线性算子与线性泛函

算子代数-习题

习题一

1 设 $T: C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ 由

$$(Tx)(t) = y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau, \quad t \in [0,1]$$

T值域是0处为0的绝对连续函数

存在，是微分算子。不线性有界

定义. 找出 $\mathscr{R}(T)$. 问逆算子 T^{-1} 存在否？若存在，它是否线性有界？

2 给定 B 空间 $(X, \|\cdot\|)$, $\mathscr{B}(X)$ 为其算子赋范空间. 设 $T_n, T \in \mathscr{B}(X)$,

$$\|T_n - T\| \longrightarrow 0,$$

T 有有界逆. 证明当 n 充分大时 T_n 有有界逆.

3 已知 X, Y 都是实的或复的线性空间. T 是 $X \longrightarrow Y$ 的线性算子. 证明：T 有左逆，当且仅当 $\mathscr{N}(T) := \{x \in X : T(x) = \theta_Y\} = \{\theta_X\}$. θ_X, θ_Y 分别代表 X 和 Y 的零元.

4 设 X, Y 都是 n 维 (实或复) 空间. T 是 $X \longrightarrow Y$ 的线性算子，证明：$\mathscr{R}(T) = Y$ 当且仅当 T^{-1} 存在 ($\mathscr{D}(X) = X$).

5 设 X 是以 R 为定义域的实函数类，其中每一函数在 R 上处处无限次可微. 利用 $y(t) = (Tx)(t) = x'(t)$. 规定 $T: X \longrightarrow X$. 则 $\mathscr{R}(T) = X$. 问 T^{-1} 存在否？

开映射与闭图像-习题

$\|Tx\|_Y \leqslant \|\widetilde{T}^{-1}\| \|x\|_X.$

那么 $\|Tx\|_Y \leqslant \|\widetilde{T}^{-1}\| \|x\|_X$, 从而 T 有界. □

闭图像定理在验证算子的有界性时往往有效. 一些微分算子要直接验证其连续性比较困难，如果知道它是闭的，那么利用闭图像定理是一条可行的办法.

习题二

1 给定 $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$, $T: \mathscr{D}(T) \to Y$ 是有界线性算子. 若 Y 是 B 空间. T 是闭算子. 证明 $\mathscr{D}(T)$ 是闭集.

2 若线性闭算子有逆，证明逆算子是闭的.

3 给定 $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$, T 是 $X \to Y$ 的线性闭算子. 证明：

(a) X 内的任一自列紧集在 T 之下的象是 Y 内的闭集.

(b) Y 内任一自列紧集在 T 之下的原象在 X 内闭.

4 若 T 是 $X \to Y$ 的闭算子，证明 $N(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$ 是闭子空间.

5 已知 $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$, T_1 是 $X \to Y$ 的闭算子，$T_2 \in \mathscr{B}(X, Y)$. 证明 $T_1 + T_2$ 是闭的.

6 设 X, Y 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，$G \subset X \times Y$ 是积空间内的非空线性子集. 为了使 G 是由 X 的某个子集到 Y 的线性算子的图像，当且仅当 $(0, y) \in G \Longrightarrow y = 0$

7 给定 B 空间 $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$, T 是 $\mathscr{D}(T) \longrightarrow Y$ 的闭算子，$\mathscr{R}(T)$ 是 Y 内的第二纲集. 证明：(1) $\mathscr{R}(T) = Y$; (2) T 是开映射.

8 给定 B 空间 $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$, T 是 $\mathscr{D}(T) \longrightarrow Y$ 的线性算子. 证明：若 $\mathscr{D}(T)$ 是 $(X, \|\cdot\|_X)$ 内的第二纲集，则 T 的有界性与闭性等价.

9 设 T 是由 B 空间 X 到 B 空间 Y 内的有界线性算子，若 T^{-1} 有界，则 $\mathscr{R}(T^*) = X^*$.

10 证明 **Baire 纲定理**：设 X 是完备的距离空间. 则 X 中任意可数个稠开集的交仍然稠.

