Exame Unificado das Pós-graduações em Física

EUF

para o primeiro semestre de 2014

Parte 1 — 15/10/2013

Instruções:

- **NÃO ESCREVA O SEU NOME NA PROVA.** Ela deverá ser identificada **apenas através do código** (EUFxxx).
- Esta prova constitui a **primeira parte** do exame unificado das Pós-Graduações em Física.

  Ela contém problemas de: Eletromagnetismo, Física Moderna e Termodinâmica. Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**. O tempo mínimo de permanência na sala é de **90 minutos**.
- **NÃO** é permitido o uso de **calculadoras** ou outros instrumentos eletrônicos.
- **RESOLVA CADA QUESTÃO NA PÁGINA CORRESPONDENTE DO CADERNO DE RESPOSTAS.** As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. **Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Q1, ou Q2, ou ...) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas.**
  Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas identificadas como RASCUNHO, que se encontram no fim do caderno de respostas. **NÃO AS DESTAQUE.** As folhas de rascunho serão descartadas e **questões nelas resolvidas não serão consideradas**.
- **NÃO** escreva nada no formulário; **DEVOLVA-O** ao fim da prova, pois será utilizado na prova de amanhã.

Boa prova!

Q1. Considere um condutor macroscópico de forma arbitrária, cuja superfície é fechada e suave. Partindo da lei de Gauss e considerando que o rotacional do campo eletrostático é nulo:

(a) Calcule o campo elétrico no interior do condutor;

(b) Obtenha a componente normal do campo elétrico na superfície externa do condutor em termos da densidade superficial de carga;

(c) Obtenha a componente tangencial do campo elétrico na superfície do condutor.

Q2. Considere um conjunto de soluções de ondas planas eletromagnéticas no vácuo, cujos campos (elétrico e magnético) são descritos pela parte real de funções: $\vec{u}(\vec{x},t) = \vec{A}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$, onde $\vec{k}$ é o vetor de onda, que determina a direção de propagação da onda, e ω é a frequência angular, que se relaciona com o vetor de onda por $\omega = v|\vec{k}|$, onde $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ é a velocidade de propagação das ondas.

(a) Mostre que o divergente de $\vec{u}(\vec{x},t)$ satisfaz: $\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = i\vec{k}\cdot\vec{u}$;

(b) Mostre que o rotacional de $\vec{u}(\vec{x},t)$ satisfaz: $\vec{\nabla}\times\vec{u} = i\vec{k}\times\vec{u}$;

(c) Demonstre que as ondas são transversais e que os vetores $\vec{E}$, $\vec{B}$ e $\vec{k}$ são mutuamente perpendiculares.

Q3. Em 1913, Niels Bohr introduziu seu modelo atômico através da adaptação do modelo de Rutherford às ideias de quantização propostas na época. Em homenagem a esse evento, aborde os itens abaixo em termos de grandezas fundamentais.

(a) Use a regra de quantização para o momento angular, $L = \hbar n$, para encontrar uma expressão para os raios das órbitas permitidas de um elétron ao redor de um átomo de número atômico Z .

(b) Segundo o modelo de Bohr, a transição entre diferentes órbitas é acompanhada pela emissão/absorção de um fóton. Determine a energia do fóton emitido como resultado da transição entre o primeiro estado excitado e o estado fundamental de um átomo de hidrogênio.

(c) Considere um elétron preso em um poço unidimensional quadrado infinito de largura a. Determine uma expressão para os níveis de energia eletrônicos usando a regra de quantização de Bohr-Sommerfeld $\oint p dx = hn$.

(d) Determine a largura a desse poço, em termos do raio de Bohr, para que a energia de um fóton emitido devido à transição entre o primeiro estado excitado e o estado fundamental seja igual àquela obtida no item (b).

Q4. Os raios-γ produzidos por aniquilação de pares apresentam um espalhamento Compton considerável. Considere que um fóton com energia m_0c^2 seja produzido pela aniquilação de um elétron e um pósitron, onde m_0 é a massa de repouso do elétron e c é a velocidade da luz. Suponha que esse fóton seja espalhado por um elétron livre e que o ângulo de espalhamento seja θ.

(a) Encontre a máxima energia cinética possível do elétron em recuo nesse espalhamento.

