

Parte 2: Transformadas y Series

(Fourier, Laplace, Z y Series Trigonométricas)

1 1. Transformada de Fourier

Definiciones

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad \longleftrightarrow \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

Condiciones: $f \in L^1$ (Módulo integrable), CPP. Para antitransformada, $\hat{f} \in L^1$.

Propiedades

- **Convolución:** $\mathcal{F}[f * g] = \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega)$.

- **Escala y Desplazamiento:**

$$f(at + b) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} e^{i\frac{b\omega}{a}} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (a \neq 0)$$

- **Modulación (Desplazamiento en frecuencia):**

$$e^{iat} f(t) \longleftrightarrow \hat{f}(\omega - a)$$

- **Conjugación:**

$$\overline{f(t)} \longleftrightarrow \overline{\hat{f}(-\omega)}$$

- **Derivada en el tiempo:**

$$f^{(n)}(t) \longleftrightarrow (i\omega)^n \hat{f}(\omega)$$

- **Multiplicación por t^n (Derivada en frecuencia):**

$$t^n f(t) \longleftrightarrow i^n \hat{f}^{(n)}(\omega)$$

Dualidad y Ejemplos

Propiedad: $\mathcal{F}[\hat{f}(t)] = 2\pi f(-\omega)$.

- Ejemplo: Sabemos $\mathcal{F}[e^{-|t|}] = \frac{2}{1+\omega^2} \implies \mathcal{F}\left[\frac{2}{1+t^2}\right] = 2\pi e^{-|\omega|}$.

- **Pulso Simétrico** (ancho $2a$, de $-a$ a a):

$$\hat{P}(\omega) = \frac{2 \sin(a\omega)}{\omega}$$

2 2. Transformada de Laplace

Definición Unilateral

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad (t > 0, \text{ Causal})$$

Existencia de la Transformada

Condiciones suficientes para que exista $\mathcal{L}\{f(t)\}$:

1. **Continua a trozos** en el intervalo $[0, \infty)$.
2. **De orden exponencial α** : Existen constantes $M > 0$ y $\alpha > 0$ tales que:

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$$

Nota: Si se cumplen, la transformada existe para $Re(s) > \alpha$, quedando así la **Abcisa de Convergencia**.

Teorema de Convolución (Causal)

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = F(s) \cdot G(s)$$

Ojo: La integral es $\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$.

Propiedades de la Transformada de Laplace (Tabla Resumen)

- Derivada n-ésima (en el tiempo):

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

- Multiplicación por t^n (Derivada en frecuencia):

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

- Traslación en frecuencia (Exponencial):

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a)$$

- Traslación en el tiempo (Escalón):

$$\mathcal{L}\{u(t - c)f(t - c)\} = e^{-cs}F(s) \quad (c > 0)$$

- Escalamiento:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (a > 0)$$

- Integral de la función:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Abscisa de Convergencia (σ_a)

Es el valor real mínimo que debe tener la parte real de s para que la integral impropia de Laplace converja. Se determina por el **orden exponencial** de la función en el tiempo.

Cómo obtenerla (Regla Práctica): Si $f(t)$ crece como $e^{\alpha t}$ cuando $t \rightarrow \infty$, entonces $\sigma_a = \alpha$.

- Ejemplo Cortísimo:

- Para $f(t) = e^{5t}$, \Rightarrow la abcisa es $Re(s) > AbsCv$, en este caso cuando pedis cero por acotada pedis e^{real} , con $real > 0$.
- De base, entiendo que la abs de cv es minimo mayor a 0.
- TAMBIEEN, hay que ver que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$$

¿Qué significa la zona a la derecha ($Re(s) > \sigma_a$)?

- Es la **Región de Convergencia (ROC)**: El conjunto de valores de s donde la Transformada existe.
- En esta zona, la función $F(s)$ es **Holomorfa** (analítica), es decir, no tiene singularidades (polos). Todos los polos de $F(s)$ siempre quedan "a la izquierda" de esta región.

Inversión (Antitransformada)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)e^{st} ds$$

Condición de la curva: La recta γ debe estar a la **derecha** de todas las singularidades (en la zona de holomorfía). Métodos: Residuos, Tabla.

3 3. Transformada Z (Discreta)

Conceptos

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

ROC: Anillo (Corona) $R_{min} < |z| <$.

