

Análisis y Aplicaciones de las EDO en el Problema del Nadador

Kamila Reinoso Asin
Grupo CC-211

KAMILA.REINOSO@ESTUDIANTES.MATCOM.UH.CU

Juan Carlos Yern Espinosa
Grupo CC-211

JUAN.CYERN@ESTUDIANTES.MATCOM.UH.CU

Ana Laura Hernández Cutiño
Grupo CC-211

HERNANDEZANALURA376@GMAIL.COM

Tutor(es):

MSc. Ania Mesa, Facultad de Matemática y Computación

Resumen

En este proyecto se integran ecuaciones diferenciales ordinarias y métodos numéricos para modelar sistemas dinámicos. Comienza con el problema del nadador en un río, donde se deriva la ecuación diferencial y se visualiza mediante isoclinas. Luego se aplican métodos numéricos (Euler, Euler mejorado y Runge-Kutta) analizando su estabilidad y convergencia. Se verifica que el problema esté bien planteado y se estudia la estabilidad de los esquemas numéricos. Adicionalmente, se construye un diagrama de bifurcación identificando el tipo de bifurcación y su interpretación cualitativa. Finalmente, se analiza el plano de fase de un sistema de ecuaciones, clasificando puntos críticos y describiendo el comportamiento global. Se demuestra la sinergia entre el análisis cualitativo y cuantitativo en el estudio de sistemas dinámicos.

Abstract

It bridges ordinary differential equations (ODEs) with numerical analysis to study dynamical systems. It begins with the swimmer problem in a river, deriving the governing ODE and visualizing solutions through isoclines. Numerical methods—Euler, improved Euler, and Runge-Kutta—are implemented and compared, analyzing their stability, convergence, and accuracy. The project verifies the problem's well-posedness and examines numerical scheme stability. A bifurcation analysis identifies bifurcation types and their qualitative implications. Finally, phase plane analysis of ODE systems classifies critical points and characterizes global dynamics. The work demonstrates the synergy between analytical and computational approaches in understanding complex mathematical models, highlighting how numerical methods complement qualitative analysis in studying dynamical behavior across different mathematical contexts. The integrated approach provides valuable insights into both theoretical and practical aspects of differential equations and numerical computation.

Palabras Clave: ecuaciones diferenciales ordinarias, métodos numéricos, isoclinas, Runge–Kutta, Euler mejorado, bifurcación transcritica, plano de fase, estabilidad y convergencia.

Tema: Ecuaciones diferenciales ordinarias, Análisis cualitativo y métodos numéricos de sistemas dinámicos.

1. Breve Explicación del Problema del Nadador

Se tiene un río que fluye hacia el norte. Sus orillas son las rectas $x = \pm a$, con un ancho de $w = 2a$ y el eje y su centro.

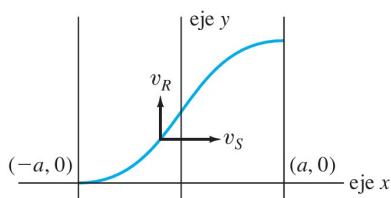


Figura 1: Problema del nadador

Se supone que la velocidad v_R a la cual el agua fluye

se incrementa conforme se acerca al centro del río, y en realidad está dada en términos de la distancia x desde el centro por:

$$v_R = v_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

Es posible utilizar la ecuación para verificar que el agua fluye más rápido en el centro, donde $v_R = v_0$, y que $v_R = 0$ en cada orilla del río.

Se supone que un nadador inicia en el punto $(-a, 0)$ de la orilla oeste y nada hacia el este (en relación con el agua) con una velocidad constante v_S . Su vector de velocidad (relativo al cauce del río) tiene una componente horizontal v_S y una componente vertical v_R . En consecuencia, el ángulo de dirección α del nadador está dado por:

$$\tan \alpha = \frac{v_R}{v_S}$$

Como $\tan \alpha = dy/dx$ entonces se sustituye la primera ecuación en esta, quedando la ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_R}{v_S} = \frac{v_0}{v_S} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

Esta ecuación se puede resolver fácilmente usando el método de variables separables.

