Análisis de la ecuación de Laplace con condiciones de frontera poco comunes

Juan Arias Laura Rubiano

Programa

Temáticas abordadas

Ecuación de Laplace

Problema propuesto

Desarrollo matemático

Conclusiones

Ecuación de Laplace

$$\nabla^2 V = 0$$

Una de las ecuaciones más importantes en la electrostática

Maneras de solucionarla

Separación de variables

Método analítco

Método de relajación

Método numérico

Separación de variables

Consiste en definir el potencial como un producto de potenciales dependientes de la posición en solo una coordenada.

Ejemplo en cartesianas 3-dimensionales

$$V(x,y,z) = V_x(x)V_y(y)V_z(z)$$

Si la ecuaión de Laplace se divide sobre el potencial esto da

$$\frac{1}{V_x(x)}\frac{d^2V_x(x)}{dx^2} + \frac{1}{V_y(y)}\frac{d^2V_y(y)}{dy^2} + \frac{1}{V_z(z)}\frac{d^2V_z(z)}{dz^2} = 0$$

Al final se tienen que resolver ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\frac{1}{V_x(x)}\frac{d^2V_x(x)}{dx^2} = C_1$$

Método de relajación

Se parte de la definición de la segunda derivada:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

Ejemplo en cartesianas 2-dimensionales

Se puede crear una cuadrícula de valores en el plano xy con un espacio entre valores de h

(x-h,y+h)	(x,y+h)	(x+h,y+h)
(x-h,y)	(x,y)	(x+h,y)
(x-h,y-h)	(x,y-h)	(x+h,y-h)

