清华大学数学系博士生资格考试

《分析》部分

- **2003 年 9 月**

1. X，Y是 Banach 空间，$T_n \in B(X, Y)$。若$\sup|y^*(T_n x)| < +\infty$，$\forall x \in X$，$y^* \in Y^*$。
   求证：$\sup||T_n|| < +\infty$。（两次控制收敛定理）

proof：对于给定的n，定义T_n^*：$Y^* \to X^*$，$f \to (T_n^* f)$，满足$(T_n^* \cdot y^*)(x) = y^*(T_n x)$，由共轭算子的性质[1]，$T_n^* \in B(Y^*, X^*)$，且$||T_n^*|| = ||T_n||$。结合条件可知：

$$\sup|(T_n^* \cdot y^*)(x)| = \sup|y^*(T_n x)| < +\infty$$

由x的任意性，根据控制收敛定理知$\sup\ ||(T_n^* \cdot y^*)|| < +\infty$。又因为$y^*$的任意性，再次根据控制收敛定理知$\sup\ ||T_n^*|| < +\infty$。而$||T_n^*|| = ||T_n||$，故$\sup\ ||T_n|| < +\infty$。

■

2. X是 Banach 空间，x_n，$x \in X$，f_n，$f \in X^*$，x_n弱收敛于 x，f_n依范数收敛于 f。
   求证：$\lim\limits_{n} f_n(x_n) = f(x)$。

proof：原命题⟺证明$\lim\limits_{n} |f_n(x_n) - f(x)| = 0$。而

$$|f_n(x_n) - f(x)| \le |f_n(x_n) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|,$$

分别直接根据x_n弱收敛于 x，和f_n依范数收敛于 f可得上式右边两项趋于 0。

■

3. H是 Hilbert 空间，$A \in B(H)$，且存在$m > 0$，使得$\forall x \in H$有$m||x||^2 \le |(Ax, x)|$。
   求证：（1）A为单射；（2）假设 $R(A) = \{Ax: x \in H\}$，则$R(A)$在H中稠密；
   （3）$R(A) = H$；（4）$A^{-1} \in B(H)$，且 $\| A^{-1} \| \le \frac{1}{m}$。（Lax-Milgram 定理[2]）

proof：（1）$\forall x$，$y \in H$，若$Ax = Ay$，$\big(A(x-y), x-y\big) = 0 \ge m||x-y||^2$，
于是$x = y$，这表明A为单射。
（2）我们直接证（3）即可。(a) $R(A)$是闭的。对于任意x_n，$x_m \in H$，有

$$m||x_n - x_m||^2 \le |(A(x_n - x_m), x_n - x_m)| \le ||A(x_n - x_m)|| \cdot ||x_n - x_m||,$$

$\forall Ax_n \to w$，取$||A(x_n - x_m)|| \to 0$，则$||x_n - x_m|| \to 0$，由于H完备，因此$\exists x \in H$，使得$x_n \to x$，结合A有界，故$Ax_n \to Ax$，这说明$R(A)$是闭的。(b) $R(A)^{\perp} = \{0\}$（(b)说明稠密）。任取$x \in R(A)^{\perp}$，则$0 = \big|(Ax, x)\big| \ge m||x||^2$，故$x = 0$。由(a)，(b)及 Hilbert 空间的正交分解理论[3]，$R(A) = H$。
（4）由（1）（3）知，A单满，故A^{-1}存在。由逆算子定理得$\mathrm{A}^{-1} \in \mathrm{B(H)}$。在题干的不等式中用$A^{-1}$x替换x则立得$\| \mathrm{A}^{-1} \| \le \frac{1}{\mathrm{m}}$。■

---

[1]郭懋正《实变函数与泛函分析》P311
[2]郭懋正《实变函数与泛函分析》P296
[3]郭懋正《实变函数与泛函分析》P235

4. $f\in L^1(R)$，$\forall x\in R$，令$\tilde{f}(x)=\int_R f(t)e^{-itx}dm(t)$，其中$m$为 Lebesgue 测度。
   求证：$\tilde{f}$在R上连续。

proof：对于给定的$x\in X$，任取$\{x_n\}$为趋于x的数列。只需证：$\lim\limits_{n\to+\infty}[\tilde{f}(x_n)-\tilde{f}(x)]=0$。
我们令$f_n(t)=f(t)(e^{-itx_n}-e^{-itx})$，则$|f_n(t)|\le 2|f(t)|$，结合$f\in L^1(R)$知：$f_n(t)\in L^1(R)$。
故原命题$\Leftrightarrow$ 证$\lim\limits_{x_0\to x}\int_R f(t)(e^{-itx_0}-e^{-itx})dm(t)=0$。
$\Leftrightarrow$ 证$\lim\limits_{x_0\to x}\int_R f_n(t)dm(t)=0$。
而显然有$\lim\limits_{x_0\to x}f_n(t)=0$，$\forall t\in R$。结合$|f_n(t)|\le 2|f(t)|$，$f\in L^1(R)$及控制收敛定理，有

$$\lim_{x_0\to x}\int_R f_n(t)dm(t)=\int_R\lim_{x_0\to x}f_n(t)dm(t)=\int_R 0\,dm(t)=0。$$

