线性代数　中国科学技术大学 2023 春
欧氏空间

主讲: 杨金榜
地空楼 525

助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

定理

任意 n 阶实对称矩阵 A, 存在 n 阶正交矩阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵.

例

设 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$. 求正交矩阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵.

欧氏空间的子空间 *

定义 (正交)

设 V_1, V_2 为欧氏空间 V 的两子空间. 若对任意 $a_1 \in V_1, a_2 \in V_2$ 都有 $(a_1, a_2) = 0$, 则称 V_1 和 V_2 相互正交, 记为 $V_1 \perp V_2$. 若一个向量 a 满足 $\langle a \rangle \perp V_1$, 则称 a 与 V_1 正交, 记为 $a \perp V_1$.

定理

1. 若 $V_1 \perp V_2$, 则 $V_1 + V_2$ 为直和;
2. 若 $V_1, V_2, \cdots, V_r$ 两两正交, 则 $V_1 + V_2 + \cdots + V_r$ 为直和.

定义 (正交补)

若 $V_1 \perp V_2$ 且 $V = V_1 + V_2$, 则称 V_1, V_2 互为正交补 (空间).

定理

欧氏空间的任意子空间的正交补存在且唯一.

酉空间 *

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\text{-线性空间} & + & \text{内积} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{欧氏空间} \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow, bend right] & \\
 & & \text{度量矩阵} \arrow[d, Rightarrow] & \text{正交变换} \arrow[r, Rightarrow] & \text{正交矩阵} \\
 & & \text{正定矩阵} & \text{伴随变换} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{转置} \\
 & & & \text{自伴随变换} \arrow[r, Rightarrow] & \text{对称矩阵}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[arrows=Rightarrow]
\mathbb{R}\text{-线性空间} & + & \text{内积} \arrow[rr] \arrow[d] & & \text{欧氏空间} \arrow[d] \arrow[dd, bend right] & & \\
& & \text{度量矩阵} \arrow[d] & & \text{正交变换} \arrow[rr] & & \text{正交矩阵} \\
& & \text{正定矩阵} & & \text{伴随变换} \arrow[rr] \arrow[d] & & \text{转置} \\
& & & & \text{自伴随变换} \arrow[rr] & & \text{对称矩阵}
\end{tikzcd}
$$

$$
\mathbb{C}\text{-线性空间} \quad + \quad \text{内积 (??)} \Longrightarrow \text{?? 空间}
$$

复数模长和复数组向量模长 *

复数模长和复数组向量模长 *

1. $x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| = \sqrt{x \cdot x}$;

复数模长和复数组向量模长 *

1. $x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| = \sqrt{x \cdot x}$;
2. $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \xRightarrow{\text{标准内积下}} |x| = \sqrt{x_1 x_1 + \cdots + x_n x_n}$;

复数模长和复数组向量模长 *

1. $x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| = \sqrt{x \cdot x}$;
2. $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \xRightarrow{\text{标准内积下}} |x| = \sqrt{x_1 x_1 + \cdots + x_n x_n}$;
3. $z \in \mathbb{C} \Rightarrow |z| = \sqrt{\overline{z} \cdot z}$;

复数模长和复数组向量模长 *

1. $x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| = \sqrt{x \cdot x}$;
2. $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \xRightarrow{\text{标准内积下}} |x| = \sqrt{x_1 x_1 + \cdots + x_n x_n}$;
3. $z \in \mathbb{C} \Rightarrow |z| = \sqrt{\overline{z} \cdot z}$;

很自然地, 我们可以如下定义复数组向量的长度:

$$z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n \Rightarrow |z| = \sqrt{\overline{z_1} z_1 + \cdots + \overline{z_n} z_n};$$

1. $x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| = \sqrt{x \cdot x}$;
2. $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \xRightarrow{\text{标准内积下}} |x| = \sqrt{x_1 x_1 + \cdots + x_n x_n}$;
3. $z \in \mathbb{C} \Rightarrow |z| = \sqrt{\overline{z} \cdot z}$;

很自然地, 我们可以如下定义复数组向量的长度:

$$z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n \Rightarrow |z| = \sqrt{\overline{z_1} z_1 + \cdots + \overline{z_n} z_n};$$

对于任意复矩阵 A, 记

$$A^H := \overline{A}^T$$

称其为 A 的共轭转置.

