线性代数　中国科学技术大学 2023 春
向量与数域

主讲: 杨金榜
地空楼 525
助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

2023 年 3 月 7 号

课程考核方式

1. 考核成绩为平时成绩、期中成绩和期末成绩加权平均. 例如, 去年的比重是 2:4:4. 具体权重会由线性代数课题组根据期中和期末考试的难易度来确定.
2. 平时成绩包含作业成绩和上课考勤两部分.

什么是线性代数 (linear algebra)?

什么是线性代数 (linear algebra)?

线性代数是关于向量空间和线性映射的一个数学分支。

——维基百科

什么是线性代数 (linear algebra)?

线性代数是关于向量空间和线性映射的一个数学分支。

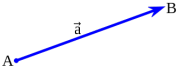
——维基百科

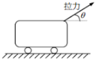
线性代数的方法广泛的用在数学其他分支、物理化学、计算机科学、经济学等学科中。例如

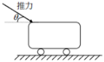
1. 泛函分析 (研究函数组成的空间);
2. 量子力学 (波函数, 密度泛函理论);
3. 科学计算 (天气预报);
4. 机器学习 (运动学正解);
5. 数据传输 (编码理论);
6. · · ·

什么是向量

我们初中学习过一些物理量包括速度、位移、力等等.

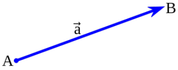


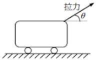


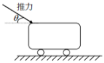


什么是向量

我们初中学习过一些物理量包括速度、位移、力等等.







数学上的抽象总结:

向量 = 既有<u>大小</u>, 又有<u>方向</u>的量.

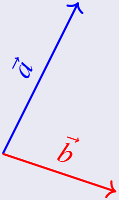
向量加法

$$\text{速度, 力的合成} \xRightarrow{\text{用数学语言抽象化}} \text{向量的加法}$$

向量加法

速度, 力的合成 $\xRightarrow{\text{用数学语言抽象化}}$ 向量的加法

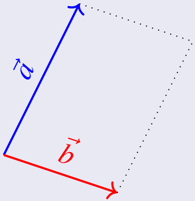
定义 (向量的加法—平行四边形法则或者三角形法则)



向量加法

速度, 力的合成 $\xRightarrow{\text{用数学语言抽象化}}$ 向量的加法

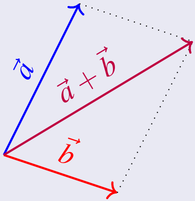
定义 (向量的加法—平行四边形法则或者三角形法则)



向量加法

速度, 力的合成 $\xrightarrow{\text{用数学语言抽象化}}$ 向量的加法

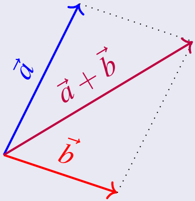
定义 (向量的加法—平行四边形法则或者三角形法则)

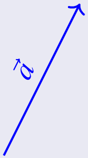


向量加法

速度, 力的合成 $\xRightarrow{\text{用数学语言抽象化}}$ 向量的加法

定义 (向量的加法—平行四边形法则或者三角形法则)

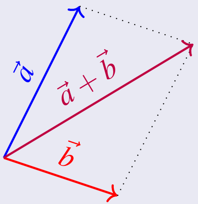


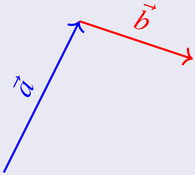


向量加法

速度, 力的合成 $\xRightarrow{\text{用数学语言抽象化}}$ 向量的加法

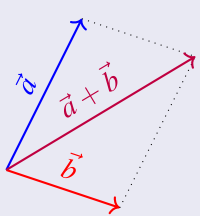
定义 (向量的加法—平行四边形法则或者三角形法则)

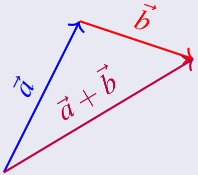




速度, 力的合成 $\xRightarrow{\text{用数学语言抽象化}}$ 向量的加法

定义 (向量的加法—平行四边形法则或者三角形法则)





性质 (向量加法的基本性质)

向量加法的基本性质

性质 (向量加法的基本性质)

1. 加法交换律: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

向量加法的基本性质

性质 (向量加法的基本性质)

1. 加法交换律: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2. 加法结合律: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$;

向量加法的基本性质

性质 (向量加法的基本性质)

1. 加法交换律: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2. 加法结合律: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$;
3. 存在零元: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}=\vec{0}+\vec{a}$;

性质 (向量加法的基本性质)

1. 加法交换律: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2. 加法结合律: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$;
3. 存在零元: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}=\vec{0}+\vec{a}$;
4. 存在负元: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}=(-\vec{a})+\vec{a}$;

向量加法的基本性质

性质 (向量加法的基本性质)

