§7.5* 酉空间

$\mathbb{R}$-线性空间 + 内积 $\Rightarrow$ 欧氏空间

$\mathbb{C}$-线性空间 + 内积 $\Rightarrow$??

记号：复共轭：$\overline{(a_1,\cdots,a_n)} := (\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n)$，$\overline{(a_{ij})_{n\times n}} := (\overline{a_{ij}})_{n\times n}$.

共轭转置：$(a_1,\cdots,a_n)^H := \begin{pmatrix}\bar{a}_1\\ \vdots \\ \bar{a}_n\end{pmatrix}$，$(a_{ij})_{n\times n}^H := (\overline{a_{ij}})_{n\times n}^T$

定义：V为复线性空间，若$\forall\, a,b\in V$对应一个复数，记作(a,b)，满足

1) 共轭对称性：$(a,b)=\overline{(b,a)}$

2) 线性性：$(a,\lambda b+\mu c) = \lambda(a,b)+\mu(b,c)$.

3) 正定性：$(a,a)\geq 0$，"$=$" $\Leftrightarrow$ $a=0$.

则称(a,b)为a和b的内积。定义了内积的复线性空间称为酉空间。

注：$(\lambda a,b) = \lambda(a,b)$!

§ 正交性、

定义：称 $|a| := \sqrt{(a,a)}$ 为向量 a 的长度（模）.

注：不能定义夹角！由于内积不再为实数．但仍可定义垂直与正交．

定义：若 $(a,b)=0$，则称 a 与 b 垂直（正交），记为 $a \perp b$.

欧氏空间中关于正交性结论的移植．

定理：设 V 为 n 维酉空间，则
1)．两两正交的向量组线性无关
2)．V 存在标准正交基、
3)．Schmit 正交化依然有效．
4)．正交补存在且唯一

推论：若 $e_1, \cdots, e_n$ 为标准正交基．$a=\sum a_i e_i$，$b=\sum b_i e_i$
则
$$(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} b_i .$$

§ 共轭变换

定义：设$\mathscr{A}$为酉空间V上的一个线性变换．若$\exists$ V上线性变换$\mathscr{A}^*$满足对$\forall\, a,b\in V$，有

$$(\mathscr{A}a,\ b)=(a,\ \mathscr{A}^*b)$$

则称$\mathscr{A}^*$是$\mathscr{A}$的共轭变换

定理：设$\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$为酉空间V上的两线性变换．设$\mathscr{A}$与$\mathscr{B}$在标准正交基$e_1,\cdots,e_n$下的矩阵为A和B．则

$\mathscr{B}$为$\mathscr{A}$的共轭变换 $\Leftrightarrow$ $B=A^H$

证明：$\mathscr{A}(e_1\cdots e_n)=(e_1\cdots e_n)A$　　$\mathscr{B}(e_1\cdots e_n)=(e_1\cdots e_n)B$

LHS $\Leftrightarrow$ $(\mathscr{A}e_i,\ e_j)=(e_i,\ \mathscr{B}e_j)$　$\forall\, i,j$

$\Leftrightarrow$ $\overline{a_{ji}}=b_{ij}$　$\forall\, i,j$

$\Leftrightarrow$ $A^H=B$

推论：酉空间上的任意线性变换存在共轭变换．

性质：1) $id_V^{\ *}=id_V$

2) $(\mathscr{A}^*)^*=\mathscr{A}^*$

3) $(\lambda\mathscr{A})^*=\overline{\lambda}\mathscr{A}^*$　　$(\mathscr{A}\pm\mathscr{B})^*=\mathscr{A}^*\pm\mathscr{B}^*$

4). $(\mathscr{A}\circ\mathscr{B})^*=\mathscr{B}^*\circ\mathscr{A}^*$.

§ 酉变换与酉矩阵

正交变换与正交矩阵的类比. $(\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^{-1})$

定义: 1) 设 $\mathcal{U}$ 为酉空间 V 上的线性变换. 若 $\mathcal{U}^* \circ \mathcal{U} = id_V$, 则称 $\mathcal{U}$ 为一个酉变换.

