

2. Desarrollo Experimental.

Lista de Materiales:

Soporte pegado a la pared con mariposas metálicas.
Una barra del material requerido o proporcionado.
Un cronómetro.
Un medidor de ángulo con soporte y punta de flecha.
Un soporte horizontal para una barra sostenida.
Pesas de distintas masas.
Un medidor de ángulos horizontal (en este caso, transportador).
Gancho conectado a la barra para ejercer un torque con el peso.

2.2 Arreglo experimental. Parte 2: Método Oscilatorio o Dinámico.

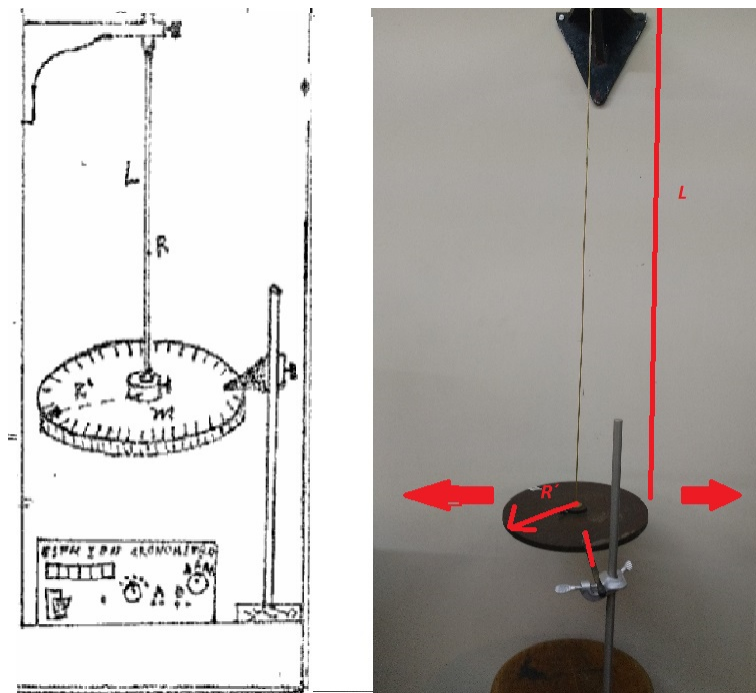


Figura 1: Arreglo general

Procedimiento.

- 1.-Medir las constantes L y R de la barra.
- 2.-Medir m , R' del disco y calcular su momento de inercia I .
- 3.-Girar el disco un ángulo pequeño y soltar dejando que se establezca la oscilación.
- 4.-Medir el tiempo t para 10 oscilaciones.
- 5.-Obtener $T=t/10$.
- 6.-Calcular K y M correspondientes.
- 7.- Graficar K vs θ y M vs θ y ajustar para obtener los valores óptimos de K y M de la muestra.

Resultados.

Comenzamos la práctica con el material proporcionado por el equipo de laboratorio, procedimos a medir algunas de nuestras constantes como lo son; el radio del disco, el radio pequeño o transversal de la barra por medio de un tornillo micrométrico, y con un metro medimos la elongación de la barra, cabe resaltar que fueron dos barras de distinto material, así que mostraremos primero el análisis de la barra 1 y después el de la barra 2. Llenamos la Tabla 1 proporcionada para después graficar K vs θ y M vs θ y ajustar para calcular el K y M de cada muestra.

Barrra 1. Tabla 1.

Barra 1		Disco			
L =91.8 cm		m=4.85 kg I =0.037kgm ²			
R=3.44 mm		R'=12.75 cm			
n	θ (°)	t (s)	T= t/10 (s)	$K=4\pi^2/T^2$ (kgm ² /s ²)	M= 2KL/πR ² (kg/s)
1	25	11.8	1.18	1.0566	40998000000
2	3.75	11.87	1.187	1.0442	40517000000
3	5	11.53	1.153	1.1067	42942000000
4	6.25	12.85	1.285	0.891	34572000000
5	7.5	11.68	1.168	1.0784	41844000000
6	8.75	12.78	1.278	0.9007	34949000000
7	10	11.7	1.17	1.0747	41700000000
8	9	11.48	1.148	1.1163	43315000000
9	20	11.88	1.188	1.0424	40447000000
10	75	11.75	1.175	1.0656	41347000000
11	72	11.13	1.113	1.1876	46081000000

De las cuales extragimos los siguientes datos de la siguiente tabla para poder hacer la gráfica $Kvs\theta$ y $Mvs\theta$.

