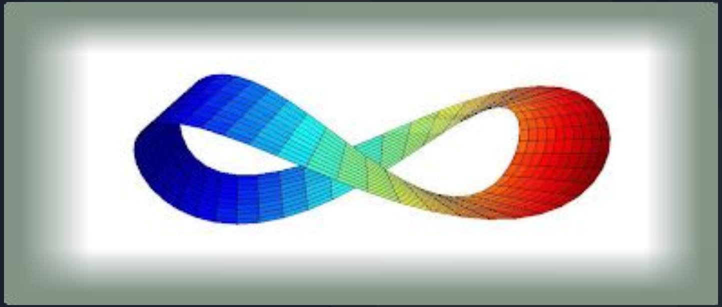
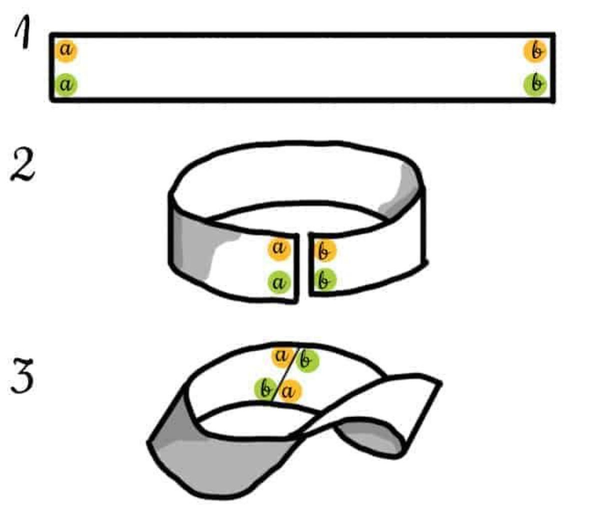
La Cinta de Moebius: Tratando la Continuidad



Natalia Alejandra Martinez
Alejandro Rivera
Juan David Vargas

Mayo 30 de 2023

Introducción



- La cinta de Moebius es una superficie bidimensional proyectada en un espacio tridimensional, la cual tiene una sola cara y un único borde.

- Este concepto matemático es un objeto no orientable, lo cual significa que cualquier sentido direccional (izquierda, derecha, etc.) le es indiferente.

- Si se camina por esta superficie sin cambiar de dirección, eventualmente se acabará en el mismo punto de partida pero en sentido “cabeza abajo”, por lo que si al comienzo se estaba mirando hacia la derecha, al final se estará mirando hacia la izquierda.

- Además, si se sigue caminando en la misma dirección, se llegará al punto de partida habiendo recorrido toda la superficie de la cinta.

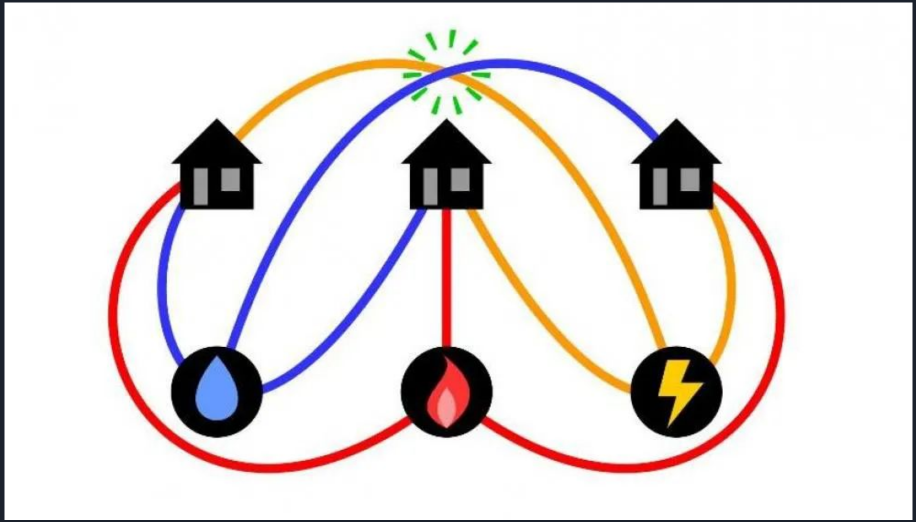
Descripción del Problema

- Las propiedades que posee la cinta de Moebius le permiten resolver problemas que son “imposibles”.

