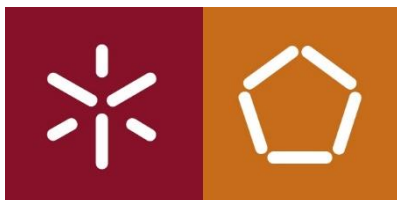


Modelos Determinísticos de Investigação Operacional



Trabalho prático nº2

29 de outubro de 2019

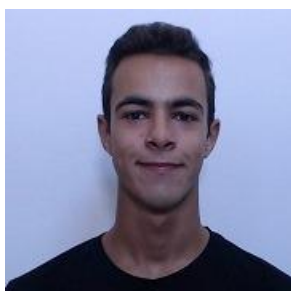
Grupo nº 11

Filipa Alves dos Santos (A83631)

Hugo André Coelho Cardoso (A85006)

João da Cunha e Costa (A84775)

Válter Ferreira Picas Carvalho (A84464)



Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Universidade do Minho

Índice de conteúdos

1. Introdução.....	3
2. Desenvolvimento	3
2.1. Parte I.....	3
2.1.1. Modelo de Programação Linear Original.....	3
2.1.2. Modelo de Programação Linear Novo.....	4
2.1.3. Rede de Transporte Nova	5
2.1.4. Ficheiro Input (Relax4).....	6
2.1.5. Ficheiro Output (Relax4)	7
2.1.6. Interpretação da Solução	8
2.1.7. Validação do Modelo	8
2.2. Parte II.....	9
2.2.1. Grafo Bipartido do Problema de Transporte.....	9
2.2.2. Balanceamento do Problema de Transporte	10
2.2.3. Caminhos Mais Curtos entre os Vértices Relevantes.....	10
2.2.4. Ficheiro Input (Relax4).....	11
2.2.5. Ficheiro Output (Relax4)	12
2.2.6. Interpretação da Solução	13
2.2.7. Validação do Modelo	13
3. Conclusão	14

1. Introdução

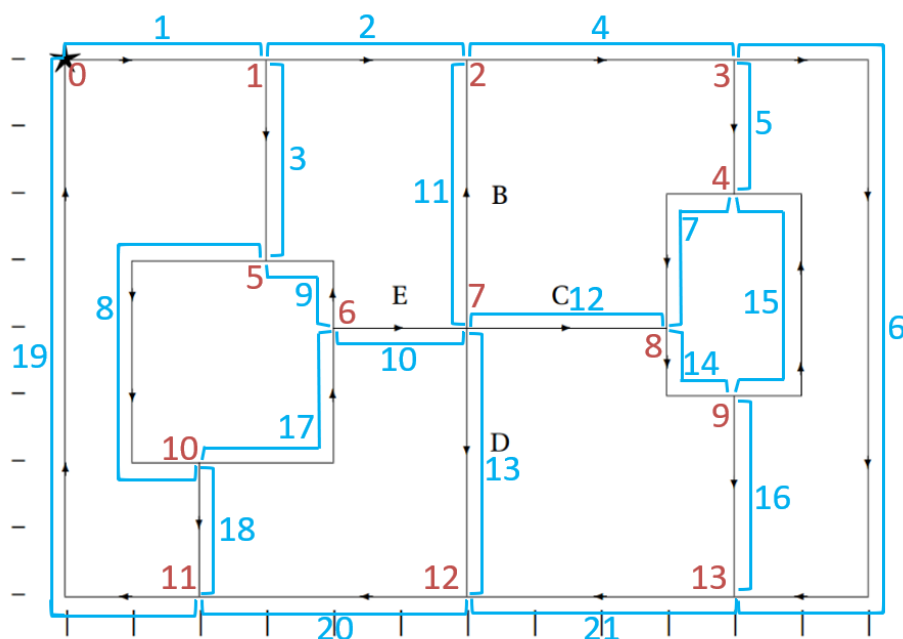
Neste trabalho prático, era pretendido analisar o problema inicial do Trabalho Prático 1 numa outra ótica. Inicialmente, era analisado o fluxo em cada vértice do grafo orientado (rede de ruas) fornecido, injetando uma unidade no vértice inicial e seguindo o seu percurso, de modo a percorrer as várias ruas no mínimo uma vez e em cada vértice o número de unidades que saem é igual ao número de unidades que entram no mesmo. Tendo isto em conta, na primeira parte do trabalho, o que fizemos foi escolher uma nova variável de decisão, que era resultado de decrementar uma unidade à variável de decisão do primeiro projeto, ou seja, garantimos a existência de um limite inferior de fluxos em cada arco e, portanto, passamos a analisar o problema como um problema de transportes numa rede geral, utilizando o Relax como software auxiliar de resolução. Obtivemos, portanto, o número de vezes adicionais que cada arco é percorrido ao fazer os caminhos de reposicionamento determinados na segunda parte do projeto. Já na segunda parte do trabalho, consideramos o grafo como um grafo bipartido, dividido em vértices de excesso (nos quais entram mais caminho do que saem) e vértices de defeito (vice-versa). Com esta estratégia, e sabendo que os caminhos de reposicionamento do veículo começam num vértice por excesso e acabam num vértice por defeito, torna-se possível descobrir estes mesmos caminhos de modo a minimizar os custos associados.

