Guía de Variable Compleja: Parte 1

(Fundamentos, Holomorfía, Integración y Residuos)

1 1. Aritmética Básica

Potencias y Raíces

- **Potencias de i:** $i^k = i^{k \mod 4}$ (Ciclo: $1, i, -1, -i$).
- **Raíces Enésimas:** $Z^n = W$ tiene exactamente n soluciones.
- **Conjugado:** Si $w \in \mathbb{R} \implies \bar{w} = w$.
- **Polinomios:** Grado $n \implies n$ raíces (Teorema Fundamental).

PALABRAS CLAVE:
CUADRANTE - ÁNGULO - MÓDULO - CONJUGADO

Binomio de Newton

$$(z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}$$

2 2. Funciones y Derivadas

Condiciones de Cauchy-Riemann (C-R)

Para $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, condición necesaria para derivabilidad:

$$\boxed{u_x = v_y} \quad \text{y} \quad \boxed{u_y = -v_x}$$

Matriz Jacobiana (Diferencial):

$$Df = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

Holomorfía: f es derivable en un entorno del punto.

¿Cuándo f es Constante?

Si f es holomorfa en un dominio conexo, es constante si ocurre **cualquiera** de esto: 1. $u = \text{cte}$ 2. $v = \text{cte}$ 3. $|f| = \text{cte}$ 4. $\arg(f) = \text{cte}$ 5. $\bar{f}$ es holomorfa.

Logaritmo Complejo

$$\log(z) = \ln|z| + i(\arg(z) + 2k\pi)$$

(Multivaluada. Requiere cortes de rama para ser continua).

3 Funciones Elementales e Identidades

Identidades Clave

$$\boxed{\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1}$$

Definiciones Exponenciales

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

Descomposición en $u + iv$

- $\sin(x + iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$
- $\cos(x + iy) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$
- $\sinh(x + iy) = \sinh(x)\cos(y) + i\cosh(x)\sin(y)$
- $\cosh(x + iy) = \cosh(x)\cos(y) + i\sinh(x)\sin(y)$

4 Series de Potencias

Desarrollos

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$$
$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad ; \quad \sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad ; \quad \cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

(Nota: $\sinh$ *y* $\cosh$ *son iguales a* $\sin$ *y* $\cos$ *pero sin alternar signos).*

Producto de Cauchy (Multiplicación de Series)

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left[\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right]}_{c_n} z^n$$

Puedo igualar exponente de Z a menos 1 y de ahí hago cambio de contador de alguna de las series. Buscar valor conveniente de k o n

Coeficientes y Criterios

Taylor: $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$.

- **D'Alambert:** $L = \lim |a_{n+1}/a_n| \implies R = 1/L$.
- **Cauchy (Raíz):** $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|} \implies R = 1/L$.

"Ir y volver" de series conocidas

5 Series de Laurent y Singularidades

Definiciones

- **Ceros:** $f(z_0) = 0$. **Polos:** $f(z_0) \to \infty$. **Orden** k**:** Potencia de termino que extraigo como factor común, por g(z) holomorfa.
- **Estructura:**

$$f(z) = \underbrace{\sum_{-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n}_{\text{Parte Principal (Cv. Anillo)}} + \underbrace{\sum_{0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}_{\text{Parte Taylor (Cv. Disco)}}$$

Coeficientes Laurent (Integral)

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Casos del exponente $n + 1$*:*

- $n + 1 > 0, = 0, < 0$.
- Digamos que es Jordan +, dentro de la zona de CV de SL.

6 Integrales y Teoremas

$$\oint_\gamma \frac{1}{(z-z_0)^n} dz = \begin{cases} 2\pi i & n = 1 \\ 0 & n \neq 1, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Teoremas Fundamentales

- **Cauchy-Goursat:** Si f holomorfa en el interior $\implies \oint f = 0$.
- **Fórmula Integral Cauchy (FIC):** $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$.
- **Liouville:** Entera + Acotada $\implies$ Constante.

7 Cálculo de Residuos

Estrategia y Fórmulas

1. Determinar orden k (Propiedad: Orden$(f \cdot g)$ = Suma de órdenes, y si es división se resta). 2. **Fórmula General (Orden k):**

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z-z_0)^k f(z) \right]$$

3. **Truco P/Q' (Polos Simples):** Si $f = P/Q$, $Q(z_0) = 0, Q'(z_0) \neq 0$, $P(z_0) \neq 0$, P y Q holomorfas:

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

Residuo Logarítmico

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P \quad (N = \text{Ceros}, P = \text{Polos})$$

Siendo N y P los números de ceros y polos (con multiplicidad) dentro de la curva. No funciona si hay esenciales o no aisladas.

Teorema de los Residuos

$$\oint_\gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}(f, z_k)$$

Condiciones: Jordan +, f holomorfa salvo finitos polos aislados dentro de γ, .

8 8. Integración Directa (Parametrización)

Fórmula General

Si la curva γ se describe mediante $z(t)$ con $t \in [a, b]$:

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)\,dt}$$

Pasos: 1. Parametrizar γ como $z(t)$. 2. Calcular el diferencial $dz = z'(t)dt$. 3. Sustituir todo en términos de t y resolver la integral real.

PERO si hay primitiva holomorfa en el recorrido, usar: F(b) - F(a).