NOM et Prénom : ....

GROUPE : ....

Analyse et Probabilité 2 - Contrôle continu numéro 4

Durée : 5 heure 00

LE BARÊME EST INDICATIF.

Le sujet comporte trois exercices indépendants.
Dans la notation, une importance sera accordée à la qualité de la rédaction et de la présentation.
Attention à enregister **correctement (orientation, éclairage, ...)** le document avant inclusion dans Moodle.
Le format **doit être du .pdf**.

Exercice 1 (5 points) On considère l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants

$$y'' - 4y = 5\exp(2x) \qquad (*)$$

1) (0,5 points) Donner l'équation homogène.
2) (1 point) Donner les solutions générales de l'équation homogène.
3) (0,5 points) Donner la forme d'une solution particulière de $(*)$.
4) (3 points) Déterminer une solution particulière de $(*)$ et en déduire les solutions générales de $(*)$.

Exercice 2 (6 points)
Deux personnes A et B écrivent chacune au hasard un nombre entier de deux chiffres. Soient m le nombre écrit par A et n le nombre écrit par B. Pour modéliser cette expérience, on considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu)$ où Ω est l'ensemble des couples (m, n) tels que $10 \leq m \leq 99$ et $10 \leq n \leq 99$, la probabilité μ choisie étant la probabilité uniforme.

1) (2 points) Combien de couples distincts (m, n) peut on former avec $10 \leq m \leq 99$ et $10 \leq n \leq 99$?
2) (2 points) Calculer la probabilité pour que A et B écrivent le même nombre.
3) (2 points) Calculer la probabilité pour que A et B écrivent chacun un nombre inférieur strictement à 50.

Exercice 3 (9 points)
On considère l'ensemble $\Omega_1 = \{a, b, c, d, e, f\}$ muni de la tribu habituelle $\mathcal{P}(\Omega_1)$:

1) (1 point) On pose $\mu(\{a\}) = 1/21$, $\mu(\{b\}) = 2/21$, $\mu(\{c\}) = 3/21$, $\mu(\{d\}) = 4/21$, $\mu(\{e\}) = 5/21$, et $\mu(\{f\}) = 6/21$. Montrer que μ permet de définir une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega_1)$.
2) (2 points) Calculer $\mu(\{a, b\})$, $\mu(\{e, f\} \mid \{a, b\})$.
3) (1 point) Les événements $\{c, d\}$, $\{e, f\}$ sont ils indépendants ?
   Soit le sous ensemble $\mathcal{A}_1$ de $\mathcal{P}(\Omega_1)$ suivant :

$$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e, f\}, \{c, d, e, f\}, \Omega_1\}$$

4) (2 points) Montrer que $\mathcal{A}_1$ est une sous tribu de $\mathcal{P}(\Omega_1)$.

— Dans la suite de l'exercice, on suppose que Ω_1 est muni de la tribu $\mathcal{A}_1$ ainsi que de la probabilité μ restreinte à $\mathcal{A}_1$. Soit l'ensemble $\Omega_2 = \{-1, 0, 1\}$ muni de la tribu $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{-1\}, \Omega_2\}$. On considère la fonction X définie comme suit :

$$X : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2 \quad / \quad \begin{cases} X(a) = X(b) = 1 \\ X(c) = X(d) = 0 \\ X(e) = X(f) = -1. \end{cases}$$

5) (2 points) Montrer que X est une variable aléatoire.
6) (2 points) Déterminer la loi de X.
7) (2 points) Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $Var(X)$ de X.