Propiedades y Demostraciones

- **Derivada:** $-zX'(z) \leftrightarrow nx[n]$.
- **Expansión (Upsampling):** $x[n/k] \leftrightarrow X(z^k)$.
Demo: Sustituir $m = n/k$ en la sumatoria.
- **Diferencia Atrás:** $x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1 - z^{-1})X(z)$.
Demo: $\sum x[n]z^{-n} - \sum x[n-1]z^{-n}$. En la 2da, $m = n-1 \implies z^{-(m+1)} = z^{-1}z^{-m}$.
- **Diferencia Adelante:** $x[n+1] - x[n] \leftrightarrow (z - 1)X(z)$.

4 Expansión en el Tiempo (Up-sampling)

Propiedad: $\mathcal{Z}\{x_k[n]\} = X(z^k)$, donde $x_k[n]$ es $x[n/k]$ si n es múltiplo de k , y 0 en otro caso.

Na esto es literal transformar $x[n/k]$ contando que solo tomo multiplos de k. Y ahí cambio de variable $n/k = m$.

5 Desplazamiento en el Tiempo (Retardo)

Propiedad: $\mathcal{Z}\{x[n-k]\} = z^{-k}X(z)$ (Asumiendo $x[n] = 0$ para $n < 0$).

Demostración:

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n-k]z^{-n}$$

Sea $m = n - k$, entonces $n = m + k$. Si $n = 0 \rightarrow m = -k$, pero por causalidad la suma inicia en $m = 0$:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-(m+k)} \\ Y(z) &= z^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-m} \\ Y(z) &= z^{-k}X(z) \end{aligned}$$

6 Desplazamiento en el Tiempo (Adelanto)

Propiedad: $\mathcal{Z}\{x[n+k]\} = z^k \left(X(z) - \sum_{m=0}^{k-1} x[m]z^{-m} \right)$

Demostración:

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n+k]z^{-n}$$

Sea $m = n + k$, entonces $n = m - k$. Cuando $n = 0 \rightarrow m = k$:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{m=k}^{\infty} x[m]z^{-(m-k)} \\ Y(z) &= z^k \sum_{m=k}^{\infty} x[m]z^{-m} \end{aligned}$$

Expresamos la suma desde k como la suma total menos los primeros términos:

$$\begin{aligned} Y(z) &= z^k \left(\sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-m} - \sum_{m=0}^{k-1} x[m]z^{-m} \right) \\ Y(z) &= z^k \left(X(z) - \sum_{m=0}^{k-1} x[m]z^{-m} \right) \end{aligned}$$

7 Diferencia hacia atrás (Backward Difference)

Propiedad: $\mathcal{Z}\{x[n] - x[n-1]\} = (1 - z^{-1})X(z)$

Demostración:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x[n] - x[n-1]\} &= \mathcal{Z}\{x[n]\} - \mathcal{Z}\{x[n-1]\} \\ &= X(z) - z^{-1}X(z) \\ &= (1 - z^{-1})X(z) \end{aligned}$$

8 Diferencia hacia adelante (Forward Difference)

Propiedad: $\mathcal{Z}\{x[n+1] - x[n]\} = zX(z) - zx[0] - X(z)$

Demostración:

$$\mathcal{Z}\{x[n+1] - x[n]\} = \mathcal{Z}\{x[n+1]\} - \mathcal{Z}\{x[n]\}$$

Usando la propiedad de adelanto con $k = 1$:

$$\begin{aligned} &= (z^1(X(z) - x[0]z^0)) - X(z) \\ &= (zX(z) - zx[0]) - X(z) \\ &= zX(z) - zx[0] - X(z) \end{aligned}$$

9 Escalamiento en Z (Multiplicación por exponencial)

Propiedad: $\mathcal{Z}\{a^n x[n]\} = X(z/a)$

Demostración:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (a^n x[n]) z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n] (a \cdot z^{-1})^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} \\ &= X\left(\frac{z}{a}\right) \end{aligned}$$

10 Conjugación

Propiedad: $\mathcal{Z}\{\overline{x[n]}\} = \overline{X(\bar{z})}$

Demostración:

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{x[n]} z^{-n}$$

Notamos que $z^{-n} = \overline{(\bar{z})^{-n}}$:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{x[n]} \cdot \overline{(\bar{z})^{-n}} \\ Y(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n] (\bar{z})^{-n} \\ Y(z) &= \overline{X(\bar{z})} \end{aligned}$$

11 Diferenciación en Z (Multiplicación por n)

Propiedad: $\mathcal{Z}\{nx[n]\} = -z \frac{dX(z)}{dz}$

Demostración:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} \\ \frac{dX(z)}{dz} &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \frac{d}{dz}(z^{-n}) \\ \frac{dX(z)}{dz} &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n] (-nz^{-n-1}) \\ \frac{dX(z)}{dz} &= -z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (nx[n]) z^{-n} \end{aligned}$$

Multiplicamos ambos lados por $-z$:

$$\begin{aligned} -z \frac{dX(z)}{dz} &= \sum_{n=0}^{\infty} (nx[n]) z^{-n} \\ -z \frac{dX(z)}{dz} &= \mathcal{Z}\{nx[n]\} \end{aligned}$$

Teoremas de Valor

- **Inicial:** $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$.
- **Final:** $x[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$.