复数模长和复数组向量模长 *

1. $x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| = \sqrt{x \cdot x}$;
2. $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \xRightarrow{\text{标准内积下}} |x| = \sqrt{x_1 x_1 + \cdots + x_n x_n}$;
3. $z \in \mathbb{C} \Rightarrow |z| = \sqrt{\overline{z} \cdot z}$;

很自然地, 我们可以如下定义复数组向量的长度:

$$z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n \Rightarrow |z| = \sqrt{\overline{z_1} z_1 + \cdots + \overline{z_n} z_n};$$

对于任意复矩阵 A, 记

$$A^H := \overline{A}^T$$

称其为 A 的共轭转置. 则复数组 (列) 向量的长度公式可写为

$$|z|^2 = z^H \cdot z.$$

复数模长和复数组向量模长 *

1. $x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| = \sqrt{x \cdot x}$;
2. $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \xRightarrow{\text{标准内积下}} |x| = \sqrt{x_1 x_1 + \cdots + x_n x_n}$;
3. $z \in \mathbb{C} \Rightarrow |z| = \sqrt{\overline{z} \cdot z}$;

很自然地, 我们可以如下定义复数组向量的长度:

$$z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n \Rightarrow |z| = \sqrt{\overline{z_1} z_1 + \cdots + \overline{z_n} z_n};$$

对于任意复矩阵 A, 记

$$A^H := \overline{A}^T$$

称其为 A 的共轭转置. 则复数组 (列) 向量的长度公式可写为

$$|z|^2 = z^H \cdot z.$$

注: 共轭转置保持加法, 但只是在共轭意义下保持数乘.

复向量空间上的内积定义*

复向量空间上的内积定义 *

定义 (酉空间)

设 V 为复线性空间.

复向量空间上的内积定义*

定义 (酉空间)

设 V 为复线性空间. 若映射

$$(-,-)\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

满足

复向量空间上的内积定义 *

定义 (酉空间)

设 V 为复线性空间. 若映射

$$(-,-)\colon V\times V\longrightarrow\mathbb{C}$$

满足

1. 共轭对称性 $(a,b)=\overline{(b,a)}$;

复向量空间上的内积定义 *

定义 (酉空间)

设 V 为复线性空间. 若映射

$$(-,-)\colon V\times V\longrightarrow \mathbb{C}$$

满足

1. 共轭对称性 $(a,b)=\overline{(b,a)}$;
2. 线性性 $(a,\lambda b+\mu c)=\lambda(a,b)+\mu(a,c)$;

定义 (酉空间)

设 V 为复线性空间. 若映射

$$(-,-)\colon V\times V\longrightarrow \mathbb{C}$$

满足

1. 共轭对称性 $(a,b)=\overline{(b,a)}$;
2. 线性性 $(a,\lambda b+\mu c)=\lambda(a,b)+\mu(a,c)$;
3. 正定性 $(a,a)\geq 0$, 且等号成立当且仅当 $a=0$,

复向量空间上的内积定义 *

定义 (酉空间)

设 V 为复线性空间. 若映射

$$(-,-): V\times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

满足

1. 共轭对称性 $(a,b)=\overline{(b,a)}$;
2. 线性性 $(a,\lambda b+\mu c)=\lambda(a,b)+\mu(a,c)$;
3. 正定性 $(a,a)\geq 0$, 且等号成立当且仅当 $a=0$,

则称 (a,b) 为 a 和 b 的内积.

定义 (酉空间)

设 V 为复线性空间. 若映射

$$(-,-)\colon V\times V\longrightarrow\mathbb{C}$$

满足

1. 共轭对称性 $(a,b)=\overline{(b,a)}$;
2. 线性性 $(a,\lambda b+\mu c)=\lambda(a,b)+\mu(a,c)$;
3. 正定性 $(a,a)\geq 0$, 且等号成立当且仅当 $a=0$,

则称 (a,b) 为 a 和 b 的内积. 定义内积的复线性空间称为酉空间.