2) 称满足 $U^H U = I_n$ 的复矩阵 U 为酉矩阵.

定理: 设 $\mathcal{U}$ 为酉空间 V 上一线性变换. 则以下几条等价

1) $\mathcal{U}$ 为酉变换.

2) $\mathcal{U}$ 保持内积

3) $\mathcal{U}$ 保持向量模长.

4) $\mathcal{U}$ 将标准正交基变为标准正交基.

5) $\mathcal{U}$ 在标准正交基下矩阵为酉矩阵.

证: (2)$\Leftrightarrow$(5): $\mathcal{U}e_j = \sum_{i=1}^n u_{ij} e_i \Rightarrow (\mathcal{U}e_i, \mathcal{U}e_j) = \sum_{i=1}^n \overline{u_{ki}}\, u_{kj}$

LHS $\Leftrightarrow (\mathcal{U}e_i, \mathcal{U}e_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \overline{u_{ki}}\, u_{kj} = \delta_{ij} \quad \forall i, j \quad \Leftrightarrow$ RHS $\quad \square$

定理: n 维酉空间 V 上的全体酉变换组成的集合 $U(V)$ 在复合作用下构成群. 特别地

1). $id_V \in U(V)$

2). $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in U(V) \Rightarrow \mathcal{U}_1 \circ \mathcal{U}_2 \in U(V)$

3). $\mathcal{U} \in U(V) \Rightarrow \mathcal{U}^{-1} \in U(V)$.

§ Hermite 变换与 Hermite 矩阵

对称变换与对称矩阵的类比. $(\mathcal{A}^* = \mathcal{A})$

定义: 1) 设 $\mathcal{A}$ 为酉空间 V 上的线性变换, 若 $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 为 V 上的 Hermite 变换

2) 称满足 $A^H = A$ 的复矩阵为 Hermite 矩阵

定理: 设 A 为酉空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 在某标准正交基下的矩阵, 则以下几条等价

1) $\mathcal{A}$ 为 Hermite 变换

2) $\forall a, b \in V$, $(\mathcal{A}a, b) = (a, \mathcal{A}b)$

3) A 为 Hermite 矩阵

证明: $\mathcal{A}(e_1, \cdots, e_n) = (e_1, \cdots e_n) A \quad (A = (a_{ij})_{n\times n})$

(2) $\Leftrightarrow (e_i, \mathcal{A}e_j) = (\mathcal{A}e_i, e_j) \quad \forall i, j$

$\Leftrightarrow a_{ij} = \overline{a_{ji}} \quad \forall i, j$

$\Leftrightarrow A^H = A$

$\Leftrightarrow$ (3)

定义：1) 设 $\mathscr{A}$ 为酉空间 V 上的线性变换．若 $\mathscr{A}\mathscr{A}^*=\mathscr{A}^*\mathscr{A}$ 则称 $\mathscr{A}$ 为规范变换．

2) 称满足 $AA^H=A^HA$ 的复矩阵为规范矩阵

定理：设 A 为酉空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 在某标准基下的矩阵．则

$$\mathscr{A}\text{ 为规范变换} \Leftrightarrow A\text{ 为规范矩阵}$$

性质：设 $\mathscr{A}$ 为酉空间 V 上的线性变换．设 W 为 V 的子空间．

$$\mathscr{A}W\subseteq W \Leftrightarrow \mathscr{A}^*(W^\perp)\subseteq W^\perp$$

证：$\mathscr{A}W\subseteq W \Leftrightarrow \mathscr{A}W\perp W^\perp$

$\Leftrightarrow (\mathscr{A}\omega, v)=0 \quad \forall \omega\in W,\ \forall v\in W^\perp$

$\Leftrightarrow (\omega, \mathscr{A}^*v)=0 \quad \forall \omega\in W,\ \forall v\in W^\perp$