1. 加法交换律: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2. 加法结合律: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$;
3. 存在零元: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}=\vec{0}+\vec{a}$;
4. 存在负元: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}=(-\vec{a})+\vec{a}$;

定义 (向量的减法)

$$\vec{a}-\vec{b}:=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

向量加法的基本性质

性质 (向量加法的基本性质)

1. 加法交换律: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2. 加法结合律: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$;
3. 存在零元: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}=\vec{0}+\vec{a}$;
4. 存在负元: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}=(-\vec{a})+\vec{a}$;

定义 (向量的减法)

$$\vec{a}-\vec{b}:=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

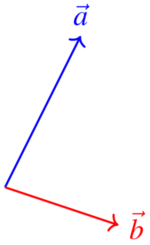
向量加法的基本性质

性质 (向量加法的基本性质)

1. 加法交换律: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2. 加法结合律: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$;
3. 存在零元: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}=\vec{0}+\vec{a}$;
4. 存在负元: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}=(-\vec{a})+\vec{a}$;

定义 (向量的减法)

$$\vec{a}-\vec{b}:=\vec{a}+(-\vec{b}).$$



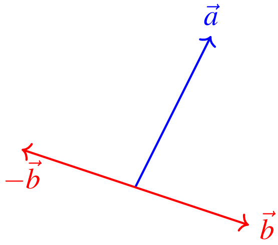
向量加法的基本性质

性质 (向量加法的基本性质)

1. 加法交换律: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2. 加法结合律: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$;
3. 存在零元: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}=\vec{0}+\vec{a}$;
4. 存在负元: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}=(-\vec{a})+\vec{a}$;

定义 (向量的减法)

$$\vec{a}-\vec{b}:=\vec{a}+(-\vec{b}).$$



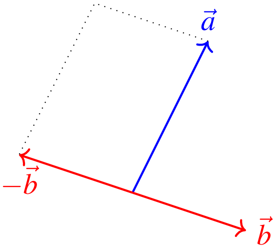
向量加法的基本性质

性质 (向量加法的基本性质)

1. 加法交换律: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2. 加法结合律: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$;
3. 存在零元: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}=\vec{0}+\vec{a}$;
4. 存在负元: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}=(-\vec{a})+\vec{a}$;

定义 (向量的减法)

$$\vec{a}-\vec{b}:=\vec{a}+(-\vec{b}).$$



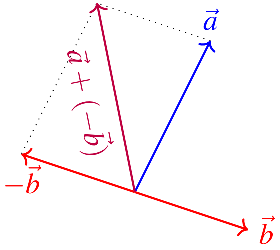
向量加法的基本性质

性质 (向量加法的基本性质)

1. 加法交换律: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2. 加法结合律: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$;
3. 存在零元: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}=\vec{0}+\vec{a}$;
4. 存在负元: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}=(-\vec{a})+\vec{a}$;

定义 (向量的减法)

$$\vec{a}-\vec{b}:=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

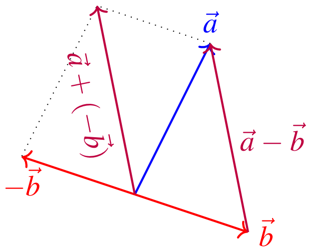


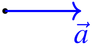
性质 (向量加法的基本性质)

1. 加法交换律: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2. 加法结合律: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$;
3. 存在零元: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}=\vec{0}+\vec{a}$;
4. 存在负元: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}=(-\vec{a})+\vec{a}$;

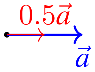
定义 (向量的减法)

