Guía Completa de Variable Compleja

---

1 Transformada de Fourier

Definiciones

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \quad \longleftrightarrow \quad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

Condiciones y Propiedades

Condición: $f \in L^1$ (Absolutamente integrable) y CPP.

- **Traslación:** $f(t-t_0) \leftrightarrow e^{-i\omega t_0}\hat{f}(\omega)$
- **Modulación:** $e^{i\omega_0 t}f(t) \leftrightarrow \hat{f}(\omega-\omega_0)$
- **Escala:** $f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
- **Derivada de la Transf:** $\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) \leftrightarrow -itf(t)$
- **Convolución:** La transformada de la convolución es el producto de las transformadas:
  $$\mathcal{F}[f(t) * g(t)] = \hat{f}(\omega)\cdot\hat{g}(\omega)$$

Dualidad (Ejemplo)

$\mathcal{F}[\hat{f}(t)] = 2\pi f(-\omega)$. Ej: Si $\mathcal{F}[e^{-|t|}] = \frac{2}{1+\omega^2} \implies \mathcal{F}[\frac{2}{1+t^2}] = 2\pi e^{-|\omega|}$.

Pulso y Auxiliares

Pulso rectangular (ancho $2a$): $\hat{P}_a(\omega) = 2a\,\mathrm{sinc}(a\omega)$. **Geométrica:** $\sum_{j=0}^{n} r^j = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

---

2 Transformada de Laplace

Definición y Existencia

Unilateral ($t > 0$, causal):

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

Abscisa σ_a: Mínimo $Re(s)$ para convergencia (dada por el orden exponencial de f). **Holomorfía:** En el semiplano $Re(s) > \sigma_a$.

Teorema de la Convolución (Causal)

La transformada del producto convolución es el producto de las transformadas:

$$\boxed{\mathcal{L}[(f * g)(t)] = F(s) \cdot G(s)}$$

Definición de Convolución Causal: Para funciones que son cero antes de $t = 0$, los límites de integración son finitos:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

Propiedades Clave

- **Límite:** $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$.
- **Escala:** $\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F(s/a)$.
- **Traslación:** $\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = e^{-as}F(s)$.
- **Integral:** $\mathcal{L}[\int_0^t f(\tau)d\tau] = \frac{F(s)}{s}$.
- **Derivadas ($t \to s$):** $\mathcal{L}[f'] = sF(s) - f(0^+)$.
- **Derivadas ($s \to t$):** $\frac{d}{ds}F(s) = \mathcal{L}[-tf(t)]$.

Antitransformada e Inversión

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)e^{st}ds$$

Condición: La recta γ debe estar a la derecha de todas las singularidades. **Métodos Prácticos:** 1. Fracciones simples + Tabla. 2. Residuos: $f(t) = \sum \mathrm{Res}(F(s)e^{st})$. 3. Convolución.

3 Transformada Z

Definición y ROC

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

ROC: Anillo en el plano complejo (Corona) limitado por polos.

Propiedades

- **Derivada ($z \to n$):** $-zX'(z) \leftrightarrow nx[n]$.
- **Upsampling:** $x[n/k] \leftrightarrow X(z^k)$.
- **Diferencias:** $\nabla x[n] \leftrightarrow (1 - z^{-1})X(z)$; $\Delta x[n] \leftrightarrow (z - 1)X(z)$.
- **Parseval:** $\sum |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi i} \oint X(z)X(z^{-1})z^{-1}dz$.
- **Valor Inicial:** $x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$.
- **Valor Final:** $\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}(z - 1)X(z)$.

---

4 Series de Fourier

Identidades y Ortogonalidad

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$
$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$
$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A + B) + \sin(A - B)]$$

Integrales (Periodo P): Productos cruzados ($n \neq m$) dan 0. Cuadrados ($n = m$) dan $P/2$.

Coeficientes (Periodo P, $w_k = 2\pi k/P$)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum [a_k \cos(w_k t) + b_k \sin(w_k t)]$$
$$a_k = \frac{2}{P} \int_{t_0}^{t_0+P} f(t) \cos(w_k t)dt, \quad b_k = \frac{2}{P} \int_{t_0}^{t_0+P} f(t) \sin(w_k t)dt$$

Propiedades

- **Intervalo Móvil:** $\int_{t_0}^{t_0+P} = \int_0^P$.
- **Paridad:** Par $\times$ Impar $=$ Impar (Integral 0).
- **Dirichlet:** En saltos, converge al promedio $(f(t^+) + f(t^-))/2$.