

## Elasticidad y plasticidad

La ley de Hooke (la proporcionalidad del esfuerzo y la deformación elástica) tiene un intervalo de validez limitado. En las secciones anteriores usamos frases como “así las fuerzas son tan pequeñas que se obedece la ley de Hooke”. Cuáles son exactamente las limitaciones de la ley de Hooke? Sabemos que: si tiramos de cualquier cosa, la aplastamos o la torcemos lo suficiente, se doblará o romperá. Podemos ser más precisos que eso?

Examinemos de nuevo el esfuerzo y la deformación por tensión. Supongamos que graficamos el esfuerzo en función de la deformación. Si se obedece la ley de Hooke, la gráfica será una recta con pendiente igual al módulo de Young. La Figura 1 muestra una gráfica esfuerzo deformación típica de un metal como cobre o hierro blando. La deformación se muestra como porcentaje de alargamiento; la escala horizontal no es uniforme después de la primera porción de la curva, hasta una deformación menor que el 1 por ciento. La primera porción es una línea recta, que indica un comportamiento de ley de Hooke con el esfuerzo directamente proporcional a la deformación. Esta porción rectilínea termina en el punto a; el esfuerzo en este punto se denomina límite proporcional.

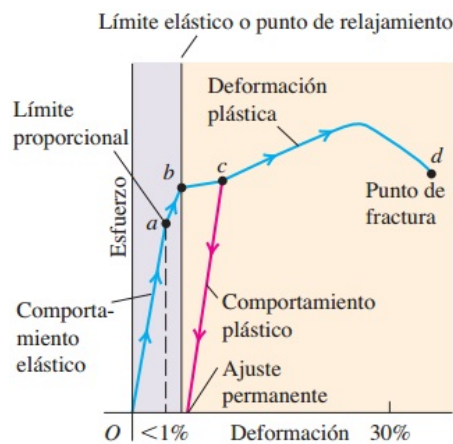


Figura 1: Diagrama de esfuerzo-deformación típico para un metal dúctil sometido a tensión.

Desde a hasta b, el esfuerzo y la deformación ya no son proporcionales, y no se obedece la ley de Hooke. Si la carga se retira gradualmente, partiendo de cualquier punto entre O y b, la curva se sigue a la inversa hasta que el material recupera su longitud original. La deformación es reversible, y las fuerzas son conservativas; la energía introducida en el material para causar la deformación se recupera cuando se elimina el esfuerzo. En la región Ob decimos que el material tiene comportamiento elástico. El punto b, donde termina esta región, es el punto de relajamiento; el esfuerzo en este punto se denomina límite elástico. Si aumentamos el esfuerzo más allá del punto b, la deformación sigue aumentando; pero si retiramos la carga en un punto más allá de b, digamos c, el material no recupera su longitud original, sino que sigue la línea roja de la Figura 1. La longitud con cero esfuerzo ahora es mayor que la original; el material sufrió una deformación irreversible y adquirió un ajuste permanente. Un aumento de la carga más allá de c produce un aumento grande en la deformación con un incremento relativamente pequeño del esfuerzo, hasta llegar a un punto d en el que se presenta la fractura. El comportamiento del material entre b y d se denomina flujo plástico o deformación plástica. Una deformación plástica es irreversible; si se elimina el esfuerzo, el material no vuelve a su estado original. En algunos materiales, se presenta una deformación plástica considerable entre el límite elástico y el punto de fractura, como aquel cuyas propiedades se grafican en la Figura 1. Decimos que tales materiales son dúctiles. En cambio, si la fractura se presenta poco después de rebasarse el límite elástico, decimos que el material es quebradizo. Un alambre de hierro blando que puede sufrir un estiramiento permanente considerable sin romperse es dúctil; una cuerda de acero de piano que se rompe poco después de alcanzar su límite elástico es quebradiza. Algo muy curioso puede ocurrir cuando un objeto se estira y luego se deja relajar.