1.1 Solución de la Ecuación Diferencial

1.1.1 PASO 1: SEPARACIÓN DE VARIABLES

Se separan las variables y y x :

$$dy = \frac{v_0}{v_S} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$$

1.1.2 PASO 2: INTEGRACIÓN

Se integran ambos lados:

$$\int dy = \frac{v_0}{v_S} \int \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$$

1.1.3 PASO 3: RESOLVER LAS INTEGRALES

La integral del lado izquierdo es directa:

$$\int dy = y + C_1$$

La integral del lado derecho:

$$\int \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \int 1 dx - \frac{1}{a^2} \int x^2 dx = x - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3} + C_2$$

1.1.4 PASO 4: UNIR LOS RESULTADOS

Combinando ambos resultados:

$$y = \frac{v_0}{v_S} \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) + C$$

donde $C = C_1 - \frac{v_0}{v_S} C_2$ es la constante de integración.

1.1.5 PASO 5: APLICAR CONDICIÓN INICIAL

El nadador parte del punto $(-a, 0)$, es decir, cuando $x = -a$, $y = 0$:

$$0 = \frac{v_0}{v_S} \left(-a - \frac{(-a)^3}{3a^2}\right) + C$$

$$0 = \frac{v_0}{v_S} \left(-a + \frac{a}{3}\right) + C$$

$$C = \frac{2a}{3} \cdot \frac{v_0}{v_S}$$

1.1.6 PASO 6: SOLUCIÓN FINAL

Sustituyendo el valor de C :

$$y = \frac{v_0}{v_S} \left(x - \frac{x^3}{3a^2} + \frac{2a}{3}\right)$$

1.2 Ejemplo

Se supone que el río tiene 1 mi de ancho y la velocidad en su parte central $v_0 = 9$ mi/h. Si la velocidad del nadador es $v_S = 3$ mi/h, entonces la ecuación toma la forma $\frac{dy}{dx} = 3(1 - 4x^2)$.

La integración resulta en:

$$y(x) = \int (3 - 12x^2) dx = 3x - 4x^3 + C$$

Para la condición inicial $y(-\frac{1}{2}) = 0$ hace que $C = 1$, y así:

$$y(x) = 3x - 4x^3 + 1$$

Entonces:

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right) - 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 2$$

Por lo que el nadador es llevado por la corriente 2 millas río abajo, mientras que nada 1 milla a lo ancho del río.

2. Problema del Nadador en el Proyecto

En este caso el problema del nadador es muy similar al explicado antes. En este proyecto la ecuación diferencial obtiene la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_0}{v_S} \left(1 - \frac{x^4}{a^4}\right)$$

Se puede resolver similar a la ecuación diferencial en la sección anterior. Por lo que la solución general a esta ecuación sería:

$$y(x) = \frac{v_0}{v_S} \left(x - \frac{x^5}{5a^4}\right) + C$$

donde C es la constante de integración.

2.1 Ejemplo

Utilizando los mismos valores del ejemplo anterior se tiene que la ecuación diferencial toma la forma $\frac{dy}{dx} = 3(1 - 16x^4)$.

Se halla entonces el valor de la constante de integración C usando la condición inicial $y(-1/2) = 0$.

2.1.1 CÁLCULO DE LA CONSTANTE C

Se sustituyen los valores en la condición inicial $y(-\frac{1}{2}) = 0$:

$$0 = \frac{9}{3} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^5}{5\left(\frac{1}{2}\right)^4}\right) + C$$

$$0 = 3 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{32}}{\frac{5}{16}}\right) + C$$

$$0 = 3 \left(-\frac{2}{5}\right) + C$$

$$0 = -\frac{6}{5} + C$$

Por último se despeja a C y se obtiene la curva solución que pasa por el punto $(-1/2, 0)$:

$$C = \frac{6}{5}$$

2.1.2 SOLUCIÓN PARTICULAR

La solución particular con los valores dados es:

$$y(x) = 3 \left(x - \frac{x^5}{5 \cdot (\frac{1}{2})^4} \right) + \frac{6}{5}$$

Simplificando:

$$y(x) = 3 \left(x - \frac{x^5}{5 \cdot \frac{1}{16}} \right) + \frac{6}{5}$$

$$y(x) = 3 \left(x - 16 \cdot \frac{x^5}{5} \right) + \frac{6}{5}$$

$$y(x) = 3x - \frac{48}{5}x^5 + \frac{6}{5}$$

2.1.3 EVALUACIÓN EN $x = \frac{1}{2}$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \frac{1}{2} - \frac{48}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{6}{5}$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{10} - \frac{3}{10} + \frac{12}{10} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$

2.1.4 RESULTADO FINAL

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{12}{5} = 2.4$$

2.1.5 INTERPRETACIÓN

Con los valores dados:

- El nadador es llevado por la corriente 2.4 millas río abajo,
- Nada 1 milla a lo ancho del río (desde $x = -\frac{1}{2}$ hasta $x = \frac{1}{2}$),
- La relación $\frac{v_0}{v_s} = 3$ indica que la corriente máxima es el triple de la velocidad del nadador.