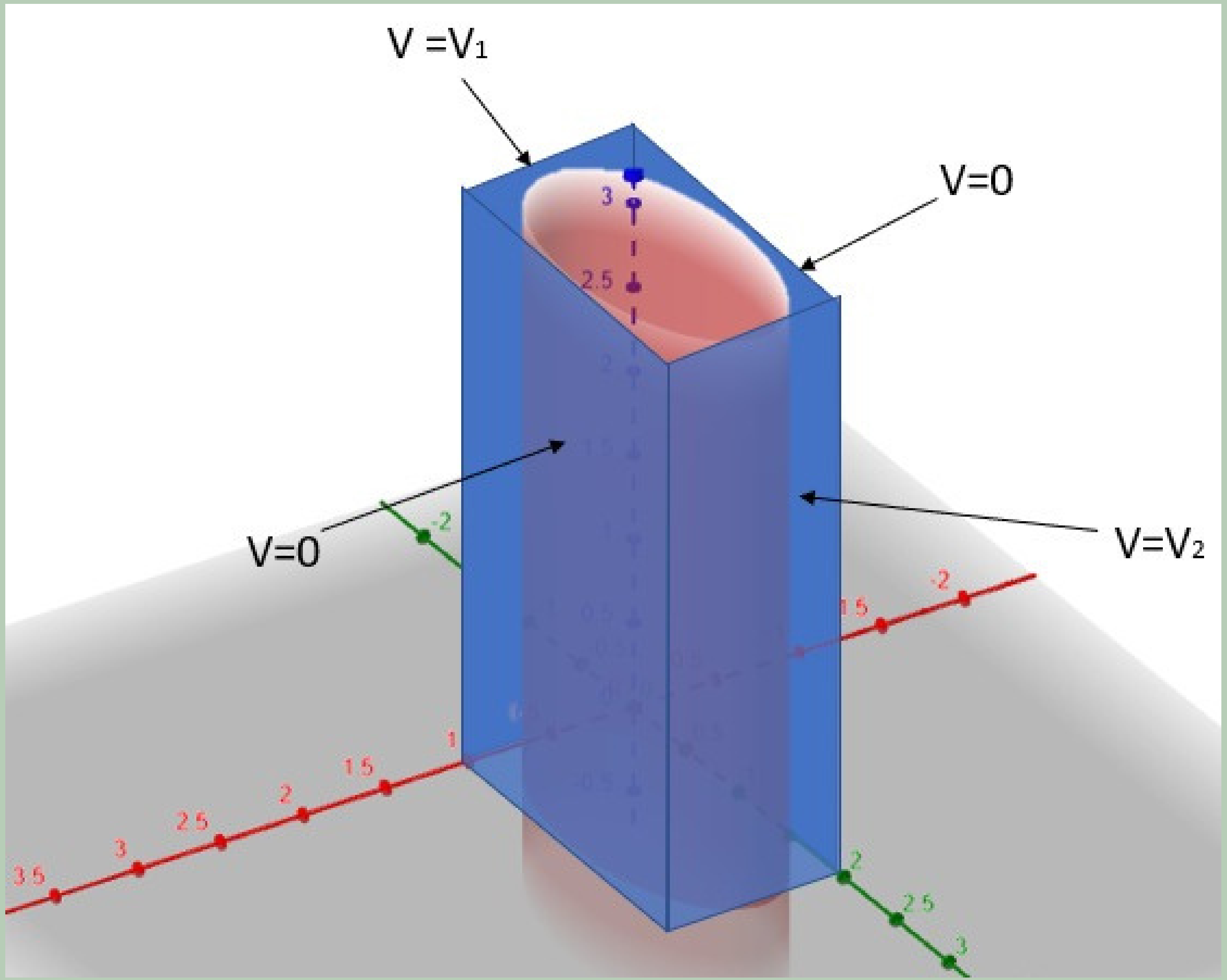
Método de relajación

Por medio de la ecuación de Laplace y reorganizando los valores se llega a:

$$V(x,y) = \frac{V(x+h,y)+V(x-h,y)+V(x,y+h)+V(x,y-h)}{4}$$

De modo que se puede encontrar el potencial en un punto como función del potencial en los puntos adyacentes.

Problema propuesto



Dos lados opuestos de un cilindro infinito con una sección transversal rectangular de longitud a y anchura b, están conectados a tierra. Los otros dos lados se mantienen a potenciales V1 y V2.

Desarrollo matemático

Solución general de la ecuación de Laplace

En cartesianas 2D

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{k_n x} + B_n e^{-k_n x}\right) \left(C_n \cos(k_n y) + D_n \sin(k_n y)\right)$$

Se aplican las condiciones de frontera

$$\Phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{(n\pi/b)x} + B_n e^{(-n\pi/b)x}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

$$V_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) sen\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

