§ 数组空间及其子空间

定义：F为数域，带线性运算的 n 维向量全体

$$\{(a_1,\cdots,a_n) \mid a_i\in F\}$$

称为 **n 维数组空间**，记为 F^n.

注：表达形式，行向量，列向量. $(a_1,\cdots,a_n)^T$.

定义：线性组合、组合系数，线性表示

定义：设 $V\subset F^n$ 为非空向量集合，它满足：

$$\forall \vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_n\in V,\ \forall \lambda_1,\cdots,\lambda_n\in F \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{a}_i \in V$$

则称 V 为 F^n 的**子空间**

性质：$\underset{\neq\phi}{V}\subset F^n$ 为子空间 $\Leftrightarrow \begin{cases} (1) & \vec{a},\vec{b}\in V \Rightarrow \vec{a}+\vec{b}\in V \\ (2) & \vec{a}\in V,\ \lambda\in F \Rightarrow \lambda\vec{a}\in V \end{cases}$

例：平凡子空间 $V=\{0\}$ 以及 $V=F^n$.

定理：$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m \in F^n$，则

$$\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m \rangle := \{ \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_m\vec{a}_m \mid \lambda_1, \cdots, \lambda_m \in F \}$$

是 F^n 的子空间，称为由 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 生成的子空间.

例：$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ 不共面

三维空间向量基本定理 $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^3 = \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$

$\langle a \rangle$，$\langle a, b \rangle$ 是 $\mathbb{R}^3$ 为非平凡子空间

例：
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$ 有解

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{=\vec{b}} \text{ 为 } \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}}_{=\vec{a}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}}_{=\vec{a}_2}, \cdots, \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}_{=\vec{a}_n} \text{ 的线性组合.}$$

$$\Leftrightarrow \vec{b} \in \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n \rangle$$

例：齐次线性方程组的通解：$\vec{x} = t_1\vec{\alpha}_1 + t_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + t_{n-r}\vec{\alpha}_{n-r}$

$\Rightarrow$ 解空间为 $\langle \vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_{n-r} \rangle$ 为 F^n 的一个子空间.