Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

EUF

1º Semestre/2011

Parte 1 — 28/09/2010

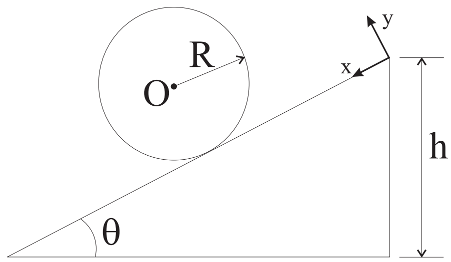
Instruções:

- **NÃO ESCREVA O SEU NOME NA PROVA.** Ela deverá ser identificada **apenas através do código (EUFxxx)**.
- Esta prova constitui a **primeira parte** do exame unificado das Pós-Graduação em Física.

  Ela contém problemas de: Mecânica Clássica, Física Moderna, Termodinâmica e Mecânica Estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**. O tempo mínimo de permanência na sala é de **90 minutos**.
- **NÃO** é permitido o uso de **calculadoras** ou outros instrumentos eletrônicos.
- **RESOLVA CADA QUESTÃO NA PÁGINA CORRESPONDENTE DO CADERNO DE RESPOSTAS.** As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. **Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Q1, ou Q2, ou . . .) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas.**
  Use uma folha extra diferente para cada questão. Nao destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas indicadas por RASCUNHO, que se encontram no fim do caderno de respostas. **NÃO AS DESTAQUE**. As folhas de rascunho serão descartadas e **questões nelas resolvidas não serão consideradas**.
- **NÃO** escreva nada no formulário; **DEVOLVA-O** ao fim da prova, pois ele será utilizado amanhã.

Boa prova!

Q1. Considere um corpo de massa M de seção transversal circular de raio R que rola sem deslizamento sobre um plano que possui um ângulo de inclinação θ em relação à horizontal, conforme mostra a figura abaixo. O coeficiente de atrito estático entre o corpo e o plano é μ_e. O momento de inércia do corpo em relação a um eixo passando pelo ponto O é I e a aceleração da gravidade é g.



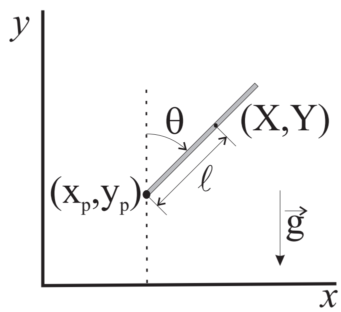
(a) Desenhe o diagrama de forças para o corpo. Escreva a equação que relaciona a velocidade angular, $\dot{\varphi}$, de rolamento do corpo e a velocidade de translação, $\dot{x}$, que caracteriza um rolamento sem deslizamento.

(b) Determine a aceleração $\ddot{x}$, associada à translação do corpo ao longo do plano inclinado, em termos dos parâmetros que constam no enunciado.

(c) Assuma que o corpo inicia o seu movimento a partir do repouso na origem do sistema de coordenadas cartesianas indicado na figura. Calcule a energia mecânica no início e no final do movimento. A energia mecânica do sistema é conservada?

(d) Calcule o momento de inércia I considerando que o corpo seja (i) um anel e (ii) um disco. Assuma que as massas dos corpos estão uniformemente distribuídas. Suponha agora que o ângulo θ possa ser variado. A partir de qual θ cessa o movimento de rolamento puro e o corpo começa a deslizar, nos casos (i) e (ii) acima? Deixe a resposta em termos de μ_e.

Q2. Considere o pêndulo invertido da figura abaixo, composto por uma barra de massa M e momento de inércia I_0 em relação ao seu centro de massa, cujas coordenadas são (X,Y). A barra pode girar livremente no plano xy em torno de um eixo de rotação que passa pela posição (x_p,y_p), a uma distância ℓ do centro de massa. A aceleração da gravidade é g.



(a) Escreva as equações para a energia cinética e potencial do sistema em termos de X, Y e θ.

Para os itens (b), (c) e (d) assuma que um agente externo faz o eixo de rotação oscilar horizontalmente com frequência angular ω, ou seja, tem-se $y_p(t) = 0$ e $x_p(t) = A\cos(\omega t)$.

