ejercicio 6) hasta que su longitud alcance el valor de la longitud de C . Como el área se mantiene igual o bien ha aumentado de valor durante este proceso, obtenemos una curva convexa H' con la misma longitud que C pero delimitando un área mayor o igual que la delimitada C .

12. $M_1 = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1/3} dp \right) d\theta = \frac{2\pi}{3},$
 $M_2 = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 dp \right) d\theta = 2\pi.$

(Véase la fig. 1-40.)

SECCION 2.2

5. Sí.

11. b. Para comprobar que x es inyectiva, obsérvese que de z se obtiene $\pm u$. Como $\cosh v > 0$, el signo de u es el mismo que el signo de x . Así, podemos determinar $\operatorname{senh} v$ (luego v).

13. $x(u, v) = (\operatorname{senh} u \cos v, \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v, \cosh u)$.

15. Eliminar t en las ecuaciones $x/a = y/t = -(z-t)/t$ de la recta que une $p(t) = (0, 0, t)$ con $q(t) = (a, t, 0)$.

17. c. Extender a curvas planas la prop. 3 y aplicar el argumento del ejemplo 5.

18. Para la primera parte, utilizar el teorema de la función inversa. Para determinar F , póngase $u = \rho^2$, $v = \operatorname{tag} \varphi$, $w = \operatorname{tag}^2 \theta$. Escribase $x = f(\rho, \theta) \cos \varphi$, $y = f(\rho, \theta) \operatorname{sen} \varphi$, donde f es una función a determinar. Entonces

$$x^2 + y^2 + z^2 = f^2 + z^2 = \rho^2, \quad \frac{f^2}{z^2} = \operatorname{tag}^2 \theta.$$

Se tiene entonces que $f = \rho \cos \theta$, $z = \rho \operatorname{sen} \theta$. Por tanto,

$$F(u, v, w) = \left(\frac{\sqrt{uw}}{\sqrt{(1+w)(1+v^2)}}, \frac{v\sqrt{u}}{\sqrt{(1+w)(1+v^2)}}, \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{1+w}} \right).$$

19. No. Obsérvese que para C , ningún entorno en R^2 de un punto en el arco vertical puede describirse como la gráfica de una función diferenciable. Se puede aplicar el mismo argumento de S .

SECCION 2.3

1. Como $A^2 = I$ a la identidad, $A = A^{-1}$.

5. La función d es la restricción a S de $d: R^3 \rightarrow R$, donde,

$$d(x, y, z) = \{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\}^{1/2}, \\ (x, y, z) \neq (x_0, y_0, z_0).$$

8. Si $p = (x, y, z)$, $F(p)$ se halla en la intersección con H de la recta $t \rightarrow (tx, ty, tz)$, $t > 0$. Por tanto,

$$F(p) = \left(\frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}x, \frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}y, z \right).$$

Sea U el resultado de suprimir el eje z a R^3 . Entonces la aplicación que acabamos de introducir $F: U \subset R^3 \rightarrow R^3$ es diferenciable.

13. Si f es la restricción en cuestión, f es diferenciable (ejemplo 1). Para probar el recíproco, sea $x: U \rightarrow R^3$ una parametrización de S en p . Como en la prop. 1, extiéndase x a $F: U \times R \rightarrow R^3$. Sea W un entorno de p en R^3 sobre el que F^{-1} es un difeomorfismo. Defínase $g: W \rightarrow R$ por $g(q) = f \circ x \circ \pi \circ F^{-1}(q)$, $q \in W$, donde $\pi: U \times R \rightarrow U$ es la proyección natural. Entonces, g es diferenciable y la restricción $g|W \cap S = f$.

16. F es diferenciable en $S^2 - \{N\}$ pues es la composición de aplicaciones diferenciables. Para demostrar que F es diferenciable en N , considérese la proyección estereográfica π_S desde el polo sur $S = (0, 0, -1)$ y póngase $Q = \pi_S \circ F \circ \pi_S^{-1}: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (naturalmente, estamos identificando el plano $z = 1$ con \mathbb{C}). Demuéstrese que $\pi_N \circ \pi_S^{-1}: \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ viene dada por $\pi_N \circ \pi_S^{-1}(\zeta) = 1/\zeta$. Conclúyase que

$$Q(\zeta) = \frac{\zeta^n}{\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \zeta + \cdots + \tilde{a}_n \zeta^n};$$

luego, Q es diferenciable en $\zeta = 0$. Por tanto, $F = \pi_S^{-1} \circ Q \circ \pi_S$ es diferenciable en N .

SECCION 2.4

1. Sea $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una curva sobre la superficie que pasa por $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ para $t = 0$. Así, $f(x(t), y(t), z(t)) = 0$; luego $f_x x'(0) + f_y y'(0) + f_z z'(0) = 0$, en donde todas las derivadas se evalúan en p_0 . Esto quiere decir que todos los vectores tangentes en p_0 son perpendiculares al vector (f_x, f_y, f_z) , de lo que se deduce la ecuación que se deseaba obtener.

4. Represéntese por f' a la derivada de $f(y/x)$ con respecto a $t = y/x$. Entonces $z_x = f - (y/x)f'$, $z_y = f'$. Por tanto, la ecuación del plano tangente en (x_0, y_0) es $z = x_0 f + (f - (y_0/x_0)f')(x - x_0) + f'(y - y_0)$, en donde las funciones se han calculado en (x_0, y_0) . Se deduce entonces que si $x = 0$, $y = 0$, entonces $z = 0$.

12. Considerérense por ejemplo, para la ortogonalidad, las dos primeras superficies. Sus normales son paralelas a los vectores $(2x - a, 2y, 2z)$ y $(2x, 2y - b, 2z)$. En la intersección de estas superficies, $ax = by$; introduzcase esta relación en el producto interior de los vectores precedentes para demostrar que dicho producto es cero.

13. a. Sea $\alpha(t)$ una curva en S con $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w$. Entonces

$$df_p(w) = \frac{d}{dt}(\langle \alpha(t) - p_0, \alpha(t) - p_0 \rangle^{1/2})|_{t=0} = \frac{\langle w, p - p_0 \rangle}{|p - p_0|}.$$

Se deduce entonces que p es un punto crítico de f si y sólo si $\langle w, p - p_0 \rangle = 0$ para todo $w \in T_p(S)$.

14. a. $f(t)$ es continua en el intervalo $(-\infty, c)$ y $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow c, t < c} f(t) = +\infty$. Así, $f(t_1) = 1$, para algún $t_1 \in (-\infty, c)$. Mediante argumentos similares, hallamos las raíces reales $t_2 \in (c, b)$ y $t_3 \in (b, a)$.

- b. La condición de ortogonalidad para las superficies $f(t_1) = 1$ y $f(t_2) = 1$ es

$$f_x(t_1)f_x(t_2) + f_y(t_1)f_y(t_2) + f_z(t_1)f_z(t_2) = 0.$$

Esta se reduce a

$$\frac{x^2}{(a-t_1)(a-t_2)} + \frac{y^2}{(b-t_1)(b-t_2)} + \frac{z^2}{(c-t_1)(c-t_2)} = 0,$$

identidad que se deduce del hecho de que $t_1 \neq t_2$ y $f(t_1) - f(t_2) = 0$.

17. Como cada superficie se puede expresar localmente mediante la gráfica de una función diferenciable, S_1 viene expresada en la forma $f(x, y, z) = 0$ y S_2 también se puede expresar como $g(x, y, z) = 0$, en un entorno de p ; donde 0 es un valor regular de las funciones diferenciables f y g . En dicho entorno de p , se puede expresar $S_1 \cap S_2$ como la imagen inversa de $(0, 0)$ de la aplicación $F: R^3 \rightarrow R^2$; $F(q) = (f(q), g(q))$. Como S_1 y S_2 se cortan transversalmente, los vectores normales (f_x, f_y, f_z) y (g_x, g_y, g_z) son linealmente independientes. Por lo tanto, $(0, 0)$ es un valor regular de F y $S_1 \cap S_2$ es una curva regular (cf. el ejercicio 17, sec. 2.2).

20. La ecuación del plano tangente en (x_0, y_0, z_0) es

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

La recta que pasa por O y que es perpendicular al plano tangente viene dada por

$$\frac{xa^2}{x_0} = \frac{yb^2}{y_0} = \frac{zc^2}{z_0}.$$

Obtenemos entonces, a partir de la última expresión, que

$$\frac{x^2a^2}{xx_0} = \frac{y^2b^2}{yy_0} = \frac{z^2c^2}{zz_0} = \frac{a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2}{xx_0 + yy_0 + zz_0}.$$

De la misma expresión obtenemos, al tener en cuenta la ecuación del elipsoide, que

$$\frac{xx_0}{x_0^2/a^2} = \frac{yy_0}{y_0^2/b^2} = \frac{zz_0}{z_0^2/c^2} = \frac{xx_0 + yy_0 + zz_0}{1}.$$

Otra vez de la misma expresión y de la ecuación del plano tangente se obtiene que

$$\frac{x^2}{(x_0x)/a^2} = \frac{y^2}{(y_0y)/b^2} = \frac{z^2}{(z_0z)/c^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{1}.$$

La ecuación que buscábamos se obtiene a partir de la igualdad de los segundos miembros de las tres últimas ecuaciones.

21. Imitar la demostración de la prop. 9 del apéndice al cap. 2.

22. Sea r la recta fija a la que cortan las normales de S y sea $p \in S$. El plano P_1 que contiene a p y r , contiene también a todas las normales de S en los puntos de $P_1 \cap S$. Considerese el plano P_2 que pasa por p y es perpendicular a r . Como la normal que pasa por p intersecta a r , P_2 es transversal a $T_p(S)$; luego, $P_2 \cap S$ es una curva regular plana C definida en un entorno de p (cf. el ejercicio 17, sec. 2.4). Además, $P_1 \cap P_2$ es perpendicular a $T_p(S) \cap P_2$; luego, $P_1 \cap P_2$ es normal a C . Se deduce entonces que todas las normales a C pasan el punto fijo $q = r \cap P_2$; luego C está contenida en un círculo (cf. el ejercicio 4, sec. 1.5). Por tanto, cada $p \in S$ admite un entorno que está contenido en una superficie de revolución con eje r . Por conexidad, S está totalmente contenida en una de estas superficies de revolución.

