

1. Marco Teórico

Esfuerzo, deformación y módulos de elasticidad.

El cuerpo rígido es un modelo idealizado útil, pero en muchos casos el estiramiento, el aplastamiento y las torsiones de los cuerpos reales cuando se les aplican fuerzas son demasiado importantes para despreciarse. La Figura 1 muestra tres ejemplos. Nos interesa estudiar la relación entre las fuerzas y los cambios de forma en cada caso.

Para cada clase de alteración de la forma, introduciremos una cantidad llamada **esfuerzo** que caracteriza la intensidad de las fuerzas que causan el cambio de forma, generalmente con base en la âfuerza por unidad de área. Otra cantidad, **deformación**, describe el cambio de forma resultante. Si el esfuerzo y la deformación son pequeños, es común que sean directamente proporcionales, y llamamos a la constante de proporcionalidad **módulo de elasticidad**. Si tiramos con mayor fuerza de algo, se estirará más; si lo aplastamos con mayor fuerza, se comprimirá más. El patón general puede formularse así:

$$\frac{\text{Esfuerzo}}{\text{Deformación}} = \text{Módulo de elasticidad.} \quad (\text{Ley de Hooke}) \rightarrow (1)$$

La proporcionalidad del esfuerzo y la deformación (en ciertas condiciones) se denomina **ley de Hooke**, en honor a Robert Hooke (1635-1703), un contemporáneo de Newton. Usamos una forma de la ley de Hooke anteriormente con: el alargamiento de un resorte ideal es proporcional a la fuerza que lo estira. Recordemos que ésta no es realmente una ley general, sino un resultado experimental válido sólo dentro de un intervalo limitado.



Figura 1: Tres tipos de esfuerzos: a) Los cables de un puente sometidos a esfuerzo de tensión, estirados por fuerzas que actúan en sus extremos. b) Buzo sometido a esfuerzo de volumen, aplastado por todos lados por fuerzas debidas a la presión del agua. c) Listón sometido a esfuerzo de corte, siendo deformado y finalmente cortado por fuerzas ejercidas por las tijeras.

Esfuerzo y deformación de tensión y compresión.

El comportamiento elástico más fácil de entender es el estiramiento de una barra, una varilla o un alambre, cuando se tira de sus extremos (Figura 1.a). La Figura 2 muestra un objeto que inicialmente tiene un área de sección transversal uniforme A y una longitud l_0 . Ahora aplicamos fuerzas de igual magnitud F pero direcciones opuestas a los extremos (esto garantiza que el objeto no tenderá a moverse a la izquierda ni a la derecha).

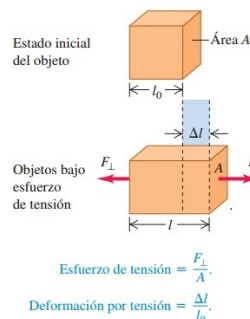


Figura 2: Un objeto en tensión. La fuerza total que actúa sobre el objeto es cero, pero el objeto se deforma. El esfuerzo de tensión (la razón de la fuerza al área de sección transversal) produce una deformación por tensión (el alargamiento dividido entre la longitud inicial). Por claridad, se ha exagerado el alargamiento .

Decimos que el objeto está en tensión. Ya hablamos mucho de la tensión en cuerdas y cordones; se trata del mismo concepto.

El subíndice \perp nos recuerda que las fuerzas actúan en dirección perpendicular a la sección transversal. Definimos el esfuerzo de tensión en la sección transversal como el cociente de la fuerza F_{\perp} y el área de la sección transversal A :

$$\frac{F}{A} = \text{Esfuerzo de tensión.} \rightarrow (2)$$

Ésta es una cantidad escalar porque F_{\perp} es la magnitud de la fuerza. La unidad del esfuerzo en el pascal (abreviado Pa y así llamado en honor del científico y filósofo francés del siglo XVII Blaise Pascal). La ecuación anterior muestra que un pascal es igual a 1 newton sobre metro cuadrado (N/m^2):

$$\text{Pascal} = 1\text{pa} = N/m^2.$$

En el sistema británico, la unidad lógica del esfuerzo sería la libra por pie cuadrado; no obstante, es más común utilizar la libra por pulgada cuadrada (lb/in^2 o psi). Los factores de conversión son:

$$1 \text{ psi} = 6895 \text{ Pa} \text{ y } 1\text{Pa} = 1,450 \times 10^{-4} \text{ psi}.$$