2. Desenvolvimento

2.1. Parte I

2.1.1. Modelo de Programação Linear Original

Considerando que 85006 é o maior número de aluno dos membros do nosso grupo, determinou-se que o sentido da rua B é a subir, o da D é a descer e o das C e E é para a direita. Abaixo apresentamos a rede da cidade atualizada, com estes sentidos já indicados:



2.1.2. Modelo de Programação Linear Novo

Para efetuar a mudança de variável pedida, $y_{ij} = x_{ij} - l_{ij}$, determinamos que l_{ij} , o limite inferior do fluxo do arco, é 1 dado que pretendemos que cada arco seja percorrido no mínimo uma vez. Assim, temos que substituir todos x_{ij} nas restrições e na função objetivo do modelo anterior por $y_{ij} + 1$. Por exemplo, na restrição correspondente ao vértice 1 tínhamos a expressão $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ e após efetuarmos a substituição, temos $(y_1+1) - (y_2+1) - (y_3+1) = 0$, que equivale a $y_1 - y_2 - y_3 - 1 = 0$.

Assim, o novo modelo de Programação Linear é o seguinte:

Declaração das variáveis:

int $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}, y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{14}, y_{15}, y_{16}, y_{17}, y_{18}, y_{19}, y_{20}, y_{21}$;

$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}, y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{14}, y_{15}, y_{16}, y_{17}, y_{18}, y_{19}, y_{20}, y_{21} \geq 0$;

Função Objetivo:

min: $3 y_1 + 3 y_2 + 3 y_3 + 4 y_4 + 2 y_5 + 12 y_6 + 3 y_7 + 6 y_8 + 2 y_9 + 2 y_{10} + 4 y_{11} + 3 y_{12} + 4 y_{13} + 2 y_{14} + 5 y_{15} + 3 y_{16} + 4 y_{17} + 2 y_{18} + 10 y_{19} + 4 y_{20} + 4 y_{21} + 85$;

