§8.4 二次曲线与曲面的分类

平面二次曲线：$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c=0$

$$A:=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

定理 $\Rightarrow$ $\exists$ 二阶正交矩阵 P 使 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ 变换 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ 可消去交叉项且保持曲线形状

$\Rightarrow$ 原方程化为 $\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+2b_1'x'+2b_2'y'+c'=0$

$A\neq 0 \Rightarrow \lambda_1\neq 0$ or $\lambda_2\neq 0$ (不妨设 $\lambda_1\neq 0$)

坐标轴平移 $\tilde{x}=x'+b_1'/\lambda_1$, $\tilde{y}=\begin{cases} y'+b_2'/\lambda_2 & \lambda_2\neq 0 \\ y' & \lambda_2=0 \end{cases}$

1° 椭圆型 ($\lambda_1\lambda_2>0$)

$$\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2=\lambda_3$$

2° 双曲型 ($\lambda_1\lambda_2<0$)

$$\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2=\lambda_3$$

3° 抛物型 ($\lambda_1\lambda_2=0$)

$$\lambda_1\tilde{x}^2+2\tilde{b}_2\tilde{y}+\tilde{c}=0$$

注意到旋转变换为正交变换，我们考虑如下旋转变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

若 $a_{12} \neq 0$，则方程中交叉项消除

$$\Leftrightarrow (a_{22}-a_{11})\sin\theta\cos\theta + a_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cot 2\theta = \frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}$$

二次曲面:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$$
$$+2b_1x+2b_2y+2b_3z+c=0$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \exists \text{ 正交阵 } P \text{ s.t.}$$

$$P^TAP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+\lambda_3(z')^2+2b_1'x'+2b_2'y'+2b_3'z'+c'=0$$

$A\neq 0 \Rightarrow \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ 不全为零

1° 椭圆型 ($\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 同号)

$$\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2+\lambda_3\tilde{z}^2=\lambda_4$$

2° 双曲面型 ($\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ 非零不同号, $\lambda_4\neq 0$) → 单叶 / 双叶

$$\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2+\lambda_3\tilde{z}^2=\lambda_4$$

3° 二次锥面. ($\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 非零不同号)

$$\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2+\lambda_3\tilde{z}^2=0$$

椭圆抛物面

双曲抛物面

4° 抛物型 ($\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 中仅两个非零, 不妨设 $\lambda_1,\lambda_2\neq 0$)

$$\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2+2\tilde{b}_3\tilde{z}=0$$

5° 二次柱面 ($\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 至少一个为零; 不妨设 $\lambda_1\neq 0, \lambda_3=0$)

$$\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2+2\tilde{b}_2\tilde{y}+c=0$$

椭圆柱面 双曲柱面 抛物柱面

例: $4x^2+8xy+4y^2+13x+3y+4=0$

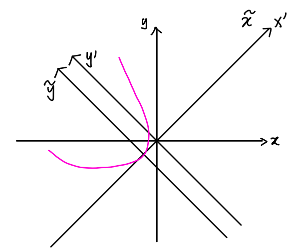
$$\cot 2\theta=\frac{4-4}{2\times 8}=0$$

$\Rightarrow$ 可取 $\theta=\frac{\pi}{4}$. 取坐标变换 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2} & -\frac{\sqrt2}{2}\\ \frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad 8(x')^2+8\sqrt2\,x'-5\sqrt2\,y'+4=0$

$\Rightarrow \quad 8\left(x'+\frac{\sqrt2}{2}\right)^2=5\sqrt2\,y'$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2}\\ -\frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$



例 $x^2+4y^2+z^2-4xy-8xz-4yz-1=0$

解 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & 4 & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix}$

1° 求正交阵 P s.t. $P^TAP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow P=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad P^TAP=\begin{pmatrix} 5 & & \\ & 5 & \\ & & -4 \end{pmatrix}$$

2° $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow 5x'^2+5y'^2-4z'^2=1.$

$\Rightarrow$ 单叶双曲面.

另解：(配方法)

$$\Rightarrow (x-2y-4z)^2-15z^2-20yz-1=0$$

$$\Rightarrow (x-2y-4z)^2-15\left(z+\frac{2}{3}y\right)^2+\frac{20}{3}y^2=1$$

$\Rightarrow \tilde{x}^2+\tilde{y}^2-\tilde{z}^2=1 \Rightarrow$ 单叶双曲面