(b) Escreva a lagrangiana do sistema em termos da coordenada generalizada θ.

(c) Escreva a equação de movimento para a lagrangiana do item (b).

(d) Considere que o sistema executa pequenas oscilações (θ pequeno). Mostre que neste caso, $\theta(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\,\mathrm{sen}(\omega t)$ é uma solução para o problema. Determine α e β.

Q3. Para os itens (a), (b) e (c), admita que no modelo de Bohr para uma partícula de massa m se movendo numa órbita circular de raio r e velocidade v, a força Coulombiana fosse substituída por uma força central atrativa de intensidade $k\,r$ (sendo k uma constante). Admita que os postulados de Bohr sejam válidos para este sistema. Para esta situação:

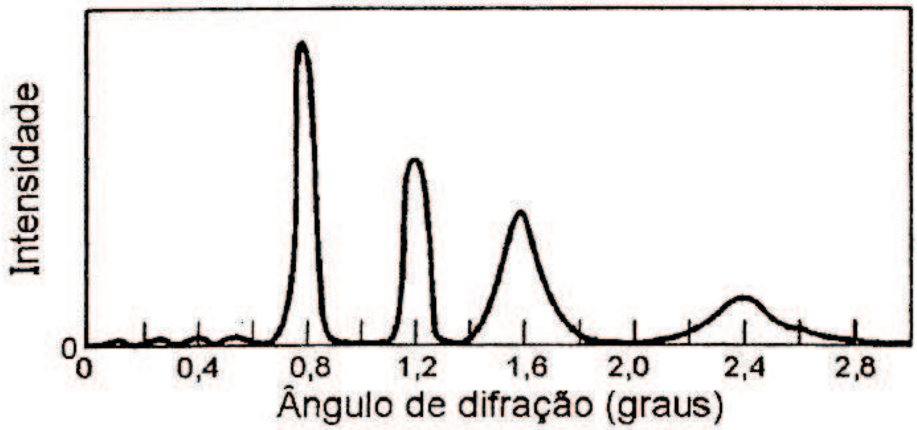
(a) Deduza a expressão para os raios r_n das órbitas de Bohr permitidas neste modelo em função do número quântico n e das constantes k, $\hbar$ e m. Diga quais os valores possíveis de n neste caso.

(b) Lembrando que para o caso desta força central, a energia potencial correspondente é $V(r) = kr^2/2$, deduza a expressão para as energias E_n das órbitas permitidas em função do número quântico n e das constantes k, $\hbar$ e m. Determine a frequência irradiada quando a partícula faz uma transição de uma órbita para outra adjacente.

(c) Calcule o comprimento de onda de de Broglie associado à partícula em um estado de energia correspondente ao número quântico $n = 2$ em função de k, $\hbar$ e m.

Para o item (d), considere um feixe de raios X, contendo radiação de dois comprimentos de onda distintos, difratados por um cristal cuja distância entre planos de difração é 1 nm (10^{-9} m). A figura abaixo apresenta o espectro de intensidade na região de pequenos ângulos (medidos em relação à direção do feixe incidente).

(d) Determine os comprimentos de onda dos raios X presentes no feixe. Utilize $\pi = 3$.



Q4. Numa experiência de efeito fotoelétrico, luz de comprimento de onda 414 nm e intensidade I_0 incide sobre uma superfície limpa de um metal cuja função trabalho é $\phi = 2{,}5$ eV.

(a) Calcule a energia cinética máxima dos fotoelétrons.

(b) Se a intensidade de luz incidente for duplicada, o que ocorre com a energia cinética dos fotoelétrons?

Considere agora a experiência de espalhamento Compton em que um elétron de massa m_0 em repouso espalha um fóton de comprimento de onda $\lambda = 2\lambda_c \equiv 2h/(m_0 c)$. Após o espalhamento, o fóton perde metade de sua energia.

(c) Calcule o comprimento de onda do fóton espalhado (expresse seu resultado apenas em função de λ_c) e determine o seu ângulo de espalhamento.

(d) Calcule a energia total e o momento linear do elétron após a colisão (expresse seu resultado em função de m_0 e c).