Tabla 2.

n	θ (°)	M= 2KL/ πR^2 (kg/s)	n	θ (°)	$K=4\pi^2/T^2$ (kgm ² /s ²)
1	25	40998000000	1	25	1.0566
2	3.75	40517000000	2	3.75	1.0442
3	5	42942000000	3	5	1.1067
4	6.25	34572000000	4	6.25	0.891
5	7.5	41844000000	5	7.5	1.0784
6	8.75	34949000000	6	8.75	0.9007
7	10	41700000000	7	10	1.0747
8	9	43315000000	8	9	1.1163
9	20	40447000000	9	20	1.0424
10	75	41347000000	10	75	1.0656
11	72	46081000000	11	72	1.1876

Datos tabulados para graficar.

Gráfica de dispersión

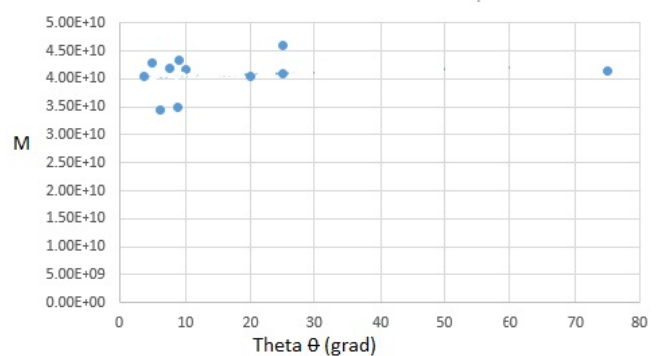
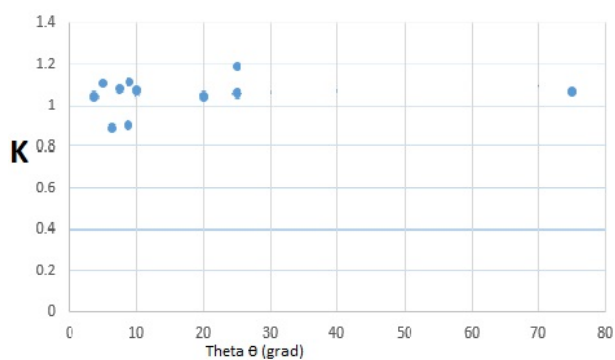


Gráfico de dispersión para el método oscilatorio.

Ajuste de datos.

Por el Apéndice 1 podemos hacer el respectivo ajuste por el método de mínimos cuadrados para encontrar un modelo lineal $Y_2 = a_1x + b_1$ tales que $(x_i, y_i) \rightarrow (\theta(\text{grad}), k_1(\text{Nm/grad}))$ también un modelo lineal $Y_2 = a_2x + b_2$ tales que $(x_j, y_j) \rightarrow (\theta(\text{grad}), M_1(Pa))$ y para cada uno de los datos de cada experimento, cuyas tablas de entrada y modelos son los siguientes:

Tabla de entrada 1.

n	$\sum_{i=1}^n x_i(\text{grad})$	$\sum_{i=1}^n y_i(\text{Nm/grad})$	$\sum_{i=1}^n y_i x_i (\text{Nm})$	$\sum_{i=1}^n x_i^2(\text{grad}^2)$
11	$1,952 \times 10^2$	$1,156 \times 10^1$	$2,536 \times 10^2$	$7,666 \times 10^3$

De donde:

$$a_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad y \quad b_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}.$$

Sustituyendo los valores queda:

$$a_1 = \frac{11 \times 2,526 \times 10^2 - [1,952 \times 10^2 \times 1,156 \times 10^1]}{11 \times 7,66 \times 10^3 - (1,952 \times 10^2)^2} = 8,43 \times 10^{-4}(\text{Nm/grad}).$$

$$b_2 = \frac{7,66 \times 10^3 \times 1,156 \times 10^1 - [2,526 \times 10^2 \times 1,952 \times 10^2]}{11 \times 7,66 \times 10^3 - (1,952 \times 10^2)^2} = 1,0367(\text{Nm/grad}).$$

Finalmente queda el modelos propuesto:

$$Y_1 = 8,43 \times 10^{-4}x(\text{Nm/grad}) + 1,0367(\text{Nm/grad}) \rightarrow (1)$$

Tabla de entrada 2.