共鸣定理-习题

习题三

1 设 $(X,\|\cdot\|_X)$ 为 B 空间，$(Y,\|\cdot\|_Y)$ 为赋范空间．$T_n\in\mathscr{B}(X,Y)$，且 $\sup_n\|T_n\|=\infty$．证明：存在一点 $x_0\in X$，使 $\sup\|T_nx_0\|_Y=\infty$．

2 设 $(X,\|\cdot\|)$ 为 B 空间，$\{x_n\}\subset X$．若对每一 $f\in X^*$，数列 $\{f(x_n)\}$ 有界，证明 $\{\|x_n\|\}$ 有界．

3 设 X,Y 都是 B 空间，$T_n\in\mathscr{B}(X,Y)$, $n=1,2,\cdots$ 证明以下三个命题两两等价：

(1)$\{\|T_n\|\}$ 有界；

(2)$\{\|T_nx\|\}$ 对每一 $x\in X$ 有界；

(3)$\{|g(T_nx)|\}$ 对每一 $x\in X$, $g\in Y^*$ 是有界的．

4 若积分 $\int_a^b f(t)g(t)dt$ 对每一 $g(t)\in L^2[a,b]$ 有限，证明 $f\in L^2[a,b]$．

5 若数列 $\{a_n\}$ 对每一 $\{x_n\}\in\ell^p(1\leqslant p<\infty)$ 都使得 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n$ 收敛，则 $\{a_n\}\in\ell^{p'}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$．

6 设 $T_n\in\mathscr{B}(X,Y)$, $(X,\|\cdot\|_X)$ 是 B 空间．若 X 内有个第二纲集 A，使对每个 $x\in A$ 有 $\sup_n\|T_nx\|<\infty$，则 $\sup_n\|T_n\|<\infty$．

7 设 $\{x_n\}\subset X$, X 是 B 空间．若对每一 $f\in X^*$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|<\infty$，证明：存在一常数 $M>0$ 使 $\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|\leqslant M\|f\|$, $\forall\ f\in X^*$．

8 设 $x\in C_{2\pi}$, $s_n(x)$ 是 x 的 Fourier 级数部分和，记 $\sigma_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}s_k(x)$．证明：$\|x-\sigma_n(x)\|_c\to 0$, $\forall\ x\in C_{2\pi}$．

9 给定 B 空间 X,Y．设 $T\in\mathscr{B}(X,Y)$．如果 $\mathscr{R}(T)=Y$, $\mathscr{D}(T)=X$，证明 T^* 有有界逆．

10 设 $(X,\|\cdot\|_X)$ 是 B 空间，f 是 X 上的泛函，满足以下条件：

(1)$f(x)\geqslant 0$, $\forall x\in X$;

(2)$f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$;

(3)$f(\alpha x)=|\alpha|f(x)$;

(4) 若 $\|x_n-x\|_X\to 0$，则 $f(x)\leqslant\limsup_{n\to\infty}f(x_n)$．

证明：存在一常数 $K>0$ 使 $f(x)\leqslant K\|x\|_X$, $\forall\ x\in X$．

弱收敛与弱星收敛-习题

习题三

1 已知 X, Y 为线性赋范空间， $T \in \mathscr{B}(X,Y)$. 若 $x_n \xrightarrow{w} x$, 则 $Tx_n \xrightarrow{w} Tx$.

2 给定 $(X, \|\cdot\|)$, $\{x_n\} \subset X$. 若对每一 $f \in X^*$, 数列 $\{f(x_n)\}$ 都是基本列，就称 $\{x_n\}$ 是弱基本列.

(1) 证明弱基本列是有界的，

(2) 若 X 的任一弱基本列都弱收敛，就称 X 是弱完备的. 证明自反空间是弱完备的.

3 设 $A \subset (X, \|\cdot\|)$. 若 A 的任一非空子集都含有弱基本列，则 A 为有界集.

4 证明：在 ℓ^1 内序列的弱收敛等价于依范收敛.

5 证明：在 $L^2[0,1]$ 内若 $x_n \xrightarrow{w} x_0$ 且 $\|x_n\| \to \|x_0\|$, 则 $\|x_n - x_0\| \to 0$.

