

1. H 是复 Hilbert 空间 $T \in L(H)$ 称 T 是正常算子 若 $TT^* = T^*T$
 证 (1) $\forall x \in H, \langle Tx, x \rangle = 0 \Rightarrow T = 0$ (2) T 正常算子 $\Leftrightarrow \forall x \in H \|Tx\| = \|T^*x\|$

2. 无穷维的 Banach 空间不存在可数的 Hamel 基.

3. X 为 $A \in L(X), B \in K(X)$ 证明 $\sigma(A+B) \subset \sigma(A) \cup \sigma(B)$?

4. E 为测度大于 0 的可测集. $f \in L^\infty(E)$. $\int_E w(t)dt = 1$ w 为 E 上可测函数
 有 $w(x) > 0$ 证明 $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\int_E |f(x)|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty$. 且对于几乎处处所有的 $x \in E$

5. E 为测度小于 ∞ 的可测集. $f_k \rightarrow f$ a.e. $x \in E$.

求证 ① 对 \forall 可测集 $e \subset E$ $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_e |f_k(x)|^2 dx = \int_e |f(x)|^2 dx$.

② $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_e |f_k(x) - f(x)|^2 dx = 0$.

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_k(x)|^2 dx \leq \int_E |f_k(x)|^2 dx < +\infty$$