Informe del Proyecto de Ecuaciones Diferenciaes Ordinarias y Matematica Numerica

Kamila Reinoso Asin KAMILA.REINOSO@ESTUDIANTES.MATCOM.UH.CU
Grupo CC-211

Juan Carlos Yern Espinosa JUAN.CYERN@ESTUDIANTES.MATCOM.UH.CU
Grupo CC-211

Ana Laura Hernandez Cutiño HERNANDEZANALAURA376@GMAIL.COM
Grupo CC-211

Tutor(es):
Dr. Tutor Uno, *Centro*
Lic. Tutor Dos, *Centro*

Resumen

El resumen en español debe constar de 100 a 200 palabras y presentar de forma clara y concisa el contenido fundamental del artículo.

Abstract

The English abstract must have have 100 to 200 words, and present the essentials of the article content in a clear and concise form.

Palabras Clave: Separadas, Por, Comas.
Tema: Tema, Subtema.

1. Breve Explicacion del Problema del Nadador

Tenemos un rio que fluye hacia el norte. Sus orillas son las rectas $x = \pm a$, con un acho de w = 2a y el eje y su centro.

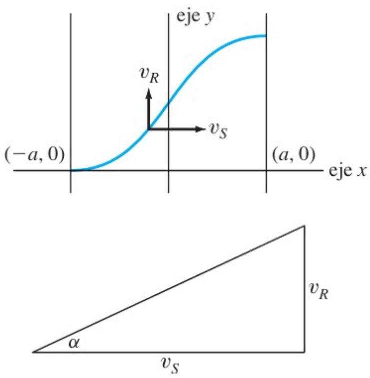

Figura 1: Problema del nadador

Supóngase que la velocidad v_R a la cual el agua fluye se incrementa conforme se acerca al centro del río, y en realidad está dada en términos de la distancia x desde el centro por

$$v_R = v_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

Se puede utilizar la ecuación para verificar que el agua fluye más rápido en el centro, donde $v_R = v_0$, y que v_R= 0 en cada orilla del río. Supóngase que un nadador inicia en el punto (-a, 0) de la orilla oeste y nada hacia el este (en relación con el agua) con una velocidad constante v_S. Su vector de velocidad (relativo al cauce del río) tiene una componente horizontal v_S y una componente vertical v_R. En consecuencia, el ángulo de dirección a del nadador está dado por

$$\tan\alpha = \frac{v_R}{v_S}$$

Como sabemos la $\tan\alpha = dy/dx$ entonces podemos sustituirla por la primera ecuacion en esta quedandonos la ecuacion diferecial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_R}{v_S} = \frac{v_0}{v_S}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

Observemos que esta ecuacion se puede resolver facilmente usando por el metodo de vaiables separables

Resolviendo la ecuacion diferecial:

1.1 Paso 1: Separación de variables

Separamos las variables y y x:

$$dy = \frac{v_0}{v_S}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$$

1.2 Paso 2: Integración

Integramos ambos lados:

$$\int dy = \frac{v_0}{v_S} \int \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$$

1.3 Paso 3: Resolver las integrales

La integral del lado izquierdo es directa:

$$\int dy = y + C_1$$

La integral del lado derecho:

$$\int \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \int 1\, dx - \frac{1}{a^2} \int x^2\, dx = x - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3} + C_2$$

1.4 Paso 4: Unir los resultados

Combinando ambos resultados:

$$y = \frac{v_0}{v_S} \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) + C$$

donde $C = C_1 - \frac{v_0}{v_S} C_2$ es la constante de integración.

1.5 Paso 5: Aplicar condición inicial

El nadador parte del punto $(-a, 0)$, es decir, cuando $x = -a$, $y = 0$:

$$0 = \frac{v_0}{v_S} \left(-a - \frac{(-a)^3}{3a^2}\right) + C$$

$$0 = \frac{v_0}{v_S} \left(-a + \frac{a^3}{3a^2}\right) + C$$

$$0 = \frac{v_0}{v_S} \left(-a + \frac{a}{3}\right) + C$$

$$0 = \frac{v_0}{v_S} \left(-\frac{2a}{3}\right) + C$$

$$C = \frac{2a}{3} \cdot \frac{v_0}{v_S}$$

1.6 Paso 6: Solución final

Sustituyendo el valor de C:

$$y = \frac{v_0}{v_S} \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) + \frac{2a}{3} \cdot \frac{v_0}{v_S}$$

$$y = \frac{v_0}{v_S} \left(x - \frac{x^3}{3a^2} + \frac{2a}{3}\right)$$

1.7 Ejemplo

Supóngase que el río tiene 1 mi de ancho y la velocidad en su parte central $v_0 = 9$ mi/h. Si la velocidad del nadador es $v_S = 3$ mi/h, entonces la ecuación toma la forma $\frac{dy}{dx} = 3(1 - 4x^2)$ La integración resulta en:

$$y(x) = \int (3 - 12x^2)\, dx = 3x - 4x^3 + C$$

Para la condición inicial $y\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ hace que $C = 1$, y así:

$$y(x) = 3x - 4x^3 + 1$$

Entonces:

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right) - 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 2$$

Así que el nadador es llevado por la corriente 2 millas río abajo, mientras que nada 1 milla a lo ancho del río.

2. Problema del Nadador en el proyecto

En nuestro caso el problema del nadador es muy similar a lo explicado antes. En este proyecto la ecuacion diferencial obtiene la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_0}{v_S} \left(1 - \frac{x^4}{a^4}\right)$$

La manera en que la podemos resolver es similar a como resolvimos la ecuacion diferencial en la seccion anterior. Por lo que la solucion general a esta ecuacion seria

$$y(x) = \frac{v_0}{v_S} \left(x - \frac{x^5}{5a^4}\right) + C$$

donde C es la constante de integración.