$$\vec{a}-\vec{b}:=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

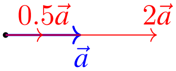



$\vec{a}$

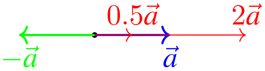
向量的数乘



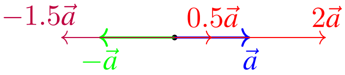
向量的数乘



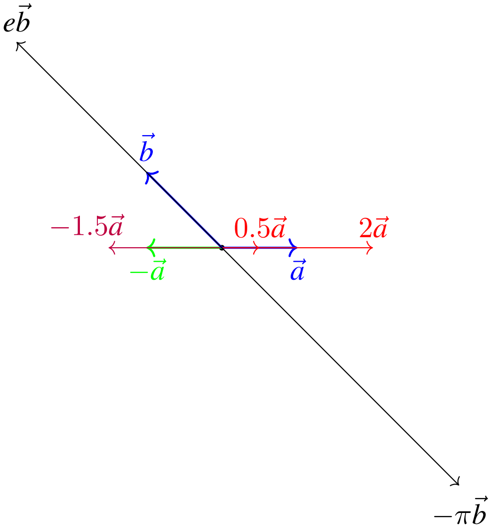
向量的数乘



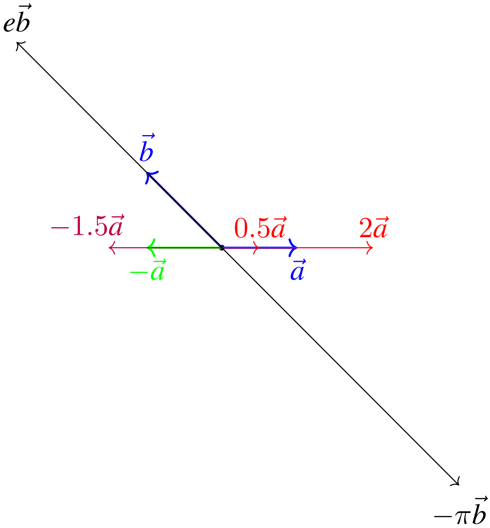
向量的数乘



向量的数乘



向量的数乘



定义 (向量的数乘)

令 $\vec{a}$ 为一向量, λ 为一实数.

- 若 $\lambda \geq 0$, 则 $\lambda\vec{a}$ 定义为长度为 $\lambda|\vec{a}|$ 且方向与 $\vec{a}$ 相同的向量.

定义 (向量的数乘)

令 $\vec{a}$ 为一向量, λ 为一实数.

- 若 $\lambda \geq 0$, 则 $\lambda\vec{a}$ 定义为长度为 $\lambda|\vec{a}|$ 且方向与 $\vec{a}$ 相同的向量.
- 若 $\lambda < 0$, 则 $\lambda\vec{a}$ 定义为长度为 $-\lambda|\vec{a}|$ 且方向与 $\vec{a}$ 相反的向量.

定义 (向量的数乘)

令 $\vec{a}$ 为一向量, λ 为一实数.

- 若 $\lambda \geq 0$, 则 $\lambda\vec{a}$ 定义为长度为 $\lambda|\vec{a}|$ 且方向与 $\vec{a}$ 相同的向量.
- 若 $\lambda < 0$, 则 $\lambda\vec{a}$ 定义为长度为 $-\lambda|\vec{a}|$ 且方向与 $\vec{a}$ 相反的向量.

记号: 若 $\vec{a} \neq \vec{0}$, 则记 $\vec{a}^0 := \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$. 即, $\vec{a}^0$ 为方向与 $\vec{a}$ 相同的单位向量.

定义 (向量的数乘)

令 $\vec{a}$ 为一向量, λ 为一实数.

- 若 $\lambda \geq 0$, 则 $\lambda\vec{a}$ 定义为长度为 $\lambda|\vec{a}|$ 且方向与 $\vec{a}$ 相同的向量.
- 若 $\lambda < 0$, 则 $\lambda\vec{a}$ 定义为长度为 $-\lambda|\vec{a}|$ 且方向与 $\vec{a}$ 相反的向量.

记号: 若 $\vec{a} \neq \vec{0}$, 则记 $\vec{a}^0 := \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$. 即, $\vec{a}^0$ 为方向与 $\vec{a}$ 相同的单位向量.

注: 零向量:$|\vec{a}| = 0$. 规定任意方向都为零向量的方向.

性质 (向量数乘的基本性质)

向量数乘的基本性质

性质 (向量数乘的基本性质)

5. 数乘单位元: $1\vec{a} = \vec{a}$;

性质 (向量数乘的基本性质)

5. 数乘单位元: $1\vec{a} = \vec{a}$;
6. 数乘结合律: $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$;

向量数乘的基本性质

性质 (向量数乘的基本性质)

5. 数乘单位元: $1\vec{a} = \vec{a}$;
6. 数乘结合律: $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$;
7. 左分配律: $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;

性质 (向量数乘的基本性质)

5. 数乘单位元: $1\vec{a} = \vec{a}$;
6. 数乘结合律: $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$;
7. 左分配律: $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;
8. 右分配律: $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;

定义 (线性运算)

向量的加法和数乘运算统称为向量的线性运算.

线性运算

定义 (线性运算)

向量的加法和数乘运算统称为向量的线性运算.

性质 (向量集合上线性运算的八条基本性质)

1. 加法交换律: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2. 加法结合律: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$;
3. 存在零元: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}=\vec{0}+\vec{a}$;
4. 存在负元: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}=(-\vec{a})+\vec{a}$;
5. 数乘单位元: $1\vec{a}=\vec{a}$;
6. 数乘结合律: $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$;
7. 左分配律: $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;
8. 右分配律: $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;

线性运算

定义 (线性运算)

向量的加法和数乘运算统称为向量的线性运算.

性质 (向量集合上线性运算的八条基本性质)

1. 加法交换律: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2. 加法结合律: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$;
3. 存在零元: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}=\vec{0}+\vec{a}$;
4. 存在负元: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}=(-\vec{a})+\vec{a}$;
5. 数乘单位元: $1\vec{a}=\vec{a}$;
6. 数乘结合律: $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$;
7. 左分配律: $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;
8. 右分配律: $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;

注：我们将通过这八条性质来公理化地定义一般的线性空间或向量空间 (第五章).

