

EUF

Exame Unificado das Pós-graduações em Física

Para o segundo semestre de 2015

14 de abril 2015

Parte 1

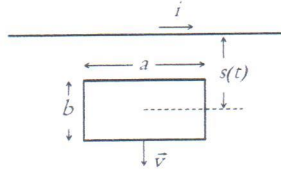
Instruções

- **Não escreva seu nome na prova.**
Ela deverá ser identificada apenas através do código (EUFxxx).
- Esta prova contém problemas de:
eletromagnetismo, física moderna e termodinâmica.
Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**.
O tempo mínimo de permanência na sala é de 90 minutos.
- Não é permitido o uso de calculadoras ou outros instrumentos eletrônicos.
- **Resolva cada questão na página correspondente do caderno de respostas.**
As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Qx) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas. Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas identificadas como **rascunho**, que se encontram no fim do caderno de respostas. Não as destaque. As folhas de rascunho serão descartadas e questões nelas resolvidas não serão consideradas.
- Não escreva nada no formulário.
Devolva-o ao fim da prova, pois será utilizado na prova de amanhã.

Boa prova!

Q1. Uma espira condutora retangular (comprimento a , largura b e resistência R) situa-se nas vizinhanças de um fio reto infinitamente longo que é percorrido por uma corrente i para a direita, conforme a figura. A espira afasta-se do fio com uma velocidade constante \vec{v} , de forma que a distância do centro da espira ao fio é dada por $s(t) = s_0 + vt$. Calcule:

- o módulo do campo magnético produzido pela corrente num ponto situado a uma distância r do fio. Indique a direção e o sentido do campo na região delimitada pela espira;
- o fluxo magnético na região delimitada pela espira para um dado valor de $s(t)$;
- a força eletromotriz induzida na espira para uma certa distância $s(t)$;
- a corrente induzida na espira, i_{ind} . Indique o sentido da mesma.



Q2. Um meio condutor tem condutividade elétrica σ , permeabilidade magnética μ_0 e permissividade elétrica $\epsilon = K\epsilon_0$, em que K é a constante dielétrica real. A equação de onda para o campo elétrico neste meio é dada por $\nabla^2 \vec{E} - K \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{\sigma}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$, sendo $\frac{1}{c^2} = \mu_0 \epsilon_0$.

- Mostre que a função de onda plana monocromática $\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \tilde{q}z)}$ é solução da equação diferencial acima. Encontre a relação entre o número de onda complexo, \tilde{q} , e a frequência angular, ω , para que $\vec{E}(z,t)$ seja solução. Mostre também que \tilde{q} se torna real no caso de um meio isolante.
- Encontre a constante dielétrica complexa, \tilde{K} , usando a relação entre o número de onda e a constante dielétrica, $\tilde{q}^2 = \tilde{K} \frac{\omega^2}{c^2}$. Verifique que a parte real de \tilde{K} é igual a K , como esperado, e explicita a parte imaginária de \tilde{K} .
- Faça a aproximação para baixas frequências na expressão da constante dielétrica complexa do item (b) e calcule o índice de refração complexo, $\tilde{n} = \sqrt{\tilde{K}}$. Mostre que as partes real e imaginária de \tilde{n} são iguais neste caso.
- A profundidade de penetração da onda no meio condutor, δ , é dada pelo inverso da parte imaginária do número de onda, q_i , ou seja, $\delta = 1/q_i$. Lembre-se de que $\tilde{q} = \tilde{n} \frac{\omega}{c}$ e calcule a profundidade de penetração para a prata (Ag) na região de micro-ondas ($f = \frac{\omega}{2\pi} = 10\text{GHz}$), para a qual vale a aproximação do item (c). A condutividade da prata nesta faixa de frequências é $\sigma_{Ag} = 3 \times 10^{+7} (\Omega m)^{-1}$. Aproxime o resultado do cálculo e obtenha a ordem de grandeza de δ_{Ag} (1 m, 10 cm, 1 cm ...).