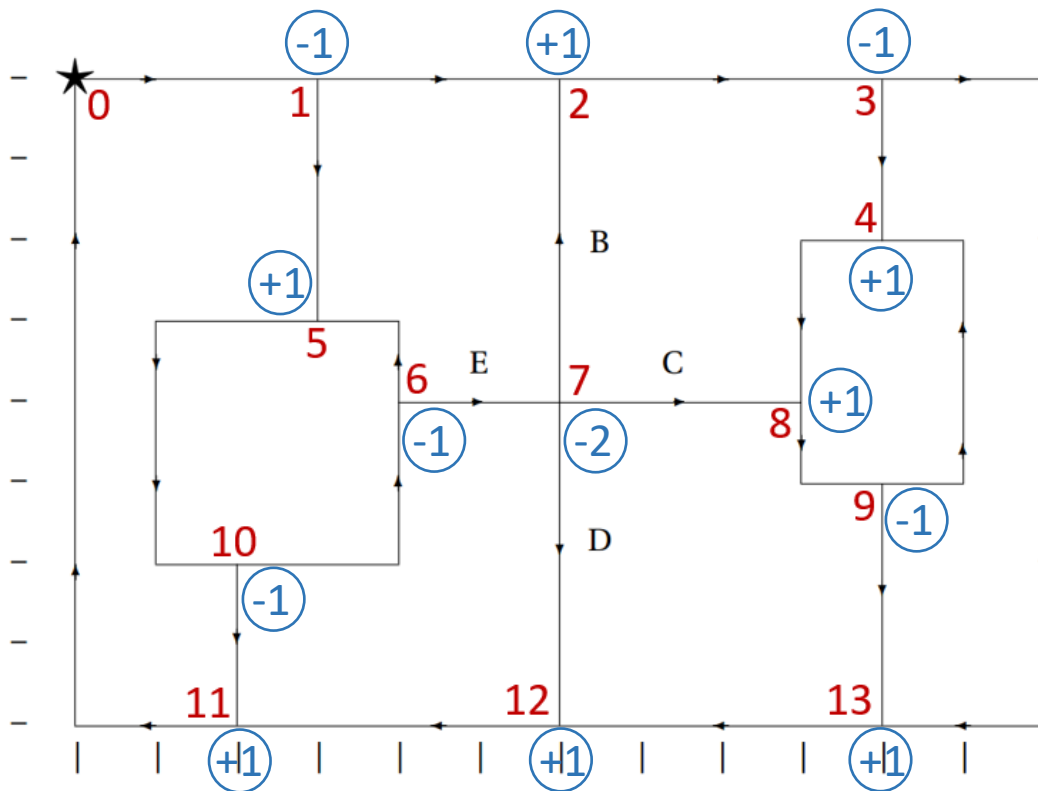
Restrições de fluxo:

- Vértice 0: $y_{19} - y_1 = 0$;
- Vértice 1: $y_1 - y_2 - y_3 - 1 = 0$;
- Vértice 2: $y_2 + y_{11} - y_4 + 1 = 0$;
- Vértice 3: $y_4 - y_5 - y_6 - 1 = 0$;
- Vértice 4: $y_5 + y_{15} - y_7 + 1 = 0$;
- Vértice 5: $y_3 + y_9 - y_8 + 1 = 0$;
- Vértice 6: $y_{17} - y_9 - y_{10} - 1 = 0$;
- Vértice 7: $y_{10} - y_{11} - y_{12} - y_{13} - 2 = 0$;
- Vértice 8: $y_7 + y_{12} - y_{14} + 1 = 0$;
- Vértice 9: $y_{14} - y_{15} - y_{16} - 1 = 0$;
- Vértice 10: $y_8 - y_{17} - y_{18} - 1 = 0$;
- Vértice 11: $y_{18} + y_{20} - y_{19} + 1 = 0$;
- Vértice 12: $y_{13} + y_{21} - y_{20} + 1 = 0$;
- Vértice 13: $y_6 + y_{16} - y_{21} + 1 = 0$;

2.1.3. Rede de Transporte Nova

Os vértices com mais arcos a entrar neles do que a sair são chamados de vértices de procura / excesso enquanto vértices com mais a sair do que a entrar são vértices de oferta / defeito. Como definimos no trabalho anterior, os arcos a entrar num certo vértice são considerados um aumento no fluxo e os sair, uma diminuição deste. Estes valores do fluxo podem ser observados nas restrições do modelo de programação facilmente sendo que equivalente ao membro independente da equação - por exemplo, no vértice 1 o fluxo é -1 ($y_1 - y_2 - y_3 - 1 = 0$).

Na figura seguinte da rede, estão representados os fluxos de cada vértice a azul:



2.1.4. Ficheiro Input (Relax4)

```
14
21
1 2 3 100
1 5 3 100
2 3 4 100
3 4 2 100
3 13 12 100
4 8 3 100
5 10 6 100
6 5 2 100
6 7 2 100
7 2 4 100
7 8 3 100
7 12 4 100
8 9 2 100
9 4 5 100
9 13 3 100
10 6 4 100
10 11 2 100
11 14 10 100
12 11 4 100
13 12 4 100
14 1 3 100
-1
1
-1
1
1
-1
-2
1
-1
-1
1
1
1
1
0
```