n	$\sum_{j=1}^n x_j(\text{grad})$	$\sum_{j=1}^n y_j(\text{Pa})$	$\sum_{j=1}^n y_j x_j (Pa \cdot \text{grad})$	$\sum_{j=1}^n x_j^2(\text{grad}^2)$
11	$1,952 \times 10^2$	$6,145 \times 10^{11}$	$13,066 \times 10^{12}$	$7,666 \times 10^3$

De donde:

$$a_2 = \frac{n \sum_{j=1}^n x_j y_j - \sum_{j=1}^n x_j \sum_{j=1}^n y_j}{n \sum_{j=1}^n x_j^2 - (\sum_{j=1}^n x_j)^2} \quad y \quad b_2 = \frac{\sum_{j=1}^n x_j^2 \sum_{j=1}^n y_j - \sum_{j=1}^n x_j y_j \sum_{j=1}^n x_j}{n \sum_{j=1}^n x_j^2 - (\sum_{j=1}^n x_j)^2}.$$

Sustituyendo los valores queda:

$$a_2 = \frac{11 \times 13,066 \times 10^{12} - [1,952 \times 10^2 \times 6,145 \times 10^{11}]}{11 \times 7,66 \times 10^3 - (1,952 \times 10^2)^2} = 3,067 \times 10^7(Pa).$$

$$b_2 = \frac{7,66 \times 10^3 \times 6,145 \times 10^{11} - [13,066 \times 10^{12} \times 1,952 \times 10^2]}{11 \times 7,66 \times 10^3 - (1,952 \times 10^2)^2} = 4,035 \times 10^{10}(Pa).$$

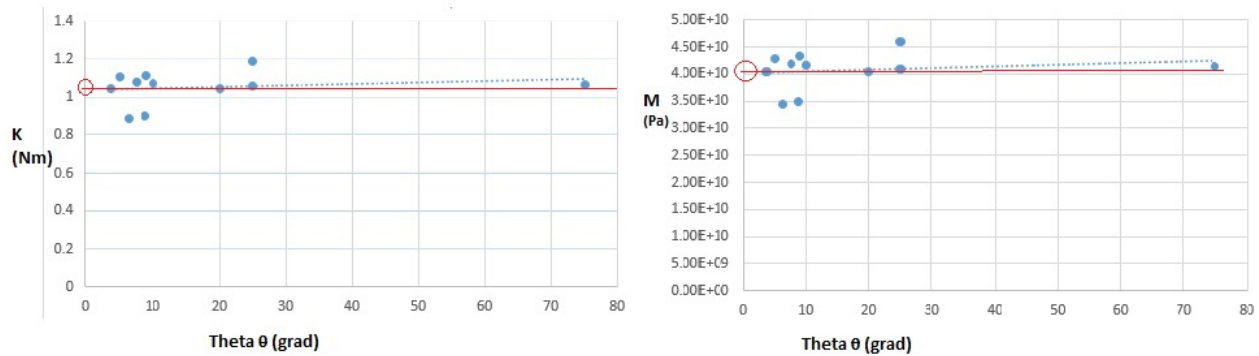
Finalmente queda el modelos propuesto:

$$Y_2 = 3,067 \times 10^7 x(Pa) + 4,035 \times 10^{10}(Pa) \rightarrow (2).$$

De (1) y (2) podemos graficar sus correspondientes líneas de tendencia, a continuación vamos a graficar su modelo y a tratarlo con más detalle.

Ajuste por excel.

Notemos que mientras por medio de cálculos pudimos encontrar un modelo, el programa Excel pudo encontrar otro, es cual se muestra a continuación.



Las ecuaciones para la línea punteada de color azul de la figura de la izquierda y derecha respectivamente son $Y_1 = 8,43 \times 10^{-4}x(Nm/grad) + 1,0367(Nm/grad)$ y $Y_2 = 3,067 \times 10^7x(Pa) + 4,035 \times 10^{10}(Pa)$, claramente se puede observar que en las gráficas la línea de tendencia no es muy inclinada, es decir, su función no da un cambio muy grande a lo largo de su dominio, así que por simplificación tomamos su ecuación como una función constante, proporcionada por el mismo modelo lineal, que será la línea de rojo cuyo valor está dado por la intersecciones con el eje Y y que está marcado en un círculo rojo. Y así tenemos que $Y'_1 = 1,02(Nm/grad) = 1,0(Nm/grad)(grad/(1/2\pi rad)) = 2,04(Nm/rad)$ y $Y'_2 = 4,07 \times 10^{10}(Pa)$. Al aplicar un momento torsional M en el extremo inferior de la barra, éste experimenta una deformación de torsión. Dentro de los límites de validez de la ley de Hooke, el ángulo de torsión θ es directamente proporcional al momento torsional M aplicado, de modo que:

$$k_1 = 2,04(Nm/rad) \quad y \quad M_1 = 4,07 \times 10^{10}(Pa)$$

Error Porcentual.

