Animación: Coordenadas Polares

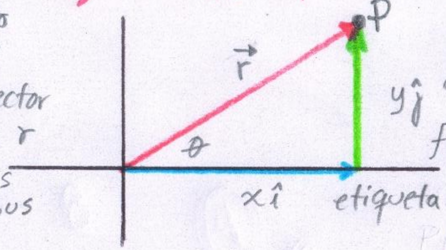
Fecha: 22 de Diciembre 2020

Narraciones: Imaginemos al vector r con sus componentes cartesianas, junto con el ángulo que forma con la horizontal, y ubiquemos un punto en el plano.

Mostrar el punto y su etiqueta P

Luego mostra el vector rojo y su etiqueta r

Luego mostrar las componentes y sus etiquetas x, y.

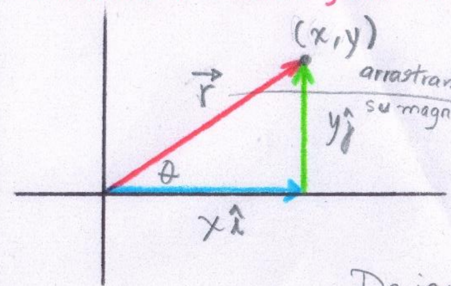


Luego mostrar la etiqueta del ángulo θ.

Finalmente sustituir etiqueta del punto por (x, y)

1

Las componentes de este vector las podemos escribir usando trigonometría, transformándolas para mostrarse en términos de theta y de r.



Arrastramos para formar

arrastramos su magnitud $\frac{y}{r} = \operatorname{sen}\theta$

despejamos y mostramos

$y = r \operatorname{sen}\theta.$

De igual manera con $\cos\theta$.

2

También podemos deducir expresiones para escribir r y theta en función de x y y.

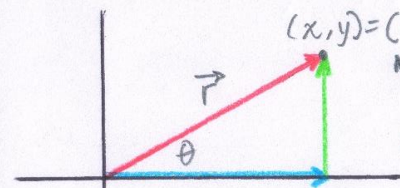
despejar las 2 expresiones y mostrar θ:

$$y = r \operatorname{sen}\theta \longrightarrow \theta = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{y}{r}\right)$$

$$x = r\cos\theta \longrightarrow \theta = \arccos\left(\frac{x}{r}\right)$$

Hacer una pequeña pausa. Luego arrastra las magnitudes para formar $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

3



mostrar la igualdad

Mostrar a un lado

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Y tambien $\theta = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{y}{r}\right)$, luego cambiarlo por $\theta = \arccos\left(\frac{x}{r}\right)$ y al final por: $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. Al final sólo se mostrarán junto al diagrama a $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

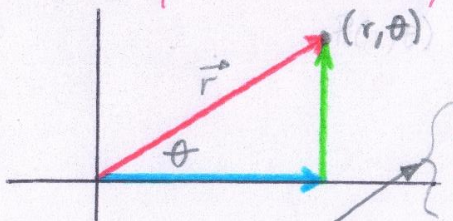
4

TERMINVS

Desaparecemos toda la igualdad $(x,y)=(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$
y mostramos (r,θ)

Remarcar $\hat{\theta}$ y $\hat{r}$ en negrita.
Tanto vector como etiqueta.

Entonces, el par ~~de valores~~ ordenado (x,y) los sustituimos por (r,θ)

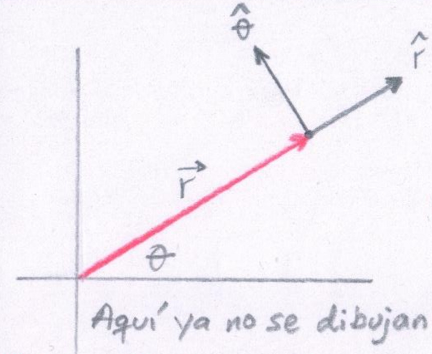


a las que llamamos coordenadas polares.
Donde r va de 0 a ∞, y θ va de 0 a 2π.

Durante esta narración, agrandar r y luego regresarlo a su magnitud original. Luego crecer θ hasta dar una vuelta entera. Acompañar siempre el punto con su etiqueta y los componentes.