3. Método de las Isoclinas

El método de las isoclinas se usa frecuentemente para poder graficar el comportamiento de las soluciones de una ecuación diferencial sin necesidad de resolverla. Consiste en encontrar curvas en el plano xy donde la pendiente de la solución es constante.

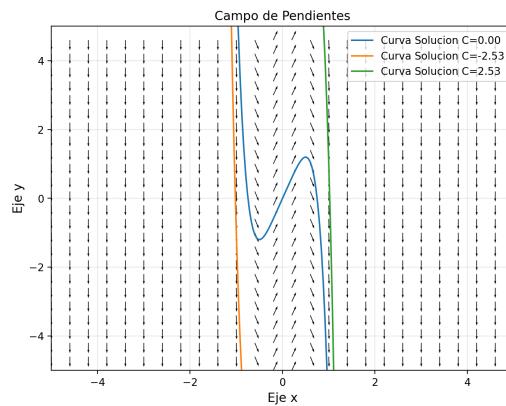


Figura 2: Método Gráfico de Isoclinas

3.1 Análisis Cualitativo

En el centro del río la pendiente es máxima y conforme se acerca a las orillas la pendiente disminuye hasta llegar a ser cero. Esto indica que la velocidad del agua es máxima en el centro y mínima en las orillas. El patrón es simétrico, por lo cual la función se comporta de manera similar a ambos lados del centro del río.

4. Métodos Numéricicos

Existen formas de obtener el valor de un punto x sin necesidad de resolver la ecuación diferencial, solo se necesita conocer el valor de la función en un punto x_0 . Estos son los llamados métodos numéricicos, los más comunes actualmente son: Euler, Euler Mejorado y Runge-Kutta de orden 4.

4.1 Método de Euler

El método de Euler es un método numérico sencillo para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. Consiste en aproximar la solución de la ecuación utilizando una serie de pasos pequeños.

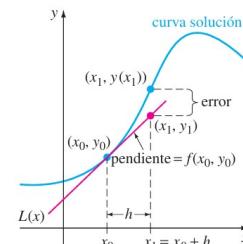


Figura 3: Método de Euler

El método de Euler utiliza la recta tangente a la curva solución en un punto para poder ir aproximándose a la función real. Dado un punto (x_0, y_0) y un incremento h se mueve en la función usando:

$$L(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Este método depende mucho del incremento que se escoja dado que para un h muy pequeño la aproximación será mucho mejor.

Para la EDO: $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ con condición inicial $y(t_0) = y_0$, el método de Euler explícito es:

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$$

donde h es el tamaño del paso.

4.1.1 CONSISTENCIA (¿ESTÁ BIEN PLANTEADO?)

Error Local de Truncamiento: El error de truncamiento local τ_n es:

$$\tau_n = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - f(t_n, y(t_n))$$

Análisis de Consistencia: Usando expansión de Taylor alrededor de t_n :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_n)$$

Sustituyendo:

$$\tau_n = \frac{h}{2}y''(\xi_n) = O(h)$$

Conclusión: El método es consistente de orden 1.

4.1.2 ESTABILIDAD

Ecuación Test para Análisis: Considerando la ecuación test: $y' = \lambda y$ con $\text{Re}(\lambda) < 0$.

Se aplica Euler:

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_n = (1 + h\lambda)y_n$$

Factor de Amplificación: El factor de amplificación es:

$$G = 1 + h\lambda$$

Condición de Estabilidad: Para estabilidad absoluta:

$$|1 + h\lambda| \leq 1$$

Región de Estabilidad: La región de estabilidad en el plano complejo es un círculo de radio 1 centrado en -1 .

Evaluación General:

- **Consistencia:** Sí está bien planteado (es consistente de orden 1),
- **Estabilidad:** Condicionalmente estable,
- **Convergencia:** Por el Teorema de Lax, es convergente de orden 1,
- **Complejidad Temporal:** $O(n)$ donde $n = (x_f - x_0)/h$.