Parseval Unilateral

$$\sum_{n=0}^{\infty} x[n]y[n] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} X(z)Y(z^{-1})z^{-1} dz$$

Teorema (Identidad de Parseval)

Sean $x[n]$ e $y[n]$ dos sucesiones causales. Supongamos que $X(z)$, la transformada \mathcal{Z} de $x[n]$ converge cuando $|z| > \rho_1$ y que $Y(z)$, la transformada \mathcal{Z} de $y[n]$, converge cuando $|z| > R_2 \neq 0$. Sea $\rho_2 = 1/R_2$. Si $\rho_1 < \rho_2$ y $\rho_1 < R < \rho_2$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} x[n]y[n] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} X(z)Y(z^{-1})z^{-1} dz$$

12 4. Series de Fourier

Definición

Sea

$$\mathcal{S}\{g\}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)).$$

la serie de Fourier trigonométrica de g . Se define la serie de Fourier trigonométrica de f por la igualdad $\omega = P/2\pi$

$$\mathcal{S}\{f\}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

Proposición

Vale que

$$a_n = \frac{2}{P} \int_0^P f(x) \cos(n\omega x) dx \quad b_n = \frac{2}{P} \int_0^P f(x) \sin(n\omega x) dx.$$

Identidades Trigonométricas

- $\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$
- $\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$
- $\sin A \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A + B) + \sin(A - B)]$

Coeficientes y Ortogonalidad

Para periodo P y $w_k = 2\pi k/P$:

$$a_k = \frac{2}{P} \int_{t_0}^{t_0+P} f(t) \cos(w_k t) dt, \quad b_k = \frac{2}{P} \int_{t_0}^{t_0+P} f(t) \sin(w_k t) dt$$

Integrales: $\int_0^P \sin(nw) \sin(mw) dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ P/2 & n = m \end{cases}$

Propiedades

- **Intervalo Móvil:** $\int_{t_0}^{t_0+P} f(t) dt = \int_0^P f(t) dt$.
Demo: Dividir integral en P , cambio de variable $u = t - P$ usando periodicidad.
- **Paridad:** Par \times Impar = Impar (Integral 0).
- **Dirichlet:** En discontinuidad, converge a $\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$.

Demostración: Invarianza del Intervalo de Integración (Intervalo Móvil)

Objetivo: Probar que si $f(t)$ es periódica con periodo P , entonces $\int_{t_0}^{t_0+P} f(t) dt = \int_0^P f(t) dt$.

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+P} f(t) dt &= \int_{t_0}^P f(t) dt + \int_P^{t_0+P} f(t) dt \quad (\text{dividir integral en } P) \\ &= \int_{t_0}^P f(t) dt + \int_0^{t_0} f(t) dt = \int_0^P f(t) dt \quad (\text{cv. } u = t - P \text{ y periodicidad}) \end{aligned}$$

$$\int_0^P \cos\left(\frac{2\pi nx}{P}\right) \cos\left(\frac{2\pi mx}{P}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{P}{2} & \text{si } n = m \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^P \sin\left(\frac{2\pi nx}{P}\right) \sin\left(\frac{2\pi mx}{P}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{P}{2} & \text{si } n = m \neq 0 \end{cases}$$

La extensión periódica de f_{par} tiene período $P = 2L$. Sea $\omega_m = \frac{2\pi m}{2L}$. La serie de Fourier de f_{par} está dada por

$$\mathcal{S}\{f_{\text{par}}\}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m>0} a_m \cos(\omega_m t)$$

donde

$$a_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos(\omega_m t) dt$$

Esta serie se llama la serie de cosenos de la función f

La serie de Fourier de $f_{\text{ímpar}}$ está dada por

$$\mathcal{S}\{f_{\text{ímpar}}\}(t) = \sum_{m>0} b_m \sen(\omega_m t)$$

donde

$$b_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sen(\omega_m t) dt$$

Esta serie se llama la serie de senos de la función f

13 5. Extras Matemáticos

Serie Geométrica Finita

$$\sum_{j=0}^n r^j = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$