Las unidades de esfuerzo son las mismas que las de presión, que veremos a menudo en capítulos posteriores. La presión del aire en los neumáticos de un automóvil es de alrededor de $3 \times 10^{-4} \text{ Pa} = 300 \text{ kPa}$, y normalmente se exige que los cables de acero soporten esfuerzos de tensión del orden de 10^8 Pa . El objeto de la Figura 2 se estira hasta una longitud $l = l_0 + \Delta l$ cuando se le somete a tensión. El alargamiento Δl no se da sólo en los extremos; todas las partes de la barra se estiran en la misma proporción. **La deformación por tensión** del objeto es igual al cambio fraccionario de longitud, que es el cociente del alargamiento Δl entre la longitud original l_0 :

$$\text{Deformación por tensión} = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}. \rightarrow (3)$$

La deformación por tensión es el estiramiento por unidad de longitud; es el cociente de dos longitudes medidas siempre en las mismas unidades, de modo que es un número puro (adimensional) sin unidades. Experimentalmente, se observa que si el esfuerzo de tensión es lo bastante pequeño, el esfuerzo y la deformación son proporcionales, como en la ecuación (3). El módulo de elasticidad correspondiente se denomina **módulo de Young** y se denota con Y :

$$Y = \frac{\text{Esfuerzo de tensión}}{\text{Deformación por tensión}} = \frac{F/A}{\Delta l/l_0} = \frac{F l_0}{A \Delta l} \quad (\text{Módulo de Young}) \rightarrow (4)$$

Dado que la deformación es un número puro, las unidades del módulo de Young son las de esfuerzo: fuerza por unidad de área. En la Tabla 1 se dan valores representativos. (Esta Tabla también presenta valores de otros dos módulos de elasticidad que veremos más adelante). Un material con un valor grande de Y no se estirá mucho; se requiere un esfuerzo grande para una deformación dada. Por ejemplo, el valor de Y para el acero colado es mucho mayor que para el hule. Si las fuerzas en los extremos de una barra empujan en vez de tirar (Figura 3),

la barra está en **compresión**, y el esfuerzo es un **esfuerzo de compresión**. La **deformación por compresión** de un objeto en compresión se define del mismo modo que la deformación por tensión, pero Δl tiene la dirección opuesta. La ley de Hooke y la ecuación para el módulo de Young (4) son válidas también para la compresión si el esfuerzo no es muy grande.

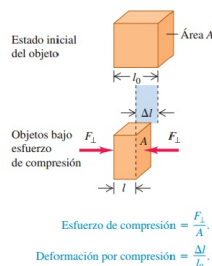


Figura 3: Objeto en compresión. El esfuerzo de compresión y la deformación por compresión se definen igual que en el caso de la tensión (véase la Figura 2), excepto que ahora Δl denota la distancia que el objeto se contrae.

El módulo de Young de muchos materiales tiene el mismo valor para esfuerzos de tensión y de compresión; los materiales compuestos como el concreto u hormigón son una excepción. Pueden soportar esfuerzo de compresión pero fallan bajo un esfuerzo de tensión comparable. Originalmente en las antiguas civilizaciones como Babilonia, Asiria y Roma, la piedra fue el principal material utilizado en sus estructuras, de modo que éstas tuvieron que diseñarse para evitar esfuerzo de tensión. Esto explica el porque tales culturas utilizaron mucho los arcos en entradas y puentes, donde el peso del material que yace encima comprime la piedra y el arco juntos, y no los pone bajo tensión.

Tabla 11.1 Módulos de elasticidad aproximados

Material	Módulo de Young, Y (Pa)	Módulo de volumen, B (Pa)	Módulo de corte, S (Pa)
Aluminio	7.0×10^{10}	7.5×10^{10}	2.5×10^{10}
Latón	9.0×10^{10}	6.0×10^{10}	3.5×10^{10}
Cobre	11×10^{10}	14×10^{10}	4.4×10^{10}
Cristal corona (óptico)	6.0×10^{10}	5.0×10^{10}	2.5×10^{10}
Hierro	21×10^{10}	16×10^{10}	7.7×10^{10}
Plomo	1.6×10^{10}	4.1×10^{10}	0.6×10^{10}
Níquel	21×10^{10}	17×10^{10}	7.8×10^{10}
Acero	20×10^{10}	16×10^{10}	7.5×10^{10}

Tabla 1: Módulos de elasticidad aproximados.

En muchas situaciones, los cuerpos experimentan esfuerzos de tensión y compresión al mismo tiempo. Por ejemplo, una viga horizontal apoyada en sus extremos se pandea por su propio peso. En consecuencia, la parte superior de la viga está en compresión, y la inferior, en tensión (Figura 4.a). Para reducir al mínimo el esfuerzo y por ende la deformación por flexión, la partes superior e inferior de la viga deben tener un área transversal grande. En la línea central de la viga no hay compresión ni tensión, así que esta parte puede tener una sección pequeña; esto ayuda a reducir al mínimo el peso de la viga y también a reducir el esfuerzo. El resultado es la viga en I tan utilizada en la construcción de edificios (Figura 4.b).