2.1 Ejemplo

Utilizandose los mismos valores del ejemplo (1.7) tenemos que la ecuacion diferencial toma la forma $\frac{dy}{dx} = 3(1 - 16x^4)$ Encontremos entonces el valor de la contante de integracion C usando la condicion inicial $y(-1/2) = 0$.

2.2 Cálculo de la Constante C

Sustituimos los valores en la condición inicial $y\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$:

$$0 = \frac{9}{3} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^5}{5\left(\frac{1}{2}\right)^4}\right) + C$$

$$\frac{v_0}{v_S} = \frac{9}{3} = 3$$

$$0 = 3 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^5}{5\left(\frac{1}{2}\right)^4}\right) + C$$

$$0 = 3 \left(-\frac{1}{2} - \frac{-\frac{1}{32}}{5 \cdot \frac{1}{16}}\right) + C$$

$$0 = 3 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{32}}{\frac{5}{16}}\right) + C$$

$$0 = 3 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\right) + C$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{10} = -\frac{5}{10} + \frac{1}{10} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$$

$$0 = 3 \left(-\frac{2}{5}\right) + C$$

$$0 = -\frac{6}{5} + C$$

Como ultimo paso despejamos a C y obtendremos la curva solucion que pasa por el punto (-1/2,0)

$$C = \frac{6}{5}$$

2.3 Paso 6: Solución Particular

La solución particular con los valores dados es:

$$y(x) = 3\left(x - \frac{x^5}{5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4}\right) + \frac{6}{5}$$

Simplificando:

$$y(x) = 3\left(x - \frac{x^5}{5 \cdot \frac{1}{16}}\right) + \frac{6}{5}$$

$$y(x) = 3\left(x - 16 \cdot \frac{x^5}{5}\right) + \frac{6}{5}$$

$$y(x) = 3x - \frac{48}{5}x^5 + \frac{6}{5}$$

2.4 Paso 7: Evaluar en $x = \frac{1}{2}$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \frac{1}{2} - \frac{48}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{6}{5}$$

2.5 Paso 8: Calcular Potencias y Operaciones

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{48}{5} \cdot \frac{1}{32} + \frac{6}{5}$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{48}{160} + \frac{6}{5}$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{10} + \frac{6}{5}$$

2.6 Paso 9: Expresar en Décimos y Operar

$$\frac{3}{2} = \frac{15}{10}, \quad \frac{3}{10} = \frac{3}{10}, \quad \frac{6}{5} = \frac{12}{10}$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{10} - \frac{3}{10} + \frac{12}{10} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$

2.7 Resultado Final

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{12}{5} = 2.4$$

2.8 Interpretación

Con los valores dados:

- El nadador es llevado por la corriente 2.4 millas río abajo
- Nada 1 milla a lo ancho del río (desde $x = -\frac{1}{2}$ hasta $x = \frac{1}{2}$)
- La relación $\frac{v_0}{v_S} = 3$ indica que la corriente máxima es el triple de la velocidad del nadador

3. Isoclinas

El metodo de las isoclinas es muy usado para poder graficar el comportamiento de las soluciones de una ecuacion diferencial sin necesidad de resolverla. Consiste en encontrar curvas en el plano xy donde la pendiente de la solucion es constante.

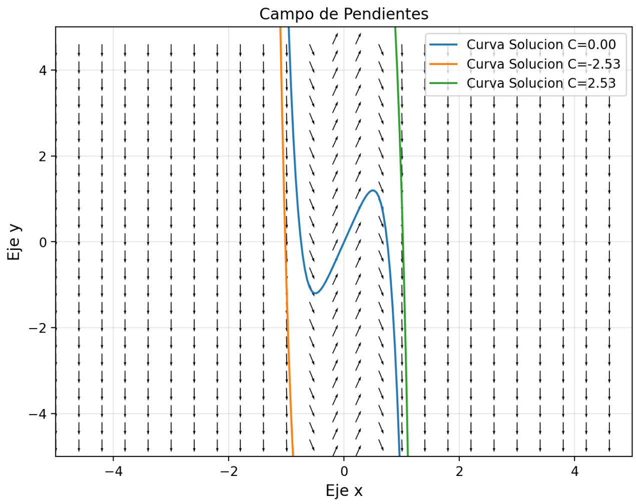

Figura 2: Metodo Grafico Isoclinas

Analisis Cualitatico En el centro del rio la pendiente es maxima y conforme nos acercamos a las orillas la pendiente disminuye hasta llegar a ser cero en las orillas. Esto indica que la velocidad del agua es maxima en el centro y minima en las orillas. el patron es simetrico, por lo cual la funcion se comporta de manera similar a ambos lados del centro del rio.

Para producir listas enumeradas, utilice el siguiente estilo:

1. Primer Elemento
2. Segundo Elemento
   a) Segundo Elemento - Subítem Uno
   b) Segundo Elemento - Subítem Dos

Para producir descripciones, use el siguiente estilo:

Primer Elemento con su respectiva descripción.

Segundo Elemento también con su respectiva descripción.

Para producir cuerpos flotantes (figuras o tablas), asegúrese de numerar y etiquetar correctamente cada figura. Las referencias a las figuras deben estar correctamente etiquetadas. Por ejemplo, véase la Fig. 3...

	Método 1	Método 2
A		
B		
C		

Figura 3: Figura de ejemplo. Recuerde especificar el origen de los datos que se muestran.

Para producir código fuente, envuélvalo en una figura flotante y etiquételo correctamente. Por ejemplo, en la Fig. 4 se muestra un código bastante conocido...

```
int main(int argc, char** argv)
{
    // Imprimiendo "Hola Mundo".
    printf("Hello, World");
}
```

Figura 4: Código fuente de ejemplo.