Limitaciones Prácticas:

4.2 Método de Euler Mejorado

El método de Euler Mejorado es mejor que el método de Euler en aproximaciones. Este método, dado un punto inicial (x_0, y_0) , utiliza las fórmulas:

$$y_{n+1}^* = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)]$$

4.2.1 ¿POR QUÉ ESTÁ BIEN PLANTEADO?

El método de Euler mejorado está **bien planteado** porque satisface:

1. Consistencia:

$$\tau(h) = O(h^2) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } h \rightarrow 0$$

2. **Estabilidad Cero:** El método es estable para una clase más amplia de problemas que Euler simple.

3. **Convergencia:** Por el **Teorema de Lax**, al ser consistente y estable, es convergente.

4.2.2 ORDEN DE CONVERGENCIA

Error Local de Truncamiento:

$$\tau_n = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - \frac{1}{2}[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n + hf(t_n, y_n))]$$

Expandiendo en serie de Taylor:

$$\tau_n = O(h^2)$$

Error Global:

$$\max |y_n - y(t_n)| = O(h^2)$$

Conclusión: Método de **orden 2**.

4.2.3 COMPLEJIDAD TEMPORAL

Por Paso:

- **2 evaluaciones** de la función $f(t, y)$ por iteración.
- **Operaciones aritméticas:** $O(1)$ por paso.

Complejidad Total: Para $N = \frac{T}{h}$ pasos:

$$C_{\text{total}} = O(N) = O\left(\frac{1}{h}\right)$$

4.2.4 RELACIÓN PRECISIÓN VS COSTO COMPUTACIONAL

- **Costo por unidad de precisión:** $O(1/\sqrt{\epsilon})$.
- **Eficiencia:** Mejor que Euler simple para misma precisión.
- **Compromiso:** Mayor costo por paso que Euler, pero menos pasos para misma precisión.

4.3 Método de Runge-Kutta (RK4)

4.3.1 IDEA FUNDAMENTAL

Los métodos Runge-Kutta son técnicas de un **paso** que aproximan la solución de EDOs mediante combinaciones de evaluaciones de la función en puntos intermedios, evitando el cálculo de derivadas superiores.

4.3.2 RUNGE-KUTTA CLÁSICO (RK4)

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

4.3.3 ¿POR QUÉ ESTÁ BIEN PLANTEADO?

- **Consistencia:** Error local de truncamiento $O(h^5)$.
- **Estabilidad:** Región de estabilidad más amplia que Euler.
- **Convergencia:** Orden 4 garantizado por consistencia + estabilidad.

4.3.4 ORDEN DE CONVERGENCIA

- **Error local:** $O(h^5)$.
- **Error global:** $O(h^4) \rightarrow$ **Método de orden 4**.
- Reduciendo h a la mitad, el error disminuye ≈ 16 veces.

4.3.5 COMPLEJIDAD TEMPORAL

- **Por paso:** 4 evaluaciones de $f(x, y)$.
- **Total:** $O(1/h)$ operaciones para intervalo $[a, b]$.
- **Eficiencia:** Óptimo para alta precisión con h moderado.

4.3.6 VENTAJAS CLAVE

- **Alta precisión** con tamaño de paso razonable.
- **Autónomo:** No necesita información de pasos anteriores.
- **Fácil implementación** vs métodos multipaso.
- **Versátil:** Aplicable a sistemas de EDOs.

4.3.7 LIMITACIONES

- **Costo computacional:** 4 evaluaciones por paso.
- **Estabilidad condicional** en problemas stiff.
- **No adaptativo** en versión básica.

4.4 Análisis de los Resultados

Como se observa en la Tabla 1, cada método numérico presenta características distintivas que los hacen adecuados para diferentes aplicaciones:

Cuadro 1: Comparación de Métodos Numéricos

Característica	Euler	Euler M.	RK4
Orden	1	2	4
Error	$O(h)$	$O(h^2)$	$O(h^4)$
Eval/paso	1	2	4
Estabilidad	Condisional	Mejor	Mayor
Precisión	Baja	Media	Alta
Costo	Bajo	Medio	Alto

4.4.1 PRIMER ELEMENTO: MÉTODO DE EUULER

Descripción: Es el método más básico que utiliza una aproximación lineal mediante la recta tangente en el punto inicial. Su simplicidad lo hace ideal para introducciones educativas y problemas donde la precisión no es crítica.

