§7.2 内积的表示与标准正交基

F-线性空间 $V \xrightarrow[1:1]{\text{基}(\alpha_1\cdots\alpha_n)} F^n$ $\quad \alpha=(\alpha_1\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$

V上的F-线性变换 $\xrightarrow[1:1]{\text{基}(\alpha_1\cdots\alpha_n)} F^{n\times n}$ $\quad \mathcal{A}(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)A$

V=欧氏空间．$\alpha_1,\cdots\alpha_n$为V上的一组基．

$\forall\ \alpha=a_1\alpha_1+\cdots+a_n\alpha_n$，$\beta=b_1\alpha_1+\cdots+b_n\alpha_n\in V$．

$$(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j\cdot(\alpha_i,\alpha_j)$$

$\Rightarrow$ $(\ ,\ )$ 由 值 $g_{ij}=(\alpha_i,\alpha_j)$ $(1\leq i,j\leq n)$ 唯一确定．

记 $G=(g_{ij})_{n\times n}$．称G为内积$(\ ,\ )$在基$\alpha_1\cdots\alpha_n$下的度量矩阵．

$x:=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix}$，$y:=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix}$ 则 $(\alpha,\beta)=x^TGy$．

性质：G为实对称矩阵，满足 $x^TGx\geq 0$，且"="$\Leftrightarrow x=0$．

称满足如上性质的实对称方阵为正定矩阵．因此内积的度量矩阵为正定矩阵．反之，$\forall$ 正定矩阵G，则

$$(\alpha,\beta):=x^TGy$$

给出V上的一个内积．

V上的内积 $\xrightarrow[1:1]{\text{基}\ \alpha_1\cdots\alpha_n}$ 実上n阶正定矩阵

$(\ ,\ ) \longmapsto G=((\alpha_i,\alpha_j))_{n\times n}$

问题　1) 不同基下度量矩阵之间的关系
　　　2) 度量矩阵的最简形式

V = 欧氏空间，两组基

可逆

$$(\eta_1,\cdots,\eta_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)P$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=(\alpha_1\cdots\alpha_n)x=(\eta_1\cdots\eta_n)\bar{x}\\ \beta&=(\alpha_1\cdots\alpha_n)y=(\eta_1\cdots\eta_n)\bar{y}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}x&=P\bar{x}\\ y&=P\bar{y}\end{aligned}\right.$$

设 $(\,,\,)$ 在 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 和 $\eta_1\cdots\eta_n$ 下的度量矩阵为 G 和 $\bar{G}$，则

$$\left.\left\{\begin{aligned}(\alpha,\beta)&=x^TGy=\bar{x}^TP^TGP\bar{x}\\ (\alpha,\beta)&=\bar{x}^T\bar{G}\bar{y}\end{aligned}\right.\right\}\Rightarrow\bar{G}=P^TGP$$

定义：两矩阵 $G,\bar{G}$ 称为相合，若存在可逆阵 P 使得

$$\bar{G}=P^TGP.$$

性质：1) 内积在不同基下的度量矩阵相合.
　　　2) 相合为等价关系.

实对称矩阵的相合分类，以及相合标准形（第八章）

度量矩阵的最简形式？为了回答这一问题，我们需要引入标准正交基.

定义：$V=n$ 维欧氏空间.

- 正交向量组 = 一组两两正交的非零向量
- 正交基 = 由正交向量组构成的基.
- 标准正交基 = 由单位向量组成的正交基.

例：$\mathbb{R}^n$，$\left((x_1,\cdots,x_n)^T,(y_1,\cdots,y_n)^T\right):=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$. 则

$e_1,\cdots,e_n$ 为标准正交基.

推论：正交向量组线性无关.

证：设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 为正交向量组，则

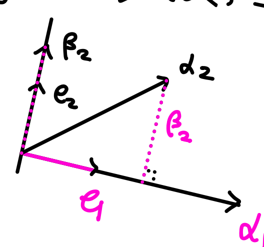
$$(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}|\alpha_i|^2\neq 0 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

若 $\mu_1\alpha_1+\cdots\mu_r\alpha_r=0$，则

$$0=(\alpha_i,\mu_1\alpha_1+\cdots+\mu_r\alpha_r)=\sum_{j=1}^{r}\mu_j(\alpha_i,\alpha_j)=\mu_i|\alpha_i|^2$$

$\Rightarrow\mu_i=0\Rightarrow\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关

定理（Schmidt 正交化）：从欧氏空间的任意一组基出发，可以构造一组标准正交基.



证：设 $V=\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\rangle$.

$$e_1=\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}$$

找一个 $\langle e_1,\alpha_2\rangle$ 中与 e_1 垂直的向量 $\beta=\alpha_2-\lambda_1 e_1$。$e_1\perp\beta\Rightarrow\lambda_1=(\alpha_2,e_1)$ 即

$$\beta_2=\alpha_2-(\alpha_2,e_1)e_1\neq 0\quad\Rightarrow e_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}$$

找一个 $\langle e_1,e_2,\alpha_3\rangle$ 中与 e_1,e_2 垂直的向量 $\beta=\alpha_3-\lambda_1 e_1-\lambda_2 e_2$，则

$$\beta_3=\alpha_3-(\alpha_3,e_1)e_1-(\alpha_2,e_2)e_2\neq 0\quad\Rightarrow e_3=\frac{\beta_3}{|\beta_3|}$$

$\vdots$

找一个 $\langle e_1,e_2,\cdots,e_{k-1},\alpha_k\rangle$ 中与 $e_1,\cdots,e_{k-1}$ 垂直的向量 β

$$\beta_k=\alpha_k-\sum_{i=1}^{k-1}(\alpha_k,e_i)e_i$$

显然 $\beta_k\neq 0\ (\forall k)$ 否则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 线性相关。

$$\Rightarrow e_k=\frac{\beta_k}{|\beta_k|}$$

$\vdots$

直到 $k=n$，就得到一组标准正交基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$，满足

$$\langle e_1,\cdots,e_k\rangle=\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_k\rangle\quad\forall\ 1\leq k\leq n.\qquad\square$$

例：标准正交化：

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\quad\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$e_1=\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad\beta_2=\alpha_2-(\alpha_2,e_1)e_1=\alpha_2-\frac12\alpha_1=\begin{pmatrix}\frac12\\-\frac12\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}\qquad\beta_3=\alpha_3-(\alpha_3,e_1)e_1-(\alpha_3,e_2)e_2=\frac13\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e_3=\frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\3\end{pmatrix}\qquad\beta_4=\alpha_4-\sum_{i=1}^{3}(\alpha_i,e_i)e_i=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow e_4=\frac12\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$