(b) Se o ângulo de espalhamento for $\theta = 120°$, determine a energia do fóton e a energia cinética do elétron após o espalhamento.

(c) Se $\theta = 120°$, qual é a direção de movimento do elétron após o espalhamento, em relação à direção do fóton incidente?

Q5. Um mol de um gás ideal simples está contido em um recipiente de volume inicial v_0 e pressão p_0. O gás ideal é descrito pelas equações $pv = RT$ e $u = cRT$, onde p é a pressão, v é o volume molar, T a temperatura absoluta, u é a energia molar; R e c são constantes. O gás se expande a partir desse estado inicial até o estado correspondente a um volume final $2v_0$ através de um dado processo. Determine o trabalho W realizado pelo gás e o calor Q recebido pelo gás para cada um dos processos listados abaixo. As respostas finais devem ser dadas apenas em termos de (v_0, p_0) e de c.

(a) Expansão livre. Determine também a variação de temperatura ΔT.

(b) Expansão quase-estática isentrópica. Obtenha também a pressão final p_f, utilizando o fato de que, nesse processo para um gás ideal, $pv^\gamma =$ constante, onde $\gamma = (c+1)/c$.

(c) Expansão quase-estática isobárica.

(d) Expansão quase-estática isotérmica.

Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

EUF

para o primeiro semestre 2014

Parte 2 – 16/10/2013

Instruções:

- **NÃO ESCREVA O SEU NOME NA PROVA.** Ela deverá ser identificada **apenas através do código (EUFxxx).**
- Esta prova constitui a **segunda parte** do exame unificado das Pós-Graduações em Física.

  Ela contém problemas de: Mecânica Clássica, Mecânica Quântica e Mecânica Estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**. O tempo mínimo de permanência na sala é de **90 minutos**.
- **NÃO** é permitido o uso de **calculadoras** ou outros instrumentos eletrônicos.
- **RESOLVA CADA QUESTÃO NA PÁGINA CORRESPONDENTE DO CADERNO DE RESPOSTAS.** As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. **Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Q1, ou Q2, ou ...) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas.**
  Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas identificadas como RASCUNHO, que se encontram no fim do caderno de respostas. **NÃO AS DESTAQUE.** As folhas de rascunho serão descartadas e **questões nelas resolvidas não serão consideradas.**
- **NÃO** é necessário devolver o Formulário.

Boa prova!

Q6. Duas partículas, A e B, de massas m e M ($m \neq M$), respectivamente, estão conectadas às extremidades de um fio inextensível de comprimento ℓ e de massa massa desprezível que passa por um orifício em uma mesa horizontal, como mostrado na figura abaixo. A partícula A move-se sem atrito sobre a mesa enquanto a outra o faz verticalmente sob a ação conjunta da gravidade, de aceleração $\vec{g}$, e da tração do fio (desconsidere também o atrito entre o fio e o orifício).

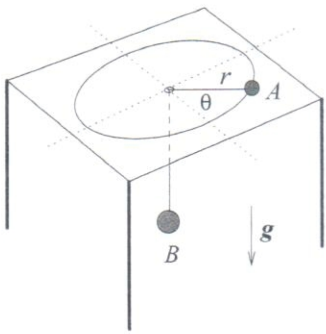
(a) Supondo que a posição inicial de A seja $r = r_0$, que velocidade inicial deve ser conferida a ela para que B permaneça em repouso abaixo da superfície da mesa?

(b) Obtenha as equações do movimento, admitindo que a lagrangiana que descreve um movimento arbitrário desse sistema é dada por

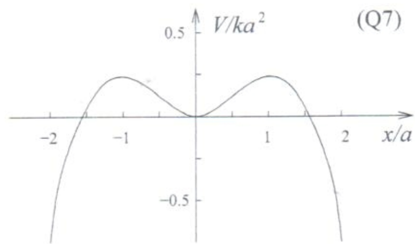
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m+M)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - Mg(r-\ell).$$

(c) Obtenha as grandezas conservadas e dê o significado de cada uma delas.

(d) Se B for ligeiramente e verticalmente deslocada da sua posição, ocorrerão pequenas oscilações no sistema. Obtenha o período dessas oscilações em termos do raio de equilíbrio r_{eq} e das demais grandezas que caracterizam o sistema (m, M e g).