4.4.2 SEGUNDO ELEMENTO: EUULER MEJORADO

Descripción: Este método implementa un esquema predictor-corregidor que promedia las pendientes en los puntos inicial y final del intervalo, duplicando el orden de convergencia respecto al método de Euler simple.

4.4.3 TERCER ELEMENTO: RUNGE-KUTTA 4

Descripción: Emplea cuatro evaluaciones de la función por paso para lograr un alto orden de convergencia, siendo el método preferido en aplicaciones que requieren precisión elevada sin la complejidad de métodos multipaso.

4.5 Conclusión

La elección del método numérico adecuado debe basarse en el equilibrio entre precisión requerida, costo computacional aceptable y complejidad de implementación, considerando las características específicas del problema a resolver.

5. Análisis de Bifurcación en Modelo de Velocidad

5.1 Planteamiento del Problema

Se considera la ecuación diferencial ordinaria unidimensional con un parámetro real μ :

$$\frac{dz}{dt} = \mu z - z^2 = z(\mu - z) \quad (1)$$

donde μ representa la efectividad del avance. Esta ecuación sirve como *forma normal* para describir un intercambio de estabilidad entre dos ramas de equilibrio y aparece frecuentemente en modelos sencillos de población, dinámica de control y problemas de transferencia efectiva de pulso/velocidad.

En el contexto del *problema del nadador* que se aborda, se interpreta $z(t)$ como una velocidad vertical o escalar efectiva —por ejemplo la componente neta de avance resultante de la relación entre la capacidad de nado/control del nadador y la corriente— y μ como un parámetro que mide la *efectividad relativa* del nadador frente a la corriente (o la ganancia del control de rumbo). El objetivo de esta parte es:

- hallar los puntos de equilibrio en función de μ ;
- analizar su existencia y propiedades cualitativas;
- preparar la construcción del diagrama de bifurcación en el plano (μ, z) y su interpretación física.

Por claridad, se observa de entrada que la ecuación (1) es un caso autónomo y escalar, por lo que su comportamiento cualitativo puede caracterizarse completamente por el estudio de los puntos críticos, la derivada de la función vector campo y las trayectorias en la recta real.

5.2 Puntos de Equilibrio

Los puntos de equilibrio (o puntos críticos) se obtienen resolviendo

$$\mu z - z^2 = 0.$$

Factorizando la expresión obtenemos

$$z(\mu - z) = 0,$$

de donde las soluciones son

$$z_1(\mu) = 0, \quad z_2(\mu) = \mu. \quad (2)$$

Observaciones inmediatas:

1. Ambas ramas de equilibrio existen para todo $\mu \in \mathbb{R}$. Las dos ramas se intersectan en el punto $(\mu, z) = (0, 0)$.
2. La rama $z_1(\mu) = 0$ es la *rama trivial*; la rama $z_2(\mu) = \mu$ es la *rama no trivial* (depende linealmente de μ).
3. El punto de bifurcación candidato es $\mu_c = 0$, puesto que en ese valor las dos soluciones coinciden y se espera un intercambio de estabilidad (esto será verificado mediante análisis lineal en la sección siguiente).

5.3 Análisis de Estabilidad

Para estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio (2) calculamos la derivada del campo

$$f(z) = \mu z - z^2, \quad f'(z) = \mu - 2z.$$

La estabilidad local de un equilibrio en un sistema autónomo escalar se determina por el signo de f' en dicho equilibrio. Evaluando en las dos ramas obtenemos:

$$f'(z_1) = f'(0) = \mu, \quad f'(z_2) = f'(\mu) = \mu - 2\mu = -\mu.$$

Casos y conclusiones:

- Para la rama $z_1 = 0$:
 - Si $\mu < 0$, entonces $f'(0) < 0$ y $z = 0$ es *estable* (atractor).
 - Si $\mu > 0$, entonces $f'(0) > 0$ y $z = 0$ es *inestable* (repulsor).
- Para la rama $z_2 = \mu$:
 - Si $\mu < 0$, entonces $f'(\mu) = -\mu > 0$ y $z = \mu$ es *inestable*.
 - Si $\mu > 0$, entonces $f'(\mu) = -\mu < 0$ y $z = \mu$ es *estable*.

Por tanto, al atravesar $\mu = 0$ se produce un intercambio de estabilidad entre las ramas $z = 0$ y $z = \mu$. Esto se confirma también con un análisis gráfico sencillo en la recta real (diagrama de líneas de fase) para valores representativos de μ .

