§7.1 定义与基本性质（欧几里得空间）

$\mathbb{R}^3$上有模长，夹角等几何概念，如何推广到抽象的线性空间上

回顾 $\mathbb{R}^3$上的模长与夹角公式：

$$\begin{cases} |a| = \sqrt{(a,a)} \\ \theta = \arccos \dfrac{(a,b)}{\sqrt{(a,a)(b,b)}} = \arccos \dfrac{(a,b)}{|a|\,|b|} \end{cases}$$

模长和夹角可由内积完全确定. 反之，内积可由模长与夹角确定

为了在线性空间上定义度量，我们需要引入内积.

内积自然地推广到 $\mathbb{R}^n$： $\alpha = (x_1, \cdots, x_n)$ ， $\beta = (y_1, \cdots, y_n)$

$$(\alpha, \beta) := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

$$\Rightarrow \quad |\alpha| := \sqrt{(\alpha,\alpha)} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

$$\cos\theta := \frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha|\,|\beta|} = \frac{x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}}$$

为了让定义 θ，我们需要 $\underbrace{|x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}}_{\text{Cauchy-Schwarz 不等式}}$

$\mathbb{R}$ 上内积的基本性质：1) 对称性 2) 线性性 3) 正定性

推广 $\Rightarrow$

定义：V 为 $\mathbb{R}$-线性空间. 若 V 中任意两个向量 a,和 b 都按某一法则对应于一个实数，记作 (a,b)，且满足：

1) 对称性：$(a,b)=(b,a)$
2) 线性性：$(\lambda a,b)=\lambda(a,b)$ ， $(a+b,c)=(a,c)+(b,c)$
3) 正定性：$(a,a)\geq 0$. 且等号成立 $\Leftrightarrow a=0$.

则称 (a,b) 为 a 和 b 的内积. 带内积的 $\mathbb{R}$线性空间称为欧几里得（Euclid）空间. 简称欧氏空间.

$$\text{欧氏空间} = \underbrace{\mathbb{R}\text{-线性空间}}_{\text{集合 + 加法 + (实)数乘}} + \text{内积}$$

注：$(\,,\,)$ 对第二个分量也是线性的.

性质：1) $\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i a_i,\ \sum_{j=1}^{m}\mu_j b_j\right)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\lambda_i\mu_j(a_i,b_j)$

2) $(a,0)=0$.

3) 一组基之间的内积完全确定内积结构.

为了定义夹角，我们需要引入：

定理（Cauchy-Schwarz 不等式）：V 为欧氏空间. $\forall\, a,b\in V$

$$|(a,b)|\leq\sqrt{(a,a)\cdot(b,b)}$$

证：$\forall\lambda\in\mathbb{R}$，$(\lambda a+b,\lambda a+b)\geq 0$

$\Rightarrow (a,a)\lambda^2+2(a,b)\lambda+(b,b)\geq 0 \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow 4(a,b)^2-(a,a)(b,b)\leq 0$ □

$\hookrightarrow$ 可以定义夹角了！（不存在确定原理）

定义：V 为欧氏空间.

1) $\forall a \in V$ 称 $|a| := \sqrt{(a,a)}$ 为 a 的长度或模.

2) $\forall a,b \in V$ 称 $|a-b|$ 为 a 和 b 之间的距离 记为 $d(a,b)$.

3) $\forall a,b \in V \setminus \{0\}$, 定义 a 和 b 之间的夹角为 $\theta = \arccos \frac{(a,b)}{|a|\cdot|b|}$

特别地，当 $(a,b)=0$ 时，称 a 与 b 正交或垂直 记作 $a \perp b$

单位向量 i.e. $|a|=1$

单位化 i.e. $\underset{\neq 0}{a} \mapsto \frac{a}{|a|}$.

距离的性质：

1) 对称性 $d(a,b) = d(b,a)$

2) 正定性 $d(a,b) \geq 0$, "=" $\Leftrightarrow a=b$.

3) 三角不等式 $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$.

4) 勾股定理 $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 = |\alpha+\beta|^2$

5) $|\alpha| = |\beta| \Rightarrow \alpha+\beta \perp \alpha-\beta$

$\alpha := c-a \quad \beta := b-c \quad \Rightarrow \alpha+\beta = b-c$

$|\alpha+\beta|^2 = (\alpha+\beta, \alpha+\beta) = |\alpha|^2 + 2(\alpha,\beta) + |\beta^2| \leq (|\alpha| + |\beta|)^2$

例：$V = \mathbb{R}^n$, $\forall \vec{a} = (a_1, \cdots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, \cdots, b_n)$

$(\vec{a}, \vec{b}) := a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$.

则 $(\ ,\ )$ 为 V 上的一个内积.

模长：

夹角：

Cauchy-Schwarz 式：

例: V 为 n 维 $\mathbb{R}$-线性空间.（例如 $V=\mathbb{R}_{n+1}[x]$）

$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的一组基.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow[1:1]{\alpha_1\cdots\alpha_n} & \mathbb{R}^n \\ \alpha & \longmapsto & \vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\ \beta & \longmapsto & \vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \end{array}$$

$(\alpha,\beta):=a_1b_1+\cdots+a_nb_n$

$\forall \alpha,\beta\in V$（不妨设 $\alpha=a_1\alpha_1+\cdots+a_n\alpha_n$, $\beta=b_1\alpha_1+\cdots+b_n\alpha_n$）

$$(\alpha,\beta):=a_1b_1+\cdots+a_nb_n.$$

则 $(\,,\,)$ 为 V 上的内积且 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 两两垂直，即

$$(\alpha_i,\alpha_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

例: $(\vec{a},\vec{b})=a_1b_2+a_2b_3+\cdots+a_{n-1}b_n+a_nb_1$ 不为内积!

在无穷维空间上也可类似定义内积(Hilbert 空间.)

例: $V=C[a,b]$, $(f,g):=\int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

模长:

夹角:

Cauchy-Schwarz 式:

在 $C[-\pi,\pi]$ 上 $1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots\cdots$ 两两正交!

$\forall f\in C[-\pi,\pi]$ $\exists\, a_n, b_n$ s.t.

$$f=a_0-\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$