定义 (酉空间)

设 V 为复线性空间. 若映射

$$(-,-): V\times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

满足

1. 共轭对称性 $(a,b)=\overline{(b,a)}$;
2. 线性性 $(a,\lambda b+\mu c)=\lambda(a,b)+\mu(a,c)$;
3. 正定性 $(a,a)\geq 0$, 且等号成立当且仅当 $a=0$,

则称 (a,b) 为 a 和 b 的内积. 定义内积的复线性空间称为酉空间.

注: $(\lambda a,b)=\overline{\lambda}(a,b)$.

正定复矩阵 *

定义

设 V 为 n 维酉空间.G 为 n 阶复矩阵.

正定复矩阵 *

定义

设 V 为 n 维酉空间.G 为 n 阶复矩阵.

1. 称 G 为正定复矩阵,

正定复矩阵 *

定义

设 V 为 n 维酉空间.G 为 n 阶复矩阵.

1. 称 G 为正定复矩阵，若
   1. $G^H = G$;

正定复矩阵 *

定义

设 V 为 n 维酉空间.G 为 n 阶复矩阵.

1. 称 G 为正定复矩阵，若
   1. $G^H = G$;
   2. 任意给定列向量 $z \in \mathbb{C}^n$ 都有 $z^H G z \geq 0$, 并且等号成立当且仅当 $z = 0$.

定义

设 V 为 n 维酉空间.G 为 n 阶复矩阵.

1. 称 G 为正定复矩阵，若
   1. $G^H = G$;
   2. 任意给定列向量 $z \in \mathbb{C}^n$ 都有 $z^H G z \geq 0$, 并且等号成立当且仅当 $z = 0$.
2. 向量 a 的长度 (或模长)定义为 $|a| := \sqrt{(a, a)}$.

定义

设 V 为 n 维酉空间.G 为 n 阶复矩阵.

1. 称 G 为正定复矩阵，若
   1. $G^H = G$;
   2. 任意给定列向量 $z \in \mathbb{C}^n$ 都有 $z^H G z \geq 0$, 并且等号成立当且仅当 $z = 0$.
2. 向量 a 的长度 (或模长)定义为 $|a| := \sqrt{(a,a)}$.
3. 垂直 (正交),标准正交基,Schmit 正交化,正交补,Schwarz 不等式,$\cdots$

共轭变换 (伴随变换)*

定义 (共轭变换, 伴随变换)

设 $\mathscr{A}$ 为酉空间 V 上的一个线性变换.

定义 (共轭变换, 伴随变换)

设 $\mathscr{A}$ 为酉空间 V 上的一个线性变换. 则

- 存在唯一的 V 上的线性变换 $\mathscr{A}^*$ 满足对任意 $a, b \in V$

$$(\mathscr{A}a, b) = (a, \mathscr{A}^* b).$$

定义 (共轭变换, 伴随变换)

设 $\mathscr{A}$ 为酉空间 V 上的一个线性变换. 则

- 存在唯一的 V 上的线性变换 $\mathscr{A}^*$ 满足对任意 $a, b \in V$

$$(\mathscr{A}a, b) = (a, \mathscr{A}^* b).$$

称 $\mathscr{A}^*$ 是 $\mathscr{A}$ 的共轭变换(或伴随变换).

定义 (共轭变换, 伴随变换)

设 $\mathscr{A}$ 为酉空间 V 上的一个线性变换. 则

- 存在唯一的 V 上的线性变换 $\mathscr{A}^*$ 满足对任意 $a, b \in V$
$$(\mathscr{A}a, b) = (a, \mathscr{A}^* b).$$
称 $\mathscr{A}^*$ 是 $\mathscr{A}$ 的共轭变换(或伴随变换).
- 若 $\mathscr{A}$ 在标准正交基下矩阵为 A, 则 $\mathscr{A}^*$ 在同一组标准正交基下矩阵为 A^H.

酉变换 *

设 $\mathscr{U}$ 为酉空间 V 上的线性变换.

