§6.5 若尔当标准形简介

相似等价类中最简代表元？

定义： $\lambda\in\mathbb{C}$，$m\in\mathbb{N}$，

1) **若尔当块** $J_m(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}_{m\times m}$

2) **若尔当矩阵** $J = \mathrm{diag}\left(J_{m_1}(\lambda_1), J_{m_2}(\lambda_2), \cdots, J_{m_s}(\lambda_s)\right)$

例：$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ \hline & & 1 \end{array}\right)$ $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{array}\right)$ 等.

定理： 1) $\forall A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，**存在** 若尔当矩阵 J s.t. A 与 J 相似.

2) 不计若当块的排序下，J 是**唯一**的.

称 J 为 A 的**若尔当标准形**.

例：λ 为 $A\in\mathbb{C}^{5\times5}$ 的 5 重特征值，分析 A 的若尔当标准形.

$5 = 5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1$

$J_5(\lambda)$，$\begin{pmatrix} J_4(\lambda) & \\ & \lambda \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} J_3(\lambda) & \\ & J_2(\lambda) \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} J_3(\lambda) & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} J_2(\lambda) & & \\ & J_2(\lambda) & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} J_2(\lambda) & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ & \lambda & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \lambda & \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$

如何确定某方阵的若尔当标准形？

$A=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbb{C}^{n\times n}$

第一步：计算并分解 $P_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$

第二步：$\forall i=1,\cdots s$，计算 $r_k^i=\mathrm{rank}(A-\lambda_i I)^k$ $(k\geq 0)$

直到某个 k 使得 $r_{k-1}^i=r_k^i$，即可.

第三步：分析若尔当标准形

$d_k^i:=r_{k-1}^i-r_k^i$ & $\delta_k^i=d_k^i-d_{k+1}^i$

则 A 的若当标准形中恰含 δ_k^i 个 λ_i 的 k 阶若尔当块.

例：求 $A=\begin{pmatrix}-2&-4&1&0&2\\-4&6&1&-1&0\\0&0&3&0&0\\0&0&2&3&0\\0&0&0&0&3\end{pmatrix}$ 的若尔当标准形

解：$P_A(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)^3$

$$\left.\begin{aligned}r_0^1&=\mathrm{rank}(A-2I)^0=5\\r_1^1&=\mathrm{rank}(A-2I)=4\\r_2^1&=\mathrm{rank}(A-2I)^2=3\\r_3^1&=\mathrm{rank}(A-2I)^3=3\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}d_1^1&=1\\d_2^1&=1\\d_3^1&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}\delta_1^1&=0\\\delta_2^1&=1\end{aligned}\right.$$

$\Rightarrow$ 有一个 $\begin{pmatrix}2&1\\&2\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} r_0^2 &= \operatorname{rank}(A-3I)^0 = 5 \\ r_1^2 &= \operatorname{rank}(A-3I)^1 = 3 \\ r_2^2 &= \operatorname{rank}(A-3I)^2 = 2 \\ & \qquad\qquad\qquad\ \ \ \ \| \\ r_3^2 &= \operatorname{rank}(A-3I)^3 = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} d_1^2 &= 2 \\ d_2^2 &= 1 \\ d_3^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \delta_1^2 &= 1 \\ \delta_2^2 &= 1 \end{aligned}\right.$$

$\Rightarrow$ 有一个 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ & 3 \end{pmatrix}$ 和 (3).

综上 A的若当标准形为

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & & & \\ & & 3 & 1 & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$

例：计算 $A = J_n(0)^2$ 的若尔当标准形.

$P_A(\lambda) = \lambda^n \qquad r_k = \operatorname{rank}\left((A - 0\cdot I)^k\right)$

$$= \operatorname{rank}\left(J_n(0)^{2k}\right) = \begin{cases} n-2k & 2k \le n \\ 0 & 2k > n \end{cases}$$

$r_0 = n,\ r_1 = n-2,\ \cdots\cdots,\ r_{[\frac{n}{2}]} = n - 2[\frac{n}{2}],\ r_{[\frac{n}{2}]+1} = 0$

$d_1 = d_2 = \cdots = d_{[\frac{n}{2}]} = 2 \qquad d_{[\frac{n}{2}]+1} = \begin{cases} 1 & 2\nmid n \\ 0 & 2\mid n \end{cases}$

$\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_{[\frac{n}{2}]-1} = 0 \qquad \delta_{[\frac{n}{2}]} = \begin{cases} 1 & 2\nmid n \\ 2 & 2\mid n \end{cases}$

$\delta_{[\frac{n}{2}]+1} = \begin{cases} 1 & 2\nmid n \\ 0 & 2\mid n. \end{cases}$

$2\mid n \Rightarrow J = \operatorname{diag}\left(J_{\frac{n}{2}}(0), J_{\frac{n}{2}}(0)\right) \qquad 2\nmid n = J = \operatorname{diag}\left(J_{[\frac{n}{2}]}(0), J_{[\frac{n}{2}]+1}(0)\right)$

$$J_1 = \begin{pmatrix} J_4(\lambda) & \\ & \lambda \end{pmatrix} \not\sim J_2 = \begin{pmatrix} J_3(\lambda) & \\ & J_2(\lambda) \end{pmatrix}$$

若 $J_1 \sim J_2 \Rightarrow J_1 - \lambda I \sim J_2 - \lambda I$

$$\Rightarrow \mathrm{rank}(J_1 - \lambda I)^2 = \mathrm{rank}(J_2 - \lambda I)^2$$

$$\Rightarrow 2 = 1 \quad \lightning$$

↳ 考虑 $(J-\lambda I)^k$ 的秩，可区分不同的若当矩阵.

