§ 二次型的标准型

定义：若二次型经正交变换 $x=Py$ 化为

$$\tilde{Q}(y_1\cdots y_n)=\lambda_1 y_1^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$$

称 $\tilde{Q}$ 为 Q 的一个标准形.

A 对称 $\Rightarrow \exists$ 正交矩阵 P s.t. $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1\cdots\lambda_n)$.

定理：任给实二次型 $Q=x^TAx$，存在正交变换 $x=Py$ 将 Q 化为

$$\tilde{Q}(y_1\cdots y_n)=\lambda_1 y_1^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$$

这里的 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征值.

配方法求二次型的标准形.

例：$Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_1x_2+x_3^2=2(x_1+\frac{1}{4}x_2)^2-\frac{1}{8}x_2^2+x_3^2$

$$\Rightarrow \tilde{Q}(y_1,y_2,y_3)=2y_1^2-\frac{1}{8}y_2^2+y_3^2$$

全为交叉项

例 $Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_1x_3$

$$\overset{\text{变元替换}}{=}2(y_1+y_2)(y_1-y_2)-6(y_1-y_2)y_3+2(y_1+y_2)y_3$$

$$=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3$$

$$\overset{\text{配方}}{=}2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2$$

$$=2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2$$

定理：任意二次型可由配平方法化为标准形.

矩阵语言描述

定理：任意实对称矩阵 A，都存在初等矩阵 $P_1,\cdots,P_r$ 使得

$$P_r^T P_{r-1}^T \cdots P_1^T A P_1 P_2 \cdots P_r = diag(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$$

证：对 n 归纳. $n=1$ ✓，若 $n-1$ ✓.

1° $a_{11} \neq 0$. 第1列的 $-a_{i1}a_{11}^{-1}$ 倍加到第 i 列
第1行的 $-a_{i1}a_{11}^{-1}$ 倍加到第 i 行

$\Rightarrow \exists$ 可逆阵 P_1 s.t. $P_1^T A P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}$

2° $a_{11}=0$，$\exists i$ s.t. $a_{ii} \neq 0$.

交换第1行与第 i 行

交换第1列与第 i 列

$$\Rightarrow A' = S_{1i}^T A S_{i1} = \begin{pmatrix} a_{ii} & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

然后进行步骤 1°. $\Rightarrow \exists$ 可逆阵 P_1 s.t.

$$P_1^T A P_1 = \begin{pmatrix} a_{ii} & 0 \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}$$

3° $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=0$. 且 $a_{12}=a_{13}=\cdots=a_{1n}=0$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}$$

4° $a_{11} = \cdots = a_{nn} = 0$，且 $\exists\, i = 2, \cdots, n$ s.t. $a_{1i} = a_{i1} \neq 0$.

$$A' = T_{1i}(1)\, A\, T_{1i}(1)^T = \begin{pmatrix} 2a_{1i} & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

对 A' 进行步骤 1° $\Rightarrow \exists$ 可逆阵 P_1 s.t.

$$P_1^T A P_1 = \begin{pmatrix} 2a_{1i} & 0 \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}$$

综上，定理由归纳可证.

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{对I作初等列变换}]{\text{对A作成对的行列初等变换}} \begin{pmatrix} P^TAP \\ P \end{pmatrix}$$

类似的 $$(A, I) \xrightarrow[\text{对I作初等行变换}]{\text{对A作成对的行列初等变换}} (P^TAP, P^T)$$

例：化简 $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$

解：
$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2c_1 \to c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_1 \to r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 \to c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \tilde{Q}(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2 - 2y_3^2 \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

例： $Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+4x_1x_3$

解： $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}$

$$(A,I)=\begin{pmatrix}0&1&2&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\2&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\to r_1}\begin{pmatrix}1&1&2&1&1&0\\1&0&0&0&1&0\\2&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_2\to c_1}\begin{pmatrix}2&1&2&1&1&0\\1&0&0&0&1&0\\2&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-c_1\to c_3]{-\frac{1}{2}c_1\to c_2}\begin{pmatrix}2&0&0&1&1&0\\1&-\frac{1}{2}&-1&0&1&0\\2&-1&-2&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-c_1\to c_3]{-\frac{1}{2}c_1\to c_2}\begin{pmatrix}2&0&0&1&1&0\\0&-\frac{1}{2}&-1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&-1&-2&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2r_1\to r_3}\begin{pmatrix}2&0&0&1&1&0\\0&-\frac{1}{2}&-1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{-2c_1\to c_3}\begin{pmatrix}2&0&0&1&1&0\\0&-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0&-2&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad \tilde{Q}(y_1,y_2,y_3)=2y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2$$

$$P=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\1&\frac{1}{2}&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$$