空间与全体向量集

$$
\begin{array}{ccc}
\text{空间} & \xleftrightarrow[\text{固定一个点 } O(\text{原点})]{1:1} & \text{全体向量集} \\
P & \longmapsto & \overrightarrow{OP}
\end{array}
$$

空间与全体向量集

$$\text{空间} \xleftrightarrow[\text{固定一个点 } O(\text{原点})]{1:1} \text{全体向量集}$$

$$P \longmapsto \overrightarrow{OP}$$

例

设 $\vec{a}$ 为一个非零向量。则

$$\text{过原点与 } \vec{a} \text{ 平行的直线} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\lambda\vec{a} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

线性组合

定义 (线性组合)

设 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 为一组向量, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 为一组实数. 称向量

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m$$

为向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 的线性组合.

线性组合

定义 (线性组合)

设 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 为一组向量, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 为一组实数. 称向量

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m$$

为向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 的线性组合.

也就是说, 一组向量的线性组合就是从这组向量出发通过线性运算能够获得的向量.

线性组合

定义 (线性组合)

设 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 为一组向量, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 为一组实数. 称向量

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m$$

为向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 的线性组合.

也就是说, 一组向量的线性组合就是从这组向量出发通过线性运算能够获得的向量.

线性组合

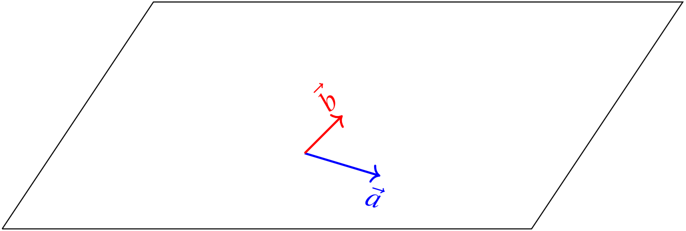
定义 (线性组合)

设 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 为一组向量, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 为一组实数. 称向量

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m$$

为向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 的线性组合.

也就是说, 一组向量的线性组合就是从这组向量出发通过线性运算能够获得的向量.



线性组合

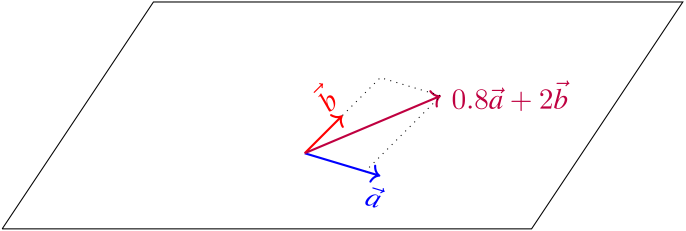
定义 (线性组合)

设 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 为一组向量, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 为一组实数. 称向量

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m$$

为向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 的线性组合.

也就是说, 一组向量的线性组合就是从这组向量出发通过线性运算能够获得的向量.



线性组合

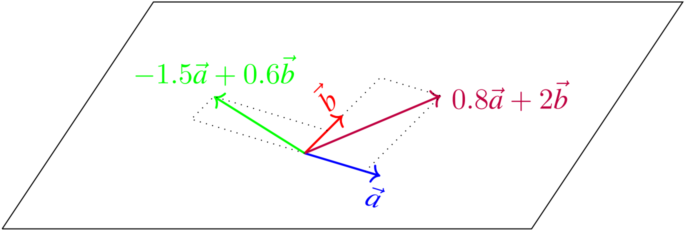
定义 (线性组合)

设 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 为一组向量, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 为一组实数. 称向量

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m$$

为向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 的线性组合.

也就是说, 一组向量的线性组合就是从这组向量出发通过线性运算能够获得的向量.



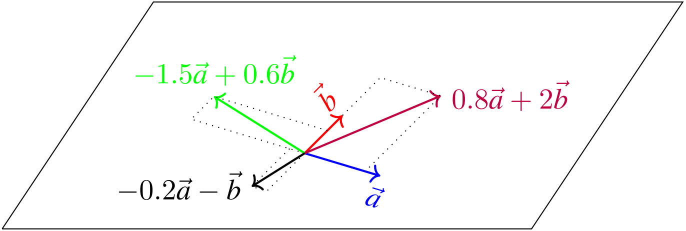
定义 (线性组合)

设 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 为一组向量, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 为一组实数. 称向量

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m$$

为向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 的线性组合.

也就是说, 一组向量的线性组合就是从这组向量出发通过线性运算能够获得的向量.



定义 (线性相关, 线性无关)

给定一组向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$.

- 如果存在一组不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 使得

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m = 0,$$

  则称向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$线性相关.

定义 (线性相关, 线性无关)

给定一组向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$.