(Q6)



(Q7)

Q7. Uma partícula de massa m está sujeita ao potencial unidimensional

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{k}{4a^2}x^4,$$

mostrado na figura acima, onde k e a são constantes positivas.

(a) Determine a força $F(x)$ e obtenha os pontos de equilíbrio, determinando sua natureza

(b) Calcule o período das pequenas oscilações que ocorrem em torno do ponto de equilíbrio estável.

(c) Admita que a partícula esteja em repouso no ponto $x = 0$ e que receba um impulso que lhe confere, instantaneamente, uma velocidade de módulo v na direção de x positivo. Discuta o que ocorre nos seguintes casos: $0 < v \leq a\sqrt{k/2m}$ e $v > a\sqrt{k/2m}$.

(d) Esboce o diagrama de fase do sistema ($\dot{x}$ versus x para energia constante) para os diversos tipos de movimento. Indique claramente a curva que corresponde à transição de movimento periódico para não periódico, bem como o valor da energia correspondente.

Q8. Considere o problema de uma partícula de massa m cujo movimento ao longo do eixo-x está restrito ao intervalo $0 \le x \le a$, isto é, ela encontra-se confinada em uma caixa com paredes colocadas nas posições $x = 0$ e $x = a$.

(a) Determine a função de onda e a energia do estado fundamental.

(b) Suponha que a partícula seja descrita pela seguinte função de onda:

$$\psi(x) = A\left[\sin\frac{\pi x}{a} - 3i\sin\frac{2\pi x}{a}\right],$$

onde A é uma constante de normalização. Determine A e calcule a probabilidade de obter o resultado $2\pi^2\hbar^2/ma^2$ para a medida da energia.

(c) Suponha agora que a partícula esteja no estado fundamental. Qual é a distribuição de probabilidades do momento da partícula nesse estado?

(d) Considerando novamente que a partícula esteja no estado fundamental, suponha que as paredes sejam removidas, de forma instantânea, deixando a partícula livre ($\hat{\mathcal{H}} = \hat{p}^2/2m$). Qual é a energia dessa partícula livre?

Q9. Considere uma partícula de spin 1/2, cujo momento magnético é $\vec{M} = \gamma\vec{S}$, onde γ é uma constante. Podemos descrever o estado quântico dessa partícula utilizando o espaço gerado pelos autovetores $|+\rangle$ e $|-\rangle$ do operador $\hat{S}_z$, que mede a projeção do spin na direção z,

$$\hat{S}_z|+\rangle = \frac{\hbar}{2}|+\rangle, \qquad \hat{S}_z|-\rangle = -\frac{\hbar}{2}|-\rangle.$$

A partícula encontra-se sujeita a um campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{y}$, orientado ao longo do eixo y, de forma que que o hamiltoniano é dado por

$$\hat{\mathcal{H}} = -\vec{M}\cdot\vec{B} = -\gamma B\hat{S}_y.$$

Inicialmente, no instante $t = 0$, ela está no estado $|\psi(0)\rangle = |+\rangle$.

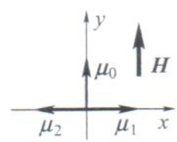
(a) Quais são as possíveis valores da projeção do spin no eixo-y?

(b) Encontre os autovetores de $\hat{S}_y$.

(c) Obtenha $|\psi(t)\rangle$ para $t > 0$ em termos de $|+\rangle$ e $|-\rangle$ definidos acima.

(d) Obtenha os valores médios dos observáveis S_x, S_y e S_z em função do tempo.

Q10. Um determinado material magnético é composto por N átomos magnéticos não-interagentes, cujos momentos magnéticos $\boldsymbol{\mu}$ podem apontar em três direções possíveis, conforme mostra a figura ao lado: $\boldsymbol{\mu}_0 = \mu\hat{\boldsymbol{y}}$, $\boldsymbol{\mu}_1 = \mu\hat{\boldsymbol{x}}$ e $\boldsymbol{\mu}_2 = -\mu\hat{\boldsymbol{x}}$. O sistema encontra-se em equilíbrio térmico a temperatura T e na presença de um campo magnético uniforme orientado ao longo da direção y, $\boldsymbol{H} = H\hat{\boldsymbol{y}}$, de modo que os níveis de energia correspondentes a um único átomo são $\epsilon_0 = -\mu H$, $\epsilon_1 = 0$ e $\epsilon_2 = 0$.



