

# Exame Unificado das Pós-graduações em Física

## EUf

2º Semestre/2013

Parte 1 — 23/04/2013

---

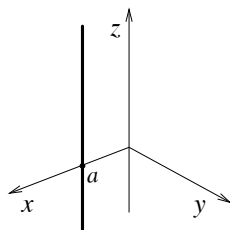
### Instruções:

- **NÃO ESCREVA O SEU NOME NA PROVA.** Ela deverá ser identificada **apenas através do código (EUfxxx)**.
- Esta prova constitui a **primeira parte** do exame unificado das Pós-Graduações em Física. Ela contém problemas de: Eletromagnetismo, Física Moderna, Termodinâmica e Mecânica Estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**. O tempo mínimo de permanência na sala é de **90 minutos**.
- **NÃO** é permitido o uso de **calculadoras** ou outros instrumentos eletrônicos.
- **RESOLVA CADA QUESTÃO NA PÁGINA CORRESPONDENTE DO CADERNO DE RESPOSTAS.** As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. **Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Q1, ou Q2, ou ...) e o seu código de identificação (EUfxxx).** Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas. Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas indicadas por RASCUNHO, que se encontram no fim do caderno de respostas. **NÃO AS DESTAQUE.** As folhas de rascunho serão descartadas e questões nelas resolvidas não serão consideradas.
- **NÃO** escreva nada no formulário; **DEVOLVA-O** ao fim da prova, pois ele será utilizado amanhã.

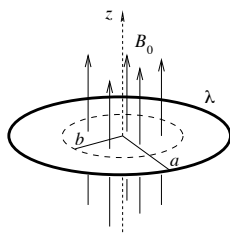
**Boa prova!**

---

- Q1. Considere um fio infinitamente longo disposto paralelamente ao eixo  $z$ , interceptando o plano  $z = 0$  em  $x = a$  e  $y = 0$ , conforme mostra a figura. O fio está carregado com densidade linear de carga elétrica  $\lambda$  uniforme.



- Determine o potencial elétrico  $V(x,y,z)$  em todo o espaço, de forma que o potencial seja zero no eixo  $z$ . Sugestão: pode-se calcular o potencial a partir do campo elétrico do fio longo, que é obtido de forma simples usando a lei de Gauss.
  - Considere agora, além do fio, um condutor plano infinito (aterrado) ocupando o plano  $x = 0$ . Calcule  $V(x,y,z)$  para a região  $x > 0$  do espaço. Sugestão: utilize o método das imagens.
  - Qual a densidade superficial de carga  $\sigma(y,z)$  induzida no condutor plano em  $x = 0$ ?
  - Calcule a integral  $\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(y,z) dy$  e discuta o resultado obtido.
- Q2. Um fio carregado com densidade linear de carga elétrica  $\lambda > 0$  está colado (formando um anel) na borda de um disco isolante de raio  $a$ , que pode girar ao redor de seu eixo vertical sem atrito. O comprimento do fio é exatamente  $2\pi a$ . Apenas na região central do disco, até um raio  $b < a$ , age um campo magnético uniforme  $\mathbf{B}_0$  vertical para cima.



- O campo magnético é agora desligado. Obtenha a expressão para o torque devido à força eletromotriz induzida no fio, em termos da variação temporal do campo magnético,  $d\mathbf{B}/dt$ . A partir deste resultado, calcule o momento angular final do disco (módulo e direção).
- Considerando como dado o momento de inércia  $I$  do sistema disco+fio, calcule o campo magnético (módulo e direção) produzido no centro do disco pelo anel de carga na situação final acima.

