§1 向量与复数

坐标系：几何图形 ⇒ 方程

几何问题 ① 代数化

② 代数运算 ⇒ 解决问题.

向量法优点：

不需要引入坐标系（更直观，也可进行代数运算）

本章目标：定义向量，坐标，向量代数运算.

§1.1 向量的线性运算

§1.1.1 向量及其表示

定义：即有大小，又有方向的量 称为 向量

例：速度，位移，力

表示方法： $\overrightarrow{AB}$，a, b, c "="

反向量(负向量)：大小相等，方向相反

长度

向量的模长 := 向量的长度

$|a|$

· 零向量：$|a|=0$ (没有确定的方向)

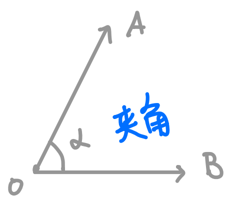
· 单位向量：$|a|=1$

方向

平行 ($a \parallel b$)：方向相同或相反

垂直或正交 ($a \perp b$)：方向互相垂直

· 零向量 平行与任意向量 (规定)

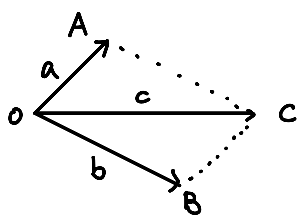


$0 \le \alpha \le \pi$ $\alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$

§1.1.2 向量的线性运算

·速度、力的合成 $\xrightarrow{\text{抽象}}$ 向量的加法.

定义（向量的加法 - 平行四边形法则）

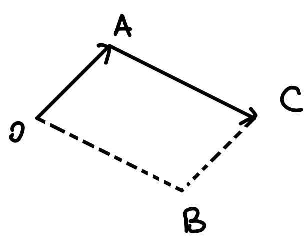


$$\vec{OA}+\vec{OB} := \vec{OC}$$

（其中 OACB 为平行四边形）

$$a-b := a+(-b)$$

引理（三角形法则）：$\vec{OA}+\vec{AC}=\vec{OC}$



$$\vec{OA}+\vec{AC} \underset{\uparrow \atop \vec{OB}=\vec{AC}}{=} \vec{OA}+\vec{OB}=\vec{OC}$$

向量加法基本性质：

- $a+b=b+a$
- $a+(b+c)=(a+b)+c$
- $a+0=a$
- $a+(-a)=0$

定义（向量数乘）： a为向量，λ为实数

λa
- 模长 $= |\lambda|\cdot|a|$;
- 方向 $\begin{cases} \text{与}a\text{相同}, & \lambda \geq 0; \\ \text{与}a\text{相反}, & \lambda < 0. \end{cases}$

数乘基本性质：

- $1\cdot a = a$
- $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$
- $(\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a$
- $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$

记号： $a \neq 0$ $\quad a^{\circ} := \dfrac{a}{|a|}$ （即方向与a相同的单位向量）

§1.1.3. 向量的共线与共面.

共线 一组向量平行于某条直线

共面 一组向量平行于某个平面

命题1.1.1 a,b 共线 $\Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu)\neq(0,0)$ s.t. $\lambda a+\mu b=0$

Pf: $\Rightarrow$): 不妨设 $a\neq 0 \Rightarrow b=|b|\cdot\frac{a}{|a|}$

$\Rightarrow \frac{|b|}{|a|}a+(-1)b=0$

$\Leftarrow$): 不妨设 $\lambda\neq 0$. $\Rightarrow a=-\frac{\mu}{\lambda}b$

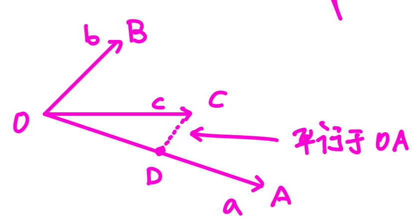
$\Rightarrow a,b$ 共线

命题1.1.2 a,b,c 共面 $\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu,\nu)\neq(0,0,0)$ s.t. $\lambda a+\mu b+\nu c=0$

Pf: $\Rightarrow$): 1° a,b,c 中有两向量共线. 不妨设 a,b 共线

$\Rightarrow \exists(\lambda,\mu)\neq(0,0)$ s.t. $\lambda a+\mu b+0c=0$

2° a,b,c 任两向量不共线.



