Analyse et Probabilité II
chapitre 1 : Fonctions d'une variables réelles

Paragraphe 1 : Topologie élémentaire de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$

On présente dans ce paragraphe quelques notions topologiques de l'espace $\mathbb{R}$. Soit x_0 un point de $\mathbb{R}$, on appelle intervalle ouvert centré en x_0 tout intervalle de la forme $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$ où ϵ est un réel strictement positif. Soit maintenant $\mathbb{X}$ un sous ensemble de $\mathbb{R}$, on dit que :

— $\mathbb{X}$ est un ouvert si en tout point de $\mathbb{X}$ on peut trouver un intervalle ouvert contenu dans $\mathbb{X}$, si $\mathbb{X} = \emptyset$, par axiome c'est un ouvert.
— $\mathbb{X}$ est un fermé si son complémentaire est un ouvert,
— $\mathbb{X}$ est connexe par arc si pour deux points α et β arbitraire de $\mathbb{X}$, l'intervalle $[\alpha\beta]$ est contenu dans $\mathbb{X}$.

On designe par ouvert un sous ensemble ouvert, alors toute réunion de ouverts est ouvert, toute intersection fini de ouverts est ouvert. Noter qu'une intersection infini de ouvert n'est pas obligatoirement ouvert.
Soient $\mathbb{X}$ un sous ensemble de $\mathbb{R}$ et x_0 un point de $\mathbb{R}$, on dit que x_0 est un point adhérant à $\mathbb{X}$ si :

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\,]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\cap \mathbb{X} \neq \emptyset \,)$$

Et on définit l'adhérance de $\mathbb{X}$ noté $\overline{\mathbb{X}}$ comme l'ensemble des points adhérants à $\mathbb{X}$ c'est le plus petit fermé contenant $\mathbb{X}$. On remarque que $\mathbb{X} \subset \overline{\mathbb{X}}$. Enfin on dit que x_0 est un point intérieur à $\mathbb{X}$ si :

$$(\exists \epsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\,]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\subset \mathbb{X} \,)$$

Paragraphe 2 : Majorant, minorant, borne supérieur, borne inférieur

Soit un sous ensemble $\mathbb{X}$ de $\mathbb{R}$, on dit que :

— le réel M est un majorant de $\mathbb{X}$ si tout élément de $\mathbb{X}$ est inférieur à M,
— l'ensemble $\mathbb{X}$ est majoré s'il admet un majorant,
— le réel M est un plus grand élément de $\mathbb{X}$ si c'est un majorant appartenant à $\mathbb{X}$.
— le réel m est un minorant de $\mathbb{X}$ si tout élément de $\mathbb{X}$ est supérieur à M,
— l'ensemble $\mathbb{X}$ est minoré s'il admet un minorant,
— le réel m est un plus petit élément de $\mathbb{X}$ si c'est un minorant appartenant à $\mathbb{X}$.
— l'ensemble $\mathbb{X}$ est borné s'il est majoré et minoré.
— $\mathbb{X}$ est un compact si c'est un fermé borné,

Noter que si un ensemble admet un plus grand (resp petit) élément alors il est unique.

Soit $\mathbb{X}$ un sous ensemble borńe de $\mathbb{R}$, on appelle borne supérieur de $\mathbb{X}$ noté Sup$\mathbb{X}$ le plus petit des majorants, il est caractérisé ainsi de suite :

$$M = \mathrm{Sup}\mathbb{X} \Longleftrightarrow (\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \alpha \in \mathbb{X})(M - \epsilon < \alpha \leq M)$$

On définit de même la notion de borne inférieur de $\mathbb{X}$ noté Inf$\mathbb{X}$ comme étant le plus grand des minorants, et il est caractérisé par :

$$m = \mathrm{Inf}\mathbb{X} \Longleftrightarrow (\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \alpha \in \mathbb{X})(m \leq \alpha < m + \epsilon)$$

Noter que tout sous ensemble majoré (resp minoré) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieur (resp inférieur), c'est même une caractéristique de $\mathbb{R}$, ce résultat étant faux par exemple dans $\mathbb{Q}$. Enfin on démontre que l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ satisfait aux deux propriétés fondamentales suivantes :

— Axiome d'Archimède : Pour deux nombres réels $x > 0$ et $y \geq 0$ il existe un entier n non nul tel que $y \leq n \cdot x$.
— L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ c'est à dire entre deux réels quelconques distincts x et y, il y a toujours un rationnel $q \in \mathbb{Q}$ tel que $x < q < y$ ou $y < q < x$. Noter que la réciproque est aussi vrai, c'est à dire entre deux nombres rationnels, il existe toujours un réel non rationnel.

Soit un ensemble $\mathbb{E}$ on appelle distance sur $\mathbb{E}$ toute application noté traditionnellement d de $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ à valeur dans $\mathbb{R}_+$ telle que pour trois points arbitraires A, B et C de $\mathbb{E}$ on a :
— $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$,
— $d(A, B) = d(B, A)$,
— $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ dite inégalité triangulaire.

Si dans $\mathbb{R}$, on considère la valeur absolue $|\ |$ alors cette dernière permet de définir une distance en posant :

$$d\ :\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+\ /\ (x, y) \longrightarrow\ d(x, y) = |x - y|$$

Les propriétés de la valeur absolue $|\ |$ montre immédiatement que d est bien une distance.
En particulier on a les propriétés suivante
— $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
— $|\lambda \cdot x| = |\lambda| \cdot |x|$.
— $|x + y| \leq |x| + |y|$.
— $||x| - |y|| \leq |x \pm y|$.