- Q3. Um feixe de luz com comprimento de onda 480 nm no vácuo e de intensidade  $10 \text{ W/m}^2$  incide sobre um catodo de  $1 \text{ cm}^2$  de área no interior de uma célula fotoelétrica. A função trabalho do metal é 2,2 eV. As respostas devem ser dadas com dois algarismos significativos.
- Calcule a energia dos fótons incidentes em Joules e em elétron-volts.
  - Calcule o número de fótons por segundo incidentes na placa metálica.
  - Se a eficiência da conversão fotoelétrica é de 20% (apenas 20% dos fótons arrancam elétrons do metal), calcule a corrente elétrica máxima, através da célula, quando uma  $ddp$  é aplicada entre o catodo e o anodo.
  - Calcule o comprimento de onda máximo dos fótons incidentes acima do qual não ocorre o efeito fotoelétrico.
- Q4. Uma partícula de massa  $m$  executa oscilações harmônicas, em uma dimensão, num potencial  $U(x) = m\omega^2 x^2/2$ . Considere a partícula num estado cuja função de onda é  $\psi(x) = Ae^{-bx^2}$ , onde  $A$  e  $b$  são constantes.
- Escreva a equação de Schrödinger independente do tempo para este potencial.
  - Determine o valor de  $b$  para que  $\psi(x)$  seja solução desta equação de Schrödinger, e o valor da energia associada a esta função de onda.
  - Calcule a constante de normalização  $A$ .
  - Classicamente, esta partícula oscilaria dentro do intervalo simétrico  $[-x_{\max}, x_{\max}]$ , onde  $x_{\max} = [\hbar/m\omega]^{1/2}$ . Calcule, usando a Mecânica Quântica, a probabilidade de se encontrar esta partícula no intervalo  $[-x_{\max}, x_{\max}]$ . Compare este resultado com o esperado pela Mecânica Clássica.
- Q5. Um cilindro de paredes externas impermeáveis, rígidas e adiabáticas, fechado em ambas as extremidades, é munido de uma parede de separação interna impermeável, móvel, adiabática e ideal (sem fricção), que o divide em dois compartimentos (A e B). Cada um deles é preenchido com um mol de um gás ideal monoatômico. Inicialmente a pressão, o volume e a temperatura ( $P_0, V_0, T_0$ ) são idênticos em ambos os lados da parede interna. Uma certa quantidade de calor é introduzida de forma quase-estática no compartimento A até que sua pressão atinja o valor  $P_A = 32P_0$ .
- A partir das equações de estado do gás ideal monoatômico  $U = \frac{3}{2}NRT = \frac{3}{2}PV$  e de sua entropia  $S/N = \frac{3}{2}R \ln T + R \ln V + \text{constante}$ , demonstre que, ao longo de um processo isentrópico em um sistema fechado,  $P^3V^5 = \text{constante}$ .
  - Obtenha os volumes finais  $V_A$  e  $V_B$  dos dois compartimentos em termos do volume inicial  $V_0$ .
  - Obtenha as temperaturas finais  $T_A$  e  $T_B$  dos dois compartimentos em termos da temperatura inicial  $T_0$ , verificando que  $T_A = 15T_B$ .
  - Obtenha as variações de entropia do gás nos dois compartimentos,  $\Delta S_A$  e  $\Delta S_B$ . Qual é o sinal da variação da entropia total do sistema?

# Exame Unificado das Pós-graduações em Física

## EUf

2º Semestre/2013

Parte 2 — 24/04/2013

---

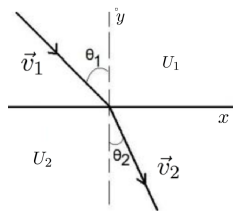
### Instruções:

- **NÃO ESCREVA O SEU NOME NA PROVA.** Ela deverá ser identificada **apenas através do código (EUfxxx)**.
- Esta prova constitui a **segunda parte** do exame unificado das Pós-Graduações em Física. Ela contém problemas de: Mecânica Clássica, Mecânica Quântica, Termodinâmica e Mecânica Estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**. O tempo mínimo de permanência na sala é de **90 minutos**.
- **NÃO** é permitido o uso de **calculadoras** ou outros instrumentos eletrônicos.
- **RESOLVA CADA QUESTÃO NA PÁGINA CORRESPONDENTE DO CADERNO DE RESPOSTAS.** As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. **Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Q1, ou Q2, ou ...) e o seu código de identificação (EUfxxx).** Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas. Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas indicadas por RASCUNHO, que se encontram no fim do caderno de respostas. **NÃO AS DESTAQUE.** As folhas de rascunho serão descartadas e questões nelas resolvidas não serão consideradas.
- **NÃO** escreva nada no formulário; **DEVOLVA-O** ao fim da prova, pois ele será utilizado amanhã.