6 ℓ^p $(1 < p < \infty)$ 内的点列 $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 弱收敛到 $x^{(0)}$ 当且仅当

(1) $\|x^{(n)}\| \leqslant K$, $n = 1, 2, \cdots$, $K > 0$ 是某个常数;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k^{(0)}$ $\quad k = 1, 2, \cdots$ 其中

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \cdots, x_k^{(n)}, \cdots), \quad x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \cdots, x_k^{(0)}, \cdots).$$

7 证明： $L^p(0,1)$, ℓ^p, 当 $1 \leqslant p < \infty$ 时是弱完备的. 问空间 $C[0,1]$ 是不是弱完备的？

8 证明：若 X 是自反空间，则 X 的任何有界序列 $\{x_n\}$ 内必定含有弱收敛的子列. 有界序列看成X**中元素后能被球Br包住，而Br弱星紧

9 若 X 是自反的，则对任一 $f \in X^*$ 必存在 $x^* \in X$, $\|x^*\| = 1$, 使得

用Hahn-Banach在X**中构造xhat

$$f(x^*) = \|f\|.$$

10 对应于每一正整数 n, 在 $[a,b]$ 内取 n 个点:

$$a \leqslant t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} \leqslant b,$$

同时给定一组实数 $\alpha_1^{(n)}, \cdots, \alpha_n^{(n)}$. 对任一 $f \in C[a,b]$, 置

$$Q_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)} f(t_k^{(n)}).$$

(1) 证明： $Q_n(f)$ 是 $C[a,b]$ 上的线性连续泛函，且

$$\|Q_n\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} |Q_n(f)| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k^{(n)}|.$$

(2) 置 $Q(f) = \int_a^b f(t)dt$. 证明：为使

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(f) = Q(f), \quad \forall f \in C[a,b],$$

必须且只需满足以下条件:

① 存在常数 $K > 0$, 使

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k^{(n)}| \leqslant K, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

② $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n(t^k)$, $\forall k = 0, 1, 2, \cdots$

(3) 证明：任给 $[a,b]$ 的 n 分点 $a \leqslant t_1^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} \leqslant b$, 必存在数组 $\alpha_1^{(n)}, \cdots, \alpha_n^{(n)}$ 使

$$Q_n(t^k) = Q(t^k), \quad k = 0, \cdots, n-1.$$

(4) 证明：给定了 $[a,b]$ 的分点组序列后，如果对于每个自然数 n, 系数组 $(\alpha_1^{(n)}, \cdots, \alpha_n^{(n)})$ 都按 (3) 的条件选取，则对如此规定的 $Q_n(f)$ 欲使

$$Q_n(f) \longrightarrow Q(f), \quad \forall f \in C[a,b],$$

当且仅当存在常数 $K > 0$ 使得

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k^{(n)}| \leqslant K, n = 1, 2, 3, \cdots$$

伴随算子（共轭算子）-习题

习题四

1 已知 M 是内积空间 U 的子空间. 若每个 $x \in U$ 在 M 上都存在正交投影, 则 M 是闭集.

2 给定 $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ 及 $\mathscr{B}(X,Y)$. 设 $T \in \mathscr{B}(X,Y)$. T 的二次伴随算子 T^{**} 定义为 $(T^*)^*$. T^{**} 是 X^{**} 到 Y^{**} 的线性有界算子. 证明：当 X, Y 分别自然嵌入 X^{**}, Y^{**} 时， T^{**} 是 T 的保范延拓，即

$$T^{**}(\pi(x)) = T(x),\ \forall x \in X, \quad \|T^{**}\| = \|T\|.$$

3 设 T 是 Hilbert 空间 H 到 H 的线性算子. 若 $(Tx, y) = (x, Ty)$, 则 T 是自伴的.

4 设 H 是 Hilbert 空间. 若 $T \in \mathscr{B}(H)$, 证明： $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$.

5 设 $L^2[0,1]$ 是平方可和的复函数空间，定义 $T : (Tx)(t) = tx(t)$, $t \in [0,1]$, $x \in L^2[0,1]$. 证明 T 是自伴的.