Oscillateur harmonique amorti

1 Oscillations libres

1.1 Etablissmeent des équations

1.1.1 Ressort amorti

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

Où α correspond à un frottement visqueux, k est la raideur du ressort et m la masse de l'objet accroché au ressort.

1.1.2 Pendule pesant

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta}$$

Où g est l'accélération de la pesanteur, l la longueur de la tige. La formule est valable dans l'approximation des petits angles θ. $\theta \sim \sin\theta$

1.1.3 Circuit RLC série

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i = 0$$

Où L est l'inductance de la bobine, R la valeur de la résistance et C la valeur de la capacié du condensateur. En utilisant la charge q qui est le primitive du courant (le couran test la dérivée de la charge passant par unité de temps, on arrive à

$$\boxed{\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0}$$

1.1.4 Force de gravité, force électrostatique

On utilise la loi des aires $r^2\dot{\theta} = C$, où C est une constante et r et θ sont les coordonnées polaires. On utilise ausis le changement de variable $u = 1/r$ et les formules de Binet. On obtient

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{K}{c^2}}$$

On peut aussi rajouter un frottement, par exemple en rajoutant des forces de marées.

1.1.5 Pendule de torsion

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{J}\dot{\theta} + \frac{C}{J}\theta + 0}$$

J est le moment d'inertie, C est le couple de torsion.

1.2 Résolution de l'équation.

1.2.1 Discussion physique

On peut ici faire une analogie avec l'amortisseur de voiture. On passe sur un nid de poule et on regarde la réponse de la voiture.

- Retour lent àl'équilibre. En général la suspension rend malade
- Retour rapide et efficace à l'équilibre. La voiture a une très bonne tenue de route, mais la suspension est un peu raide
- La voiture se met à osciller. La suspension est foutue.

On retrouve ces trois régime lorsque l'on résout l'équation.

1.2.2 Petite digression mathématique

En gros, la seule chose que l'on sait correctement résoudre en mathématiques est une équation différentielle du type $\dot{x} = \alpha x$ qui donne $x = x_0 \exp(\alpha t)$. Ici on a

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

On va essayer de se ramener à une équation du type de la précédente. Pour cela on introduit la variable $y = \dot{x}$. On a alors un système de 2 équations différentielles à 2 inconnues

$$\begin{array}{rl} \dot{y} = & -2\beta y - \omega_0^2 x \\ \dot{x} = & y \end{array} \quad \text{soit} \quad \dot{u} = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\beta & -\omega_0^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \dot{u} = Mu \quad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} -2\beta & -\omega_0^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La solution de cette équation est

$$u = u_0 e^{Mt}$$

Pour pouvoir écrire une telle formule, soit on développe l'exponentielle en série entières, on on diagonalise la matrice. On choisit la seconde solution. Il nous faut donc diagonaliser. Calculons

$$det(M - \lambda Id) = \begin{vmatrix} -2\beta - \lambda & -\omega_0^2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \boxed{\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0}$$

On appelle cette équation l'équation caractéristique. Lorsque l'on a deux racines distinctes, α_1 et α_2, on a

$$M = R^{-1} \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha_2 t} \end{pmatrix} R$$

Où R est la matrice de passage. Donc la solution s'écrit

$$x = \gamma_1 e^{\alpha_1 t} + \gamma_2 e^{\alpha_2 t}$$

γ_1 et γ_2 dépendent des conditions initiales.

1.2.3 Résolution physique du problème

Equation caractéristique A partir de $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, on cherche les racines de l'équation caractéristique

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

On calcule le discriminant

$$\Delta = 4\beta^2 - 4\omega_0^2 = 4\Delta' \quad \text{avec} \quad \Delta' = \beta^2 - \omega_0^2$$

1. Si $\Delta' < 0$, on a deux racines r_1 et r_2, complexes conjuguées l'une de l'autre.

   $$\begin{array}{rcll} r_1 & = & -\beta & +i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \\ r_2 & = & -\beta & -i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \end{array}$$

   La solution de l'équation différentielle est de la forme

   $$x = e^{-\beta}(Ae^{it\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} + Be^{-it\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}})$$

   On peut vérifier que x sous cette forme vérifie bien l'équation différentielle au dessus.

