2021 秋季分析题目

- 1. 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ 为开集，$\phi : \Omega \to \Omega$ 且为 C^1 类的单射。我们称 ϕ 是保体积的，若它满足

$$m(\phi(E)) = m(E), \quad \forall \text{可测集} E \subset \Omega$$

  (1) 证明：ϕ 是保体积的 $\iff |\det \phi^{'}(x)| = 1, \forall x \in \Omega$

  (2) 设 $m(\Omega) < +\infty$ 且 $|\det \phi^{'}(x)| = 1, \forall x \in \Omega$，试证明庞加莱回归定理：对每个 $x_0 \in \Omega$ 与包含 x_0 的任一开集 $U \subset \Omega$，存在正整数 n，使得 $m(\phi^n(U) \cap U) > 0$，这里 ϕ^n 指 n 次复合

- 2. 试叙述并证明二维的 Bessel 不等式。

- 3. 对于正整数 n，设 $f(z) = \prod_{k=1}^{n}(z^2 - k^2)$，$z \in \mathbf{C}$，试求

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{|z|=R} z \cdot \frac{f^{'}(z)}{f(z)}\, dz.$$

- 4. 设 X 是 Banach 空间，有线性泛函 $\phi : \mathbf{C} \to X$，算子 $f \in X^*$，满足 $z \to f(\phi(z))$ 是解析映射，且 $\sup_{z \in \mathbf{C}} |f(\phi(z))| < \infty$，试证明

$$\phi(z) \equiv \phi(0), \quad \forall z \in \mathbf{C}.$$

- 5. 设 X 是 Banach 空间，有算子序列 $\{f_t\}_{t \in [0,+\infty)} \subset X^*$，满足对于任意的 $x \in X$，泛函 $t \to f_t(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续，且 $\lim_{t \to +\infty} f_t(x) = 0$。

  (1) 试证明

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} e^{-t/n} |f_t(x)| dt = 0, \quad \forall x \in X.$$

  (2) 对于 X 中的任意收敛序列 $x_n \to x_0 \in X, n \to +\infty$，

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} e^{-t/n} |f_t(x_n)| dt = 0.$$

- 6. 设 X 是 Banach 空间，有算子 $A, B \in \mathcal{L}(X)$，满足 $\|A^p\|^{\frac{1}{p}} \|B^q\|^{\frac{1}{q}} < 1, AB = BA$，其中 p, q 为正整数。试证明

$$\text{算子}(I - AB)^{-1} : X \to X \text{ 存在且有界}.$$