Los valores verdaderos (Tabla 1 del marco teórico) de los módulos de corte o cizalladura del cobre es $M_1 = 4,4 \times 10^{10} Pa$ y su coeficiente de torsión o módulo elástico de torsión es de $k_1 = 1,8(Nm/rad)$. Entonces, de nuestras mediciones y cálculos podemos obtener el error porcentual:

$$Error \text{ porcentual } M_1 = \frac{Error \text{ verdadero}}{Valor \text{ Verdadero}} = \frac{Valor \text{ verdadero} - Valor \text{ aproximado}}{Valor \text{ verdadero}} \times 100 = 34 \%$$

$$Error \text{ porcentual } k_1 = \frac{Error \text{ verdadero}}{Valor \text{ Verdadero}} = \frac{Valor \text{ verdadero} - Valor \text{ aproximado}}{Valor \text{ verdadero}} \times 100 = 46 \%$$

Barrra 2. Tabla 1.1

Barra 2		Disco			
L = 79.5cm		m=4.85 kg I =0.037kgm ²			
R = 4 mm		R'=12.75 cm			
n	(°) θ	t (s)	T= t/10 (s)	K=4π ² /T ² (kgm ² /s ²)	M= 2KL/πR ² (kg/s)
1	5	11.46	1.146	1.1202	33205000000
2	10	11.27	1.127	1.1583	34333000000
3	12	12.13	1.213	0.9999	29634000000
4	15	12.17	1.217	0.9933	29444000000
5	18	11.16	1.116	1.1813	35016000000
6	20	12.06	1.206	1.0115	29983000000
7	22	11.12	1.112	1.1898	35268000000
8	25	11.08	1.108	1.1984	35523000000
9	26	11.11	1.111	1.1919	35331000000
10	30	11.14	1.114	1.1855	35141000000

De las cuales extragimos los siguientes datos de la siguiente tabla para poder hacer la gráfica $Kvs\theta$ y $Mvs\theta$ (Tabla 2).

Tabla 2.1

n	(°) θ	$K=4\pi^2/T^2$ (kgm ² /s ²)	n	(°) θ	M= 2KL/ πR^2 (kg/s)
1	5	1.1202	1	5	33205000000
2	10	1.1583	2	10	34333000000
3	12	0.9999	3	12	29634000000
4	15	0.9933	4	15	29444000000
5	18	1.1813	5	18	35016000000
6	20	1.0115	6	20	29983000000
7	22	1.1898	7	22	35268000000
8	25	1.1984	8	25	35523000000
9	26	1.1919	9	26	35331000000
10	30	1.1855	10	30	35141000000

Datos tabulados para graficar.

Gráfica de dispersión

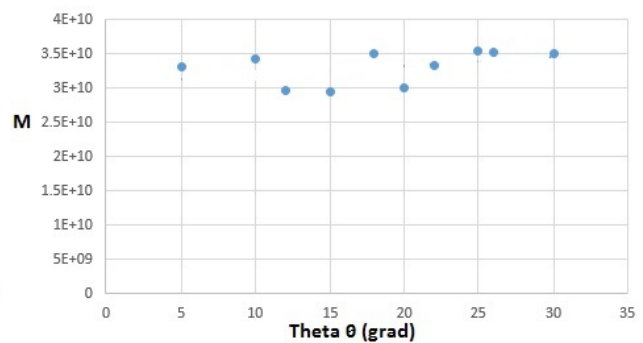
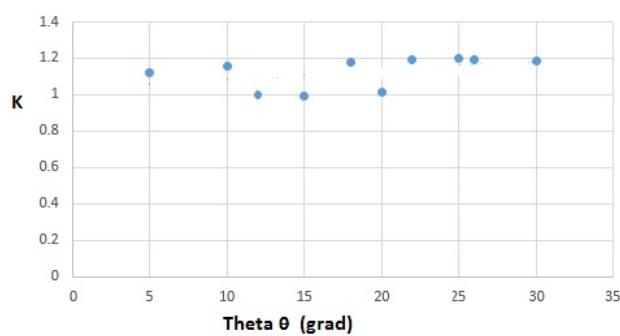


Gráfico de dispersión para el método oscilatorio de la Barra 2.