(a) Obtenha a função de partição canônica z de um átomo, a função de partição canônica Z do sistema e a energia livre de Helmholtz f por átomo.

(b) Determine a energia média $u = \langle\epsilon_n\rangle$ e a entropia s por átomo.

(c) Obtenha a magnetização por átomo $\boldsymbol{m} = m_x\hat{\boldsymbol{x}} + m_y\hat{\boldsymbol{y}} = \langle\boldsymbol{\mu}_n\rangle$.

(d) Verifique que a susceptibilidade isotérmica $\chi_T = (\partial m_y/\partial H)_T$ a campo nulo obedece à lei de Curie, $\chi_T \propto 1/T$.

Exame Unificado das Pós-graduações em Física

EUF

para o primeiro semestre de 2014

15-16/10/2013

FORMULÁRIO

Não escreva nada neste formulário. Devolva-o ao fim do primeiro dia de prova.

Constantes físicas

Velocidade da luz no vácuo	$c = 3{,}00\times10^{8}$ m/s
Constante de Planck	$h = 6{,}63\times10^{-34}$ J s $= 4{,}14\times10^{-15}$ eV s
	$hc = 1240$ eV nm
Constante de Wien	$W = 2{,}898\times10^{-3}$ m K
Permeabilidade magnética do vácuo	$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ N/A^2 $= 12{,}6\times10^{-7}$ N/A^2
Permissividade elétrica do vácuo	$\epsilon_0 = \dfrac{1}{\mu_0 c^2} = 8{,}85\times10^{-12}$ F/m
	$\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8{,}99\times10^{9}$ Nm^2/C^2
Constante gravitacional	$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2/kg^2
Carga elementar	$e = 1{,}60\times10^{-19}$ C
Massa do elétron	$m_e = 9{,}11\times10^{-31}$ kg $= 511$ keV/c^2
Comprimento de onda Compton	$\lambda_C = 2{,}43\times10^{-12}$ m
Massa do próton	$m_p = 1{,}673\times10^{-27}$ kg $= 938$ MeV/c^2
Massa do nêutron	$m_n = 1{,}675\times10^{-27}$ kg $= 940$ MeV/c^2
Massa do dêuteron	$m_d = 3{,}344\times10^{-27}$ kg $= 1.876$ MeV/c^2
Massa da partícula α	$m_\alpha = 6{,}645\times10^{-27}$ kg $= 3.727$ MeV/c^2
Constante de Rydberg	$R_H = 1{,}10\times10^{7}$ m^{-1} , $R_H hc = 13{,}6$ eV
Raio de Bohr	$a_0 = 5{,}29\times10^{-11}$ m
Constante de Avogadro	$N_A = 6{,}02\times10^{23}$ mol^{-1}
Constante de Boltzmann	$k_B = 1{,}38\times10^{-23}$ J/K $= 8{,}62\times10^{-5}$ eV/K
Constante universal dos gases	$R = 8{,}31$ J mol^{-1} K^{-1}
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5{,}67\times10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}

Raio do Sol	=	$6{,}96\times10^{8}$ m	Massa do Sol	=	$1{,}99\times10^{30}$ kg
Raio da Terra	=	$6{,}37\times10^{6}$ m	Massa da Terra	=	$5{,}98\times10^{24}$ kg
Distância Sol-Terra	=	$1{,}50\times10^{11}$ m			

1 J $= 10^{7}$ erg   1 eV $= 1{,}60\times10^{-19}$ J

Constantes numéricas

$\pi \cong 3{,}142$	$\ln 2 \cong 0{,}693$	$\cos(30°) = \sin(60°) = \sqrt{3}/2 \cong 0{,}866$
$e \cong 2{,}718$	$\ln 3 \cong 1{,}099$	$\sin(30°) = \cos(60°) = 1/2$
$1/e \cong 0{,}368$	$\ln 5 \cong 1{,}609$	
$\log_{10} e \cong 0{,}434$	$\ln 10 \cong 2{,}303$	

Mecânica Clássica

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad L_i = \sum_j I_{ij}\omega_j \qquad T_R = \sum_{ij} \frac{1}{2} I_{ij}\omega_i\omega_j \qquad I = \int r^2 \, dm$$