■

5. m为 Lebesgue 测度，$f\in L(R)$，$\forall\lambda\in R$，令$E_f(\lambda)=\{x: |f(x)|>\lambda\}$，且
   $f_0(\lambda)=m(E_f(\lambda))$，求证：（1）$f_0$为递减且右连续的函数；（2）$\forall 0<p<\infty$，及$\lambda>0$，有$f_0(\lambda)\le\lambda^{-p}\int_{E_f(\lambda)}|f(x)|^p dm(x)$；（3）若$f\in L^p(R)$，$1\le p<\infty$，则$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda^p f_0(\lambda)=0$。

proof：（1）对于$\alpha<\beta$，显然有$E_f(\beta)\subset E_f(\alpha)$，故$m\left(E_f(\beta)\right)\ge m\left(E_f(\alpha)\right)$。此外，任取$\{\lambda_n\}$为递减趋于$\lambda$的数列，则$E_f(\lambda_1)\subset E_f(\lambda_2)\subset\cdots$，且$\lim\limits_{n\to+\infty}E_f(\lambda_n)=E_f(\lambda)$。故
$\lim\limits_{n\to+\infty}m(E_f(\lambda_n))=m(E_f(\lambda))$。从而$\lim\limits_{n\to+\infty}f_0(\lambda_n)=f_0(\lambda)$，结合$\{\lambda_n\}$任意性知结论成立。
（2）$\lambda^p f_0(\lambda)=\int_R\lambda^p\cdot\chi_{E_f(\lambda)}dm(x)=\int_{E_f(\lambda)}\lambda^p dm(x)\le\int_{E_f(\lambda)}|f(x)|^p dm(x)$。不等式成立。
（3）因为$f\in L^p(R)$，也即$\left|\int_R f(x)^p dm(x)\right|<+\infty$，由积分的绝对连续性[4]，对任意$\epsilon>0$，存在$\delta>0$，使得只要$m\left(E_f(\lambda)\right)<\delta$，就有$\int_{E_f(\lambda)}|f(x)|^p dm(x)<\epsilon$。而由$f\in L^p(R)$知：
$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}m\left(E_f(\lambda)\right)=0$，结合（2）知结论成立。

■

[4]郭懋正《实变函数与泛函分析》P102

- **2006 年（部分）**

1. T为线性算子，$T_n \in B(X，Y)$，对任意$f \in Y^*$，$x \in X$，$\lim_{n\to+\infty} f(T_n x) = f(Tx)$。

   求证：$T \in B(X，Y)$。（两次控制收敛定理）

proof：先说明$\{T_n\}$有界。定义T_n^*：$Y^* \to X^*$，$f \to (T_n^* f)$，满足满足 $(T_n^* \cdot f)(x) = f(T_n x)$，由共轭算子的性质，$T_n^* \in B(Y^*，X^*)$，且$\|T_n^*\| = \|T_n\|$。结合条件知，对任意给定的$f \in Y^*$，$x \in X$，有

$$\sup_n |(T_n^* \cdot f)(x)| = \sup_n |f(T_n x)| = |f(Tx)| < +\infty。$$

由x的任意性，根据控制收敛定理知$\sup \|(T_n^* \cdot f)\| < +\infty$。又因为$f$的任意性，再次根据控制收敛定理知$\sup \|T_n^*\| < +\infty$。而$\|T_n^*\| = \|T_n\|$，故$\sup \|T_n\| < +\infty$。

下面采用反证法：若T无界，则存在单位球上的点列$\{x_n\}$，满足$\|T(x_n)\| > n$，因此

$$\sup_n \|T(x_n)\| = +\infty。$$

我们通过自然映射把$T(x_n)$从Y映到Y^{**}上，这是保范的，也即$\sup_n \|T(x_n)^{**}\| = +\infty$。再根据控制收敛定理（的逆否形式）知，一定存在$f_0 \in Y^*$，使得 $\sup_n \|T(x_n)^{**}(f_0)\| = +\infty$。因此，

$$\underline{+\infty = \sup_n \|T(x_n)^{**}(f_0)\| = \sup_n \|f_0[T(x_n)]\|}。$$

而$f_0[T(x_n)] = \lim_{k\to+\infty} f(T_k x_n) \le \|f\| \cdot \sup\|T_k\| \cdot \sup\|x_n\|$。由$\sup \|T_n\| < +\infty$，$\|x_n\| \equiv 1$，知存在$M$，使得$\|f_0[T(x_n)]\| < M$，对$\forall n$成立，这与下划线式子矛盾。

■

2. 叙述控制收敛定理，并证明。

proof：控制收敛定理的描述（极限和积分可交换）：给定可测集E，设$\{f_n(x)\} \subset m(E)$，且

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)，a.e.[E]。$$

若存在$F(x) \in L(E)$，使得

$$|f_n(x)| \le F(x)，a.e.[E]。$$

那么$\{f_n(x)\} \subset L(E)$，$f(x) \in L(E)$，且$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$。

控制收敛定理的证明（Fatou 引理[5]：非负可测函数时，下极限的积分≤ 积分的下极限）：

令$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$，故$\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = 0$，下证：$\lim_{n\to+\infty} \int_E |g_n(x)|dx = 0$。

显然，在几乎处处的意义下，$F(x) - 2g_n(x) \ge 0$，根据 Fatou 引理，有

$$\int_E \underline{\lim}_{n\to+\infty} (F(x) - 2g_n(x))dx \le \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_E (F(x) - 2g_n(x))dx，$$