2.1.5. Ficheiro Output (Relax4)

```
END OF READING
NUMBER OF NODES = 14, NUMBER OF ARCS = 21
CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
*****
TOTAL SOLUTION TIME = 0. SECS.
TIME IN INITIALIZATION = 0. SECS.

1 5 3.
2 3 1.
4 8 1.
5 10 4.
6 7 2.
8 9 2.
9 13 1.
10 6 3.
11 14 4.
12 11 3.
13 12 2.
14 1 4.

OPTIMAL COST = 135.
NUMBER OF AUCTION/SHORTEST PATH ITERATIONS = 62
NUMBER OF ITERATIONS = 18
NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS = 2
NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS = 4
NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS = 3
*****
```

2.1.6. Interpretação da Solução

Através do ficheiro output do Relax4, obtivemos o resultado 135, que corresponde ao custo de percorrer os arcos, apenas os que são percorridos mais que uma vez, cujo vértice de origem é de excesso e o de destino é de defeito. Estes arcos correspondem aos caminhos de reposicionamento do veículo. Se somarmos o custo de percorrer uma só vez cada arco (85), ao resultado obtido no Relax4 (135) chegamos ao valor 220, que é o valor da solução ótima do 1º trabalho prático.

O conjunto ótimo de arcos de reposicionamento pode ser retirado pelo output apresentado anteriormente. Isto é, os arcos cuja origem é a primeira coluna do ficheiro e o destino é segunda. Por ordem, temos os arcos: 3, 4, 7, 8, 10, 14, 16, 17, 19, 20, 21 e 1. Podemos ver a correspondência gráfica na figura da secção 2.1.1.

