

Exame Unificado das Pós-graduações em Física

EUF

2º Semestre/2012

Parte 1 – 24/04/2012

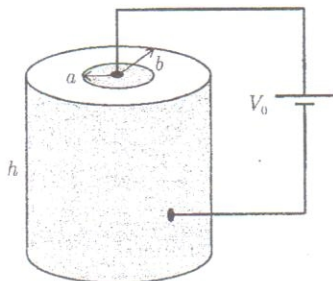
Instruções:

- **NÃO ESCREVA O SEU NOME NA PROVA.** Ela deverá ser identificada apenas através do código (EUFxxx).
- Esta prova constitui a **primeira parte** do exame unificado das Pós-graduações em Física. Ela contém problemas de: Eletromagnetismo, Física Moderna, Termodinâmica e Mecânica Estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração da prova é de **4 horas**. O tempo mínimo de permanência na sala é de **90 minutos**.
- **NÃO** é permitido o uso de **calculadoras** ou outros instrumentos eletrônicos.
- **RESOLVA CADA QUESTÃO NA PÁGINA CORRESPONDENTE DO CADERNO DE RESPOSTAS.** As folhas serão reorganizadas para correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. **Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Q1, Q2, ou ...) e o seu código de identificação (EUFxxx).** Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas.
Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas indicadas por **RASCUNHO**, que se encontram no fim do caderno de respostas. **NÃO AS DESTAQUE.** As folhas de rascunho serão descartadas e questões nelas resolvidas serão desconsideradas.
- **NÃO** escreva nada no formulário; **DEVOLVA-O** ao fim da prova, pois ele será utilizado amanhã.

Boa prova!

Q1. Um cilindro de altura h e raio externo b é feito de um material com condutividade elétrica σ e permissividade elétrica ϵ . O cilindro é furado ao longo de seu eixo de forma que seu raio interno é a . Um material de alta condutividade elétrica preenche o furo central do cilindro e forma também uma casca cilíndrica em torno da sua borda externa, formando os contatos elétricos do cilindro, conforme ilustra a figura abaixo. Considere $h \gg b$, de modo que os efeitos de borda podem ser desprezados. Aplica-se uma diferença de potencial elétrico V_0 entre esses contatos (tome $V = 0$ na superfície externa do cilindro).

- Mostre que, no regime estacionário ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$), a densidade de carga no interior do meio condutor homogêneo é nula.
- Mostre que, nesse caso, o potencial elétrico obedece à equação de Laplace e obtenha o vetor campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$ no interior do cilindro.
- Calcule a carga livre total acumulada na superfície do contato interno (raio a) e a capacitância entre os dois contatos elétricos.
- Calcule a resistência elétrica entre esses dois contatos elétricos.



Q2. Um cilindro condutor muito longo de raio a conduz uma corrente I ao longo de seu eixo z . A densidade de corrente \vec{J} no interior do cilindro varia de acordo com a expressão abaixo:

$$\vec{J}(r, \varphi, z) = \hat{z} \frac{J_0}{r} \sin\left(\frac{\pi r}{a}\right),$$

onde r é a distância radial entre o ponto considerado e o eixo do cilindro.

- Determine a constante J_0 em termos de I e a .
- Calcule o campo magnético \vec{B} fora do cilindro condutor ($r > a$) e expresse seu resultado em termos de I e a .
- Calcule o campo magnético \vec{B} no interior do cilindro condutor ($r < a$) e expresse seu resultado em termos de I e a .
- Esboce um gráfico qualitativo do módulo do campo magnético, $B(r)$, indicando seu comportamento em $r = 0$ e $r = a$.

Q3. (a) Utilize a relação de de Broglie para o comprimento de onda associado a uma partícula e obtenha a relação de quantização do momento angular de um elétron em movimento orbital atômico, no modelo de Bohr ($L = n\hbar$, com $n=1, 2, 3, \dots$).