设 $\mathscr{U}$ 为酉空间 V 上的线性变换. 则

$\mathscr{U}$ 为酉变换 $\overset{\text{定义}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathscr{U}$ 保持内积

设 $\mathscr{U}$ 为酉空间 V 上的线性变换. 则

$\mathscr{U}$ 为酉变换 $\xLeftrightarrow{\text{定义}}$ $\mathscr{U}$ 保持内积

$\Leftrightarrow$ $\mathscr{U}$ 保持向量长度

酉变换 *

设 $\mathscr{U}$ 为酉空间 V 上的线性变换. 则

$\mathscr{U}$ 为酉变换 $\overset{\text{定义}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathscr{U}$ 保持内积

$\Leftrightarrow$ $\mathscr{U}$ 保持向量长度

$\Leftrightarrow$ $\mathscr{U}$ 将标准正交基变为标准正交基

酉变换 *

设 $\mathscr{U}$ 为酉空间 V 上的线性变换. 则

$$\mathscr{U} \text{ 为酉变换} \overset{\text{定义}}{\Longleftrightarrow} \mathscr{U} \text{ 保持内积}$$

$$\Leftrightarrow \mathscr{U} \text{ 保持向量长度}$$

$$\Leftrightarrow \mathscr{U} \text{ 将标准正交基变为标准正交基}$$

$$\Leftrightarrow \mathscr{U}^*\mathscr{U} = \mathrm{id}_V$$

设 $\mathscr{U}$ 为酉空间 V 上的线性变换. 则

$\mathscr{U}$ 为酉变换 $\overset{\text{定义}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathscr{U}$ 保持内积

$\Leftrightarrow$ $\mathscr{U}$ 保持向量长度

$\Leftrightarrow$ $\mathscr{U}$ 将标准正交基变为标准正交基

$\Leftrightarrow$ $\mathscr{U}^*\mathscr{U} = \mathrm{id}_V$

$\Leftrightarrow$ $\mathscr{U}$ 在标准正交基下的矩阵 U 为酉矩阵(即,$U^H U = I$)

设 $\mathscr{U}$ 为酉空间 V 上的线性变换. 则

$\mathscr{U}$ 为酉变换 $\overset{\text{定义}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathscr{U}$ 保持内积

$\Leftrightarrow$ $\mathscr{U}$ 保持向量长度

$\Leftrightarrow$ $\mathscr{U}$ 将标准正交基变为标准正交基

$\Leftrightarrow$ $\mathscr{U}^*\mathscr{U} = \mathrm{id}_V$

$\Leftrightarrow$ $\mathscr{U}$ 在标准正交基下的矩阵 U 为酉矩阵(即,$U^HU = I$)

定理

酉空间 V 上的全体酉变换组成的集合 $U(V)$ 在复合的作用下构成群.

Hermite 变换 *

设酉空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 在某组标准正交基下矩阵为 A.

[1]在物理中,Hermite 变换代表可观测量.

Hermite 变换 *

设酉空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 在某组标准正交基下矩阵为 A. 则[1]

$$\mathscr{A} \text{ 为Hermite 变换} \stackrel{\text{定义}}{\Longleftrightarrow} \mathscr{A}^* = \mathscr{A}(\text{自伴随})$$

[1] 在物理中,Hermite 变换代表可观测量.

设酉空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 在某组标准正交基下矩阵为 A. 则[1]

$$\mathscr{A} \text{ 为Hermite 变换} \overset{\text{定义}}{\Longleftrightarrow} \mathscr{A}^* = \mathscr{A}(\text{自伴随})$$

$$\Leftrightarrow (\mathscr{A}a, b) = (a, \mathscr{A}b), \quad (\forall a, b \in V)$$

[1] 在物理中,Hermite 变换代表可观测量.

设酉空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 在某组标准正交基下矩阵为 A. 则[1]

$$\mathscr{A} \text{ 为Hermite 变换} \overset{\text{定义}}{\iff} \mathscr{A}^* = \mathscr{A}(\text{自伴随})$$

$$\Leftrightarrow (\mathscr{A}a, b) = (a, \mathscr{A}b), \quad (\forall a, b \in V)$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 为Hermite 矩阵}(\text{即}, A^H = A).$$

[1] 在物理中,Hermite 变换代表可观测量.

规范变换 *

设 $\mathscr{A}$ 为酉空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$.

