§ 秩与相抵

定义：$A, B \in F^{m\times n}$，若存在可逆方阵 P 和 Q，使得

$$B = PAQ$$

则称 A 和 B 相抵.

注：相抵为等价关系. 即

1) A 与 A 相抵

2) 若 A 与 B 相抵则 B 与 A 相抵

3) 若 A 与 B 相抵，B 与 C 相抵，则 A 与 C 相抵.

证：. . .

$\Rightarrow F^{m\times n} = \bigsqcup$ 相抵等价类

(1) 相抵充要条件 (i.e. r)

(2). 最简形式.

定理：$\forall A \ \exists P, Q$ 可逆使得 $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 其中 r 由 A 唯一决定.

证：不妨设 A 与 $\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} I_s & \\ & 0 \end{pmatrix}$ 相抵 (其中 $r<s$) 则

存在 P, Q s.t. $P\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}Q = \begin{pmatrix} I_s & \\ & 0 \end{pmatrix}$.

$$\xRightarrow[Q_{11}\in F^{r\times s}]{P_{11}\in F^{s\times r}} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}Q_{11} & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow I_s = P_{11}Q_{11}$ 矛. $\square$

定义：定理中的 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 称为 A 的相抵标准形．整数 r 称为 A 的秩，记为 $\mathrm{rank}(A)$ 或 $r(A)$．若 $r=m$，则 A 称为是行满秩．若 $r=n$，则 A 称为列满秩．

推论：$A, B \in F^{m\times n}$，则

$$A \text{ 与 } B \text{ 相抵} \Leftrightarrow \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B).$$

证：...

推论：$A \in F^{m\times n}$，P, Q 为 m, n 阶可逆方阵．则

$$\mathrm{rank}(PAQ) = \mathrm{rank}(A)$$

证：...

例：$\mathrm{rank}(A^T) = \mathrm{rank}(A)$.

证：记 $r = \mathrm{rank}(A)$．则存在可逆阵 P, Q s.t.

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q^T A^T P^T = \begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{其中 } Q^T, P^T \text{ 可逆})$$

$$\Rightarrow \mathrm{rank}(A^T) = r = \mathrm{rank}(A) \qquad \square$$

例：$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$.

证：$\begin{pmatrix} P_1 & \\ & P_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & \\ & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & & \\ 0 & & \\ & I_s & \\ & & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} I_{r+s} & \\ & 0 \end{pmatrix} \qquad \square$

引理：$A\in F^{m\times n}$，P,Q 为 m,n 阶初等阵，则

A 的 k 阶子式全为零 $\Rightarrow$ PA, AQ 的所有 k 阶子式全为零.

证：$A=(a_{ij})_{m\times n}$ $\quad B=(b_{ij})_{m\times n}:=PA$

1° $P=S_{ij}$ or $P=D_i(\lambda)$ $\Rightarrow$ ✓

2° $P=T_{pq}(\lambda)$

$$\det B\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k\end{pmatrix}=\begin{cases}\det A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k\end{pmatrix} & p\notin\{i_1,\cdots,i_k\}\\[2em] \det A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k\end{pmatrix}+\det A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & q & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_t & \cdots & j_k\end{pmatrix} & p=i_t\in\{i_1,\cdots,i_k\}\end{cases}$$

同理 AQ 的所有 k 阶子式全为零.

定义（秩的内蕴定义）：设矩阵 A 至少有一个 r 阶非零子式，且 A 的所有 $r+1$ 阶子式都为零，则称 A 的秩为 r.

例：
$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x\end{pmatrix}=?$$

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x\end{pmatrix}_{n\times n}\longrightarrow\begin{pmatrix} x+n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x+n-1 & x & 1 & \cdots & 1 \\ x+n-1 & 1 & x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x+n-1 & 1 & 1 & \cdots & x\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x+n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & x-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(A) = \begin{cases} 1 & x=1 \\ n-1 & x=1-n \\ n & \text{其它} \end{cases}$$

例: $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \\ 1 & & & & 1 \end{pmatrix} = ?$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \operatorname{rank} \geq n-1$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix} = 1-(-1)^n = \begin{cases} 0 & 2 \mid n \\ 2 & 2 \nmid n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rank}(A) = \begin{cases} n-1 & 2 \mid n \\ n & 2 \nmid n \end{cases}$$

例：每个秩为 r 的矩阵都可以写成 r 个秩为 1 的矩阵的和.

证：…

例：若 $A\in F^{m\times n}$ 为列满秩，则 A 为某个可逆阵的前 n 列.

$$A=P\begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix} Q \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B:=P\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & I_{m-n} \end{pmatrix}=\left(A,\ P\begin{pmatrix} 0 \\ I_{m-n} \end{pmatrix}\right)$$

例： $A\in F^{m\times n}$ $B\in F^{n\times p}$ 则

$$\operatorname{rank}(AB)\leq \min(\operatorname{rank}(A),\ \operatorname{rank}(B))$$

$$A=P_1\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}Q_1,\quad B=P_2\begin{pmatrix} I_s & \\ & 0 \end{pmatrix}Q_2$$

$Q_1P_2=:(R_{ij})_{2\times 2}$ 其中 $R_{11}\in F^{r\times s}$. 则

$$AB=P_1\begin{pmatrix} R_{11} & \\ & 0 \end{pmatrix}Q_2$$

$$\Rightarrow \operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}(R_{11})\leq \min\{r,s\}.$$

例： $A^2=A\in F^{n\times n}\Rightarrow \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I-A)=n$.

证： $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I-A \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} A & 0 \\ A & I-A \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} A & A \\ A & I \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & I \end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\Rightarrow \operatorname{rank}=n$.