(b) Use a expressão acima para mostrar que as energias associadas aos estados eletrônicos permitidos em um átomo de hidrogênio são dadas por

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2},$$

onde e e m_e são a carga e a massa do elétron, respectivamente.

(c) Calcule a energia de ionização do Lítio duplamente ionizado ($Z = 3$) sabendo que a energia de ionização do hidrogênio é $13,6 \text{ eV}$.

(d) Em espectroscopia, a série de Balmer está associada a um subconjunto de transições nas quais o elétron do átomo de H vai de um estado excitado ao estado final caracterizado por $n_f = 2$. Nesta série, a linha denominada por H_β corresponde a transição a partir do estado com $n_i = 4$. Estime o comprimento de onda da linha H_β e situe a mesma em alguma região do espectro eletromagnético.

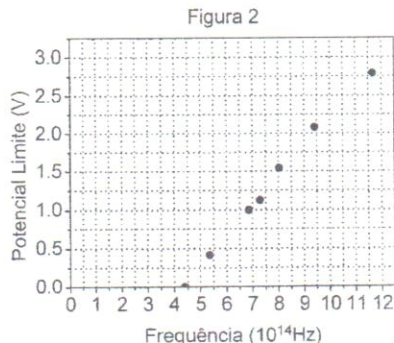
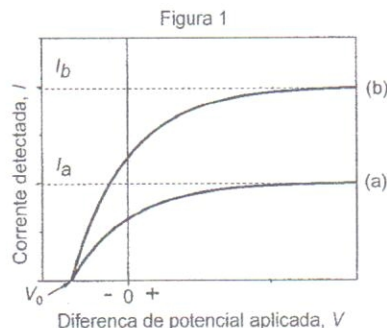
Q4. Em um experimento de efeito fotoelétrico, a Figura 1 abaixo mostra um possível gráfico da corrente fotoelétrica em função da diferença de potencial V entre o coletor de elétrons e um alvo de sódio. As curvas (a) e (b) correspondem a diferentes intensidades da luz incidente e V_0 é o chamado “potencial de corte” ou “potencial limite”. Já a Figura 2 mostra medidas do potencial limite em função da frequência da luz incidente. Utilizando esses gráficos:

(a) estime o valor da constante de Planck em eVs, indicando o procedimento utilizado;

(b) estime o valor da “função trabalho” para o sódio;

(c) estime o valor da energia cinética do mais rápido fotoelétrico emitido quando o alvo de sódio é atingido por luz de frequência 10^{15} Hz ;

(d) cite uma característica do efeito fotoelétrico que pode ser explicada classicamente e outra que não se pode explicar utilizando a teoria ondulatória do eletromagnetismo.



Q5. Dois corpos idênticos de capacidade térmica constante C_p (finita) estão nas temperaturas T_1 e T_2 , respectivamente, sendo $T_2 > T_1$. Considere que nos processos descritos abaixo os corpos permanecem a pressão constante e não sofrem mudança de fase.

- (a) Se os corpos forem colocados em contato, mas isolados termicamente do resto do universo, determine a temperatura de equilíbrio.
- (b) Determine a variação de entropia do sistema no processo descrito no item (a).

Considere agora que os corpos funcionem como fontes quente e fria para uma pequena máquina térmica, a qual irá funcionar até que os dois corpos atinjam o equilíbrio térmico.

- (c) Supondo que esse processo seja reversível, determine a temperatura final de equilíbrio neste caso.
- (d) Calcule a quantidade de trabalho produzida pela máquina térmica no processo descrito no item (c).

