Exame Unificado das Pós-graduações em Física

EUF

1º Semestre/2013

Parte 1 — 16/10/2012

Instruções:

- **NÃO ESCREVA O SEU NOME NA PROVA.** Ela deverá ser identificada **apenas através do código (EUFxxx).**
- Esta prova constitui a **primeira parte** do exame unificado das Pós-Graduação em Física.

  Ela contém problemas de: Eletromagnetismo, Física Moderna, Termodinâmica e Mecânica Estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**. O tempo mínimo de permanência na sala é de **90 minutos.**
- **NÃO** é permitido o uso de **calculadoras** ou outros instrumentos eletrônicos.
- **RESOLVA CADA QUESTÃO NA PÁGINA CORRESPONDENTE DO CADERNO DE RESPOSTAS.** As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. **Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Q1, ou Q2, ou ...) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas.**
  Use uma folha extra diferente para cada questão. Nao destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas indicadas por RASCUNHO, que se encontram no fim do caderno de respostas. **NÃO AS DESTAQUE.** As folhas de rascunho serão descartadas e **questões nelas resolvidas não serão consideradas.**
- **NÃO** escreva nada no formulário; **DEVOLVA-O** ao fim da prova, pois ele será utilizado amanhã.

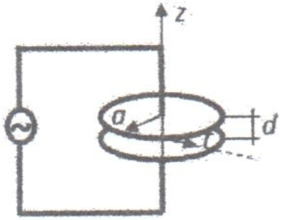
Boa prova!

Q1. Considere uma esfera sólida, uniformemente carregada, de carga Q e raio R.

(a) Determine o vetor campo elétrico $\vec{E}$ em um ponto à distância r do centro da esfera, nos casos $r > R$ e $r \leq R$.
(b) Obtenha a força $d\vec{F}$ sobre um elemento de volume dV da esfera, localizado na posição $\vec{r}$.
(c) Determine agora, por integração, a força total $\vec{F}$ que age sobre o hemisfério superior da esfera.

Q2. Um capacitor de placas planas paralelas é formado por dois discos circulares de raio a, separados entre si de uma distância $d \ll a$, no vácuo. As placas estão ligadas a um gerador de corrente alternada de frequência ω, que produz uma carga uniforme na placa do capacitor, dada por $q(t) = q_0 \sin(\omega t)$. São desprezados efeitos de borda. Supondo baixas frequências, de forma que $\omega a/c \ll 1$ (onde $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ é a velocidade da luz), o campo elétrico $\vec{E}$ entre as placas pode ser considerado uniforme. Considere um sistema de coordenadas cilíndricas, (r,θ,z), com eixo z passando pelo centro das placas, conforme indicado na figura.

(a) Calcule a expressão para o campo elétrico $\vec{E}$ entre as placas.
(b) Calcule o campo magnético $\vec{B}$, em função do raio r, na região entre as placas do capacitor.
(c) Calcule o vetor de Poynting $\vec{S} = (\vec{E} \times \vec{B})/\mu_0$.
(d) Usando a aproximação de baixas frequências, mostre que é satisfeita a conservação de energia, expressa pela condição $\nabla \cdot \vec{S} + \partial u/\partial t = 0$, onde $u = \frac{1}{2}(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \vec{B}^2/\mu_0)$ é a densidade de energia contida no campo eletromagnético.



Q3. Uma partícula de massa m confinada em um poço de potencial unidimensional possui função de onda dada por:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < -L/2 \\ A\cos\dfrac{3\pi x}{L} & \text{para } -L/2 < x < L/2 \\ 0 & \text{para } x > L/2 \end{cases}$$

(a) Calcule a constante de normalização A.
(b) Calcule a probabilidade de encontrar a partícula no intervalo entre $-L/4 < x < L/4$.
(c) Através da solução da equação de Schrödinger independente do tempo para esta partícula no referido poço de potencial, ache a energia correspondente à função de onda, em termos de m, L e h.
(d) Calcule o comprimento de onda do fóton emitido na transição desta partícula para o estado fundamental, em termos de m, L e h.