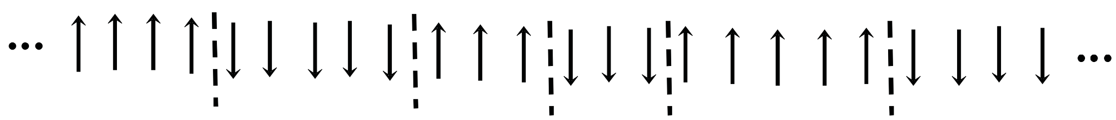
Q5. Imagine que um material magnético unidimensional possa ser modelado como uma cadeia linear de $N + 1$ spins. Cada spin interage com os seus primeiros vizinhos de tal maneira que a energia do sistema seja $E = n\epsilon$, onde n é o número de paredes de domínio separando regiões de spin $\uparrow$ das regiões de spin $\downarrow$, como representado na figura abaixo, sendo as paredes de domínio indicadas por linhas tracejadas. A energia por parede de domínio é ϵ. Considere $N \gg 1$ e $n \gg 1$.

(a) Determine de quantas maneiras as n paredes de domínio podem ser arranjadas.

(b) Determine a entropia $S(E)$ do sistema contendo n paredes de domínio.

(c) Determine a energia interna E como função da temperatura, $E(T)$. Expresse seu resultado em termos de N, ϵ, T e constantes físicas apenas.

(d) Esboçe a função $E(T)$, indicando os valores de E para $T = 0$ e $T \to \infty$.



Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

EUF

$1^{\underline{o}}$ Semestre/2011

Parte 2 — 29/09/2010

Instruções:

- **NÃO ESCREVA O SEU NOME NA PROVA.** Ela deverá ser identificada **apenas através do código (EUFxxx)**.
- Esta prova constitui a **segunda parte** do exame unificado das Pós-Graduação em Física.

  Ela contém problemas de: Eletromagnetismo, Mecânica Quântica, Termodinâmica e Mecânica Estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**. O tempo mínimo de permanência na sala é de **90 minutos**.
- **NÃO** é permitido o uso de **calculadoras** ou outros instrumentos eletrônicos.
- **RESOLVA CADA QUESTÃO NA PÁGINA CORRESPONDENTE DO CADERNO DE RESPOSTAS.** As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. **Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Q1, ou Q2, ou . . .) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas.**
  Use uma folha extra diferente para cada questão. Nao destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas indicadas por RASCUNHO, que se encontram no fim do caderno de respostas. **NÃO AS DESTAQUE**. As folhas de rascunho serão descartadas e **questões nelas resolvidas não serão consideradas**.
- **NÃO** é necessário devolver o Formulário.

Boa prova!

Q6. Coloca-se uma esfera metálica descarregada, de raio R, numa região do espaço inicialmente preenchida por um campo elétrico dado por $\vec{E}_i = E_0 \ \hat{k}$. Escolha a origem do sistema de coordenadas no centro da esfera.

(a) Esboce as linhas do campo elétrico em toda a região do espaço. Justifique o esboço utilizando argumentos físicos.

(b) Determine o campo elétrico $\vec{E}_f(\vec{r})$ em toda a região do espaço. Em particular, encontre os campos para os pontos em que $|\vec{r}| \gg R$ e $|\vec{r}| \approx R$ e verifique se eles são consistentes com o esboço no item (a).

(c) Ache a densidade de carga na esfera. Se a esfera possuir raio igual a 10 cm e $E_0 = 100$ N/C, calcule as cargas acumuladas nos hemisférios norte e sul da esfera.

(d) Suponha que a esfera metálica seja substituída por uma esfera dielétrica. Discuta **qualitativamente** o que ocorre neste caso e esboce as linhas do campo elétrico em toda a região do espaço.

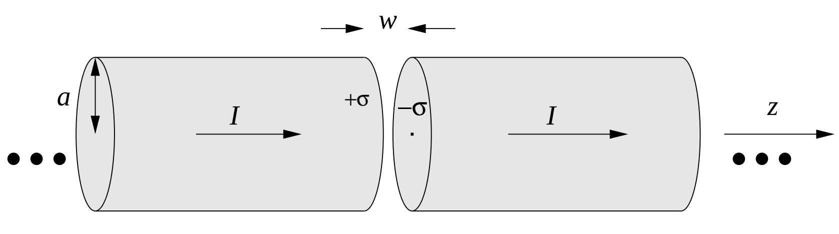
Q7. Considere o arranjo hipotético ilustrado na figura abaixo, em que um fio sólido de raio a estendido ao longo do eixo z conduz uma corrente elétrica I, uniformemente distribuída sobre a sua seção transversal, que é mantida constante. A pequena lacuna no fio, de largura $w \ll a$, forma um capacitor de placas paralelas. A carga no capacitor é zero no instante $t = 0$.