故$\overline{\lim}_{n\to+\infty} \int_E 2g_n(x)dx \le \int_E \overline{\lim}_{n\to+\infty} 2g_n(x)dx = \int_E 0\,dx = 0$。因此

$$\left|\int_E f_n(x)dx - \int_E f(x)dx\right| \le \int_E g_n(x)dx \to 0。$$

■

[5]郭懋正《实变函数与泛函分析》P117

3. H是 Hilbert 空间，x_n，$x \in H$。求证：$x_n \to x \Leftrightarrow ||x_n|| \to ||x||$，且$x_n \xrightarrow{w} x$。

（Reisz 表示定理：给出了 Hilbert 空间上的同构：$f(x) = (x, x_f)$）

proof：$\Longrightarrow$ $\left|\|x_n\| - \|x\|\right| \leq \|x_n - x\| \to 0$，此外，对于任意$f \in X^*$，有

$$\|f(x_n) - f(x)\| \leq \|f\| \cdot \|x_n - x\| \to 0。$$

$\Longleftarrow$ 由$x_n \xrightarrow{w} x$知，对于$\forall y \in H$，有$(x_n, y) \to (x, y)$。因此

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2Re[(x_n, x)]。$$

取$y = x$得上式$\to 0$。

■

4. 同 2003 年 9 月第 5 题。

- **2010 年 5 月**

1. （1）设$\{f_k(x)\}$和$\{g_k(x)\}$是E上的可测函数列，且$|f_k(x)| \le g_k(x)$，$\forall\, x \in E$，$k \in N$。此外，$f_k(x) \to f(x)$，$g_k(x) \to g(x)$，以及$\lim\limits_{k\to+\infty} \int_E g_k(x)dx = \int_E g(x)dx$，求证：
$$\lim_{k\to+\infty} \int_E f_k(x)dx = \int_E f(x)dx。$$
（2）设$f_k(x) \in L(E)$，$f(x) \in L(E)$，若$f_k(x) \to f(x)$，$a.e.[E]$。则
$$\lim_{k\to+\infty} \int_E |f_k(x) - f(x)|dx = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to+\infty} \int_E |f_k(x)|dx = \int_E |f(x)|dx。$$

proof：（1）令$G(x) = g_k(x) + g(x) - |f(x) - f_k(x)| \ge 0$，根据 Fatou 引理，
$$\int_E \underline{\lim}_{n\to+\infty} G(x)dx \le \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_E G(x)dx,$$
结合$f_k(x) \to f(x)$，$g_k(x) \to g(x)$，以及$\lim\limits_{k\to+\infty} \int_E g_k(x)dx = \int_E g(x)dx$，知：
$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \int_E |f(x) - f_k(x)|dx \le \int_E \overline{\lim_{n\to+\infty}} |f(x) - f(x)|dx = \int_E 0\, dx = 0。$$
故
$$\left|\int_E f(x)dx - \lim_{k\to+\infty} \int_E f_k(x)dx\right| \le \overline{\lim_{n\to+\infty}} \int_E |f(x) - f_k(x)|dx = 0。$$
（2）$\Longrightarrow$ $0 = \lim\limits_{k\to+\infty} \int_E |f_k(x) - f(x)|dx \ge \lim\limits_{k\to+\infty} \int_E ||f_k(x)| - |f(x)||dx$，因此成立。
$\Longleftarrow$ 由$\lim\limits_{k\to+\infty} \int_E |f_k(x)|dx = \int_E |f(x)|dx$知，$\lim\limits_{k\to+\infty} \int_E (|f_k(x)| + |f(x)|)dx = \int_E 2|f(x)|dx$。而$|f_k(x) - f(x)| \le |f_k(x)| + |f(x)|$，$\lim\limits_{k\to+\infty} |f_k(x) - f(x)| = 0$（把 0 看成函数），$\lim\limits_{k\to+\infty} |f_k(x)| + |f(x)| = 2|f(x)|$，根据（1）的结论，$\lim\limits_{k\to+\infty} \int_E |f_k(x) - f(x)|dx = 0$。

■

2. X，Y是赋范线性空间，且Y在X中稠密，证明：Y^*与X^*等距同构。

proof：我们定义$X^* \to Y^*$的一个映射T，给定的x^*，$T(x^*) = y^*$，满足对于任意$y \in Y$，有
$$y^*(y) = x^*(y)$$
显然满射，等距。至于单射：若存在$T(x_1^*) = T(x_2^*)$，则对于任意$m \in X - Y$，
$$|x_1^*(m) - x_2^*(\mathrm{m})| \le |x_1^*(m) - x_1^*(n)| + |x_1^*(n) - x_2^*(n)| + |x_2^*(m) - x_2^*(n)|,$$
其中，$n \in Y$，且$n \to m$，结合$x_1^*(n) = x_2^*(n)$知：RHS $\to 0$。

■

3. T：$H \to H$，H是 Hilbert 空间，$A \in L(H)$，$A = A^*$。求证：$\| A \| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \| (Ax, x) \|$。

proof：设$c = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \| (Ax, x) \|$。右≤左：取$\| x \| = 1$即知$c \le \| A \|$。

左≤右：根据$A = A^*$，可知 $4Re(Ax, y) = (A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)$，显然对$\forall x \in H$，$\| (Ax, x) \| \le c \| x \|^2$。则
$$|4Re(Ax, y)| \le c(\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2) = 2c(\| x \|^2 + \| y \|^2)$$
现令$\| x \| = \| y \| = 1$，得$|Re(Ax, y)| \le c$，假设$(Ax, y) = re^{i\theta}$，则$|(Ax, y)| = r$。我们再用$ye^{i\theta}$替换y，得到$r \le c$。也即对于$\forall \| x \| = \| y \| = 1$，我们有$|(Ax, y)| \le c$，我们再分别对$y$和$x$取上确界，即得$\| A \| \le c$。

