§7.3 欧氏空间中的线性变换

集合 $\longrightarrow$ 自映射

线性空间 $\longrightarrow$ 线性变换(保持加法和数乘的映射)

欧氏空间 $\longrightarrow$ 正交变换(保持 $+, \cdot$, 内积)

例：空间(平面)的旋转与镜面反射.

§ 正交变换与正交矩阵

定义：V 为 n-维欧氏空间，$\mathscr{A}: V \to V$ 一个线性变换. 若 $\mathscr{A}$ 保持内积，即 $\forall\, a, b \in V$,

$$(\mathscr{A} a, \mathscr{A} b) = (a, b)$$

则称 $\mathscr{A}$ 为**正交变换**.

正交变换的等价刻画：

定理：$\mathscr{A}$ 为欧氏空间 V 上的一线性变换. 则以下条件等价

1) $\mathscr{A}$ 正交
2) $\mathscr{A}$ 保持向量长度
3) $\mathscr{A}$ 将标准正交基变为标准正交基.

证：1) ⇒ 2)： $|\mathscr{A}a| = \sqrt{(\mathscr{A}a, \mathscr{A}a)} = \sqrt{(a,a)} = |a|$

2) ⇒ 1)：
$$\left.\begin{aligned}&(\mathscr{A}(a+b), \mathscr{A}(a+b)) = (a+b, a+b)\\&(\mathscr{A}a, \mathscr{A}a) = (a,a)\\&(\mathscr{A}b, \mathscr{A}b) = (b,b)\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow (\mathscr{A}a, \mathscr{A}b) = (a,b)$$

1) ⇒ 3)：设 $e_1, \cdots, e_n$ 为标准正交基，则

$$(\mathscr{A}e_i, \mathscr{A}e_j) = (e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

$\Rightarrow \mathscr{A}e_1, \cdots \mathscr{A}e_n$ 为标准正交基.

3) ⇒ 1)：设 $\mathscr{A}$ 将标准正交基 $e_1, \cdots, e_n$ 变为标准正交基 $\mathscr{A}e_1, \cdots \mathscr{A}e_n$，则任

$$a = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \quad b = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$$

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}a, \mathscr{A}b) &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathscr{A}e_i, \sum_{j=1}^{n} b_j \mathscr{A}e_j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j (\mathscr{A}e_i, \mathscr{A}e_j)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j \delta_{ij}\\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i\\
&= (a,b)\end{aligned}$$

正交变换在标准正交基下的矩阵

标准正交基

$\mathscr{A}(e_1,\cdots,e_n)=(e_1,\cdots,e_n)A$ $\left(A=(a_{ij})_{n\times n},\ \mathscr{A}e_j=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}e_k\right)$

正交变换

有啥特殊的性质？

$\mathscr{A}$ 正交 $\Rightarrow$ $(\mathscr{A}e_i,\mathscr{A}e_j)=(e_i,e_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$

$$(\mathscr{A}e_i,\mathscr{A}e_j)=\left(\sum_{l=1}^{n}a_{li}e_l,\ \sum_{k=1}^{n}a_{kj}e_k\right)$$

$$=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{li}a_{kj}(e_l,e_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj}=(A^TA)_{ij}$$

综上： $A^TA=I_n$

定义：如实方阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $A^TA=I$ （或 $A^{-1}=A^T$ ）则称 A 为正交矩阵。

注：$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为正交矩阵 $\Leftrightarrow$ A 的行向量（或列向量）构成 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基.

