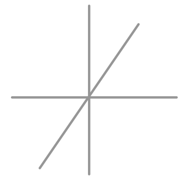
§7.4* 欧氏空间的子空间.



子空间的正交补存在且唯一.

定义: 设 V_1, V_2 为两欧氏空间 V 的两子空间. 若 $\forall\ a_1 \in V_1,\ a_2 \in V_2$

$$(a_1, a_2) = 0$$

则称 V_1, V_2 **相互正交**, 记为 $V_1 \perp V_2$. 若一个向量 a 满足 $\langle a \rangle \perp V_1$, 则称 a 与 V_1 **正交**, 记为 $a \perp V_1$.

定理: 1) $V_1 \perp V_2 \Rightarrow V_1 + V_2$ 为直和 ($\Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = 0$)

2) $V_1, V_2, \cdots, V_r$ 两两正交 $\Rightarrow V_1 + V_2 + \cdots + V_r$ 为直和)

定义: 若 $V_1 \perp V_2$ 且 $V = V_1 + V_2$, 则称 V_1, V_2 互为**正交补(空间)**.

定理: 欧氏空间的任意子空间的正交补存在且唯一.

证明: 设 V_1 为欧氏空间 V 的一子空间.

存在性: 记 $V_2 := \{ w \in V \mid w \perp V_1 \}$. 下证 V_2 为 V_1 的正交补. 显然 V_2 为子空间且 $V_1 \perp V_2$. 只需证明 $V = V_1 + V_2$. 设 $e_1, \cdots, e_r$ 为 V_1 的标准正交基. $\forall\ v \in V$, $w := v - \sum_{i=1}^{r} (e_i, v)\, e_i$ 则

$(w,e_j) = (v,e_j) - \sum_{i=1}^{n}(e_i,v)(e_i,e_j) = 0$. $\forall j=1,\dots,r$.

因此 $w \in V_2$. 从而 $v = \sum_{i=1}^{n}(e_i,v)e_i + w \in V_1+V_2$.

唯一性：若 V_2' 也为 V_1 的正交补，则由 V_2 的构造，我们有 $V_2' \subseteq V_2$. 由于 $V_1 \oplus V_2 = V = V_1 \oplus V_2'$

$\Rightarrow \dim V_2' = \dim V - \dim V_1 = \dim V_2$. 因此 $V_2' = V_2$.