(a) Encontre o vetor campo elétrico na lacuna em função da distância ρ a partir do eixo z e do tempo t, além dos parâmetros I,w e a. Despreze os efeitos de borda.

(b) Encontre o vetor campo magnético na lacuna em função de ρ e t e dos parâmetros I,w e a.

(c) Calcule a densidade de energia eletromagnética u_{em} e o vetor de Poynting na lacuna, indicando explicitamente a sua direção e o seu sentido.

(d) Determine a energia total U_{em} na lacuna em função do tempo. Compare a taxa de variação de U_{em} com o tempo e o fluxo de energia por unidade de tempo (fluxo de potência), obtido fazendo-se a integral de superfície do vetor de Poynting.



Q8. Considere uma partícula de massa m na presença de um potencial harmônico $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$, onde ω é a frequência angular do oscilador e x é a coordenada da partícula (1-dim).

(a) São dadas as funções de onda estacionárias correspondentes ao estado fundamental ψ_0 e ao primeiro estado excitado ψ_1:

$$\psi_0(x) = A\ \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) \ , \qquad \psi_1(x) = B\ x\ \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) \ ,$$

onde A e B são constantes de normalização. Calcule A e B supondo que as funções de onda sejam reais.

(b) Seja E_0 a energia do estado fundamental. Sabemos que $E_1 = E_0 + \hbar\omega$ para o primeiro estado excitado, já que o quantum de energia do oscilador é $\hbar\omega$. Usando a equação de Schrödinger, encontre a energia E_0.

(c) Para os estados estacionários, o valor médio da posição $\langle x\rangle$ é sempre nulo. Construa uma função de onda não estacionária como combinação linear de ψ_0 e ψ_1 com coeficientes reais, tal que o valor médio $\langle x\rangle$ seja o maior possível. Em outras palavras, considere o estado normalizado

$$\psi(x) = \sqrt{1-\beta^2}\ \psi_0(x) + \beta\ \psi_1(x) \ ,$$

com $0 \leq \beta^2 \leq 1$ e determine o coeficiente β que maximiza o valor de $\langle x\rangle$.

(d) Suponha que a função de onda construída no item anterior descreva o estado do oscilador harmônico no tempo $t = 0$. Escreva a função de onda do estado para um tempo $t > 0$ arbitrário, supondo que nenhuma medição foi feita sobre o sistema. Para esse estado, avalie o valor médio da posição $\langle x\rangle(t)$ em função do tempo.

Q9. Seja uma partícula com momento angular $l = 1$.

(a) Na representação onde as matrizes de $\mathbf{L}^2$ e $\mathbf{L_z}$ são diagonais, obtenha a matriz da componente $\mathbf{L_x}$. Lembre que a matriz de $\mathbf{L_x}$ deve representar um operador hermitiano. Sugerimos usar os operadores escada $\mathbf{L}_\pm$.

(b) Calcule os autovalores de $\mathbf{L_x}$.

(c) Encontre o autovetor de $\mathbf{L_x}$ com o maior autovalor.

(d) Suponha agora que você encontrou o maior autovalor numa medição de $\mathbf{L_x}$. Calcule as probabilidades de medir respectivamente $+\hbar$, 0 e $-\hbar$ numa medição posterior de $\mathbf{L_z}$.

Q10. Um mol de um gás ideal monoatômico se encontra na temperatura T e ocupa um volume V. A energia interna por mol de um gás ideal é dada por $u = c_V T$, onde c_V é o calor específico molar, que é considerado constante. Responda as questões abaixo:

(a) Considere a situação em que o gás se encontra em contato com um reservatório térmico na temperatura T e sofre uma expansão quase-estática reversível na qual o seu volume passa de V para $2V$. Calcule o trabalho realizado pelo gás durante a sua expansão.

