博资考分析试题

一、(20分）设X为Banach空间，X_1，X_2为X的闭线性子空间，且任取$x \in X$，存在唯一的$x_1 \in X_1$，$x_2 \in X_2$，使得$x = x_1 + x_2$。求证：存在常数$C > 0$，使得任取$x_1 \in X_1$，$x_2 \in X_2$，均有

$$\|x_1\| + \|x_2\| \le C\|x_1 + x_2\|.$$

二、(20分）设$y = (y_n)_{n\ge1}$为给定复序列，又设任取复序列$x = (x_n)_{n\ge1}$满足条件$\sum_{n\ge1}|x_n| < \infty$，级数$\sum_{n\ge1} x_n y_n$均收敛。求证：$y = (y_n)_{n\ge1}$为有界列。

三、(20分）设X为可分赋范空间。求证：任取$n \ge 1$，存在$f_n \in X'$满足$\|f_n\| = 1$，使得任取$x \in X$，均有 可数稠子集 共轭空间

$$\|x\| = \sup_{n\ge1}|f_n(x)|.$$

问：逆命题是否成立？证明你的结论。

四、(20分）设$1 \le p \le \infty$，f，$f_n \in L^p[0, +\infty)$给定，满足条件

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_p = 0.$$

求证：任取$t \ge 0$，均有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t f_n(x)dx = \int_0^t f(x)dx.$$

级

五、(20分）设$s < t$给定，又设f为$(0, +\infty)$上的可测函数，使得定义在$(0, +\infty)$上的函数$x \to x^s f(x)$以及$x \to x^t f(x)$为Lebesgue可积的。求证：任取$u \in [s,\ t]$，函数$x \to x^u f(x)$均在$(0, +\infty)$上Lebesgue可积，且若令

$$F(u) = \int_0^{+\infty} x^u f(x)dx$$

则F为$[s,\ t]$上的连续函数。问：函数F在哪些点是可导的，证明你的结论。