$\Rightarrow \vec{OC}=\vec{OD}+\vec{DC}$

$=\lambda\vec{OA}+\mu\vec{OB}$

$\Rightarrow \lambda a+\mu b+(-1)c=0$

$\Leftarrow$): 不妨设 $\nu \neq 0$

$$\lambda a + \mu b + \nu c = 0 \Rightarrow c = \left(-\frac{\lambda}{\nu}\right) a + \left(-\frac{\mu}{\nu}\right) b$$

$\Rightarrow$ c 为以 $\left(-\frac{\lambda}{\nu}\right)a$, $\left(-\frac{\mu}{\nu}\right)b$ 为边的平行四边形的对角线

$\Rightarrow$ a, b, c 共面.

定义 1.1.1 (线性组合). $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n$

向量　实数

定义 1.1.2 (线性相关) $a_1, \cdots, a_n$ 称为<u>线性相关</u>, 若 $\exists (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq (0, \cdots, 0)$

s.t.

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n = 0$$

反之, 则称为<u>线性无关</u>. (i.e. $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$)

例: · a 线性相关 $\Leftrightarrow$ $a = 0$

· a, b 线性相关 $\Leftrightarrow$ a, b 共线

· a, b, c 线性相关 $\Leftrightarrow$ a, b, c 共面.

例: $\forall a, b, c \Rightarrow a+b+c,\ a-b-c,\ a+2b+2c$ 线性相关.

Pf: $a - b - c = 3(a+b+c) - 2(a+2b+2c)$ □

例：A,B,C 为空间中的任意三点．则

A,B,C 共线 $\Leftrightarrow \exists (k_1,k_2,k_3)\neq(0,0,0)$ 满足 $k_1+k_2+k_3=0$ 使得

$$k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}=0$$

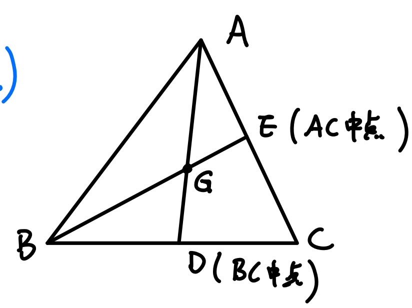
Pf：A,B,C 共线 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists(\mu,\lambda)\neq(0,0)$ s.t. $\mu\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}=0$

$\Leftrightarrow \exists(\mu,\lambda)\neq(0,0)$ s.t. $\mu(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\lambda(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=0$

$\Leftrightarrow \exists(\mu,\lambda)\neq(0,0)$ s.t. $(-\mu-\lambda)\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{OC}=0$

$\overset{\mu=k_2\ \lambda=k_3}{\Leftrightarrow} \exists(k_1,k_2,k_3)\neq(0,0,0)$ s.t. $k_1+k_2+k_3=0$ & $k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}=0$ □

例（利用向量运算解决几何问题）



$\Rightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

Pf：设 $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AD}$．则

$$\left.\begin{array}{ll}
D\text{ 为 }BC\text{ 中点}\Rightarrow \overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}) & \Rightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{x}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}) \\
B,G,E\text{ 共线} & \Rightarrow \overrightarrow{AG}=y\overrightarrow{AB}+(1-y)\overrightarrow{AE} \\
E\text{ 为 }AC\text{ 中点} & \Rightarrow \overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}
\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=y\overrightarrow{AB}+\left(\frac{1-y}{2}\right)\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\frac{x}{2}=y\\ \frac{x}{2}=\frac{1-y}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\frac{2}{3}\\ y=\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

□

1-1-7