



#SinLímites

CENTRO DE CIENCIA BÁSICA
ESCUELA DE INGENIERIAS
CURSO DE FÍSICA MECÁNICA
ACTIVIDAD EXPERIMENTAL 1

www.upb.edu.co |  Universidad
Bolívariana

MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL:

Un análisis teórico, experimental y computacional

RESUMEN

En este laboratorio se pretende analizar el movimiento de un proyectil sometido solamente a una fuerza de atracción gravitacional. El análisis propuesto involucra un estudio teórico y computacional así como un desarrollo experimental, en el cual se pretende determinar, además de la trayectoria del cuerpo, ciertas características del movimiento, tales como alcance máximo, altura máxima, velocidad del cuerpo en cualquier instante de tiempo, esto dependiendo de las condiciones iniciales del sistema físico. El laboratorio también pretende que el estudiante indague acerca de la pertinencia o no del modelo físico empleado para el análisis del movimiento y que pueda hacer una discusión relacionada con la importancia de incluir nuevas variables en dicho modelo.

Palabras claves: Movimiento parabólico, trayectoria de un cuerpo, proyectil.

1. INTRODUCCIÓN

El objetivo principal de esta actividad experimental es realizar el estudio del movimiento de un cuerpo sometido solo a la atracción gravitacional terrestre. Dicho estudio involucra tres componentes principales:

- a. **Componente teórica:** Con la componente teórica se pretende que el estudiante adquiera las competencias necesarias para aprender a modelar sistemas físicos de baja complejidad y que pueda matematizar acertadamente problema, con el fin de poder hacer un análisis adecuado del fenómeno planteado, y utilizando para esto las herramientas conceptuales dadas en el curso de Física Mecánica.

- b. **Componente experimental:** La componente experimental le dará al estudiante las competencias necesarias para diseñar adecuadamente un experimento, es decir, seleccionar correctamente las variables experimentales a medir, cómo realizar dicha medición y cómo analizar los resultados.
- c. **Componente computacional:** En la componente computacional, el estudiante adquiere las capacidades para modelar un sistema físico a partir de la teoría propuesta con el objetivo de verificar si el modelo planteado se ajusta a los datos experimentales.

El desarrollo de la actividad se debe hacer de manera grupal (máximo 3 estudiantes)

A continuación se hace una descripción de cada una de las componentes mencionadas anteriormente y se presenta el cronograma propuesto para el desarrollo de la actividad, la lista de entregables y la forma de evaluación de dicha actividad

2. COMPONENTE TEÓRICO

El problema que se aborda en este trabajo pretende encontrar la ecuación de la trayectoria que describe un objeto de masa m que es lanzado en un cierto instante t_o desde una posición inicial \vec{r}_o y con una velocidad \vec{v}_o , asumiendo que se encuentra sometido solamente a los efectos de la atracción gravitacional terrestre, tal como se muestra en la Figura 1. En este problema, se utilizará el sistema internacional de unidades (SI) para cada una de las cantidades físicas involucradas.

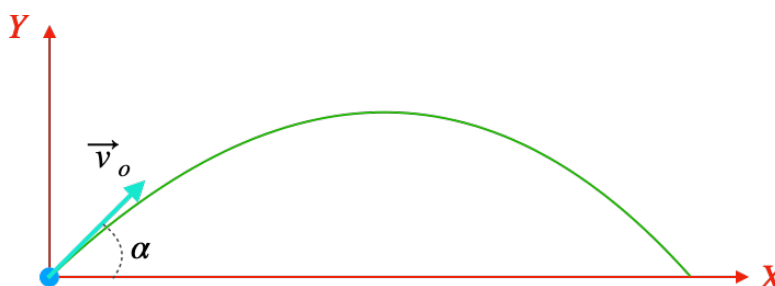


Figura 1. Esquema para el movimiento parabólico.

Para el análisis, se supone que el cuerpo se lanza desde una posición inicial dada por $\vec{r}_o = x_o\hat{i} + y_o\hat{j} + z_o\hat{k}$, donde \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} son los vectores unitarios asociados a la base cartesiana y x_o , y_o , z_o son las coordenadas del cuerpo en $t = 0s$. Adicionalmente se asume que el cuerpo es lanzado con una velocidad inicial $\vec{v}_o = v_{ox}\hat{i} + v_{oy}\hat{j} + v_{oz}\hat{k}$ donde v_{ox} , v_{oy} , v_{oz} son las componentes de la velocidad a lo largo de los ejes cartesianos. Por facilidad en el análisis del problema, se asume

que el movimiento de la partícula ocurre a lo largo del plano XY , teniendo en cuenta que siempre será posible ubicar el sistema de coordenadas de tal forma que se pueda garantizar esta suposición. Haciendo esto, se obtiene que las condiciones iniciales para la posición y la velocidad de la partícula son $\vec{r}_0 = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + 0\hat{k}$ y $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j} + 0\hat{k}$ respectivamente.