5.4 Diagrama de Bifurcación

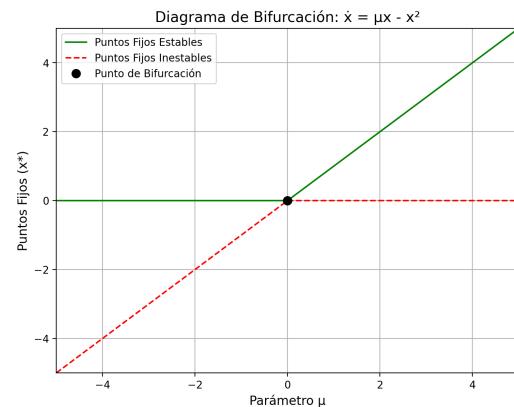


Figura 4: Diagrama de bifurcación transcrítica

5.5 Interpretación física cualitativa

Se discute en detalle el significado físico de las soluciones y la dependencia con el parámetro μ . Recordando la ecuación

$$\dot{z} = \mu z - z^2 = z(\mu - z),$$

se interpreta $z(t)$ como la magnitud efectiva de avance (componente neta de velocidad o capacidad de avanzar del nadador) y μ como un parámetro de *efectividad relativa* —puede representar, por ejemplo, la diferencia entre la fuerza de propulsión/control del nadador y la intensidad de la corriente, o bien una ganancia en un esquema de control de rumbo.

5.5.1 SIGNIFICADO DE LAS RAMAS DE EQUILIBRIO

Las dos ramas de equilibrio $z = 0$ y $z = \mu$ permiten lecturas físicas claras:

- $z = 0$ (rama trivial). Representa el estado sin avance neto: el nadador no consigue progresar aguas arriba (o su avance neto es nulo). Es la solución “no-desplazamiento”.

- $z = \mu$ (rama no trivial). Para $\mu > 0$ esta rama es positiva y representa un avance sostenido cuyo valor crece linealmente con la eficacia μ . Para $\mu < 0$ la rama es negativa (avance en sentido contrario o ausencia de interpretación física si se restringe $z \geq 0$).

5.5.2 CAMBIO DE SIGNO DE μ — UMBRAL Y CONSECUENCIAS

El punto crítico $\mu_c = 0$ es el umbral entre dos regímenes cualitativamente distintos:

- De $\mu < 0$ a $\mu > 0$: El sistema pasa de un régimen donde no puede avanzar a uno donde sí puede. La velocidad estable cambia de cero a un valor positivo proporcional a μ .
- De $\mu > 0$ a $\mu < 0$: El sistema pierde la capacidad de avanzar y se estabiliza en reposo. Esto podría representar, por ejemplo, un nadador que ya no puede contrarrestar la corriente.
- En $\mu = 0$: Situación crítica donde ambos equilibrios coinciden y hay indiferencia entre avanzar o no avanzar.

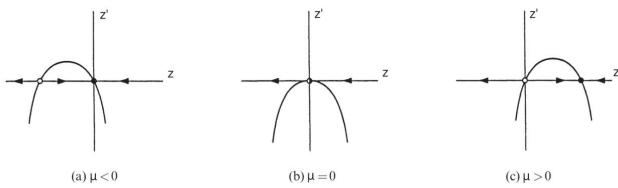


Figura 5: Diagrama de línea de fase

6. Sistemas autónomos, plano de fase y estabilidad

6.1 Sistemas autónomos

Un **sistema autónomo** se define como aquel conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias en el que la evolución depende únicamente de las variables de estado y no explícitamente del tiempo. Formalmente, puede escribirse como:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y)\end{aligned}$$

donde f y g son funciones continuamente diferenciables.

Analicemos el siguiente sistema autónomo según ciertos criterios que se introducirán paso a paso:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= v, \\ \frac{dv}{dt} &= -3v - 4y.\end{aligned}$$

En su forma matricial:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

El estudio de sistemas autónomos se apoya en el **plano de fase** como herramienta central para visualizar y comprender la evolución temporal de un sistema en función de sus variables de estado.

