§8.5 正定二次型

§7 内积 $\Rightarrow$ 度量矩阵 G $\Rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $x^T G x > 0$

定义：1) n 元实二次型 $Q(x_1,\cdots,x_n) = \sum a_{ij} x_i x_j = x^T A x$ 称为
正定二次型，如果 $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$，$Q(x_1,\cdots,x_n) > 0$.

2) 正定的二次型对应的矩阵 A 称为正定矩阵.

矩阵 A 正定 简记为 $A > 0$

内积在不同基下矩阵相合，正定矩阵的相合标准形为？

定理：$Q(x_1 \cdots x_n) = x^T A x$ 正定 $\overset{①}{\Leftrightarrow}$ Q 的正惯性指数为 n

$\Leftrightarrow$ A 相合于单位矩阵.

证：① 设 r, s 分别为 Q 的正负惯性指数，则 $\exists$ 可逆阵 P s.t.

$$Q(x_1 \ldots x_n)\Big|_{x=Py} = y_1^2 + \cdots + y_r^2 - y_{r+1}^2 - \cdots - y_{r+s}^2$$

1° 假若 $r < n$，则 $x = P\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\\ 1\end{pmatrix} \neq 0$ 满足

$$Q(x_1 \cdots x_n)\Big|_{x=P\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}} = 0^2 + \cdots + 0^2 - y_{r+1}^2 - \cdots - y_{r+s}^2 \leq 0 \ \lightning$$

2° 反之，若 $r = n$. 则 $\forall x \neq 0 \Rightarrow y = P^{-1}x \neq 0 \Rightarrow Q(x_1,\cdots x_n) = y_1^2 + \cdots + y_n^2 > 0$.

推论：设 A 为 n 阶实对称方阵

1) P 可逆，$B=P^TAP$，则 $B>0 \Leftrightarrow A>0$.

2) $A>0 \Leftrightarrow \exists$ 可逆 P s.t. $A=P^TP$.

3). $A>0 \Rightarrow \det(A)>0$.

证：1). $A>0 \Rightarrow \forall x\neq 0 \quad (Px)^TA(Px)>0 \quad$ (因为 $Px\neq 0$)

$\Rightarrow \forall x\neq 0 \quad x^T(P^TAP)x>0$

$\Rightarrow \quad P^TAP>0$.

2). $\Rightarrow$) 定理

$\Leftarrow$) $A=P^TP \Rightarrow \forall x\neq 0 \quad x^TAx=x^TP^TPx=|Px|^2>0$

$\Rightarrow A>0$.

3). $\det A=\det(P^TP)=(\det P)^2>0$.

定理：实对称阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 正定 $\Leftrightarrow$ 各阶顺序主子式均大于零. 即

$$a_{11}>0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}>0,\quad \cdots\cdots \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ - & - & - \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\det A>0.$$

证：$\Rightarrow$)：A 正定 $\Rightarrow \forall r=1,\cdots,n$ 二次型

$Q_r(x_1\cdots x_r):=Q(x_1,\cdots,x_r,0\cdots 0)$

正定. 因此 A 的 r 阶顺序主子式大于零

$\Leftarrow$)：对 n 归纳. $n=1$ ✓ 假设 $n-1$ ✓

$$A=\begin{pmatrix} A_{n-1} & C \\ C^T & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{c} A_{n-1}>0 \Rightarrow P_{n-1}^T A_{n-1} P_{n-1} = I_{n-1} \\ (P_{n-1} \text{ 可逆}) \end{array} \right)$$

$$R := \begin{pmatrix} P_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R^TAR = \begin{pmatrix} P_{n-1}^T & 0 \\ -C^TA_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{n-1} & C \\ C^T & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & \\ & \underbrace{a_{nn}-C^TA_{n-1}^{-1}C}_{=:a} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A)(\det R)^2 = a$$

$$\det A > 0 \Rightarrow a>0 \Rightarrow R^TAR>0 \Rightarrow A>0$$

例：判断 $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2+2x_2^2+6x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$ 正定性

解：$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad 1>0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1>0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1>0 \quad \Rightarrow A>0$.

根据正负惯性指数命名二次型.

1) 正定 $\Leftrightarrow$ $r=n$ $\quad (\Rightarrow s=0)$
2) 半正定 $\Leftrightarrow$ $r\leq n,\ s=0$.
3) 负定 $\Leftrightarrow$ $s=n$ $\quad (\Rightarrow r=0)$
4) 半负定 $\Leftrightarrow$ $r=0,\ s\leq n$
5) 不定 $\Leftrightarrow$ $r\geq 1, s\geq 1$.

部分关于正定的结论可平移到半正定，负定，半负定二次型上.