§ 子空间的运算

定理：设 $W_i\ (i\in I)$ 为 V 的子空间. 则 $\bigcap\limits_{i\in I} W_i$ 也为 V 的子空间.

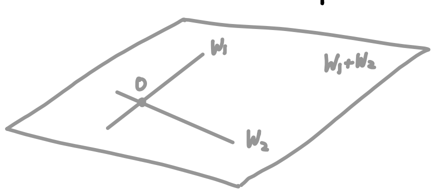
特别地，设 W_1, W_2 为 V 的子空间. 则 $W_1\cap W_2$ 也为 V 的子空间.

证：$\alpha,\beta\in\bigcap\limits_{i\in I}W_i \Rightarrow \lambda\alpha+\mu\beta\in W_i\ (\forall i\in I) \Rightarrow \lambda\alpha+\mu\beta\in\bigcap\limits_{i\in I}W_i$ □

定理：设 W_1, W_2 为 V 的子空间. 则 W_1 与 W_2 的和

$$W_1+W_2 := \{\alpha_1+\alpha_2 \mid \alpha_1\in W_1,\ \alpha_2\in W_2\}$$

构成 V 的子空间，并且是包含 $W_1\cup W_2$ 的最小子空间.



类似地

$W_1+W_2+\cdots+W_n := \{\alpha_1+\cdots+\alpha_n \mid \alpha_i\in W_i\quad i=1,\cdots,n\}$

证：$\lambda(\alpha_1+\alpha_2)+\mu(\beta_1+\beta_2) = (\lambda\alpha_1+\mu\beta_1)+(\lambda\alpha_2+\mu\beta_2)\in W_1+W_2$

$W_1\cup W_2\subseteq W_1+W_2$ ✓，反之 $\forall\ W_1\cup W_2\subset W \Rightarrow \alpha_1+\alpha_2\in W \Rightarrow W_1+W_2\subseteq W$. □

定理：$\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_r\rangle+\langle\beta_1,\cdots,\beta_s\rangle=\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_s\rangle$

定理(维数公式)：$W_1, W_2\subseteq V$ 子空间. 则

$$\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)$$

证：$\dim W_1=r$，$\dim W_2=s$，$\dim(W_1\cap W_2)=t$.

$\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 为 $W_1\cap W_2$ 的基.

$$\alpha_1,\cdots,\alpha_t \begin{cases} \xrightarrow{\text{扩充}} \alpha_1,\cdots\alpha_t,\beta_1\cdots\beta_{r-t} \text{ 为 } W_1 \text{ 的基} \\ \xrightarrow{\text{扩充}} \alpha_1,\cdots\alpha_t,\gamma_1,\cdots\gamma_{s-t} \text{ 为 } W_2 \text{ 的基} \end{cases}$$

$$\Rightarrow W_1+W_2 = \langle \alpha_1,\cdots,\alpha_t,\beta_1,\cdots,\beta_{r-t},\gamma_1,\cdots,\gamma_{s-t} \rangle$$

以下仅需证明：$\alpha_1,\cdots\alpha_t,\beta_1,\cdots,\beta_{r-t},\gamma_1,\cdots,\gamma_{s-t}$ 线性无关.

设 $\sum_{i=1}^{t}\lambda_i\alpha_i + \sum_{i=1}^{r-t}\mu_i\beta_i + \sum_{i=1}^{s-t}\nu_i\gamma_i = 0$ 则

$$\sum_{i=1}^{t}\lambda_i\alpha_i + \sum_{i=1}^{r-t}\mu_i\beta_i = -\sum_{i=1}^{s-t}\nu_i\gamma_i \in W_1\cap W_2$$

$$\Rightarrow -\sum_{i=1}^{s-t}\nu_i\gamma_i = \sum_{i=1}^{t}\delta_i\alpha_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{t}\delta_i\alpha_i + \sum_{i=1}^{s-t}\nu_i\gamma_i = 0$$

$$\Rightarrow \nu_i = 0 \quad i=1,\cdots,s-t.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{t}\lambda_i\alpha_i + \sum_{i=1}^{r-t}\mu_i\beta_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_i = 0 & i=1,\cdots,t \\ \mu_i=0, & i=1,\cdots,r-t. \end{cases}$$

$\Rightarrow \{\alpha_1,\cdots,\alpha_t,\beta_1,\cdots,\beta_{r-t},\gamma_1,\cdots,\gamma_{s-t}\}$ 线性无关.

推论：$\dim(W_1+W_2) = \dim(W_1)+\dim(W_2) \Leftrightarrow W_1\cap W_2=\{0\}$.

定义：设 W_1, W_2 为 V 的子空间，若 $\forall \alpha \in W_1+W_2$ 可唯一的写成

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \qquad \alpha_1 \in W_1,\ \alpha_2 \in W_2$$

则称 W_1+W_2 为直和，记为 $W_1 \oplus W_2$。

若 $V = W_1 \oplus W_2$，则称 W_1 为 W_2 的补空间

定理：设 W_1, W_2 为 V 的子空间，则以下等价。

1) W_1+W_2 为直和
2) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$
3) $\dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$
4) $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ 为 W_1 的基，$\beta_1 \cdots \beta_s$ 为 W_2 的基，则 $\alpha_1 \cdots \alpha_r, \beta_1 \cdots \beta_s$ 为 W_1+W_2 的基。

证：(1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4)

例：$F^{n\times n} = \{$对称矩阵$\} \oplus \{$反对称矩阵$\}$.