Estudio Algebra Lineal

Introducción.

El algebra lineal es geometria en donde las lineas con las que dibujamos tienen dos operaciones algebraicas *(suma y producto)*. Estas lineas junto co sus operaciones cumplen varias propiedades y son los llamados campos o cuerpos y los espacios geométricos que podemos dibujar con estas lineas se llaman espacios vectoriales, pueden ser finitos o infinitos.

Axiomas de Zermelo-Fraenkel + Axiomas de Elección.

#Axioma 1. De existencia o del conjunto vacío.

Axioma 1. De existencia o del Conjunto Vacío:

Existe un conjunto que no tiene elementos. Es decir,
$\exists a, [\forall X, \neg(X \in A)] \equiv \exists A, \forall X(X \notin A)$

Lema del conjunto vacío.

Existe un único conjunto sin elementos. Por ser único lo llamaremos el *Conjunto Vacio* y lo denotaremos por $\emptyset$

#Axioma 2. De extensionalidad.

Axioma 2. De extensionalidad:

Sean X y Y conjuntos, $X = Y$ se lee X es igual a Y
$\forall X[\forall Y([X = Y]) \iff [\forall Z[(Z \in X) \iff (Z \in Y)]])]$
En cristiano este axioma nos dice que dos conjuntos X y Y son iguales exactamente cuándo tienen los mismos elementos.

#Axioma 3. Esquema de Comprensión o de Especificación.

Axioma 3. Esquema de Comprensión o de Especificación:

Sea $P(x)$ una proposición en x. Entonces para todo conjunto A la colección de los elementos de A que cumplen $P(x)$ (ie., tales que $P(x)$ es verdad) es un conjunto.
$\forall A[\exists S,(\forall X[(X\in S)\iff((X\in A)\wedge P(X))])]$
Nota: Para A conjunto y para cada proposición en x, $P(x)$, es conjunto S es único, por lo que lo denotaremos como $x\in A; P(x)$

#Axioma 4. Del par.

Axioma 4. Del Par:

Para cada X y Y conjuntos, existe un conjunto cuyos únicos elementos son X y Y
$\forall X\forall Y,\exists B,\forall Z((Z\in B)\iff([Z=X]\vee[Z=Y]))$
Este conjunto B es único lo denotaremos por X, Y

#Axioma 5. De la union.

Axioma 5. De la unión:

$\forall S\exists U,\forall X[(X\in U)\iff(\exists A,[(A\in S)\wedge(X\in A)])]$

Ejemplo:

Sea $S=A_1=(0,1), A_2=(0,2), A_3=(3,4,5)$. Entonces $\cup S=(0,1,2,3,4,5)$

#Axioma 6. Del conjunto potencia.

Axioma 6. Del Conjunto Potencia:

$\forall X(\exists S,[\forall A((A\in S)\iff(A\subseteq X))])$
Nos dice que para cada conjunto X existe un conjunto $P(x)$ que contiene todos los subconjuntos de X. Es decir si un conjunto Y es un subconjunto de X, entonces Y también es un elemento de $P(X)$. En resumen, para cualquier conjunto podemos construir otro conjunto que contiene todos los posibles subconjuntos del conjunto original.

#Que_Insano

#Axioma 7. De regularidad o de Fundación.

Axioma 7. De regularidad o de Fundación.

$\forall A[(A \neq \emptyset) \Rightarrow [\exists u, [(u \in A) \wedge (\forall x(x \in A) \Rightarrow (x \notin u))]]]$
Nos está diciendo que todo conjunto no vacio A contiene al menos un elemento x que es disjunto *(no tiene intersección)* de A, es decir un conjunto no puede ser miembro de sí mismo, ningún conjunto puede ser elemento de si mismo directa o indirectamente, asegurandonos que no hay conjuntos infinitamente descendentes. Por lo que yo entiendo, nos están dando un limite inferior que sería el vacío.

Teorema.

a) $\forall A[(A \neq \emptyset) \Rightarrow (A \notin A)]$
b) La colección de todos los conjuntos *NO* forma un conjunto.

#Axioma 8. De infinitud.

Axioma 8. De infinitud:

$\exists X, [(\emptyset \in X) \wedge [\forall Y((Y \in X) \Rightarrow (Y \cup \{Y\} \in X))]]$
Es decir, existe un conjunto X tal que
- $\emptyset \in X$ y
- $\emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \in X$ y
- $\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in X$ y ...

Se explica solito, podemos hacer conjuntos infinitos con el conjunto vacío, es meter conjuntos sobre conjuntos sobre conjuntos sobre....

#Que_Insano

#Axioma 9. De reemplazo.

Sean X un conjunto y tenemos para $i \in X$ un conjunto A_i. Entonces, la colección $\{A_i; i \in X\}$ (ó $\{A_i\}_{i \in X}$) es un conjunto.
Equivalentemente:
Sean X un conjunto y α una colección de conjuntos tales que cumplen lo siguiente
1. A cada $A \in \alpha$ le podemos asociar una única $i_A \in X$, y
2. Si $A, B \in \alpha$ son tales que $i_A = i_B$ entonces $A = B$.