En este espacio bidimensional, cada punto representa un estado posible del sistema, mientras que las trayectorias que son curvas paramétricas $(x(t), y(t))$ que satisfacen el sistema, muestran cómo dicho estado cambia con el tiempo bajo la acción de las ecuaciones diferenciales que lo gobiernan. Posee además un campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ indica la dirección del flujo. Esta representación no sólo facilita la interpretación cualitativa de la dinámica, sino que también permite identificar patrones globales de comportamiento.

6.2 Puntos Críticos o de Equilibrio

Un punto crítico o punto de equilibrio (x_0, y_0) es una solución constante del sistema, es decir:

$$\begin{aligned}f(x_0, y_0) &= 0 \\ g(x_0, y_0) &= 0\end{aligned}$$

Geométricamente, es un punto donde el campo vectorial se anula, por lo que si el sistema alcanza ese estado, permanece en él indefinidamente.

Resolvamos los puntos críticos para el sistema antes dado :

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= v = 0 \\ \frac{dv}{dt} &= -3v - 4y = 0 \\ \begin{cases} v = 0 \\ -3v - 4y = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

De la primera ecuación obtenemos directamente:

$$v = 0.$$

Sustituyendo $v = 0$ en la segunda ecuación:

$$-3(0) - 4y = 0 \Rightarrow -4y = 0 \Rightarrow y_0 = 0.$$

Por lo tanto, el único punto crítico es:

$$(y, v) = (0, 0).$$

6.3 Estabilidad

Para estudiar la **estabilidad** de un punto de equilibrio, se analiza el comportamiento de las soluciones cercanas a dicho punto. Formalmente:

- El equilibrio (x_0, y_0) es **estable** si, para cualquier vecindad del punto, existe una región más pequeña tal que toda trayectoria que comience en ella permanece cerca del equilibrio para todo tiempo futuro.

- Es **asintóticamente estable** si además de ser estable, las trayectorias tienden al equilibrio cuando $t \rightarrow \infty$.
- Es **inestable** si existe al menos una trayectoria que, partiendo arbitrariamente cerca del equilibrio, se aleja de él con el tiempo.

En sistemas lineales de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x},$$

la estabilidad se determina a partir de los **valores propios** de la matriz A :

- Si todos los valores propios tienen parte real negativa, el equilibrio es **asintóticamente estable**.
- Si al menos un valor propio tiene parte real positiva, el equilibrio es **inestable**.
- Si los valores propios tienen parte real no positiva y alguno es puramente imaginario, el equilibrio es **estable** pero no asintóticamente estable.

6.3.1 EJEMPLO APLICADO AL SISTEMA DADO

Para el sistema

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix},$$

los valores propios se obtienen resolviendo

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0.$$

Las raíces son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 16}}{2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{2}.$$

Como ambos valores propios tienen parte real negativa ($-3/2$), concluimos que:

El equilibrio en $(0, 0)$ es asintóticamente estable.

6.4 Clasificación de los equilibrios en sistemas lineales

La naturaleza del equilibrio en sistemas bidimensionales lineales se determina a partir del trazo $\text{tr}(A)$ y el determinante $\Delta = \det(A)$. El polinomio característico es:

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \Delta = 0.$$

Según la relación entre $(\text{tr}(A))^2$ y 4Δ , se obtiene la siguiente clasificación:

- $(\text{tr}(A))^2 > 4\Delta$:

- Raíces reales, distintas y negativas \Rightarrow Nodo estable.

- Raíces reales, distintas y positivas \Rightarrow Nodo inestable.

- Raíces reales de signos opuestos \Rightarrow Punto de silla (inestable).

- $(\text{tr}(A))^2 = 4\Delta$:

- Raíces reales, iguales $< 0 \Rightarrow$ Nodo estable (impropio).
- Raíces reales, iguales $> 0 \Rightarrow$ Nodo inestable (impropio).

- $(\text{tr}(A))^2 < 4\Delta$:

- Raíces complejas, parte real $< 0 \Rightarrow$ Foco estable (espiral convergente).
- Raíces complejas, parte real $> 0 \Rightarrow$ Foco inestable (espiral divergente).
- Raíces complejas, parte real $= 0 \Rightarrow$ Centro (órbitas cerradas).

Para nuestro caso obtuvimos raíces complejas:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{2}.$$

La parte real es negativa ($-3/2$), por lo que:

El equilibrio en $(0, 0)$ es un foco estable (espiral convergente).