**Boa prova!**

---

- Q6. Uma partícula de massa  $m$  move-se com velocidade  $\vec{v}_1$  no semi-plano superior até ser desviada ao atingir o semi-plano inferior, onde passa a se propagar com velocidade  $\vec{v}_2$ , conforme ilustrado na figura abaixo. Observa-se experimentalmente as seguintes características: *i*) a partícula passa do meio 1 ao meio 2 desde que  $v_1 > v_{min}$ ; *ii*) a partícula se move de modo retilíneo e uniforme em cada um dos semi-planos; *iii*) o ângulo de saída  $\theta_2$  é diferente do ângulo de entrada  $\theta_1$ , o que nos faz presumir que em cada meio a partícula esteja sob ação de diferentes potenciais  $U_1$  e  $U_2$ .



- (a) Com base no experimento, esboce o gráfico do potencial  $U$  em função de  $y$  para  $x$  fixo (justificando o gráfico).
- (b) Determine  $v_2$  em termos de  $v_1$ , de  $m$  e dos potenciais  $U_1$  e  $U_2$ . Qual é a velocidade  $v_{min}$  acima da qual observa-se a passagem da partícula do meio 1 para o meio 2?
- (c) Determine o índice de refração  $\sin \theta_1 / \sin \theta_2$  em termos de  $m$ ,  $v_1$  e dos potenciais em cada meio.
- Q7. Uma partícula de massa  $m$  desenvolve movimento unidimensional sob ação do potencial abaixo ( $c$  é uma constante)

$$U(x) = \frac{1}{2}x^4 - cx^2.$$

- (a) Esboce os gráficos de  $U(x)$  e dos respectivos espaços de fase ( $\dot{x}$  versus  $x$  para todas as energias possíveis) nos seguintes casos : *i*)  $c > 0$ , *ii*)  $c = 0$  e *iii*)  $c < 0$ .
- (b) Por meio da energia total  $E$ , identifique todos os movimentos periódicos possíveis e seus respectivos pontos de inversão (onde a velocidade é nula) para cada um dos casos do item (a).
- (c) Determine a dependência do período de oscilações com a energia total  $E$  para  $c = 0$ .
- Q8. Uma partícula de massa  $m$  está num potencial tal que a equação de Schrödinger (com  $\hbar = 1$ ) no espaço dos momentos é

$$\left( \frac{\vec{p}^2}{2m} - a \nabla_p^2 \right) \bar{\psi}(\vec{p}, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \bar{\psi}(\vec{p}, t)$$

onde

$$\nabla_p^2 = \frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_z^2}.$$

- (a) Escreva a equação de Schrödinger no espaço das coordenadas.
- (b) Qual é o potencial  $V(r)$ ,  $r = |\vec{r}|$ ?
- (c) Qual é a força,  $\vec{F}(\vec{r})$ , sobre a partícula?

Q9. Os operadores de spin de uma partícula de spin-1 (um tripleto) podem ser representados no espaço complexo  $\mathcal{C}^3$  pelas matrizes

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{S}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \hat{S}_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Mostre que as relações de comutação  $[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar\hat{S}_z$ , e permutações cíclicas em  $x, y, z$ , são satisfeitas.
- (b) Se uma medida da componente  $z$  do spin é feita, quais são os possíveis resultados? Encontre os respectivos autovetores.
- (c) Se o estado da partícula é dado pelo vetor

$$|\phi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -2 \end{pmatrix},$$

quais são as probabilidades de se obter cada um dos resultados possíveis das medidas do spin ao longo do eixo- $z$ ?

- (d) A partir do resultado do item c), qual é a probabilidade de se encontrar a partícula em qualquer um desses estados?