Q4. O decaimento dos múons obedece à seguinte equação diferencial

$$\frac{dN(t)}{dt} = -RN(t)$$

onde $N(t)$ é o número de múons presentes no instante de tempo t e $dN(t)/dt$ representa a taxa de variação de múons no mesmo instante de tempo t. A constante de proporcionalidade R é chamada de constante de decaimento. O tempo de vida médio do múon é $\bar{t} = 2\mu s$, isto é, neste intervalo de tempo $N(\bar{t})/N(0) = 1/e \approx 1/2{,}73$. Sendo a velocidade dos múons na direção da superfície da Terra igual a $0{,}998c$, responda:

(a) No sistema inercial de referência do múon, qual o valor de R para o decaimento de múons?
(b) Sem considerar correções relativísticas, estime quantos múons seriam detectados ao nível do mar, correspondentes a 10^8 múons detectados a 9 km de altitude.
(c) Considere agora a previsão relativística e repita a estimativa do item (b).

Q5. Um gás ideal monoatômico de N moléculas de massa m está em equilíbrio térmico a uma temperatura absoluta T. O gás está contido em uma caixa cúbica de aresta L, cujos lados de baixo e de cima estão paralelos à superfície da Terra. Considere o efeito do campo gravitacional sobre as moléculas. A aceleração da gravidade é g. Determine:

(a) a função de partição de uma molécula do gás;
(b) a energia cinética média de uma molécula do gás;
(c) a energia potencial média de uma molécula do gás;
(d) a energia potencial média de uma molécula do gás no caso em que $mgL/k_BT \ll 1$. Faça o cálculo até 2ª ordem da razão mgL/k_BT.

Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

EUF

1º Semestre/2013

Parte 2 — 17/10/2013

Instruções:

- **NÃO ESCREVA O SEU NOME NA PROVA.** Ela deverá ser identificada apenas através do código (EUFxxx).
- Esta prova constitui a **segunda parte** do exame unificado das Pós-Graduação em Física.

  Ela contém problemas de: Mecânica Clássica, Mecânica Quântica, Termodinâmica e Mecânica Estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**. O tempo mínimo de permanência na sala é de **90 minutos**.
- **NÃO** é permitido o uso de **calculadoras** ou outros instrumentos eletrônicos.
- **RESOLVA CADA QUESTÃO NA PÁGINA CORRESPONDENTE DO CADERNO DE RESPOSTAS.** As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. **Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Q1, ou Q2, ou . . .) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas.**
  Use uma folha extra diferente para cada questão. Nao destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas indicadas por RASCUNHO, que se encontram no fim do caderno de respostas. **NÃO AS DESTAQUE.** As folhas de rascunho serão descartadas e **questões nelas resolvidas não serão consideradas.**
- **NÃO** escreva nada no formulário; **DEVOLVA-O** ao fim da prova, pois ele será utilizado amanhã.

Boa prova!

Q6. Um equilibrista de massa m está inicialmente parado na extremidade de uma barra larga, horizontal, homogênea, de comprimento D e massa $M = 3m$. A barra gira em torno de um eixo vertical que passa pelo seu centro. O equilibrista começa então a caminhar sobre a barra, em direção ao eixo de rotação, com velocidade constante. Considere o período inicial de rotação do sistema igual a T_0.

(a) Determine o torque das forças que atuam sobre o equilibrista em relação ao centro da barra.

(b) Determine o momento angular do sistema quando o equilibrista atinge o centro da barra. Determine o período de rotação do sistema nessa situação.

(c) Determine as energias nas posições inicial e final do sistema. Nesse movimento, a energia do sistema variou?

Considere o equilibrista como uma massa puntiforme.

Dado: $I_{CM}(\text{barra}) = \frac{1}{12} M D^2$

Q7. Uma partícula de massa m se encontra no interior de um cano oco, liso, estreito e longo que gira num plano horizontal com velocidade angular ω constante. O eixo fixo de rotação passa por uma das extremidades do cano, como mostra a figura.

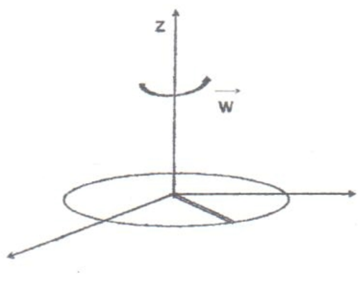
(a) Escreva a Lagrangiana da partícula.

(b) Obtenha as equações de Lagrange do movimento da partícula.

(c) Determine o movimento da partícula, considerando que inicialmente ela é lançada do centro de rotação com velocidade $\vec{v}_0$.

(d) Obtenha a função Hamiltoniana (H) do movimento dessa partícula e as equações de Hamilton do movimento.