SECCION 2.5

8. Como $\partial E/\partial v = 0$, $E = E(u)$ es una función que sólo depende de u . Pongamos $\bar{u} = \int \sqrt{E} du$. Análogamente, $G = G(v)$ sólo depende de v y podemos definir $\bar{v} = \int \sqrt{G} dv$. Por tanto, \bar{u} y \bar{v} miden las longitudes de arco a lo largo de las curvas coordenadas, de lo que se deduce $\bar{E} = \bar{G} = 1$, $\bar{F} = \cos \theta$.

9. Parametrícese la curva generatriz por la longitud de arco.

SECCION 3.2

13. Como el plano osculador es normal a N , $N' = \mathbf{m}$, por tanto, $\tau^2 = |N'|^2 = k_1^2 \cos^2 \theta + k_2^2 \sin^2 \theta$; donde θ es el ángulo que forma e_1 con la tangente a la curva. Como la dirección es asintótica obtenemos $\cos^2 \theta$ como funciones de k_1 y de k_2 que, por sustitución en la expresión precedente, dan lugar a $\tau^2 = -k_1 k_2$.

14. Poniendo $\lambda_1 = \lambda_1 N_2$ y $\lambda_2 = \lambda_2 N_1$ obtenemos que

$$\begin{aligned} |\lambda_1 - \lambda_2| &= k |\langle n, N_1 \rangle N_2 - \langle n, N_2 \rangle N_1| \\ &= \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 \cos \theta}. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen} \theta| &= |N_1 \wedge N_2| = |n \wedge (N_1 \wedge N_2)| \\ &= |\langle n, N_2 \rangle N_1 - \langle n, N_1 \rangle N_2|. \end{aligned}$$

16. Interseccar el toro con un plano que contenga a su eje y utilizar el ejercicio 15.

18. Utilícese el hecho de que si $\theta = 2\pi/m$, entonces

$$\sigma(\theta) = 1 + \cos^2 \theta + \cdots + \cos^2(m-1)\theta = \frac{m}{2},$$

identidad que se puede probar observando que

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{4} \left(\sum_{v=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}-1} e^{2\pi i \theta} + 2m + 1 \right)$$

y que la expresión bajo el signo de sumación es la suma de una progresión geométrica, la cual da lugar a

$$\frac{\operatorname{sen}(2m\theta - \theta)}{\operatorname{sen} \theta} = -1.$$

19. a. Expressar t y h en la base $\{e_1, e_2\}$, definida por las direcciones principales, y calcular $\langle N(t), h \rangle$.
 b. Derívese $\cos \theta = \langle N, n \rangle$, utilícese que $dN(t) = -k_n t + \tau_g h$ y obsérvese que $\langle N, b \rangle = \langle h, N \rangle = \operatorname{sen} \theta$, donde b es el vector binormal.
 20. Sean S_1, S_2 y S_3 las superficies que pasan por p . Demuéstrese que son iguales las torsiones geodésicas de $C_1 = S_2 \cap S_3$ con respecto a S_2 y S_3 ; se denotarán por τ_1 . Análogamente.

denota la torsión geodésica de $C_2 = S_1 \cap S_3$ y τ_3 la de $S_1 \cap S_2$. Utilícese la definición de τ_g para demostrar que, al ser C_1 , C_2 y C_3 ortogonales dos a dos, $\tau_1 + \tau_2 = 0$, $\tau_2 + \tau_3 = 0$, $\tau_3 + \tau_1 = 0$. Se deduce entonces que $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$.

SECCION 3.3

2. Curvas asintóticas: $u = \text{const.}$, $v = \text{constante}$. Líneas de curvatura:

$$\log(v + \sqrt{v^2 + c^2}) \pm u = \text{const.}$$

3. $u + v = \text{const.}$, $u - v = \text{const.}$

6. a. Considerando como eje z a la recta r y como eje x una recta normal a r , tenemos que

$$z' = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Poniendo $x = \sin \theta$, obtenemos

$$z(\theta) = \int \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} d\theta = \log \operatorname{tag} \frac{\theta}{2} + \cos \theta + C.$$

Si $z(\pi/2) = 0$, entonces $C = 0$.

8. a. Está claro que la afirmación es verdadera si $x = x_1$ y $\bar{x} = \bar{x}_1$ son parametrizaciones que satisfacen la definición de contacto. Si x y \bar{x} son arbitrarias, obsérvese que $x = x_1 \circ h$, donde h es el cambio de coordenadas. Se deduce entonces que las derivadas parciales de $f \circ x = f \circ x_1 \circ h$ son combinaciones lineales de las derivadas parciales de $f \circ x_1$. Por lo tanto, aquéllas se anulan con las últimas.

b. Introduzcanse las parametrizaciones $x(x, y) = (x, y, f(x, y))$ y $\bar{x}(x, y) = (x, y, \bar{f}(x, y))$ y defínase la función $h(x, y, z) = f(x, y) - z$. Obsérvese que $h \circ x = 0$ y que $h \circ \bar{x} = f - \bar{f}$. Se deduce de la parte a, aplicada a la función h , que las derivadas parciales de orden ≤ 2 de $f - \bar{f}$ son cero en $(0, 0)$.

d. Como contacto de orden ≥ 2 implica contacto de orden ≥ 1 , el paraboloide pasa por p y es tangente a la superficie en p . Tomando como plano xy el plano $T_p(S)$, la ecuación del paraboloide se escribe en la forma

$$\hat{f}(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey.$$

Sea $z = f(x, y)$ la representación de la superficie con respecto al plano tangente $T_p(S)$. Utilizando la parte b, obtenemos que $d = e = 0$, $a = \frac{1}{2} f_{xx}$, $b = f_{xy}$, $c = \frac{1}{2} f_{yy}$.

15. Si tal ejemplo existe, puede representarse localmente en la forma $z = f(x, y)$, con $f(0, 0) = 0$, $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. Las condiciones que hemos impuesto implican que $f_{xx}^2 + f_{yy}^2 \neq 0$ en $(0, 0)$ y que $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ si y sólo si $(x, y) = (0, 0)$.

Si ponemos, para tantejar, $f(x, y) = \alpha(x) + \beta(y) + xy$, donde $\alpha(x)$ es una función que sólo depende de x y $\beta(y)$ es una función que sólo depende de y , comprobamos que $\alpha_{xx} = \cos x$ y $\beta_{yy} = \cos y$ satisfacen las condiciones precedentes. Se deduce entonces que

$$f(x, y) = \cos x + \cos y + xy - 2$$

es un ejemplo del tipo buscado.

16. Considérese una esfera que contenga a la superficie y hagamos decrecer su radio de manera continua. Estúdiense las secciones normales en el punto (o en los puntos) donde la esfera interseca a la superficie por primera vez.

19. Demuéstrese que el hiperbolóide contiene dos familias uniparamétricas de rectas que son, necesariamente, líneas asintóticas. Para hallar tales familias de rectas, escríbase la ecuación del hiperbolóide en la forma

$$(x + z)(x - z) = (1 - y)(1 + y)$$

y demuéstrese que, para cada $k \neq 0$, la recta $x + z = k(1 + y)$, $x - z = (1/k)(1 - y)$ pertenece a la superficie.

20. Obsérvese que, para alguna función f , $(x/a^2, y/b^2, z/c^2) = fN$ y que un punto umbílico satisface la ecuación

$$\left\langle \frac{d(fN)}{dt} \wedge \frac{d\alpha}{dt}, N \right\rangle = 0$$

para cada curva $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ sobre la superficie. Supóngase que $z \neq 0$, multiplíquese esta ecuación por z/c^2 y elimínense z y dz/dt (obsérvese que la ecuación se satisface para cada vector tangente a la superficie). Se calculan entonces cuatro puntos umbílicos, a saber,

$$y = 0, \quad x^2 = a^2 \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \quad z^2 = c^2 \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$$

La hipótesis $z = 0$ no da lugar a otros puntos umbílicos.

21. a. Sea $dN(v_1) = av_1 + bv_2$, $dN(v_2) = cv_1 + dv_2$. Un cálculo directo da lugar a

$$\langle d(fN)(v_1) \wedge d(fN)(v_2), fN \rangle = f^3 \det(dN).$$

b. Demuéstrese que $fN = (x/a^2, y/b^2, z/c^2) = W$, y obsérvese que

$$d(fN)(v_i) = \left(\frac{\alpha_i}{a^2}, \frac{\beta_i}{b^2}, \frac{\gamma_i}{c^2} \right), \quad \text{donde } v_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i),$$

$i = 1, 2$. Eligiendo v_i de forma que $v_1 \wedge v_2 = N$, conclúyase que

$$\langle d(fN)(v_1) \wedge d(fN)(v_2), fN \rangle = \frac{\langle W, X \rangle}{a^2 b^2 c^2} \frac{1}{f},$$

donde $X = (x, y, z)$, y, por tanto, $\langle W, X \rangle = 1$.

24. d. Elíjase un sistema de coordenadas en R^3 de forma que el origen O se halle en $p \in S$, que el plano xy coincida con el plano tangente $T_p(S)$ y que la dirección positiva del eje z coincida con la orientación de S en p . Elíjanse además los ejes x y y en $T_p(S)$ a lo largo de las direcciones principales en p . Si V es suficientemente pequeño, éste se puede representar como la gráfica de una función diferenciable

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subset R^2,$$

donde D es un disco abierto de \mathbb{R}^2 y

$$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = f_{xy}(0, 0) = 0, \quad f_{xx}(0, 0) = k_1, \quad f_{yy}(0, 0) = k_2.$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $k_1 \geq 0$ y que $k_2 \geq 0$ en D , y queremos demostrar que $f(x, y) \geq 0$ en D .