- 如果存在一组不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 使得
$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m = 0,$$
则称向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$线性相关.
- 反之, 若对任意一组不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 都有
$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m \neq 0,$$
则称向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 的线性无关.

定义 (线性相关, 线性无关)

给定一组向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$.

- 如果存在一组不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 使得
$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m = 0,$$
则称向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$线性相关.
- 反之, 若对任意一组不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 都有
$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m \neq 0,$$
则称向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 的线性无关.

特别地，设 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$线性无关. 若 $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m = 0$, 则 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$.

线性相关与线性无关

定义 (线性相关, 线性无关)

给定一组向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$.

- 如果存在一组不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 使得

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m = 0,$$

  则称向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 线性相关.

- 反之, 若对任意一组不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 都有

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m \neq 0,$$

  则称向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 的线性无关.

特别地，设 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 线性无关. 若 $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m = 0$, 则 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$.

例

向量组 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}, \vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c}$ 线性相关。

线性相关的几何解释

1. 一个向量 $\vec{a}$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ $\vec{a} = 0$;

线性相关的几何解释

1. 一个向量 $\vec{a}$ 线性相关 $\iff \vec{a}=0$;
2. 两个向量 $\vec{a},\vec{b}$ 线性相关 $\iff \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行 (共线);

线性相关的几何解释

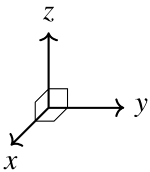
1. 一个向量 $\vec{a}$ 线性相关 $\iff \vec{a}=0$;
2. 两个向量 $\vec{a},\vec{b}$ 线性相关 $\iff \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行 (共线);
3. 三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 线性相关 $\iff \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面;

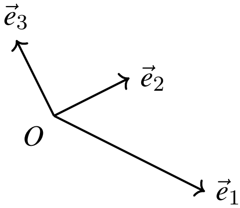
线性相关的几何解释

1. 一个向量 $\vec{a}$ 线性相关 $\iff$ $\vec{a}=0$;
2. 两个向量 $\vec{a},\vec{b}$ 线性相关 $\iff$ $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行 (共线);
3. 三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 线性相关 $\iff$ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面;
4. 四个及四个以上的向量一定线性相关.

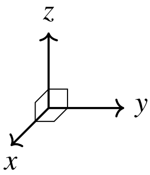
仿射坐标系

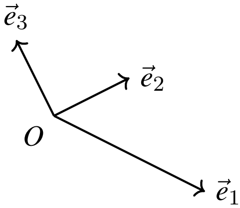
为了推广笛卡尔坐标系到坐标轴不相互垂直的情形,





为了推广笛卡尔坐标系到坐标轴不相互垂直的情形,





我们需要引入向量的基本定理.

定理 (向量的基本定理)

设 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 为空间中的三个不共面的向量, 则对每个向量 $\vec{a}$ 都存在唯一的三元有序实数组 (x_1, x_2, x_3), 使得

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3.$$

定义 (基、坐标)

称不共面的三个向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 为一组基. 若

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3,$$

则称 (x_1, x_2, x_3) 为向量 $\vec{a}$ 在基 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 下的(仿射) 坐标.

定义 (基、坐标)

称不共面的三个向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 为一组基. 若

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3,$$

则称 (x_1, x_2, x_3) 为向量 $\vec{a}$ 在基 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 下的(仿射) 坐标.

$$\boxed{\text{仿射坐标系} = \text{点}O + \text{基}\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \qquad \text{记作}[O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3].}$$

仿射坐标系

定义 (基、坐标)

称不共面的三个向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 为一组基. 若

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3,$$

则称 (x_1, x_2, x_3) 为向量 $\vec{a}$ 在基 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 下的(仿射) 坐标.

$$\boxed{\text{仿射坐标系} = \text{点}O + \text{基}\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \qquad \text{记作}[O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3].}$$

推论 (一一对应)

若给定仿射坐标系 $[O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]$, 则有如下一一对应

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \text{空间} & \xleftrightarrow{1:1} & \text{全体向量集} & \xleftrightarrow{1:1} & \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \overrightarrow{OP} & \longmapsto & \text{坐标}(x_1, x_2, x_3) \end{array}}$$

给定仿射坐标系 $[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$, 我们用 (x_1,x_2,x_3) 表示向量 $x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3$.

给定仿射坐标系 $[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$, 我们用 (x_1,x_2,x_3) 表示向量 $x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3$. 则我们有

性质

- $(x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$;

给定仿射坐标系 $[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$, 我们用 (x_1,x_2,x_3) 表示向量 $x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3$. 则我们有

性质

- $(x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$;
- $\lambda(x_1,x_2,x_3)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)$.

坐标变换

给定两个仿射坐标系 $[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$ 和 $[O';\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3']$.

