§3.4 基与维数

定理：F^n 的每个子空间都可以由一组向量生成.

证：$\forall\ \underset{\neq 0}{V} \subseteq F^n$ 子空间.

$$\Sigma := \{V\text{中的线性无关向量组}\}$$

1° $\Sigma \neq \phi$ (因为 $\forall \vec{v} \in V \setminus 0$ $\{\vec{v}\} \in \Sigma$.)

2° $\forall S \in \Sigma$, S 中元素个数 $\leq n$. (这是由于 F^n 中任一线性无关向量组中向量个数最多为 n.)

$1^\circ, 2^\circ \Rightarrow \Sigma$ 中存在极大元，不妨设为 $\{\vec{a}_1, \cdots \vec{a}_r\}$ $(r \leq n)$

即，V 中的任意线性无关向量组中向量的个数不超过 r

下面证：$V = \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r \rangle$

"$\supseteq$" ✓

"$\subseteq$"：反证：若不成立，则 $\exists\, \vec{a}_{r+1} \in V \setminus \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r \rangle$

$\forall\ \lambda_1 \vec{a}_1 + \cdots + \lambda_{r+1} \vec{a}_{r+1} = 0 \Rightarrow \lambda_{r+1} = 0$ (否则 $\vec{a}_{r+1} \in \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r \rangle$)

$\Rightarrow \lambda_1 \vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$

$\Rightarrow \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{r+1}$ 线性无关.

$\forall \vec{a} \in V \Rightarrow \exists! \lambda_1, \cdots, \lambda_r \in F$ s.t. $\vec{a} = \lambda_1 \vec{a_1} + \cdots + \lambda_r \vec{a_r}$

唯一性 $v = \sum \lambda_i \vec{a_i} = \sum \mu_i \vec{a_i} \Rightarrow \sum (\lambda_i - \mu_i) \vec{a_i} = 0 \Rightarrow \lambda_i = \mu_i \ \forall i$

定义：$V \subseteq F^n$ 子空间，V 中的一组向量 $\{\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_r}\}$ 称为 V 的一组基，若

(1) $V = \langle \vec{a_1}, \cdots, \vec{a_r} \rangle$ 即 $\forall \vec{a} \in V \ \exists \lambda_1 \cdots \lambda_r$ s.t. $\vec{a} = \sum \lambda_i \vec{a_i}$

(2) $\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_r}$ 线性无关.

称 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ 为 $\vec{a}$ 在 $\{\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_r}\}$ 下的坐标.

称 V 的一组基中的向量的个数为 V 的维数

（两组基等价 $\Rightarrow r$ 不依赖于基的选取）

例（自然基）：$\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n}$ 为 F^n 的一组基

坐标变换：一个子空间的不同基彼此等价

$\Rightarrow$ 相互表示 $\Rightarrow$ 坐标变换

$V \subseteq F^n$ 为子空间，$\{\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_r}\}$ $\{\vec{b_1}, \cdots, \vec{b_r}\}$ 为两组基

$\vec{b_i} = t_{1i} \vec{a_1} + \cdots + t_{ri} \vec{a_r}$ $(\forall\ 1 \le i \le r)$

$(\vec{b_1}, \cdots, \vec{b_r}) = (\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_r}) T$ $\quad (T = (t_{ij})_{n \times n})$

T 从 $\{\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_r}\}$ 到 $\{\vec{b_1}, \cdots, \vec{b_r}\}$ 的过渡矩阵

设 $v\in V$ 在 $\{\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r\}$ 和 $\{\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_r\}$ 下的坐标为 $(x_1,\cdots,x_r)$ 和 $\{y_1\cdots y_r\}$，即

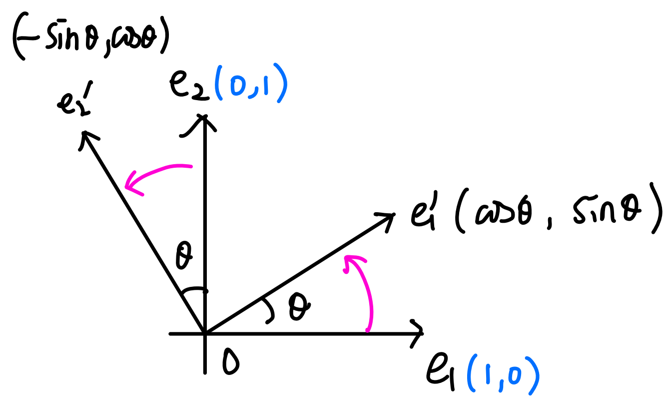
$$v=(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r)\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_r\end{pmatrix}=(\vec{b}_1\cdots\vec{b}_r)\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_r\end{pmatrix}.$$

$$=(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r)\,T\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_r\end{pmatrix}$$

坐标唯一 $\Rightarrow$ 坐标变换公式 $\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_r\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_r\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_r\end{pmatrix}=T^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_r\end{pmatrix}$$

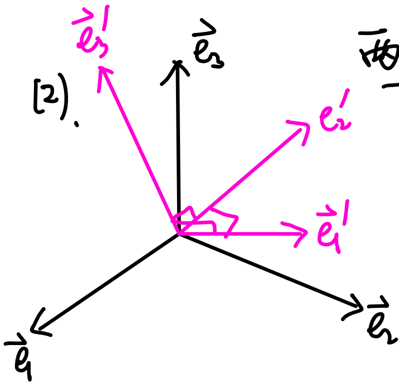
例：(1)



$$\Rightarrow(e_1',e_2')=(e_1,e_2)\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

(2).



两直角坐标系

$$\Rightarrow (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3') = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\overset{A}{\overset{\|}{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}}}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{T}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{e}_i'| = 1 \Rightarrow x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = 1 \\ \vec{e}_i' \perp \vec{e}_j' \Rightarrow \vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j' = x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j = 0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow AA^T = I_{(3)} = A^T A$$

i.e. $A^{-1} = A^T$ (正交矩阵)

定理: $U, V \subseteq F^n$ 子空间. 则

(1) $\dim V = r \Rightarrow V$ 中任意 $r+1$ 个向量线性无关

(2) $\dim V = r$, $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r \in V$ 线性无关 $\Rightarrow \{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r\}$ 为 V 的一组基.

(3) $U \subseteq V \Rightarrow \dim U \leq \dim V$

(4) $U \subseteq V$ & $\dim U = \dim V \Rightarrow U = V$

证: ✓

定理: $V \subseteq F^n$ 为 r 维子空间. $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_s \in V\ (s<r)$ 线性无关,
则 $\exists\ \vec{a}_{s+1}, \cdots, \vec{a}_r \in V$ s.t. $\underbrace{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r}_{}$ 构成 V 的一组基.

$\hookrightarrow$ $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_s$ 的一组扩充基

例: $V := \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$
子空间?, 基? 维数?

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

例 $V := \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3\} \subseteq \mathbb{R}^3$
子空间?

$(1, -1, 0) \in V$ & $2(1, -1, 0) = (2, -2, 0) \notin V$!

$(2 \times 2 - (-2) + 0 = 6 \neq 3\ !)$