$\Leftrightarrow W\perp \mathscr{A}^*(W^\perp)$

$\Leftrightarrow \mathscr{A}^*(W^\perp)\subseteq W^\perp$

性质：设 $\mathscr{A}$ 为规范变换，则

$$\mathscr{A}x=\lambda x \Leftrightarrow \mathscr{A}^*x=\bar{\lambda}x.$$

证：$\mathscr{A}$ 规范 $\Rightarrow ((\mathscr{A}^*-\bar{\lambda}\mathcal{E})x, (\mathscr{A}^*-\bar{\lambda}\mathcal{E})x)$

$=((\mathscr{A}-\lambda\mathcal{E})^*x, (\mathscr{A}-\lambda\mathcal{E})^*x)$

$=(x, (\mathscr{A}-\lambda\mathcal{E})(\mathscr{A}-\lambda\mathcal{E})^*x)$

$=(x, (\mathscr{A}-\lambda\mathcal{E})^*(\mathscr{A}-\lambda\mathcal{E})x)=((\mathscr{A}-\lambda\mathcal{E})x, (\mathscr{A}-\lambda\mathcal{E})x)$

$$\text{LHS} \Leftrightarrow (\mathscr{A}-\lambda\mathcal{E})x=0$$
$$\Leftrightarrow ((\mathscr{A}-\lambda\mathcal{E})x,(\mathscr{A}-\lambda\mathcal{E})x)=0$$
$$\Leftrightarrow ((\mathscr{A}-\lambda\mathcal{E})^*x,(\mathscr{A}-\lambda\mathcal{E})^*x)=0$$
$$\Leftrightarrow (\mathscr{A}^*-\bar{\lambda}\mathcal{E})x=0$$
$$\Leftrightarrow \text{RHS}$$

性质：属于规范变换 $\mathscr{A}$ 的不同特征值的特征向量相互正交

证：设 $\mathscr{A}\xi=\lambda\xi\ (\xi\neq0)$, $\mathscr{A}\eta=\mu\eta\ (\eta\neq0)$, $(\lambda\neq\mu)$, 则

$$\bar{\lambda}(\xi,\eta)=(\mathscr{A}\xi,\eta)=(\xi,\mathscr{A}^*\eta)=(\xi,\mu\eta)=\bar{\mu}(\xi,\eta)$$

$$\Rightarrow \overline{\lambda-\mu}\cdot(\xi,\eta)=0 \Rightarrow (\xi,\eta)=0$$

定理：设 $\mathscr{A}$ 为酉空间 V 上的规范变换，则存在标准正交基使得 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为对角阵.

证：对 n 归纳.

$\mathscr{A}e_1=\lambda_1e_1\ (|e_1|=1) \Rightarrow \mathscr{A}^*e_1=\bar{\lambda}_1e_1$

$W:=\langle e_1\rangle \Rightarrow W^\perp$ 为 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{A}^*$ 的不变子空间.

归纳假设 $\Rightarrow \exists\, W^\perp$ 的标准正交基 $e_2,\cdots,e_n$ s.t.

$$\mathscr{A}e_i=\lambda_ie_i \quad i=2,\cdots,n$$

$$\Rightarrow \mathscr{A}(e_1\cdots e_n)=(e_1\cdots e_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}. \quad \square$$

定义: $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$，若$\exists$酉矩阵$U$使得$A=U^{-1}BU$，则称$A$与$B$**酉相似**.

注: 酉相似为$\mathbb{C}^{n\times n}$上的等价关系

定理: 复矩阵为规范矩阵当且仅当其酉相似于对角阵.

推论: 设$\mathscr{A}$为酉变换，则

1) $\mathscr{A}$的特征值λ模为1，即存在$\theta\in[0,2\pi)$使得$\lambda=e^{i\theta}$.
2) $\mathscr{A}$在这某标准正交基下矩阵为$\mathrm{diag}(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2},\cdots,e^{i\theta_n})$.

推论: 设$\mathscr{A}$为Hermite变换，则

1) $\mathscr{A}$的特征值为实数
2) $\mathscr{A}$在某标准正交基下矩阵为实对角阵.