Actividad 10

Julio César Cons Calderón

Introducción

La ecuación de Duffing describe un oscilador amortiguado con un potencial mas complejo que el de un oscilador armónico simple ($\beta = \delta = 0$).
La ecuación de Duffing representa un oscilador de resorte rígido que no obedece la ley de Hooke, y es ejemplo de un sistema dinámico que exhibe un comportamiento caótico.

Desarrollo

La **teoría del caos** es la rama de las matemáticas, la física y otras ciencias (biología, meteorología, economía, entre otras) que trata ciertos tipos de sistemas complejos y sistemas dinámicos no lineales muy sensibles a las variaciones en las condiciones iniciales. Pequeñas variaciones en dichas condiciones iniciales pueden implicar grandes diferencias en el comportamiento futuro, imposibilitando la predicción a largo plazo. Esto sucede aunque estos sistemas son en rigor deterministas, es decir; su comportamiento puede ser completamente determinado conociendo sus condiciones iniciales.

Los sistemas dinámicos se pueden clasificar básicamente en:

- Estables: cuando dos soluciones con condiciones iniciales suficientemente cercanas siguen siendo cercanas a lo largo del tiempo. Así, un sistema estable tiende a lo largo del tiempo a un punto, u órbita, según su dimensión (atractor o sumidero).
- Inestables: cuando dos soluciones con condiciones iniciales diferentes acaban divergiendo por pequeñas que sean las condiciones iniciales. Así un sistema inestable "escapa" de los atractores.
- Caóticos: cuando el sistema no es inestable y si bien dos soluciones se mantienen a una distancia "finita" cercana a un atractor del sistema dinámico, las soluciones se mueven en torno al atractor de manera irregular y pasado el tiempo ambas soluciones no son cercanas, si bien suelen ser cualitativamente similares. De esa manera, el sistema permanece confinado en una zona de su espacio de estados, pero sin tender a un atractor fijo.

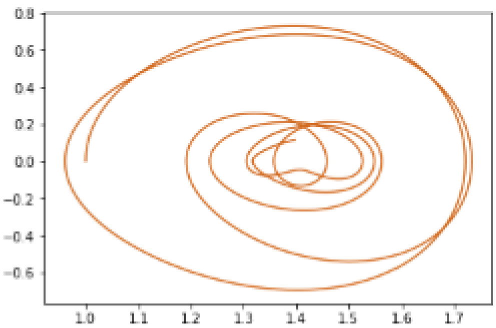
Metodología

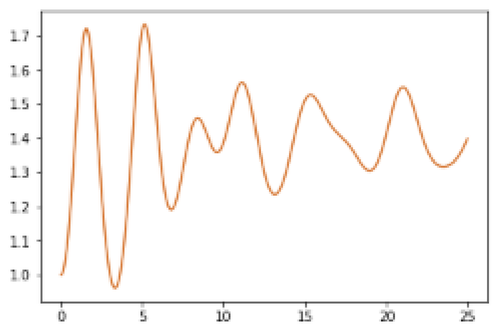
En análisis numérico, los métodos de Runge-Kutta son un conjunto de métodos genéricos iterativos, explícitos e implícitos, de resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Este conjunto de métodos fue inicialmente desarrollado alrededor del año 1900 por los matemáticos C. Runge y M. W. Kutta.

$\frac{dx}{dt} = v$	$\frac{dv}{dt} = f(x, v, t)$
$k_1 = hv$ $k_2 = h\left(v + \frac{1}{2}l_1\right)$ $k_3 = h\left(v + \frac{1}{2}l_2\right)$ $k_4 = h\left(v + l_3\right)$	$l_1 = h \cdot f(x, v, t)$ $l_2 = h \cdot f\left(x + \frac{1}{2}k_1, v + \frac{1}{2}l_1, t + \frac{1}{2}h\right)$ $l_3 = h \cdot f\left(x + \frac{1}{2}k_2, v + \frac{1}{2}l_2, t + \frac{1}{2}h\right)$ $l_4 = h \cdot f\left(x + k_3, v + l_3, t + h\right)$
$x(t+h) = x(t) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$	$v(t+h) = v(t) + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$

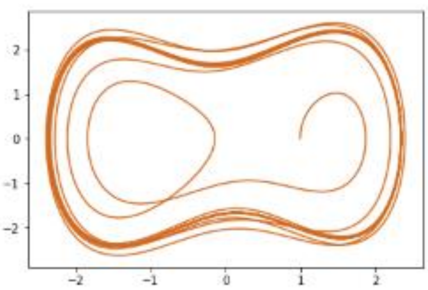
Resultados

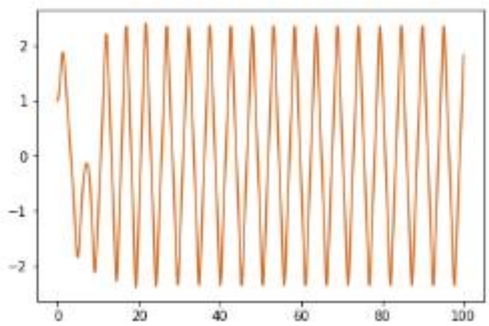
Gamma=0.28





Gamma=0.5





Conclusión

En los diagramas de posición contra tiempo mostrados, así como retratos de fase, podemos observar cómo al variar ligeramente uno de los parámetros de la ecuación obtenemos comportamientos sumamente diferentes, especialmente si comparamos $\gamma = 0{,}20$ con $\gamma = 0{,}65$. Estos son ejemplos de comportamientos caóticos, mostrando que la ecuación de Duffing exhibe este tipo de conducta.