Proposition 2.1 Heine Borel

Soient un intervalle $[a, b]$ fermé borné, $\mathbb{A}$ un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et δ une application de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{R}^*_+$. On suppose que

$$[a, b] \subset \cup_{\{x \in \mathbb{A}\}}]x - \delta(x), x + \delta(x)[$$

Alors il existe un sous ensemble fini $\mathbb{B}$ de $\mathbb{A}$ tel que

$$[a, b] \subset \cup_{\{x \in \mathbb{B}\}}]x - \delta(x), x + \delta(x)[$$

Démonstration :
Notons $\mathbb{Y}$ l'ensemble des nombres y de $[a, b]$ tel qu'il existe un ensemble fini $D(y)$ de $\mathbb{A}$ tel que

$$[a, y] \subset \cup_{\{x \in D(y)\}}]x - \delta(x), x + \delta(x)[$$

Cet ensemble $\mathbb{Y}$ n'est pas vide car a est élément, d'autre part il est majoré par b, donc il admet une borne supérieur noté M. Par construction $\mathbb{Y} \subset [a, b]$, d'où $\mathrm{Sup}\mathbb{Y} \leq \mathrm{Sup}[a, b] = b$ (c'est ici où on utilise la propriété que $[a, b]$ est fermée), soit $M \leq b$. Il existe un certain élément z de $\mathbb{A}$ tel que $M \in]z - \delta(z), z + \delta(z)[$, on en déduit donc $\mathbb{Y} = [a, M]$. Pour démontrer le résultat il suffit de montrer que $M = b$. On raisonne par l'absurde et on suppose que ce n'est pas le cas soit $M < b$, soit l'élément z de $\mathbb{A}$ tel que $M \in]z - \delta(z), z + \delta(z)[$, cette intervalle étant ouvert, il existe un $\epsilon \in \mathbb{R}^*_+$ tel que $M + \epsilon \in]z - \delta(z), z + \delta(z)[\cap [a, b]$, mais alors $M + \epsilon \in \mathbb{Y}$, ce qui contredit l'hypothèse que M est la borne supérieur.

Paragraphe 3 : Suites dans $\mathbb{R}$

On appele suite d'éléments de $\mathbb{R}$ ou simple suite de $\mathbb{R}$ une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, à chaque entier naturel k, on fait correspondre l'élément x_k ou u_k. Une suite de $\mathbb{R}$ se note $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} = (u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ou plus simplement $(x_k) = (u_k)$. Il se peut que l'ensemble de départ soit de la forme $\{n \in \mathbb{N}\ /\ n \geq k_0\ \}$ pour un certain k_0, alors on la note $(x_k)_{k \geq k_0}$ ou plus simplement (x_k) si aucune confusion n'est possible. Soit donc une suite (x_k) donnée, on dit que :

— la suite est bornée si il existe $M \in \mathbb{R}$ telle que $(\forall k \in \mathbb{N})(|x_k| \leq M)$.
— la suite est convergente de limite $l \in \mathbb{R}^n$ si

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists N_0 \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N})(k \geq N \Longrightarrow |x_k - l| \leq \epsilon).$$

On démontre que :
— toute suite convergente admet une et une unique limite,
— toute suite convergente est bornée,
— la somme ou le produit de deux suites convergentes est convergente,
— la multiplication par un scalaire d'une suite convergente est convergente.
On dit qu'une suite (x_k) est une suite de Cauchy si

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists N_0 \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{N})(\forall q \in \mathbb{N})((q \geq N \text{ et } p \geq N) \Longrightarrow |x_q - x_p| \leq \epsilon).$$

Dans $\mathbb{R}$, toute suite convergente est une suite de Cauchy, et la réciproque est aussi vraie, donc toute suite de cauchy est convergente. Pour démontrer qu'une suite est convergente il suffit de montrer qu'elle est de Cauchy (inutile de deviner la limite l).On dit que $\mathbb{R}$ muni de la distance définie par la valeur absolue est complet.

Soit φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on a alors $\varphi(n) \geq n$. Si on se donne une suite (x_k), on dit que la suite $(x_{\varphi(k)})$ est une sous suite ou suite extraite de (x_k). Noter la condition φ strictement croissante absolument essentielle. Si une suite est convergente de limite l alors toute sous suite d'elle est aussi convergente de même limite l.

Proposition 3.1

On se donne une suite bornée (x_k) telle que pour tout nombre réel x l'ensemble $\mathcal{F}_x = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x_n = x\}$ est fini, alors il existe un réel a tel que pour tout entier naturel non nul m l'ensemble $\{ x_n \ : \ n \in \mathbb{N} \} \cap]a - 1/m, a + 1/m[$ est de cardinal infini.

Preuve :
On raisonne par l'absurde, donc à chaque nombre réel x on peut lui associer un entier $m(x)$ tel que l'intervalle $]x - 1/m(x), x + 1/m(x)[$ ne contient qu'un nombre fini d'éléments de la suite (x_k). Par ailleurs, la suite étant bornée, elle est contenue dans un intervalle fermé borné $[a, b]$. On a alors,

$$\{x_n : n \in \mathbb{N} \} \subset [a, b] \subset \cup_{\{x \in \mathbb{R}\}}]x - 1/m(x), x + 1/m(x)[$$

L'intervalle $[a, b]$ étant un compact, d'après Heine Borel il existe un sous ensemble fini $\mathbb{A}$ de $\mathbb{R}$ tel que

$$\{x_n : n \in \mathbb{N} \} \subset [a, b] \subset \cup_{\{x \in \mathbb{A}\}}]x - 1/m(x), x + 1/m(x)[$$

Comme les intervalles $]x - 1/m(x), x + 1/m(x)[$ ne contiennent qu'un nombre fini d'éléments de la suite, et qu'il n'y a qu'un nombre fini d'intervalles, cela signifie que l'ensemble $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est fini, on peut supposer sans perte de généralité que ce sont les points $x_0, x_1, ..., x_p$. Maintenant à chacun de ces x_i, l'ensemble $\mathcal{F}_{x_i}$ est fini, leurs réunion est donc aussi fini, si on prend un entier m_0 n'appartenant pas à cette réunion et que l'on considère le terme x_{m_0}, on aboutit à une contradiction.

Thérorème de Bolzano Weierstrass

De toute suite bornée, on peut extraire une sous suite convergente.

Démonstration :
On conserve les même notation que celles de la proposition précédente. Si il existe un x tel que

l'ensemble $\mathcal{F}_x$ est infini, le résultat est clair. On suppose donc que ce n'est pas le cas et on applique la proposition précédente, et il existe une sous suite qui converge vers le point a.

