1. (20) 设 $f_n, g_n, f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{L^1}=\lim\limits_{n\to\infty}\|g_n-g\|_{L^1}=0$.

且 $C:=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^d, n\in\mathbb{N}}|f_n(x)|<+\infty$，这里 $\|f\|_{L^1}=\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|dx$.

证明：$|f(x)|\le C$, a.e. $x\in\mathbb{R}^d$ (5分)

$\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n g_n-fg\|_{L^1}=0$ (15分)

2. (20) 设 $f, g\in L^2(\mathbb{R})$，证明 $\left|\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)g(y)e^{-\pi(x-y)^2}dxdy\right|\le\|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}$

其中 $\|f\|_{L^2}=\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2dx\right)^{1/2}$

3. (20) 设复变函数 f、g 都在复平面 $\mathbb{C}$ 上解析，无零点，且满足

$\frac{f'(\frac{1}{n})}{f(\frac{1}{n})}=\frac{g'(\frac{1}{n})}{g(\frac{1}{n})}$, $n=1,2,3\cdots$ 试求 f 与 g 之间的另一种简单关系并证明

4. (20) 设 $0<R<+\infty$，$D(0,R)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<R\}$，复变函数 f 在 $D(0,R)$ 内解析且有界. 设 $0<r<R$. 证明：存在只与 r, R 和 $\|f\|_\infty$ 有关的常数 $0<L<+\infty$，使得

$|f(a)-f(b)|\le L|a-b|$, $\forall a,b\in D(0,r)$ 其中 $\|f\|_\infty=\sup\limits_{|z|<R}|f(z)|$

5. (20) 设 $X=(X,\|\cdot\|)$、$Y=(Y,\|\cdot\|)$ 为两个Banach空间，$B(X,Y)$ 是从 X 到 Y 的有界线性算子全体，$X^*=B(X,\mathbb{C})$，$Y^*=B(Y,\mathbb{C})$. 给定线性算子 $A: X\to Y$

证明：$A\in B(X,Y) \Leftrightarrow$ 对每个 $f\in Y^*$，都有 $f\circ A\in X^*$

6. (20) 设 $H=(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为一个Hilbert空间，Y 为 H 一个非空子集，span Y 是由 Y 张成的线性空间. span $Y=\{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i y_i \mid y_i\in Y, \alpha_i\in\mathbb{C}, i=1,2,\cdots k; k=1,2,3,\cdots\}$

证明：span Y 在 H 中稠密 $\Leftrightarrow Y^\perp=\{0\}$. $Y^\perp=\{x\in H\mid \langle x,y\rangle=0$ 对 $\forall y\in Y\}$