§ 极大无关组与秩

$$\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m \rangle = \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_i, \cdots, \vec{a}_m \rangle$$

$$= \cdots = \langle \vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \cdots, \vec{a}_{i_r} \rangle$$

定义: $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m \in F^n$, 若 $\vec{a}_{i_1}, \cdots, \vec{a}_{i_r}$ 线性无关, 且任加一个其他向量 $\vec{a}_{i_{r+1}}$ 后, $\vec{a}_{i_1}, \cdots, \vec{a}_{i_r}, \vec{a}_{i_{r+1}}$ 线性相关, 则称 $\vec{a}_{i_1}, \cdots, \vec{a}_{i_r}$ 为 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m$ 的**极大无关组**. $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}_{i_1} \cdots \vec{a}_{i_r} \text{ 线性无关} \\ \langle \vec{a}_{i_1} \cdots \vec{a}_{i_r} \rangle = \langle \vec{a}_1 \cdots \vec{a}_m \rangle \end{cases}$

例: $\vec{a}_1 = (2,-1,3,1)$, $\vec{a}_2 = (4,-2,5,4)$, $\vec{a}_3 = (2,-1,4,-1)$

任两个组成极大无关组. ($3\vec{a}_1 = \vec{a}_2 + \vec{a}_3$)

不唯一! 如何寻找极大无关组?

定理: $A = (\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m) \in F^{n\times m} \xrightarrow[\text{初等变换}]{\text{一系列行}} B = (\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_m) \in F^{n\times m}$

(1) $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m$ 线性相关 (无关) $\Leftrightarrow$ $\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_m$ 线性相关 (无关).

(2) $a_{i_1} \cdots a_{i_r}$ 极大 $\Leftrightarrow$ $b_{i_1} \cdots b_{i_r}$ 极大.

证: (1). LHS $\Leftrightarrow$ $AX=0$ 有非零解

$\Leftrightarrow$ $BX=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ RHS.

(2) LHS $\Leftrightarrow \begin{cases} a_{i_1} \cdots a_{i_r} \text{ 线性无关} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} b_{i_1}, \cdots, b_{i_r} \text{ 无关} \\ a_{i_1}, \cdots, a_{i_r}, a_j \text{ 线性相关}, \forall j \overset{(1)}{\Leftrightarrow} b_{i_1} \cdots b_{i_r} b_j \text{ 相关} \end{cases} \Leftrightarrow$ RHS.

□

例：$\vec{a_1}=(-1,5,3,-2)$, $\vec{a_2}=(4,1,-2,9)$, $\vec{a_3}=(2,0,-1,4)$, $\vec{a_4}=(0,3,4,-5)$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 9 & 4 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 任三个都为极大！

定义：称两向量组 $\vec{a_1},\cdots,\vec{a_m}$ 与 $\vec{b_1},\cdots,\vec{b_l}$ 等价，若

(1) $\forall i\in\{1,\cdots,m\}$, $\vec{a_i}$ 可由 $\vec{b_1}\cdots\vec{b_l}$ 线性表示，

(2) $\forall j\in\{1,\cdots,l\}$, $\vec{b_j}$ 可由 $\vec{a_1},\cdots,\vec{a_m}$ 线性表示.

记为 $\{\vec{a_1},\cdots,\vec{a_m}\}\sim\{\vec{b_1},\cdots,\vec{b_l}\}$

注："$\sim$" 为等价关系.

定理：$\{\vec{a_1},\cdots,\vec{a_m}\}\sim\{\vec{b_1},\cdots,\vec{b_l}\}\Leftrightarrow\langle\vec{a_1},\cdots,\vec{a_m}\rangle=\langle\vec{b_1},\cdots,\vec{b_l}\rangle$.

证：- - -

定理：一个向量组与它的任一极大无关组等价.

证：- - -

推论：任两极大无关组等价.

定理： $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m \in F^n$，则

$\vec{a}_{i_1} \cdots \vec{a}_{i_r}$ 极大无关 $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}_{i_1}, \cdots, \vec{a}_{i_r} \text{ 线性无关} \\ \langle \vec{a}_{i_1}, \cdots, \vec{a}_{i_r} \rangle = \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m \rangle . \end{cdots} $

证：…… .

定理： $\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r\}$，$\{\vec{b}_1 \cdots \vec{b}_s\}$ 都线性无关且相互等价，则 $r = s$.

证：$(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r) = (\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_s)\,\mu \qquad \mu \in F^{s \times r}$

$\forall X \in F^r$ s.t. $\mu X = 0 \Rightarrow (\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_s)\,\mu X = 0$

$\Rightarrow (\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r) X = 0 \Rightarrow X = 0$.

$\Rightarrow \mu X = 0$ 仅有零解 $\overset{3.3.2}{\Rightarrow} r \leq s$

同理，$s \leq r$. 因此 $s = r$. □ .

推论：向量组的任两极大无关组中向量的个数相同. 这一个数称为向量组的秩. 记为 $\mathrm{rank}(\vec{a}_1, \cdots \vec{a}_m)$ 或 $r(\vec{a}_1, \cdots \vec{a}_m)$

例 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ 不全为零. 则

$\mathrm{rank}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 1 \Leftrightarrow$ 共线

$= 2 \Leftrightarrow$ 共面

$= 3 \Leftrightarrow$ 不共面

秩与线性相关性.

定理: $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r,\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_s\in F^n$

(1) $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r)=r$

(2) . . . . 相关 $\Leftrightarrow$ . . . . . $<r$

(3) $\{\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_s\}$ 可由 $\{\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r\}$ 线性表出 $\Rightarrow \operatorname{rank}(\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_s)\leqslant\operatorname{rank}(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r)$

(4). $\{\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_s\}\sim\{\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r\}\Rightarrow\operatorname{rank}(\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_s)=\operatorname{rank}(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r)$

(5). $\vec{b}$ 可表示为 $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r$ 的线性组合, $\Leftrightarrow\operatorname{rank}(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r)=\operatorname{rank}(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r,\vec{b})$

向量组的秩与矩阵秩:

$$A=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix}\vec{a}_1\\ \vdots\\ \vec{a}_m\end{pmatrix}=(\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_n)$$

$\operatorname{rank}(A)\rightsquigarrow$ A的秩

$\operatorname{rank}(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m)\rightsquigarrow$ A的行秩

$\operatorname{rank}(\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_n)\longrightarrow$ A的列秩

定理: 秩 = 行秩 = 列秩.

证: 初等变换不改变三者!

直接验定理对相抵标准形成立.

推论： $A\in F^{n\times n}$.

(1) A 可逆 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A)=n$ $\Leftrightarrow$ 行向量线性无关 $\Leftrightarrow$ 列向量线性无关

(2) $\mathrm{rank}(A)=r$ $\Rightarrow$ 不为零的 r 阶子式所在行(列)构成 A 的行(列)向量的极大无关组.

例： $A\in F^{m\times n}$, $B\in F^{n\times p}$.

$$\mathrm{rank}(AB)\leq \min\left(\mathrm{rank}(A),\ \mathrm{rank}(B)\right)$$

证： $(c_1,\cdots,c_p)=AB=(a_1,\cdots,a_n)B \Rightarrow \mathrm{rank}(AB)\leq\mathrm{rank}(A)$

$\begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_m' \end{pmatrix} = AB = A\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{rank}(AB)\leq\mathrm{rank}(B)$ $\square$