■

4. A：$H \to H$，$A \in L(H)$，H是 Hilbert 空间。
   求证：$\exists \beta > 0$，$\| Ax \| \geq \beta \| x \| \Leftrightarrow A^*$满，下有界。

proof：引理：$ker(A) = R(A^*)^{\perp}$。该引理直接证明显然成立。因此，A^*满 $\Leftrightarrow R(A^*) = H \Leftrightarrow ker(A) = \{0\} \Leftrightarrow A$单射。故$\Longrightarrow$显然。

至于$\Longleftarrow$ 设A^*的下界为$c > 0$。由于A^*满，故对于$\forall y \in H$，$\exists x$，使$y = A^*x$。故$(Ay, x) = \| A^*x \|^2 \geq c^2 \| x \|^2$，而$|(Ay, x)| \leq \| Ay \| \cdot \| x \|$，$\| y \| = \| A^*x \| \leq ||A^*|| \cdot \| x \|$，故

$$c^2 \| x \| \frac{\| y \|}{\| A^* \|} \leq c^2 \| x \|^2 \leq \| Ay \| \cdot \| x \|$$

化简得$\| Ay \| \geq \frac{c^2}{\|A^*\|} \| y \|$。

■

5. （经典题）设X，X_1，X_2均为 Banach 空间，T_1：$X \to X_1$，T_2：$X \to X_2$。T_1，T_2均为闭算子，且$\mathrm{D(T_1)} \subset \mathrm{D(T_2)}$。求证，存在$M > 0$，使得$\| T_2x \| \leq M(\| x \| + \| T_1x \|)$。

proof：在乘积空间$X \times X_1$引入范数$\| (x, T_1x) \| = \| x \| + \| T_1x \|$，由于$T_1$为闭算子，故$G(T_1)$为$X \times X_1$的闭线性子空间，显然$X \times X_1$是 Banach 空间，则$G(T_1)$也是 Banach 空间。

作映射T：$(x, T_1x) \to T_2x$，下证T闭算子：

任意$(x_n, T_1x_n) \to (x, T_1x)$(能这么写因为$T_1$闭算子)和$T_2x_n \to y$，知$x_n \to x \in \mathrm{D(T_1)} \subset \mathrm{D(T_2)}$。因为$T_2$闭算子，故$y = T_2x$。而$X \times X_1$和$X_2$均 Banach，且$G(T_1)$闭，故$T$闭算子。

再根据闭图像定理，T有界。根据 T 的定义即知结论成立。

■

- **2005 年 4 月**

1. E是 Lebesgue 可测集，且$m(E)<+\infty$，设f：$E\to R$为可测函数。Z为整数集，

$$S=\{x\in E:\ \frac{f(x)}{\pi}\in Z\}$$

求证：$\lim_{n\to+\infty}\int_E|\cos(f(x))|^n dx=m(S)$。

proof：根据控制收敛定理和$m(E)<+\infty$，知

$\lim_{n\to+\infty}\int_E|\cos(f(x))|^n dx=\int_E\lim_{n\to+\infty}|\cos(f(x))|^n dx=\int_S 1dx=m(S)$。

■

2. 设$f(x)$是R上可测函数，且周期为 1。求证：$\int_R\frac{|f(x)|}{1+x^2}dx\le C\int_0^1|f(x)|dx$，$C$为某常数。

proof：当$x>0$，$x\in E_k=[k，k+1]$时，由积分中值定理和周期性，存在$\epsilon\in[k，k+1]$，使 $\int_{E_k}\frac{|f(x)|}{1+x^2}dx=\frac{1}{1+\epsilon^2}\int_0^1|f(x)|dx\le\frac{1}{1+k^2}\int_0^1|f(x)|dx$。而$\int\frac{1}{1+x^2}dx$收敛。

■

3. 设$K\in L^1(R^n)$，$\|K\|_{L^1}\neq0$。令$Af=K*f$。其中$*$表示卷积：

$$(K*f)(x)=\int_{R^n}K(x-y)f(y)dy。$$

求证：（1）A：$L^1(R^n)\to L^1(R^n)$是有界线性算子，且$\|A\|\le\|K\|_{L^1}$；

（2）假设K在R^n上非负。则$\|A^t\|=(\|K\|_{L^1})^t$，$\forall t\in N$。从而证明$r_\sigma(A)=\|K\|_{L^1}$，其中$r_\sigma(A)$为A的谱半径；

（3）若复常数α满足$0<|\alpha|<\frac{1}{\|K\|_{L^1}}$，则对任给定的$g\in L^1(R^n)$，映射

$$\phi(f)=g+\alpha K*f，\ f\in L^1(R^n)$$

在$L^1(R^n)$中存在唯一的不动点（在几乎处处的意义下）。

proof：（1）线性显然。而$\|Af\|_{L^1}=\|K*f\|_{L^1}=\int_{R^n}|\int_{R^n}K(x-y)f(y)dy|dx$。

根据 Fubini 定理，$\int_{R^n}\int_{R^n}|K(x-y)f(y)|dy\,dx=\int_{R^n}|f(y)|\cdot\int_{R^n}|K(x-y)|dx\,dy$

$=\|K\|_{L^1}\|f\|_{L^1}$，因此$\|Af\|_{L^1}\le\|K\|_{L^1}\|f\|_{L^1}$。

（2）类似（1）可证$\|A^t\|\le(\|K\|_{L^1})^t$：$\|A^tf\|_{L^1}=\|K^t*f\|_{L^1}$

$$=\int_{R^n}\dots(t+1\text{ 个})\dots\int_{R^n}K(x-y_1)K(y_1-y_2)\dots K(y_{t-1}-y_t)|f(y_t)|dy$$