Admitamos que, para algún $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$, $f(\bar{x}, \bar{y}) < 0$. Considérese la función $h_0(t) = f(t\bar{x}, t\bar{y})$, $0 \leq t \leq 1$. Como $h'_0(0) = 0$, existe un t_1 , $0 \leq t_1 \leq 1$, tal que $h''_0(t_1) < 0$. Sea $p_1 = (t_1\bar{x}, t_1\bar{y}, f(t_1\bar{x}, t_1\bar{y})) \in S$, y considérese la función altura h_1 de V con respecto al plano tangente $T_{p_1}(S)$ en p_1 . La restricción de dicha función altura a la curva $\alpha(t) = (t\bar{x}, t\bar{y}, f(t\bar{x}, t\bar{y}))$ es $h_1(t) = \langle \alpha(t) - p_1, N_1 \rangle$, donde N_1 es el vector unitario normal en p_1 . Por tanto, $h''_1(t) = \langle \alpha''(t), N_1 \rangle$ y, en $t = t_1$,

$$h''_1(t_1) = \langle (0, 0, h''_0(t_1)), (-f_x(p_1), -f_y(p_1), 1) \rangle = h''_0(t_1) < 0.$$

Pero, salvo un factor positivo, $h''_1(t_1) = \langle \alpha''(t_1), N_1 \rangle$ es la curvatura normal en p con respecto a la dirección de $\alpha'(t_1)$. Esto constituye una contradicción.

SECCION 3.4

10. c. Redúzcase el problema a demostrar que si λ es un número irracional y si m y n recorren los enteros, entonces el conjunto $\{\lambda m + n\}$ es denso en la recta real. Para demostrar la última afirmación, basta con demostrar que el conjunto $\{\lambda m + n\}$ contiene elementos positivos arbitrariamente pequeños. Al suponer lo contrario, demuéstrese que el ínfimo del subconjunto de los elementos positivos de $\{\lambda m + n\}$ también pertenece a dicho subconjunto y, partiendo de este hecho, dedúzcase una contradicción.
11. Considérese el conjunto $\{\alpha_i: I_i \rightarrow U\}$ de trayectorias de w , con $\alpha_i(0) = p$ y defínase $I = \bigcup_i I_i$. Puede construirse entonces, en virtud a la unicidad, la trayectoria maximal $\alpha: I \rightarrow U$ tomando $\alpha(t) = \alpha_i(t)$, donde $t \in I_i$.
12. Para cada $q \in S$, existe un entorno U de q y un intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$, $\epsilon > 0$, tal que la trayectoria $\alpha(t)$, con $\alpha(0) = q$, está definida en $(-\epsilon, \epsilon)$. Por compacidad, es posible recubrir S mediante un número finito de tales entornos. Sea $\epsilon_0 = \min\{\epsilon\}$ de los ϵ correspondientes. Si $\alpha(t)$ está definida para $t < t_0$ y no está definida en t_0 , tómese $t_1 \in (0, t_0)$, con $|t_1 - t_0| < \epsilon_0/2$. Considérese la trayectoria $\beta(t)$ de w , con $\beta(0) = \alpha(t_1)$, y obténgase entonces una contradicción.

SECCION 4.2

3. La condición necesaria es inmediata. Para probar la suficiencia, sea $p \in S$ y $v \in T_p(S)$, $v \neq 0$. Considérese una curva $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ tal que $\alpha'(0) = v$. Afirmamos que $|d\varphi_p(\alpha'(0))| = |\alpha'(0)|$. En caso contrario, $|d\varphi_p(\alpha'(0))| > |\alpha'(0)|$, por ejemplo, y, en un entorno J de 0 en $(-\epsilon, \epsilon)$ tenemos que $|d\varphi_{\alpha(t)}(\alpha'(t))| > |\alpha'(t)|$. Esto implica que la longitud de $\varphi \circ \alpha(J)$ es mayor que la longitud de $\alpha(J)$, que es una contradicción.
6. Parametrícese α por la longitud de arco s , en un entorno de t_0 . Constrúyase una curva en el plano con curvatura $k = k(s)$ y aplíquese el ejercicio 5.
8. Sean $0 = (0, 0, 0)$, $G(0) = p_0$ y $G(p) - p_0 = F(p)$. Entonces $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación tal que $F(0) = 0$ y $|F(p)| = |G(p) - G(0)| = |p|$. Esto implica que F preserva el producto interior de \mathbb{R}^3 . Por tanto, aplica la base

$$\{(1, 0, 0) = f_1, (0, 1, 0) = f_2, (0, 0, 1) = f_3\}$$

sobre una base ortonormal y si $p = \sum a_i f_i$, $i = 1, 2, 3$ entonces $F(p) = \sum a_i F(f_i)$. Por tanto, F es lineal.

11. a. Como F preserva las distancias y la longitud de arco se puede expresar como el límite de longitudes de polígonos inscritos, la restricción $F|S$ preserva la longitud de arco de una curva contenida en S .
- c. Considérese la isometría que aplica una banda abierta del plano, sobre un cilindro menos una generatriz.
12. La restricción de $F(x, y, z) = (x, -y, -z)$ a C es una isometría de C (cf. el ejercicio 11), cuyos puntos fijos son $(1, 0, 0)$ y $(-1, 0, 0)$.
17. Las loxodromas forman un ángulo constante con los meridianos de una esfera. A través de la proyección Mercator (véase el ejercicio 16) los meridianos se transforman en rectas paralelas del plano. Como la proyección Mercator es conforme, las loxodromas también se transforman en rectas. Así, la suma de los ángulos interiores del triángulo en la esfera es la misma que la suma de los ángulos interiores de un triángulo rectángulo plano.

SECCION 4.4

6. Utilícese el hecho de que el valor absoluto de la curvatura geodésica es el valor absoluto de la proyección de la curvatura habitual sobre el plano tangente.
8. Utilíicense el ejercicio 1, parte b, y la prop. 4 de la sec. 3.2.
9. Utilícese el hecho de que los meridianos son geodésicas y que el transporte paralelo preserva los ángulos.
10. Aplíquese la relación $k_g^2 + k_n^2 = k^2$ junto con el teorema de Meusnier al cilindro de proyección.
12. Parametrícese un entorno de $p \in S$ de forma que las dos familias de geodésicas sean las curvas coordenadas (corolario 1, sec. 3.4). Demuéstrese que ello implique que $F = 0$, $E_v = 0 = G_u$. Efectúese un cambio de parámetros para obtener que $\tilde{F} = 0$, $\tilde{E} = \tilde{G} = 1$.
13. Fíjense en $T_p(S)$ dos vectores ortogonales unitarios $v(p)$ y $w(p)$, y trasládense a cada punto de V mediante transporte paralelo. Se obtienen, con este procedimiento, dos campos vectoriales, ortogonales y unitarios. Parametrícese V de forma que las direcciones de estos campos sean tangentes a las curvas coordenadas; dichas curvas serán entonces geodésicas. Aplíquese el ejercicio 12.
16. Parametrícese un entorno de $p \in S$ de forma que las líneas de curvatura sean las curvas coordenadas y de forma que $v = \text{const.}$ sean las curvas asintóticas. Se deduce entonces que $e_v = 0$, y de las ecuaciones de Mainardi-Codazzi concluimos que $E_v = 0$. Esto implica que la curvatura geodésica de $v = \text{const.}$ es cero. Con respecto al ejemplo, considérese el paralelo superior de un toro.
18. Utilícese la relación de Clairaut (cf. el ejemplo 5).
19. Substitúyanse en la ec. (4) los símbolos de Christoffel por sus valores en función de E , F y G y diferénciese la expresión de la primera forma fundamental:

$$1 = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2.$$

20. Utilícese la relación de Clairaut.

SECCION 4.5

4. b. Obsérvese que la aplicación $x = \bar{x}$, $y = (\bar{y})^5$, $z = (\bar{z})^3$ define un homeomorfismo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ sobre la superficie $(\bar{x})^2 + (\bar{y})^{10} + (\bar{z})^6 = 1$.
6. a. Restrínjase v a la curva $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$. El ángulo que forma $v(t)$ con el eje x es t . Por tanto, $2\pi I = 2\pi$; luego $I = 1$.
- d. Restringiendo v a la curva $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$, obtenemos $v(t) = (\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t, -2 \cos t \operatorname{sen} t) = (\cos 2t, -\operatorname{sen} 2t)$. Por tanto $I = -2$.

SECCION 4.6

8. Sea (ϱ, θ) un sistema de coordenadas polares geodésicas tal que su polo sea uno de los vértices de Δ y tal que $\theta = 0$ se corresponda con uno de los lados de Δ . Sean $\theta = \theta_0$ y $\varrho = h(\theta)$ los otros dos lados. Como el vértice que corresponde al polo no pertenece al entorno coordinado, considérese un pequeño círculo de radio ϵ en torno al polo. Entonces

$$\iint_{\Delta} K\sqrt{G} d\varrho d\theta = \int_0^{\theta_0} d\theta \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{h(\theta)}^{h(\theta_0)} K\sqrt{G} d\varrho \right).$$

Observando que $K\sqrt{G} = -(\sqrt{G})_{\varrho\varrho}$ y que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\sqrt{G})_{\varrho\varrho} = 1$, tenemos que el límite encerrado entre paréntesis viene expresado por

$$1 - \frac{\partial(\sqrt{G})}{\partial \varrho}(h(\theta), \theta).$$

Utilizando el ejercicio 7, obtenemos

$$\iint_{\Delta} K\sqrt{G} d\varrho d\theta = \int_0^{\theta_0} d\theta - \int_0^{\theta_0} d\varphi = \alpha_3 - (\pi - \alpha_2 - \alpha_1) = \sum_i \alpha_i - \pi.$$

12. c. Para $K = 0$, el problema es trivial. Para $K > 0$, utilícese la parte b. Para $K < 0$, considérese un entorno coordinado V de la seudosfera (cf. el ejercicio 6, parte b, sec. 3.3) parametrizado mediante coordenadas polares (ϱ, θ) ; es decir, $E = 1$, $F = 0$, $G = \operatorname{senh}^2 \varrho$. Calcúlense las geodésicas de V ; es conveniente utilizar el cambio de coordenadas $\operatorname{tgh} \varrho = 1/w$, $\varrho \neq 0$, $\theta = \theta$, de forma que

$$E = \frac{1}{(w^2 - 1)^2}, \quad G = \frac{1}{w^2 - 1}, \quad F = 0,$$

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{2w}{w^2 - 1}, \quad \Gamma_{12}^1 = -\frac{w}{w^2 - 1}, \quad \Gamma_{22}^1 = w,$$

siendo cero los otros símbolos de Christoffel. Se deduce entonces que las geodésicas no radiales satisfacen la ecuación $(d^2w/d\theta^2) + w = 0$, donde $w = w(\theta)$. Por tanto, $w = A \cos \theta + B \operatorname{sen} \theta$, es decir

$$A \operatorname{tgh} \varrho \cos \theta + B \operatorname{tgh} \varrho \operatorname{sen} \theta = 1.$$

Por esta razón, la aplicación de V en R^2 definida por

$$\xi = \operatorname{tgh} \varrho \cos \theta, \quad \eta = \operatorname{tgh} \varrho \operatorname{sen} \theta,$$

$(\xi, \eta) \in R^2$, es una aplicación geodésica.