规范变换 *

设 $\mathscr{A}$ 为酉空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$.

$$\mathscr{A} \text{ 为规范变换} \overset{\text{定义}}{\Longleftrightarrow} \mathscr{A}^*\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{A}^*$$

规范变换 *

设 $\mathscr{A}$ 为酉空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$.

$$\mathscr{A}\text{ 为规范变换} \xLeftrightarrow{\text{定义}} \mathscr{A}^*\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{A}^*$$

$$\Leftrightarrow A\text{酉相似于对角阵}$$

规范变换 *

设 $\mathscr{A}$ 为酉空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$.

$$\mathscr{A} \text{ 为}\text{规范变换} \overset{\text{定义}}{\iff} \mathscr{A}^*\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{A}^*$$

$$\Leftrightarrow A \text{酉相似于对角阵}$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 在某组标准正交基下为对角阵.}$$

规范变换 *

设 $\mathscr{A}$ 为酉空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$.

$\mathscr{A}$ 为规范变换 $\xLeftrightarrow{\text{定义}}$ $\mathscr{A}^*\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{A}^*$

$\Leftrightarrow A$ 酉相似于对角阵

$\Leftrightarrow A$ 在某组标准正交基下为对角阵.

推论

设 $\mathscr{U}$ 为酉变换.

规范变换 *

设 $\mathscr{A}$ 为酉空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$.

$$\mathscr{A} \text{ 为规范变换} \overset{\text{定义}}{\iff} \mathscr{A}^*\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{A}^*$$

$$\Leftrightarrow A \text{酉相似于对角阵}$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 在某组标准正交基下为对角阵.}$$

推论

设 $\mathscr{U}$ 为酉变换. 则

1. $\mathscr{U}$ 的特征值 λ 模为 1. 即, 存在 $\theta \in [0, 2\pi)$ 使得 $\lambda = e^{i\theta}$.

规范变换 *

设 $\mathscr{A}$ 为酉空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$.

$$\mathscr{A} \text{ 为规范变换} \overset{\text{定义}}{\Longleftrightarrow} \mathscr{A}^*\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{A}^*$$

$\Leftrightarrow A$ 酉相似于对角阵

$\Leftrightarrow A$ 在某组标准正交基下为对角阵.

推论

设 $\mathscr{U}$ 为酉变换. 则

1. $\mathscr{U}$ 的特征值 λ 模为 1. 即, 存在 $\theta \in [0, 2\pi)$ 使得 $\lambda = e^{i\theta}$.
2. $\mathscr{U}$ 在某组标准正交基下矩阵为对角阵 $\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \cdots, e^{i\theta_n})$.

规范变换 *

设 $\mathscr{A}$ 为酉空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$.

$$\mathscr{A} \text{ 为规范变换} \overset{\text{定义}}{\Longleftrightarrow} \mathscr{A}^*\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{A}^*$$

$$\Leftrightarrow A \text{酉相似于对角阵}$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 在某组标准正交基下为对角阵.}$$

推论

设 $\mathscr{U}$ 为酉变换. 则

1. $\mathscr{U}$ 的特征值 λ 模为 1. 即, 存在 $\theta \in [0, 2\pi)$ 使得 $\lambda = e^{i\theta}$.
2. $\mathscr{U}$ 在某组标准正交基下矩阵为对角阵 $\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \cdots, e^{i\theta_n})$.

证明思路:$D^H D = I \Rightarrow |\lambda_i| = 1$.

规范变换 *

设 $\mathscr{A}$ 为酉空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$.

$$\mathscr{A} \text{ 为规范变换} \overset{\text{定义}}{\Longleftrightarrow} \mathscr{A}^*\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{A}^*$$

$\Leftrightarrow A$ 酉相似于对角阵

$\Leftrightarrow A$ 在某组标准正交基下为对角阵.

推论

设 $\mathscr{U}$ 为酉变换. 则

1. $\mathscr{U}$ 的特征值 λ 模为 1. 即, 存在 $\theta \in [0, 2\pi)$ 使得 $\lambda = e^{i\theta}$.
2. $\mathscr{U}$ 在某组标准正交基下矩阵为对角阵 $\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \cdots, e^{i\theta_n})$.

证明思路:$D^H D = I \Rightarrow |\lambda_i| = 1$.

推论

设 $\mathscr{A}$ 为 *Hermite* 变换.

