三维向量： $\vec{a},\vec{b}$ 共线 $\Leftrightarrow$ $\vec{a},\vec{b}$ 线性相关，

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面 $\Leftrightarrow$ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 线性相关.

定理： $\vec{a}_1,\cdots \vec{a}_m\in F^n$. 则以下三条等价：

(1) $\exists\lambda_1\cdots\lambda_m$ 不全为零 s.t. $\lambda_1\vec{a}_1+\cdots+\lambda_m\vec{a}_m=0$.

(2) $\exists i\in\{1,2,\cdots,m\}$，及 λ_j $(\forall j\neq i)$. s.t.

$$\vec{a}_i=\lambda_1\vec{a}_1+\cdots+\lambda_{i-1}\vec{a}_{i-1}+\lambda_{i+1}\vec{a}_{i+1}+\cdots+\lambda_m\vec{a}_m$$

(3) $\exists i\in\{1,\cdots,m\}$ s.t.

$$\langle\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m\rangle=\langle\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_{i-1},\vec{a}_{i+1},\cdots,\vec{a}_m\rangle$$

证：…

定义： • 若 $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m\in F^n$ $(m\geq 2)$ 满足 (1),(2),(3)，则称 $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$ **线性相关**，反之，则称它们**线性无关**.

• $\vec{a}$ **线性相关** $\Leftrightarrow$ $\vec{a}=0$.

例： 包含零向量的任何向量组一个线性相关.

定义： 给定线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ \cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\qquad(*)$$

记 $\vec{a}_1=(a_{11},\cdots,a_{1n},b_1)$，$\cdots$，$\vec{a}_m=(a_{m1},\cdots,a_{mn},b_m)\in F^{n+1}$

若 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m$ 线性相关(或无关)，则称 $(*)$ **线性相关(或无关)**

定理： $S_1 \subseteq S \subseteq F^n$，则 （$S$：有限）

1) S_1 线性相关 $\Rightarrow$ S 线性相关，

2) S 线性无关 $\Rightarrow$ S_1 线性无关.

证：---

定理： $\vec{a}_i=(a_{i1},\cdots,a_{in})\in F^n$， $A=\begin{pmatrix}\vec{a}_1\\ \vdots\\ \vec{a}_m\end{pmatrix}\in F^{m\times n}$，则

$\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ $A^T\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_m\end{pmatrix}=0$ 存在非零解.

证： $A^T\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_m\end{pmatrix}=(\vec{a}_1^T,\cdots,\vec{a}_m^T)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_m\end{pmatrix}=0$

$\Leftrightarrow \lambda_1\vec{a}_1^T+\cdots+\lambda_m\vec{a}_m^T=0$

$\Leftrightarrow \lambda_1\vec{a}_1+\cdots+\lambda_m\vec{a}_m=0$ $\square$

推论： $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m\in F^n$，

(1) 若 $m>n$，则 $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$ 线性相关，

(2) 若 $m=n$ 则 $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\det(A)=0$.

例： 判定下列是否线性无关 .

(1). $e_1,\cdots,e_n$ 单位坐标向量 ✓

(2). $a_1=(1,0,0,\cdots,0)$ ， $a_2=(1,1,0,\cdots,0)$ ，$\cdots$， $a_n=(1,1,1,\cdots,1)$ ✓

(3). a_1+a_2， a_2+a_3， a_3+a_1 其中 a_1,a_2,a_3 线性无关. ✓

(4). $a_1=(3,4,-2,5)$， $a_2=(2,-5,0,-3)$， $a_3=(5,0,-1,2)$， $a_4=(3,3,-3,5)$ ✗

定理： $\vec{a_i}=(a_{i1},\cdots,a_{ir})\in F^r \quad i=1,\cdots,m.$

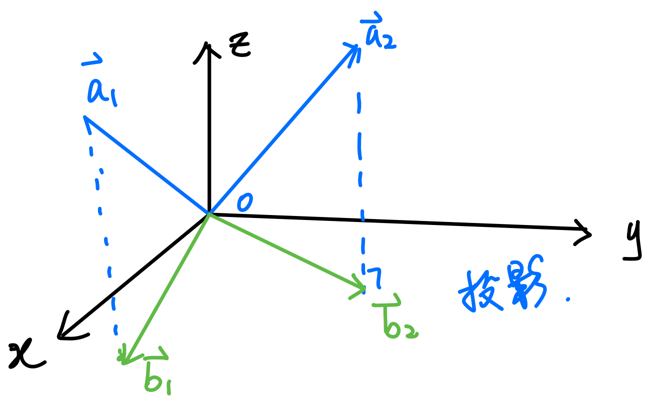
$\vec{b_i}=(a_{i1},\cdots,a_{ir},\cdots a_{in})\in F^n \quad i=1,\cdots,m.$ 则

(1). $\vec{a_1},\cdots,\vec{a_m}$ 线性无关 $\Rightarrow$ $\vec{b_1},\cdots,\vec{b_m}$ 线性无关.

(2) $\vec{b_1},\cdots,\vec{b_m}$ 线性相关 $\Rightarrow$ $\vec{a_1},\cdots,\vec{a_m}$ 线性相关

证： $B^T\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_m\end{pmatrix}=0 \Rightarrow A^T\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_m\end{pmatrix}=0$ □

例：



$\vec{b_1},\vec{b_2}$ 线性无关 $\Rightarrow$ $\vec{a_1},\vec{a_2}$ 线性无关