$\le(\|K\|_{L^1})^t\|f\|_{L^1}$

特别地，令f满足$\|f\|_{L^1}=1$，且$\forall\alpha$，$\beta\in R^n$，$f(\alpha)=f(\beta)$，即可取等（这样的方式在（1）中无法取等，因为K的符号不定），故$\|A^t\|=(\|K\|_{L^1})^t$。

（3）由压缩映照定理，只需证明ϕ是压缩映射。$\|\phi(f_1)-\phi(f_2)\|=\|\alpha K*f_1-\alpha K*f_2\|$ $=|\alpha|\|Af_1-Af_2\|_{L^1}$，结合前面，显然继续$\le\|f_1-f_2\|_{L^1}$。

■

4. 设$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$和$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是实 Hilbert 空间$(H, <\cdot, \cdot>)$中的两个标准正交集，且$\sum_{n=1}^{\infty}(1-<e_n, f_n>^2)<1$。求证：若$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$完备，则$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$完备。

proof：若不然，则存在非零$h\in H$，使得$\forall k$，$<h, f_k>=0$。
因为$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$完备，故$h=\sum_{k=1}^{\infty}<h, e_k>e_k$，由 Parseval 等式：

$$\|h\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}<h, e_k>^2,$$

任取数列$\{x_n\}$，因此$\|h\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}<h, e_k-x_kf_k>^2\leq\|h\|^2\sum_{k=1}^{\infty}\|e_k-x_kf_k\|^2$。
我们取$x_k=<e_k, f_k>$，故$\|e_k-x_kf_k\|^2=1-<e_n, f_n>^2$。故

$$\|h\|^2\leq\|h\|^2\sum_{k=1}^{\infty}(1-<e_n, f_n>^2)<\|h\|^2$$

矛盾。

■

- **2003 年 4 月**

1. $f_n \to f$，$a.e.[E]$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_E |f_n|dx = \int_E |f|dx$，求证：$\forall F\subset E$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_F |f_n|dx = \int_F |f|dx$。

proof：令$g_n(x) = \big|\,|f_n(x)| - |f(x)|\,\big|\cdot \chi_F(x)$，则$g_n(x) \le |f_n(x)| + |f(x)|$。根据 Fatou 引理：$\int_E \underline{\lim}_{n\to+\infty}(|f_n(x)| - |f(x)| - g_n(x))dx \le \underline{\lim}_{n\to+\infty}\int_E(|f_n(x)| - |f(x)| - g_n(x))dx$。结合条件知：$\overline{\lim}_{n\to+\infty}\int_E g_n(x)dx \le \int_E \overline{\lim}_{n\to+\infty} g_n(x)dx = \int_E 0\,dx = 0$。故$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_E g_n(x)dx = 0$。

■

2. 同 2003 年 9 月第 1 题。

3. 同 2003 年 4 月第 4 题。

4. $E\in R^1$可测，且$\int_E f(x)dx = r > 0$，求证：$\exists F\subset E$可测，使得$\int_F f(x)dx = \frac{r}{9}$。

proof：令$g(t) = \int_{E_t} f(x)dx$，其中$E_t = E\cap(-\infty，t)$。由于积分的绝对连续性，知对$\forall\epsilon >0$，$\exists\delta > 0$，使得

$$|g(t+\delta) - g(t)| \le \int_{E\cap[t，t+\delta)} |f(x)|dx \le \int_{[t，t+\delta)} |f(x)|dx < \epsilon$$

故$g(t)$在R^1上连续。而$\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = r$，$\lim\limits_{t\to-\infty} g(t) = 0$。故存在$\lambda$，使得$g(\lambda) = \frac{r}{9}$。
所以取$F = E\cap(-\infty，\lambda)$即可满足条件。

■

5. X为 Banach 空间，$x_0\in X$，设$f\in X^*$，$\| f \| = 1$。求证：
   （1）$\| x_0 - y \| \ge f(x_0)$，$\forall y\in f^{-1}(0) = \{y：f(y) = 0\}$。
   （2）$\forall y\in X$，$\| y \| = 1$，有$x_0 - \frac{f(x_0)}{f(y)}y \in f^{-1}(0)$。
   （3）$distance\left(x_0，f^{-1}(0)\right) = |f(x_0)|$。

proof：（1）$f(x_0) \le |f(x_0)| = |f(x_0) - f(y)| \le \| f \|\cdot\| x_0 - y \| = \| x_0 - y \|$。
（2）显然，略。
（3）设$d = distance\left(x_0，f^{-1}(0)\right)$，由（1）知，$d \ge |f(x_0)|$。由（2）知：

$$d \le distance\left(x_0，x_0 - \frac{f(x_0)}{f(y)}y\right) = \left\| \frac{f(x_0)}{f(y)}y \right\|，\ \forall y\in X$$

我们取$\{y_n\}$满足$\| y_n \| = 1$，且$|f(y_n)| > \| f \| - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$。因此

$$d \le \frac{|f(x_0)|}{|f(y_n)|}\cdot\| y \| < \frac{|f(x_0)|}{1-\frac{1}{n}}，\ \forall n\in N$$

令$n\to+\infty$即得$d \le |f(x_0)|$。综上$d = |f(x_0)|$。

■

- **未知年份 1**

1. 同 2003 年 4 月第 1 题。

2. $m(E) < +\infty$, $E_n = \{x \in E: n-1 \le f(x) < n\}$。求证：$f$可积$\Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n| \cdot m(E_n) < +\infty$。若$m(E) = +\infty$，结论是否成立，证明你的结论。

proof：定义$f^+ = \{x \in E: f(x) \ge 0\}$，$f^- = \{x \in E: f(x) < 0\}$。
$\Rightarrow$若f可积。可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} |n| \cdot m(E_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} [(n-1) \cdot m(E_n) + m(E_n)] \le \int_{x \in f^+} f(x)dx + \sum_{n=1}^{+\infty} m(E_n)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{0} |n| \cdot m(E_n) \le -\int_{x \in f^-} f(x)dx$$