13. b. Defínase $x = \varphi^{-1}$: $\varphi(U) \subset R^2 \rightarrow S$. Sea $v = v(u)$ una geodésica en U . Como φ es una aplicación geodésica y las geodésicas de R^2 son rectas, entonces $d^2v/du^2 \equiv 0$. Trasladando esta condición a la parte a se obtiene el resultado deseado.
- c. La ecuación (a) se obtiene de la ec. (5), en la sec. 4.3, utilizando la parte b. De la ec. (5a) en la sec. 4.3 junto con la parte b tenemos que

$$KF = (\Gamma_{12}^1)_u - 2(\Gamma_{12}^2)_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1.$$

Intercambiando u y v en la expresión precedente y restando los resultados obtenemos que $(\Gamma_{12}^1)_u = (\Gamma_{12}^2)_v$, de donde se deduce la ec. (b). Finalmente, las ecs. (c) y (d) se obtienen, respectivamente, a partir de las ecs. (a) y (b), al intercambiar u y v .

- d. Diferenciando la ec. (a) con respecto a v , la ec. (b) con respecto a u y restando los resultados obtenemos que

$$EK_v - FK_u = -K(E_v - F_u) + K(-F\Gamma_{12}^2 + E\Gamma_{12}^1).$$

Teniendo en cuenta los valores de Γ_{ij}^k , la expresión precedente da lugar a

$$EK_v - FK_u = -K(E_v - F_u) + K(E_v - F_u) = 0.$$

De las ecs. (c) y (d) obtenemos, de manera análoga, que $FK_v - GK_u = 0$, de donde, $K_v = K_u = 0$.

SECCION 4.7

1. Considerérese en $T_{\alpha(0)}(S)$ una base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ y efectúese el transporte paralelo de e_1 y de e_2 , a lo largo de α , obteniendo, por este procedimiento, una base ortonormal $\{e_1(t), e_2(t)\}$ en cada $T_{\alpha(t)}(S)$. Definamos $w(\alpha(t)) = w_1(t)e_1(t) + w_2(t)e_2(t)$. Entonces $D_y w = w'_1(0)e_1 + w'_2(0)e_2$ y el segundo miembro es la velocidad de la curva $w_1(t)e_1 + w_2(t)e_2$ en $T_p(S)$, para $t = 0$.
2. b. Demuéstrese que si $(t_1, t_2) \subset I$ es pequeño y carece de «puntos angulosos de α », entonces el campo vectorial tangente de $\alpha((t_1, t_2))$ puede prolongarse a un campo vectorial y , definido en un entorno de $\alpha((t_1, t_2))$. Así, al restringir y y w a α , la propiedad 3 se convierte en

$$\frac{d}{dt} \langle v(t), w(t) \rangle = \left\langle \frac{Dv}{dt}, w \right\rangle + \left\langle v, \frac{Dw}{dt} \right\rangle,$$

la cual implica que el transporte paralelo en $\alpha(t_2, t_2)$ es una isometría. Esto puede extenderse, en virtud a la compacidad, a la totalidad de I . Recíprocamente, supóngase que el transporte paralelo es una isometría. Sea α la trayectoria de y que pasa por un punto $p \in S$. Restrínjase v y w a α . Considerérese una base ortonormal $\{e_1(t), e_2(t)\}$ como en la solución del ejercicio 1 y póngase $v(t) = v_1 e_1 + v_2 e_2$, $w(t) = w_1 e_1 + w_2 e_2$. Entonces la propiedad 3 se convierte en la «regla del producto»:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i v_i w_i \right) = \sum_i \frac{dv_i}{dt} w_i + \sum_i v_i \frac{dw_i}{dt}, \quad i = 1, 2.$$

- c. Admítase que D es conocida y elijase una parametrización ortogonal $\mathbf{x}(u, v)$. Sean $y = y_1\mathbf{x}_u + y_2\mathbf{x}_v$, $w = w_1\mathbf{x}_u + w_2\mathbf{x}_v$. Se deduce, a partir de las propiedades 1, 2 y 3 que $D_y w$ queda determinada cuando se conocen $D_{y_u}\mathbf{x}_u$, $D_{y_v}\mathbf{x}_v$ y $D_{w_u}\mathbf{x}_v$. Pongamos $D_{y_u}\mathbf{x}_u = A_{11}^1\mathbf{x}_u + A_{11}^2\mathbf{x}_v$, $D_{y_v}\mathbf{x}_v = A_{12}^1\mathbf{x}_u + A_{12}^2\mathbf{x}_v$ y $D_{w_u}\mathbf{x}_v = A_{22}^1\mathbf{x}_u + A_{22}^2\mathbf{x}_v$. Se deduce de la propiedad 3 que los A_{ij}^k satisfacen las mismas ecuaciones que los Γ_{ij}^k (cf. la ec. (2), sec. 4.3). Así, $A_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k$, lo que demuestra que $D_y w$ coincide con el operador «efectuar la derivada usual y proyectar después sobre el plano tangente».

3. a. Obsérvese que

$$d\mathbf{x}_{(0,t)}(1,0) = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}\right)_{s=0} = \frac{d}{ds}\gamma(s, \alpha(t), v(t)) \Big|_{s=0} = v(t),$$

$$d\mathbf{x}_{(0,t)}(0,1) = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right)_{s=0} = \alpha'(t).$$

- b. Utilícese el hecho de que \mathbf{x} es un difeomorfismo local para recubrir el conjunto compacto I mediante una familia de intervalos abiertos sobre los que \mathbf{x} es inyectiva. Utilícese el teorema de Heine-Borel y el número de Lebesgue del recubrimiento (sec. 2.7) para globalizar el resultado.

- c. Calcúlese, para comprobar que $F = 0$ (cf. la propiedad 4 del ejercicio 2), la expresión siguiente

$$\frac{d}{ds}F = \frac{d}{ds}\left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}, \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \right\rangle,$$

donde se ha tenido en cuenta que el campo vectorial $\partial \mathbf{x}/\partial s$ es paralelo a lo largo de $t = \text{constante}$. Como

$$0 = \frac{d}{dt}\left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \right\rangle = 2\left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \right\rangle,$$

F no depende de s . Al ser $F(0, t) = 0$, tenemos que $F = 0$.

- d. Esto es consecuencia del hecho de que $F = 0$.

4. a. Utilícese la desigualdad de Schwarz,

$$\left(\int_a^b fg dt\right)^2 \leq \int_a^b f^2 dt \int_a^b g^2 dt,$$

con $f \equiv 1$ y $g = |d\alpha/dt|$.

5. a. Observando que $E(t) = \int_0^t \{(\partial u/\partial v)^2 + G(\gamma(v, t), v)\} dv$, obtenemos (escribimos, por conveniencia, $\gamma(v, t) = u(v, t)$)

$$E'(t) = \int_0^t \left\{ 2 \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial t} + \frac{\partial G}{\partial u} u' \right\} dv.$$

Como $\partial u/\partial v = 0$ y $\partial G/\partial u = 0$ para $t = 0$, ya hemos demostrado la primera parte. Además,

$$E''(t) = \int_0^t \left\{ 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial t} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial^3 u}{\partial v \partial^2 t} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} (u')^2 + \frac{\partial G}{\partial u} u'' \right\} dv.$$

Luego, utilizando que $G_{uu} = -2K\sqrt{G}$ y observando que $\sqrt{G} = 1$ para $t = 0$, obtenemos

$$E''(0) = 2 \int_0^t \left\{ \left(\frac{d\eta}{dv} \right)^2 - K\eta^2 \right\} dv.$$

6. b. Elíjanse $\epsilon > 0$ y las coordenadas en $R^3 \supset S$ de forma que $\varphi(\rho, \epsilon) = q$. Considérense los puntos $(\rho, \epsilon) = r_0$, $(\rho, \epsilon + 2\pi \operatorname{sen} \beta) = r_1, \dots, (\rho, \epsilon + 2\pi k \operatorname{sen} \beta) = r_k$. Tomando ϵ lo suficientemente pequeño comprobamos que los segmentos rectilíneos $\overline{r_0 r_1}, \dots, \overline{r_0 r_k}$ están contenidos en V si $2\pi k \operatorname{sen} \beta < \pi$ (fig. 4-49). Como φ es una isometría local, las imágenes de estos segmentos serán geodésicas que unen q con q , las cuales tienen claramente un punto anguloso en q .
- c. Debe demostrarse que cada geodésica $\gamma: [0, l] \rightarrow S$ con $\gamma(0) = \gamma(l) = q$ es la imagen mediante φ de uno de los segmentos rectilíneos $\overline{r_0 r_1}, \dots, \overline{r_0 r_k}$ a los que nos hemos referido en la parte b. La restricción $\varphi|U = \varphi$ es una isometría en algún entorno $U \subset V$ de r_0 . Por tanto, $\varphi^{-1} \circ \gamma$ es un segmento de una semirrecta L que empieza en r_0 . Como $\varphi(L)$ es una geodésica que coincide con $\gamma([0, l])$ en un intervalo abierto, ésta coincide con γ en donde γ esté definida. Al ser $\gamma(l) = q$, L pasa por uno de los puntos r_i , $i = 1, \dots, k$, por ejemplo r_j , y así, γ es la imagen de $\overline{r_0 r_j}$.

SECCION 5.2

3. a. Utilícese la relación $\varphi'' = -K\varphi$ para obtener $(\varphi'^2 + K\varphi^2)' = K'\varphi^2$. Intégrense los dos miembros de la última relación y utilícese las condiciones de contorno del enunciado.

