1. 设E是$\mathbb{R}$中的Lebesgue可测集，$m(E) > 0$. 若存在$0 < p_0, q_0 < +\infty, p_0 \neq q_0$, 使得$L^{p_0}(E) \subset L^{q_0}(E)$, 证明：

(i) $q_0 < p_0$.

(ii) 对任意$0 < q < p < +\infty$, 均有$L^p(E) \subset L^q(E)$.

2. (Hölder不等式) 设$p, q \in [1, +\infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 证明对任意可测函数$f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 均有

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q},$$

并说明等号成立条件。

3. 设X, Y是（实）Banach空间，$A \colon X \to Y$是有界线性算子，$B \colon X \to Y$是紧线性算子，且$A(X) \subset B(X)$, 证明A是紧算子。

4. 设X是（实）赋范线性空间，M是其子空间，$x \in X$, 证明

$$\inf_{y \in M} \|x - y\| = \sup \left\{ |f(x)| \;\middle|\; f \in X^*, \|f\| \leq 1, f|_M = 0 \right\}$$

5. 记$\mathbb{D}$为$\mathbb{C}$中的单位开圆盘，设$f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$全纯，证明对任意$|a| < \frac{1}{2}, |b| < \frac{1}{2}$, 均有

$$|f(a) - f(b)| \leq 4|a - b|.$$

1. 设E是$\mathbb{R}$中的Lebesgue可测集，$m(E)>0$. 若存在$0<p_0,q_0<+\infty,p_0\neq q_0$, 使得$L^{p_0}(E)\subset L^{q_0}(E)$, 证明：

(i) $q_0<p_0$.

(ii) 对任意$0<q<p<+\infty$, 均有$L^p(E)\subset L^q(E)$.

2. (Hölder不等式) 设$p,q\in[1,+\infty]$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 证明对任意可测函数$f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 均有

$$\|fg\|_{L^1}\leq\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q},$$

并说明等号成立条件。

3. 设X,Y是（实）Banach空间，$A\colon X\to Y$是有界线性算子，$B\colon X\to Y$是紧线性算子，且$A(X)\subset B(X)$, 证明A是紧算子。

4. 设X是（实）赋范线性空间，M是其子空间，$x\in X$, 证明

$$\inf_{y\in M}\|x-y\|=\sup\big\{\,|f(x)|\;\big|\;f\in X^*,\|f\|\leq 1,f|_M=0\,\big\}$$

5. 记$\mathbb{D}$为$\mathbb{C}$中的单位开圆盘，设$f\colon\mathbb{D}\to\mathbb{D}$全纯，证明对任意$|a|<\frac{1}{2},|b|<\frac{1}{2}$, 均有

$$|f(a)-f(b)|\leq 4|a-b|.$$