5

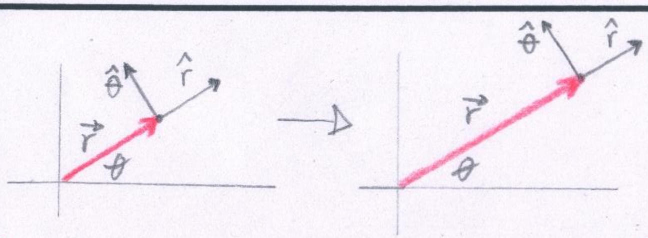
Las coordenadas polares llevan asociada una base vectorial compuesta por un vector unitario en la dirección radial y otro en la angular.



Aquí ya no se dibujan las componentes de $\vec{r}$.

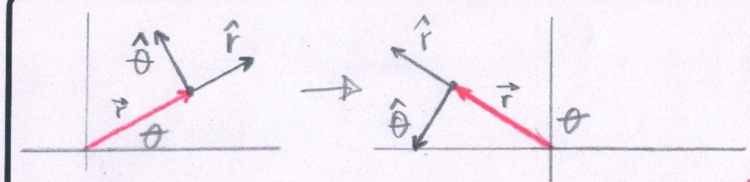
~~Note que $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ son vectores constantes mientras que los vect. $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ son una función de la variable θ.~~

6



Si variamos r y mantenemos θ cte, entonces $\hat{r}$ apunta en la dirección y sentido en que nos movemos.
Agrandar $\vec{r}$, luego volverlo a su tamaño original.

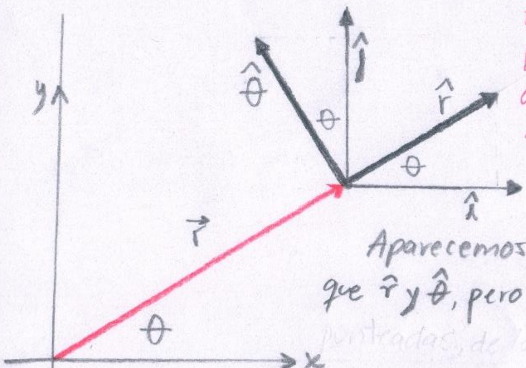
7



Y si variamos θ y mantenemos r cte, entonces $\hat{\theta}$ apunta en la dirección y sentido en que nos movemos.
Continuar aumentando θ hasta dar una vuelta entera y volver a la posición original.

8

hacer un zoom para mostrar el sig. análisis



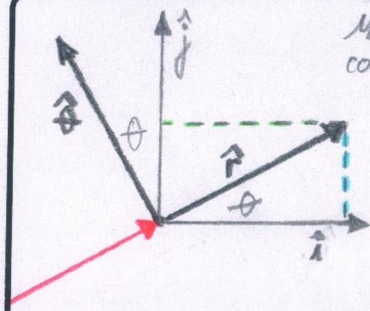
Esos vectores unitarios polares los construimos a partir de los vectores unitarios cartesianos.

Aparecemos $\hat{\imath}, \hat{j}$, del mismo grosor que $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$, pero gris. Mostrar las líneas punteadas de la punta de $\hat{\theta}$ a $\hat{j}$

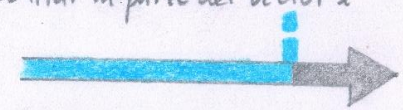
Todos esos vectores unit. miden lo mismo.

9

Mostrar las proyecciones del vector $\hat{r}$ con segmentos punteados.