SECCION 5.3

5. Admítase que cada sucesión de Cauchy en d es convergente y sea $\gamma(s)$ una geodésica parametrizada por la longitud de arco. Supóngase, por contradicción, que $\gamma(s)$ está definida para $s < s_0$ pero no para $s = s_0$. Elijase una sucesión $\{s_n\} \rightarrow s_0$. Así, dado $\epsilon > 0$, existe un n_0 tal que si $n, m > n_0$, $|s_n - s_m| < \epsilon$. Por lo tanto,

$$d(\gamma(s_m), \gamma(s_n)) \leq |s_n - s_m| < \epsilon$$

y $\{\gamma(s_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en d . Sea $\{\gamma(s_n)\} \rightarrow p_0 \in S$ y sea W un entorno de p_0 como el que proporciona la prop. 1 de la sec. 4.7. Si m, n son lo suficientemente grandes, resulta claro que la geodésica «pequeña» que une $\gamma(s_m)$ con $\gamma(s_n)$ coincide con γ . Por tanto, γ se puede prolongar hasta p_0 , lo que constituye una contradicción.

Recíprocamente, admitamos que la superficie S es completa y sea $\{p_n\}$ una sucesión en S que es de Cauchy con respecto a la distancia d . Como d es mayor o igual que la distancia euclídea \bar{d} , $\{p_n\}$ es una sucesión de Cauchy con respecto a \bar{d} . Así, $\{p_n\}$ converge a $p_0 \in R^3$. Supóngase, por contradicción, que $p_0 \notin S$. Como una sucesión de Cauchy está acotada, dado $\epsilon > 0$ existe un n_0 tal que, para $n > n_0$, la distancia $d(p_{n_0}, p_n) > \epsilon$. En virtud al teorema de Hopf-Rinow, existe una geodésica mínima γ_n , de longitud $< \epsilon$, que une p_{n_0} con p_n . Cuando $n \rightarrow \infty$, γ_n tiende a una geodésica mínima γ de longitud $\leq \epsilon$. Paramétrícese γ por la longitud de arco s . Como $p_0 \notin S$ entonces γ no está definida para $s = \epsilon$. Esto contradice la completitud de S .

6. Sea $\{p_n\}$ una sucesión de puntos de S tal que $d(p, p_n) \rightarrow \infty$. Como S es completa, existe una geodésica mínima $\gamma_n(s)$ (parametrizada por la longitud de arco) que une p con p_n siendo

$\gamma_n(0) = p$. Los vectores unitarios $\gamma_n'(0)$ admiten un punto límite v en la esfera unidad de $T_p(S)$ (que es compacta). Sea $\gamma(s) = \exp_p s v$, $s \geq 0$. Entonces $\gamma(s)$ es un rayo que parte del punto p . Para comprobar esta afirmación nótese que, para un s_0 fijado y n suficientemente grande, $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(s_0) = \gamma(s_0)$. Esto es consecuencia de la dependencia continua de las geodésicas con respecto a las condiciones iniciales. Además, como d es continua,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(p, \gamma_n(s_0)) = d(p, \gamma(s_0)).$$

Pero si n es suficientemente grande, $d(p, \gamma_n(s_0)) = s_0$. Así, $d(p, \gamma(s_0)) = s_0$ y entonces γ es un rayo.

8. Primero demuéstrese que si d y \bar{d} representan, respectivamente, las distancias de S y de \bar{S} , entonces $d(p, q) \geq \bar{d}(\varphi(p), \varphi(q))$ para todo $p, q \in S$. Sea ahora $\{p_n\}$ una sucesión de puntos en S que es de Cauchy en la distancia d . En virtud a la observación inicial, $\{\varphi(p_n)\}$ es una sucesión de Cauchy con respecto a \bar{d} . Como \bar{S} es completa entonces $\{\varphi(p_n)\} \rightarrow \varphi(p_0)$. Debido a que φ^{-1} es continua, $\{p_n\} \rightarrow p_0$. Así, cada sucesión de Cauchy con respecto a la distancia d es convergente; luego S es completa (cf. el ejercicio 5).

9. φ es inyectiva: Por contradicción, supóngase que $p_1 \neq p_2 \in S_1$ son tales que $\varphi(p_1) = \varphi(p_2) = q$. Como S_1 es completa, existe una geodésica mínima γ que p_1 con p_2 . Debido a que φ es una isometría local, entonces $\varphi \circ \gamma$ es una geodésica que une q consigo mismo y que tiene la misma longitud que γ . Entonces, cualquier punto en $\varphi \circ \gamma$ distinto de q se puede unir con q mediante dos geodésicas distintas, lo que constituye una contradicción.

φ es sobreyectiva: Al ser φ un difeomorfismo local, $\varphi(S_1) \subset S_2$ es un conjunto abierto en S_2 . Demostraremos que $\varphi(S_1)$ es también un subconjunto cerrado de S_2 ; como S_2 es conexa, ello implicará que $\varphi(S_1) = S_2$. Si $\varphi(S_1)$ no es un cerrado de S_2 existe entonces una sucesión $\{\varphi(p_n)\}$, $p_n \in S_1$, tal que $\{\varphi(p_n)\} \rightarrow p_0 \notin \varphi(S_1)$. Así, $\{\varphi(p_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\varphi(S_1)$ que no es convergente. Como φ es una isometría local inyectiva, $\{p_n\}$ es una sucesión de Cauchy en S_1 que no es convergente; lo que contradice la completitud de S_1 .

10. a. Al ser

$$\frac{d}{dt}(h \circ \varphi(t)) = \frac{d}{dt} \langle \varphi(t), v \rangle = \langle \varphi'(t), v \rangle = \langle \text{grad } h, v \rangle$$

y

$$\frac{d}{dt}(h \circ \varphi(t)) = dh(\varphi'(t)) = dh(\text{grad } h) = \langle \text{grad } h, \text{grad } h \rangle,$$

igualando entonces los segundos miembros de las relaciones precedentes, concluimos que $|\text{grad } h| \leq 1$.

b. Supóngase que $\varphi(t)$ está definida para $t < t_0$ pero no para $t = t_0$. Existe entonces una sucesión $\{t_n\} \rightarrow t_0$ tal que la sucesión $\{\varphi(t_n)\}$ no es convergente. Podemos utilizar la parte a para obtener que, si m y n son lo suficientemente grandes, entonces

$$d(\varphi(t_m), \varphi(t_n)) \leq \int_{t_n}^{t_m} |\text{grad } h(\varphi(t))| dt \leq |t_m - t_n|,$$

donde d es la distancia intrínseca de S . Esto implica que $\{\varphi(t_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en S , con respecto a la distancia intrínseca d , que no es convergente; lo que contradice la completitud de S .

SECCION 5.4

2. Supóngase que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \inf_{x^2 + y^2 \geq r} K(x, y) = 2c > 0.$$

Existe $R > 0$ tal que si $(x, y) \notin D$, donde

$$D = \{(x, y) \in R^2; x^2 + y^2 < R^2\},$$

entonces $K(x, y) \geq c$. Considerando entonces puntos fuera de D podemos obtener discos arbitrariamente grandes donde $K(x, y) \geq c > 0$. Se comprueba sin dificultad que esto contradice el teorema de Bonnet.

SECCION 5.5

3. b. Supóngase que $a > b$ e introduzcase el valor $s = b$ en la relación (*). Utilícese las condiciones iniciales junto con las relaciones $v'(b) < 0$, $u(b) > 0$, $uv \geq 0$ en $[0, b]$ para obtener una contradicción.

c. A partir de $[uv' - vu']_0^a \geq 0$ se obtiene que $v'/v \geq u'/u$; es decir, $(\log v)' \geq (\log u)'$. Sea ahora $0 < s_0 \leq s \leq a$ e intégrese la última desigualdad entre s_0 y s para obtener

$$\log v(s) - \log v(s_0) \geq \log u(s) - \log u(s_0);$$

es decir, $v(s)/u(s) \geq v(s_0)/u(s_0)$. Obsérvese a continuación que

$$\lim_{s_0 \rightarrow 0} \frac{v(s_0)}{u(s_0)} = \lim_{s_0 \rightarrow 0} \frac{v'(s_0)}{u'(s_0)} = 1.$$

Por tanto, $v(s) \geq u(s)$ para todo $s \in [0, a]$.

6. Supóngase, por contradicción, que $u(s) \neq 0$ para todo $s \in (0, s_0]$. Utilizando la ec. (*) del ejercicio (3), parte b (con $\bar{K} = L$ y $s = s_0$), obtenemos

$$\int_0^{s_0} (K - L)uv ds + u(s_0)v'(s_0) - u(0)v'(0) = 0.$$

Supóngase, por ejemplo que $U(s) > 0$ y que $v(s) < 0$ en $(0, s_0]$. Entonces $v'(0) < 0$ y $v'(s_0) > 0$. En consecuencia, el primer término de la suma precedente es ≥ 0 y los dos términos restantes son > 0 , lo que constituye una contradicción. Los otros casos que faltan se tratan de una manera similar.

8. Sea \mathcal{B} el espacio vectorial de los campos de Jacobi J a lo largo de γ , con la propiedad de que $J(l) = 0$. El espacio vectorial \mathcal{B} es bidimensional. Como $\gamma(l)$ no es conjugado a $\gamma(0)$, la aplicación lineal $\theta: \mathcal{B} \rightarrow T_{\gamma(0)}(S)$ definida por $\theta(J) = J(0)$ es inyectiva, luego, en virtud a consideraciones de dimensionalidad, también es un isomorfismo. Existe entonces un $J \in \mathcal{B}$ con $J(l) = w_0$. Por la misma razón, existe un campo de Jacobi \bar{J} a lo largo de γ tal que $\bar{J}(0) = 0$ y $\bar{J}(l) = w_1$. El campo de Jacobi que deseábamos hallar viene entonces dado por $J + \bar{J}$.