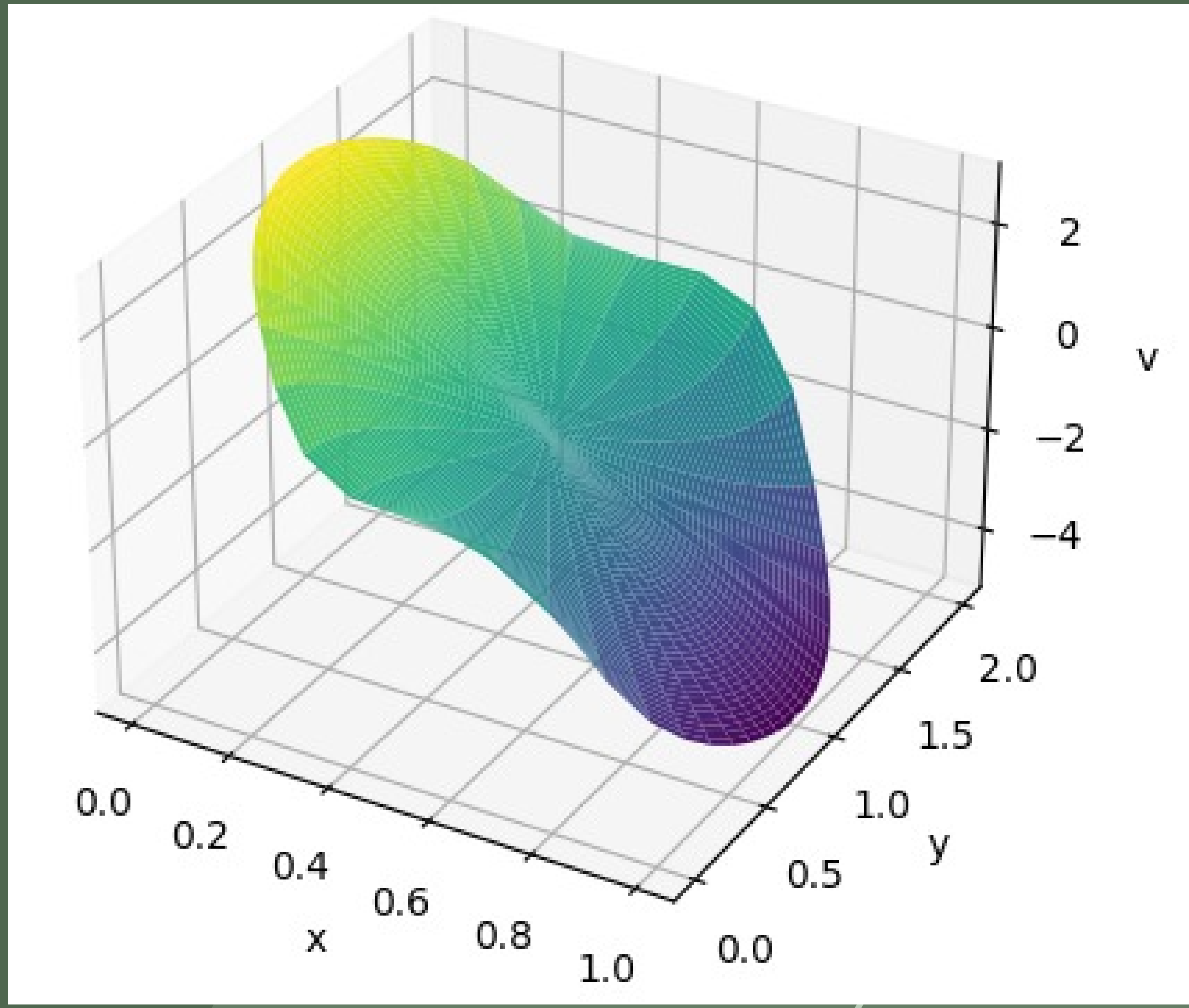
$$V_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{\frac{n\pi}{b} x} + B_n e^{\frac{-n\pi}{b} x}) sen\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