Donde toca el segmento punteado resaltar la parte del vector $\hat{\imath}$



y mostrar debajo de eso:

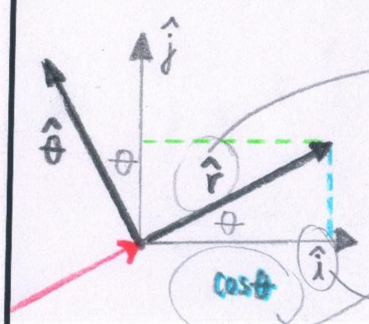
$\cos\theta$

al mismo tiempo que dejamos de resaltar el segmento

10

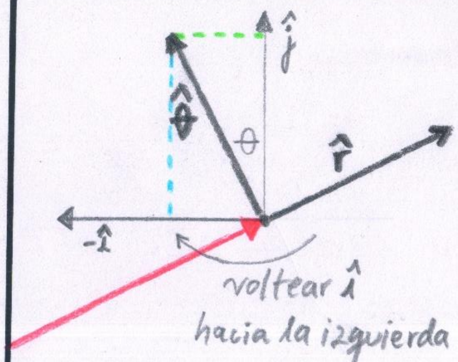
arrastrar para formar:

$$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{j}$$



Análogamente, con la proyección en $\hat{j}$, mostramos gráficamente este sumando.

11



Al realizar el mismo análisis mostramos debajo de $\hat{r}$:

$$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{j}$$

$$\hat{\theta} = -\cos\theta\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{j}$$

El vector $\hat{r}$ ayuda a representar al vector $\vec{r}$ al observar que: $\vec{r} = r\,\hat{r}$

$$\vec{r} = r(\cos\theta\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{j})$$

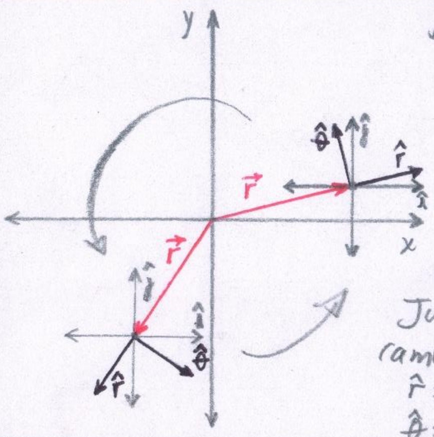
12

$$\vec{r} = r\cos\theta\,\hat{\imath} + r\operatorname{sen}\theta\,\hat{j}$$

$$\vec{r} = (r\cos\theta,\ r\operatorname{sen}\theta)$$

que como hemos visto, corresponde a las coordenadas del punto.

TERMINVS



Dejar de mostrar los segmentos punteados. Dejar de hacer zoom y mostrar todo el plano

Recorrer los cuatro cuadrantes y mostrar siempre las nuevas posiciones y direcciones de $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$.

Junto al diagrama mostrar cómo cambian los signos de:

$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath}$

$\hat{\theta} = -\cos\theta\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath}$

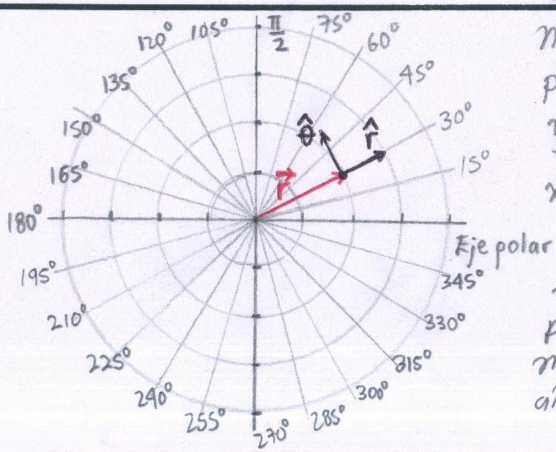
13

Hay instantes donde $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ serán cero. Ahí mostrarás en la ecuación "0" en lugar de $\operatorname{sen}\theta$ o $\cos\theta$, según el caso.

Vemos que $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ son vectores constantes mientras que los vectores $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ son una función de la variable θ.

Narración ↑ Desaparecer al final en el diagrama a $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$.
Y continuar moviendo a $\vec{r}$

14



Mostrar el nuevo plano, cambiar y por $\frac{\pi}{2}$ y a x por "eje polar"

Continuar moviendo al punto.

Mostrar los ángulos.

15

Resulta sencillo representar un punto en el plano polar que tiene como referencia ángulos y magnitudes, y cuyo origen llamamos "Polo".

16