故$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n| \cdot m(E_n) \le \int_{x \in f^+} f(x)dx - \int_{x \in f^-} f(x)dx + \sum_{n=1}^{+\infty} m(E_n) < +\infty$。
$\Leftarrow$同理可证：$\int_{x \in f^+} f(x)dx - \int_{x \in f^-} f(x)dx \le \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n| \cdot m(E_n) + \sum_{n=-\infty}^{0} m(E_n) < \infty$。

此外，当$m(E) = +\infty$，结论不成立，例如$E = R^1$，$f(x) \equiv 0.5$。此时f显然不可积，但$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n| \cdot m(E_n) = 0 < +\infty$。

■

3. H为 Hilbert 空间，T：$H \to H$为线性算子，且自共轭，即$< Tx, y > = < x, Ty >$，$\forall x, y \in H$。证明：T有界。（闭图像定理）

proof：由于H已经是闭集。故只需证明T为闭算子即可，下证之。对于$\forall x_n \to x$，$Tx_n \to y$。对于$\forall z \in H$，下证$(Tx, z) = (y, z)$即可。
一方面，由$(Tx_n, z) = (x_n, Tz) \to (x, Tz) = (Tx, z)$知：$(Tx_n, z) \to (Tx, z)$。
另一方面，由$Tx_n \to y$知：$(Tx_n, z) \to (y, z)$。
因此$Tx = y$。从而T为闭算子。根据闭图像定理知：T有界。

■

4. H为 Hilbert 空间，$\{e_n\}$为标准正交基。求证：$x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow \sup_n \| x_n \| < +\infty$且对$\forall k \geq 1$，$\lim_n < x_n，e_k > = < x，e_k >$。（Reisz 表示定理+共鸣定理）

proof：$\Longrightarrow$根据 Reisz 表示定理，e_k可对应一个H上的有界线性算子f_k，使得

$f_k(x) = < x，e_k >$，那么由$x_n \xrightarrow{w} x$知$\lim_n < x_n，e_k > = < x，e_k >$显然成立。将$x_n$从$H$自然映射到$H^{**}$上。则对$\forall f \in H^*$，有$\sup_n \| x_n(f) \| = \sup_n \| f(x_n) \| = |f(x)| < +\infty$。根据共鸣定理，$\sup_n \| x_n \| < +\infty$，而$x_n$在$H$和$H^{**}$上范数相等。

$\Longleftarrow$对于$\forall f \in H^*$。根据 Reisz 表示定理，存在$x_f \in H$，使得$f(x) = < x，x_f >$，$x \in H$。因为$\{e_n\}$为标准正交基，故$x_f = \sum_{k=1}^{\infty} < x_f，e_k > e_k$。那么

$f(x_n) = < x_n，x_f > = \sum_{k=1}^{\infty} < x_f，e_k > \cdot < x_n，e_k >$，由$\sup_n \| x_n \|$和 Cauthy-schwarz 不等式知该和式绝对收敛。因此求和与积分可交换，得：

$$\lim_n f(x_n) = \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} < x_f，e_k > \cdot < x_n，e_k > = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_n < x_f，e_k > \cdot < x_n，e_k >$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} < x_f，e_k > \cdot < x，e_k > = < x，x_f >$$

■

5. 叙述控制收敛定理。

- **未知年份 2**

1. $f_k \in L^2(R)$，$|f_k| \le M$，$f_k \xrightarrow{依测度} f$。求证：在$L^2(R)$上，$f_k \xrightarrow{w} f$。（L^p控制收敛定理）

proof：$\forall g \in L^2(R)$，$|f_k \circ g(x)| \le M|g(x)| \in L^2(R)$，且$f_k \circ g(x) \xrightarrow{依测度} f \circ g(x)$。由$L^p$控制收敛定理[6]，$f_k \circ g(x) \xrightarrow{L^2} f \circ g(x)$。即$f_k \xrightarrow{w} f$。

■

2. 叙述 Lax-Milgram 定理，并证明。

proof：Lax-Milgram 定理：H是 hilbert 空间，u是H上的共轭双线性形，且满足：
（1） $|u(x, y)| \le c|x| \cdot |y|$；（2）$|u(x, x)| \ge m \| x \|^2$。
则存在唯一的单满$A \in B(H)$，且$\| A^{-1} \| \le \frac{1}{m}$。
证明方法与 2003 年 9 月第 3 题一致。

■

3. E是无穷维 Banach 空间，$A \in B(E)$，是紧算子。求证A的谱只有以下三种情形：
（1）$\sigma(A) = \{0\}$；（2）$\sigma(A) = \{0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$；
（3）$\sigma(A) = \{0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots\}$，其中$\lambda_n \to 0$。

