§ 初等变换

利用矩阵乘法表达矩阵的初等变换.

回顾：$\left.\begin{array}{l}\text{矩阵的初等行变换 (3)}\\ \rightsquigarrow \text{矩阵的初等列变换 (3)}\end{array}\right\} \Rightarrow$ 初等变换 (6)

初等方阵：

1) 交换单位矩阵的 i,j 行 (或 i,j 列)

$$S_{ij} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & \cdot & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \cdots\ i\text{行} \\ \\ \cdots\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

2) 将单位矩阵的第 i 行 (或 i 列) 乘以非零常数 λ.

$$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \ 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array}$$

3) 将单位矩阵的第 j 行的 λ 倍加到第 i 行 (或 i 列的 λ 倍加到 j 列)

$$T_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \lambda & \\ & & & \ddots\ 1 & \\ & & & & \ddots\ 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i \\ j \\ \\ \end{array}$$

定理：对矩阵作初等行变换，相当于在矩阵的左边乘以一个相应的初等方阵

对矩阵作初等列变换，相当于在矩阵的右边乘以一个相应的初等方阵

证： $A=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ ...

性质：1) S_{ij} 对称且 $S_{ij}^{-1}=S_{ij}$.

2) $D_i(\lambda)$ 为对角阵 且 $D_i(\lambda)^{-1}=D_i(\lambda^{-1})$

3) $T_{ij}(\lambda)$ 为三角阵，且 $T_{ij}(\lambda)^{-1}=T_{ij}(-\lambda)$

证：显然 □

§3.3 ⇒ $\forall A$ ⇒ ∃初等方阵 $P_1,P_2,\cdots,P_s$ s.t.

$$P_s\cdots P_2P_1A=J$$

为阶梯形矩阵.

定理：$\forall A=(a_{ij})_{m\times n}$，∃ m阶初等方阵 $P_1,P_2,\cdots,P_s$ 和 n阶初等方阵 $Q_1\cdots Q_t$

s.t.
$$P_s\cdots P_2P_1\cdot A\cdot Q_1Q_2\cdots Q_t=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

其中 r 为非负整数.

证： $B = (b_{ij})_{m\times n} = D_1(a_{pq}^{-1})\, S_{1p}\, A\, S_{1q}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = T_{m1}(-b_{m1}) \cdots T_{21}(-b_{21})\, B\, T_{12}(-b_{12}) \cdots T_{1n}(-b_{1n})$$

重复 □

推论： $\forall A$，$\exists$ 可逆方阵 P(m阶) 和 Q(n阶)，使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

注： r 不依赖于 P, Q 的选取，称为 A 的秩.

推论： 若 A 为 n 阶方阵，则 A 可逆当且仅当 A 可以分解为一系列初等方阵的乘积.

证： $P_s \cdots P_1\, A\, Q_1 \cdots Q_t = I$

$\Rightarrow A = P_1^{-1} \cdots P_s^{-1} Q_t^{-1} \cdots Q_1^{-1}$ □

推论： 若 A 为可逆矩阵，则

(1) 可对 A 作一系列初等行变换变为最简形式 I.

(2) 也可以 ······ 列 ---- ······

初等变换法(求逆):

- $AX = I$ (i.e. $X = A^{-1}$)
- 设 $P_s \cdots P_1 A = I$，其中 P_i 为初等变换.

$$\Rightarrow X = P_s \cdots P_1$$

算法: $(A, I) \xrightarrow{\text{行初等变换}} P_s \cdots P_1 (A, I) = (I, A^{-1})$.

类似的解 $AX = B$!

例: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = ?$

解: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{2}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{2}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \qquad \square$$

分块矩阵的初等行(列)变换：

例：A可逆，则可验证：

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \\ & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

例(分块矩阵求逆)：设 A, B, I 为 n 阶方阵，$BA=0$，则

$$\begin{pmatrix} I & A & I & 0 \\ B & I & 0 & I \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I & A & I & 0 \\ 0 & I & -B & I \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I & 0 & I+AB & A \\ 0 & I & -B & I \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} I & A \\ B & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I+AB & A \\ -B & I \end{pmatrix}.$$