数学科学系博士生资格考试分析试题

一、对$x \in L^1[-\pi,\pi]$及$n \in \mathbf{Z}$，设$\hat{x}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}x(t)dt$. 对整数集合$E$，令

$$C_E = \{x \in C[-\pi,\pi] : \text{对所有的 } n \notin E \text{ 有 } \hat{x}(n) = 0\}.$$

证明C_E是$C[-\pi,\pi]$的闭子空间，其中$C[-\pi,\pi]$赋予范数$\|x\|_\infty = \max_{t\in[-\pi,\pi]}|x(t)|$。再证明若对所有的$x \in C_E$，均有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{x}(n)| < \infty,$$

则存在$\alpha > 0$使得对每个$x \in C_E$有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{x}(n)| \le \alpha\|x\|_\infty.$$

二、设X, Y为Banach空间，$T : X \to Y$为线性算子。又设任取$f \in Y'$及$x_n \in X$满足$x_n \to 0$，均有$f(Tx_n) \to 0$。求证：T为有界线性算子。

三、设X为Banach空间，$A : X \to X$及$B : X' \to X'$均为线性算子。又设任取$x \in X$及$f \in X'$都有$(Bf)(x) = f(Ax)$成立。求证：A, B均为有界线性算子。

连续线性算子.

四、设m为$\mathbf{R}$上的Lebesgue测度，$\mathcal{E} \subset L^1(\mathbf{R}, m)$为相对紧集。求证：任取$\epsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使得任给$f \in \mathcal{E}$，任给可测集$M \subset \mathbf{R}$满足$m(M) < \delta$，都有

$$\int_M |f(t)|dm(t) < \epsilon.$$

五、设m为$\mathbf{R}$上的Lebesgue测度。对于$\lambda > 0$及可测函数$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$，令$E_f(\lambda) = \{t \in \mathbf{R} : |f(t)| > \lambda\}$，且定义$f_*(\lambda) = m(E_f(\lambda))$。若$p > 0$，令$L_*^p(\mathbf{R}, m) = \{f : [f]_p = \sup_{\lambda>0} \lambda f_*(\lambda)^{1/p} < \infty\}$。求证：

1. $\int_{\mathbf{R}} |f(t)|^p dm(t) = p\int_0^\infty \lambda^{p-1} f_*(\lambda)d\lambda$，
2. $L^p(\mathbf{R}, m) \subset L_*^p(\mathbf{R}, m)$且此包含关系为严格的，
3. 若$f, g \in L_*^p(\mathbf{R}, m)$，则$f + g \in L_*^p(\mathbf{R}, m)$，且$[f+g]_p \le 2\big([f]_p + [g]_p\big)$，
4. 若$f \in L_*^p(\mathbf{R}, m)$，且存在$M > 0$，对几乎所有的$t \in \mathbf{R}$有$|f(t)| \le M$。则对于$p < q$有$f \in L^q(\mathbf{R}, m)$，
5. 若$f \in L_*^p(\mathbf{R}, m)$，且$m\{t \in \mathbf{R} : f(t) \ne 0\} < \infty$，则对于$0 < q < p$有$f \in L^q(\mathbf{R}, m)$。