2022 春季分析题目

- 1. 设 $\{f_n\} \subset \mathcal{L}^1(\mathrm{R}^d)$，且对任意正整数 n 满足 $\|f_{n+1} - f_n\|_{\mathcal{L}^1} \leq \frac{1}{n^2}$，试证明：存在 $f \in \mathcal{L}^1(\mathrm{R}^d)$，使得：

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{L}^1} = 0, \text{ 且 } f_n \to f \quad \text{a.e. } x \in \mathrm{R}^d.$$

- 2. 已知定义在 R 上的函数 f 满足

$$\int_{\mathrm{R}} |f(x+h) - f(x)| = o(|h|^2), \quad \forall h \in \mathrm{R},$$

试证明：$f(x) \equiv C$ 为常数。

- 3. 设复函数 f 在 $B(0,1)$ 上解析，$\overline{B(0,1)}$ 上连续。对于 $0 < r < 1$，试证明：

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |f_n(\mathrm{e}^{i\theta})| \mathrm{d}\theta = 0 \implies \lim_{n\to\infty} \max_{|z|<r} |f_n(z)| = 0.$$

- 4. 已知对于 $\forall t \in \mathrm{R}$，$x \mapsto T(x)(t)$ 是有界线性泛函，且有 $x(t) \in \mathcal{C}[0,1]$。试证明：存在 $C > 0$，使得：

$$|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T(x)(t)| \leq C\|x\|.$$

提示：设 $\Omega = \{(s,t) \in [0,1] \times [0,1] | s \neq t\}$，并令

$$T_w(x) = \frac{T(x)(s) - T(x)(t)}{s - t}, (s,t) \in \Omega, x \in \mathcal{X}.$$

- 5. 试证明 Lax-Milgram 定理：设 $\phi(x,y)$ 是 Hilbert 空间 H 上的共轭双线性泛函，满足：
  - (1). $\exists M > 0$，使得 $|\phi(x,y)| \leq M\|x\|\|y\|$；
  - (2). $\exists \delta > 0$，使得 $|\phi(x,y)| \geq \delta\|x\|^2$.

  则对于 $\forall f \in H^*$，存在唯一的 $y_f \in H$，使得 $\phi(x, y_f) = f(x), \forall\, x \in H$.

2022 春季分析题目

- 1. 设 $\{f_n\} \subset \mathcal{L}^1(\mathrm{R}^d)$，且对任意正整数 n 满足 $\|f_{n+1} - f_n\|_{\mathcal{L}^1} \leq \frac{1}{n^2}$，试证明：存在 $f \in \mathcal{L}^1(\mathrm{R}^d)$，使得：

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{L}^1} = 0, \text{ 且 } f_n \to f \quad \text{a.e. } x \in \mathrm{R}^d.$$

- 2. 已知定义在 R 上的函数 f 满足

$$\int_{\mathrm{R}} |f(x+h) - f(x)| = o(|h|^2), \quad \forall h \in \mathrm{R},$$

试证明：$f(x) \equiv C$ 为常数。

- 3. 设复函数 f 在 $B(0,1)$ 上解析，$\overline{B(0,1)}$ 上连续。对于 $0 < r < 1$，试证明：

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |f_n(\mathrm{e}^{i\theta})| \mathrm{d}\theta = 0 \implies \lim_{n\to\infty} \max_{|z|<r} |f_n(z)| = 0.$$

- 4. 已知对于 $\forall t \in \mathrm{R}$，$x \mapsto T(x)(t)$ 是有界线性泛函，且有 $x(t) \in \mathcal{C}[0,1]$。试证明：存在 $C > 0$，使得：

$$|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T(x)(t)| \leq C\|x\|.$$

提示：设 $\Omega = \{(s,t) \in [0,1] \times [0,1] | s \neq t\}$，并令

$$T_w(x) = \frac{T(x)(s) - T(x)(t)}{s - t}, (s,t) \in \Omega, x \in \mathcal{X}.$$

- 5. 试证明 Lax-Milgram 定理：设 $\phi(x,y)$ 是 Hilbert 空间 H 上的共轭双线性泛函，满足：
  - (1). $\exists M > 0$，使得 $|\phi(x,y)| \leq M\|x\|\|y\|$；
  - (2). $\exists \delta > 0$，使得 $|\phi(x,y)| \geq \delta\|x\|^2$.

  则对于 $\forall f \in H^*$，存在唯一的 $y_f \in H$，使得 $\phi(x, y_f) = f(x), \forall\, x \in H$.