例：计算 $J_m(0)^k$ 的秩.

$$J_m(0)\cdot(a_{ij})_{m\times m} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad J_m(0)^k = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & & k+1 & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} & k+1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \mathrm{rank}(J_m(0)^k) = \begin{cases} m-k & k \le m \\ 0 & k > m \end{cases}$$

例 $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

1) 求 A的若当标准形 J

2) 求可逆阵使得 $J=T^{-1}AT$ 即 $AT=TJ$.

解：1) $P_A(\lambda)=(\lambda-2)^3$

$r_0=3$, $r_1=1$, $r_2=0$, $r_3=0$

$\Rightarrow d_1=2, d_2=1, d_3=0$

$\Rightarrow \delta_1=1, \delta_2=1$

$\Rightarrow J=\begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

2) 待定系数法(繁). 其它方法：

$A(T_1,T_2,T_3)=(T_1,T_2,T_3)J$

$$\Rightarrow (*)\begin{cases} \left.\begin{aligned}(A-2I)T_1=0 \\ (A-2I)T_2=T_1\end{aligned}\right\} \Rightarrow (A-2I)^2T_2=0 \\ (A-2I)T_3=0 \end{cases}$$

取 $T_2\in\{X \mid (A-2I)^2X=0 \ \& \ (A-2I)X\neq 0\}$

记 $T_1=(A-2I)X\in V_A(2)$. 将 T_1 扩充为 $V_A(2)$ 的一组基 T_1,T_3. 则 T_1,T_2,T_3 满足(*)，且 T_1,T_2,T_3 线性无关.

例如：取 $T_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow T_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ 取 $T_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\Rightarrow T=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&0&0\\3&0&1\end{pmatrix}$

例：解常微分方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x-3y+z\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=2x-2y+2z\\[2mm]\dfrac{dz}{dt}=3x-6y+5z\end{cases}\quad \text{即}\quad \frac{d}{dt}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{\vec{x}}=\begin{pmatrix}3&-2&1\\2&-2&2\\3&-6&5\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{\vec{x}}$$

解：作线性代换 $\vec{x}=T\vec{x}^*$ 其中 $\vec{x}^*=\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix}$，则

$$\frac{d\vec{x}^*}{dt}=T^{-1}AT\vec{x}^*$$

即：

$$\begin{cases}\dfrac{dx^*}{dt}=2x^*+y^*\\[2mm]\dfrac{dy^*}{dt}=2y^*\\[2mm]\dfrac{dz^*}{dt}=2z^*\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z^*=C_1e^{2t}\\y^*=C_2e^{2t}\\x^*=(C_2t+C_3)e^{2t}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x(t)=(C_2t+C_2+C_3-C_1)e^{2t}\\y(t)=(2C_2t+2C_3)e^{2t}\\z(t)=(3C_2t+3C_3+C_1)e^{2t}\end{cases}$$

例：求 $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ 的若尔当标准形

解：$P_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda-2)^3$

$\Rightarrow J_1=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ $J_2=\begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ 或 $J_3=\begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$

$\text{rank}(J-2I)=\text{rank}(A-2I)=1 \Rightarrow J=J_2$!

$\uparrow$ A的若当标准形.

例：求矩阵 $A=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的若当标准形

解：$P_A(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)^3$

$J_{11}=\begin{pmatrix} 2 & \\ & 2 \end{pmatrix}$ $J_{12}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{pmatrix}$

$J_{21}=\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ $J_{22}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ $J_{23}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & \\ & 3 & 1 \\ & & 3 \end{pmatrix}$

设 $J=\text{diag}(J_1, J_2)$

$\uparrow$ A的若当标准形

$\text{rank}(J-2I)=\text{rank}(A-2I)=4 \Rightarrow J_1=J_{12}$

$\text{rank}(J-3I)=\text{rank}(A-3I)=3 \Rightarrow J_2=J_{22}$

$\Rightarrow J=\text{diag}(J_{12}, J_{22})=\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & & & \\ & & 3 & 1 & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$

例: $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$. 求 T s.t.

$$J = T^{-1}AT$$

解: $J = T^{-1}AT \Rightarrow TJ = AT$ $\quad T=(T_1, T_2, T_3)$

$\Leftrightarrow$ $A(T_1, T_2, T_3) = (T_1, T_2, T_3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

T_1, T_2, T_3 线性无关

$$= (2T_1, T_1+2T_2, 2T_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AT_1 = 2T_1 \\ AT_2 = T_1+2T_2 \\ AT_3 = 2T_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A-2I)T_1 = 0 \\ (A-2I)T_2 = T_1 \\ (A-2I)T_3 = 0 \end{cases}$$

1° $(A-2I)\neq 0 \Rightarrow \exists T_2$ 满足 $(A-2I)T_2\neq 0$. 记

$$T_1 := (A-2I)T_2.$$

2° $(A-2I)^2=0 \Rightarrow (A-2I)T_1 = 0$.

3° 解方程 $(A-2I)X=0 \Rightarrow$ 求解空间(2维)中一个与 T_1 不共线的向量 T_3.

则 $T=(T_1, T_2, T_3)$ 满足要求.

取法保证 T 可逆!