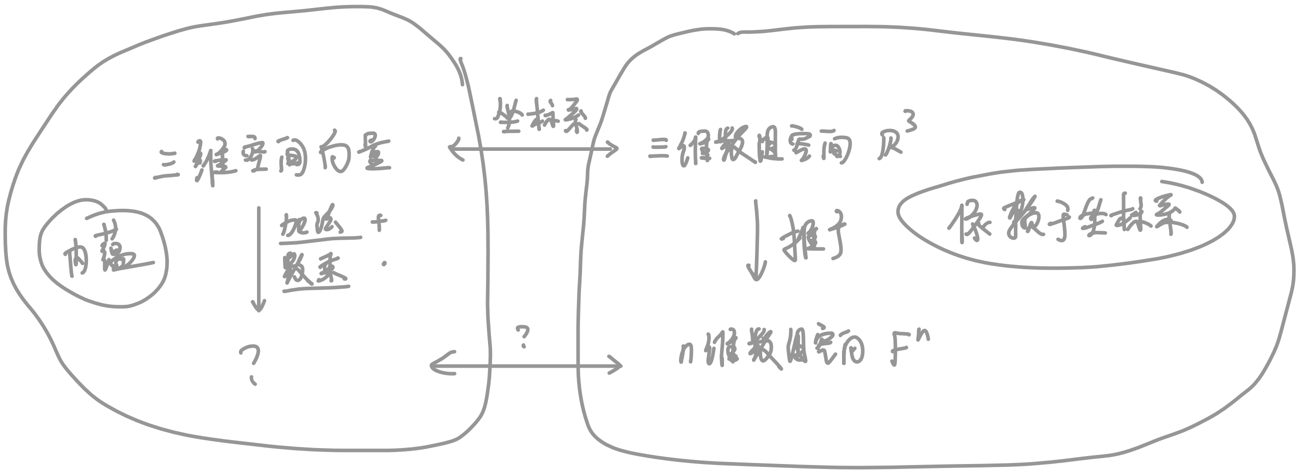
一般线性空间



定义：$V \neq \phi$，F 为数域．V 上有两种运算

(1) 加法：$+ : V \times V \longrightarrow V$

$$(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha + \beta$$

(2) 数乘：$\cdot : F \times V \longrightarrow V$

$$(\lambda, \alpha) \longmapsto \lambda\alpha$$

满足如下规律：

A1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

A2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

A3) $\exists\, \theta \in V$ s.t. $\alpha + \theta = \alpha = \theta + \alpha$

A4) $\forall \alpha \in V, \exists\, \beta \in V$ s.t. $\alpha + \beta = \theta = \beta + \alpha$

D1) $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$

D2) $(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha$

M1) $\lambda(\mu\alpha) = (\lambda\mu)\alpha$

M2) $1 \cdot \alpha = \alpha$

则称 V 为 F 上的**线性空间**．V 中元素称为**向量**

例：1) F^n

2) $E_n :=$ n 元一次方程全体

3) $F_n[x] :=$ F 上次数不超过 n 的多项式全体

4) $F^{m\times n}$

5) $F=\mathbb{R}$, $V=\mathbb{C}$.

6) $F=\mathbb{R}$, $V:=\mathbb{R}^+=\{r\in\mathbb{R} \mid r\geq 0\}$, $r_1\oplus r_2 := r_1\cdot r_2$, $\lambda\circ\alpha := \alpha^\lambda$

7) $C_n := \{a_0+a_1\cos\theta+b_1\sin\theta+\cdots+a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta) \mid a_i,b_i\in F\}$

8) $C[a,b] :=$ $[a,b]$ 上的连续函数全体.

反例：1) $F=\mathbb{R}$, $V=\mathbb{R}^+$ 通常 $+.\times$

2) $F=\mathbb{R}$, $v_0\in F^n$, $V:=\{v\in F^n \mid v \nparallel v_0\}$ 通常 $+\ \times$.

3) $F=\mathbb{C}$, $V=\mathbb{R}_n[x]$ 通常 $+.\times$

注：一般线性空间没有长度夹角等几何概念！

性质：1) 零向量唯一

2) 负向量唯一

3) $0\cdot\alpha=\theta$, $(-1)\alpha=-\alpha$, $\lambda\theta=\theta$

4) $\lambda\alpha=\theta \Leftrightarrow \lambda=0$ 或 $\alpha=\theta$

定义：设 V 为 F-线性空间，$W\subseteq V$ 非空子集，若

1) $\forall \alpha,\beta\in W \Rightarrow \alpha+\beta\in W$

2) $\forall \lambda\in F, \forall\alpha\in W \Rightarrow \lambda\alpha\in W$

则称 W 为 V 的**子空间**

例：1). $W=\{0\}$ or $W=V$,

2). $\forall\, S\subseteq V \Rightarrow \langle S\rangle := \{\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_n\alpha_n \mid \lambda_1,\cdots,\lambda_n\in F,\ \alpha_1,\cdots,\alpha_n\in S\}$

S：生成元　　$\langle S\rangle$：V的生成子空间

3). $F_n[x],\ C_n \subseteq C[a,b]$

4). $W=\{p\in F_n[x] \mid p(x)=p(-x)\}\subseteq F_n[x]$

5). $\forall A\in F^{n\times n}$. $W:=\{X\in F^{n\times n} \mid AX=0\}\subseteq F^{n\times n}$

概念与结论推导

线性组合，线性相关，线性无关，极大无关组，秩，基，维数.

线性组合 ⟶ 线性相关(无关)，等价

↓

极大无关组 ⟶ 秩，基，维数 → 扩充基

维数 ↓ 坐标

维数 ↘ 过渡矩阵

注：维数(基的个数)可以为无穷. 此时为无限维线性空间.

例：$\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x\}$ 为 $\{1,\cos x,\sin x,\cos^2 x,\sin^2 x,\cos 2x,\sin 2x\}$ 的一个极大无关组.

例：$T\subseteq S\subseteq V$. $\#S=s$，$\#T=t$，则

$$\mathrm{rank}(S)=r \Rightarrow \mathrm{rank}(T)\geqslant r+t-s.$$

S_1 极大无关组 $\Rightarrow$ $S_1 \cap T$ 为 T 的无关组

$\Rightarrow$ $\mathrm{rank}(T) \geq \mathrm{rank}(S_1 \cap T) \geq r+t-s$

例：$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$. $F=\mathbb{R}$, $\{1, i\}$ 为 $\mathbb{C}$ 的一组基.

例：$\dim_F F[x] = \infty$. $S=\{1, x, x^2, \cdots\}$ 为 $F[x]$ 的一组基.

例：$\dim_F F^{m\times n} = mn$ $S=\left\{E_{ij} \,\middle|\, \begin{matrix} 1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n \end{matrix}\right\}$ 为 $F^{m\times n}$ 的一组基.

例：$V=\{a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+a_3\cos 3x\} = \langle 1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x\rangle$

$= \langle 1, \cos x, \cos^2 x, \cos^3 x\rangle$

基变换公式：

$$(1, \cos x, \cos^2 x, \cos^3 x) = (1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$