2. Si $\Delta' = 0$, on a une seule racine $r = \beta$. La solution de l'équation différentielle est de la forme

$$x = (At + B)e^{-\beta t}$$

On peut vérifier que x sous cette forme vérifie bien l'équation différentielle au dessus.

3. Si $\Delta' > 0$, on a deux racines r_1 et r_2, réelles.

$$\begin{array}{rcl} r_1 & = & -\beta \quad +\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \\ r_2 & = & -\beta \quad -\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \end{array}$$

La solution de l'équation différentielle est de la forme

$$x = Ae^{t(-\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})} + Be^{t(-\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})}$$

On peut vérifier que x sous cette forme vérifie bien l'équation différentielle au dessus.

Frottements faibles Ceci signifie tout simplement que l'oscillation l'emporte sur les frottements, soit $\omega_0^2 > \beta^2$. On est donc dans le cas $\Delta' < 0$. On a deux racines complexes et la solution s'écrit

$$x = e^{-\beta t}(Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}) \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

La solution x doit être réelle, le terme entre parenthèse est une combinaison linéaire de sinus et cosinus.

$$\boxed{x = e^{-\beta t}(X_0 \cos \omega t + Y_0 \sin \omega t) = e^{-\beta t} X_m \cos(\omega t + \varphi)}$$

– Le premier terme est une exponentielle décroissante et représente l'enveloppe du mouvement de l'oscillateur. Cette écroissance est guidée par β qui traduit l'amortissement (ou la dissipation de chaleur par effet Joule dans le cas du courant) plus ou moins prononcé du mouvement.

  Remarque : Pour $\beta = 0$ on retombe sur l'oscillateur harmonique.
– Le second terme est un coinus qui traduirait la périodicité du mouvement si il n'y avait pas d'amortissement. Comme l'amplitude varie, on parle de pseeudo périodicité.

  Remarque : $\omega < \omega_0$, les frottements ralentissent le mouvement

Oscillateur critique Cela correspond au cas $\Delta' = 0$. Ce régime tire son nom du fait que l'on passe d'un régime d'oscillation à un régime sans oscillations. La solution de l'équation s'écrit

$$\boxed{x = (AT + B)e^{-\beta t}}$$

Les constantes A et B sont déterminées par rapport aux conditions initiales. Il s'agit du régime pour lequel l'oscillateur revient dans sa position d'équilibre au bout d'un temps minimal.

Régime apériodique Correspond au cas $\Delta' > 0$. On n'a plus d'oscillations périodiques. La solution de l'êquation est

$$\boxed{Ae^{t(-\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})} + Be^{t(-\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})}}$$

En principe le retour à la position d'équilibre se fait au bout d'un temps infini.

1.3 Portait de phase

L'équation différentielle est du type

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

si l'on multiplie l'équation par $\dot{x}$, puis par m masse su système. On a

$$m\ddot{x}\dot{x} + m\omega_0^2\dot{x}x = \frac{d}{dt}(m\frac{\dot{x}^2}{2} = m\omega_0^2\frac{x^2}{2}) = -2\beta\dot{x}^2$$

C'est la traduciotn énergétique de l'équation différentielle. Si $\beta = 0$, absence de frottements, on a

$$m\frac{\dot{x}^2}{2} = m\omega_0^2\frac{x^2}{2} = E$$

où E est une constante. Traçons un graphe sur lequel on porte x en abscisse et $\dot{x}$ en ordonnée. On obtient alors une ellipse qui définit ce que l'on appelle le portrait de phase de l'oscillateur. Il représente l'ensemble des trajectoires réalisées par le même oscillateur à partir de toutes les conditions initiales réalisables.

Remarque : Il n'est pas indifférent de parcourir la spirale dans un sens ou dans l'autre. Le mouvement n'est pas invariant par renversement du temps. Les frottements entraînent l'irréversibilité du mouvement.