Q10. Considere um oscilador harmônico unidimensional modificado, definido pela função hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + V(x),$$

onde  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$  para  $x \geq 0$ ,  $V(x) = \infty$  para  $x < 0$ . Ele encontra-se em equilíbrio térmico com um reservatório de calor a temperatura  $T$ .

- (a) Justifique, em termos da paridade das autofunções do problema quântico, por que, devido às condições impostas, apenas os valores inteiros ímpares de  $n$  são permitidos para as autoenergias deste oscilador,  $\epsilon_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ .
- (b) Para a versão quântica, obtenha a função de partição canônica  $z$  deste oscilador e a energia livre de Helmholtz associada  $f$ .
- (c) Obtenha a energia interna média deste oscilador a partir de  $u = -\partial \ln z / \partial \beta$ .
- (d) A partir da definição da energia interna média no ensemble canônico,  $u \equiv \langle \epsilon_n \rangle$ , demonstre a expressão  $u = -\partial \ln z / \partial \beta$ .
- (e) Mostre que a função de partição canônica clássica deste oscilador é dada por  $z_{\text{class}} = (2\beta\hbar\omega)^{-1}$ . Determine a energia interna média clássica associada,  $u_{\text{class}} \equiv \langle \mathcal{H} \rangle_{\text{class}}$ .

Exame Unificado  
das Pós-graduações em Física

EUF

2º Semestre/2013

FORMULÁRIO

Não escreva nada neste formulário. Devolva-o ao fim do primeiro dia de prova.

## Constantes físicas

Velocidade da luz no vácuo

$$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Constante de Planck

$$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J s} = 4,14 \times 10^{-15} \text{ eV s}$$

$$hc = 1240 \text{ eV nm}$$

Constante de Wien

$$W = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m K}$$

Permeabilidade magnética do vácuo

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 = 12,6 \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$$

Permissividade elétrica do vácuo

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,99 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$$

Constante gravitacional

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$

Carga elementar

$$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Massa do elétron

$$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} = 511 \text{ keV}/c^2$$

Comprimento de onda Compton

$$\lambda_C = 2,43 \times 10^{-12} \text{ m}$$

Massa do próton

$$m_p = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg} = 938 \text{ MeV}/c^2$$

Massa do nêutron

$$m_n = 1,675 \times 10^{-27} \text{ kg} = 940 \text{ MeV}/c^2$$

Massa do deuteron

$$m_d = 3,344 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1.876 \text{ MeV}/c^2$$

Massa da partícula  $\alpha$

$$m_\alpha = 6,645 \times 10^{-27} \text{ kg} = 3.727 \text{ MeV}/c^2$$

Constante de Rydberg

$$R_H = 1,10 \times 10^7 \text{ m}^{-1}, \quad R_H hc = 13,6 \text{ eV}$$

Raio de Bohr

$$a_0 = 5,29 \times 10^{-11} \text{ m}$$

Constante de Avogadro

$$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Constante de Boltzmann

$$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K} = 8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$$

Constante molar dos gases

$$R = 8,31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

Constante de Stefan-Boltzmann

$$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

$$\text{Raio do Sol} = 6,96 \times 10^8 \text{ m}$$

$$\text{Massa do Sol} = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$$\text{Raio da Terra} = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$$

$$\text{Massa da Terra} = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$$

$$\text{Distância Sol-Terra} = 1,50 \times 10^{11} \text{ m}$$

$$1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg} \quad 1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$$