给定两个仿射坐标系 $[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$ 和 $[O';\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\vec{e}'_3]$.

问题

设空间中的点 P 在两个坐标系下的坐标分别为 (x,y,z) 和 (x',y',z'). 求两个坐标之间的关系式?

坐标变换

给定两个仿射坐标系 $[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$ 和 $[O';\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3']$.

问题

设空间中的点 P 在两个坐标系下的坐标分别为 (x,y,z) 和 (x',y',z'). 求两个坐标之间的关系式?

为了回答这一问题，我们需要给出两个坐标系之间的位置关系:

坐标变换

给定两个仿射坐标系 $[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$ 和 $[O';\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\vec{e}'_3]$.

问题

设空间中的点 P 在两个坐标系下的坐标分别为 (x,y,z) 和 (x',y',z'). 求两个坐标之间的关系式?

为了回答这一问题，我们需要给出两个坐标系之间的位置关系:

- 设 O 在 $[O';\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\vec{e}'_3]$ 下的坐标为 (x'_0,y'_0,z'_0). 即

$$\overrightarrow{O'O} = x_0\vec{e}'_1 + y_0\vec{e}'_2 + z_0\vec{e}'_3.$$

给定两个仿射坐标系 $[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$ 和 $[O';\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\vec{e}'_3]$.

问题

设空间中的点 P 在两个坐标系下的坐标分别为 (x,y,z) 和 (x',y',z'). 求两个坐标之间的关系式?

为了回答这一问题，我们需要给出两个坐标系之间的位置关系:

- 设 O 在 $[O';\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\vec{e}'_3]$ 下的坐标为 (x'_0,y'_0,z'_0). 即
$$\overrightarrow{O'O}=x_0\vec{e}'_1+y_0\vec{e}'_2+z_0\vec{e}'_3.$$
- 设 $\vec{e}_j$ 在基 $\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\vec{e}'_3$ 下的坐标为 (a_{1j},a_{2j},a_{3j}). 即
$$\vec{e}_j=a_{1j}\vec{e}'_1+a_{2j}\vec{e}'_2+a_{3j}\vec{e}'_3.$$

坐标变换

给定两个仿射坐标系 $[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$ 和 $[O';\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\vec{e}'_3]$.

问题

设空间中的点 P 在两个坐标系下的坐标分别为 (x,y,z) 和 (x',y',z'). 求两个坐标之间的关系式?

为了回答这一问题，我们需要给出两个坐标系之间的位置关系:

- 设 O 在 $[O';\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\vec{e}'_3]$ 下的坐标为 (x'_0,y'_0,z'_0). 即
$$\overrightarrow{O'O}=x_0\vec{e}'_1+y_0\vec{e}'_2+z_0\vec{e}'_3.$$
- 设 $\vec{e}_j$ 在基 $\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\vec{e}'_3$ 下的坐标为 (a_{1j},a_{2j},a_{3j}). 即
$$\vec{e}_j=a_{1j}\vec{e}'_1+a_{2j}\vec{e}'_2+a_{3j}\vec{e}'_3.$$

然后 P 在两个坐标系下的坐标之间的关系式可写为:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+x'_0\\ y' &= a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+y'_0\\ z' &= a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+z'_0 \end{aligned}}$$

给定两个仿射坐标系 $[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$ 和 $[O';\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\vec{e}'_3]$.

问题

设空间中的点 P 在两个坐标系下的坐标分别为 (x,y,z) 和 (x',y',z'). 求两个坐标之间的关系式?

为了回答这一问题，我们需要给出两个坐标系之间的位置关系：

- 设 O 在 $[O';\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\vec{e}'_3]$ 下的坐标为 (x'_0,y'_0,z'_0). 即

$$\overrightarrow{O'O}=x_0\vec{e}'_1+y_0\vec{e}'_2+z_0\vec{e}'_3.$$

- 设 $\vec{e}_j$ 在基 $\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\vec{e}'_3$ 下的坐标为 (a_{1j},a_{2j},a_{3j}). 即

$$\vec{e}_j=a_{1j}\vec{e}'_1+a_{2j}\vec{e}'_2+a_{3j}\vec{e}'_3.$$

然后 P 在两个坐标系下的坐标之间的关系式可写为：

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+x'_0\\ y' &= a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+y'_0\\ z' &= a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+z'_0 \end{aligned}}$$

$pf:\overrightarrow{O'P}=\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OP}.$

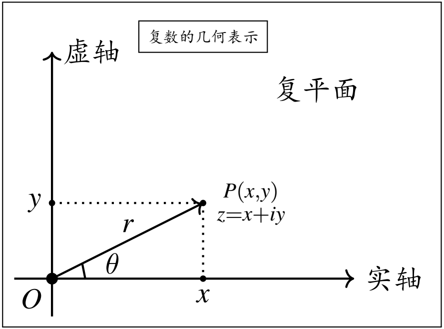
复数

复数的代数表示

$$z = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{实部} \\ \mathrm{Re}z}}{\underline{x}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{虚部} \\ \mathrm{Im}z}}{\underline{\overset{\substack{\sqrt{-1} \\ \downarrow}}{i}\, y}}$$