La solución del problema comienza con el planteamiento de las ecuaciones dinámicas para la masa m , esto es $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ y $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$, donde \vec{F} y $\vec{\tau}$ son las fuerzas y los torques que se ejercen sobre el objeto y \vec{p} y \vec{L} son los momentos lineal y angulares del sistema. En este estudio se asume que el cuerpo es una partícula, lo que conlleva a despreciar los efectos de la rotación y por ende considerar que $\vec{L} = 0$. Así, sabiendo que $\vec{p} = m\vec{v}$, entonces se obtiene [1,2]:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad (1)$$

En la ecuación (1) se tiene que \vec{v} es la velocidad de la partícula y que $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ es la aceleración del cuerpo con \vec{r} siendo el vector posición de la partícula. Además se considera que la masa del cuerpo es constante, lo que lleva a que el término $\frac{dm}{dt} = 0$. Debido a que m esta sujeto solamente a la atracción gravitacional de la tierra, entonces la fuerza que se ejerce sobre ella se calcula como:

$$\vec{F} = m\vec{g} \quad (2)$$

donde \vec{g} es la aceleración de la gravedad o campo gravitacional terrestre que está siempre dirigida hacia el centro de la tierra y cuya magnitud puede aproximarse a $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, esto es $\vec{g} = -(9.8 \text{ m/s}^2)\hat{j}$. Se asume que el sistema de referencia se toma como se muestra en la Figura 2.

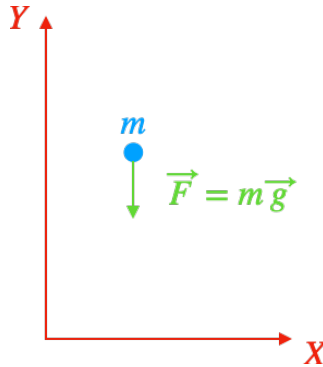


Figura 2. Diagrama de cuerpo libre para la partícula de masa m una vez es lanzada con las condiciones iniciales dadas en el problema.

Luego, de las ecuaciones (1) y (2) se obtiene que la aceleración del cuerpo es $\vec{a} = -g\hat{j}$ y partiendo de esta expresión se pueden obtener las ecuaciones cinemáticas de la partícula esto es, las ecuaciones para $\vec{v}(t)$ y $\vec{r}(t)$.

De acuerdo a la Figura 1, podemos escribir las condiciones iniciales del problema (condiciones para $t = 0s$) tal como se muestra en la ecuación (3)-(5):

$$\vec{r}_0 = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} \quad (3)$$

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos \alpha \hat{i} + v_0 \sin \alpha \hat{j} + 0\hat{k} \quad (4)$$

$$\vec{a} = -g\hat{j} \quad (5)$$

Para determinar la velocidad del cuerpo en función del tiempo se parte de la definición de \vec{a} , lo que lleva a:

$$\vec{a} = -g\hat{j} = \frac{d}{dt}(v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}) \quad (6)$$

e igualando términos en la ecuación (6) se obtiene el conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$0 = \frac{dv_x}{dt} \quad (7)$$

$$-g = \frac{dv_y}{dt} \quad (8)$$

$$0 = \frac{dv_z}{dt} \quad (9)$$

Resolviendo (7) se llega a que $v_x(t)$ es una constante, lo que implica que la componente en X de la velocidad sea $v_x(t) = v_0 \cos \alpha$ en cualquier instante. Para el caso de la ecuación (9), la solución es trivial ya que $v_z = 0$, y la ecuación (8) se resuelve mediante separación de variables, es decir:

$$dv_y = -gdt \quad (10)$$

$$\int_{v_0 \sin \alpha}^{v_y} dv_y = - \int_0^t gdt \quad (11)$$

Al resolver las integrales en (8) se obtiene que:

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt \quad (12)$$

De esta manera se obtiene que:

$$\vec{v}(t) = v_0 \cos \alpha \hat{i} + (v_0 \sin \alpha - gt)\hat{j} \quad (13)$$

De la ecuación (13) se observa que la velocidad del cuerpo a lo largo del eje X es constante, tal como se mencionó anteriormente, lo que implica que dicho movimiento pueda considerarse como un movimiento uniforme. Sin embargo, la componente de la velocidad en Y varía

linealmente en función del tiempo, lo que se interpreta físicamente como un movimiento uniformemente acelerado.

