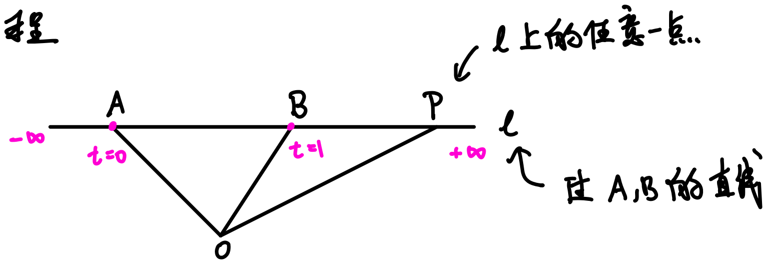
第二章 空间解析几何

本章目标：① 用方程表示直线、平面、曲线、曲面等

② 通过代数运算研究夹角、距离、面积、体积等。

§2.1 直线与平面

§2.1.1 直线的方程



$\Rightarrow \forall P\in l \quad \exists t\in\mathbb{R}$ s.t.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\cdot\overrightarrow{AB}$$

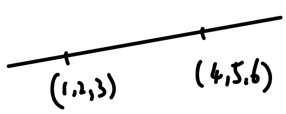
l的参数方程　　参数　　方向向量

设 $A(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{AB}=(u_1,u_2,u_3)$，$P(x,y,z)$ 则

$$\begin{cases} x = a_1 + u_1 t \\ y = a_2 + u_2 t \\ z = a_3 + u_3 t \end{cases} \longleftarrow \text{参数方程的坐标形式}$$

$$\xRightarrow{\text{消去}t} \frac{x-a_1}{u_1} = \frac{y-a_2}{u_2} = \frac{z-a_3}{u_3} \longleftarrow \text{点向式方程}$$

例：



的点向式方程为 $x-1=y-2=z-3$.

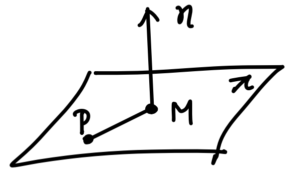
解：方向向量为 $(4,5,6)-(1,2,3)=(3,3,3)$. □

例：求过 $(1,1,1)$ 且与 l': $\frac{x+1}{4}=\frac{y+2}{5}=\frac{z+3}{6}$ 平行的直线 l 的点向式方程.

解：$l \parallel l' \Rightarrow l$ 的方向向量为 $(4,5,6) \Rightarrow \frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-1}{6}$ □

§2.1.2 平面的方程

∀点 M & 非零向量 n ⇒ ∃! 平面 π



⇒ $\forall P\in\pi,\ \overrightarrow{MP}\perp n$

⇒ $\overrightarrow{MP}\cdot n=0$ ← π 的点法式方程

↑ π 的法向量

设 $M(m_1,m_2,m_3)$, $n=(n_1,n_2,n_3)$, $P(x,y,z)$, 则

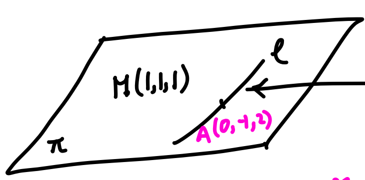
$$n_1(x-m_1)+n_2(y-m_2)+n_3(z-m_3)=0$$

↑ 点法式方程的坐标形式

$$\Rightarrow n_1x+n_2y+n_3z-(n_1m_1+n_2m_2+n_3m_3)=0$$

↑ π 的一般方程

例

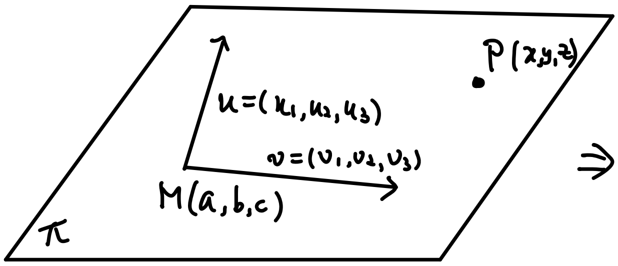


$x+1=2y+3=3z-5$

$n=[(1,1,1)-(0,-1,2)]\times(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$

$=(\frac{7}{6},-\frac{4}{3},-\frac{3}{2})=\frac{1}{6}(7,-8,-9)$

⇒ $7x-8y-9z+10=0$



$\Rightarrow \forall P \ \exists!\ s,t \in \mathbb{R}$ s.t. $\overrightarrow{MP} = su + tv$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a + su_1 + tv_1 \\ y = b + su_2 + tv_2 \\ z = c + su_3 + tv_3 \end{cases}$$

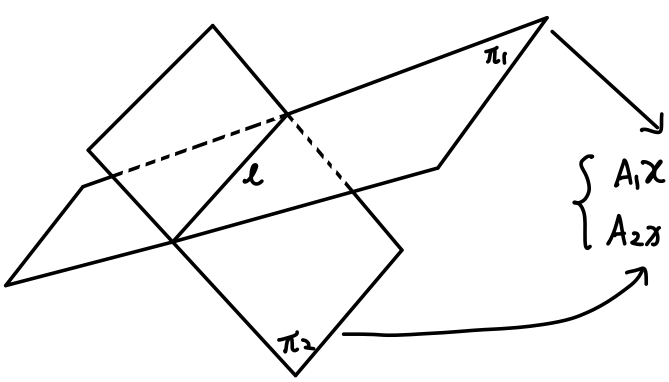
参数

π的参数方程

例 过三点 $A(1,2,3)$, $B(1,3,5)$, $C(2,4,6)$ 的平面π的参数方程.