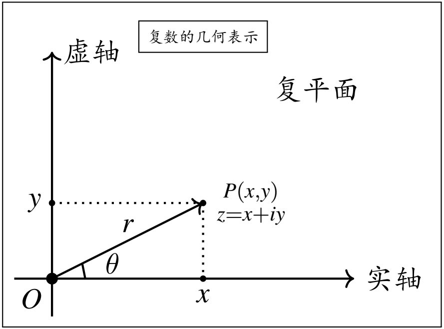
复数的代数表示

$$z = \underbrace{x}_{\substack{\uparrow \\ \text{实部} \\ \mathrm{Re}z}} + \underbrace{\overset{\substack{\sqrt{-1} \\ \downarrow}}{i}\,y}_{\substack{\uparrow \\ \text{虚部} \\ \mathrm{Im}z}}$$



复数的代数表示

$$z = \underbrace{x}_{\substack{\text{实部} \\ \mathrm{Re}z}} + \underbrace{i\,y}_{\substack{\text{虚部} \\ \mathrm{Im}z}}, \qquad i = \sqrt{-1}$$



- **模长**:
  $|z| := |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2}$;
- **辐角**: 实轴沿逆时针方向旋转到 $\overrightarrow{OP}$ 的角度.
- **共轭**: $\overline{z} := x - iy$.
- **三角表示**:
  $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

复数乘法的几何解释

设 $\omega = a + ib = t(\cos\varphi + i\sin\varphi)$。任取复平面中的点 $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，则根据复数的乘法和积化和差公式

$$\omega \cdot z = (ax - by) + i(bx + ay) = rt(\cos(\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi)).$$

复数乘法的几何解释

设 $\omega = a + ib = t(\cos\varphi + i\sin\varphi)$。任取复平面中的点 $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，则根据复数的乘法和积化和差公式

$$\omega \cdot z = (ax - by) + i(bx + ay) = rt(\cos(\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi)).$$

- 若用坐标表示复数, 则乘复数 ω 给出如下复平面的变换:

$$(x, y) \mapsto (ax - by, bx + ay).$$

复数乘法的几何解释

设 $\omega = a + ib = t(\cos\varphi + i\sin\varphi)$。任取复平面中的点 $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，则根据复数的乘法和积化和差公式

$$\omega \cdot z = (ax - by) + i(bx + ay) = rt(\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)).$$

- 若用坐标表示复数, 则乘复数 ω 给出如下复平面的变换:

$$(x, y) \mapsto (ax - by, bx + ay).$$

- 若用极坐标表示复数，则乘复数 ω 有如下几何解释:

$$z \xrightarrow{\text{伸缩 } t \text{ 倍}} tz \xrightarrow{\text{逆时针旋转 } \varphi \text{ 角度}} \omega z.$$

数域

复数域的任意子集称为数集. 例如: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R},\mathbb{C}, \cdots$.

数域

复数域的任意子集称为数集. 例如: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \cdots$.

定义

若数集 $\mathbb{F}$ 至少包含两个元素, 且关于数的加减乘除封闭, 那么称 $\mathbb{F}$ 为数域.

复数域的任意子集称为数集. 例如: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \cdots$.

定义

若数集 $\mathbb{F}$ 至少包含两个元素, 且关于数的加减乘除封闭, 那么称 $\mathbb{F}$ 为数域.

例如:$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ 不为数域. 而 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 均为数域.

数域

复数域的任意子集称为数集. 例如: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R},\mathbb{C}, \cdots$.

定义

若数集 $\mathbb{F}$ 至少包含两个元素, 且关于数的加减乘除封闭, 那么称 $\mathbb{F}$ 为数域.

例如:$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ 不为数域. 而 $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ 均为数域.

例

数集 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ 为一个数域.

数域

复数域的任意子集称为数集. 例如: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \cdots$.

定义

若数集 $\mathbb{F}$ 至少包含两个元素, 且关于数的加减乘除封闭, 那么称 $\mathbb{F}$ 为数域.

例如:$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ 不为数域. 而 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 均为数域.

例

数集 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ 为一个数域.

性质

有理数域 $\mathbb{Q}$ 为最小的数域. 即, 若 $\mathbb{F}$ 为数域, 则 $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{F}$.

设 $\mathbb{F}$ 为数域, n 为正整数.

高维数组向量的定义

设 $\mathbb{F}$ 为数域, n 为正整数.