Para encontrar el vector posición $\vec{r}(t)$ se parte de la definición de velocidad $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$ para obtener que:

$$v_o \cos \alpha \hat{i} + (v_o \sin \alpha - gt)\hat{j} = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \quad (14)$$

Igualando términos se encuentra el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales escalares:

$$v_o \cos \alpha = \frac{dx}{dt} \quad (15)$$

$$v_o \sin \alpha - gt = \frac{dy}{dt} \quad (16)$$

$$0 = \frac{dz}{dt} \quad (17)$$

La ecuación (17) nuevamente da una solución trivial, es decir , que $z(t) = 0$. De la ecuación (15) se tiene que:

$$dx = (v_o \cos \alpha)dt \quad (18)$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t (v_o \cos \alpha)dt \quad (19)$$

Al resolver las integrales en (19) se llega a una expresión para la coordenada x del cuerpo de la forma:

$$x(t) = (v_o \cos \alpha)t \quad (20)$$

Ahora, si se analiza la ecuación (16) se tiene que:

$$dy = (v_o \sin \alpha - gt)dt \quad (21)$$

$$\int_0^y dy = \int_0^t (v_o \sin \alpha - gt)dt \quad (22)$$

Así de (22) se obtiene que;

$$y(t) = (v_o \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (23)$$

De las ecuaciones (20) y (23), se llega finalmente a que el vector posición del cuerpo es:

$$\vec{r}(t) = [v_o t \cos \alpha]\hat{i} + \left[(v_o \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right]\hat{j} \quad (24)$$

Para encontrar la trayectoria del cuerpo se debe eliminar el parámetro temporal en la ecuación (24) para obtener una expresión que relaciona las componentes espaciales del movimiento

$$y(x) = (\tan \alpha)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \quad (25)$$

La ecuación (25) se conoce como la ecuación de la trayectoria y representa una ecuación de segundo orden en x , es decir una parábola y los resultados implican que el movimiento es en un plano.

3. COMPONENTE EXPERIMENTAL

Para el desarrollo de la parte experimental, cada grupo de trabajo dispondrá del equipo que se muestra en la figura 3:

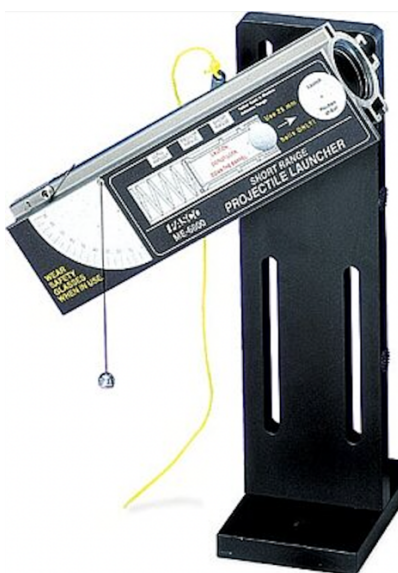


Figura 3. Equipo utilizado para el estudio del movimiento de un proyectil

El equipo consta de un cañón que permite lanzar una esfera de radio determinado con diferentes valores de velocidad inicial y variando el ángulo de lanzamiento. Una vez el cuerpo sale del cañón, sigue una determinada trayectoria, obteniendo así un alcance máximo tanto horizontal como vertical.

El uso del equipo será direccionado por cada profesor, el aula estará dotada con las herramientas básicas de medición (longitud, masa y tiempo) que permitan llevar a cabo la toma correcta de datos y cada grupo podrá hacer uso de herramientas de medición adicionales y para obtener una buena medida del fenómeno en estudio.

4. COMPONENTE COMPUTACIONAL

Para llevar a cabo el análisis computacional se hará uso del lenguaje de programación Python.

Para el apoyo del proceso de aprendizaje, el estudiante podrá:

- Acceder a asesorías con el grupo de profesores del curso, en donde se podrán tener indicaciones acerca del uso básico del programa y ayudas relacionadas con el código que cada grupo esta desarrollando.
- Tener acceso a 3 simulaciones realizadas en Google Colaboratory que permiten tener una mayor claridad sobre el proceso de generación de código y texto. Las simulaciones se presentan en los siguientes links:

Movimiento parabólico: Se simula el movimiento de un objeto lanzado con una velocidad inicial y un ángulo inicial, donde solo se considera el efecto de la gravedad. El enlace es el siguiente:

<https://colab.research.google.com/github/FerneyOAmaya/DataLiteracy/blob/master/Parabolico.ipynb>

Caída de un objeto en un medio viscoso: Se simula la caída de un objeto a través de dos medios con diferentes densidades y valores de viscosidad. Se considera el efecto de la gravedad, la fuerza de empuje y la fuerza de rozamiento (ley de Stokes). El enlace es el siguiente:

https://colab.research.google.com/github/FerneyOAmaya/DataLiteracy/blob/master/Caida_friccion.ipynb

Movimiento vertical de un cohete: Se simula el movimiento vertical de un cohete, no se considera la viscosidad. Se considera el efecto de la gravedad y la fuerza de empuje debida a la propulsión del cohete. También se considera el efecto del cambio de la masa debido a la expulsión de combustible. El enlace es el siguiente:

<https://colab.research.google.com/github/FerneyOAmaya/DataLiteracy/blob/master/Cohete.ipynb>

5. PROCESO DE EVALUACIÓN:

La evaluación del laboratorio consta de dos ítems:

- I. Evaluación oral acerca de la práctica a realizar: Para esto, se dejarán una serie de preguntas que cada grupo de trabajo debe previo a la realización del laboratorio. Así, durante la práctica el profesor evaluará dicho contenido, en cada equipo, y dará una nota grupal que corresponde al 10% de la nota total del laboratorio.
- II. Entrega de informe tipo artículo: Cada equipo deberá presentar un informe tipo artículo ocho días después de haber realizado la práctica. Se entregará un formato que les servirá de guía para preparar dicha actividad, la cual corresponde al restante 80% de la nota del laboratorio.

6. ITEMS A PREPARAR ANTES DE REALIZAR LA PRÁCTICA

A continuación se enumeran una serie de preguntas que deben ser respondidas de manera grupal antes de la práctica.

- a) ¿Cuáles son las condiciones iniciales del problema a tratar?
- b) ¿Cuáles son las ecuaciones de movimiento o cinemáticas del proyectil?
- c) ¿Cuáles son las expresiones para los parámetros de vuelo del proyectil? Esto es, altura máxima alcanzada por el cuerpo, tiempo de vuelo, alcance máximo.
- d) Asumiendo que el proyectil se lanza horizontalmente con una cierta velocidad inicial \vec{v}_0 y a una altura h_0 ¿Qué mediciones experimentales se deben tomar para determinar el valor de la velocidad inicial del cuerpo?
- e) ¿Cuál es el ángulo de máximo alcance del proyectil para el caso en que este se lance desde el suelo? Demuestre el resultado obtenido.

7. PRESENTACIÓN DEL INFORME TIPO ARTÍCULO.

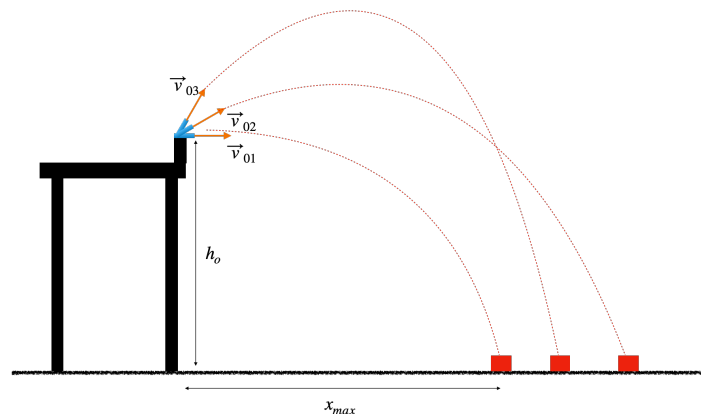


Figura 4. Análisis sugerido para el trabajo.

Se pretende analizar el movimiento de un proyectil para tres ángulos de lanzamiento diferentes, tal como se muestra en la figura 4. Cada grupo de trabajo debe abordar los temas propuestos a continuación, las cuales están basadas en el experimento realizado. Los mismos deben tener un soporte tanto teórico como computacional.

7.1.1. Determinar a partir de las condiciones iniciales del problema, las ecuaciones de movimiento para el proyectil. En este punto, cada grupo debe realizar lanzamientos que correspondan a tres ángulos diferentes.

7.1.2. Calcular los parámetros de vuelo del proyectil, esto es, altura máxima, alcance máximo y tiempo de vuelo.

7.1.3. Los resultados obtenidos deben presentarse en formato tipo artículo, y dicho formato será suministrado por el profesor del curso

7.1.4. La lista de chequeo para la evaluación de dicha actividad se presenta en la tabla 1.

Tabla 1. Lista de chequeo

LISTA DE CHEQUEO, LABORATORIO 1 FISICA MECÁNICA				
Título de la presentación:				
Autores:				
Actividades	Cumplimiento		Ponderación	Nota Asignada
	SI	NO		
Introducción al problema			15	
Marco teórico			20	
Presentación del experimento			20	
Análisis de resultados			20	
Conclusiones			15	
Tiempo de la presentación			10	
NOTA FINAL			100%	

8. BIBLIOGRAFIA

[1] Marcelo Alonso, Edward J. Finn, Física, Vol 1: Mecánica, Editorial Fondo educativo interamericano, S.A.

[2] Sears y Zemansky, Física Universitaria, Volumen 1, Decimotercera edición, Editorial Pearson

Créditos: Este documento fue realizado por el profesor Juan Serna. La revisión del mismo fue llevada a cabo por los profesores del curso de Física Mecánica.

Ultima actualización: Agosto de 2022