SECCION 5.6

10. Sea $\gamma: [0, l] \rightarrow S$ una geodésica cerrada y simple en S y sea $v(0) \in T_{\gamma(0)}(S)$ tal que $|v(0)| = 1$, $\langle v(0), \gamma'(0) \rangle = 0$. Efectúese el transporte paralelo $v(s)$ de $v(0)$ a lo largo de γ . Como S es orientable, $v(l) = v(0)$ y v define un campo vectorial diferenciable a lo largo de γ . Nótese que v es ortogonal a γ y que $Dv/ds = 0$, $s \in [0, l]$. Defínase la variación (de extremos libres) $h: [0, l] \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ mediante

$$h(s, t) = \exp_{\gamma(s)} tv(s).$$

Compruébese que las curvas de la variación $h_t(s) = h(s, t)$ son cerradas para t pequeño. Extiéndase al presente caso la fórmula de la variación segunda de la longitud de arco, demostrando que

$$L''_v(0) = - \int_0^l K ds < 0.$$

Por tanto, la longitud de $\gamma(s)$ es mayor que la de las curvas $h_t(s)$ para t pequeño, por ejemplo, $|t| < \delta \leq \epsilon$. Transformando el parámetro t en t/δ obtendremos la homotopía deseada.

SECCION 5.7

9. Utilícese el concepto de torsión geodésica τ_g de una curva sobre una superficie (cf. el ejercicio 19, sec. 3.2). Como

$$\frac{d\theta}{ds} = \tau - \tau_g,$$

en donde $\cos \theta = \langle N, n \rangle$ y la curva es regular y cerrada, obtendremos entonces que

$$\int_0^l \tau ds - \int_0^l \tau_g ds = 2\pi n,$$

donde n es un entero. Pero sobre la esfera todas las curvas son líneas de curvatura. Al estar caracterizadas las líneas de curvatura por el hecho de tener torsión geodésica nula (cf. el ejercicio 19, sec. 3.2), tenemos que

$$\int_0^l \tau ds = 2\pi n.$$

Se comprueba sin dificultad que el entero n es cero, pues cualquier curva cerrada sobre la esfera es homotópica a cero.

SECCION 5.10

7. Solamente tenemos que demostrar que las geodésicas $\gamma(s)$, parametrizadas por la longitud de arco, que se aproximan a la frontera de R^2_+ , están definidas para todos los valores del

parámetro s . Si lo contrario fuera cierto, una geodésica de ese tipo tendría una longitud finita l desde, por ejemplo, un punto p_0 . Sin embargo, para los círculos de R^2_+ que sean geodésicas tenemos que

$$l = \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\theta_0 > \pi/2}^{\epsilon} \frac{d\theta}{\sin \theta} \right| \geq \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\theta_0 > \pi/2}^{\epsilon} \frac{\cos \theta d\theta}{\sin \theta} \right| = \infty,$$

y lo mismo le ocurre a las rectas verticales de R^2_+ .

10. c. Para demostrar que la métrica es completa, nótese que, en primer lugar, dicha métrica domina a la métrica euclídea de R^2 . Por tanto, si una sucesión es de Cauchy en la métrica dada, también es una sucesión de Cauchy en la métrica euclídea. Al ser completa la métrica euclídea, dicha sucesión converge. Se deduce entonces que la métrica dada es completa (cf. el ejercicio 1, sec. 5.3).

INDICE ALFABETICO

- Abierto, conjunto, 126
- Aceleración, vector, 345
- Acumulación, punto de, 454
- Angulo:
 - entre dos superficies, 97
 - externo, 269
 - interior, 276
- Antipodal, aplicación, 90
- Anudada, curva, 401
- Aplicación:
 - antipodal, 90 (ejer. 1)
 - conforme, 230
 - lineal, 233 (ejer. 13)
 - continua, 128
 - diferenciable, 84, 134, 423
 - que preserva las distancias, 232 (ejer. 8)
 - exponencial, 285
 - Gauss, de, 145
 - geodésica, 297 (ejer. 12)
 - lineal autoadjunta, 217
 - recubridora, 371
- Arco, 459
 - regular, 269
- Arco, longitud de, 20
 - en coordenadas polares, 38 (ejer. 11)
 - reparametrización por la, 35
- Area, 108
 - definición geométrica de, 123
 - de una gráfica, 109 (ejer. 5)
 - difeomorfismos que preservan el, 234 (ejer. 18), 234 (ejer. 20),
 - orientada, 29 (ejer. 171),
de una superficie de revolución, 110 (ejer. 11)
- Aristas de una triangulación, 274
- Asintótica, curva, 154
- Autovalor, 219
- Autovector, 219
- Beltrami-Enneper, teorema de, 158 (ejer. 13)
- Beltrami, teorema de, sobre aplicaciones geodésicas, 297 (ejer. 13)
- Bertrand, curva de, 39
- Bertrand, representante de, 39
- Binormal, recta, 33
- Binormal, vector, 32
- Bola, 126
- Bolzano-Weierstrass, teorema de, 120, 132, 466
- Bonnet, teorema de, 352, 421
- Braumühl, A., 363
- Buck, R. C., 55, 107, 139
- Cadena, regla de la, 101 (ejer. 24), 134, 137
- Calabi, E., 354
- Campo de direcciones, 183
 - curvas integrales de un, 183
 - ecuación diferencial de un, 182
- Campo de vectores normales unitarios, 113
- Caras de una triangulación, 273
- Catenaria, 37 (ejer. 8)
- Catenoide, 225
 - curvas integrales de un, 173
 - isometría local del, con un helicoide, 215 (ejer. 14), 227
 - como superficie mínima, 205
- Cauchy-Crofton, fórmula de, 54

Cauchy, sucesión de, 458
en la distancia intrínseca, 337 (ejer. 5)
Cerrada, curva plana, 43
Cerrado, conjunto, 455
Chern, S. S., 320
y Lashof, R., 386
Christoffel, símbolos de, 236
en coordenadas normales, 296 (ejer. 4)
para una superficie de revolución, 236
Cicloide, 21
Cilindro, 77 (ejer. 1)
como superficie reglada, 192
isometrías de un, 233 (ejer. 12)
isometría local de un, con un plano, 223
primera forma fundamental de un, 103
secciones normales de un, 150
Cisóide de Diocles, 21 (ejer. 3)
Clairaut, relación de, 260
Clausura de un conjunto, 455
Comparación, teoremas de, 369 (ejer. 3)
Compatibilidad, ecuaciones de, 239
Completa, superficie, 326
Conexas, componentes, 465
Conexidad, 459
local, 461
por arcos, 459
simple, 381
Conexión, 306 (ejer. 2), 439
Conforme, aplicación, 230
lineal, 233, (ejer. 13)
local, 230, 233 (ejer. 14)
entre planos, 233 (ejer. 15)
de esferas en planos, 234 (ejer. 16)
Conjugadas, direcciones, 156
Conjugadas, superficies mínimas, 215 (ejer. 14)
Conjugado, lugar, 363
Conjugados, puntos, 362
criterio de Kneser para, 370 (ejer. 7)
Conjunto:
abierto, 126
acotado, 120
cerrado, 455
compacto, 120, 462
conexo, 459
conexo por arcos, 459
convexo, 60 (ejer. 9)
localmente simplemente conexo, 382
simplemente conexo, 381
Cono, 75, 77 (ejer. 3), 328
geodésicas de un, 308 (ejer. 6)
isometría local de un, con un plano, 227
como superficie reglada, 193
Conoide, 213 (ejer. 5)
Contacto de curvas, 176 (ejer. 9)
Contacto de curvas y superficies, 176 (ejer. 10)
Contacto de superficies, 101 (ejer. 27), 175 (ejer. 8)

Continua, aplicación, 128
uniformemente, 464
Convergencia, 453
con respecto a la distancia intrínseca, 337
(ejer. 4)
Convexa, curva, 51
Convexa, envoltura, 61 (ejer. 11)
Convexidad y curvatura, 53, 179 (ejer. 24), 386, 396
Convexo, conjunto, 60 (ejer. 9)
Convexo, entorno, 304
existencia de, 306
Coordenadas, curvas, 65
Coordenado, entorno, 65
Coordenado, sistema, 64
Corte, lugar de, 417
Courant, 123 R.
Covariante, derivada, 241
a lo largo de una curva, 243
expresión de la, 242
en términos del transporte paralelo 306 (ejer. 1)
valor algebraico de la, 251
propiedades de la, 306 (ejer. 2)
Crítico, punto, 70, 99 (ejer. 13)
no degenerado, 178 (ejer. 23)
Crítico, valor, 70
Cruz, producto, 26
Curva:
anudada, 401
asintótica, 154
ecuación diferencial de las, 166
maximal, 408
cerrada, 43
continua, 391
regular a trozos, 247
simple, 43
de clase C^k , 24 (ejer. 7)
de clase C^1 a trozos, 48
de nivel, 111, (ejer. 14)
coordenada, 65
divergente, 337 (ejer. 7)
parametrizada, 17
diferenciable a trozos, 330
regular a trozos, 269
regular, 20
simple, 24 (ejer. 7)
Curvatura:
de una curva plana, 34
de una curva en el espacio, 36
con respecto a parámetros arbitrarios, 38
(ejer. 12)
gaussiana, 152, 161
de gráficas de aplicaciones diferenciables, 168
interpretación geométrica de la, 172
en términos del transporte paralelo, 272, 273
geodésica, 251, 255
líneas de, 151

ecuación diferencial de las, 166
media, 152, 162, 168
vector, 204
normal, 148
principal, 150
radio de, 33
seccional, 439
Darboux, triedro de, 264, (ejer. 14)
Desarrollable, superficie, 198, 212 (ejer. 3)
clasificación de, 198
como envolvente de una familia de planos tangentes, 198
plano tangente a una, 213 (ejer. 6)
Difeomorfismo, 85
que preserva las áreas, 234 (ejer. 18, 19)
local, 96
que invierte la orientación, 171
que preserva la orientación, 170
Diferenciable, aplicación, 85, 134, 423
Diferenciable, estructura, 435, 436
Diferenciable, función, 83, 91 (ejer. 9), 92
(ejer. 13), 133
Diferenciable, variedad, 435
Diferencial de una aplicación, 96, 135, 427
Dirección:
asintótica, 154
principal, 150
Direcciones:
campo de, 183
conjugadas, 156
Directriz de una superficie reglada, 192
Distancia sobre una superficie, 330
Distribución, parámetro de, 196
do Carmo, M. y E. Lima, 386
Dominio, 107
Dupin, indicatriz de, 154
interpretación geométrica de la, 169
Dupin, teorema de, sobre sistemas triplemente ortogonales, 159
Efimov, N. V., 449
Elevación:
de un arco, 376
de una homotopía, 379
propiedad de, de arcos, 380
Elipsoide, 73, 90, (ejer. 4), 100 (ejer. 20)
curvatura gaussiana de un, 177 (ejer. 21)
lugar conjugado de un, 266
parametrización de un, 78 (ejer. 12)
primera forma fundamental de un, 109 (ejer. 1)
puntos umbílicos de un, 177 (ejer. 20)
Energía de una curva, 307 (ejer. 4)
Enneper, superficie de, 173 (ejer. 5)
como superficie mínima, 208
Entorno, 127, 131