(e) Dentre as grandezas físicas H e E (energia), quais são conservadas? Justifique sua resposta.



Q8. Considere um oscilador harmônico (em uma dimensão, x) de massa m e frequência ω. No instante $t = 0$, o estado do oscilador é $|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n|\phi_n\rangle$ onde os $|\phi_n\rangle$ são os estados estacionários, isto é, $H|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle$, sendo H a hamiltoniana e $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ com $n = 0,1,2,\ldots$

(a) Considerando que os estados $|\phi_n\rangle$ são normalizados, determine a condição que os coeficientes c_n devem satisfazer para que o estado $|\psi(0)\rangle$ seja também normalizado. Calcule, então, a probabilidade $\mathcal{P}$ de que uma medida da energia do oscilador, feita num instante t posterior, dê um resultado maior que $2\hbar\omega$.

(b) Se apenas c_0 e c_1 são diferentes de zero, dê a expressão para o valor esperado da energia, $\langle H\rangle$, em termos de c_0 e c_1. Com a condição $\langle H\rangle = \hbar\omega$, calcule $|c_0|^2$ e $|c_1|^2$.

(c) O vetor de estado $|\psi(0)\rangle$ está definido a menos de um fator de fase global, o que nos permite escolher c_0 real e positivo. Fazendo isso, escrevendo $c_1 = |c_1|e^{i\theta_1}$ e mantendo a condição $\langle H\rangle = \hbar\omega$, determine θ_1 de modo que $\langle X\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$.

Observação: Lembremos que o efeito do operador posição X sobre os estados estacionários do oscilador harmônico é

$$X|\phi_n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\sqrt{n+1}\,|\phi_{n+1}\rangle + \sqrt{n}\,|\phi_{n-1}\rangle\right]$$

entendendo-se que o segundo termo acima é nulo para $n = 0$.

(d) Com $|\psi(0)\rangle$ determinado conforme o item anterior, escreva $|\psi(t)\rangle$ para $t > 0$ e calcule $\langle X\rangle(t)$.

Q9. Sejam $\vec{L}$,$\vec{R}$ e $\vec{P}$ os operadores do momento angular, da posição e do momento linear, respectivamente.

(a) Usando as relações de comutação $[L_i,L_j] = i\hbar\sum_k \epsilon_{ijk}L_k$, mostre que

$$\vec{L} \times \vec{L} = i\hbar\vec{L}$$

(b) Com a definição $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}$ e usando $[R_i,P_j] = i\hbar\delta_{ij}$, mostre que

$$[L_i,R_j] = i\hbar\sum_k \epsilon_{ijk}R_k$$

(c) Sabendo que os operadores $\vec{R}$ e $\vec{P}$ são hermitianos, isto é, $R_i^\dagger = R_i$ e $P_i^\dagger = P_i$, mostre que as componentes do operador do momento angular $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}$ também são operadores hermitianos.

Observação: Nas expressões acima, ϵ_{ijk} é o tensor completamente antissimétrico, isto é:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{se houver índices iguais;} \\ +1 & \text{se } ijk \text{ for 123, 231 ou 312;} \\ -1 & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

Se precisar, use a identidade $\sum_{i,j} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$.

Q10. A radiação em uma cavidade ressonante pode ser vista como um gás de fótons cuja pressão sobre as paredes de uma cavidade de volume V é dada por

$$P = \frac{aT^4}{3},$$

onde a é uma constante. A energia interna desse gás é dada pela equação $U = aT^4V$. Considere que inicialmente a temperatura da cavidade seja T_0 e seu volume V_0.

(a) Determine o trabalho realizado em um processo isotérmico no qual o volume da cavidade é duplicado. Forneça a resposta em termos de T_0, V_0 e da constante a apenas.

(b) Determine o calor fornecido em um processo isotérmico no qual o volume da cavidade é duplicado. Forneça a resposta em termos de T_0, V_0 e da constante a apenas.

(c) Usando a relação

$$đQ = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right] dV,$$

determine a equação que descreve um processo adiabático em termos das variáveis V e T.

(d) Determine o trabalho realizado em um processo adiabático no qual o volume da cavidade é duplicado. Expresse o resultado em termos de T_0, V_0 e da constante a apenas.

Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

EUF

1º Semestre/2013

FORMULÁRIO

Não escreva nada neste formulário. Devolva-o ao fim do primeiro dia de prova.