Ajuste de datos.

Por el Apéndice 1 podemos hacer el respectivo ajuste por el método de mínimos cuadrados para encontrar un modelo lineal $Y_3 = a_3x + b_3$ tales que $(x_s, y_s) \rightarrow (\theta(\text{grad}), k_2(\text{Nm/grad}))$ también un modelo lineal $Y_4 = a_4x + b_4$ tales que $(x_t, y_t) \rightarrow (\theta(\text{grad}), M_2(\text{Pa}))$ y para cada uno de los datos de cada experimento, cuyas tablas de entrada y modelos son los siguientes:

Tabla de entrada 3.

n	$\sum_{i=1}^n x_i(\text{grad})$	$\sum_{i=1}^n y_i(\text{Nm/grad})$	$\sum_{i=1}^n y_i x_i (\text{Nm})$	$\sum_{i=1}^n x_i^2(\text{grad}^2)$
10	$1,83 \times 10^2$	$1,036 \times 10^1$	$3,26 \times 10^2$	$6,489 \times 10^3$

De donde:

$$a_3 = \frac{n \sum_{s=1}^n x_s y_s - \sum_{s=1}^n x_i \sum_{s=1}^n y_s}{n \sum_{s=1}^n x_s^2 - (\sum_{s=1}^n x_s)^2} \quad y \quad b_3 = \frac{\sum_{s=1}^n x_s^2 \sum_{s=1}^n y_s - \sum_{s=1}^n x_s y_s \sum_{s=1}^n x_s}{n \sum_{s=1}^n x_s^2 - (\sum_{s=1}^n x_s)^2}.$$

Sustituyendo los valores queda:

$$a_3 = \frac{103,26 \times 10^2 - [3,26 \times 10^2 \times 1,83 \times 10^2]}{10 \times 6,489 \times 10^3 - (1,83 \times 10^2)^2} = 1,032(\text{Nm/grad}).$$

$$b_3 = \frac{6,489 \times 10^3 \times 1,036 \times 10^1 - [2,526 \times 10^2 \times 1,952 \times 10^2]}{10 \times 6,489 \times 10^3 - (1,83 \times 10^2)^2} = 5 \times 10^{-3}(\text{Nm/grad}).$$

Finalmente queda el modelos propuesto:

$$Y_3 = 1,032(\text{Nm/grad})x + 5 \times 10^{-3}(\text{Nm/grad}) \rightarrow (3)$$

Tabla de entrada 4.

n	$\sum_{t=1}^n x_t(\text{grad})$	$\sum_{t=1}^n y_t(\text{Pa})$	$\sum_{t=1}^n y_t x_t (\text{Pa} \cdot \text{grad})$	$\sum_{t=1}^n x_t^2(\text{grad}^2)$
10	$1,83 \times 10^2$	$3,012 \times 10^{11}$	$8,855 \times 10^{12}$	$4,52 \times 10^3$

De donde:

$$a_4 = \frac{n \sum_{t=1}^n x_t y_t - \sum_{j=1}^n x_t \sum_{t=1}^n y_t}{n \sum_{t=1}^n x_t^2 - (\sum_{t=1}^n x_t)^2} \quad y \quad b_4 = \frac{\sum_{t=1}^n x_t^2 \sum_{t=1}^n y_t - \sum_{t=1}^n x_t y_t \sum_{t=1}^n x_t}{n \sum_{t=1}^n x_t^2 - (\sum_{t=1}^n x_t)^2}.$$

Sustituyendo los valores queda:

$$a_4 = \frac{10 \times 8,855 \times 10^{12} - [1,83 \times 10^2 \times 3,012 \times 10^{11}]}{10 \times 4,52 \times 10^3 - (1,83 \times 10^2)^2} = 1 \times 10^8(\text{Pa}).$$

$$b_4 = \frac{4,52 \times 10^3 \times 3,012 \times 10^{11} - [8,855 \times 10^{12} \times 1,83 \times 10^2]}{10 \times 4,52 \times 10^3 - (1,83 \times 10^2)^2} = 3 \times 10^{10}(\text{Pa}).$$