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathrm{e}}_r \qquad \mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathrm{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathrm{e}}_\theta \qquad \mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathrm{e}}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\mathrm{e}}_\theta$$

$$\mathbf{r} = \rho\hat{\mathrm{e}}_\rho + z\hat{\mathrm{e}}_z \qquad \mathbf{v} = \dot{\rho}\hat{\mathrm{e}}_\rho + \rho\dot{\varphi}\hat{\mathrm{e}}_\varphi + \dot{z}\hat{\mathrm{e}}_z \qquad \mathbf{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right)\hat{\mathrm{e}}_\rho + \left(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\right)\hat{\mathrm{e}}_\varphi + \ddot{z}\hat{\mathrm{e}}_z$$

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathrm{e}}_r \qquad \begin{aligned}\mathbf{v} = \; & \dot{r}\hat{\mathrm{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathrm{e}}_\theta \\ & + r\dot{\varphi}\sin\theta\hat{\mathrm{e}}_\varphi\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\mathbf{a} = \; & \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\hat{\mathrm{e}}_r \\ & + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\mathrm{e}}_\theta \\ & + \left(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\right)\hat{\mathrm{e}}_\varphi\end{aligned}$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \qquad V(r) = -\int_{r_0}^{r} F(r')\mathrm{d}r' \qquad V_{\text{efetivo}} = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$\int_{R_0}^{R} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{E - V(r) - \frac{L}{2mr^2}}} = \sqrt{\frac{2}{m}}\,(t - t_0) \qquad \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2u^2}F\left(1/u\right), \quad u = \frac{1}{r}; \qquad \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2m}{L^2}\left[E - V(1/u)\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad L = T - V \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N} F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_k} \qquad Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\text{rotação}} = \left(\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\text{fixo}} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$$

$$H = \sum_{k=1}^{f} p_k\dot{q}_k - L; \qquad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}; \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Eletromagnetismo

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\vec{\ell} + \frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0 \qquad \nabla\times\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0 \qquad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0$$

$$\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = Q = \int \rho dV \qquad \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho$$

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\vec{\ell} - \frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = I = \int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} \qquad \nabla\times\mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon\mathbf{E} \qquad \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu\mathbf{H}$$

$$\oint \mathbf{P}\cdot d\mathbf{S} = -Q_P \qquad \nabla\cdot\mathbf{P} = -\rho_P \qquad \oint \mathbf{M}\cdot d\vec{\ell} = I_M \qquad \nabla\times\mathbf{M} = \mathbf{J}_M$$

$$V = -\int \mathbf{E}\cdot d\vec{\ell} \qquad \mathbf{E} = -\nabla V \qquad d\mathbf{H} = \frac{I d\vec{\ell}\times\hat{e}_r}{4\pi r^2} \qquad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$$

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{r^2}\hat{e}_r \qquad dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{r} \qquad \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}) \qquad d\mathbf{F} = I d\vec{\ell}\times\mathbf{B}$$

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \qquad \nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$u = \frac{1}{2}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) \qquad \mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} \qquad \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J} dV}{r}$$

$$(\rho = 0, \mathbf{J} = \mathbf{0}) \Rightarrow \nabla^2\mathbf{E} = \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \qquad n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

Relatividade

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \qquad x' = \gamma\,(x - Vt) \qquad t' = \gamma\left(t - Vx/c^2\right)$$

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - V v_x/c^2} \qquad v'_y = \frac{v_y}{\gamma\,(1 - V v_x/c^2)} \qquad v'_z = \frac{v_z}{\gamma\,(1 - V v_x/c^2)}$$

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 + K \qquad E = \sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2}$$

Mecânica Quântica

$$i\hbar\,\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = H\Psi(x,t) \qquad H = \frac{-\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}\,r + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$p_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \qquad [x, p_x] = i\hbar$$

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right) \qquad \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle\,, \qquad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

$$L_\pm = L_x \pm iL_y \qquad L_\pm Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}\;Y_{\ell m\pm 1}(\theta,\varphi)$$

$$L_z = x\,p_y - y\,p_x \qquad L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\,, \qquad [L_x, L_y] = i\hbar L_z$$

$$E_n^{(1)} = \langle n|\delta H|n\rangle \qquad E_n^{(2)} = \sum_{m\neq n}\frac{|\langle m|\delta H|n\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}\,, \qquad \phi_n^{(1)} = \sum_{m\neq n}\frac{\langle m|\delta H|n\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}\phi_m^{(0)}$$

$$\hat{\mathrm{S}} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \qquad \sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\,, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\,, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\bar{\psi}(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int d^3r\,e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}\,\psi(\vec{r}) \qquad \psi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int d^3p\,e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}\,\bar{\psi}(\vec{p})$$

