§8.2、相合不变量与分类.

定理：设 A 为实对称矩阵，则存在可逆阵 P 使得

$$P^TAP = \begin{pmatrix} I_r & & \\ & -I_s & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $\operatorname{rank} A = r+s \leq n$.

证：$P_1^TAP_1 = \operatorname{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_r, -\mu_{r+1}, \cdots, \mu_{r+s}, 0, \cdots 0)$

其中 $\mu_1, \cdots, \mu_{r+s} > 0$.

$P_2 = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_1}}, \frac{1}{\sqrt{\mu_2}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{\mu_{r+s}}}, 1, \cdots, 1\right)$ & $P = P_1P_2$

$\Rightarrow P^TAP = \operatorname{diag}(\overbrace{1, \cdots, 1}^{r}, \overbrace{-1, \cdots, -1}^{s}, 0 \cdots 0)$.

定义：称定理中的对角阵为 A 的规范形.

称 $y_1^2 + \cdots + y_r^2 - y_{r+1}^2 - \cdots - y_{r+s}^2$ 为 $Q = x^TAx$ 的规范形

定理（惯性定理）：规范形中的 r 与 s 由 A（或者 Q）唯一确定.

其中 r 称为正惯性指数，r 为负惯性指数. $r-s$ 称为 Q（或 A）的符号差.

证：设 $Q(x_1, \cdots, x_n)\Big|_{x=P_1y} = y_1^2 + \cdots + y_r^2 - y_{r+1}^2 - \cdots - y_{r+s}^2$

$Q(x_1, \cdots, x_n)\Big|_{x=P_2z} = z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_{p+q}^2$

$$r+s = \operatorname{rank}(Q) = p+q \Rightarrow (r \neq p \Leftrightarrow s \neq q)$$

假若 $r<p$ 则

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_r = z_{p+1} = \cdots = z_n = 0$$

为关于 $x_1, \cdots x_n$ 的 $r+n-p\ (<n)$ 个齐次线性方程组成的方程组，因此其有非零解

$$x = \vec{a} \neq (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T.$$

$$y\Big|_{x=\vec{a}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{r+1} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad z\Big|_{x=\vec{a}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

于是
$$\begin{cases} Q(x_1 \cdots x_n)\Big|_{x=\vec{a}} = -b_{r+1}^2 - \cdots - b_{r+s}^2 \leq 0 \\ Q(x_1 \cdots x_n)\Big|_{x=\vec{a}} = c_1^2 + \cdots + c_p^2 > 0 \end{cases}$$

矛