## Constantes numéricas

$$\pi \cong 3,142$$

$$\ln 2 \cong 0,693$$

$$\cos(30^\circ) = \sqrt{3}/2 \cong 0,866$$

$$e \cong 2,718$$

$$\ln 3 \cong 1,099$$

$$\sin(30^\circ) = 1/2$$

$$1/e \cong 0,368$$

$$\ln 5 \cong 1,609$$

$$\log_{10} e \cong 0,434$$

$$\ln 10 \cong 2,303$$



## Mecânica Clássica

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad L_i = \sum_j I_{ij} \omega_j \quad T_R = \sum_{ij} \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j \quad I = \int r^2 dm$$

$$\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{e}}_r \quad \mathbf{v} = \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta \quad \mathbf{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{\mathbf{e}}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \hat{\mathbf{e}}_\theta$$

$$\mathbf{r} = \rho \hat{\mathbf{e}}_\rho + z \hat{\mathbf{e}}_z \quad \mathbf{v} = \dot{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\rho + \rho \dot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \dot{z} \hat{\mathbf{e}}_z \quad \mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \hat{\mathbf{e}}_\rho + (\rho \ddot{\varphi} + 2 \dot{\rho} \dot{\varphi}) \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \ddot{z} \hat{\mathbf{e}}_z$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = r \hat{\mathbf{e}}_r \quad \mathbf{v} = \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta + r \dot{\varphi} \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\varphi \quad \mathbf{a} = & (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \hat{\mathbf{e}}_r \\ & + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ & + (r \dot{\varphi} \sin \theta + 2 \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta + 2 r \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta) \hat{\mathbf{e}}_\varphi \end{aligned}$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad V(r) = - \int_{r_0}^r F(r') dr' \quad V_{\text{efetivo}} = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$\int_{R_0}^R \frac{dr}{\sqrt{E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}}} = \sqrt{\frac{2}{m}} (t - t_0) \quad \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2 u^2} F(1/u), \quad u = \frac{1}{r}; \quad \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 = \frac{2m}{L^2} [E - V(1/u)]$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad L = T - V \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^N F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \quad Q_k = - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$$\left( \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right)_{\text{rotação}} = \left( \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right)_{\text{fixo}} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$$

$$H = \sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k - L; \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \quad \dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k}; \quad \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

## Eletromagnetismo

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{E} \cdot d\vec{\ell} + \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= Q = \int \rho dV & \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \oint \mathbf{H} \cdot d\vec{\ell} - \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} & \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{J}\end{aligned}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu \mathbf{H}$$

$$\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = -Q_P \quad \nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_P \quad \oint \mathbf{M} \cdot d\vec{\ell} = I_M \quad \nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_M$$

$$V = - \int \mathbf{E} \cdot d\vec{\ell} \quad \mathbf{E} = -\nabla V \quad d\mathbf{H} = \frac{I d\vec{\ell} \times \hat{e}_r}{4\pi r^2} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\begin{aligned}d\mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} \hat{e}_r & dV &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r} & \mathbf{F} &= q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) & d\mathbf{F} &= I d\vec{\ell} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E} & \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

$$u = \frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} dV}{r}$$

$$(\rho = 0, \mathbf{J} = 0) \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

## Relatividade

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad x' = \gamma(x - Vt) \quad t' = \gamma(t - Vx/c^2)$$

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - Vv_x/c^2} \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - Vv_x/c^2)} \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - Vv_x/c^2)}$$

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 + K \quad E = \sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2}$$

# Mecânica Quântica

$$\begin{array}{ll} i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}=H\Psi(x,t) & H=\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r+\frac{\hat{L}^2}{2mr^2}+V(r) \\ p_x=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} & [x,p_x]=i\hbar \\ \hat{a}=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x}+i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right) & \hat{a}|n\rangle=\sqrt{n}|n-1\rangle\,,\quad\hat{a}^\dagger|n\rangle=\sqrt{n+1}|n+1\rangle \\ L_{\pm}=L_x\pm iL_y & L_{\pm}Y_{\ell m}(\theta,\varphi)=\hbar\sqrt{l(l+1)-m(m\pm1)}\,Y_{\ell m\pm1}(\theta,\varphi) \\ L_z=xp_y-yp_x & L_z=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\,,\quad [L_x,L_y]=i\hbar L_z \\ E_n^{(1)}=\langle n|\delta H|n\rangle & E_n^{(2)}=\sum_{m\neq n}\frac{|\langle m|\delta H|n\rangle|^2}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}}\,,\quad\phi_n^{(1)}=\sum_{m\neq n}\frac{\langle m|\delta H|n\rangle}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}}\phi_m^{(0)} \\ \hat{\mathbf{S}}=\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} & \sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\,,\quad\sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\,,\quad\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \\ \bar{\psi}(\vec{p})=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int d^3r\,e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}\,\psi(\vec{r}) & \psi(\vec{r})=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int d^3p\,e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}\,\bar{\psi}(\vec{p})\end{array}$$