2 Oscillation entretenues

2.1 Obtention de équations

2.1.1 Circuit RLC série

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i = U_0 \cos\omega t$$

2.1.2 Ressort

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = a_0 \cos\omega t$$

2.2 Diagramme de Fresnel

2.2.1 Electricité

La tension aux bornes du circuit RLC est égale à la tension d eforçage.

Conséquences

- On lit directement le dépahsage sur le diagramme.
- Si par exemple, on fait varier la fréquence d'excitation, il existe une valeur de ω pour laquelle $L\omega i - \frac{1}{c\omega}i = 0$. On a alors la tension et le courant qui sont en phase. C'est aussi la valeur pour laquelle $u_R = Ri$ est minimale, donc valeur pour laquelle le courant dans le circuit est maximal.
- On a ici affaire à un phénomène de résonance. Si la résistance est nulle, $i \to \infty$

2.2.2 Mécanique

On peut aussi utiliser le diagramme de Fresnel en mécanique

Conséquences

- On lit directement sur le graphe, le déphasage entre le forçage et la réponse.
- Ils sont en phase quand l'amortissement est nul.
- Le frottement joue le rôle de la dissipation par effet Joule. Ce sont en fait les deux phénomènes pour lesquels il y a dissipation d'énergie sous forme de chaleur.
- Il existe aussi un phénomène de résonance en amplitude. Attention cependant. On regarde ici sur la position x, alors qu'en électricité, on regardait sur le courant qui correspond à la vitesse.

2.3 Résolution du circuit RLC série

2.3.1 Utilisation des complexes.

On a trois éléments montés en série

- Une bobine d'impédance $jL\omega$
- Une résistance d'impédance R
- Un condensateur d'impédance $\dfrac{1}{jC\omega} = \dfrac{-j}{C\omega}$

On a donc une impédance équivalente

$$\underline{Z} = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})$$

On peut écrire pour les amplitudes complexes $\underline{U} = \underline{Z}\underline{I}$, où $\underline{U}$ est donné, $\underline{Z}$ a été calculé et $\underline{I}$ est ce que l'on cherche donc

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})}$$

2.3.2 Calcul du déphasage

$$\varphi = Arg(\underline{I}) = Arg\underline{U} - Arg\underline{Z} = -Arg\underline{Z}$$

car $Arg\underline{U} = 0$. la tangente de l'argument est la partie imaginaire divisée par la partie réelle.

$$\boxed{\tan\varphi = -\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}}$$

- Si le circuit est inductif, $L\omega > \frac{1}{C\omega}$, $\varphi < 0$, l'intensité est en retard sur la tension.
- Si le circuit est capacitif, $L\omega < \frac{1}{C\omega}$, $\varphi > 0$, l'intensité est en avance sur la tension.
- Si le circuit est purement résitif, $L\omega = \frac{1}{C\omega}$, $\varphi = 0$,

2.3.3 Calcul de la valeur efficace du courant.

$$\boxed{I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}}$$

On a la même chose pour la vitesse dans la cas des oscillations mécaniques.

2.4 Phénomène de résonance en intensité

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$

Cette fonction admet un maximum pour $LC\omega^2 = 1$ auquel cas on a $I = \frac{U}{R}$. Ceci correspond d'ailleurs à $\omega^2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^2$. Si l'on pose $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $Q_0 = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$, l'intensité en fonction de x s'écrit

$$I = \frac{U}{R\sqrt{(1 + Q_0^2(x - \frac{1}{x})^2)}}$$

2.4.1 Allure de la courbe

On peut tracer la courbe $I = f(x)$ et $\varphi = g(x)$.

2.4.2 Phénomène de résoannce

Il existe une valeur de ω pour laquelle I est maximale. C'est le phénomène de résonance.

Exemples
- Le salaire de la peur [1]
- Soldats sur un pont [2]
- Pont de Tacoma [3]
- Marnage à Saint Malo et de l'autre côté de la Manche

2.5 Résonance en position

2.5.1 Variation de la position en fonction de ω

Pour le passage de l'intensité à la position, il faut faire correspondre les quantités suivantes.
- $L \to m$
- $R \to f$
- $1/C \to k$

Le phénomène de résonance en intensité correspond à un phénomène de résonace en vitesse. En position on a

$$X_0 = \frac{F_0/m}{|-m\omega^2 + j\omega f + k|} = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2 f^2}{m^2}}} \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Attention ! En postion, la fréquence poiur laquelle on a résonance dépend du coefficient d'amortissement. Pour certaines valeurs des paramètres $\omega_0^2 < \frac{f^2}{2m^2}$, il n'y a pas de phénomène de résonance.