Se despejan los coeficientes

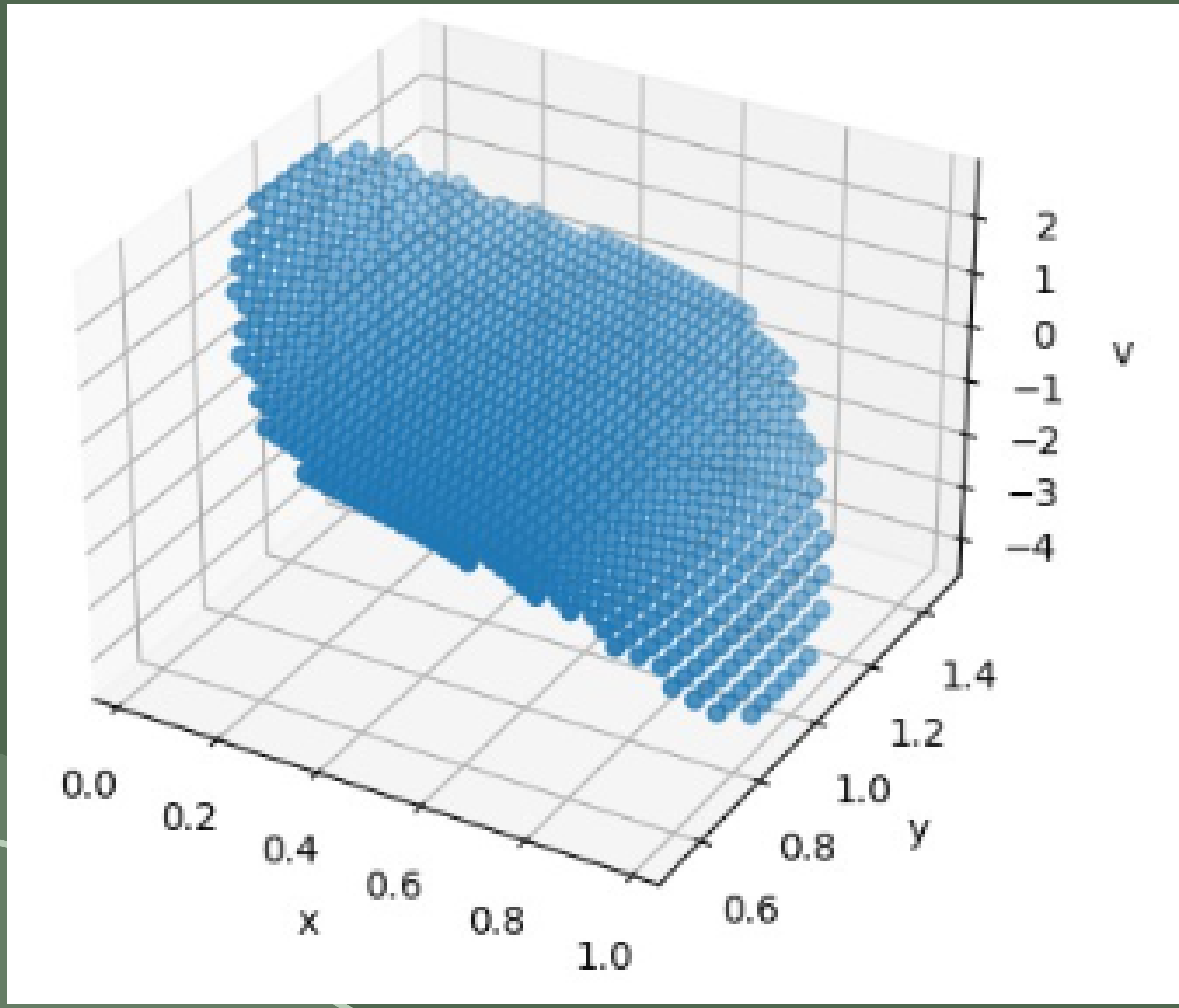
$$\mathbf{A}_n = \left(\frac{1}{n\pi}\right) [1-(-1)^n] \times \left[(V_2 - V_1 e^{\frac{-n\pi a}{b}})/sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)\right]$$

$$\mathbf{B}_n = \left(\frac{1}{n\pi}\right) [1-(-1)^n] \times \left[(V_1 e^{\frac{-n\pi a}{b}} - V_2)/sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)\right]$$