Paragraphe 4 : Fonction réelle et limite en un point fini

Nous ne donnons pas une définition formelle et rigoureuse de ce qu'est une fonction, considérons que c'est simplement une technique ou une méthode d'associer certains éléments de l'ensemble dite de départ à d'autres de l'ensemble dite d'arrivé.
On appelle fonction à une variables réelles à valeurs réelles une fonction dont l'ensemble de départ est un sous ensemble de $\mathbb{R}$ et l'ensemble d'arrivé $\mathbb{R}$. Si on note $\mathbb{X}$ un sous ensemble de $\mathbb{R}$, on représente une fonction f sous la forme suivante

$$f \ : \ \mathbb{X} \longrightarrow \ \mathbb{R} \ / \ x \ \longrightarrow \ f(x)$$

L'ensemble $\mathbb{X}$ est appelé l'ensemble de départ. Le domaine de définition noté D_f est le sous ensemble de $\mathbb{X}$ correspondant aux points $x \in \mathbb{X}$ tels que l'élément $f(x)$ est bien définit. À un point de coordonné x est associé un unique point $y = f(x)$, l'ensemble $f(D_f)$ l'ensemble image. Le graphe de f noté $Gra(f)$ est un sous ensemble de $\mathbb{X} \times \mathbb{R}$. Le graphe de f est une courbe dans $\mathbb{R}^2$.
Soit une fonction f d'ensemble de départ $\mathbb{X}$ et d'ensemble d'arrivé $\mathbb{Y}$. On a les définitions suivantes :

— On dit que f est injective si deux éléments distincts de $\mathbb{X}$ ont des images distinctes.
— On dit que f est surjective si tout élément de $\mathbb{Y}$ admet au moins un antécédant.
— On dit que f est bijective si elle est injective et surjective.
— On dit que f admet une fonction réciproque si il existe une fonction notée f^{-1} de $\mathbb{Y}$ dans $\mathbb{X}$ telles que $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{Y}}$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{X}}$. Où $\mathrm{Id}_{\mathbb{X}}$ et $\mathrm{Id}_{\mathbb{Y}}$ désignent les applications Identité des ensembles en question. On démontre qu'une condition nécessaire et suffisante pour que f admet une fonction réciproque est que f soit bijective.
— Soit $\mathcal{B}$ une partie de $\mathbb{Y}$, on appelle image réciproque de $\mathcal{B}$ par f le sous ensemble de $\mathbb{X}$ définit comme suit :

$$f^{-1}(\mathcal{B}) = \{ \ x \in \mathbb{X} \quad \text{tel que} \quad f(x) \in \mathcal{B} \ \}$$

Ne **pas** confondre avec l'application réciproque ! L'ensemble $f^{-1}(\mathcal{B})$ est toujours bien définie dès lors que $\mathcal{B}$ est donné. Il n'y a aucune condition sur f.

— Soit $\mathcal{A}$ un sous ensemble de $\mathbb{X}$.
  — On dit que f est majoré (resp minoré) sur $\mathcal{A}$ si l'ensemble $f(\mathcal{A})$ est majoré (resp minoré).
  — On dit que f est bornée sur $\mathcal{A}$ si f est majorée et minorée sur $\mathcal{A}$.
  — On définit la borne supérieur (resp inférieur) de f sur $\mathcal{A}$ comme étant la borne supérieur (resp inférieur) de $f(\mathcal{A})$. Elle n'existe pas forcément.
  — Si $f(\mathcal{A})$ admet un plus grand (resp petit) élément, on dit que c'est un maximum (resp minimum) de f sur $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{A} = D_f$, on dit que c'est un maximum (resp minimum) globale.

Soient un sous ensemble $\mathbb{X}$ de $\mathbb{R}$ et f une fonction de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{R}$, x_0 un point de $\mathbb{X}$.

— On dit que f est définie au voisinage de x_0 si x_0 est un point intérieur à $D_f \cup \{x_0\}$. Cela signifie qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que f soit bien définie sur $B(x_0, r) =]x_0 - r, x_0 + r[$ sauf peut être en x_0.
— Si ce point x_0 est intérieur à D_f, on dit que f admet un maximum (resp minimum) local au point x_0 si :

$$(\ \exists \epsilon \in \mathbb{R}_+^* \ )(\ \forall x \in]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\ \cap D_f \ )(\ f(x) \leq f(x_0) \ )$$

$$(\text{ resp } \ (\ \exists \epsilon \in \mathbb{R}_+^* \ )(\ \forall x \in]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\ \cap D_f \ )(\ f(x) \geq f(x_0) \ ))$$

Remarque : Cette définition s'étend au cas d'un point x_0 situé sur le bord, mutatis mutandis.

— On dit que f définie au voisinage de x_0 admet une limite lorsque x tend vers x_0 si il existe un réel $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*)(0 < |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow | f(x) - l | \leq \epsilon)$$

On écrit alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ (au lieu de $\lim_{x \to x_0,\, x \neq x_0} f(x) = l$, et bien noté l'inégalité stricte dans la définition).

Sous les mêmes hypothèses que précédemment, on démontre que

— si la limite de f existe elle est unique,

— la limite de f existe si et seulement si pour toute suite d'éléments (a_k) de $D_f \setminus \{x_0\}$ convergeant vers x_0, la suite $f(a_k)$ converge vers l.

— si g est une autre fonction de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{R}$, admettant une limite quand x tend vers x_0, alors

  — $\lim_{x \to x_0}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$.

  — $\lim_{x \to x_0}(f(x) \times g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \times \lim_{x \to x_0} g(x)$.

Cas d'une composée de limite, soient quatre ensembles $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$, et $\mathbb{H}$, on se donne une fonction f de $D_f \subset \mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$, une fonction g de $D_g \subset \mathbb{G}$ dans $\mathbb{H}$, et un point x_0 de $\mathbb{E}$. On suppose que

— $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$,

— $\lim_{y \to y_0} g(y) = z_0$,

— $f(D_f) \subset D_g$,

— $(\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\setminus \{x_0\})(f(x) \neq y_0)$

Alors

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = z_0$$

Attention la condition d'existence de α est impérative, sinon le résultat peut être faux.

Soient f, g, et h trois fonctions de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{R}$. On se donne un point intérieur x_0 de $D_f \cap D_g \cap D_h$, on suppose que :

— $\lim_{x \to x_0} f(t) = \lim_{x \to x_0} g(t) = l$,

— $(\exists r \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[ )(f(x) \leq h(x) \leq g(x))$,

alors $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$. C'est le théorème d'encadrement ou des gendarmes de limites.

Paragraphe 5 : Autres type de limite

Soit une fonction f d'ensemble de départ $\mathbb{X}$,

— on dit que f est définie au voisinage de $+\infty$ (resp $-\infty$) si il existe un réel a tel que $]a, +\infty[\subset D_f$ (resp $] - \infty, a[\subset D_f$).

