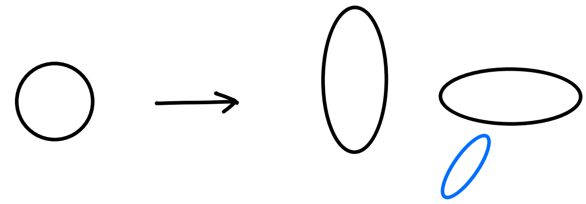
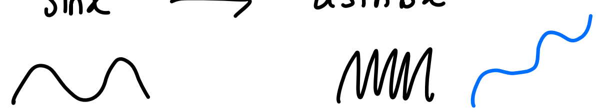
§ 线性变换的定义与性质.

中学图形的伸缩变换:



例: $(x,y) \mapsto (k_1 x, k_2 y)$

$\sin x \longrightarrow a\sin bx$



$y = x + \sin x$

伸缩变换的基本特征: ① 保持直线

② 且将平行直线变为平行直线

$\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 满足 ① ② $\Rightarrow$ $\mathcal{A}(\lambda P_1 + \mu P_2) = \lambda \mathcal{A}(P_1) + \mu \mathcal{A}(P_2)$

推广: 伸缩变换 $\Rightarrow$ 线性变换

定义: $V, V' = F$-线性空间. 若映射 $\mathcal{A}: V \to V'$ 满足

1) $\forall x, y \in V$, $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$

2) $\forall x \in V$, $\forall \lambda \in F$ $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}(x)$.

则称 $\mathcal{A}$ 为从 V 到 V' 的线性映射. 特别地, 若 $V = V'$, 则称 $\mathcal{A}$ 为 V 上的一个线性变换.

注: 本课程仅讨论线性变换.

例：1) 单位变换（恒等变换）　$\mathcal{E}: V \to V$
$$x \mapsto x$$

2) 零变换：$\mathcal{E}: V \to V$
$$x \mapsto 0$$

3). 微分算子：　$\mathcal{A}: F_n[x] \to F_n[x]$
$$p(x) \mapsto \frac{d}{dx} p(x)$$

4). $C[a,b]$ = 闭区间 $[a,b]$ 上所有实值连续函数集合

$$\mathcal{A}: C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$$

$$\mathcal{A}(f)(x) = \int_a^b K(x,t) f(t)\, dt$$

其中 $K(x,t)$ 为 $[a,b]\times[a,b]$ 上的实值连续函数.

5). $V :=$ $[a,b]$ 上的函数集合.

$\mathcal{A}: V \to V$　　$\mathcal{A}(f)(x) = (1-x)f(a) + x f(b)$

6). $A \in F^{n\times n}$, $\mathcal{A}: F^n \to F^n$　$\mathcal{A}(x) := Ax$ 列向量

特别地：
$$\begin{array}{cccccc}
\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \\
\Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow \\
\text{单位变换} & \text{零变换} & \text{伸缩} & \text{旋转} & \text{反射} & \text{投影}
\end{array}$$

7). $\mathcal{A}: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$　　$\mathcal{A}(x,y,z) = (x^2, xy, z^2)$

8). $\mathcal{A}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$　$z \mapsto \bar{z}$.　$\mathcal{A}$ 为 $\mathbb{R}$-线性，但不是 $\mathbb{C}$-线性的！

性质：$V=F$-线性空间，$\mathscr{A}$ 为 V 上的线性变换，则

1) $\mathscr{A}(0)=0$

2) $\mathscr{A}(-\alpha)=-\mathscr{A}(\alpha) \quad \forall\ \alpha\in V$

3) 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的一组基，若 $\alpha=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_n\alpha_n$，则

$$\mathscr{A}(\alpha)=\lambda_1\mathscr{A}(\alpha_1)+\lambda_2\mathscr{A}(\alpha_2)+\cdots+\lambda_n\mathscr{A}(\alpha_n).$$

即 $\mathscr{A}$ 由 $\mathscr{A}$ 在 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的像唯一决定.

4) $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相关 $\Rightarrow$ $\mathscr{A}(\alpha_1),\cdots,\mathscr{A}(\alpha_n)$ 线性相关.

即 $\mathscr{A}$ 保持线性相关. 特别的 3维情形. 共线 $\mapsto$ 共线

共面 $\mapsto$ 共面

注：1) 上面性质对线性映射也成立.

2) 若 4) 中的 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性无关呢？

证：1) $\mathscr{A}(0)=\mathscr{A}(0)+\mathscr{A}(0) \Rightarrow \mathscr{A}(0)=0$

2) $\mathscr{A}(-\alpha)+\mathscr{A}(\alpha)=\mathscr{A}(-\alpha+\alpha)=\mathscr{A}(0)=0 \Rightarrow \mathscr{A}(-\alpha)=-\mathscr{A}(\alpha)$.

3). 显然.

4). $\Rightarrow$ $\exists$ 不全为零的 $\lambda_1\cdots\lambda_n$ s.t. $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i=0$

$\Rightarrow 0=\mathscr{A}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathscr{A}(\alpha_i)$

$\Rightarrow \mathscr{A}(\alpha_1),\cdots,\mathscr{A}(\alpha_n)$ 线性相关.