定理：$\mathscr{A}$ 为欧氏空间 V 上的线性变换，则

$\mathscr{A}$ 为正交变换 $\Leftrightarrow$ $\mathscr{A}$ 在标准正交基 $e_1\cdots e_n$ 下的矩阵 A 为正交矩阵

性质： V为n维欧氏空间. 则

1) 单位变换是正交变换
2) 两正交变换的复合仍然是正交变换
3) 正交变换一定可逆，其逆也为正交变换

证：1) √

2) $(\mathcal{A}\circ\mathcal{B}(a), \mathcal{A}\circ\mathcal{B}(b)) = (\mathcal{B}(a), \mathcal{B}(b)) = (a,b) \Rightarrow$ √

3) $(\mathcal{A}^{-1}(a), \mathcal{A}^{-1}(b)) = (\mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}(a)), \mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}(b))) = (a,b)$

$\mathcal{A}$ 正交变换 $\xleftrightarrow[1:1]{\text{标准正交基}}$ A 正交矩阵

A 正交 $\Rightarrow A^TA = I \Rightarrow \det(A) = \pm 1$

例

1° $\det A = 1$，称 $\mathcal{A}$ 为第一类变换 ← 旋转

2° $\det A = -1$，称 $\mathcal{A}$ 为第二类变换 ← 反射

性质： $\mathcal{A}$为欧氏空间V上的正交变换，则

1) $\mathcal{A}$的特征值模长都为1，特别地实特征值只可能为± 1.
2) V的维数为奇数且$\mathcal{A}$为第一类正交变换，则1为$\mathcal{A}$的特征值.

证：1) $\mathcal{A} \to A \Rightarrow A^TA = I \overset{\text{例6.3.3(4)}}{\Rightarrow} |\lambda| = 1$ $\left(A\xi = \lambda\xi \Rightarrow \bar{\xi}^T\xi = \bar{\xi}^T\bar{A}^TA\xi = \bar{\lambda}\lambda \cdot \bar{\xi}^T\xi \Rightarrow |\lambda| = 1 \right)$

2) $\varphi_A(\lambda)$ 为奇数多项式，复根成对出现，不妨设

$$\varphi_A(\lambda) = \left[\prod_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)(\lambda-\bar{\lambda}_i)\right] \cdot \left[\prod_{j=1}^{t}(\lambda-\eta_j)\right]$$

则 t 为奇数. $\mathscr{A}$正交 $\Rightarrow \eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t \in \pm 1$.

$\mathscr{A}$为第一类 $\Rightarrow \prod_{i=1}^{s}(\lambda_i\cdot\bar{\lambda}_i)\cdot\prod_{j=1}^{t}\eta_j = 1$

$\Rightarrow \prod_{j=1}^{t}\eta_j = 1 \Rightarrow \eta_1,\cdots,\eta_t$ 必有一个为1.

推论: 三维空间中的第一类正交变换保持一个向量, 从而一定为旋转变换

§ 对称变换与对称矩阵

定义: $\mathscr{A}$ 为欧氏空间 V 上的线性变换. 如果 $\forall, a,b\in V$

$$(a, \mathscr{A}b) = (\mathscr{A}a, b)$$

则称 $\mathscr{A}$ 为 V 上的对称变换.

定理. 设 A 为某欧氏空间上的一线性变换 $\mathscr{A}$ 在某标准正交基下的矩阵. 则

$\mathscr{A}$ 为对称变换 $\Longleftrightarrow$ A 为实对称矩阵

证明: $\mathscr{A}(e_1,\cdots,e_n) = (e_1\cdots e_n)A$ i.e. $\mathscr{A}(e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}e_k$

$\mathscr{A}$对称 $\Leftrightarrow (\mathscr{A}e_i, e_j) = (e_i, \mathscr{A}e_j) \quad \forall i,j$

$\Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}e_k, e_j\right) = \left(e_i, \sum_{k=1}^{n} a_{kj}e_k\right) \quad \forall i,j$

$\Leftrightarrow a_{ji} = a_{ij} \quad \forall i,j$

$\Leftrightarrow A^T = A$ $\square$

定理：对称变换的不同特征值对应的特征向量正交.