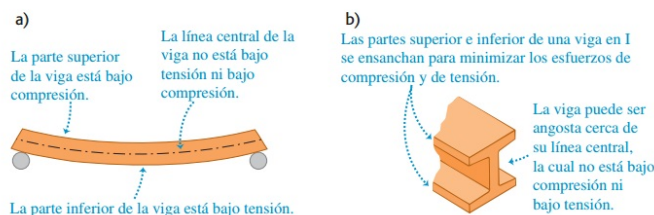


Figura 4: a) Una viga apoyada en sus extremos está sometida tanto a compresión como a tensión. b) La forma de la sección transversal de una viga en I reduce al mínimo tanto el esfuerzo como el peso.

Esfuerzo y deformación de volumen.

Cuando un buzo se sumerge a cierta profundidad en el mar, el agua ejerce una presión casi uniforme en toda su superficie y reduce un poco su volumen (Figura 1.b). Esta situación es diferente de los esfuerzos y deformaciones por tensión y compresión que hemos visto. El esfuerzo en este caso es una presión uniforme por todos lados, y la deformación resultante es un cambio de volumen. Usamos los términos esfuerzo de volumen y deformación por volumen para describir estas cantidades. Si un objeto se sumerge en un fluido (líquido o gas) en reposo, el fluido ejerce una fuerza sobre todas las partes de la superficie del objeto; esta fuerza es perpendicular a la superficie. (Si tratáramos de hacer que el fluido ejerciera una fuerza paralela a la superficie, el fluido se deslizaría a un lado para contrarrestar la acción.) La fuerza $F \perp$ por unidad de área que el fluido ejerce sobre la superficie de un objeto sumergido es la presión p en el fluido:

$$P = \frac{F}{A} \quad (\text{Presión en un fluido}) \rightarrow (5)$$

La presión dentro de un fluido aumenta con la profundidad. La presión del aire, por ejemplo, es aproximadamente 21 por ciento mayor en el nivel del mar que en Denver (altitud: 1.6 km o 1.0 mi). No obstante, si un objeto sumergido es relativamente pequeño, podremos ignorar las diferencias de presión debidas a la profundidad en el cuerpo del objeto, en lo que respecta al cálculo del esfuerzo de volumen. Por lo tanto, supondremos que la presión tiene el mismo valor para todos los puntos en la superficie del objeto sumergido. La presión tiene las mismas unidades que el esfuerzo; las unidades de uso común incluyen 1 Pa ($= N/m^2$) y 1 lb/in² (1 psi).

También se usa comúnmente la atmósfera, que se abrevia atm. Una atmósfera es la presión media aproximada de la atmósfera terrestre al nivel del mar:

$$1 \text{ Atmósfera} = 1 \text{ atm} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa} = 14,7 \text{ lb/in}^2$$

CUIDADO Presión contra fuerza a diferencia de la fuerza, la presión no tiene una dirección intrínseca: la presión en la superficie de un objeto sumergido es la misma, sea cual fuere la orientación de la superficie. Por lo tanto, la presión es una cantidad escalar, no vectorial. La presión desempeña el papel del esfuerzo en un cambio de volumen. La deformación correspondiente es el cambio fraccional en el volumen (Figura 6), es decir, el cociente del cambio de volumen ΔV entre el volumen original V_0 :

$$\text{Deformación por volumen} = \frac{\Delta V}{V_0} \rightarrow (6)$$

La deformación por volumen es el cambio de volumen por unidad de volumen. Al igual que la deformación por tensión o compresión, es un número puro, sin unidades. Si se obedece la ley de Hooke, un aumento en la presión (esfuerzo de volumen) produce una deformación por volumen (cambio fraccional de volumen) proporcional.

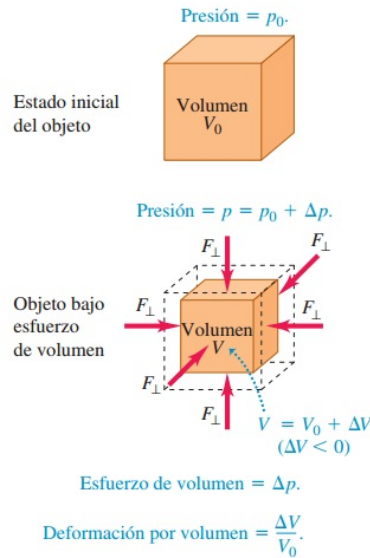


Figura 6: Objeto sometido a un esfuerzo de volumen. Sin el esfuerzo, el cubo ocupa un volumen V_0 ; cuando se aplica el esfuerzo, el cubo tiene un volumen menor, V . Por claridad, se exageró el cambio de volumen ΔV .

