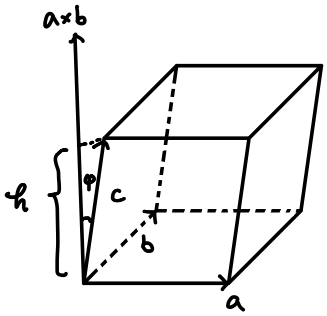
§1.5 向量的混合积

§1.5.1 混合积的几何意义

$$\overset{\text{体积}}{V} = \overset{\text{底面积}}{S} \cdot \overset{\text{高}}{h}$$

$$= |a \times b| \cdot \overbrace{|c| \cdot |\cos\varphi|}$$

$$= |(a \times b) \cdot c|$$



$$(a \times b) \cdot c = \begin{cases} V & \text{若 } a,b,c \text{ 为右手系} \\ -V & \cdots \text{ 左} \cdots \end{cases}$$

推论: 1) $(a \times b) \cdot c = (b \times c) \cdot a = (c \times a) \cdot b$

2) $(a \times b) \cdot c = -(b \times a) \cdot c$

3) $a \parallel b$ or $a \parallel c$ or $b \parallel c \Rightarrow (a \times b) \cdot c = 0$

§1.5.2 直角坐标系下混合积的计算

命题 1.5.1. $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$. 则

1). $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

2). $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$.

Pf: 1) 由定义

2) LHS $\Leftrightarrow V=0$ (体积) $\Leftrightarrow$ 右边. □

例 1.5.1. $A(1,2,3)$, $B(2,1,4)$, $C(1,3,5)$, $D(3,2,1)$ $\Rightarrow V_{ABCD}=?$

解: $V=\frac{1}{6}\left|(\vec{AB}\times\vec{AC})\cdot\vec{AD}\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}\right| = \frac{4}{3}$ □

§1.5.3 二重向量积

称 $(a\times b)\times c$ 为 a,b,c 的二重向量积.

命题 1.5.2. $(a\times b)\times c = (a\cdot c)b-(b\cdot c)a$

Pf: (直接计算) 不妨设 $a=(a_1,a_2,a_3)$, $b=(b_1,b_2,b_3)$, $c=(c_1,c_2,c_3)$.

$$a\times b=\left(\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right)$$

$\Rightarrow$ LHS 的第一个坐标:

$$\begin{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}=(a_3b_1-a_1b_3)c_3-(a_1b_2-a_2b_1)c_2$$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad //$

RHS 的第一个坐标:

$$(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)\cdot b_1-(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)\cdot a_1$$

同理另两坐标相同 $\Rightarrow$ ✓ $\square$

注: $\underset{\substack{\uparrow\\ \text{与 } a,b \text{ 共面}}}{(a\times b)\times c} \neq \underset{\substack{\uparrow\\ \text{与 } b,c \text{ 共面.}}}{a\times(b\times c)}$

例: $(a\times b)\cdot(c\times d)=(a\cdot c)(b\cdot d)-(a\cdot d)(b\cdot c)$.

Pf: LHS $=((a\times b)\times c)\cdot d=[(a\cdot c)b-(b\cdot c)a]\cdot d=$ RHS $\square$

1-5-3