数学科学系博资考分析试题（2020年10月）

1. 设X为Banach空间，F，G为X的闭线性子空间，并且$F+G:=\{f+g:f\in F,\ g\in G\}$为闭集。求证：存在常数$C>0$，使得任给$x\in X$，存在$f\in F$，$g\in G$，使得$x=f+g$，且$\|f\|\le C\|x\|$，$\|g\|\le C\|x\|$.

2. 叙述并证明一致有界性原理（也称为Banach-Steinhauss定理或共鸣定理）。

3. 设X为Banach空间，称X为一致凸的，如果任取$\epsilon>0$，都存在$\delta>0$，使得任给$x,y\in X$，$\|x\|\le 1$，$\|y\|\le 1$且$\|x-y\|\ge\epsilon$，则必有$\|\frac{x+y}{2}\|\le 1-\delta$。求证：

(i) Hilbert空间均为一致凸的;

(ii) 设X为一致凸的，x_n，$x\in X$，x_n弱收敛到x且$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x\|$。则$x_n$依范数收敛到$x$。举例说明条件$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x\|$是必需的。

4. 设f为闭区间$[a,\ b]$上的Riemann可积函数，求证：f必为Lebesgue可积函数，并且f的Riemann 积分等于f 的Lebesgue积分。

5. 设$E\subset\mathbb{R}^n$为Lebesgue可测集满足$m(E)<\infty$。设$f,f_k\in L^2(E)$，在E上几乎处处有$f_k\to f$，且

$$\limsup_{k\to\infty}\int_E|f_k(t)|^2dt\le\int_E|f(t)|^2dt.$$

求证:

(i) 任给可测子集$F\subset E$，都有

$$\lim_{k\to\infty}\int_F|f_k(t)|^2dt=\int_F|f(t)|^2dt;$$

(ii)

$$\lim_{k\to\infty}\int_E|f_k(t)-f(t)|^2dt=0.$$