解: $\overrightarrow{AB} = (0,1,2)$, $\overrightarrow{AC} = (1,2,3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + s + 2t \\ z = 3 + 2s + 3t \end{cases}$$



$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

l的一般方程

(不唯一!)

- 点向式方程 $\Rightarrow$ 一般方程

$$\frac{x-a_1}{u_1}=\frac{y-a_2}{u_2}=\frac{z-a_3}{u_3} \Rightarrow \begin{cases} u_2x-u_1y+(a_2u_1-a_1u_2)=0 \\ u_3x-u_1z+(a_3u_1-a_1u_3)=0 \end{cases}$$

- 一般方程 $\Rightarrow$ 点向式方程

  * 求一个解 $M(a_1,a_2,a_3)$

  * 方向向量 $u=(A_1,B_1,C_1)\times(A_2,B_2,C_2)$

例：$l\begin{cases} 3x-3y+z=6 \\ 6x-2y+3z=9 \end{cases}$ 的点向式

解：$\left.\begin{array}{l}(3,0,-3)\in l \\ (3,-3,1)\times(6,-2,3)=(-7,-3,12)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x-3}{7}=\frac{y}{3}=\frac{z+3}{-12}$

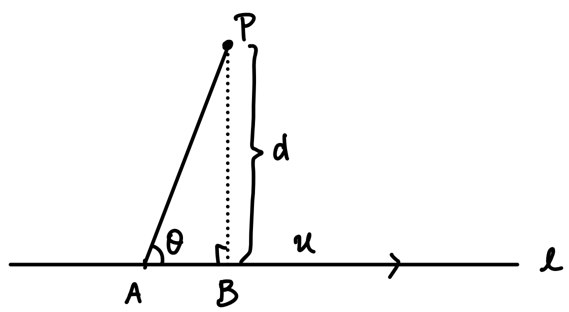
§ 点、线、面之间的位置关系

	点	线	面
点			
线	X		
面	X	X	

§ 点 ~ 点.

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}$$

§2.1.3. 点到直线的距离.

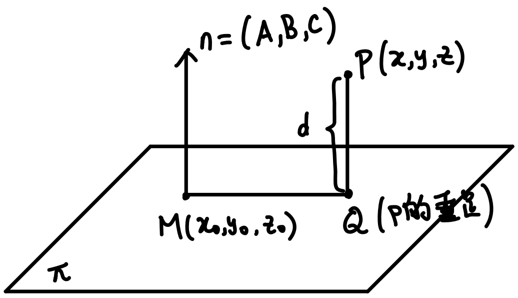


⇒ 公式: $d = |\overrightarrow{BP}| = |\overrightarrow{AP}| \sin\theta = \dfrac{|u \times \overrightarrow{AP}|}{|u|}$

例: $P(1,1,1)$, $l: \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y+2}{5} = \dfrac{z+3}{6}$

$$d = \frac{|(4,5,6) \times [(1,1,1) - (-1,-2,-3)]|}{|(4,5,6)|} = \frac{|(2,-4,2)|}{|(4,5,6)|} = \sqrt{\frac{24}{77}}$$

§2.1.4 点到平面的距离.



$$d = |\overrightarrow{QP}| = \frac{|\overrightarrow{MP}\cdot n|}{|n|} = \frac{|A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

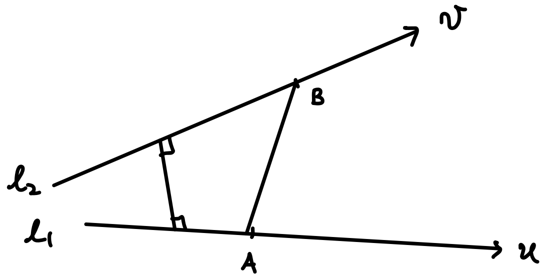
$$= \frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

例：点$(1,1,1)$，面 $2x+3y+6z=18$ 距离？

解：$d = \dfrac{|2+3+6-18|}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}} = 1$ □

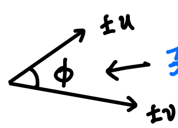
§2.1.5 两直线的位置关系

$\forall l_1, l_2$ 关系：共面（平行，相交，重合）或者异面.