- En el problema de las 3 casas y los 3 suministros, se requiere conectar todas las casas con todas las centrales de suministro de agua, luz y gas, sin que ninguno de los caminos se intersequen.

- Se observa que es imposible diseñar este sistema porque no se puede trazar su respectivo grafo plano.

- Sin embargo, al aplicar el mismo diseño sobre la cinta de Moebius, se conseguirá fabricar una solución.

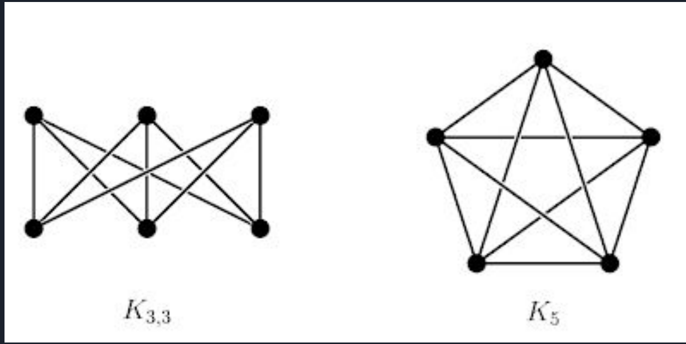


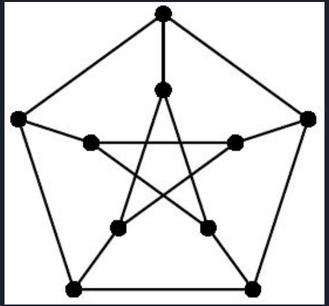
Ejercicios a Desarrollar

- Grafo Completo K5: Grafo con 5 vértices donde todos éstos son adyacentes unos con otros. Es uno de los grafos no planares más conocidos.

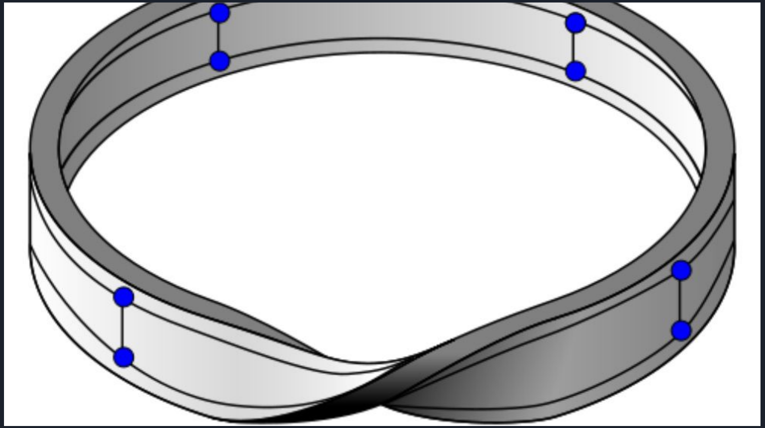
- Los Tres Servicios: Problema que trata de conectar a 3 viviendas diferentes con 3 servicios distintos sin que ninguno de los conductos se cruce con otro. Para solucionar este ejercicio, se dibuja el grafo bipartito completo K(3,3), el cual también se caracteriza por ser no plano.

- Grafo de Petersen: Grafo que consta de 10 vértices y 15 aristas y que además contiene como subgrafos tanto a K3,3 como a K5. Es uno de los grafos más conocidos y estudiados en esta rama de las matemáticas.





Solución Propuesta



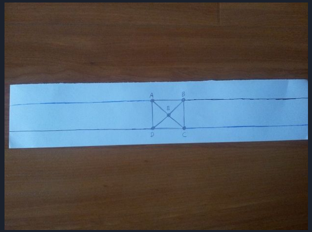
- La solución que se propone para resolver los distintos problemas consiste en convertir grafos no planares en grafos que sí son planos por medio de la cinta de Moebius.