Comparación de métodos

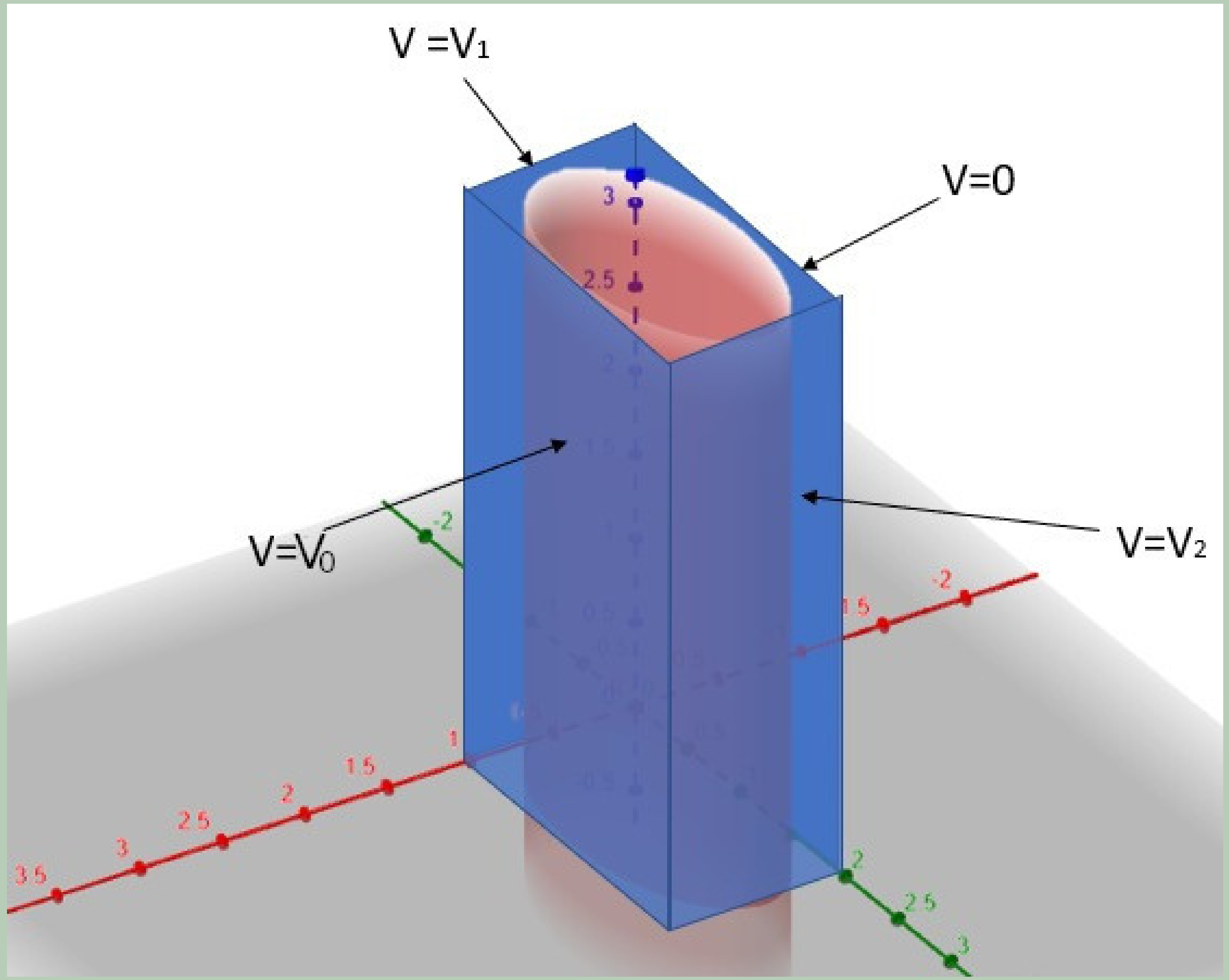


Separación de variables



Relajación

Problema propuesto



Un extremo de un cilindro infinito con una sección transversal rectangular de longitud a y anchura b, está conectado a tierra y su opuesto a un potencial V0. Los otros dos lados se mantienen a potenciales V1 y V2.

Desarrollo matemático

En este caso también se tiene que tomar en cuenta el caso en que k=0.

En este caso se tienen que resolver las ecuaciones diferenciales:

$$\frac{1}{x}\frac{d^2x}{dx^2} = \frac{-1}{y}\frac{d^2y}{dy^2} = 0$$

La solución general de este problema queda de la forma:

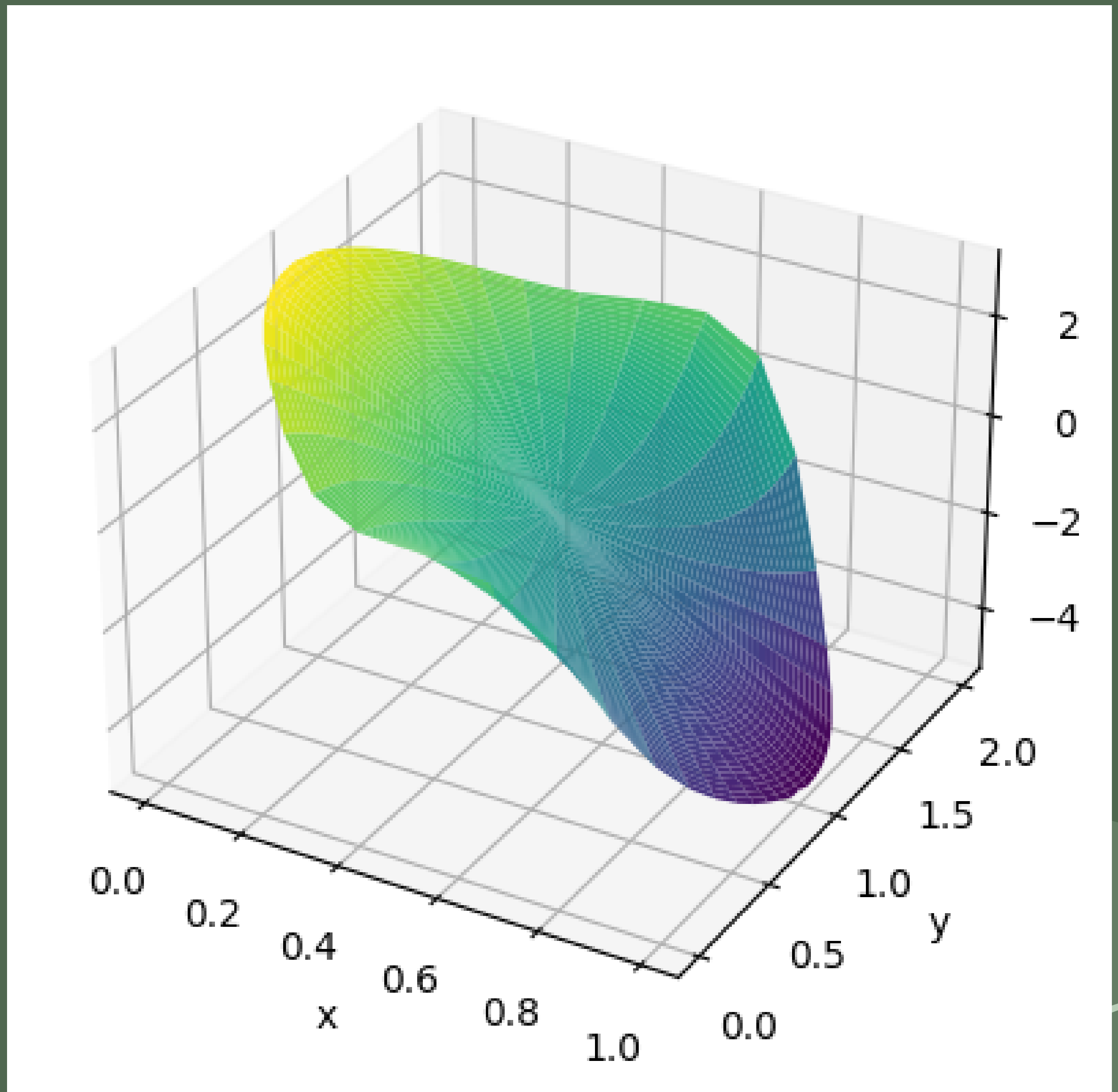
$$\phi(x,y) = (A_0x + B_0)(C_0y + D_0) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_ke^{kx} + B_ke^{-kx}\right)(C_k\cos(ky) + D_k\sin(ky))$$

Una vez aplicadas las condiciones de frontera y despejado los coeficientes se tiene que:

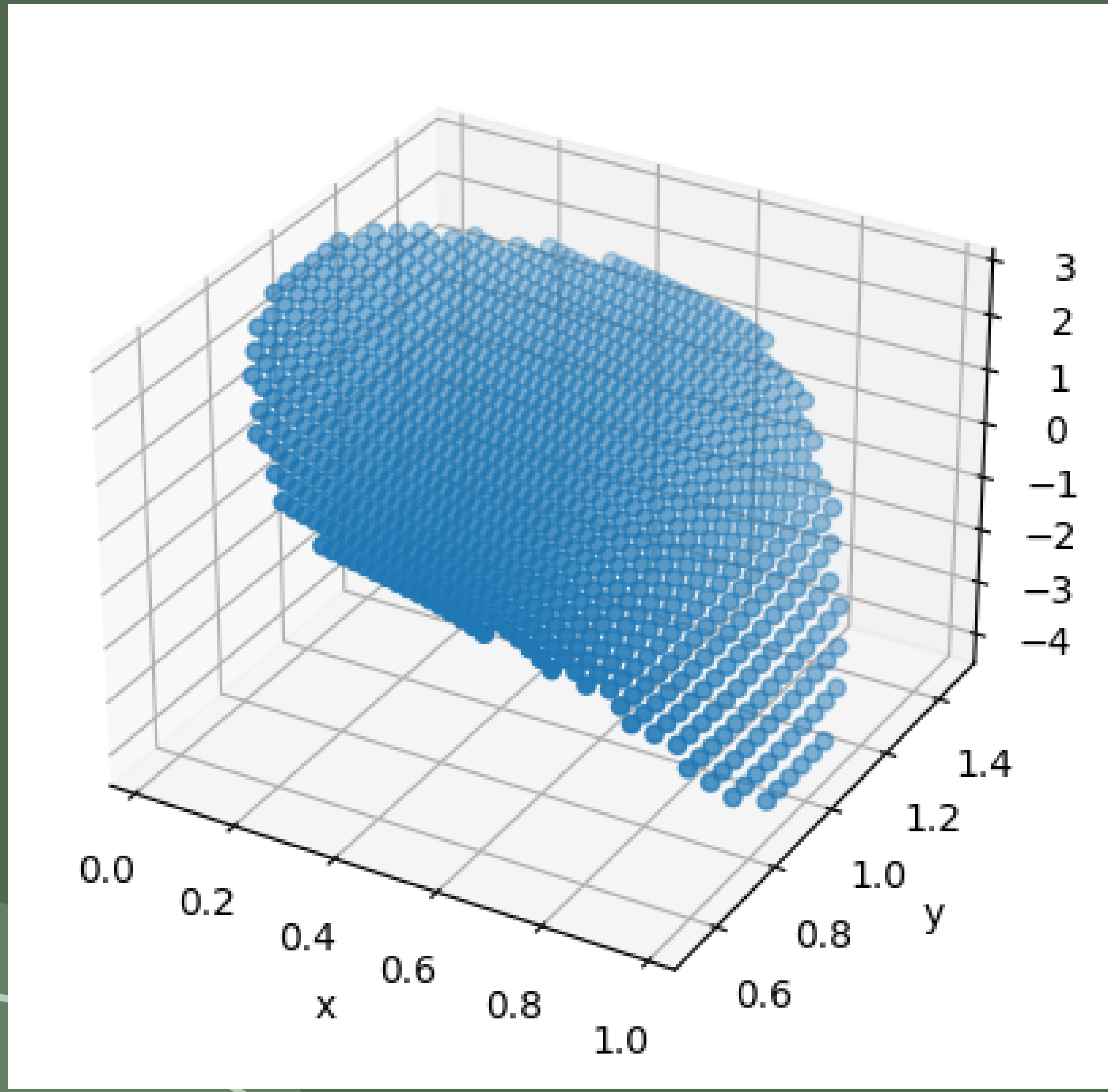
$$\begin{aligned}\Phi(x,y) = \frac{V_0}{b}y + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sinh(n\pi a/b)} \\ \times[V_n^{(2)}\sinh(n\pi x/b) \\ -V_n^{(1)}\sinh[(n\pi/b)(x-a)]]\sin(n\pi y/b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_n^{(1)} &= [V_1 + (-1)^n(V_0 - V_1)] \\ V_n^{(2)} &= [V_2 + (-1)^n(V_0 - V_2)]\end{aligned}$$

Comparación de métodos



Separación de variables



Relajación

Conclusiones

En los problemas presentados el método de relajación resultó siendo más eficiente al no depender de una sumatoria a infinito.

Dadas las funciones obtenidas de forma analítica y la definición del método de separación de variables, en ambos casos se está perdiendo un porcentaje de la información.

Dada su fácil implementación, el método de relajación puede ser un buen primer acercamiento para solucionar problemas de condiciones de frontera muy complejos.