— on dit que f est définie à droite (resp gauche) d'un point x_0 de $\mathbb{X}$ si il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $]x_0, x_0 + \alpha[\subset D_f$ (resp $]x_0 - \alpha, x_0[\subset D_f$).

On peut alors donner les définitions suivantes

— on dit qu'une fonction f admet une limite l quand x tend vers $+\infty$ (resp $-\infty$) si :

$$(\forall\, \epsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists\, A \in \mathbb{R}_+^*)(\forall\, x \in D_f)(x \geq A \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon)$$

$$(\text{ resp } (\forall\, \epsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists\, A \in \mathbb{R}_+^*)(\forall\, x \in D_f)(x \leq -A \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon))$$

— on dit qu'une fonction f définie au voisinage d'un point x_0 tend vers $+\infty$ (resp $-\infty$) lorsque x tend vers x_0 si :

$$(\forall\, A \in \mathbb{R}_+^*)(\exists\, \epsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\forall\, x \in D_f)(0 < |x - x_0| \leq \epsilon \Longrightarrow f(x) \geq A)$$

$$(\text{ resp } (\forall\, A \in \mathbb{R}_+^*)(\exists\, \epsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\forall\, x \in D_f)(0 < |x - x_0| \leq \epsilon \Longrightarrow f(x) \leq -A))$$

— on dit qu'une fonction f définie au voisinage de $+\infty$ tend vers $+\infty$ (resp $-\infty$) lorsque x tend vers $+\infty$ si :

$$(\forall A \in \mathbb{R}_+^*)(\exists B \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in D_f)(x \geq B \Longrightarrow f(x) \geq A)$$

$$(\text{ resp } (\forall A \in \mathbb{R}_+^*)(\exists B \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in D_f)(x \geq B \Longrightarrow f(x) \leq -A))$$

— on dit qu'une fonction f définie au voisinage de $-\infty$ tend vers $+\infty$ (resp $-\infty$) lorsque x tend vers $+\infty$ si :

$$(\forall A \in \mathbb{R}_+^*)(\exists B \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in D_f)(x \leq -B \Longrightarrow f(x) \geq A)$$

$$(\text{ resp } (\forall A \in \mathbb{R}_+^*)(\exists B \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in D_f)(x \leq -B \Longrightarrow f(x) \leq -A))$$

— on dit qu'une fonction f définie à droite (resp gauche) d'un point x_0 tend vers un nombre réel l lorsque x tend à droite (resp gauche) vers x_0 si :

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in D_f)(0 < x - x_0 \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon)$$

$$(\text{ resp } (\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in D_f)(0 < x_0 - x \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon))$$

— on dit qu'une fonction f définie à droite d'un point x_0 tend à droite vers $+\infty$ (resp $-\infty$) lorsque x tend vers x_0 si :

$$(\forall A \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \epsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in D_f)(0 < x - x_0 \leq \epsilon \Longrightarrow f(x) \geq A)$$

$$(\text{ resp } (\forall A \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \epsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in D_f)(0 < x - x_0 \leq \epsilon \Longrightarrow f(x) \leq -A))$$

— on dit qu'une fonction f définie à gauche d'un point x_0 tend à gauche vers $+\infty$ (resp $-\infty$) lorsque x tend vers x_0 si :

$$(\forall A \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \epsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in D_f)(0 < x_0 - x \leq \epsilon \Longrightarrow f(x) \geq A)$$

$$(\text{ resp } (\forall A \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \epsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in D_f)(0 < x_0 - x \leq \epsilon \Longrightarrow f(x) \leq -A))$$

Paragraphe 6 : Opérations et formes indéterminées

Soient deux fonctions f et g définies au voisinage d'un point x_0,

— on a alors les propiétés suivantes :

  — $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = +\infty$
  — $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = -\infty$
  — $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ et si g est une fonction bornée alors $\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = +\infty$
  — $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = l \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} (fg)(x) = \infty \cdot \text{signe}(l)$
  — $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} (1/f)(x) = 0$

— et les cas dites de formes inderterminées :

— $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ alors $f - g$ et f/g n'ont pas forcément de limite.
— $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ alors fg n'admet pas forcément de limite.
— $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ alors f/g n'admet pas forcément de limite.

Soit une fonction f croissante (resp décroissante) définie au voisinage de $+\infty$, alors soit f est majorée (resp minorée) et $\lim_{x \to +\infty} f(x) =Supf(x)$ (resp Inf$f(x)$), soit f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Paragraphe 7 : Continuité

Soit une fonction f d'ensemble de départ $\mathbb{X}$ à valeur dans $\mathbb{R}$, on se donne un point x_0 intérieur de D_f, on dit que f est continue en x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Cela revient à :

$$(\forall\, \epsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists\, \delta \in \mathbb{R}_+^*)(\forall\, x \in D_f)(0 \leq |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon)$$

soit encore pour toute suite (u_n) de points dans D_f convergeant vers x_0, la suite de points $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$. Une fonction qui n'est pas continue au point x_0 est dite discontinue on non continue en x_0. Si $\mathcal{A}$ est un sous ensemble ouvert de D_f, on dit que f est continue sur $\mathcal{A}$ si f est continue en tout point de $\mathcal{A}$.

Soient deux fonctions f et g données, un point x_0 intérieur à $D_f \cap D_g$, on suppose que f et g sont continues en ce point, alors
— pour deux nombres réels quelconques α et β la fonction $\alpha f + \beta g$ est continue en x_0.
— la fonction fg est continue en x_0,
— si $g(x_0) \neq 0$ alors la fonction f/g est bien définie dans un certain voisinage ouvert de x_0 et est continue en ce point,
— la fonction $|f|$ est continue en x_0,
— la fonction $\mathrm{Max}(f(x), g(x)) = 1/2(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|$ est continue en x_0,
— la fonction $\mathrm{Min}(f(x), g(x)) = 1/2(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|$ est continue en x_0.