2.5.2 Allure de la courbe

2.6 Acuité de la résonance

On a précédemment écrit que

$$\boxed{I = \frac{U}{R\sqrt{(1 + Q_0^2(x - \frac{1}{x})^2)}}} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}, \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{et} \quad Q_0 = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

2.6.1 Définition de l'acuité

La fonction précédente est maximale pour $x = 1$, c'est à dire pour $\omega = \omega_0$ On a alors un phénomène de résonance. Autour de ω_0, on définit deux fréquences ω_1 et ω_2 telle que $I = \frac{I_{res}}{\sqrt{2}} = \frac{U}{R\sqrt{2}}$.

Attention I et U sont les valeurs efficaces. On cherche donc x_1 et x_2 (soit ω_1 et ω_2) tels que $I(x_1) = I(x_2) = \dfrac{I(x=1)}{\sqrt{2}}$. On a deux équations du second degré à résoudre. On trouve

$$\boxed{x_2 - x_1 = \frac{1}{Q_0} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0}}$$

La résonance sera d'autant plus aïgue que $\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0}$ sera faible et donc que Q_0 sera grand.

2.6.2 Résolution graphique

La quantité $Q_0 = \dfrac{L\omega_0}{R} = \dfrac{1}{RC\omega_0}$ est appelé **facteur de qualité** de la résonance. On appelle bande passante du circuit la quantité $\Delta f = f_2 - f_1 = \dfrac{\omega_2 - \omega_2}{2\pi}$

2.6.3 Facteur de surtension

Regardons à résonance les tensions aux bornes du conducteur et de la bobine.

$$\underline{U_L} = jL\omega_0 \underline{I} jL\omega_0 \frac{\underline{U}}{R} = jQ_0 U \quad \text{donc} \quad U_L = Q_0 U$$

$$\underline{U_C} = \frac{1}{jC\omega_0}\underline{I} = \frac{1}{jC\omega_0}\frac{\underline{U}}{R} = -jQ_0 U \quad \text{donc} \quad U_C = Q_0 U$$

Q_0 est aussi appelé le **facteur de surtension** du circuit.

Remarque : U_L et U_C ont même module mais sont en opposition de phase.

2.6.4 Déphasage

On a vu précdemment que

$$\tan\varphi = -\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = -Q_0(x - \frac{1}{x}$$

Pour $x = x_1$, $x_1 - \dfrac{1}{x_1} = -\dfrac{1}{Q_0}$ donc $\tan\varphi = 1 \to \varphi = \pi/4$. Pour $x = x_2$, $x_2 - \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{Q_0}$, donc $\tan\varphi = 1 \to \varphi = -\pi/4$.
La phase du courant tourne de $\pi/2$ lorsque l'on décrit le petit intervalle de fréquence correspondant à la bande passante.

2.7 Aspect énergétique

2.7.1 A résonance

Dans le circuit, la puissance instantanée aux bornes d'un dipôle est $ui = r(t)$. C'est une grandeur qui varie sinusoïdalement. On définit la puissance moyenne par

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt$$

Aux bornes de la résistance On a $\underline{U_R} = r\underline{I}$, donc $P(t) = U\sqrt{2}I\sqrt{2}\cos^2(\omega t)$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = 2UI\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)dt = RI^2 = \frac{1}{2}RI_{max}^2$$

Pendant une période, l'énergie dissipée par effet Joule est

$$\boxed{\frac{1}{2}RI_{max}^2}$$

Aux bornes de la bobine $\underline{U_L} = jL\omega\underline{I}$,

$$P(t) = U_L\sqrt{2}I\sqrt{2}\cos(\omega t + \pi/2)\cos(\omega t) = -2U_L I\sin(\omega t)\cos(\omega t)$$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = -2U_L I\frac{1}{T}\int_0^T sin(\omega t)\cos(\omega t)dt = 0$$

La bobine ne consomme pas d'énergie. Elle emmagasine puis restitue ce courant. Calculons l'énergie sur le premier quart de période.

$$W_L = -\frac{1}{2}LI_{max}^2$$

La bobine stocke de l'énergie sur le premier quart de période. Sur le second quart de période.

$$W_L = \frac{1}{2}LI_{max}^2$$

La bobine restitue ensuite cette énergie sur le second quart de période.