# Física Moderna

$$\begin{array}{lll} p=\frac{h}{\lambda} & E=h\nu=\frac{hc}{\lambda} & E_n=-Z^2\frac{\hbar cR_H}{n^2} \\ R_T=\sigma T^4 & \lambda_{\max}T=b & L=mvr=n\hbar \\ \lambda'-\lambda=\frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta) & n\lambda=2d\sin\theta & \Delta x\,\Delta p\geq\hbar/2\end{array}$$

## Termodinâmica e Mecânica Estatística

$$dU = dQ - dW$$

$$dU = TdS - pdV + \mu dN$$

$$F = U - TS$$

$$G = F + pV$$

$$H = U + pV$$

$$\Phi = F - \mu N$$

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V \quad C_p = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_p$$

$$\text{Gás Ideal:} \quad pV = nRT \quad U = CT \quad pV^\gamma = \text{constante}$$

$$\text{Transformada de Legendre:} \quad \phi(p) = \min_x \{ f(x) - xp \}$$

$$S = k_B \ln \Omega$$

sendo  $\Omega$  o número de estados acessíveis.

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$$

$$Z = \int d\gamma e^{-\beta E(\gamma)} \quad \beta = 1/k_B T$$

$$F = -k_B T \ln Z$$

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$$

$$\Xi = \sum_N Z_N e^{\beta \mu N}$$

$$\Phi = -k_B T \ln \Xi$$

$$f_{\text{FD}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1}$$

$$f_{\text{BE}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1}$$

## Resultados matemáticos úteis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1.3.5 \dots (2n+1)}{(2n+1)2^n \alpha^n} \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1/(1-q), \quad (|q| < 1)$$

$$\int \frac{du}{u(u-1)} = \ln(1-1/u)$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\int \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{1/2}} = \ln \left( z + \sqrt{z^2 + a^2} \right)$$

$$\ln N! \approx N \ln N - N$$

$$\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+u}{1-u} \right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha t^2) dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int \frac{1}{a^2 + y^2} dy = \frac{1}{a} \arctan \frac{y}{a}$$

$$\int \frac{x}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{x-1}}{e^z + 1} dz = (1 - 2^{1-x}) \Gamma(x) \zeta(x) \quad (\text{para } x > 0)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{x-1}}{e^z - 1} dz = \Gamma(x) \zeta(x) \quad (\text{para } x > 1)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \pi \delta_{m,n}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \pi \delta_{m,n}$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt = \operatorname{erf}(x) \quad \operatorname{erf}(1/2) = 0,52 \quad \operatorname{erf}(1) = 0,84 \quad \operatorname{erf}(2) = 0,99$$

$$dV = \rho \, d\rho \, d\phi \, dz$$

$$dV = r^2 dr \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

$$Y_{0,0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

$$Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$Y_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}$$

$$Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$Y_{2,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi}$$

$$Y_{2,\pm 2} = \mp \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$$

Solução geral para a Eq. de Laplace em coordenadas esféricas, com simetria azimutal:

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

## Coordenadas cartesianas

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{e}}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{e}}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{e}}_z$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{\mathbf{e}}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_z \quad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

## Coordenadas cilíndricas

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{e}}_\rho + \left[ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right] \hat{\mathbf{e}}_z$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\mathbf{e}}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_z \quad \nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

## Coordenadas esféricas

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \hat{\mathbf{e}}_r \\ & + \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right] \hat{\mathbf{e}}_\theta + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\mathbf{e}}_\varphi \end{aligned}$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

## Teoremas do Cálculo Vetorial

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV$$

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\vec{\ell} = \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$