Constantes físicas

Velocidade da luz no vácuo	$c = 3{,}00\times10^{8}$ m/s
Constante de Planck	$h = 6{,}63\times10^{-34}$ J s $= 4{,}14\times10^{-15}$ eV s
	$hc = 1240$ eV nm
Constante de Wien	$W = 2{,}898\times10^{-3}$ m K
Permeabilidade magnética do vácuo	$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ N/A^2 $= 12{,}6\times10^{-7}$ N/A^2
Permissividade elétrica do vácuo	$\epsilon_0 = \dfrac{1}{\mu_0 c^2} = 8{,}85\times10^{-12}$ F/m
	$\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8{,}99\times10^{9}$ Nm^2/C^2
Constante gravitacional	$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2/kg^2
Carga elementar	$e = 1{,}60\times10^{-19}$ C
Massa do elétron	$m_e = 9{,}11\times10^{-31}$ kg $= 511$ keV/c^2
Comprimento de onda Compton	$\lambda_C = 2{,}43\times10^{-12}$ m
Massa do próton	$m_p = 1{,}673\times10^{-27}$ kg $= 938$ MeV/c^2
Massa do nêutron	$m_n = 1{,}675\times10^{-27}$ kg $= 940$ MeV/c^2
Massa do dêuteron	$m_d = 3{,}344\times10^{-27}$ kg $= 1.876$ MeV/c^2
Massa da partícula α	$m_\alpha = 6{,}645\times10^{-27}$ kg $= 3.727$ MeV/c^2
Constante de Rydberg	$R_H = 1{,}10\times10^{7}$ m^{-1}, $R_H hc = 13{,}6$ eV
Raio de Bohr	$a_0 = 5{,}29\times10^{-11}$ m
Constante de Avogadro	$N_A = 6{,}02\times10^{23}$ mol^{-1}
Constante de Boltzmann	$k_B = 1{,}38\times10^{-23}$ J/K $= 8{,}62\times10^{-5}$ eV/K
Constante molar dos gases	$R = 8{,}31$ J mol^{-1} K^{-1}
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5{,}67\times10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}

Raio do Sol	=	$6{,}96\times10^{8}$ m	Massa do Sol	=	$1{,}99\times10^{30}$ kg
Raio da Terra	=	$6{,}37\times10^{6}$ m	Massa da Terra	=	$5{,}98\times10^{24}$ kg
Distância Sol-Terra	=	$1{,}50\times10^{11}$ m			

$1\ \text{J} = 10^{7}$ erg $\qquad$ $1\ \text{eV} = 1{,}60\times10^{-19}$ J

Constantes numéricas

$\pi \cong 3{,}142$	$\ln 2 \cong 0{,}693$	$\cos(30^\circ) = \sqrt{3}/2 \cong 0{,}866$
$e \cong 2{,}718$	$\ln 3 \cong 1{,}099$	$\text{sen}(30^\circ) = 1/2$
$1/e \cong 0{,}368$	$\ln 5 \cong 1{,}609$	
$\log_{10} e \cong 0{,}434$	$\ln 10 \cong 2{,}303$	

Mecânica Clássica

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad L_i = \sum_j I_{ij}\omega_j \qquad T_R = \sum_{ij} \frac{1}{2} I_{ij}\omega_i\omega_j \qquad I = \int r^2\, dm$$

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathrm{e}}_r \qquad \mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathrm{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathrm{e}}_\theta \qquad \mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathrm{e}}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\mathrm{e}}_\theta$$

$$\mathbf{r} = \rho\hat{\mathrm{e}}_\rho + z\hat{\mathrm{e}}_z \qquad \mathbf{v} = \dot{\rho}\hat{\mathrm{e}}_\rho + \rho\dot{\varphi}\hat{\mathrm{e}}_\varphi + \dot{z}\hat{\mathrm{e}}_z \qquad \mathbf{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right)\hat{\mathrm{e}}_\rho + \left(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\right)\hat{\mathrm{e}}_\varphi + \ddot{z}\hat{\mathrm{e}}_z$$