A continuación el plano de fase del sistema planteado:

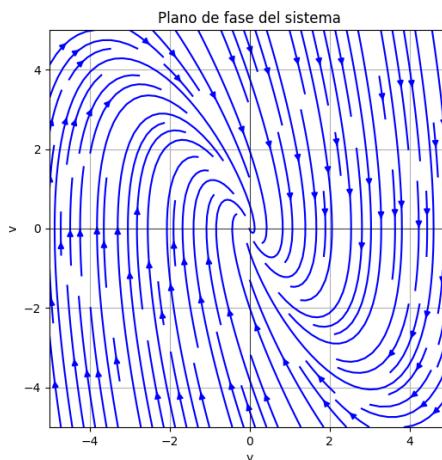


Figura 6: Plano de Fase

6.5 Importancia del plano de fase

El plano de fase no sólo proporciona una representación visual de la dinámica, sino que también permite:

- Identificar regiones de atracción y repulsión.
- Reconocer trayectorias periódicas o ciclos límite.
- Comparar el comportamiento de sistemas lineales y no lineales.

- Anticipar fenómenos globales como bifurcaciones o transiciones de estabilidad.

En síntesis, el plano de fase y el concepto de estabilidad constituyen la base para el análisis cualitativo de sistemas autónomos. Esta perspectiva será esencial para los ejercicios que se desarrollarán en las siguientes secciones, donde se aplicarán estas nociones a ejemplos concretos.

7. Conclusiones

- Se derivaron y resolvieron analíticamente dos variantes del *problema del nadador* (perfil $1 - x^2/a^2$ y perfil $1 - x^4/a^4$), obteniéndose expresiones explícitas para las trayectorias que permiten interpretar cuantitativamente el arrastre por la corriente.
- La comparación de métodos numéricos mostró la relación clásica entre orden y coste: Euler (orden 1) es sencillo pero poco preciso; Euler mejorado (orden 2) mejora significativamente la precisión con un coste moderado; RK4 (orden 4) ofrece alta precisión a costa de más evaluaciones por paso.
- Los análisis de consistencia, estabilidad y convergencia confirman que los esquemas implementados son adecuados para problemas no *stiff*. Para problemas con rigidez habría que considerar métodos implícitos o solvers adaptativos.
- El estudio de bifurcación de la ecuación $\dot{z} = \mu z - z^2$ revela una bifurcación *transcrítica* en $\mu = 0$, con intercambio de estabilidad entre las ramas $z = 0$ y $z = \mu$. Esto tiene interpretación física clara en el contexto del problema: existe un umbral de efectividad μ que determina si el nadador puede mantener avance neto o no.
- El análisis del plano de fase para el sistema lineal propuesto mostró valores propios conjugados con parte real negativa, por lo que el equilibrio $(0, 0)$ es un *foco asintóticamente estable* (espiral convergente), corroborado en la gráfica del campo vectorial.
- En conjunto, el trabajo evidencia la sinergia entre análisis cualitativo (isoclinas, bifurcación, plano de fase) y métodos cuantitativos (integración numérica) para comprender la dinámica del sistema.

8. Recomendaciones

1. Añadir comparaciones numéricas cuantitativas (tablas y gráficas de error) entre los métodos: error global frente a h , y tiempos de CPU para distintos h , para justificar la elección práctica de un método.
2. Incluir pruebas de convergencia (p. ej. cálculo del cociente de razones al reducir h) y curvas log-log de error vs paso para verificar los órdenes teóricos observados.
3. Incorporar un estudio de sensibilidad respecto a parámetros relevantes (por ejemplo la relación v_0/v_S y el ancho del río a) y barridos de parámetros para la bifurcación μ .
4. Para problemas potencialmente stiff, valorar métodos implícitos (Backward Euler, BDF) o integradores con paso adaptativo (RK45 con control de error) y documentar cuándo son necesarios.
5. Mejorar el modelo físico si se desea mayor realismo: perfiles de velocidad más complejos (p. ej. medidos experimentalmente), inclusión de dependencias temporales o ruido, y validación con datos/experimentos si están disponibles.

Referencias

- [1] D. G. Zill, *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications*, 9th ed., Brooks/Cole (Cengage Learning), Belmont, CA, 2009.
- [2] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2nd ed., CRC Press / Taylor & Francis Group, Boca Raton, FL, 2018.
- [3] C. H. Edwards and D. E. Penney, *Calculus*, 6th ed., Prentice Hall (Pearson), Upper Saddle River, NJ, 2002.