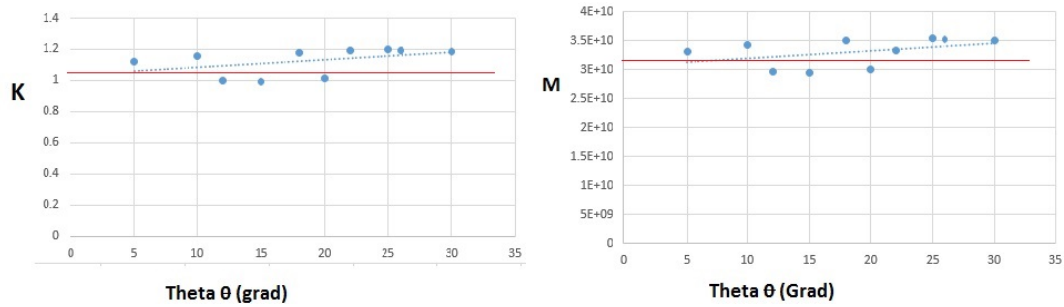
Finalmente queda el modelos propuesto:

$$Y_3 = (1 \times 10^8(\text{Pa}))x + 3 \times 10^{10}(\text{Pa}) \rightarrow (4).$$

De (3) y (4) podemos graficar sus correspondientes líneas de tendencia, a continuación vamos a graficar su modelo y a tratarlo con más detalle.

Ajuste por excel.

Notemos que mientras por medio de cálculos pudimos encontrar un modelo, el programa Excel pudo encontrar otro, es cual se muestra a continuación.



Las ecuaciones para la línea punteada de color azul de la figura de la izquierda y derecha respectivamente son $Y_3 = 1,032(Nm/grad)x + 5 \times 10^{-3}(Nm/grad)$ y $Y_4 = (1 \times 10^8(Pa))x + 3 \times 10^{10}(Pa)$, claramente se puede observar que en las gráficas la línea de tendencia no es muy inclinada, es decir, su función no da un cambio muy grande a lo largo de su dominio, así que por simplificación tomamos su ecuación como una función constante, proporcionada por el mismo modelo lineal, que será la línea de rojo cuyo valor está dado por la intersecciones con el eje Y y que está marcado en un círculo rojo. Y así tenemos que $Y'_3 = 1,03(Nm/grad) = 1,0(Nm/grad) (grad/(1/2\pi rad)) = 2,06(Nm/rad)$ y $Y'_4 = 3,31 \times 10^{10}(Pa)$. Al aplicar un momento torsional M en el extremo inferior de la barra, éste experimenta una deformación de torsión. Dentro de los límites de validez de la ley de Hooke, el ángulo de torsión θ es directamente proporcional al momento torsional M aplicado, de modo que:

$$k_2 = 2,06(Nm/rad) \quad y \quad M_2 = 3,31 \times 10^{10}(Pa)$$

Error Porcentual.

Los valores verdaderos (Tabla 1 del marco teórico) de los módulos de corte o cizalladura del cobre es $M_2 = 4,4 \times 10^{10} Pa$ y su coeficiente de torsión o módulo elástico de torsión es de $k_2 = 1,76(Nm/rad)$. Entonces, de nuestras mediciones y cálculos podemos obtener el error porcentual:

$$Error \text{ porcentual } M_1 = \frac{Error \text{ verdadero}}{Valor \text{ Verdadero}} = \frac{Valor \text{ verdadero} - Valor \text{ aproximado}}{Valor \text{ verdadero}} \times 100 = 23 \%$$

$$Error \text{ porcentual } k_1 = \frac{Error \text{ verdadero}}{Valor \text{ Verdadero}} = \frac{Valor \text{ verdadero} - Valor \text{ aproximado}}{Valor \text{ verdadero}} \times 100 = 55 \%$$

Discusiones.

Al llevar a cabo este experimento pudimos notar que hubo ciertas fallas, como por ejemplo: la ondulación del disco no era regular, es decir, al girar el disco, el mismo comenzaba a tambalearse y así generaba una pérdida en la regularidad de su movimiento. A pesar de eso podemos hacer caso omiso de eso y concentramos en los resultados, ahí nos damos cuenta que los valores reales y los del experimento son muy cercanos, así que podemos concluir que en ambos, aproximar por promedios arrojó buenos resultados, sin embargo no podemos decir lo mismo de el coeficiente de torsión ya que los valores cabían mucho.