convexo, 304
coordenado, 65
distinguido, 371
normal, 286
Envolvente de una familia de planos tangentes, 198, 213 (ejer. 8), 214 (ejer. 10), 248, 308 (ejer. 7)
Esfera, 67
aplicación de Gauss de una, 144
campo de Jacobi sobre una, 362
geodésicas de una, 249
isometrías de una, 233 (ejer. 11), 267 (ejer. 23)
lugar conjugado sobre una, 362-363
orientabilidad de una, 113
parametrizaciones de una, 67-70, 78 (ejer. 16)
parámetros isotermos sobre una, 234 (ejer. 4)
primera forma fundamental de una, 105
proyección estereográfica, 78 (ejer. 16)
como recubrimiento doble del plano proyectivo, 440 (ejer. 2)
rigidez una, 319
Esférica, imagen, 157 (ejer. 9), 281
Estereográfica, proyección, 78 (ejer. 16), 232 (ejer. 4)
Estricción, línea de, 195
Euclides, quinto axioma de, 281, 428, 429
Euler, fórmula de, 151
Euler-Lagrange, ecuación de, 365
Euler-Poincaré, característica de, 274
Evoluta, 36 (ejer. 7)
Exponencial, aplicación, 285
diferenciabilidad de la, 286
Fary-Milnor, teorema de, 401
Fenchel, teorema de, 398
Fermi, coordenadas de, 307 (ejer. 3)
Focales, superficies, 213 (ejer. 9)
Folium de Descartes, 22 (ejer. 5)
Forma índice de una geodésica, 419
Frenet, fórmula de, 33
Frontera de un conjunto, 456
Función:
analítica, 210
altura, 83
armónica, 204
componente, 128
continua, 127
de Morse, 178 (ejer. 23)
diferenciable, 83, 133
Gauss-Bonnet, teorema (global) de, 276
aplicación del, 278
Gauss-Bonnet, teorema (local) de, 271
Gauss, aplicación de, 145
Gauss, fórmula de, 238
en coordenadas ortogonales, 240 (ejer. 1)
Gauss, lema de, 289

Gauss, teorema egregium, 238
 Gaussiana, curvatura, 152, 161
 de gráficas de aplicaciones diferenciables, 168
 interpretación geométrica de la, 172
 en términos del transporte paralelo, 272, 273
 Generatriz, 192
 Género de una superficie, 275
 Geodésica:
 aplicación, 297 (ejer. 12)
 círculos geodésicos, 288
 coordenadas geodésicas, 307
 curvatura gaussiana en, 289
 geodésicas en, 296 (ejer. 7)
 primera forma fundamental en, 288
 curvatura, 251, 256
 flujo geodésico, 437
 paralelas, 307 (ejer. 3)
 torsión, 158 (ejer. 19), 264 (ejer. 14)
 Geodésicas, 307
 de un cilindro, 249, 250
 de un cono, 308 (ejer. 6)
 ecuaciones diferenciales de las, 257
 de una esfera, 249
 existencia de, 258
 mínimas, 304, 333
 de un parabolóide de revolución, 261-263
 propiedad de minimizar la longitud de arco de las, 293
 radiales, 288
 del semiplano de Poincaré, 428, 429, 441 (ejer. 8)
 como soluciones de un problema variacional, 345
 de superficies de revolución, 258-261, 356 (ejer. 5)
 Geppert, H., 405
 Gluck, H., 54
 Gradiente, el, sobre superficies, 111 (ejer. 14)
 Grado de una aplicación, 389
 Gráfica de una función diferenciable, 70
 área de una, 109 (ejer. 5)
 curvatura gaussiana de una, 168
 curvatura media de una, 168
 plano tangente a la, 98 (ejer. 3)
 segunda forma fundamental de una, 168
 Green, L., 363
 Gromov, M. L. y V. A. Rokhlin, 450
 Grupo, el, de las isometrías, 232 (ejer. 9)
 Hadamard, teorema de, sobre superficies complejas con $K \leq 0$, 386, 389 (ejer. 9)
 Hadamard, teorema de, sobre ovaloides, 386
 Hartman, P. y L. Nirenberg, 406
 Heine-Borel, teorema de, 120, 132
 Hélice, 17, 36 (ejer. 1)
 generalizada, 39 (ejer. 17)
 Helicóide, 104
 curvas asintóticas de un, 173 (ejer. 2)

generalizado, 110 (ejer. 13), 190 (ejer. 6)
 isometría local de un, con un catenoide, 215 (ejer. 14), 227
 línea de estricción de un, 212 (ejer. 1)
 líneas de curvatura de un, 173 (ejer. 2)
 parámetro de distribución de un, 212 (ejer. 1)
 plano tangente a un, 91 (ejer. 9)
 como superficie mínima, 207
 como la única superficie mínima reglada, 207
 Hessiano, 169, 178, (ejer. 22)
 Hilbert, D., 320, 442
 Hilbert, teorema de, 442
 parametrización de un, 78 (ejer. 13), 109 (ejer. 1)
 primera forma fundamental de un, 109 (ejer. 1)
 Hipérboleoide plano, 428
 Hipérboleoide de una hoja, 98 (ejer. 2), fig. 3-34
 aplicación de Gauss de un, 157 (ejer. 8)
 como superficie reglada, 193, 212 (ejer. 2)
 Hipóboleoide de dos hojas, 73
 Holmgren, E., 442
 Holonomía, grupo de, 298 (ejer. 14)
 Homeomorfismo, 131
 Homotopía de arcos, 378
 elevación de una, 379
 libre, 389 (ejer. 10)
 Homotópicos, arcos, 378
 Hopf, H. y W. Rinow, 327, 354
 Hopf-Rinow, teorema de, 334
 Hopf, teorema de, sobre superficies con $H = \text{const.}$, 232 (ejer. 4)
 Hurewicz, W., 182
 Índice de un campo vectorial, 282
 Índice, forma, de una geodésica, 419
 Infimo (c.i.m.), 457
 Inmersión, 430
 isométrica, 430
 Integral, curva, 183
 Intermedio, teorema del valor, 132
 Intrínseca, geometría, 221, 239, 241
 Inversa, teorema de la función, 138
 Inversión, 129
 Isometría, 222
 lineal, 232 (ejer. 7)
 local, 223
 en coordenadas locales, 224, 232 (ejer. 2)
 de superficies tangentes en planos 232 (ejer. 2)
 Isoperimétrica, desigualdad, 46
 para círculos geodésicos, 296 (ejer. 9)
 Isotermas, coordenadas, 204, 231
 para superficies mínimas, 216 (ejer. 13 [b])
 Jacobi, campo de, 357
 sobre una esfera, 362
 Jacobi, ecuación de, 357

Jacobi, teorema de, sobre la indicatriz normal, 280
 Jacobiana, matriz, 136
 Jacobiano, determinante, 136
 Jacobi, teorema de, sobre puntos conjugados, 416
 Joachimstahl, teorema de, 158 (ejer. 15)
 Jordan, teorema de la curva de, 392
 Kazdan, J. y F. Warner, 442
 Klein, botella de, 424
 no orientabilidad de la, 433
 sumersión de la, en R^4 , 433, 434
 Klingenberg, lema de, 388 (ejer. 8)
 Kneser, criterio de, para puntos conjugados, 370 (ejer. 7)
 Lashof, R. y S. S. Chern, 386
 Lebesgue, número de, de una familia, 121
 Levi-Civita, conexión de, 439
 Lima, E., y M. do Carmo, 386
 Límite, punto, 454
 Límite de una sucesión, 453
 Línea de curvatura, 151
 Liouville:
 fórmula de, 256
 superficies de, 266
 Local, forma canónica, de una curva, 40
 Localmente convexa, 179 (ejer. 24), 386
 estrictamente, 179 (ejer. 24)
 Logarítmica, espiral, 23
 Loxodromas de una esfera, 106, 234
 Mainardi-Codazzi, ecuaciones, 239
 Mangoldt, 363 H.,
 Massey, W., 406
 Media, curvatura, 152, 162, 168
 Media, vector curvatura, 204
 Mercator, proyección, 234 (ejer. 16), 234 (ejer. 20)
 Meridiano, 86
 Meusnier, teorema de, 148
 Milnor, T. Klotz, 450
 Minding, teorema de, 289
 Mínimas, superficies, 200
 conjugadas, 215 (ejer. 14)
 aplicación de Gauss de las, 215 (ejer. 13)
 parámetros isotermos sobre las, 205, 215 (ejer. 13 [b])
 regladas, 207
 de revolución, 205
 como soluciones de un problema variacional, 202
 Möbius, banda de, 118
 curvatura gaussiana de la, 177 (ejer. 18)
 infinita, 440 (ejer. 2)
 no orientabilidad de la, 116, 117-118 (Ejers. 1, 7)
 parametrización de la, 114
 Mono, silla de, 165, 176 (ejer. 11)
 Morse, teorema del índice de, 419