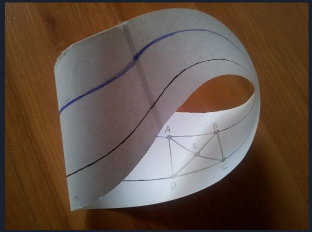
- La idea detrás de este proceso se basa en las propiedades de no orientabilidad y continuidad, las cuales indican que al trazar una línea a lo largo de la banda de Moebius, ésta eventualmente llegará a su punto de partida por el lado contrario del plano.

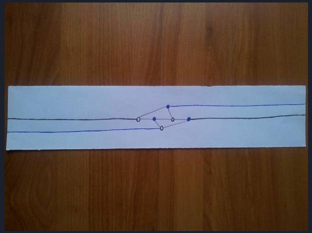
- Esto se representaría en el plano cartesiano común al realizar la contracción de las aristas que rodean la banda de Moebius, ya que el grafo resultante se podrá dibujar de forma plana al no tener que "lidiar" con las aristas removidas.

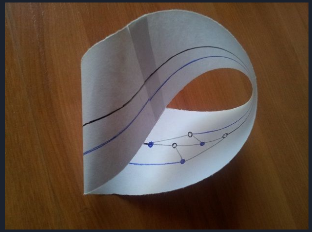
- Se pueden utilizar los algoritmos de Prim y Kruskal para la reducción de grafos complejos en sus respectivos árboles de expansión, lo cual podría facilitar el proceso de evaluación de la "planaridad" del grafo.

Modelamiento en Físico









- La simulación de la banda de Moebius en un espacio físico se realiza por medio de un papel que gira 180 grados sobre su centro y luego se pliega sobre sus extremos inversos.

- En la primera columna, se observa un embebimiento para cada grafo en un plano bidimensional. Éstos cuentan con aristas en los extremos del papel que no se encuentran conectadas, lo que aparentemente causaría que dichos grafos no sean planos.

- En la segunda columna, se observan los mismos embebimientos pero transpuestos dentro de la cinta de Moebius. Las aristas que no se conectaban inicialmente terminan uniéndose y permiten visualizar representaciones que sí son planas.

Conclusiones Finales

- La cinta de Moebius es una superficie con distintos tipos de aplicaciones, dentro de las cuales podemos destacar la resolución de problemas “inconclusos”.

- La cinta de Moebius permite generar embebimientos de grafos planos tales que en una superficie bidimensional común no se podrían realizar.

- El cambio de planaridad de los grafos es posible porque en la cinta de Moebius se puede llegar al mismo punto mediante un recorrido sin cambiar de dirección.

Bibliografía

- Cinta de Moebius. (2022, 03 de Febrero). La Cinta de Moebius. [Online]. Disponible en: https://www.cintademoebius.com/la-cinta-de-moebius/
- R. Ibañez. (2023, 22 de Febrero). Dibujando Grafos sobre la Banda de Moebius. [Online]. Disponible en: https://culturacientifica.com/2023/02/22/dibujando-grafos-sobre-la-banda-de-moebius/
- M. A. Morales. (2013, 29 de Enero). El Problema de las Tres Casas, los Tres Suministros, y la Banda de Moebius. [Online]. Disponible en: https://www.gaussianos.com/el-problema-de-las-tres-casas-y-los-tres-suministros-y-la-banda-de-mobius/
- Salvucci, E. (2019, 28 de Febrero). El problema de las tres casas y los tres servicios. [Online]. Disponible en: https://esalvucci.wordpress.com/2019/02/28/el-problema-de-las-tres-casas-y-los-tres-servicios/
- García, P. (2013, 02 de Febrero). Grafos planos y la informática: "Cuatro colores son suficientes?". [Online]. Disponible en: https://gim.unex.es/blogs/pablogr/2013/02/02/grafos-planos-y-la-informatica-cuatro-colores-son-suficientes/
- Gaussianos. (2013, 29 de Enero). El problema de las tres casas y los tres suministros y la banda de Möbius. [Online]. Disponible en: https://www.gaussianos.com/el-problema-de-las-tres-casas-y-los-tres-suministros-y-la-banda-de-mobius/
- El Voto Batracio. (2012, 21 de junio). Unos grafos que no son planos. [Online]. Disponible en: https://elvotobatracio.blogspot.com/2012/06/unos-grafos-que-no-son-planos-y-la.html