- Q3. Considere 2 fótons se propagam, ao longo do eixo x , em sentidos opostos. As energias dos fótons são 5 MeV e 2 MeV, respectivamente.
- Calcule a velocidade relativa entre os fótons.
 - Qual é o valor da energia total do sistema?
 - Qual é momento total do sistema?
 - Calcule a energia de repouso do sistema.
- Q4. Um fóton de raio-X com comprimento de onda $\lambda = 10^{-10}$ m, é retroespalhado em um experimento Compton, ou seja, o ângulo de espalhamento é de 180° em relação ao eixo de incidência.
- Calcule a frequência do fóton retroespalhado.
 - Quais são a direção e o sentido do momento do elétron ejetado no espalhamento, em relação ao do fóton incidente?
 - Qual é o módulo da velocidade do elétron ejetado no espalhamento?
- Q5. Um recipiente cilíndrico de seção reta circular A e base fixa foi posicionado verticalmente sobre uma superfície plana e preenchido com um gás ideal. Sobre sua extremidade superior, aberta, foi perfeitamente ajustado um êmbolo circular móvel de massa M . Suponha que o êmbolo permaneça orientado horizontalmente e só deslize para cima e para baixo, sem atrito, em contato com a parede interna do cilindro. Considere dada a razão γ entre os calores específicos do gás a pressão constante e a volume constante.
- Calcule a pressão de equilíbrio para o gás no recipiente, sendo p_0 a pressão atmosférica.
 - Escreva a expressão para a variação da pressão p em termos da variação do volume V decorrente de um pequeno deslocamento do êmbolo. Suponha que, para pequenos deslocamentos do êmbolo, os estados do gás sejam descritos por um processo quase-estático adiabático.
 - Determine a força adicional exercida sobre o êmbolo quando o mesmo tiver um deslocamento dx em relação à posição de equilíbrio.
 - Obtenha a frequência angular para pequenas oscilações do êmbolo a partir da posição de equilíbrio, em termos de V , A , M , p_0 e γ .

EUf

Exame Unificado das Pós-graduações em Física

Para o segundo semestre de 2015

15 abril 2015

Parte 2

Instruções

- **Não escreva seu nome na prova.**
Ela deverá ser identificada apenas através do código (EUfxxx).
- Esta prova contém problemas de:
mecânica clássica, mecânica quântica e mecânica estatística.
Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**.
O tempo mínimo de permanência na sala é de 90 minutos.
- Não é permitido o uso de calculadoras ou outros instrumentos eletrônicos.
- **Resolva cada questão na página correspondente do caderno de respostas.**
As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Qx) e o seu código de identificação (EUfxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas. Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas identificadas como **rascunho**, que se encontram no fim do caderno de respostas. Não as destaque. As folhas de rascunho serão descartadas e questões nelas resolvidas não serão consideradas.
- Não é necessário devolver o formulário.

Boa prova!

Q6. Uma partícula de massa m está submetida a uma força central conservativa cuja energia potencial é dada por $U(r) = k(r^2 - a^2)e^{-br^2}$, em que r é a coordenada radial esférica, e k , a e b são constantes reais e positivas.

- Determine as unidades das constante k , a e b no SI (Sistema Internacional de Unidades).
- Esboce um gráfico da função $U(r)$, determinando seus pontos de máximo e mínimo em função dos parâmetros dados.
- Determine as faixas de energia E da partícula para as quais (i) a partícula está em órbitas ligadas e (ii) não ligadas. (iii) Determine as condições, se existem, para a existência de órbitas com raio constante.
- Determine a força que age sobre a partícula, diga quais as situações de equilíbrio, se existirem, e, em caso afirmativo determine a frequência de oscilação da partícula para movimentos radiais próximos do(s) ponto(s) de equilíbrio estável.

Q7. Uma partícula de massa m está confinada sobre uma superfície esférica de raio fixo a , e nenhuma força externa age sobre a mesma.

- Determine a lagrangiana da partícula usando coordenadas apropriadas no espaço tridimensional (\mathbb{R}^3) e estabeleça a equação de vínculo.
- Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, encontre as equações de movimento e determine a força de vínculo, i.e., determine o multiplicador de Lagrange e interprete o resultado.
- Estabeleça as constantes do movimento da partícula.
- Supondo, agora, que o raio da esfera varia no tempo com a função $a(t) = a_0(1 + \cos \omega t)$, com a_0 e ω constantes, determine as constantes de movimento da partícula.

Q8. Seja uma partícula livre de massa m confinada a uma circunferência de perímetro L .