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathrm{e}}_r \qquad \begin{aligned} \mathbf{v} = {} & \dot{r}\hat{\mathrm{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathrm{e}}_\theta \\ & + r\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\mathrm{e}}_\varphi \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbf{a} = {} & \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\right)\hat{\mathrm{e}}_r \\ & + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\right)\hat{\mathrm{e}}_\theta \\ & + \left(r\ddot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\right)\hat{\mathrm{e}}_\varphi \end{aligned}$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \qquad V(r) = -\int_{r_0}^{r} F(r')\mathrm{d}r' \qquad V_{\text{efetivo}} = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$\int_{R_0}^{R} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{E - V(r) - \frac{L}{2mr^2}}} = \sqrt{\frac{2}{m}}\,(t - t_0) \qquad \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2u^2}F\left(1/u\right), \quad u = \frac{1}{r}; \qquad \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2m}{L^2}\left[E - V(1/u)\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad L = T - V \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N} F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_k} \qquad Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\text{rotação}} = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\text{fixo}} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$$

$$H = \sum_{k=1}^{f} p_k\dot{q}_k - L; \qquad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}; \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Eletromagnetismo

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\vec{\ell} + \frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0 \qquad \nabla\times\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0 \qquad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0$$

$$\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = Q = \int \rho dV \qquad \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho$$

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\vec{\ell} - \frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = I = \int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} \qquad \nabla\times\mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon\mathbf{E} \qquad \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu\mathbf{H}$$

$$\oint \mathbf{P}\cdot d\mathbf{S} = -Q_P \qquad \nabla\cdot\mathbf{P} = -\rho_P \qquad \oint \mathbf{M}\cdot d\vec{\ell} = I_M \qquad \nabla\times\mathbf{M} = \mathbf{J}_M$$

$$V = -\int \mathbf{E}\cdot d\vec{\ell} \qquad \mathbf{E} = -\nabla V \qquad d\mathbf{H} = \frac{I d\vec{\ell}\times\hat{e}_r}{4\pi r^2} \qquad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$$

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{r^2}\hat{e}_r \qquad dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{r} \qquad \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}) \qquad d\mathbf{F} = I d\vec{\ell}\times\mathbf{B}$$

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \qquad \nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$u = \frac{1}{2}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) \qquad \mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} \qquad \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}dV}{r}$$

$$(\rho = 0, \mathbf{J} = 0) \Rightarrow \nabla^2\mathbf{E} = \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \qquad n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

Relatividade

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \qquad x' = \gamma(x - Vt) \qquad t' = \gamma\left(t - Vx/c^2\right)$$

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - Vv_x/c^2} \qquad v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - Vv_x/c^2)} \qquad v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - Vv_x/c^2)}$$

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 + K \qquad E = \sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2}$$

Mecânica Quântica

$$i\hbar\,\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}=H\Psi(x,t) \qquad H=\frac{-\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}\,r+\frac{\hat{L}^2}{2mr^2}+V(r)$$

$$p_x=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \qquad [x,p_x]=i\hbar$$

$$\hat{a}=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x}+i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right) \qquad \hat{a}|n\rangle=\sqrt{n}|n-1\rangle\,, \qquad \hat{a}^\dagger|n\rangle=\sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

$$L_\pm=L_x\pm iL_y \qquad L_\pm Y_{\ell m}(\theta,\varphi)=\hbar\sqrt{l(l+1)-m(m\pm1)}\;Y_{\ell m\pm1}(\theta,\varphi)$$

$$L_z=x\,p_y-y\,p_x \qquad L_z=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\,, \qquad [L_x,L_y]=i\hbar L_z$$

$$E_n^{(1)}=\langle n|\delta H|n\rangle \qquad E_n^{(2)}=\sum_{m\neq n}\frac{|\langle m|\delta H|n\rangle|^2}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}}\,, \qquad \phi_n^{(1)}=\sum_{m\neq n}\frac{\langle m|\delta H|n\rangle}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}}\phi_m^{(0)}$$

$$\hat{\mathbf{S}}=\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \qquad \sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\,,\quad \sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\,,\quad \sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

Física Moderna

$$p=\frac{h}{\lambda} \qquad E=h\nu=\frac{hc}{\lambda} \qquad E_n=-Z^2\,\frac{hcR_H}{n^2}$$

$$R_T=\sigma T^4 \qquad \lambda_{\max}T=b \qquad L=mvr=n\hbar$$

$$\lambda'-\lambda=\frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta) \qquad n\lambda=2d\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \Delta x\,\Delta p\geq\hbar/2$$

