线性方程组解集的结构

定理： $A\in F^{m\times n}$ $\vec{b}\in F^m$ 则

1) $Ax=\vec{b}$ 有解 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A,b)$

2) $Ax=\vec{b}$ 有唯一解 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A,b)=n$

证：$A=(\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_n)$ 则

$$Ax=\vec{b}\Leftrightarrow x_1\vec{\beta}_1+\cdots+x_n\vec{\beta}_n=\vec{b}$$

1) $Ax=\vec{b}$ 有解 $\Leftrightarrow \vec{b}\in\langle\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_n\rangle \Leftrightarrow \langle\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_n\rangle=\langle\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_n,\vec{b}\rangle$

$\Leftrightarrow \mathrm{rank}(\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_n)=\mathrm{rank}(\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_n,\vec{b}) \Leftrightarrow \mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A,b)$.

2) $Ax=\vec{b}$ 有唯一解 $\Leftrightarrow \begin{cases}\vec{b}\in\langle\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_n\rangle \Leftrightarrow \mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A,b)\\ \vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_n \text{ 线性无关} \Leftrightarrow \mathrm{rank}(A)=\end{cases}$

例： $\forall A\in F^{m\times n}\Rightarrow Ax=0$ 一定有解

有非零解 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(A)<n \overset{A\text{为方阵}}{\Longleftrightarrow} \det(A)=0$ （解空间大小？）

$$V:=\{x\in F^n \mid Ax=0\} \longleftarrow Ax=0 \text{ 的解空间}$$

定理： V 为 F^n 的 $n-\mathrm{rank}(A)$ 维子空间.

证．1° $\forall\ \vec{x},\vec{y}\in V\Rightarrow \lambda\vec{x}+\mu\vec{y}\in V$

2° 设 $\begin{pmatrix}I_r & \\ & 0\end{pmatrix}$ 为 A 的相抵标准型 $A=P\begin{pmatrix}I_r & \\ & 0\end{pmatrix}Q$.

$$W := \{ y \in F^n \mid \begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix} y = 0 \} = \langle \vec{e}_{r+1}, \cdots, \vec{e}_n \rangle$$

$$x \in V \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow P \begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix} Q x = 0 \Leftrightarrow Qx \in W$$

$\Rightarrow Qx = t_1 \vec{e}_{r+1} + t_2 \vec{e}_{r+2} + \cdots + t_{n-r} \vec{e}_n$ for some $t_1, \cdots, t_{n-r}$

$\Rightarrow x = t_1 \vec{\eta}_{r+1} + t_2 \vec{\eta}_{r+1} + \cdots + t_{n-r} \vec{\eta}_n$ （其中 $\vec{\eta}_i := Q^{-1} \vec{e}_i$）

$\Rightarrow V = \langle \vec{\eta}_{r+1}, \vec{\eta}_{r+2}, \cdots, \vec{\eta}_n \rangle$

下证 $\vec{\eta}_{r+1}, \cdots, \vec{\eta}_n$ 线性无关. 若 $\sum_{i=r+1}^{n} a_i \vec{\eta}_i = 0$，则

$$0 = Q\left(\sum_{i=r+1}^{n} a_i \vec{\eta}_i\right) = \sum_{i=r+1}^{n} a_i Q \vec{\eta}_i = \sum_{i=r+1}^{n} a_i \vec{e}_i$$

$\Rightarrow a_{r+1} = a_{r+2} = \cdots = a_n = 0 \Rightarrow \vec{\eta}_{r+1}, \cdots, \vec{\eta}_n$ 线性无关. □

解空间的一组基称为一个基础解系

例： $A \in F^{n \times n}$ $\det(A) = 0$ & $A_{ij} \neq 0$，则

$\vec{\alpha} = (A_{i1}, \cdots, A_{in})^T$ 为 $Ax = 0$ 的基础解系.

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{rank}(A) = n-1 \Rightarrow \dim V = 1 \\ \det(A) = 0 \Rightarrow A\vec{\alpha} = 0 \\ A_{ij} \neq 0 \Rightarrow \vec{\alpha} \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow V = \langle \vec{\alpha} \rangle$$

□

$$W := \{ x \in F^n \mid Ax = b \} \qquad (V := \{ x \in F^n \mid Ax = 0 \})$$

W与V有什么关系?

- $\alpha, \beta \in W \Rightarrow \alpha - \beta \in V$
- $\alpha \in W, \gamma \in V \Rightarrow \alpha + \gamma \in W$

定理: $W = \gamma_0 + V := \{ \gamma_0 + \alpha \mid \alpha + V \}$

其中 γ_0 为 $Ax=b$ 的一个特解.

"$\supseteq$" $\forall \alpha \in V \Rightarrow \gamma_0 + \alpha \in W$

"$\subseteq$" $\forall \omega \in W \Rightarrow \omega - \gamma_0 \in V \Rightarrow \omega \in \gamma_0 + V$