线性代数　中国科学技术大学 2023 春
二次型

主讲: 杨金榜
地空楼 525

助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{对 } I \text{ 做初等列变换}]{\text{对 } A \text{ 做成对的行列初等变换}} \begin{pmatrix} P^TAP \\ P \end{pmatrix}$$

类似的

$$(A, I) \xrightarrow[\text{对 } I \text{ 做初等行变换}]{\text{对 } A \text{ 做成对的行列初等变换}} (P^TAP, P^T)$$

正定二次型

定义 (正定二次型)

称一个 n 元二次型 $Q(x_1,\cdots,x_n)=x^TAx(A^T=A)$ 为正定二次型, 如果对于任意向量 $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 都有 $Q(x_1,\cdots,x_n)>0$ 成立.

定理

$$\begin{aligned} Q \text{ 正定} &\Leftrightarrow A \text{ 正定} \Leftrightarrow A \text{ 相合于单位阵} \\ &\Leftrightarrow Q \text{ 的 (或 } A \text{ 的) 正惯性指数为 } n \end{aligned}$$

性质

设 A 为 n 阶实对称方阵.

1. 若 P 可逆, 则 $P^TAP > 0$ 当且仅当 $A > 0$. 相合不变性
2. $A > 0$ 当且仅当存在可逆阵 P 使得 $A = P^TP$. 相合标准形
3. 若 $A > 0$, 则 $\det(A) > 0$.

定理

设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶实对称方阵. 则 A 正定当且仅当 A 的各阶顺序主子式均大于零. 即, A 正定当且仅当

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \cdots, \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A > 0,$$

根据正负惯性指数命名二次型

1. 正　定 $\Leftrightarrow r = n\ (\Rightarrow s = 0)$;
2. 半正定 $\Leftrightarrow s = 0$;
3. 负　定 $\Leftrightarrow s = n\ (\Rightarrow r = 0)$;
4. 半负定 $\Leftrightarrow r = 0$;
5. 不　定 $\Leftrightarrow r \geq 1$ 且 $s \geq 1$.

部分关于正定的结论可以平移到半正定, 负定, 半负定的二次型上.

二次曲线的标准形式

$$\begin{cases} \text{椭　圆:} & \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ \text{双曲线:} & \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \\ \text{抛物线:} & y=ax^2 \\ \text{退　化:} & x^2=\frac{y^2}{a^2} \text{ 或} \frac{x^2}{a^2}=1 \text{ 或} x^2=0 \end{cases}$$

平面二次曲线方程:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c=0.$$

定理

任意平面二次曲线均可经过选定合适的直角坐标系变为标准形式.

二次曲面标准形式

1. 椭圆面
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$
2. 单叶双曲面
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$$
3. 双叶双曲面
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$$
4. 二次锥面
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2};$$

5. 椭圆抛物面
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2};$$
6. 双曲抛物面 (马鞍面)
$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2};$$
7. 二次柱面 (方程中不含第三个变量)
   - 椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$
   - 双曲柱面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$
   - 抛物柱面 $y = ax^2;$
8. 退化二次曲面
   - 两个相交平面 $x^2 = \frac{y^2}{a^2};$
   - 两个平行平面 $\frac{x^2}{a^2} = 1;$
   - 两个重合平面 $x^2 = 0.$

二次曲面方程:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$$
$$+2b_1x+2b_2y+2b_3z+c=0$$

定理

任意二次曲面可经过选择合适的直角坐标系变为标准形式.

证明思路: 二次曲面通过正交变换可化简为 (其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 不全为零)

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2+2b_1'x'+2b_2'y'+2b_3'z'+c'=0.$$

1. $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\neq0 \xrightarrow{\text{化简}} \lambda_1\widetilde{x}^2+\lambda_2\widetilde{y}^2+\lambda_3\widetilde{z}^2=\lambda_4$
   - $\lambda_4\neq0\Rightarrow$ 椭圆型或双曲型
   - $\lambda_4=0\Rightarrow$ 二次锥面
2. $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 中两个非零 (不妨设 $\lambda_1\lambda_2\neq0$ 且 $\lambda_3=0$) $\xrightarrow{\text{化简}}$

   $\lambda_1\widetilde{x}^2+\lambda_2\widetilde{y}^2=\widetilde{b}_3\widetilde{z}+\widetilde{c}.$
   - $\widetilde{b}_3\neq0$(可设 $\widetilde{c}=0$) $\Rightarrow$ 抛物面
   - $\widetilde{b}_3=0$ 且 $\widetilde{c}\neq0\Rightarrow$ 椭圆柱面或双曲柱面
   - $\widetilde{b}_3=0=\widetilde{c}\Rightarrow$ 两相交平面

3. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 中仅一个非零 (不妨设 $\lambda_1 \neq 0$ 且 $\lambda_2 = 0 = \lambda_3$) $\xRightarrow{\text{化简}}$

$\lambda_1 \widetilde{x}^2 = \widetilde{b}_2 \widetilde{y} + \widetilde{c}$.

- $\widetilde{b}_2 \neq 0$ (可设 $\widetilde{c} = 0$) $\Rightarrow$
- $\widetilde{b}_2 = 0$ 且 $\widetilde{c} \neq 0 \Rightarrow$ 两平行的平面
- $\widetilde{b}_3 = 0 = \widetilde{c} \Rightarrow$ 两重合的平面

例

$x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 8xz - 4yz - 1$.

答: 正交方阵 $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$$P^T A P = \mathrm{diag}(5, 5, -4).$$

$(x, y, z)^T = P(x', y', z')^T \Rightarrow 5x'^2 + 5y'^2 - 4z'^2 = 1 \Rightarrow$ 单叶双曲面.

方法二 (配方):

$\Rightarrow (x - 2y - 4z)^2 - 15z^2 - 20yz - 1 = 0$

$\Rightarrow (x - 2y - 4z)^2 - 15(z + \frac{2}{3}y)^2 + \frac{20}{3}y^2 = 1$

$\Rightarrow \widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2 - \widetilde{z}^2 = 1$

$\Rightarrow$ 单叶双曲面.