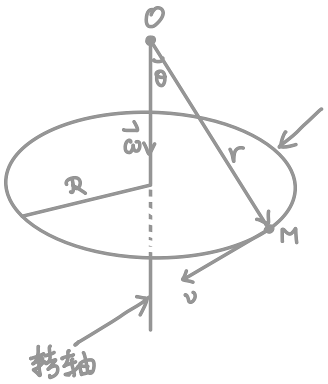
§1.4 向量的向量积



物理 $\Rightarrow \begin{cases} v \perp OM \ \& \ v \perp \omega \\ |v| = \omega \cdot R \end{cases}$

角速度向量 $\vec{\omega} := \begin{cases} \text{大小} \ \ \omega \\ \text{方向 平行于转轴，} \vec{\omega}, r, v \text{ 右手法则} \end{cases}$

$\Rightarrow |v| = |\vec{\omega}| \cdot R = |\vec{\omega}| \cdot |r| \sin\theta$

向量 $\vec{\omega}, \vec{r}$ 决定 $\vec{v}$. $\overset{\text{推广}}{\Longrightarrow}$ 向量积

定义 1.4.1 a, b 的**向量积**

$$a \times b := \begin{cases} \text{大小} & |a| \cdot |b| \cdot \sin\theta \ \ (\theta\text{: 夹角}) \quad (\text{平行四边形的面积}) \\ \text{方向：} & a\times b \perp a \ \& \ a\times b \perp b \ \& \ a, b, a\times b \text{ 右手系} \end{cases}$$

命题 1.4.1

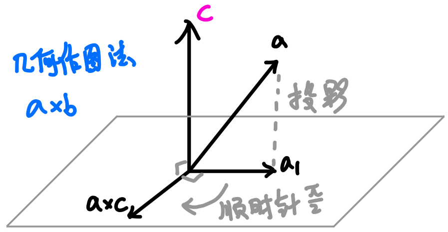
1) $a \times b = - b \times a$ ✓

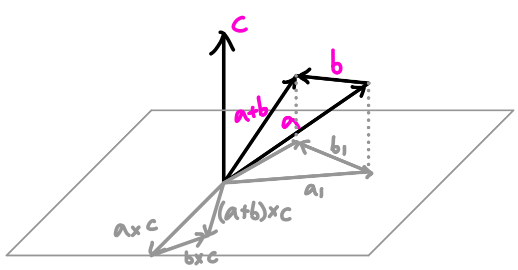
2) $(\lambda a) \times b = \lambda (a \times b) = a \times (\lambda b)$ ✓

3) $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$?

Pf： 不妨设 c 为单位向量.

几何作图法 $a \times b$





□ 1-4-1

§1.4.2 直角坐标系下向量积的计算

$[O; i, j, k]$ = 直角坐标系

$$\begin{cases} i\times i = j\times j = k\times k = 0 \\ i\times j = k, \quad j\times k = i, \quad k\times i = j \end{cases}$$

公式：$(a_1 i + a_2 j + a_3 k)\times(b_1 i + b_2 j + b_3 k) = (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k$

2阶和3阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} := a_1 b_1 - a_2 b_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} := a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

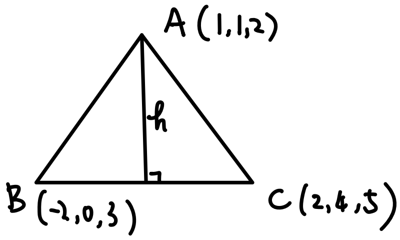
公式：$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

例：求垂直于 $a=(-1,2,1)$ & $b=(1,0,3)$ 的单位向量.

解：$a\times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6i + 4j - 2k \Rightarrow |a\times b| = 2\sqrt{14}$

$\Rightarrow$ 单位向量为 $\pm\frac{1}{\sqrt{14}}(3,2,-1)$.

例：



$S_{\triangle ABC} = ?$

$h = ?$

解：$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|-6i + 10j - 8k\right|$

$= 5\sqrt{2}$

$$h := \frac{2S_{\triangle ABC}}{|\vec{BC}|} = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{4^2+4^2+2^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{3} \qquad \square$$