Un ejemplo se presenta en la figura 2, que es una curva de esfuerzo-deformación de hule vulcanizado estirado a más de siete veces su longitud original. El esfuerzo no es proporcional a la deformación pero el comportamiento es elástico porque, al retirarse la carga, el material recupera su longitud original. Sin embargo, el material sigue curvas diferentes cuando aumenta y cuando disminuye el esfuerzo. Esto se denomina histéresis elástica. El trabajo efectuado por el material cuando recupera su forma original es menor que el requerido para deformarlo; hay fuerzas no conservativas asociadas con la fricción interna. El hule con histéresis elástica grande es muy útil para absorber vibraciones, como en los soportes de motores y bujes amortiguadores para automóvil. El esfuerzo requerido para causar la fractura de un material se denomina esfuerzo de rotura, resistencia límite o (para el esfuerzo de tensión) resistencia a la tensión. Dos materiales, digamos dos tipos de acero, pueden tener constantes elásticas muy similares pero esfuerzos de rotura muy distintos.

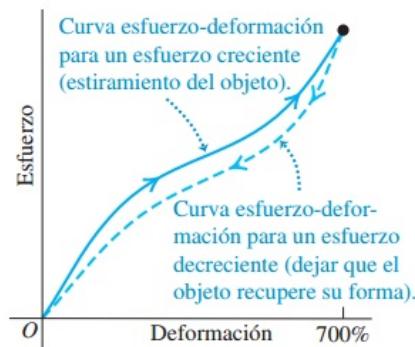


Figura 2: Diagrama esfuerzo-deformación típico para hule vulcanizado. Las curvas son diferentes para un aumento y una disminución del esfuerzo; este fenómeno se denomina histéresis elástica

La tabla 3 presenta valores típicos de esfuerzo de rotura para varios materiales en tensión. El factor de conversión  $6,9 \times 10^8 Pa = 100,00 \text{ psi}$  ayuda a poner estos números en perspectiva. Por ejemplo, si el esfuerzo de rotura de cierto acero es de  $6,9 \times 10^8 Pa$ , una barra con sección transversal de  $1 \text{ in}^2$  tendrá una resistencia a la rotura de 100,000 lb.

Figura 3: Esfuerzos de rotura aproximados.

| Material         | Esfuerzo de rotura (Pa o N/m <sup>2</sup> ) |
|------------------|---|
| Aluminio         | $2.2 \times 10^8$                           |
| Latón            | $4.7 \times 10^8$                           |
| Vidrio           | $10 \times 10^8$                            |
| Hierro           | $3.0 \times 10^8$                           |
| Bronce fosforado | $5.6 \times 10^8$                           |
| Acero            | $5 - 20 \times 10^8$                        |

## Apéndice 1: Método de los mínimos cuadrados.

Cuando se hace una medición experimental se pueden obtener los datos de un determinado fenómeno y estos al hacer una dispersión podemos obtener su acomodo en cierta curva por ejemplo una línea

reacta. Se busca una ecuación de la forma;  $y = ax + b$ .

Para evaluar a y b. Sean  $\{(x_i, y_i)\}$  ;

$$\varphi = \gamma - y_i = ax_i + b - y_i$$

Se eleva a cuadrado para considerar los valores negativos y se toma la media aritmética:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$$

Utilizando las derivadas parciales y igualando a cero para minimizar las distancias tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi_i^2 = 0 \quad y \quad \frac{\partial}{\partial b} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi_i^2 = 0$$

De donde;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2 &= \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial a} (ax_i + b - y_i)^2; \\ &\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i)x_i \end{aligned}$$

Es decir, que la condición se cumple;

$$\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial a} (ax_i^2 + bx_i - y_i x_i) = 0 = \frac{2}{n} \left\{ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n y_i x_i \right\}$$

Por lo tanto;

$$a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n y_i x_i = 0; \Rightarrow a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i.$$

Lo cual implica que;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2 \right\} &= \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial b} \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial b} (ax_i + b - y_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) \quad ; \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i. \end{aligned}$$

Luego;

$$a = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & n \end{vmatrix} \quad y \quad b = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n y_i \end{vmatrix}$$

Finalmente tenemos que;

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad y \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}.$$

Las cuales satisfacen la ecuación lineal que aproxima a los puntos discretos.

$$Y = ax + b \quad (1)$$