

2021春分析博资考试题

2021年5月13日

1. X 是 Banach 空间, M, N 是 X 的两个闭子空间。且对任意的 $x \in X$, 存在唯一的 $y \in M, z \in N$ 使得 $x = y + z$ 。设 $y_n, y \in M, z_n, z \in N$, 证明 $y_n + z_n \rightarrow y + z$ 等价于 $y_n \rightarrow y$ 且 $z_n \rightarrow z$ 。

2. X 是线性赋范空间, F 是其上线性泛函。

(1) 证明 F 连续等价于 $F^{-1}(0)$ 是闭集。

(2) X, Y 是线性赋范空间, 设 F 是 X 到 Y 的线性算子, 请举例说明(1)不对。

3. E 可测, $\|f - f_n\|_{L^p(E)} \leq 4^{-\frac{n}{p}}$, 请证明对任意 $\delta > 0$, 存在 E_δ 满足 $m(E_\delta) < \delta$ 且在 $E \setminus E_\delta$ 上 f_n 一致收敛到 f 。

4. $I = [0, 1], M_1, M_2$ 为常数。记

$$S = \{f \in L^1(I) \cap L^p(I) \mid \|f\|_1 \leq M_1, \|f\|_p \leq M_2\}$$

证明对任意 $\delta > 0$, 存在 $M > 0$, 使得对任意的 $f \in S$ 有

$$\int_{\{x \in I; |f| > M\}} |f| < \delta$$

5. 叙述 Lusin 定理并证明之。

6. 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^6} dt$ 。