Nirenberg, L. y P. Hartman, 406
 Norma de un vector, 18
 Normal:
 coordenadas normales, 287
 curvatura, 148
 indicatriz, 280
 plano, a una curva, 33
 principal, 33
 recta, 97
 sección, 148
 vector, a una curva, 31
 vector, a una superficie, 97
 Número de vueltas, 391
 Olinde Rodríguez, teorema de, 151
 Orientación:
 cambio de, para curvas, 20
 para curvas, 118 (ejer. 6)
 de un espacio vectorial, 26
 positiva de R^n , 26
 para superficies, 112, 145
 Orientada:
 área, en R^2 , 29 (ejer. 10)
 curva plana cerrada simple y, positivamente, 27
 frontera de una región simple, positivamente, 4
 superficie, 112
 Orientado, volumen en R^3 , 29 (ejer. 11)
 Ortogonal:
 parametrización, 105, 187
 proyección, 90 (ejer. 129),
 transformación, 36 (ejer. 6), 232 (ejer. 7)
 Ortoǵonales:
 campos de direcciones, 185, 189, (ejer. 4), 19 (ejer. 5)
 familias de curvas, 111 (ejer. 15), 185, 19 (ejer. 6)
 Osculador:
 círculo, a una curva, 42, (ejer. 2 [b])
 parabolóide, a una superficie, 175 (ejer. 8 [c])
 plano, a una curva, 31, 42, 42 (ejer. 1), 4 (ejer. 2)
 Osculatrix, esfera, a una curva, 176 (ejer. 10 [c])
 Osserman, teorema de, 211, 338 (ejer. 11)
 Ovaloide, 323, 386
 Parabolóide hiperbólico (silla de montar), (ejer. 11), fig. 3-7
 aplicación de Gauss de un, 146
 curvas asintóticas de un, 188
 parametrización de un, 78 (ejer. 11)
 primera forma fundamental de un, 109 (ejer. 11)
 como superficie reglada, 197
 Parabolóide de revolución, 90 (ejer. 3)
 aplicación de Gauss de un, 147
 geodésicas de un, 261
 puntos conjugados sobre un, 369 (ejer. 2)

Paralelas:
curvas, 60 (ejer. 6)
geodésicas, 213 (ejer. 6 [d])
superficies, 215 (ejer. 11)

Paralelo:
campo vectorial, 244
transporte, 246

construcción geométrica del, 248
existencia y unicidad del, 246, 256

Paralelos de una superficie de revolución, 86

Parámetro:
de una curva, 17
de distribución, 196

Parámetros:
cambio de, para curvas, 92 (ejer. 15)
cambio de, para superficies, 81
isotermos, 231

existencia de, 231
existencia de, para superficies mínimas, 215
(ejer. 13 [b])

Parametrización de una superficie, 64

mediante curvas asintóticas, 188

mediante líneas de curvatura, 189

ortogonal, 105

existencia de una, 187

Partición, 24 (ejer. 8), 122

Películas de jabón, 202

Plano:

hiperbólico, 428

normal, 33

osculador, 31, 42, 42, (ejer. 1), 42 (ejer. 2)

proyectivo real, 424

rectificante, 33

tangente, 94

Plano, toro, 432

Planos, familia uniparamétrica de, tangentes, 214
(ejer. 10), 308 (ejer. 7)

Plateau, problema de, 203

Poincaré, semiplano de, 428

completitud del, 441 (ejer. 7)

geodésicas del, 429, 441, (ejer. 8)

Poincaré, teorema de, sobre los índices de un campo vectorial, 284

Polo, 389 (ejer. 11)

Primera forma fundamental, 102

Principal:

curvatura, 150

dirección, 150

normal, 33

Producto:

cruz, 26

interior, 18

punto, 18

vectorial, 26

Proyección, 90 (ejer. 2), 129

estereográfica, 78 (ejer. 16), 232 (ejer. 4)

mercator, 234 (ejer. 16), 234 (ejer. 20)
Proyectivo, 424 plano,
inmersión del, en R^4 , 434
no orientabilidad del, 433
recubrimiento orientable doble del 440 (ejer. 3)

Punto:
aislado, 458
de acumulación, 454
central, 195
conjuguado, 362
crítico, 70, 99 (ejer. 13), 364
elíptico, 152
hiperbólico, 152
límite, 458
parabólico, 454
umbílico, 153

Radio de curvatura, 33
Rayo, 337 (ejer. 6)
Rectificante, plano, 33
envolvente de una familia de, 309 (ejer. 7 [b])
Recubridor, espacio, 371
número de hojas de un, 377
orientable doble, 440 (ejercs. 3, 4)

Región, 107
acotada, 107
regular, 273
simple, 270
Reglada, superficie, 192
curvatura gaussiana de una, 196
directriz de una, 192
generatrices de una, 192
línea de estricción de una, 195
no cilíndrica, 194
parámetro de distribución, 196
puntos centrales de una, 195

Regular:
curva, 79 (ejer. 17), 86
curva parametrizada, 20
valor, 70, 101, (ejer. 28)
imagen inversa de un, 71, 101 (ejer. 28)

Reparametrización por la longitud de arco, 35

Riemanniana:

estructura, 439

métrica, 438

sobre superficies abstractas, 427

variedad, 438

derivada covariante sobre una, 439

Rigidez de la esfera, 319

Rígido, movimiento, 36 (ejer. 6), 54

Rinow, W., y H. Hopf, 327, 354

Rokhlin, V. A., y M. L. Gromov, 450

Rotación, 85, 96

Rotación, eje de, 86

Rotación, índice de, de una curva, 50, 392

Samelson, 122 H.,
Santaló, L., 59
Scherck, superficie mínima de, 210
Schneider, R., 66
Schur, teorema de, para curvas planas, 405 (ejer. 8)
Segre, B., 406

Segunda forma fundamental, 148
Semejanza, 191 (ejer. 9), 233 (ejer. 13), 297
(ejer. 12)
Seudoesfera, 174 (ejer. 6)

Simetría, 85, 129
Simple, región, 270
Singular, punto:
de un campo vectorial, 281

de una curva parametrizada, 20
de una superficie parametrizada, 88

Stoker, J. J., 386, 406
Stoker, observación de, sobre el teorema de Efimov, 450 (ejer. 1)
Stoker, teorema de, para curvas planas, 405
(ejer. 8)

Sturm, teorema de oscilación de, 370 (ejer. 6)

Suave, función, 16

Sumersión, 432
de la botella de Klein en R^4 , 433
del plano proyectivo en R^4 , 434
del toro en R^4 , 432

Superficie:
abstracta, 422
completa, 326
conexa, 73
desarrollable, 198, 212 (ejer. 3)
focal, 212 (ejer. 9)
geométrica, 427
de Liouville, 266
mínima, 200
parametrizada, 88
regular, 88

reglada (véase Reglada, superficie)

regular, 64
de revolución (véase Superficies de revolución)
rígida, 317
tangente, 88

Superficies de revolución, 192
ampliadas, 88
aplicaciones conformes de las, 234 (ejer. 20)
aplicaciones que preservan las áreas de las, 234
(ejer. 20)

área de las, 110 (ejer. 11)
curvatura gaussiana de las, 196
curvatura media de las, 167
curvaturas principales de las, 167
de curvatura constante, 174 (ejer. 7),
geodésicas de las, 258-261
isometrías de las, 233 (ejer. 10)
mínimas, 205-206

parametrización de las, 86
símbolos de Christoffel de las, 236
Supremo (c.s.m.), 457
Synge, lema de, 389 (ejer. 10)

Tangente:
aplicación, a una curva, o 392
débil, 24 (ejer. 7)
fibrado, 436
fuerte, 24 (ejer. 7)
indicatriz, 36 (ejer. 3), 49
plano, 94, 98 (ejers. 1, 3)
de superficies abstractas, 426
recta, a una curva, 19
superficie, 88
vector, a una curva, 16
vector, a una superficie abstracta, 425
vector, a una superficie regular, 93

Tangentes, teorema de rotación de, 270, 395
Tchebysherf, red de, 109 (ejers. 3, 4), 241 (ejer. 5),
443

Teorema fundamental de la teoría local de curvas,
33, 310

Teorema fundamental de la teoría local de superficies, 240, 312

Tissot, teorema de, 191 (ejer. 9)

Topológicas, propiedades, de las superficies,
273-275

Toro, 73
abstracto, 431
área de un, 108

curvatura gaussiana de un, 163
ecuación implícita de un, 74

parametrización de un, 76

plano, 432
como recubrimiento orientable doble de la botella de Klein, 440 (ejer. 3)

Torsión:
geodésica, 158 (ejer. 19), 264 (ejer. 14)
con respecto a la parametrización arbitraria, 38
(ejer. 12)

Total, curvatura, 398

Tranctriz, 21 (ejer. 4)

Transversal, intersección, 100 (ejer. 17)

Traslación, 36 (ejer. 6)

Traza de una curva parametrizada, 16

Traza de una superficie parametrizada, 88

Triangulación, 273

Triángulo sobre una superficie, 273
geodésico, 267, 280
movilidad libre de, pequeños, 296 (ejer. 8)

Triedro:
de Darboux, 264 (ejer. 14)
de Frenet, 33

Tubular, entorno, 118, 399

Tubulares, superficies, 99 (ejer. 10), 398

- Umbílico, punto, 153
Uniformemente continuas, aplicaciones, 153
Unitario normal, vector, 97
- Variación:
 primera de la longitud de arco, 345
 segunda de la energía para geodésicas simples, 307 (ejer. 5)
 segunda de la longitud de arco, 351
- Variaciones:
 cálculo de, 355-356 (ejers. 4, 5)
 de curvas, 339
 de geodésicas simples, 308
 ortogonales, 346
 propias, 339
 regulares a trozos, 417
 de superficies, 200
- Vector:
 aceleración, 345
 longitud de un, 18
 norma de un, 18
 tangente (*véase* Tangente, vector)
 velocidad, 16
- Vectorial, campo, a lo largo de una aplicación, 343
Vectorial, campo, a lo largo de una curva, 243
 derivada covariante de un, 243
 paralelo, 244
 variacional, 340
- Vectorial, campo, sobre un plano, 180
 flujo local de un, 182
 integral primera local de un, 183
 trayectorias de un, 180
- Vectorial, campo, sobre una superficie, 184
 derivada covariante de un, 241
 derivada de una función con respecto a un, 191
 (ejer. 7)
 punto singular de un, 281
 trayectoria maximal de un, 191 (ejer. 11)
- Vértice de una curva plana, 51
- Vértices:
 de una curva regular a trozos, 269
 teorema de los cuatro, 50
 de una triangulación, 273
- Warner, F., y J. Kazdan, 442
Weingarten, ecuaciones de, 161