- Escreva a equação de Schroedinger correspondente.
- Calcule a função de onda *normalizada* $\psi = \psi(t, x)$, onde x é a posição da partícula ($0 \leq x < L$), supondo que ela tenha valores bem definidos de momento e energia: p e E , respectivamente.
- Supondo que a partícula esteja em um auto-estado de energia, quais são os dois menores autovalores correspondentes (não nulos)?
- Seja uma partícula em um auto-estado de energia com o menor valor não nulo de energia. Escreva sua função de onda para que tenha uma densidade de probabilidade de ser encontrada entre x e $x + \delta x$ igual a $(2/L)[\cos(2\pi x/L)]^2$. (Lembrar que $(\cos x)^2 = (\cos 2x + 1)/2$.)

Q9. Seja um sistema composto por um par **A** e **B** de spins 1/2 descrito pelo estado

$$|\psi\rangle = \alpha (|z_+^{\mathbf{A}}\rangle \otimes |z_-^{\mathbf{B}}\rangle - |z_-^{\mathbf{A}}\rangle \otimes |z_+^{\mathbf{B}}\rangle)$$

onde

$$\hat{S}_x|x_{\pm}^{\mathbf{A}}\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|x_{\pm}^{\mathbf{A}}\rangle, \quad \langle x_{\pm}^{\mathbf{A}}|x_{\pm}^{\mathbf{A}}\rangle = 1, \quad (1)$$

$$\hat{S}_y|y_{\pm}^{\mathbf{A}}\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|y_{\pm}^{\mathbf{A}}\rangle, \quad \langle y_{\pm}^{\mathbf{A}}|y_{\pm}^{\mathbf{A}}\rangle = 1, \quad (2)$$

$$\hat{S}_z|z_{\pm}^{\mathbf{A}}\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|z_{\pm}^{\mathbf{A}}\rangle, \quad \langle z_{\pm}^{\mathbf{A}}|z_{\pm}^{\mathbf{A}}\rangle = 1, \quad (3)$$

(e analogamente para **B**) e onde escrevemos os operadores de spin como

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

na base de auto-estados de \hat{S}_z :

$$|z_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |z_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Responda:

- Qual é o valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que $|\psi\rangle$ esteja normalizado?
- Qual é a probabilidade de se medir na direção z : $-\hbar/2$ para o spin **A** e $+\hbar/2$ para o spin **B**?
- Qual é a probabilidade de se medir na direção x : $+\hbar/2$ para o spin **A** e $-\hbar/2$ para o spin **B**?
- Qual é a probabilidade de se medir na direção z $-\hbar/2$ para o spin **A** e na direção x $+\hbar/2$ para o spin **B**?

Q10. Considere um sistema composto por um número grande N de moléculas distinguíveis, que não interagem entre si. Cada molécula tem dois estados de energia possíveis: 0 e $\epsilon > 0$.

- Obtenha a densidade de entropia S/N do sistema como função apenas da energia média por molécula E/N , de ϵ e da constante de Boltzmann k_B .
- Considerando o sistema em equilíbrio térmico à temperatura inversa $\beta = 1/k_B T$, calcule E/N .
- Qual o valor máximo para E/N no caso acima? Compare com o valor máximo dessa grandeza caso fosse possível que todos os elementos do sistema estivessem no estado de energia máxima.



EUF

**Exame Unificado
das Pós-graduações em Física**

Para o segundo semestre de 2015

14-15 abril 2015

FORMULÁRIO

Não escreva nada neste formulário. Devolva-o ao fim do primeiro dia de prova.

Constantes físicas

Velocidade da luz no vácuo

$$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Constante de Planck

$$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J s} = 4,14 \times 10^{-15} \text{ eV s}$$

$$hc = 1240 \text{ eV nm}$$

Constante de Wien

$$W = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m K}$$

Permeabilidade magnética do vácuo

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 = 12,6 \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$$

Permissividade elétrica do vácuo

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,99 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$$

Constante gravitacional

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$

Carga elementar

$$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Massa do elétron

$$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} = 511 \text{ keV}/c^2$$

Comprimento de onda Compton

$$\lambda_C = 2,43 \times 10^{-12} \text{ m}$$

Massa do próton

$$m_p = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg} = 938 \text{ MeV}/c^2$$

Massa do nêutron

$$m_n = 1,675 \times 10^{-27} \text{ kg} = 940 \text{ MeV}/c^2$$

Massa do dêuteron

$$m_d = 3,344 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1.876 \text{ MeV}/c^2$$