Soient une fonction f d'ensemble de départ $\mathbb{X}$ à valeur dans $\mathbb{Y}$, g une fonction d'ensemble de départ $\mathbb{Y}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on se donne un point x_0 intérieur à D_f tel que $f(x_0)$ soit un point intérieur de D_g, on suppose que f est continue en x_0, g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.
Soient une fonction f donnée et x_0 un point n'appartenant pas à D_f. On suppose que la limite de $f(x)$ existe quand x tend vers x_0. On appelle prolongement par continuité de f au point x_0 la fonction toujours notée f définie par : $f(x) = f(x)$ si $x \in D_f$ et $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$. Un tel prolongement s'il existe est unique. On définit aussi la notion de continuité à droite (resp gauche) ainsi que le prolongement par continuité à droite (resp gauche) à l'aide des définitions de limites à droites (resp gauche). Une fonction f sera dite continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$, continue à droite (resp gauche) de a (resp b).

Soit une fonction f d'ensemble de départ $\mathbb{X}$ à valeur dans $\mathbb{R}$, on se donne un sous ensemble $\mathcal{A}$ contenu dans D_f, on dit que f est uniformément continue sur $\mathcal{A}$ si :

$$(\forall\, \epsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists\, \delta \in \mathbb{R}_+^*)(\forall\, x \in \mathcal{A})(\forall y \in \mathcal{A})(0 \leq |x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon)$$

La différence par rapport à la continuité simple se situe dans l'ordre des quantificateurs, dans le cas de la continuité simple le δ dépend de ϵ et de x_0, dans le cas de la continuité uniforme δ ne dépend plus QUE de ϵ. Une fonction uniformément continue sur $\mathcal{A}$ est bien sûr simplement continue sur $\mathcal{A}$. La réciproque est fausse.

Paragraphe 8 : Quelques résultats sur les fonctions continues

On se donne un intervalle fermé borné $I = [a, b]$, soit un compact, de $\mathbb{R}$ ainsi qu'une fonction f définie et continue sur I.

Proposition 8.1
La fonction f est uniformément continue sur $[a, b]$.

Preuve
Pour démontrer que la fonction f est uniformément continue sur $[a, b]$, on se donne un ϵ arbitraire, comme f est continue en tout point x de $[a, b]$, il existe un $\delta(x)$ tel que pour tout $y \in [a, b] \cap]x-\delta(x), x+\delta[$ on a $|f(x)-f(y)| \leq \epsilon$. Par ailleurs il est clair que $[a, b] \subset \cup_{x\in[a,b]}]x-\delta(x)/2, x+\delta(x)/2[$, l'intervalle $[a, b]$ étant compact, d'après Heine Borel, il existe un ensemble fini de points $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de $[a, b]$ tel que $[a, b] \subset \cup_{i=1}^{n}]x_i - \delta(x_i)/2, x_i + \delta(x_i)/2[$. Posons $\delta = \mathrm{Min}(\delta(x_i)/2)$, c'est un réel strictement positif car il n'y a qu'un nombre fini de $\delta(x_i)$. Soit deux points y et z de $[a, b]$ tel que $|y - z| \leq \delta$. Il est clair que y appartient à un certain $]x_r - \delta(x_r)/2, x_r + \delta(x_r)/2[$, mais $|z - x_r| = |z - y + y - x_r| \leq |z - y| + |y - x_r| \leq \delta(x_r)$. On a donc :

$$|f(y) - f(z)| \leq |f(y) - f(x_r)| + |(f(x_r) - f(z)| \leq \epsilon + \epsilon \leq 2\epsilon.$$

ce qui démontre la continuité uniforme de f sur $[a, b]$.

Proposition 8.2
La fonction f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes.

Preuve
On commence par montrer que $f([a, b])$ est un ensemble borné. Pour cela on raisonne par l'absurde, supposons que ce ne soit pas le cas, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un point $x_n \in [a, b]$ tel que $|f(x_n)| \geq n$. La suite (x_n) est dans $[a, b]$ qui est compact, on peut donc en extraire une sous suite qui converge vers un point $\alpha \in [a, b]$, par ailleurs f est continue, donc $\lim f(x_n) = f(\alpha)$, ce qui est absurde. Donc $f([a, b])$ est un ensemble borné. Notons $M = \mathrm{Sup} f(x)$ et $m = \mathrm{Inf} f(x)$, par définition il existe une suite (c_n) (resp (d_n)) telle que $\lim f(c_n) = m$ (resp $\lim f(d_n) = M$). Quitte à extraire une sous suite, on peut supposer que (c_n) (resp (d_n)) est convergeante de limite $\gamma \in [a, b]$ (resp $\delta \in [a, b]$). La continuité de f montre que $m = f(\gamma)$ (resp $M = f(\delta)$).

Théorème des valeurs intermédaires
En conservant les même notations, l'image $f([a, b])$ est l'intervalle fermé borné $[m, M]$.

Démonstration
On conserve les notations utilisées dans la preuve précédénte, il s'agit donc de montrer que $f([a, b]) = [m, M]$ c'est à dire pour tout $y_0 \in [m, M]$ il existe un $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = y_0$. On peut supposer sans perte de généralité que $\gamma < \delta$ et que $y_0 \in]m, M[$, alors cela revient à montrer que la fonction $g(x) = f(x) - y_0$ s'annule au moins une fois sur l'intervalle $[\gamma, \delta]$. On raisonne par l'absurde, si ce n'est pas le cas, soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier arbitraire, d'après la proposition 8.1, la fonction g est uniformément continue sur $[\gamma, \delta]$, il existe donc un entier $k(n)$ tel que pour :

$$x_p = \gamma + p\frac{\delta - \gamma}{k(n)},$$

on obtient pour tout $k \in \{0, 1, 2, ..., k(n) - 1\}$

$$|g(x_{k+1}) - g(x_k)| \leq \frac{1}{n}.$$

Par ailleurs comme $g(x_0) = g(\gamma) < 0$ et $g(x_{k(n)}) = g(\delta) > 0$, on en déduit qu'il existe un indice r tel que $g(x_{r+1})g(x_r) < 0$, on peut alors écrire :

$$|g(x_r)| \leq |g(x_{r+1}) - g(x_r)| \leq \frac{1}{n}$$

soit encore

$$|\frac{1}{g(x_r)}| \geq n$$

c'est à dire que la fonction g n'est pas bornée sur $[\gamma, \delta]$, or cela n'est pas possible car $1/g$ est une fonction continue sur un intervalle fermé borné.

On suppose désormais que l'intervalle $I =]a, b[$ est un intervalle ouvert.

Proposition 8.3

Si la fonction f est continue strictement monotone, alors $f(I)$ est un intervalle ouvert.