Entonces α es un conjunto.

#Axioma de Elección.

Axioma de Elección.

$\forall X[(\emptyset \notin X) \Rightarrow [\exists f : X -> \cup X \text{ función }, [\forall A[(A \in X) \Rightarrow (f(A) \in A)]]]].$
En otras palabras: Dado un conjunto cuyos elementos son conjuntos no vacíos podemos escoger un elemento de cada conjunto.
IBelieveInAxiomaDeElección

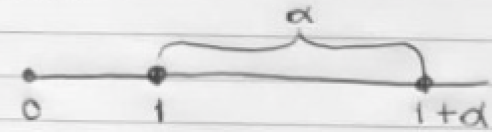
#Corolario :

Los naturales forman un conjunto por axioma de infinitud.
$N \cup \{\emptyset\}$ es un conjunto.
Los enteros forman un conjunto.

Interpretación geometrica de la raíz cuadrada de reales.

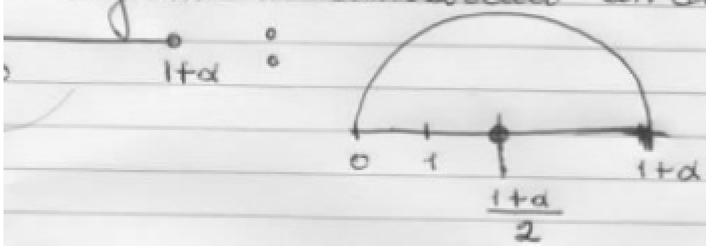
$\sqrt{a}, a \in R$ con $\alpha > 0$

Interpretación geométrica de $\sqrt{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. $\alpha > 0$

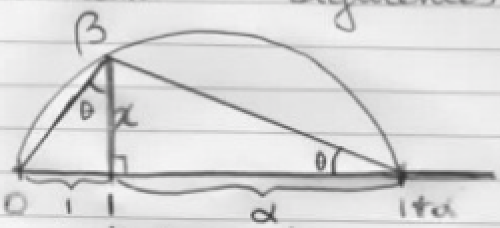


Datos 0, 1, α

Dibujamos el semicírculo con diámetro



Formamos los siguientes triángulos



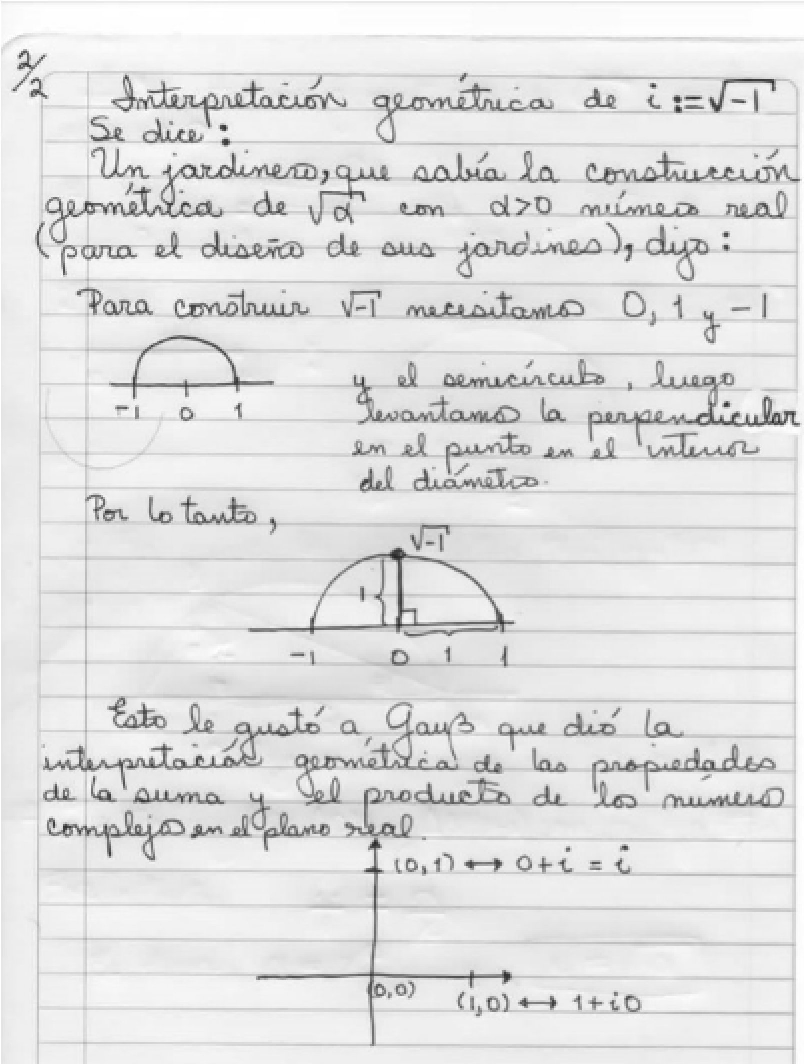
↑ alzamos la perpendicular en 1

...s triángulos $\Delta 01\beta$ y $\Delta\beta 1(1+\alpha)$ son semejantes

...lo tanto, $\frac{x}{1} = \frac{\alpha}{x}$

...s decir, $\alpha = x^2$ y $\boxed{x = \sqrt{\alpha}}$

Parte 1 y Parte 2



2/2 Interpretación geométrica de $i := \sqrt{-1}$

Se dice:

Un jardinero, que sabía la construcción geométrica de $\sqrt{a}$ con $a>0$ número real (para el diseño de sus jardines), dijo:

Para construir $\sqrt{-1}$ necesitamos 0, 1 y -1

y el semicírculo, luego levantamos la perpendicular en el punto en el interior del diámetro.

Por lo tanto,

Esto le gustó a Gauß que dió la interpretación geométrica de las propiedades de la suma y del producto de los números complejos en el plano real.

Métodos de demostración de la lógica proposicional.

Prácticamente tablas de verdad xD
Si tenemos dos proposiciones, p y q para demostrar un p -> q basta con demostrar que p es verdadera ya que de ser verdadera entonces q debe de ser verdadera también, para más información por favor acudir a Metodos-de-demostracion-2024-2.pdf

---

Campos:

Sea k un conjunto con dos operaciones, que son funciones:
Suma: +:
- *kxk -> k*

- (α, β) |-> +(α, β) =: $\alpha + \beta$
Producto: ·: kxk -> k
-(α, β) |-> $(\alpha, \beta) =: \alpha \cdot \beta$

#Definición de Campo.

Diremos que (k, +, ·) es un *campo* si satisface lo siguiente:
$+_.$ 1. Conmutatividad
$+_.$ 2. Asociatividad
$+_.$ 3. Neutro Aditivo
$+_.$ 4. Inverso Aditivo

$\cdot_.$ 0. Cerradura
$\cdot_.$ 1. Conmutatividad
$\cdot_.$ 2. Asociatividad
$\cdot_.$ 3. Neutro multiplicativo
$\cdot_.$ 4. Inverso múltiplicativo

Lema:

Sea (k, +, ·) un campo. Entonces el neutro aditivo y el neutro múltiplicativo son únicos

[! Question] Lema:
Sea (k, +, ·) un campo. Entonces el neutro aditivo y el neutro múltiplicativo son únicos

#Lema de la unicidad de los neutros:

Sea (k, +, ·) un campo. Entonces el neutro aditivo y el neutro múltiplicativo son únicos

Leyes de la cancelación.

#Ley de la cancelación de la suma:

- $\forall \alpha, \beta, \gamma \in k, [\alpha + \beta = \alpha + \gamma] \Rightarrow [\beta = \gamma]$
  Ley de la cancelación del Producto:
- $\forall \beta, \gamma \in k, \forall \alpha \in k - \{0\}, [\alpha\beta = \alpha\gamma] \Rightarrow [\beta = \gamma]$

Campos y no-campos

Campos

- Q los racionales
- R los reales
- Z Los enteros modulo 2

No campos

- ({0}, 0+0 =0, 0·0=0), cumple todos los axiomas excepto que el neutro aditivo y el neutro múltiplicativo son el mismo
- N los números naturales no tienen inversos multiplicativos ni inversos aditivos.
- Z Los enteros no tienen inversos multiplicativos

Espacios Vectoriales.

Sub-espacios vectoriales

Sea V, W espacios vectoriales

Los Enteros Modulo n

El #algoritmo de la Division.

Sean $n, m \in Z$ números enteros con n ≠ 0. Entonces existen únicos $d, r \in Z$ con 0 ≤ r < |n| tales $m = nd + r$.
Prácticamente lo que hacíamos con Arilin
28/5
28 = 5 * 5 +3
O tambien 28 mod 5 = 3

El máximo común divisor.

Valor Absoluto:

$$|n| = \begin{cases} n, & \text{si n} \geq 0 \\ -n, & \text{si n} < 0 \end{cases}$$

#Proposición. >

Sea n ≥ 1 un numero natural. Al siguiente conjunto se le llama el conjunto de los enteros módulo n y son los residuos al dividir entre n:

$$Z_n := (0, 1, \ldots, n - 1)$$

Y tiene dos funciones bien definidas:
Suma. +: $Z_n x Z_n \Rightarrow Z_n$
- $(a, b) | - > a + b$
Producto. ·: $Z_n x Z_n \Rightarrow Z_n$
- $(a, b) | - > ab$

donde la suma cumple conmutatividad, asociatividad, tiene un neutro aditivo y el producto cumple conmutatividad, asociatividad, tiene neutro multiplicativo, cumplen la distributividad y el neutro aditivo es distinto del neutro multiplicativo. PERO hay casos en dónde no se cumple el axioma (regla) del inverso multiplicativo.

C quancha