Massa da partícula α

$$m_\alpha = 6,645 \times 10^{-27} \text{ kg} = 3.727 \text{ MeV}/c^2$$

Constante de Rydberg

$$R_H = 1,10 \times 10^7 \text{ m}^{-1}, \quad R_H hc = 13,6 \text{ eV}$$

Raio de Bohr

$$a_0 = 5,29 \times 10^{-11} \text{ m}$$

Constante de Avogadro

$$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Constante de Boltzmann

$$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K} = 8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$$

Constante universal dos gases

$$R = 8,31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

Constante de Stefan-Boltzmann

$$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

Raio do Sol	=	$6,96 \times 10^8 \text{ m}$
Raio da Terra	=	$6,37 \times 10^6 \text{ m}$
Distância Sol-Terra	=	$1,50 \times 10^{11} \text{ m}$

Massa do Sol	=	$1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Massa da Terra	=	$5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$

$$1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg}$$

$$1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Constantes numéricas

$$\pi \cong 3,142$$

$$\ln 2 \cong 0,693$$

$$\cos(30^\circ) = \sin(60^\circ) = \sqrt{3}/2 \cong 0,866$$

$$e \cong 2,718$$

$$\ln 3 \cong 1,099$$

$$\sin(30^\circ) = \cos(60^\circ) = 1/2$$

$$1/e \cong 0,368$$

$$\ln 5 \cong 1,609$$

$$\log_{10} e \cong 0,434$$

$$\ln 10 \cong 2,303$$

Mecânica Clássica

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad L_i = \sum_j I_{ij} \omega_j \quad T_R = \sum_{ij} \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j \quad I = \int r^2 dm$$

$$\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{e}}_r \quad \mathbf{v} = \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta \quad \mathbf{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{\mathbf{e}}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \hat{\mathbf{e}}_\theta$$

$$\mathbf{r} = \rho \hat{\mathbf{e}}_\rho + z \hat{\mathbf{e}}_z \quad \mathbf{v} = \dot{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\rho + \rho \dot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \dot{z} \hat{\mathbf{e}}_z \quad \mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \hat{\mathbf{e}}_\rho + (\rho \ddot{\varphi} + 2 \dot{\rho} \dot{\varphi}) \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \ddot{z} \hat{\mathbf{e}}_z$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = r \hat{\mathbf{e}}_r \quad \mathbf{v} = \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta + r \dot{\varphi} \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\varphi \quad \mathbf{a} = & (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \hat{\mathbf{e}}_r \\ & + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ & + (r \ddot{\varphi} \sin \theta + 2 \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta + 2 r \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta) \hat{\mathbf{e}}_\varphi \end{aligned}$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad V(r) = - \int_{r_0}^r F(r') dr' \quad V_{\text{efetivo}} = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$\int_{R_0}^R \frac{dr}{\sqrt{E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}}} = \sqrt{\frac{2}{m}} (t - t_0) \quad \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = - \frac{m}{L^2 u^2} F(1/u), \quad u = \frac{1}{r}; \quad \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 = \frac{2m}{L^2} [E - V(1/u)]$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad L = T - V \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^N F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \quad Q_k = - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$$\left(\frac{d^2 r}{dt^2} \right)_{\text{rotação}} = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} \right)_{\text{fixo}} - 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$$

$$H = \sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k - L; \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \quad \dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k}; \quad \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

Eletromagnetismo

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\vec{\ell} + \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q = \int \rho dV$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\vec{\ell} - \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu \mathbf{H}$$

$$\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = -Q_P$$

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_P$$

$$\oint \mathbf{M} \cdot d\vec{\ell} = I_M$$

$$\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_M$$

$$V = - \int \mathbf{E} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

$$d\mathbf{H} = \frac{I d\vec{\ell} \times \hat{\mathbf{e}}_r}{4\pi r^2}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r}$$

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$d\mathbf{F} = I d\vec{\ell} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$u = \frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} dV}{r}$$

$$(\rho = 0, \mathbf{J} = \mathbf{0}) \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