Exame Unificado das Pós-graduações em Física

EUf

2º Semestre/2012

Parte 2 – 25/04/2012

Instruções:

- **NÃO ESCREVA O SEU NOME NA PROVA.** Ela deverá ser identificada apenas através do código (EUfxxx).
- Esta prova constitui a **segunda parte** do exame unificado das Pós-graduações em Física. Ela contém problemas de: Mecânica Clássica, Mecânica Quântica, Termodinâmica e Mecânica Estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração da prova é de **4 horas**. O tempo mínimo de permanência na sala é de **90 minutos**.
- **NÃO** é permitido o uso de **calculadoras** ou outros instrumentos eletrônicos.
- **RESOLVA CADA QUESTÃO NA PÁGINA CORRESPONDENTE DO CADERNO DE RESPOSTAS.** As folhas serão reorganizadas para correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. **Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Q1, Q2, ou ...) e o seu código de identificação (EUfxxx).** Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas.
Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas indicadas por RASCUNHO, que se encontram no fim do caderno de respostas. **NÃO AS DESTAQUE.** As folhas de rascunho serão descartadas e **questões nelas resolvidas serão desconsideradas.**
- **NÃO** é necessário devolver o Formulário.

Boa prova!

Q6. Um corpo celeste de massa m se aproxima do Sol (massa $M \gg m$) seguindo uma trajetória hiperbólica e quando está a uma distância r_0 dele, a sua velocidade é v_0 e faz um ângulo de 30° com o raio vetor ao Sol.

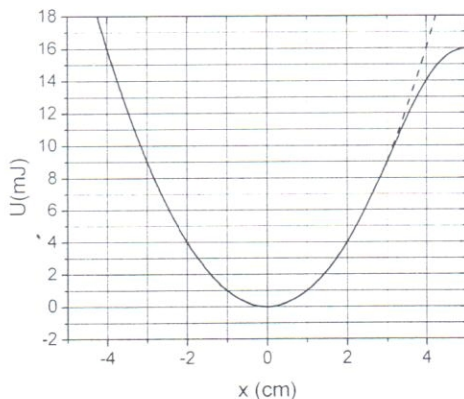
- Calcule o momento angular L e a energia E desse corpo celeste.
- Determine a distância r_p de máxima aproximação do corpo celeste ao Sol, expressando o seu resultado em termos de L e E .
- Quando o corpo celeste atinge a distância r_p de máxima aproximação, sofre um choque com um pequeno asteroide de tal maneira que sua massa não varia, porém ele passa a descrever órbita circular de raio r_p no mesmo plano da órbita anterior. Calcule a nova energia e o novo momento angular do corpo celeste após a colisão, expressando o seu resultado em termos de r_p .

Q7. Uma bola de massa $m = 450$ g está presa a uma mola cuja energia potencial em função da elongação x está mostrada na figura abaixo (linha sólida). Expresse as respostas no SI.

- Determine a constante elástica da mola, para pequenos deslocamentos.
- Esboce um gráfico da força que atua sobre essa bola em função da elongação da mola.

Sabendo que o movimento da bola é unidimensional e sua elongação máxima é de 3 cm:

- determine sua velocidade máxima;
- determine a energia cinética da bola nesse movimento para a elongação da mola $x = -2$ cm;
- Determine a posição ($x < 0$) em que a bola deve ser solta a partir do repouso para atingir o ponto $x = 5$ cm com velocidade nula.



Q8. Considere o problema unidimensional quântico de uma partícula de massa m sujeita ao potencial

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & , x < 0 \\ 0 & , 0 < x < a \\ +\infty & , x > a \end{cases}.$$

- (a) Escreva a equação de Schrödinger independente do tempo para este problema.
 (b) Resolva a equação, achando todas as soluções aceitáveis independentes. Isto é: determine todos os valores possíveis para a energia, E_n , e as funções de onda normalizadas correspondentes, $\psi_n(x)$.

Suponha agora que, na verdade, o potencial total tenha a forma $V_{\text{total}}(x) = V(x) + W(x)$, sendo $W(x)$ uma pequena correção dada por

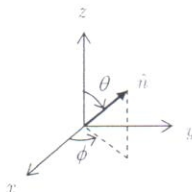
$$W(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ W_0 \sin(\pi x/a) & , 0 < x < a \\ 0 & , x > a \end{cases}$$

- (c) Usando teoria de perturbações de primeira ordem, calcule a correção para a energia do estado fundamental obtida no item anterior.

