

§1.8 求和符号

$$\sum_{i=1}^n a_i := a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

上标
下标
求和符号
求和指示 (可用其他字母代替, 例 $\sum_{j=1}^n a_j, \sum_{k=1}^n a_k$)

性质: 1) $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$

2) $\sum_{i=1}^n (\lambda a_i) = \lambda \sum_{i=1}^n a_i$

多重求和原则: 从内向外对每个求和符号逐次求和, 例

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij} := \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \right)$$

a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}
a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}
...
a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nm}

性质: $\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}$

↑ 即可交换求和顺序

• 也记为 $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{ij}$

· **部分和:** $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} = a_{11} + (a_{12} + a_{22}) + (a_{13} + a_{23} + a_{33}) + \dots + (a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{nn})$

=重和式表示:
$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij}$$
$$= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{ij}$$

例: $\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_i b_j = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{j=1}^m b_j$

$$\text{Pf: LHS} = \sum_{j=1}^m \left(b_j \sum_{i=1}^n a_i \right) = \text{RHS} \quad \square$$

(推了) Λ 为有限集, $\Lambda \rightarrow \mathbb{C}$
 $\lambda \mapsto a_\lambda$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda := \text{所有 } a_\lambda (\lambda \in \Lambda) \text{ 的 } \mathbb{R}^2$$

乘积符号 $\prod_{i=1}^n a_i, \prod_{\lambda \in \Lambda} a_i$