El módulo de elasticidad correspondiente (relación esfuerzo-deformación) se denomina **módulo de volumen** y se denota con B . Si la presión sobre un cuerpo cambia en una cantidad pequeña ΔP , de P_0 a $P_0 + \Delta P$ y la deformación por volumen resultante es $\frac{\Delta V}{V_0}$, la ley de Hooke adopta la forma:

$$B = \frac{\text{Esfuerzo de volumen}}{\text{Deformación por volumen}} = -\frac{\Delta p}{\Delta V V_0} \quad (\text{Módulo de Volumen}) \rightarrow (7)$$

Incluimos un signo de menos en esta ecuación porque un aumento de presión siempre causa una reducción de volumen. En otras palabras, si ΔP es positivo, ΔV es negativo. El módulo de volumen B en sí es una cantidad positiva. En el caso de cambios de presión pequeños en un s

Un objeto sometido a un esfuerzo de volumen. Sin el esfuerzo, el cubo ocupa un volumen V_0 ; cuando se aplica el esfuerzo, el cubo tiene un volumen menor, V . Por claridad, se exagero el cambio de volumen ΔV Esfuerzo, deformación y módulos de elasticidad. El recíproco del módulo de volumen se denomina compresibilidad y se denota con k . Por la ecuación (7):

$$k = \frac{1}{B} = -\frac{\Delta V/V_0}{\Delta P} = -\frac{1}{V_0} \frac{\Delta V}{\Delta P} \quad (\text{Compresibilidad}) \rightarrow (8)$$

La compresibilidad es la disminución fraccionaria de volumen, $-\Delta V/V_0$, por unidad de aumento p de la presión. Las unidades de la compresibilidad son inversas a las de presión, Pa^{-1} o atm^{-1} . La compresibilidad del agua, por ejemplo, es de $46,4 \times 10^{-6} \text{atm}^{-1}$. Esto implica que, por cada aumento de 1 atm en la presión, el volumen del agua disminuye en 46.4 partes por millón. Los materiales con módulo de volumen pequeño y compresibilidad grande son fáciles de comprimir.

Esfuerzo y deformación por corte.

El tercer tipo de situación de esfuerzo-deformación se denomina corte. El listón de la Figura 1.c está sometido a un **esfuerzo de corte**: una parte del listón se está empujando hacia arriba, mientras una parte adyacente se está empujando hacia abajo, lo que produce un cambio de forma del listón. La Figura 7 muestra un cuerpo deformado por un esfuerzo de corte.

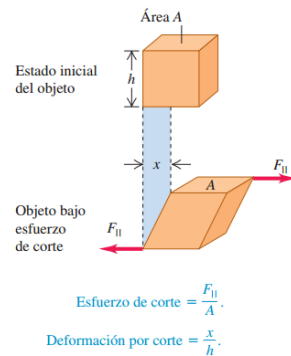


Figura 7: Objeto sometido a un esfuerzo de corte. Se aplican fuerzas tangentes a superficies opuestas del objeto (en contraste con la situación de la Figura 2, donde las fuerzas actúan perpendiculares a las superficies). Por claridad, se exagera la deformación x .

En la figura, fuerzas de igual magnitud pero dirección opuesta actúan de forma tangente a las superficies de extremos opuestos del objeto. Definimos el **esfuerzo de corte** como la fuerza $F_{||}$ que actúa tangente a la superficie, dividida entre el área A sobre la que actúa:

$$\text{Esfuerzo de corte} = \frac{F}{A} \rightarrow (9)$$

Al igual que los otros dos tipos de esfuerzo, el esfuerzo de corte es una fuerza por unidad de área. La figura 7 muestra que una cara del objeto sometido a esfuerzo de corte se desplaza una distancia x relativa a la cara opuesta. Definimos la **deformación por corte** como el cociente del desplazamiento x entre la dimensión transversal h :

$$\text{Deformación por corte} = \frac{x}{h} \rightarrow (10)$$

En situaciones reales, x casi siempre es mucho menor que h . Como todas las deformaciones, la deformación por corte es un número adimensional: un cociente de dos longitudes. Si las fuerzas son lo suficientemente pequeñas como para que se obedezca la ley de Hooke, la deformación por corte es proporcional al esfuerzo de corte. El módulo de elasticidad correspondiente (cociente del esfuerzo de corte entre la deformación por corte) se denomina **módulo de corte** y se denota con S :

$$S = \frac{\text{Esfuerzo de corte}}{\text{Deformación por corte}} = \frac{F/A}{x/h} = \frac{F h}{A x} \quad (\text{módulo de corte}) \rightarrow (11)$$

Para un material dado, S suele ser de un tercio a un medio del valor del módulo de Young Y para el esfuerzo de tensión. Tenga en cuenta que los conceptos de esfuerzo de corte, deformación por corte y módulo de corte únicamente se aplican a materiales sólidos. La razón es que las fuerzas de corte deben deformar el bloque sólido, el cual tiende a regresar a su forma original si se eliminan las fuerzas de corte. En cambio, los gases y líquidos no tienen forma definida.