定义

我们称一个由 n 个 $\mathbb{F}$ 上的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的有序数组

$$\vec{a} := (a_1, \cdots, a_n)$$

为数域 $\mathbb{F}$ 上的一个 n 维数组向量. 其中 a_i 称为 $\vec{a}$ 的第 i 个分量. 数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维数组向量全体记为 $\mathbb{F}^n$.

高维数组向量的定义

设 $\mathbb{F}$ 为数域, n 为正整数.

定义

我们称一个由 n 个 $\mathbb{F}$ 上的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的有序数组

$$\vec{a} := (a_1, \cdots, a_n)$$

为数域 $\mathbb{F}$ 上的一个 n 维数组向量. 其中 a_i 称为 $\vec{a}$ 的第 i 个分量. 数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维数组向量全体记为 $\mathbb{F}^n$.

记法:

行向量: $\vec{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{F}^n$　　列向量: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$

高维数组向量的线性运算

设 $\vec{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{F}^n, \vec{b} = (b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{F}^n, \lambda \in \mathbb{F}$.

- 加法: $\vec{a} + \vec{b} := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$.

高维数组向量的线性运算

设 $\vec{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{F}^n, \vec{b} = (b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{F}^n, \lambda \in \mathbb{F}$.

- 加法: $\vec{a} + \vec{b} := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$.
- 数乘: $\lambda\vec{a} := (\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n)$.

高维数组向量的线性运算

设 $\vec{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{F}^n$, $\vec{b} = (b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{F}^n$, $\lambda \in \mathbb{F}$.

- 加法: $\vec{a} + \vec{b} := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$.
- 数乘: $\lambda\vec{a} := (\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n)$.
- 零向量: $\vec{0} := (0, \cdots, 0)$.
- 负向量: $-\vec{a} := (-a_1, \cdots, -a_n)$.
- 相等: $\vec{a} = \vec{b} \iff a_i = b_i \quad i = 1, \cdots, n$.

高维数组向量的线性运算

设 $\vec{a}=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{F}^n$, $\vec{b}=(b_1,\cdots,b_n)\in\mathbb{F}^n$, $\lambda\in\mathbb{F}$.

- 加法: $\vec{a}+\vec{b}:=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$.
- 数乘: $\lambda\vec{a}:=(\lambda a_1,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n)$.
- 零向量: $\vec{0}:=(0,\cdots,0)$.
- 负向量: $-\vec{a}:=(-a_1,\cdots,-a_n)$.
- 相等: $\vec{a}=\vec{b}\iff a_i=b_i\quad i=1,\cdots,n$.

八条基本性质:

1. 加法交换律: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2. 加法结合律: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$;
3. 存在零元: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}=\vec{0}+\vec{a}$;
4. 存在负元: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}=(-\vec{a})+\vec{a}$;
5. 数乘单位元: $1\vec{a}=\vec{a}$;
6. 数乘结合律: $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$;
7. 左分配律: $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;
8. 右分配律: $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;

线性相关 (高维数组向量)

设 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n \in \mathbb{F}^n, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{F}$.

$$\boxed{\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m \qquad \longleftarrow \text{线性组合}}$$

线性相关 (高维数组向量)

设 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n \in \mathbb{F}^n, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{F}$.

$$\boxed{\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m \qquad \longleftarrow \text{线性组合}}$$

定义 (线性相关, 线性无关)

一组向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 称为线性相关, 若存在一组不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 使得

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m = 0.$$

反之, 则称向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 的线性无关.

例

记 $\vec{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, \vec{e}_n = (0, 0, \cdots, 1)$. 则 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ 线性无关. 称这 n 个向量为**基本向量**.

例

记 $\vec{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, \vec{e}_n = (0, 0, \cdots, 1)$. 则 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ 线性无关. 称这 n 个向量为基本向量.

事实

基本向量线性无关，且任意 n 维数组向量都可以表示为基本向量的线性组合.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n.$$

求和号

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

性质

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i; \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i$$

多重求和号

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} := \sum_{j=1}^{m}(a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{nj})$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} := \sum_{i=1}^{n}(a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{im})$$

多重求和号

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} := \sum_{j=1}^{m}(a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{nj})$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} := \sum_{i=1}^{n}(a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{im})$$

性质

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}.$$

有时候, 将这一值简记为 $\sum\limits_{1\le i,j\le n} a_{ij}$.

条件求和

$$\sum_{1\le i\le j\le n} a_{ij} := a_{11} + (a_{12} + a_{22}) + \cdots + (a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{nn}).$$

条件求和

$$\sum_{1\le i\le j\le n} a_{ij} := a_{11} + (a_{12} + a_{22}) + \cdots + (a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{nn}).$$

性质

$$\sum_{1\le i\le j\le n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij}.$$

条件求和

$$\sum_{1\le i\le j\le n} a_{ij} := a_{11} + (a_{12} + a_{22}) + \cdots + (a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{nn}).$$

性质

$$\sum_{1\le i\le j\le n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij}.$$

例

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right).$$