证：设 $\mathcal{A}\xi_1=\lambda_1\xi_1\ (\xi_1\neq 0)$，$\mathcal{A}\xi_2=\lambda_2\xi_2\ (\xi_2\neq 0)$ $(\lambda_1\neq\lambda_2)$

$\mathcal{A}$ 对称 $\Rightarrow (\mathcal{A}\xi_1,\xi_2)=(\xi_1,\mathcal{A}\xi_2)$

$\Rightarrow (\lambda_1\xi_1,\xi_2)=(\xi_1,\lambda_2\xi_2)$

$\Rightarrow (\lambda_1-\lambda_2)(\xi_1,\xi_2)=0$

$\Rightarrow (\xi_1,\xi_2)=0 \Rightarrow \xi_1\perp\xi_2.$ □

推论：实对称阵 A 的属于不同特征值的特征向量必正交.

§ 实对称矩阵的对角化.

这一节证明实对称阵总是可对角化的！

性质：实对称矩阵的特征值都为实数.

证：设 $A\xi=\lambda\xi\ (\xi\neq 0)$

A为实矩阵 $\Rightarrow A\bar{\xi}=\bar{A}\bar{\xi}=\overline{(A\xi)}=\overline{\lambda\xi}=\bar{\lambda}\cdot\bar{\xi}$

A为对称矩阵
$(\bar{\xi}^TA)\xi=\bar{\xi}^T(A\xi)$ $\Big\}\Rightarrow (A\bar{\xi})^T\xi=\bar{\xi}^T(A\xi)$

$\Rightarrow \bar{\lambda}\,\bar{\xi}^T\xi=\lambda\,\bar{\xi}^T\xi\quad(\bar{\xi}^T\xi=|\xi|^2\neq 0)$

$\Rightarrow \bar{\lambda}=\lambda$

$\Rightarrow \lambda\in\mathbb{R}.$ □

定理：任取 n 阶实对称矩阵 A，存在 n 阶正交矩阵 T，使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵

证明：对 n 归纳. $n=1$ ✓ 假设 $n-1$ 时成立.

设 $A\xi_1=\lambda_1\xi_1$ $(\lambda_1\in\mathbb{R}\ \&\ \xi_1\in\mathbb{R}^n$ 且 $|\xi_1|=1)$

将 ξ_1 扩充为一组基，并进行 Schmidt 正交化得 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$. 记

$$T_n=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

则 T_n 为正交矩阵.

$$T_n^{-1}AT_n=T_n^{T}\,\underline{AT_n}=\begin{pmatrix}\xi_1^T\\ \xi_2^T\\ \vdots\\ \xi_n^T\end{pmatrix}(\lambda_1\xi_1,A\xi_2,\cdots A\xi_n)$$

$\begin{cases}Ax_1=\lambda_1x_1\\ x_1\text{ 与 }x_i\ (2\le i\le n)\text{ 正交}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\xi_i^T(\lambda_1\xi_1)=\begin{cases}\lambda_1 & i=1\\ 0 & i>1\end{cases}\\ \xi_1^T\cdot(A\xi_i)=(A\xi_1)^T\xi_i=\lambda_1\xi_1^T\xi_i=0\ (\forall i\ge2)\end{cases}$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \underline{A_{n-1}}\end{pmatrix}$$

A_{n-1}：$n-1$ 阶实对称阵.

归纳假设 $\Rightarrow\exists\ n-1$ 阶正交阵 T_{n-1} s.t.

$$T_{n-1}^{-1}A_{n-1}T_{n-1}=\begin{pmatrix}\lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

记 $T=T_n\begin{pmatrix}1 & \\ & T_{n-1}\end{pmatrix}$，则 $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$.

T：仍然正交.

例： $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 求正交阵 T s.t. $T^{-1}AT$ 对角.

解： $P_A(\lambda)=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$

$$(5I-A)X=0 \Rightarrow X=C_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow e_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$(-I-A)X=0 \Rightarrow X=C_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ e_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1}AT=\begin{pmatrix}5&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$$