规范变换 *

设 $\mathscr{A}$ 为酉空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$.

$$\mathscr{A} \text{ 为规范变换} \overset{\text{定义}}{\Longleftrightarrow} \mathscr{A}^*\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{A}^*$$

$\Leftrightarrow A$ 酉相似于对角阵

$\Leftrightarrow A$ 在某组标准正交基下为对角阵.

推论

设 $\mathscr{U}$ 为酉变换. 则

1. $\mathscr{U}$ 的特征值 λ 模为 1. 即, 存在 $\theta \in [0, 2\pi)$ 使得 $\lambda = e^{i\theta}$.
2. $\mathscr{U}$ 在某组标准正交基下矩阵为对角阵 $\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \cdots, e^{i\theta_n})$.

证明思路:$D^H D = I \Rightarrow |\lambda_i| = 1$.

推论

设 $\mathscr{A}$ 为 *Hermite* 变换. 则

1. $\mathscr{A}$ 的特征值全为实数;

设 $\mathscr{A}$ 为酉空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$.

$$\mathscr{A}\text{ 为规范变换} \overset{\text{定义}}{\Longleftrightarrow} \mathscr{A}^*\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{A}^*$$

$\Leftrightarrow A$ 酉相似于对角阵

$\Leftrightarrow A$ 在某组标准正交基下为对角阵.

推论

设 $\mathscr{U}$ 为酉变换. 则

1. $\mathscr{U}$ 的特征值 λ 模为 1. 即, 存在 $\theta \in [0, 2\pi)$ 使得 $\lambda = e^{i\theta}$.
2. $\mathscr{U}$ 在某组标准正交基下矩阵为对角阵 $\operatorname{diag}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \cdots, e^{i\theta_n})$.

证明思路:$D^H D = I \Rightarrow |\lambda_i| = 1$.

推论

设 $\mathscr{A}$ 为 *Hermite* 变换. 则

1. $\mathscr{A}$ 的特征值全为实数;
2. $\mathscr{A}$ 在某组标准正交基下的矩阵为实对角矩阵.

规范变换 *

设 $\mathscr{A}$ 为酉空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$.

$$\mathscr{A} \text{ 为规范变换} \overset{\text{定义}}{\Longleftrightarrow} \mathscr{A}^*\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{A}^*$$

$$\Leftrightarrow A \text{酉相似于对角阵}$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 在某组标准正交基下为对角阵.}$$

推论

设 $\mathscr{U}$ 为酉变换. 则

1. $\mathscr{U}$ 的特征值 λ 模为 1. 即, 存在 $\theta \in [0, 2\pi)$ 使得 $\lambda = e^{i\theta}$.
2. $\mathscr{U}$ 在某组标准正交基下矩阵为对角阵 $\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \cdots, e^{i\theta_n})$.

证明思路:$D^H D = I \Rightarrow |\lambda_i| = 1$.

推论

设 $\mathscr{A}$ 为 *Hermite* 变换. 则

1. $\mathscr{A}$ 的特征值全为实数;
2. $\mathscr{A}$ 在某组标准正交基下的矩阵为实对角矩阵.

证明思路:$D^H = D \Rightarrow \lambda_i \in \mathbb{R}$.

设 $\mathscr{A}$ 为酉空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$.

$$\mathscr{A} \text{ 为规范变换} \overset{\text{定义}}{\Longleftrightarrow} \mathscr{A}^*\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{A}^*$$

$\Leftrightarrow A$ 酉相似于对角阵

$\Leftrightarrow A$ 在某组标准正交基下为对角阵.

推论

设 $\mathscr{U}$ 为酉变换. 则

1. $\mathscr{U}$ 的特征值 λ 模为 1. 即, 存在 $\theta \in [0, 2\pi)$ 使得 $\lambda = e^{i\theta}$.
2. $\mathscr{U}$ 在某组标准正交基下矩阵为对角阵 $\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \cdots, e^{i\theta_n})$.

证明思路:$D^H D = I \Rightarrow |\lambda_i| = 1$.

推论

设 $\mathscr{A}$ 为 *Hermite* 变换. 则

1. $\mathscr{A}$ 的特征值全为实数;
2. $\mathscr{A}$ 在某组标准正交基下的矩阵为实对角矩阵.

证明思路:$D^H = D \Rightarrow \lambda_i \in \mathbb{R}$.

问题: 反 Hermite 变换?