Aux bornes du condensateur $P(t) = 2U_C I\sin(\omega t)\cos(\omega t) = 0$. Sur le premier quart de période, calculons l'énergie.

$$W_C = \frac{1}{2C\omega^2}I_{max}^2 = -W_L = \frac{1}{2}CU_{C_{max}}^2$$

Pendant le premier quart de période, le condensateur cède de l'énergie (à la bobine), pendant le second quart de période, le condensateur stocke l'énergie (cédée par la bobine).

Facteur de surtension On a donc à résonance, une énergie emmagasinée dans le circuit qui s'écrit

$$W_E = \frac{1}{2}LI_{max}^2 = \frac{1}{2}CU_{C_{max}}^2$$

Concidérons le rapport

$$2\pi\frac{W_E}{W_J} = \frac{\frac{1}{2}LI_{max}^2}{\frac{1}{2}RI_{max}^2}\frac{2\pi}{T_0} = Q_0$$

2.7.2 Hors résonance (en génäral)

On a un générateur qui débite dans un circuit (ici circuit RLC).

$$P(t) = u't)i(t) = 2UI\cos(\omega t)\cos(\omega t + \varphi) = UI(\cos(2\omega t + \varphi) + \cos\varphi$$

en moyennant dans le temps sur une période, le terme oscillant va s'annuler, il reste

$$P = UI\cos\varphi$$

Le cosinus φ s'appelle le **facteur de puissance**. Dans une installation électrique, on a intérêt à avoir le cosinus φ le plus faible possible.

2.8 Application de la résolution complexe, le circuit bouchon

2.8.1 Le circuit RLC parallèle

On peut le remplacer par le dipôle équivalent.

2.8.2 Calcul de l'impédance équivalente

On a 3 élèments en paralléle, donc les inverses des impédances s'additionnent.

$$\frac{1}{\underline{Z}} = (\frac{1}{R} + \frac{1}{JL\omega} + JC\omega) \quad \text{donc} \quad \underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = (\frac{1}{R} + \frac{1}{JL\omega} + JC\omega)\underline{U}$$

Si comme pour le phénomène de résonance, on introduit $Q_0 = \frac{L\omega_0}{R}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, on a laors

$$I = \frac{U}{R}\sqrt{1 + \frac{1}{Q_0^2}(x - \frac{1}{x})^2}$$

2.8.3 Variation de I avec la fréquence

I est minimal pour $x = 1$. On a ce que l'on appelle un circuit bouchon. Si par contre on alimente ce circuit avec un générateur de courant, on a alors une résonance en surtension à l'intérieur du circuit.
Sur le circuit, on peut définir l'acuité de l'antirésonance, avec surintensité aux bornes du condensateur et de la bobine. Si sur le circuit RLC série, la surtension pouvait introduire des claquages, ici comme l'alimentation se fait par des câbles éelctriques, on peut avoir des phénomènes de chauffe et avoir des éläments qui grillent.

Remarques :

1. On peut aussi définir des coefficients de surtension et de facteur de qualité pour des montages mécaniques entretenus.
2. Dans le cas de la mécanique, le seul élément qui dissipe de l'énergie est le frottement
3. Dans le cas électrique, l'effet Joule entraîne un chauffage, dans le cas mécanique, les frottements entraînent un chauffage.

Références

[1] https ://fr.wikipedia.org/wiki/Le_Salaire_de_la_peur

[2] https ://fr.wikipedia.org/wiki/Pont_de_la_Basse-Cha%C3%AEne

[3] https ://www.youtube.com/watch ?v=uhWQ5zr5_xc