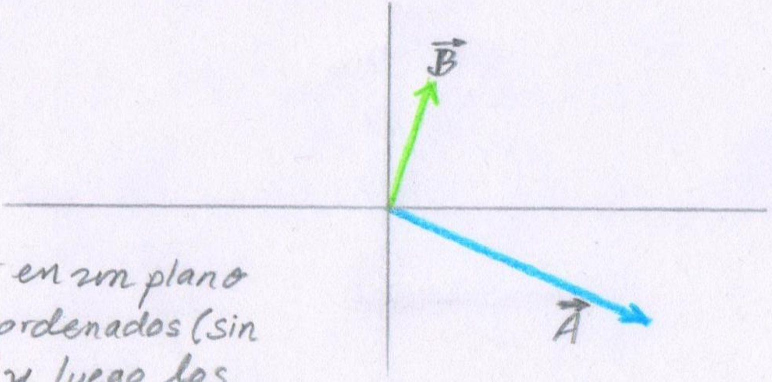
Animación: Producto Cruz

Fecha: 2 de Diciembre de 2020

Imaginemos 2 vectores en 2d.

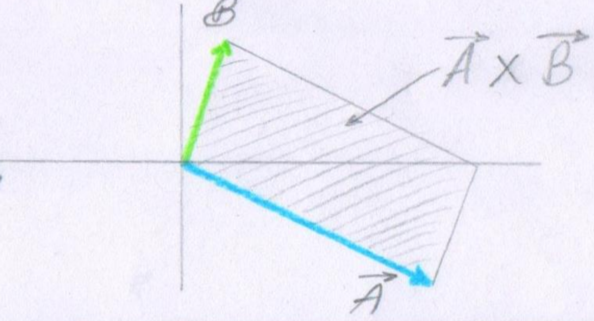


Aparecer en un plano los ejes coordenados (sin etiqueta) y luego los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

1

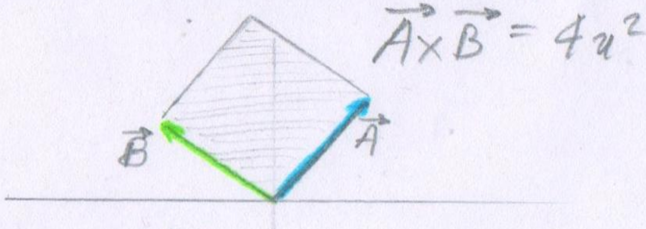
$\vec{A} \times \vec{B}$ es igual al área del paralelogramo formado por dichos vectores

Esa área será positiva cuando el primer vector se encuentre a la derecha.



Mostrar la etiqueta $\vec{A} \times \vec{B}$

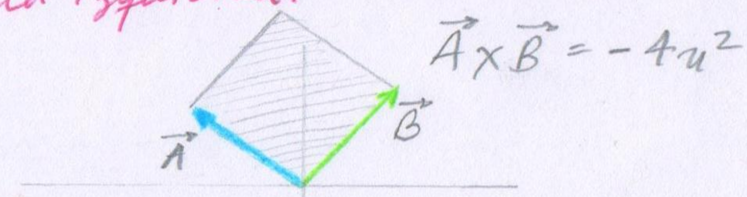
2



Mover los vectores de tal manera que se muestre un área igual a $4u^2$.

3

Y esa área será negativa cuando el primer vector se encuentre a la izquierda.

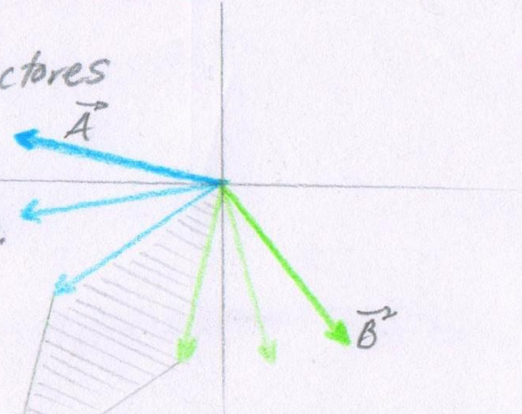


Intercambiar de lugar los vectores. Mostrar la etiqueta con la nueva área.

4

Esa área será mayor cuando los vectores estén más cerca de ser perpendiculares.

Jugar con los 2 vectores y mostras distintas áreas en la etiqueta y en el paralelogramo.



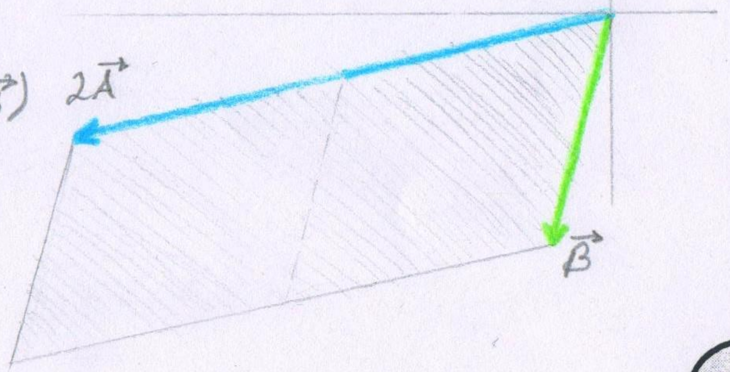
$\vec{A} \times \vec{B} = x\, u^2$

5

De igual manera, duplicar la longitud de uno de los vectores duplica el resultado final.