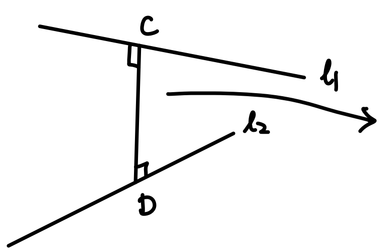


性质：l_1 与 l_2 共面 $\Leftrightarrow$ $u, v, \overrightarrow{AB}$ 共面（即 $(u\times v)\cdot\overrightarrow{AB}=0$）

夹角，公垂线 & 距离



夹角 $0\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{2}$



公垂线，

距离 $:= |CD|$

$\overrightarrow{CD} \parallel u\times v \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ 在 $u\times v$ 上的投影

$\Rightarrow$ 公式 $|CD| = \dfrac{|u\times v\cdot\overrightarrow{AB}|}{|u\times v|}$

求CD的方程（思路）：

$$\left.\begin{array}{l} n_{ACD}=(u\times v)\times u \Rightarrow ACD\text{ 一般方程} \\ n_{BCD}=(u\times v)\times v \Rightarrow BCD\text{ 一般方程} \end{array}\right\} \Rightarrow CD\text{ 方程}.$$

例　a 取何值时，直线 $x-a=y-2=z-3$ 和 $x=2y=3z$ 相交？

解　$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/3 \\ a & 2 & 3 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow a=-1$

例：$l_1: x-1=y-2=z-3$，$l_2: x=2y=3z$

求夹角 θ，距离 d，公垂线 l 的方程．

解：$u=(1,1,1)$，$v=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$

$$\Rightarrow u\times v=\left(-\frac{1}{6},\frac{2}{3},-\frac{1}{2}\right)$$

$$\theta=\arccos\frac{|u\cdot v|}{|u|\cdot|v|}=\arccos\frac{11}{7\sqrt{3}}$$

$$d=\frac{|(u\times v)\cdot(1,2,3)|}{|u\times v|}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{26}}{6}}=\frac{2}{\sqrt{26}}$$

$$(u\times v)\times u=\left(\frac{7}{6},-\frac{1}{3},-\frac{5}{6}\right),\quad (u\times v)\times v=\left(\frac{17}{36},-\frac{4}{9},-\frac{3}{4}\right)$$

$$\begin{cases} \ell_1 \, \ell \text{ 平面}: 7x - 2y - 5z + 12 = 0 \\ \ell_2 \, \ell \text{ 平面}: 17x - 16y - 27z = 0 \end{cases}$$

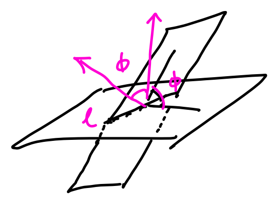
§2.1.8 两平面的位置关系

$\pi_1, \pi_2 \rightsquigarrow$ 法向量 n_1, n_2 $\quad \forall P_1 \in \pi_1, P_2 \in \pi_2$

$\Rightarrow$ 重合，平行，相交

- 重合 $\Updownarrow$ $n_1 \parallel n_2$，$P_1 \in \pi_2$
- 平行 $\Updownarrow$ $n_1 \parallel n_2$ $\rightsquigarrow$ 距离 $\rightsquigarrow$ 点面 $d(P_1, \pi_2)$
- 相交 $\Updownarrow$ $n_1 \nparallel n_2$ $\rightsquigarrow$ 夹角 $\rightsquigarrow$ $\arccos \dfrac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1| \cdot |n_2|}$

注 夹角 $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$!



例：一般方程 $\pi_1: A_1 x + B_1 y + C_1 z = D_1$

$\pi_2: A_2 x + B_2 y + C_2 z = D_2$

重合：$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$

平行：$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$

相交直线的一般方程：$l \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z = D_1 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z = D_2 \end{cases}$

§ 直线与平面的位置关系

$$l: \frac{x-a_1}{u_1} = \frac{y-a_2}{u_2} = \frac{z-a_3}{u_3} \qquad u = (u_1, u_2, u_3)$$

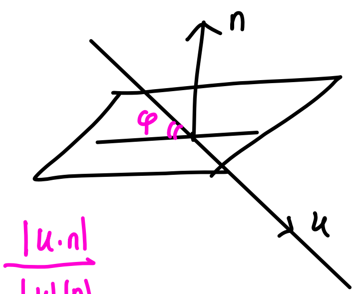
$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0 \qquad n = (A, B, C)$$

· 直线在平面上，平行，相交

$\Updownarrow \qquad \Updownarrow \qquad \Updownarrow$

$\begin{cases} (a_1, a_2, a_3) \in \pi \\ u \times n = 0 \end{cases}$ $\qquad u \times n = 0 \qquad u \times n \neq 0$

$\rightsquigarrow$ 夹角



$$\arcsin \frac{|u \cdot n|}{|u||n|}$$