Q9. Para uma partícula de spin $\frac{1}{2}$ o operador de spin é dado por $\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$, onde

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

são as matrizes de Pauli. Seja \hat{n} o vetor unitário na direção de ângulos (θ, ϕ) , conforme ilustra a figura abaixo.



- (a) Calculando o produto escalar, mostre explicitamente que o operador que representa a componente do spin nessa direção, $S_n = \hat{n} \cdot \vec{S}$, é dado por

$$S_n = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

- (b) Mostre que os únicos valores que podem ser obtidos numa medida de S_n são $+h/2$ e $-h/2$, qualquer que seja a direção \hat{n} .
- (c) Obtenha o vetor coluna normalizado que representa o estado no qual uma medida de S_n produz necessariamente o valor $+h/2$. Simplifique a resposta final expressando a dependência em θ em termos de $\sin(\theta/2)$ e $\cos(\theta/2)$.
- (d) Suponha, agora, que $\theta = 60^\circ$ e $\phi = 45^\circ$. Se a partícula for preparada de tal forma que a componente z do spin, S_z , tenha o valor bem definido $+h/2$, qual é a probabilidade de obter-se esse mesmo valor numa medida de S_n ? *Dê a resposta numérica.*

Q10. Considere um gás composto por N partículas ultrarrelativísticas (de forma que sua energia ε possa ser escrita como $\varepsilon = cp$, onde p é o seu momento linear) confinado em um recipiente de volume V e a temperatura T . Suponha que as partículas sejam indistinguíveis e não interagentes, e que sua energia térmica seja suficientemente alta para desprezar efeitos quânticos.

- (a) Mostre que a função de partição do gás é $Z = \frac{(8\pi V)^N}{N!(hc/k_B T)^{3N}}$, onde h é a constante de Planck, c é a velocidade da luz no vácuo e k_B é a constante de Boltzmann.
- (b) Determine a pressão do gás.
- (c) Calcule a entropia do gás.
- (d) Determine a energia interna do gás.

Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

EUf

2º Semestre/2012

FORMULÁRIO

Não escreva nada neste formulário. Devolva-o ao fim do primeiro dia de prova.

Constantes físicas

Velocidade da luz no vácuo	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$
Constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ Js} = 4,14 \times 10^{-15} \text{ eVs}$
	$hc = 1240 \text{ eV nm}$
Constante de Wien	$W = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m K}$
Permeabilidade magnética do vácuo	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 = 12,6 \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$
Permissividade elétrica do vácuo	$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$
	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,99 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$
Constante gravitacional	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$
Carga elementar	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Massa do elétron	$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} = 511 \text{ keV}/c^2$
Comprimento de onda Compton do elétron	$\lambda_C = 2,43 \times 10^{-12} \text{ m}$
Massa do próton	$m_p = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg} = 938 \text{ MeV}/c^2$
Massa do nêutron	$m_n = 1,675 \times 10^{-27} \text{ kg} = 940 \text{ MeV}/c^2$
Massa do deuteron	$m_d = 3,344 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1,876 \text{ MeV}/c^2$
Massa da partícula α	$m_\alpha = 6,645 \times 10^{-27} \text{ kg} = 3,727 \text{ MeV}/c^2$
Constante de Rydberg	$R_H = 1,10 \times 10^7 \text{ m}^{-1}, \quad R_H hc = 13,6 \text{ eV}$
Raio de Bohr	$a_0 = 5,29 \times 10^{-11} \text{ m}$
Constante de Avogadro	$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K} = 8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$
Constante molar dos gases	$R = 8,31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$

