数学科学系博士生资格考试分析试题（2019年春季）

一、设X为赋范空间空间，对于非空子集$M \subset X$及非子集$N \subset X'$，令：

$$^{\perp}M = \{f \in X' : \text{任给} x \in M, \text{都有} f(x) = 0\}$$

$$N^{\perp} = \{x \in X : \text{任给} f \in N, \text{都有} f(x) = 0\}.$$

求证：

1、$^{\perp}M$为X'的闭线性子空间，$N^{\perp}$为X的闭线性子空间，

2、$(^{\perp}M)^{\perp} = \overline{span}(M)$。

二、设X为拓扑线性空间，$F \subset X$为非空闭集，$K \subset X$为非空紧集，且$F \cap K = \emptyset$。求证：存在0点的邻域U，使得$(F + U) \cap (K + U) = \emptyset$。

三、设$f \in L^1(\mathbb{R})$，且任给$t \in \mathbb{R}$有

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| dx \le |t|^2.$$

求证：$f = 0$.

四、设f在$\mathbb{R}$上局部可积，$1 < p < \infty$。求证：$f \in L^p(\mathbf{R})$ 当且仅当存在$M > 0$，任取$\mathbb{R}$的有限互不相交的正测度集$E_1, E_2, \cdots, E_n$，有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m(E_i)^{p-1}} \Big| \int_{E_i} f(x) dx \Big|^p \le M.$$

五、设$f \in L^2(\mathbb{R})$。对于$h \neq 0$及$x \in \mathbb{R}$，令

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt.$$

求证：$\|f_h\|_2 \le \|f\|_2$且$\lim_{h\to 0} \|f_h - f\|_2 = 0$。