§ 4.1 矩阵的定义

数据表格 $\xRightarrow{\text{抽象}}$ 矩阵

定义 4.1.1. 一个 $m\times n$ 的矩阵为由 $m\times n$ 个数排成的 m 行 n 列的表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

记作 $A=(a_{ij})_{m\times n}$

→ A 的第 (i,j) 元素

a_{ii} 称为 A 的对角元

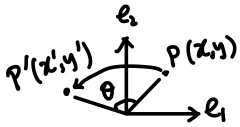
$A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{p\times q}$

记 $A=B$, 若 $m=p$, $n=q$, $a_{ij}=b_{ij}$ $\forall i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n$.

例: n 维行向量 := $1\times n$ 矩阵 $\quad a=(a_1,\cdots,a_n)$

n 维列向量 := $n\times 1$ 矩阵 $\quad \tilde{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

例

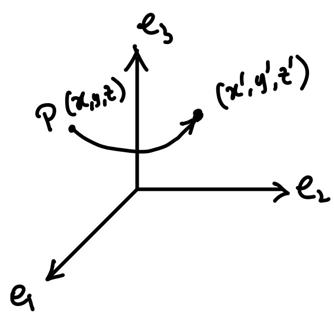


$\Rightarrow \quad (x,y) \mapsto (\tilde{x},\tilde{y})$

$$\begin{cases} x' = (\cos\theta)\cdot x - (\sin\theta)\cdot y \\ y' = (\sin\theta)\cdot x + (\cos\theta)\cdot y \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 变换公式系数矩阵：$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

例： n 种原材料 $M_1, \cdots, M_n$,

m 种产品 $P_1, \cdots, P_m$

$$\begin{array}{c} \\ P_1 \\ \vdots \\ P_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} M_1 & \cdots & M_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \text{投入产出模型的矩阵表示}$$

名称与记号：

1) 零矩阵 $O=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$

2) n阶方阵 = $n\times n$ 矩阵

3) 单位阵 $I := I_n := I^{(n)} := \begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}_{n\times n}$

4) 数量矩阵 $aI=\begin{pmatrix}a & & & 0\\ & a & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a\end{pmatrix}$ $\forall a\in F$

5) 对角矩阵 $\begin{pmatrix}a_{11} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}\end{pmatrix} = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$

6) 上三角(形)矩阵 $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & a_{nn}\end{pmatrix}$

下三角，三角

7). 对称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ $a_{ij}=a_{ji}$

8). 反对称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ $a_{ij}=-a_{ji}$

9). 整数矩阵，有理数~，实~，复~，多项式~

数域F上的矩阵.

$F^{m\times n} :=$ {数域F上的 $m\times n$ 矩阵全体}