Raio do Sol	$= 6,96 \times 10^8 \text{ m}$	Massa do Sol	$= 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Raio da Terra	$= 6,37 \times 10^6 \text{ m}$	Massa da Terra	$= 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$
Distância Sol-Terra	$= 1,50 \times 10^{11} \text{ m}$		

$$1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg} \qquad 1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Constantes numéricas

$\pi \cong 3,142$	$\ln 2 \cong 0,693$	$\cos(30^\circ) = \sqrt{3}/2 \cong 0,866$
$e \cong 2,718$	$\ln 3 \cong 1,099$	$\sin(30^\circ) = 1/2$
$1/e \cong 0,368$	$\ln 5 \cong 1,609$	
$\log_{10} e \cong 0,434$	$\ln 10 \cong 2,303$	

Mecânica Clássica

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad L_i = \sum_j I_{ij} \omega_j \quad T_R = \sum_{ij} \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j \quad I_0 = I_{CM} + M \ell^2$$

$$\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{e}}_r \quad \mathbf{v} = \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta \quad \mathbf{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{\mathbf{e}}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \hat{\mathbf{e}}_\theta$$

$$\mathbf{r} = \rho \hat{\mathbf{e}}_\rho + z \hat{\mathbf{e}}_z \quad \mathbf{v} = \dot{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\rho + \rho \dot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \dot{z} \hat{\mathbf{e}}_z \quad \mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \hat{\mathbf{e}}_\rho + (\rho \ddot{\varphi} + 2 \dot{\rho} \dot{\varphi}) \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \ddot{z} \hat{\mathbf{e}}_z$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r \hat{\mathbf{e}}_r & \mathbf{v} &= \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta + r \dot{\varphi} \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\varphi & \mathbf{a} &= \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) \hat{\mathbf{e}}_r \\ & & & & & + \left(r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ & & & & & + \left(r \dot{\varphi} \sin \theta + 2 \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta + 2 r \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta \right) \hat{\mathbf{e}}_\varphi \end{aligned}$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad V(r) = - \int_{r_0}^r F(r') dr' \quad V_{\text{efetivo}} = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$\int_{R_0}^R \frac{dr}{\sqrt{E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}}} = \sqrt{\frac{2}{m}} (t - t_0) \quad \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2 u^2} F(1/u), \quad u = \frac{1}{r}, \quad \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 = \frac{2m}{L^2} [E - V(1/u)]$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad L = T - V \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^N F_{ir} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \quad Q_k = - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$$\left(\frac{d^2 r}{dt^2} \right)_{\text{rotac\~ao}} = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} \right)_{\text{fixo}} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$$

$$H = \sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k - L, \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

Eletromagnetismo

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\vec{\ell} + \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q = \int \rho dV$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\vec{\ell} - \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu \mathbf{H}$$

$$\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = -Q_P$$

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_P$$

$$\oint \mathbf{M} \cdot d\vec{\ell} = I_M$$

$$\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_M$$

$$V = - \int \mathbf{E} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

$$d\mathbf{H} = \frac{I d\vec{\ell} \times \hat{\mathbf{e}}_r}{4\pi r^2}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r}$$

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$d\mathbf{F} = I d\vec{\ell} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$u = \frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} dV}{r}$$

$$(\rho = 0, \mathbf{J} = 0) \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Relatividade

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$x' = \gamma (x - Vt)$$

$$t' = \gamma (t - Vx/c^2)$$

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - Vv_x/c^2}$$

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma (1 - Vv_x/c^2)}$$

$$v'_z = \frac{v_z}{\gamma (1 - Vv_x/c^2)}$$

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 + K$$

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2}$$

$$p = \gamma m_0 v$$

Mecânica Quântica

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = H \Psi(x,t)$$

$$p_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + i \frac{\hat{p}}{m\omega} \right)$$