Relatividade

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$x' = \gamma (x - Vt)$$

$$t' = \gamma (t - Vx/c^2)$$

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - Vv_x/c^2}$$

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma (1 - Vv_x/c^2)}$$

$$v'_z = \frac{v_z}{\gamma (1 - Vv_x/c^2)}$$

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 + K$$

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2}$$

Mecânica Quântica

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = H\Psi(x,t)$$

$$H = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$p_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$[x, p_x] = i\hbar$$

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + i \frac{\hat{p}}{m\omega} \right)$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y$$

$$L_{\pm} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} Y_{\ell m \pm 1}(\theta, \varphi)$$

$$L_z = x p_y - y p_x$$

$$L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad [L_x, L_y] = i\hbar L_z$$

$$E_n^{(1)} = \langle n | \delta H | n \rangle$$

$$E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m | \delta H | n \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}, \quad \phi_n^{(1)} = \sum_{m \neq n} \frac{\langle m | \delta H | n \rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \phi_m^{(0)}$$

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\psi}(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3r e^{-i\vec{p}\vec{r}/\hbar} \psi(\vec{r})$$

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3p e^{i\vec{p}\vec{r}/\hbar} \bar{\psi}(\vec{p})$$

Física Moderna

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

$$E_n = -Z^2 \frac{hcR_H}{n^2}$$

$$R_T = \sigma T^4$$

$$\lambda_{\max} T = b$$

$$L = mvr = n\hbar$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta)$$

$$n\lambda = 2d \sin \theta$$

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$$

Termodinâmica e Mecânica Estatística

$$dU = dQ - dW$$

$$dU = TdS - pdV + \mu dN$$

$$dF = -SdT - pdV + \mu dN$$

$$dH = TdS + Vdp + \mu dN$$

$$dG = -SdT + Vdp + \mu dN$$

$$d\Phi = -SdT - pdV - Nd\mu$$

$$F = U - TS$$

$$G = F + pV$$

$$H = U + pV$$

$$\Phi = F - \mu N$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T \quad S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \quad C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p$$

Gás ideal: $pV = nRT$, $U = ncT$, $pV^\gamma = \text{const.}$, $\gamma = (c + R)/c$

$$S = k_B \ln W$$

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$$

$$Z = \int d\gamma e^{-\beta E(\gamma)}$$

$$\beta = 1/k_B T$$

$$F = -k_B T \ln Z$$

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$$

$$\Xi = \sum_N Z_N e^{\beta \mu N}$$

$$\Phi = -k_B T \ln \Xi$$

$$f_{\text{FD}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1}$$

$$f_{\text{BE}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1}$$

Resultados matemáticos

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{(2n+1) 2^n \alpha^n} \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$$

$$\int \frac{du}{u(u-1)} = \ln(1-1/u)$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\int \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{1/2}} = \ln \left(z + \sqrt{z^2 + a^2} \right)$$

$$\ln N! \approx N \ln N - N$$

$$\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+u}{1-u} \right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha t^2) dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int \frac{1}{a^2 + y^2} dy = \frac{1}{a} \arctan \frac{y}{a}$$

$$\int \frac{x}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{x-1}}{e^z + 1} dz = (1 - 2^{1-x}) \Gamma(x) \zeta(x) \quad (x > 0)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{x-1}}{e^z - 1} dz = \Gamma(x) \zeta(x) \quad (x > 1)$$

$$\Gamma(2) = 1 \quad \Gamma(3) = 2 \quad \Gamma(4) = 6 \quad \Gamma(5) = 24$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = 1,645 \quad \zeta(3) = 1,202 \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} = 1,082 \quad \zeta(5) = 1,037$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \pi \delta_{m,n}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \pi \delta_{m,n}$$

$$dx dy dz = \rho d\rho d\phi dz$$

$$dx dy dz = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$$

$$Y_{0,0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

$$Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$Y_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}$$

$$Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$Y_{2,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi}$$

$$Y_{2,\pm 2} = \mp \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$$

Solução geral para a equação de Laplace em coordenadas esféricas, com simetria azimutal:

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV \qquad \oint \mathbf{A} \cdot d\vec{\ell} = \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

Coordenadas cartesianas

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{e}_z$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z \qquad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordenadas cilíndricas

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right] \hat{e}_\rho + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] \hat{e}_\varphi + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right] \hat{e}_z$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z \qquad \nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordenadas esféricas

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \hat{e}_r \\ & + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right] \hat{e}_\theta + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{e}_\varphi \end{aligned}$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$