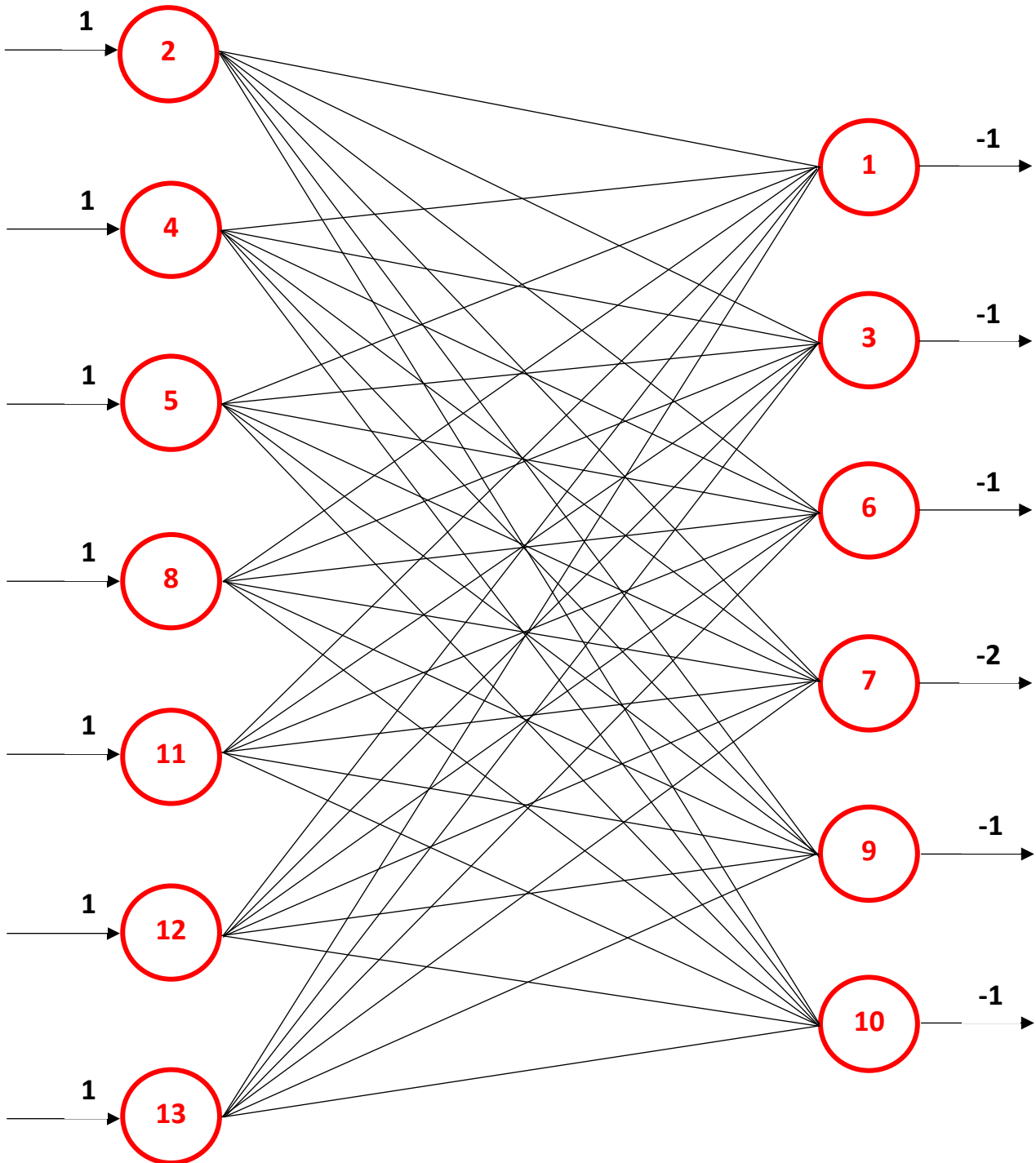
2.1.7. Validação do Modelo

Para validarmos o nosso modelo, temos que substituir as restrições com os valores obtidos no ficheiro output do Relax4. Por exemplo, para a restrição do vértice 1 ($y_1 - y_2 - y_3 - 1 = 0$), vamos usar os valores obtidos correspondentes aos arcos 1 (do vértice 0 - representado como 14 no Relax4 - para o 1), 2 (do vértice 1 para o 2) e 3 (do vértice 1 para o 5), que se encontram 3ª coluna do ficheiro output. Quando estes arcos não estão representados no output, significa que não há reposicionamento nesses arcos, como é o caso do arco 2 nesta restrição. Substituindo, obtemos $4 - 0 - 3 - 1 = 0$ que é equivalente a $0 = 0$. Para além de fazer este raciocínio com todas as outras restrições de fluxo, também confirmamos que todos os valores de y_{ij} são ≥ 0 .

2.2. Parte II

2.2.1. Grafo Bipartido do Problema de Transporte

De seguida, podemos observar o grafo bipartido correspondente ao problema. À esquerda vemos os vértices de excesso e respetivos valores de procura, e à direita os vértices de defeito e respetivos valores de oferta. É possível observar os custos unitários de forma clara na tabela apresentada na alínea seguinte.



2.2.2. Balanceamento do Problema de Transporte

Seja o grafo da figura representado por $G = (E, D, A), \forall (i, j) \in A, i \in E, j \in D$, isto é, grafo cujo conjunto de vértices é partido em E (representam vértices de excesso) e D (representa vértices de defeito) e em que todos os arcos ligam uma origem $i \in E$ a um destino $j \in D$. Para o grafo ser balanceado, o número total de caminhos que saem dos vértices de excesso é igual ao número de caminhos que chegam aos vértices de defeito.

Para o conjunto E, temos que o número total de caminhos acima referidos é dado por:

$$\sum_{i \in E} a_i = 7 * 1 = 7$$

Para o conjunto D, temos que o número total de caminhos também acima referidos é dado por:

$$\sum_{j \in D} b_j = 5 * 1 + 2 = 7$$

Como os dois somatórios são iguais, verifica-se a condição acima imposta e conclui-se que o grafo é, de facto, balanceado.

2.2.3. Caminhos Mais Curtos entre os Vértices Relevantes

Os valores na tabela representam os custos unitários de transporte dos caminhos mais curtos de um vértice de excesso i para um vértice de defeito j, calculados por inspeção do mapa fornecido no enunciado.

Conjunto dos vértices de excesso: $i = \{2, 4, 5, 8, 11, 12, 13\}$ – coluna da tabela

Conjunto dos vértices de defeito: $j = \{1, 3, 6, 7, 9, 10\}$ – linha da tabela

	1	3	6	7	9	10
2	35	4	48	50	11	44
4	29	36	42	44	5	38
5	21	28	10	12	17	6
8	26	33	39	41	2	35
11	13	20	26	28	27	22
12	17	24	30	32	31	26
13	21	28	34	36	35	31