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y$$

$$L_z = x p_y - y p_x$$

$$L_z Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = m\hbar Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

$$E_n^{(1)} = \langle n | \delta H | n \rangle$$

$$\hat{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$$

$$H = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\tilde{L}^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$[x,p_x]=i\hbar$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

$$L_{\pm} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} Y_{\ell m \pm 1}(\theta, \varphi)$$

$$L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad [L_x, L_y] = i\hbar L_z$$

$$L^2 Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

$$E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m | \delta H | n \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}, \quad \phi_n^{(1)} = \sum_{m \neq n} \frac{\langle m | \delta H | n \rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \phi_m^{(0)}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Física Moderna

$$\nu = \frac{h}{\lambda}$$

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

$$R_T = \sigma T^4$$

$$\lambda_{\max} T = b$$

$$L = mvr = n\hbar$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta)$$

$$n\lambda = 2d \sin \theta$$

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$$

Termodinâmica e Mecânica Estatística

$$U = TS - PV + \mu N$$

$$dU = TdS - PdV + \mu dN$$

$$F = U - TS$$

$$G = F + PV$$

$$H = U + PV$$

$$\Phi = U - TS - \mu N = -pV$$

$$dS = dQ/T$$

$$SdT - VdP + Nd\mu = 0$$

$$Z = \sum_j e^{-\beta E_j}$$

$$Ud\left(\frac{1}{T}\right) + Vd\left(\frac{P}{T}\right) + Nd\left(\frac{\mu}{T}\right) = 0$$

$$Z(T, V, N) = \int d\Omega e^{-\beta E(\Omega)}$$

$$F(T, V, N) = -k_B T \ln Z(T, V, N)$$

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

$$U(T, V, N) = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$$

$$\Xi(T, V, \mu) = \sum_N \int d\Omega_N e^{-\beta[E(\Omega_N) - \mu N]}$$

$$\Phi(T, V, \mu) = -k_B T \ln \Xi(T, V, \mu)$$

$$S = k_B \ln \Omega$$

$$\tilde{f}(p) = f(x(p)) - x(p)p \text{ (transf. de Legendre)}$$

$$PV = nRT, \quad U = C_V T$$

$$PV^\gamma = \text{constante}, \quad \gamma = C_P/C_V = 1 + R/C_V$$

$$f_{FD}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1}$$

$$f_{BE}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1}$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V, N} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V, N}$$

$$C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{P, N} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{P, N}$$

Resultados matemáticos úteis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{(2n+1) 2^n \alpha^n} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1/(1-q), \quad (q < 1)$$

$$\int \frac{du}{u(u-1)} = \ln(1-1/u)$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\int \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{1/2}} = \ln \left(z + \sqrt{z^2 + a^2} \right)$$

$$\ln N! \approx N \ln N - N$$

$$\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+u}{1-u} \right)$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (\text{para } a > 0)$$

$$\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a}$$

$$\int \sin^3(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a} + \frac{\cos^3(ax)}{3a}$$

$$1 + \cos(x) = 2 \cos^2(x/2)$$

$$\sin(x) = 2 \sin(x/2) \cos(x/2)$$

$$dV = \rho \, d\rho \, d\phi \, dz$$

$$dV = r^2 dr \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

$$Y_{0,0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

$$Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$Y_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta \, e^{\pm i\phi}$$

$$Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$Y_{2,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta \, e^{\pm i\phi}$$

$$Y_{2,\pm 2} = \mp \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta \, e^{\pm 2i\phi}$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$$

Solução geral para a Eq. de Laplace em coordenadas esféricas, com simetria azimutal:

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

Coordenadas cartesianas

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{e}_z$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z \quad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordenadas cilíndricas

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right] \hat{e}_\rho + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] \hat{e}_\varphi + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right] \hat{e}_z$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z \quad \nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordenadas esféricas

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \hat{e}_r \\ & + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right] \hat{e}_\theta + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{e}_\varphi \end{aligned}$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Teoremas do Cálculo Vetorial

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV$$

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\vec{\ell} = \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$