proof：只需说明 2 点：（1）$0 \in \sigma(A)$。（2）若λ是$\sigma(A)$的聚点，则$\lambda = 0$。
关于（1），若 $0 \notin \sigma(A)$。则A可逆，得$AA^{-1} = I$是紧的，但无穷维 Banach 空间不紧，矛盾。
关于（2），不妨设$\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots \to \lambda \ne 0$。设$x_1, \ldots, x_n, \ldots$分别为$\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$的特征向量，易知$x_1, \ldots, x_n, \ldots$线性无关。设$E_n = \text{linspan}\{x_1, \ldots, x_n\}$，则$E_n \subsetneq E_{n+1}$。因此存在$y_{n+1} \in E_{n+1}$，使得$\| y_{n+1} \| = 1$，且$y_{n+1} \perp E_n$。由$\lambda \ne 0$，故$\| \frac{y_{n+p}}{\lambda_{n+p}} \|$，$\| \frac{y_n}{\lambda_n} \| \to \frac{1}{\lambda} < \infty$有界。
而
$$y_{n+p} - A\frac{y_{n+p}}{\lambda_{n+p}} + A\frac{y_n}{\lambda_n} \in E_{n+p-1}$$
故
$$\| A\frac{y_{n+p}}{\lambda_{n+p}} - A\frac{y_n}{\lambda_n} \| = \| y_{n+p} - \left(y_{n+p} - A\frac{y_{n+p}}{\lambda_{n+p}} + A\frac{y_n}{\lambda_n} \right) \| \ge 1$$
这与A紧性矛盾。

■

4. E是自反 Banach 空间，x：$[0, 1] \to E$，对$\forall f \in E^*$，$\int_0^1 f(x(t))\,dt$存在，求证：存在$x_0 \in E$，使得对$\forall f \in E^*$，都有$\int_0^1 f(x(t))\,dt = f(x_0)$。

proof: $\int_0^1 f(x(t))\,dt = f\left(\int_0^1 x(t)\,dt\right) = \left(\int_0^1 x(t)\,dt\right)(f)$对$\forall f \in E^*$存在，显然$\int_0^1 x(t)\,dt < +\infty$，且由此易得$\left(\int_0^1 x(t)\,dt\right) \in E^{**}$。根据$E$自反，存在$x_0$使得$x_0 = \int_0^1 x(t)\,dt \in E$。

■

[6]郭懋正《实变函数与泛函分析》P160

- **2012 年 5 月**

1. H是 Hilbert 空间，$T \in B(H)$，若$TT^* = T^*T$，则称T为正规算子。求证：

   （1） 若$\forall x \in H$，$< Tx, x >= 0$，则$T = 0$。

   （2） T为正规算子$\Leftrightarrow \forall x \in H$，$\| Tx \| = \| T^*x \|$。

proof:（1）$\forall x, y \in H$，$< T(x+y), x+y >= 0$，得到$< Tx, y > + < Ty, x >= 0$。则$< Tx, iy > + < Tiy, x >= -i < Tx, y > + i < Ty, x >= 0$。故$< Tx, y >= 0$。故$T = 0$。
（2）$\Rightarrow < Tx, Tx >=< x, T^*Tx >=< x, TT^*x >=< T^*x, T^*x >$。
$\Leftarrow$由$\| Tx \| = \| T^*x \|$，类似得$< x, (T^*T - TT^*)x >= 0$。由（1）知T为正规算子。

■

2. 求证：无穷维 Banach 空间B不可能有可数 Hamel 基。

proof:（Hamel 基：只有代数结构，没有拓扑、度量结构。线性表示需为有限线性表示。）
若有，则取一组可数 Hamel 基e_1，e_2，…，e_n，…。因此我们令

$$e = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_i}{i} ,$$

则$e \in B$，但e无法被这组基有限线性表示。

■

3. $f \in L^1(R)$，$\int_R |f(x+t) - f(x)| dx \le |t|^2$，$\forall t > 0$。求证：$f = 0$，$a.e.[R]$。

proof:（存疑的方法：在区间$[a, b] \in R$上，用光滑函数几乎一致逼近可测函数。）
设$E = [a, b]$，则对于任意给定的$t \in (0, 1)$。存在$\epsilon > 0$，使得存在光滑函数（C^1即可）$g(x)$，满足$|f(x) - g(x)| \le \epsilon$，$a.e.[a, b]$，且$2\epsilon(b-a) \le |t|^2$。因此，$\int_R |g(x+t) - g(x)| dx \le 2|t|^2$。变形得

$$\int_R \left| \frac{g(x+t) - g(x)}{t} \right| dx \le 2t,$$

令$t \to 0^+$，即$\int_R |g'(x)| dx = 0$。故存在α，使得$g(x) = \alpha$，$a.e.[a, b]$。令$\epsilon \to 0^+$，得$f(x) = \alpha$，$a.e.[a, b]$。再令$a \to -\infty$，$b \to +\infty$。得$f(x) = \alpha$，$a.e.[R]$。由$f \in L^1(R)$，故$\alpha = 0$。因此，$f(x) = 0$，$a.e.[R]$。

■

4. （1）f为$[0，1]$上非负可测函数，且$m(\{x\in[0，1]：f(x)\geq t\})\leq\frac{1}{1+t^2}$，$t>0$。求出所有的$p\in[1，+\infty)$，使得$f\in L^p[0，1]$。

（2）f在R上局部可积，$p\in(1，+\infty)$。证明：$f\in L^p(R)\Leftrightarrow$存在$M>0$，任取$R$的有限个不相交的正测度集$E_1$，…，$E_n$，有$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{m(E_i)^{p-1}}\left|\int_{E_i}f(x)dx\right|^p\leq M$。

proof:（1）先说明$p\in[1，2)$满足条件。易证对$\forall n\in N$，$n^p-(n-1)^p\leq 2n^{p-1}$。设$E_n=\{x\in[0，1]：f(x)\in[n-1，n)\}$，令$S_n=\sum_{j=n}^{\infty}m(E_j)\leq\frac{1}{1+n^2}$，则

$$\int_{[0，1]}|f(x)|^p dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}|f(x)|^p dx\leq\sum_{n=1}^{\infty}n^p\cdot m(E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(n^p-(n-1)^p)\cdot S_n$$