2.2.4. Ficheiro de input (Relax4)

```
13
42
2 1 35 100
2 3 4 100
2 6 48 100
2 7 50 100
2 9 11 100
2 10 44 100
4 1 29 100
4 3 36 100
4 6 42 100
4 7 44 100
4 9 5 100
4 10 38 100
5 1 21 100
5 3 28 100
5 6 10 100
5 7 12 100
5 9 17 100
5 10 6 100
8 1 26 100
8 3 33 100
8 6 39 100
8 7 41 100
8 9 2 100
8 10 35 100
11 1 13 100
11 3 20 100
11 6 26 100
11 7 28 100
11 9 27 100
11 10 22 100
12 1 17 100
12 3 24 100
12 6 30 100
12 7 32 100
12 9 31 100
12 10 26 100
13 1 21 100
13 3 28 100
13 6 34 100
13 7 36 100
13 9 35 100
13 10 31 100
```

-1
1
-1
1
1
-1
-2
1
-1
-1
1
1
1

2.2.5. Ficheiro de output (Relax4)

```
END OF READING
NUMBER OF NODES = 13, NUMBER OF ARCS = 42
CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
*****
TOTAL SOLUTION TIME = 0. SECS.
TIME IN INITIALIZATION = 0. SECS.
2 3 1.
4 6 1.
5 10 1.
8 9 1.
11 7 1.
12 1 1.
13 7 1.
OPTIMAL COST = 135.
NUMBER OF AUCTION/SHORTEST PATH ITERATIONS = 24
NUMBER OF ITERATIONS = 21
NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS = 3
NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS = 1
NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS = 3
*****
```

2.2.6. Interpretação da solução ótima

Seja C o conjunto ótimo dos caminhos de reposicionamento x_{ij} do veículo entre os vértices de excesso i e os vértices de defeito j . Segundo o Relax4,

$$C = \{x_{2,3}, x_{4,6}, x_{5,10}, x_{8,9}, x_{11,7}, x_{12,1}, x_{13,7}\}$$

Como podemos observar no ficheiro de output, a soma dos custos destes caminhos é 135. Além disso, temos ainda que o custo de percorrer todos os arcos uma vez é 85.

Logo, o custo da solução ótima é $135 + 85 = 220$, tal como no primeiro trabalho prático.

2.2.7. Validação do modelo

A substituição dos valores da solução ótima, ou seja, o número de vezes que cada arco é atravessado em caminhos de reposicionamento, na função objetivo e restrições permite verificar a validade da resolução:

Função Objetivo: $3*4 + 3*0 + 3*3 + 4*1 + 2*0 + 12*0 + 3*1 + 6*4 + 2*0 + 2*2 + 4*0 + 3*0 + 4*0 + 2*2 + 5*0 + 3*1 + 4*3 + 2*0 + 10*4 + 4*3 + 4*2 + 85 = 220$

Restrições:

- Vértice 0: $4 - 4 = 0$;
- Vértice 1: $4 - 0 - 3 - 1 = 0$;
- Vértice 2: $0 + 0 - 1 + 1 = 0$;
- Vértice 3: $1 - 0 - 0 - 1 = 0$;
- Vértice 4: $0 + 0 - 1 + 1 = 0$;
- Vértice 5: $3 + 0 - 4 + 1 = 0$;
- Vértice 6: $3 - 0 - 2 - 1 = 0$;
- Vértice 7: $2 - 0 - 0 - 0 - 2 = 0$;
- Vértice 8: $1 + 0 - 2 + 1 = 0$;
- Vértice 9: $2 - 0 - 1 - 1 = 0$;
- Vértice 10: $4 - 3 - 0 - 1 = 0$;
- Vértice 11: $0 + 3 - 4 + 1 = 0$;
- Vértice 12: $0 + 2 - 3 + 1 = 0$;
- Vértice 13: $0 + 1 - 2 + 1 = 0$;

3. Conclusão

Este trabalho incentivou-nos a ter um pensamento lógico de modo a achar as restrições necessárias para resolver o problema e um olhar crítico ao observar os resultados, pois tivemos que perceber se os valores obtidos faziam sentido no contexto do problema e qual o percurso feito de modo a atingir a solução ótima, além de averiguar se a solução correspondia à solução obtida no trabalho prático 1.

Concluimos também que era possível resolver o mesmo problema usando dois métodos completamente distintos. Consideramos que foi um trabalho bem sucedido e pretendemos ter resultados semelhantes em futuros trabalhos.