Mostrar la etiqueta

$(2\vec{A}) \times \vec{B} = 2(\vec{A} \times \vec{B})$

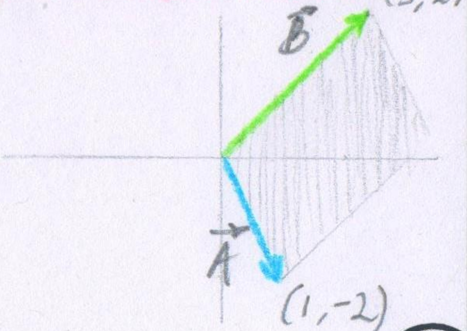


6

Si usamos las coordenadas de los vectores como columnas de una matriz, obtenemos el área del paralelogramo calculando el determinante de dicha matriz.

$\vec{A} \times \vec{B} = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\right) = 2 + 6 = 8u^2$

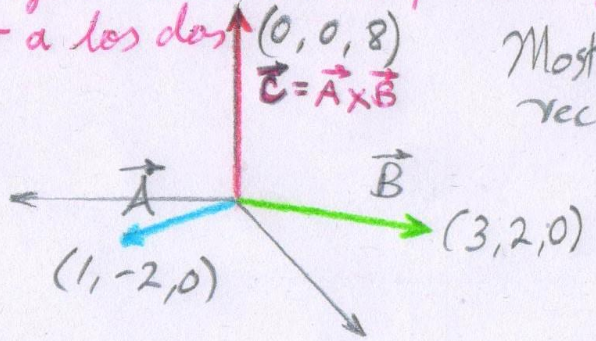
Mostrar ↑



7

Pero el producto vectorial produce un nuevo vector cuya longitud es igual al área del paralelogramo, y es perpendicular a los dos vectores

Mostrar el 3er vector.



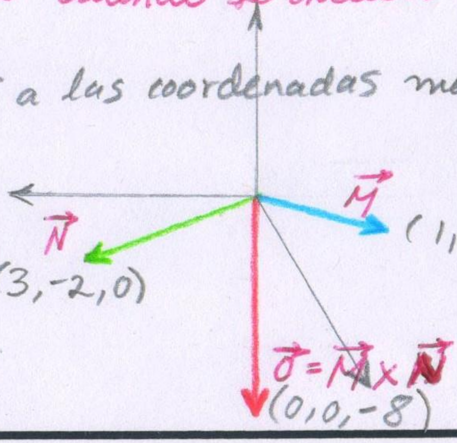
Pasar el gráfico a 3D

Añadir, la tercer componente a las coordenadas.

8

Ese nuevo vector es positivo ya que $\vec{A}$ se encuentra a la derecha de $\vec{B}$.
Y será negativo cuando el primer vector se encuentre a la izquierda.

Cambiar los vectores a las coordenadas mostradas



rotar!

9

Ese tercer vector se consigue al incluir los vectores unitarios en el cálculo del determinante.

$$\vec{M}\times\vec{N} = det\left(\begin{bmatrix}\hat{i} & 1 & 3\\ \hat{j} & 2 & -2\\ \hat{k} & 0 & 0\end{bmatrix}\right) = -8\hat{k}$$

← Mostrar este determinante junto a la gráfica de 9

$$\vec{A}\times\vec{B} = det\left(\begin{bmatrix}\hat{i} & 1 & 3\\ \hat{j} & -2 & 2\\ \hat{k} & 0 & 0\end{bmatrix}\right) = 8\hat{k}$$

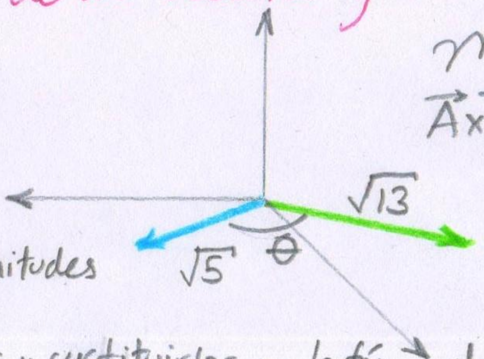
← Mostrar este determinante mientras la animación vuelve a mostra la gráfica en 8

10

Alternativamente este producto cruz se calcula usando las magnitudes de los vectores y el ángulo entre ellos.

En la gráfica en 8 mostrar sólo los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Mostrar la fórmula: $\vec{A}\times\vec{B} = AB \operatorname{sen}\theta \, \hat{u}$



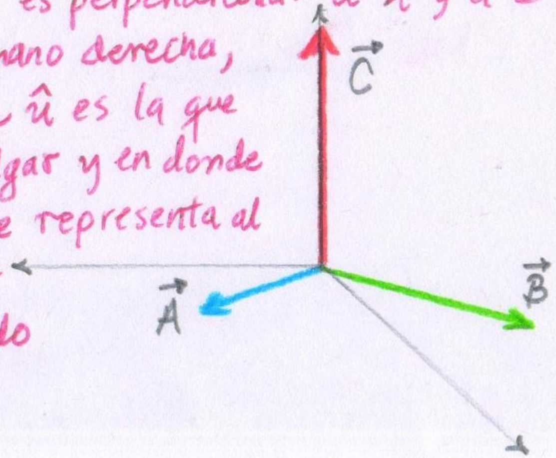
Mostrar las magnitudes junto a cada vector

Mostrar el resultado $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=8\hat{u}$

Luego arrastrarlos y sustituirlas en la fórmula
Igualmente con el ángulo, mostrar el valor y arrastrarlo. $\theta = 97.125°$

11

El vector $\hat{u}$ es perpendicular a $\vec{A}$ y a $\vec{B}$. De acuerdo a la regla de la mano derecha, la dirección de $\hat{u}$ es la que indica el pulgar y en donde el dedo índice representa al primer vector ($\vec{A}$) y el dedo medio a $\vec{B}$.



Continuar rotando. Mostrar al final solamente las tres etiquetas $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$

12