$\leq\sum_{n=1}^{\infty}2n^{p-1}\cdot\frac{1}{1+n^2}\leq+\infty$，因此$p\in[1，2)$时，$f\in L^p[0，1]$。另外，我们令$f(x)=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$。易知$m(\{x\in[0，1]：f(x)\geq t\})=\frac{1}{1+t^2}$，且$f\notin L^2[0，1]$。再根据有限测度集$E$上有

$L^p(E)\subset L^q(E)$，当$p\geq q$时。故$p\in[1，2)$。

（2）$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{m(E_i)^{p-1}}\left|\int_{E_i}f(x)dx\right|^p=\sum_{i=1}^{\infty}m(E_i)\left|\int_{E_i}\frac{f(x)}{m(E_i)}dx\right|^p$，根据可积函数的积分由简单函数上确界确定的定义知此结论成立。

■

5. $f\in L^2[a，b]$，在$[a，b]$之外补充$f=0$。对于$h\neq 0$，令$f_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)dt$。

求证：$\| f_h\|_2\leq\| f\|_2$且$\lim_{h\to 0}\| f_h-\mathrm{f}\|_2=0$。

proof: 根据 Cauthy-Schwarz 不等式，$\| f_h\|_2^2=\int_R\left[\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)dt\right]^2dx\leq\int_R\frac{1}{2h}\left(\int_{x-h}^{x+h}f^2(t)dt\right)dx$。再由 Fubini 定理交换积分符号，得$\int_R\frac{1}{2h}\left(\int_{x-h}^{x+h}f^2(t)dt\right)dx=\int_R f^2(t)dt=\| f\|_2^2$。

因为区间$[a，b]$有界闭，故我们用连续函数f_0去几乎一致逼近f：对$\forall\epsilon>0$，$\exists f_0\in C[a，b]$，$\delta>0$，使得$\forall|x_1-x_2|<\delta$，$|f_0(x_1)-f_0(x_2)|<\epsilon$，且$|f_0(x)-\mathrm{f}(x)|<\epsilon$，$a.e.[a，b]$。

则$\| f_h-f_0\|_2^2=\int_R\frac{1}{4h^2}\left(\int_{x-h}^{x+h}[f(t)-f_0(t)+f_0(t)-f_0(x)]dt\right)^2dx$

$$\leq\int_R\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}\{[f(t)-f_0(t)]^2+[f_0(t)-f_0(x)]^2\}dt\,dx$$

当$h\to 0$时，上式$\leq\epsilon^2\cdot(a+b+2h)$，再令$\epsilon\to 0$，得$\| f_h-f_0\|_2^2\to 0$。而显然$\| f-f_0\|_2^2\to 0$。

因此$\lim_{h\to 0}\| f_h-f\|_2=0$。

■

- **2011 年 4 月**

1. X是完备线性赋范空间，A：$X\to X$，B：$X^*\to X^*$均为线性算子，且$\forall x\in X$，$f\in X^*$，有$(Bf)(x)=f(Ax)$，求证：A，B均有界。

proof：先证A有界，任取$x_n\to x$，$Ax_n\to y$，下证：$y=Ax$。
$\forall f\in X^*$，我们根据f有界，Bf有界，得
$f(y)=f\left(\lim\limits_n Ax_n\right)=\lim\limits_n f(Ax_n)=\lim\limits_n (Bf)(x_n)=(Bf)\left(\lim\limits_n x_n\right)=(Bf)(x)=f(Ax)$。
因此$y=Ax$，从而根据闭图像定理，A有界。类似可证B有界。

■

2. 同 2003 年 9 月第 2 题。

3. 同 2003 年 9 月第 3 题。

4. $f(x)$是$E=[0，1]$上的非负可测函数，求证：
$$f(x)\in L(E)\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot m\big(x\in E：f(x)\ge 2^n\big)\le+\infty$$
proof：证明方法类似 2012 年 5 月第 4 题（1）和未知年份 1 第 2 题。

■

5. 令$f(x)=k*g=\int k(x-y)g(y)dy$，其中$k(x)$，$g(x)\in L^1(R)$。求证：
（1）$f(x)$几乎处处有限。（2）$\| f\|_{L^1}\le\| k\|_{L^1}\| g\|_{L^1}$。（3）$L^1(R)$中不存在函数$u(x)$使得对一切$f(x)\in L^1(R)$，有$(u*f)(x)=f(x)$。

proof：（1）显然，$|f(x)|\le\int|k(x-y)|dy\cdot\int|g(y)|dy=\| k\|_{L^1}\| g\|_{L^1}$。
（2）由 Fubini 定理，$\| f\|_{L^1}=\int|f(x)|dx=\int\int k(x-y)g(y)dy\,dx$
$=\int g(y)\left(\int k(x-y)\,dx\right)dy\le\int|g(y)|\left(\int|k(x-y)|\,dx\right)dy=\int|g(y)|\,\| k\|_{L^1}\,dy$
$=\| k\|_{L^1}\| g\|_{L^1}$
（3）假设存在这样的$u(x)$，则$\exists\delta>0$，使得$\int_{-2\delta}^{2\delta}|u(x)|dx<1$。我们令$R$上的函数$f(x)$满足：
$$f(x)=\chi_{[-\delta,\ \delta]}(x)$$
故对于$\forall x_0\in[-\delta，\delta]$，$1=f(x_0)=(u*f)(x_0)=\int_{-\delta}^{\delta}u(x_0-y)\,dy\le\int_{-2\delta}^{2\delta}|u(x)|dx<1$，矛盾。

■