Termodinâmica e Mecânica Estatística

$U = TS - PV + \mu N$

$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V + \mu\mathrm{d}N$

$F = U - TS$

$G = F + PV$

$H = U + PV$

$\Phi = U - TS - \mu N = -pV$

$\mathrm{d}S = \mathrm{d}Q/T$

$S\mathrm{d}T - V\mathrm{d}P + N\mathrm{d}\mu = 0$

$$Z = \sum_j e^{-\beta E_j}$$

$$U\mathrm{d}\left(\frac{1}{T}\right) + V\mathrm{d}\left(\frac{P}{T}\right) + N\mathrm{d}\left(\frac{\mu}{T}\right) = 0$$

$$Z(T,V,N) = \int \mathrm{d}\Omega\, \mathrm{e}^{-\beta E(\Omega)}$$

$$F(T,V,N) = -k_\mathrm{B} T \ln Z(T,V,N)$$

$$\beta = \frac{1}{k_\mathrm{B} T}$$

$$U(T,V,N) = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$$

$$\Xi(T,V,\mu) = \sum_N \int \mathrm{d}\Omega_N\, \mathrm{e}^{-\beta[E(\Omega_N) - \mu N]}$$

$$\Phi(T,V,\mu) = -k_\mathrm{B} T \ln \Xi(T,V,\mu)$$

$S = k_B \ln \Omega$

$\tilde{f}(p) = f(x(p)) - x(p)p$ (transf. de Legendre)

$PV = nRT, \quad U = C_V T$

$PV^\gamma = \text{constante}, \quad \gamma = C_P/C_V = 1 + R/C_V$

$$f_{\mathrm{FD}}(\epsilon) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}$$

$$f_{\mathrm{BE}}(\epsilon) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,N} = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,N}$$

$$C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{P,N} = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{P,N}$$

Resultados matemáticos úteis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1.3.5...(2n+1)}{(2n+1)2^n \alpha^n} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1/(1-q), \quad (q<1)$$

$$\int \frac{du}{u(u-1)} = \ln(1-1/u)$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

$$\int \frac{dz}{(a^2+z^2)^{1/2}} = \ln\left(z+\sqrt{z^2+a^2}\right)$$

$$\ln N! \approx N \ln N - N$$

$$\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{x-1}}{e^z+1}\, dz = (1-2^{1-x})\, \Gamma(x)\, \zeta(x) \qquad (\text{para } x>0)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{x-1}}{e^z-1}\, dz = \Gamma(x)\, \zeta(x) \qquad (\text{para } x>1)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\ \operatorname{sen}(nx)\, dx = \pi\delta_{m,n} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\ \cos(nx)\, dx = \pi\delta_{m,n}$$

$$dV = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz \qquad dV = r^2 dr \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$Y_{0,0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \qquad Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \qquad Y_{1,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta e^{\pm i\phi}$$

$$Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,(3\cos^2\theta - 1) \qquad Y_{2,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta\cos\theta e^{\pm i\phi} \qquad Y_{2,\pm2} = \mp\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \operatorname{sen}^2\theta e^{\pm 2i\phi}$$

$$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x \qquad P_2(x) = (3x^2-1)/2$$

Solução geral para a Eq. de Laplace em coordenadas esféricas, com simetria azimutal:

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}})\ P_l(\cos\theta)$$

Coordenadas cartesianas

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\mathrm{e}}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\mathrm{e}}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{\mathrm{e}}_z$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathrm{e}}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathrm{e}}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathrm{e}}_z \qquad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordenadas cilíndricas

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right]\hat{\mathrm{e}}_\rho + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right]\hat{\mathrm{e}}_\varphi + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right]\hat{\mathrm{e}}_z$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\mathrm{e}}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\mathrm{e}}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathrm{e}}_z \qquad \nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordenadas esféricas

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial(\mathrm{sen}\,\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial(A_\varphi)}{\partial \varphi}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left[\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial(\mathrm{sen}\,\theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right]\hat{\mathrm{e}}_r$$

$$+ \left[\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r}\right]\hat{\mathrm{e}}_\theta + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\hat{\mathrm{e}}_\varphi$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathrm{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\mathrm{e}}_\theta + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\mathrm{e}}_\varphi$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Teoremas do Cálculo Vetorial

$$\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \int (\nabla\cdot\mathbf{A})\, dV \qquad\qquad \oint \mathbf{A}\cdot d\vec{\ell} = \int (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}$$