欧氏空间

空间距离公式 $d^2=x^2+y^2+z^2=(x,y,z)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

时空中的距离公式 $d^2=x^2+y^2+z^2-c^2t^2=(x,y,z,t)\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&-c^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$

Lorentz 空间

保持 Lorentz 内积的变换 $\Rightarrow$ Lorentz 变换

§8.1 二次型的矩阵表示

定义：1) 称实数域上的一个(含 n 个变元 $x_1,\cdots,x_n$ 的)齐次二次多项式为二次型.

2) $\forall$ 二次型 $Q(x_1,\cdots,x_n)$，$\exists!$ 实对称阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ s.t.

$$Q(x_1,\cdots,x_n)=x^TAx,$$

称 A 为二次型的矩阵，A 的秩称为二次型的秩

二次型 $\xleftrightarrow{1:1}$ 实对称矩阵

例如: 1) $Q = x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 \Leftrightarrow A=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$

2) $Q = \lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_nx_n^2 \Leftrightarrow A = \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$.

二次型变元的可逆线性替换:

设 $\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}}_{x} = P\underbrace{\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}}_{y}$ 其中 $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 则

$$Q = x^TAx = (y^TP^T)\cdot A\cdot(Py) = y^T(P^TAP)y$$

$\Rightarrow$ 二次型 Q 关于新的变元 $y_1\cdots y_n$ 的矩阵为 $B = P^TAP$.

定义: 对于实方阵 A,B, 若存在可逆实矩阵 P 使得

$$B = P^TAP.$$

则 A 与 B 相合, 矩阵 P 称为相合变换矩阵

注: 相合为等价关系.

例. 内积在不同基下的矩阵彼此相合.

实对称阵的相合分类 $\leftrightarrow$ 二次型(可逆变元替换下)的分类.

相合标准型 $\leftrightarrow$ 二次型的标准型.