Preuve

On suppose que la fonction est strictement croissante, soient x_0 et x_1 deux points de I alors d'après le thérorème des valeurs intermédaire, on sait que $f([x_0, x_1]) = [f(x_0), f(x_1)]$, ces points étant arbitraire cela revient à dire que $f(I)$ est un intervalle. Reste à montrer que $f(I)$ est ouvert, soit $y_0 \in f(I)$, il existe $x_0 \in I$ tel que $y_0 = f(x_0)$. Comme I est un ouvert, il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $[x_0 - 1/2\delta, x_0 + 1/2\delta] \subset]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\in I$. La fonction f étant strictement croissante on a

$$]f(x_0 - \delta/2), f(x_0 + \delta/2)[\subset f(]x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2[) \subset f([x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2]) \subset f(I)$$

d'où le résultat.

Proposition 8.4

Si la fonction f est continue injective alors f est strictement monotone.

Preuve

On raisonne par l'absurde, supposons que f n'est pas strictement monotone, alors, et sans perte de généralité, on peut supposer qu'il existe trois point $x_0 < y_0 < z_0$ de I tels que $f(x_0) < f(y_0)$, et $f(z_0) < f(y_0)$. Soit un point $t_0 \in [f(x_0), f(y_0)] \cap [f(z_0), f(y_0)]$, en appliquant le théorème des valeurs intermédaires à f entre $[x_0, y_0]$ et $[y_0, z_0]$ on aboutit à une contradiction.

Proposition 8.5

Si la fonction f est strictement monotone surjective, alors f est continue et admet une fonction réciproque.

Preuve

On commence par montrer que f est continue, soit x_0 un point de I, comme I est ouvert il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset I$. Notons $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_0 - \delta)$ et $y_2 = f(x_0 + \delta)$. Comme f est strictement monotone on a $f([x_0 - \delta, x_0 + \delta]) = [y_1, y_2]$ (ou $[y_2, y_1]$). On pose $\alpha = \text{Min}(|y_0 - y_1|, |y_0 - y_2|)$ alors $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $[y_0 - \alpha, y_0 + \alpha] \subset f(I)$. Pour montrer que f est continue, on se donne un $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ arbitraire et on cherche un $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f([x_0-\eta, x_0+\eta]) \subset [y_0-\epsilon, y_0+\epsilon]$. Pour cela posons $\beta = \mathrm{Min}(\alpha, \epsilon)$, alors $y_0-\beta$ et $y_0+\beta$ sont des éléments de $f(I)$, il existe donc deux éléments x_1 et x_2 de I tel que $y_0-\epsilon = f(x_1)$ et $y_0+\epsilon = f(x_2)$. En choisissant $\eta = \mathrm{Min}(|x_0-x_1|, x_0-x_2|)$ on obtient le résultat voulu.

Paragraphe 9 : Dérivée et différentiabibilté

Soient un sous ensemble ouvert $\mathbb{X}$ de $\mathbb{R}$ et f une fonction de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{R}$, x_0 un point intérieur de D_f, on dit que f est dérivable au point x_0 si la limite suivante

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existe. Si oui on la note $(df/dx)(x_0) = f'(x_0)$ appelé la dérivée de f en x_0. Noter qu'avec la définition de limite à droite (resp gauche) on définit la notion de dérivée à droite (resp gauche) noté $f'_d(x_0)$ (resp $f'_g(x_0)$).

$$f'_d(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{et} \quad f'_g(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

où 0^+ (resp 0^-) signifie limite par valeurs positives (resp négatives).

Sous les mêmes hypothèses que précédemment, on dit que la fonction f est différentiable au point x_0 si il existe un réel a et une fonction $\epsilon(x)$ tel que

$$f(x) = f(x_0) + a(x-x_0) + (x-x_0)\epsilon(x) \qquad \lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$$

ou encore

$$f(x_0+h) = f(x_0) + ah + h\epsilon(h) \qquad \lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$$

Pour une fonction f définie sur un sous ensemble ouvert $\mathbb{X}$ **de** $\mathbb{R}$, f est différentiable en x_0 si et seulement si elle est dérivable en x_0, mais pour des fonctions qui sont définies sur des sous ensembles de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$, la notion de dérivée n'existe plus, remplacée par la différentiabilité. Dans ce cours nous nous limitons au cas où $n = 1$ et donc par la suite on n'utilisera plus que le terme de dérivable et dérivée.
Si une fonction f est dérivable en un point x_0, elle est continue en ce point, la réciproque est fausse ! On dit qu'un fonction f est dérivable sur un ensemble ouvert si elle est dérivable en tout point de cette ensemble. Et comme pour la notion de continuité sur un intervalle $[a, b]$, on dira que f est dérivable sur $[a, b]$ si f est dérivable sur $]a, b[$ et dérivable à droite (resp gauche) de a (resp b).

Soient deux fonctions f et g données, un point x_0 intérieur à $D_f \cap D_g$, on suppose que f et g sont dérivables en ce point x_0, alors

- pour deux nombres réels quelconques α et β la fonction $\alpha f + \beta g$ est dérivable en x_0 de dérivée $\alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$.
- la fonction fg est dérivable en x_0 de dérivée $f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
- si $g(x_0) \neq 0$ alors la fonction f/g est bien définie dans un certain voisinage ouvert de x_0 et est dérivable en ce point de dérivée

$$\frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

On se place dans la situation suivante, soient deux ouvert $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ de $\mathbb{R}$, une fonction f (resp g) de $\mathbb{X}$ (resp $\mathbb{Y}$) à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $f(D_f) \subset D_g$. On peut donc considérer la fonction $g \circ f$.

$$g \circ f \ : \ \mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \ / \ x \longrightarrow \ g \circ f(x) = g(f(x))$$

Soit un point intérieur x_0 de D_f, on suppose que f est dérivable en x_0, que $f(x_0)$ est un point intérieur à D_g et qu'enfin g est dérivable en $f(x_0)$. Alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)f'(x_0)$$

En effet on peut remarquer que

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{si} \quad f(x) - f(x_0) \neq 0 \\ \\ 0 \quad \text{si} \quad f(x) - f(x_0) = 0 \end{cases}$$

Et en passant à la limite on obtient le résultat voulu.