Física Moderna

$$p = \frac{h}{\lambda} \qquad E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \qquad E_n = -Z^2\,\frac{hcR_H}{n^2}$$

$$R_T = \sigma T^4 \qquad \lambda_{\max}T = b \qquad L = mvr = n\hbar$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta) \qquad n\lambda = 2d\sin\theta \qquad \Delta x\,\Delta p \geq \hbar/2$$

Termodinâmica e Mecânica Estatística

$dU = dQ - dW$ $\qquad$ $dU = TdS - pdV + \mu dN$

$F = U - TS$ $\qquad$ $G = F + pV$

$H = U + pV$ $\qquad$ $\Phi = F - \mu N$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \qquad C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p$$

Gás Ideal: $\quad pV = nRT \qquad U = CT \qquad pV^\gamma =$ constante

Transformada de Legendre: $\quad \phi(p) = \min_x \{f(x) - xp\}$

$S = k_B \ln \Omega$ $\qquad$ sendo Ω o número de estados acessíveis.

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} \qquad Z = \int d\gamma e^{-\beta E(\gamma)} \qquad \beta = 1/k_B T$$

$$F = -k_B T \ln Z \qquad U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$$

$$\Xi = \sum_N Z_N e^{\beta \mu N} \qquad \Phi = -k_B T \ln \Xi$$

$$f_{\mathrm{FD}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} \qquad f_{\mathrm{BE}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1}$$

Resultados matemáticos úteis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1.3.5...(2n+1)}{(2n+1)2^n \alpha^n} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$$

$$\int \frac{du}{u(u-1)} = \ln(1 - 1/u)$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

$$\int \frac{dz}{(a^2+z^2)^{1/2}} = \ln\left(z + \sqrt{z^2+a^2}\right)$$

$$\ln N! \approx N \ln N - N$$

$$\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha t^2) dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int \frac{1}{a^2+y^2}\, dy = \frac{1}{a} \arctan\frac{y}{a}$$

$$\int \frac{x}{a^2+x^2}\, dx = \frac{1}{2} \ln(a^2+x^2)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{x-1}}{e^z+1}\, dz = (1 - 2^{1-x})\, \Gamma(x)\, \zeta(x) \qquad (\text{para } x > 0)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{x-1}}{e^z-1}\, dz = \Gamma(x)\, \zeta(x) \qquad (\text{para } x > 1)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\, \sin(nx)\, dx = \pi\delta_{m,n}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\, \cos(nx)\, dx = \pi\delta_{m,n}$$

$$\int_0^L e^{iBx} \sin\frac{n\pi x}{L} dx = \frac{n\pi L[1-(-1)^n e^{iBL}]}{n^2\pi^2 - B^2L^2} \qquad (\text{para } n = 1,2,3,\ldots)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1-x^2)^2} \cos^2\frac{\pi x}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

$$dV = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz \qquad dV = r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$Y_{0,0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \qquad Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \qquad Y_{1,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\phi}$$

$$Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\theta - 1) \qquad Y_{2,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi} \qquad Y_{2,\pm2} = \mp\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta e^{\pm 2i\phi}$$

$$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x \qquad P_2(x) = (3x^2-1)/2$$

Solução geral para a Eq. de Laplace em coordenadas esféricas, com simetria azimutal:

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}})\, P_l(\cos\theta)$$

Coordenadas cartesianas

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{e}_z$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{e}_z \qquad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordenadas cilíndricas

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right]\hat{e}_\rho + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right]\hat{e}_\varphi + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right]\hat{e}_z$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{e}_z \qquad \nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordenadas esféricas

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\varphi)}{\partial \varphi}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right]\hat{e}_r$$

$$+ \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r}\right]\hat{e}_\theta + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\hat{e}_\varphi$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Teoremas do Cálculo Vetorial

$$\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \int (\nabla\cdot\mathbf{A})\, dV \qquad \oint \mathbf{A}\cdot d\vec{\ell} = \int (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}$$