Soient un intervalle I ouvert de $\mathbb{R}$ et f une bijection continue définie sur I. Notons f^{-1} la fonction réciproque de f, soit x_0 un point de I tel que f soit dérivable en x_0 de dérvivée $f'(x_0) \neq 0$ non nul. Alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ de dérivée $1/f'(f^{-1}(y_0))$. Il suffit de remarquer

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f(f^{-1}(y)) - f(f{-}1(y_0))} = \frac{1}{\dfrac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}}$$

et que le dénominateur du dernier terme est

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Paragraphe 10 : Dérivée d'ordre supérieur et fonction de classe $\mathcal{C}^n$

On se place toujours dans la situation où $\mathbb{X}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, f une fonction de $\mathbb{X}$ à valeurs réelles que l'on suppose dérivable en tout point intérieur de D_f. On peut alors considérer l'application qui à tout point x_0 associe la valeur $f'(x_0)$, cette application est notée f'

$$f' \ : \ D_f \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ x \longrightarrow f'(x)$$

appelé la fonction dérivée (ou plus justement la fonction différentielle). Si elle est aussi dérivable en un point x_0 de D_f sa dérivée est notée $f''(x_0) = f^{(2)}(x_0)$ appelé la dérivée seconde de f au point x_0. Si en tout point de D_f f admet une dérivée seconde $f''(x)$, on dit que f est dérivable deux fois sur D_f. Plus généralement on dira qu'une fonction f est n fois dérivable sur un certain ensemble ouvert $D \subset D_f$ si

— lorsque $n = 1$, f est dérivable sur D,

— lorsque $n > 1$, f est dérivable sur D et f' est $(n-1)$ fois dérivable sur D.

Les dérivées successives de f, si elles existent, se notent : $f' = f^{(1)}, \ f'' = f^{(2)}, \ \ldots \ , \ f^{(n)}$. La fonction $f^{(p)}$ étant appelé la dérivée d'ordre p de f ou la p-ième dérivée de f. Une fonction sera dite indéfiniment dérivable si elle est n fois dérivable pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Enfin une fonction f est dite n fois continûment dérivable sur D si sa fonction dérivée n-ième $f^{(n)}$ est continue sur D. Une telle fonction est dite de classe $\mathcal{C}^n$, l'ensemble des fonctions de classes $\mathcal{C}^n$ sur D se note $\mathcal{C}^n(D)$, et nous avons la suite d'inclusion

$$\mathcal{C}^\infty(D) \subset \mathcal{C}^{n+1}(D) \subset \mathcal{C}^n(D) \subset \cdot \subset \mathcal{C}^1(D) \subset \mathcal{C}^0(D)$$

Paragraphe 11 : Théorème de Rolle et des accroissements finis.

Soient un ensemble ouvert $\mathbb{X}$ de $\mathbb{R}$ et f une fonction de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{R}$, x_0 un point intérieur à D_f tel que f soit dérivable dans un certain voisinage de x_0 et admet un extremum en ce point. Alors $f'(x_0) = 0$. En effet on peut suppose que f possède un maximum en x_0, la preuve étant similaire pour un minimum, alors on a :

$$f'(x_0) = f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \quad \text{et} \quad f'(x_0) = f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

d'où le résultat. Un point intérieur x_0 est dit stationaire ou critique si $f'(x_0) = 0$. Le résultat précédent montre qu'un point extremum, sous réserve que f est dérivable au voisinage de ce point, est un point stationaire, mais la réciproque est fausse.

Théorème de la valeur intermédaire pour la dérivée

Soient un intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et une fonction $f \;:\; [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; x \longrightarrow f(x)$ dérivable sur $]a, b[$. On suppose que les limites $f'_d(a)$ et $f'_g(b)$ existent et que $f'_d(a) < f'_g(b)$ (resp $f'_d(a) > f'_g(b)$). Alors pour tout α tel que $f'_d(a) < \alpha < f'_g(b)$ (resp $f'_d(a) > \alpha > f'_g(b)$), il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \alpha$.

Démonstration

On fait la preuve dans le cas où $f'_d(a) < f'_g(b)$. Pour cela soit la fonction $h(x) = f(x) - \alpha \cdot x$ définie sur $[a, b]$ On a $h'(x) = f'(x) - \alpha$, il suffit de trouver un c tel que $h'(c) = 0$. Or l'intervalle $[a, b]$ est un fermé borné donc il y a forcément un point c où $h(x)$ est minimum, c'est à dire $h'(c) = 0$. Or $c \neq a$ et $c \neq b$. En effet comme $h'_d(a) < 0$ il y a un point x_1 tel que $h(x_1) < h(a)$, donc $c \neq a$, de même comme $h'_g(b) > 0$ il existe un point x_2 tel que $h(x_2) < h(b)$, donc $c \neq b$.

On en déduit le résultat suivant : si une fonction f définie sur un intervalle $]a, b[$, continue et dérivable sur $]a, b[$ de dérivée strictement monotone, alors cette dérivée est une fonction continue. En effet, on suppose par exemple que f' est strictement croissante, si f' n'est pas continue en un point x_0 alors

$$A = \text{Sup}\{f'(x) \;/\; x \in]a, x_0[\} \;<\; B = \text{Inf}\{f'(x) \;/\; x \in]x_0, b[\;\}$$

En considérant un point α strictement compris entre A et B et en appliquant le théorème de la valeur intermédaire pour la dérivée, on aboutit à une contradiction. Le raisonnement s'applique aussi dans le cas d'un intervalle $[a, b]$.

Théorème de Rolle

Soient un intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; x \longrightarrow f(x)$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration

On peut supposer que f n'est pas constant, comme $[a, b]$ est fermé borné, f atteint ses bornes, on note $c_1 = \text{Sup} f(x)$ et $c_2 = \text{Inf} f(x)$ sur $[a, b]$. Comme $f(a) = f(b)$ et que f est non constant, au moins un des deux réels c_1 ou c_2 est strictement compris entre a et b. Ce réel convient.

Si f était définie sur un intervalle ouvert $]a,b[$ telle que $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$, continue et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$. Comme f tend vers $+\infty$ à droite de a et à gauche de b, pour un M fixé, il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(\forall x \in]a, a+\delta])(f(x) \geq M)$ et $(\forall x \in]b-\delta, b[)(f(x) \geq M)$. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Rolle sur l'intervalle $[a+\delta, b-\delta]$.

Théorème des accroissements finis

Soient un intervalle fermé borné $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et une fonctions $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, on suppose que f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, alors il existe un point $c \in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$.

Démonstration

On considère la fonction g définie comme suit

$$g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ x \longrightarrow g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

et on applique le théorème de Rolle.

Théorème des accroissements finis généralisé

Soient un intervalle fermé borné $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et deux fonctions $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, on suppose que f et g sont continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Si g' ne s'annule en aucun point de $[a,b]$ alors il existe un point $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Démonstration

Comme g' ne s'annule en aucun point de $[a,b]$ on a $g(a) \neq g(b)$. On considère la fonction h définie comme suit

$$h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ x \longrightarrow h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$$

et on applique le théorème de Rolle.

Paragraphe 12 : Développement limité, formule de Taylor.

Soient une fonction f donnée et x_0 un point intérieur à D_f. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 si il existe $n+1$ constantes a_0, a_1, ..., a_n et une fonction $\epsilon(x)$ définie dans un certain voisinage de x_0 tel que

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to x_0} \epsilon(x) = 0.$$

La partie polynômiale $a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$ s'appelle la partie principale du développement limité et le termes $(x-x_0)^n\epsilon(x)$ le reste du développement. Si une fonction f admet un développement limité d'ordre n au voisinage du point x_0, alors il est unique. Il suffit de raisonner par l'absurde. De plus pour tout entier p tel que $p \leq n$, le développement à l'ordre p de f au voisinage de x_0 est

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^p + (x-x_0)^p\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to x_0} \epsilon(x) = 0.$$

On dit que la partie principale du développement limité à l'ordre p est obtenu en tronquant à l'ordre p la partie principale du développement à l'ordre n, c'est à dire on laisse tomber la partie $a_{p+1}(x - x_0)^{p+1} + a_{p+2}(x - x_0)^{p+2} + \cdots a_n(x - x_0)^n$. On définit l'opérateur de troncature à l'ordre p noté T_p en posant :

$$T_p(a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_p(x - x_0)^p$$

Soit une fonction f donnée, on suppose qu'elle admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 alors :
- si f est paire, tous les coefficients d'indices impairs dans la partie principale sont nuls,
- si f est impaire, tous les coefficients d'indices pairs dans la partie principale sont nuls.

Proposition

Soient deux fonctions f et g, un point $x_0 \in D_f \cap D_g$, on suppose que f et g admettent toutes les deux un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0. Alors
- la somme $f + g$ admet un développement limité à l'ordre n dont la partie principale est la somme des parties principales de f et g.
- le produit fg admet un développement limité à l'ordre n dont la partie principale est la troncature à l'ordre n du produit des parties principales.

On se place dans la situation suivante, soient deux ouvert $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ de $\mathbb{R}$, une fonction f (resp g) de $\mathbb{X}$ (resp $\mathbb{Y}$) à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $f(D_f) \subset D_g$. On peut donc considérer la fonction $g \circ f$.

$$g \circ f \;:\; \mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \;/\; x \longrightarrow \; g \circ f(x) = g(f(x))$$

On suppose que 0 est un point intérieur de D_f, que f est admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 avec $f(0) = 0$, que g admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. Alors la fonction $g \circ f$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, la partie principale étant la composée de la partie principale de g par celle de f tronqué à l'ordre n. Noter que la condition $f(0) = 0$ est impérative puisque le développement de g est connu uniquement au voisinage de 0.

Soit une fonction f telle que sa dérivée f' admet un développement limité à l'ordre n au voisinage d'un point x_0, alors f admet un développement limité à l'ordre $n + 1$ au voisinage du point x_0 dont la partie principale est la primitive de la partie principale de f' prenant la valeur $f(x_0)$ au point x_0.

Remarque : L'exemple de la fonction $f(x) = x^3 \sin(1/x)$ qui admet un développement d'ordre 2 au voisinage de 0 et dont la dérivée n'admet PAS de développement limité montre que l'on ne peut PAS dériver sans précaution un développement limité.

Pour déterminer un développement limité des fonctions de bases, on utilise la formule appelé la formule de Taylor que voici :

Formule de Taylor

Soient un intervalle ouvert $I =]a, b[$ et une fonction $f \;: I \longrightarrow \mathbb{R}$ que l'on suppose $n + 1$ fois dérivable sur I. Soit x_0 un point de I. Alors il existe un réel $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(x) = f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{1}{2!}(x-x_0)^2 f''(x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}(x-x_0)^n f^n(x_0)+\frac{1}{(n+1)!}f^{n+1}(x_0+\theta(x-x_0))$$

Preuve

On pose $P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + 1/2!(x - x_0)^2 f''(x_0) + \cdots + 1/n!(x - x_0)^n f^n(x_0)$. Pour $y > x_0$ on considère la fonction

$$g(x) = f(x) - P_n(x) + \frac{P_n(y) - f(y)}{(y - x_0)^{n+1}}(x - x_0)^{n+1}$$

Il est clair que g est une fonction $n + 1$ fois dérivable, un calcul montre que

$$g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = ... = g^{(n)}(x_0) = g(y) = 0$$

En appliquant le théorème de Rolle à la fonction g entre x_0 et y on en déduit l'existence d'un $y_1 \in]x_0, y[$ tel que $g'(y_1) = 0$. Comme $g'(x_0) = 0 = g'(y_1)$, on applique à nouveau le théorème de Rolle à g' entre x_0 et y_1, cela donne un $y_2 \in]x_0, y_1[$ tel que $g''(y_2) = 0$. En itérant le procédé on arrive à un point y_n tel que $g^{(n)}(y_n) = 0$. Une dernière fois le théorème de Rolle montre qu'il existe y_{n+1} tel que $g^{(n+1)}(y_{n+1}) = 0$, mais

$$g^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) + \frac{P_n(y) - f(y)}{(y - x_0)^{n+1}}(n + 1)!$$

d'ou

$$g^{(n+1)}(y_{n+1}) = f^{(n+1)}(y_{n+1}) + \frac{P_n(y) - f(y)}{(y - x_0)^{n+1}}(n + 1)! = 0$$

Comme y_{n+1} peut s'écrire sous la forme $x_0 + \theta(x - x_0)$ on obtient

$$\frac{f(y) - P_n(y)}{(y - x_0)^{n+1}} = \frac{1}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))$$

ou encore

$$f(y) = P_n(y) + \frac{(y - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))$$

qui est la formule de Taylor.