(b) Ainda com relação ao processo físico descrito no item (a), determine o calor trocado pelo gás com o reservatório térmico.

(c) Determine as variações de entropia do gás e do reservatório térmico no processo descrito no item (a).

(d) Considere agora a situação em que o gás está isolado e sofre uma expansão livre na qual o seu volume passa de V para $2V$. Determine as variações de entropia do gás e do universo durante o processo de expansão livre.

Exame Unificado das Pós-graduações em Física

EUF

1º Semestre/2011

FORMULÁRIO

Não escreva nada neste formulário. Devolva-o ao fim do primeiro dia de prova.

Constantes físicas

Velocidade da luz no vácuo	$c = 3{,}00\times10^{8}$ m/s
Constante de Planck	$h = 6{,}63\times10^{-34}$ J s $= 4{,}14\times10^{-15}$ eV s
	$hc = 1240$ eV nm
Constante de Wien	$W = 2{,}898\times10^{-3}$ m K
Permeabilidade magnética do vácuo	$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ N/A^2 $= 12{,}6\times10^{-7}$ N/A^2
Permissividade elétrica do vácuo	$\epsilon_0 = \dfrac{1}{\mu_0 c^2} = 8{,}85\times10^{-12}$ F/m
	$\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8{,}99\times10^{9}$ Nm^2/C^2
Constante gravitacional	$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2/kg^2
Carga elementar	$e = 1{,}60\times10^{-19}$ C
Massa do elétron	$m_e = 9{,}11\times10^{-31}$ kg $= 511$ keV/c^2
Comprimento de onda Compton	$\lambda_C = 2{,}43\times10^{-12}$ m
Massa do próton	$m_p = 1{,}673\times10^{-27}$ kg $= 938$ MeV/c^2
Massa do nêutron	$m_n = 1{,}675\times10^{-27}$ kg $= 940$ MeV/c^2
Massa do dêuteron	$m_d = 3{,}344\times10^{-27}$ kg $= 1.876$ MeV/c^2
Massa da partícula α	$m_\alpha = 6{,}645\times10^{-27}$ kg $= 3.727$ MeV/c^2
Constante de Rydberg	$R_H = 1{,}10\times10^{7}$ m^{-1}, $R_H hc = 13{,}6$ eV
Raio de Bohr	$a_0 = 5{,}29\times10^{-11}$ m
Constante de Avogadro	$N_A = 6{,}02\times10^{23}$ mol^{-1}
Constante de Boltzmann	$k_B = 1{,}38\times10^{-23}$ J/K $= 8{,}62\times10^{-5}$ eV/K
Constante molar dos gases	$R = 8{,}31$ J mol^{-1} K^{-1}
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5{,}67\times10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}

Raio do Sol	=	$6{,}96\times10^{8}$ m	Massa do Sol	=	$1{,}99\times10^{30}$ kg
Raio da Terra	=	$6{,}37\times10^{6}$ m	Massa da Terra	=	$5{,}98\times10^{24}$ kg
Distância Sol-Terra	=	$1{,}50\times10^{11}$ m			

1 J = 10^7 erg   1 eV = $1{,}60\times10^{-19}$ J

Constantes numéricas

$\pi \cong 3{,}142$	$\ln 2 \cong 0{,}693$	$\cos(30°) = \sqrt{3}/2 \cong 0{,}866$
$e \cong 2{,}718$	$\ln 3 \cong 1{,}099$	$\mathrm{sen}(30°) = 1/2$
$1/e \cong 0{,}368$	$\ln 5 \cong 1{,}609$	
$\log_{10} e \cong 0{,}434$	$\ln 10 \cong 2{,}303$	

Mecânica Clássica

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad L_i = \sum_j I_{ij}\omega_j \qquad T_R = \sum_{ij} \frac{1}{2} I_{ij}\omega_i\omega_j \qquad I = \int r^2\, dm$$

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{e}}_r \qquad \mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta \qquad \mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

$$\mathbf{r} = \rho\hat{\mathbf{e}}_\rho + z\hat{\mathbf{e}}_z \qquad \mathbf{v} = \dot{\rho}\hat{\mathbf{e}}_\rho + \rho\dot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi + \dot{z}\hat{\mathbf{e}}_z \qquad \mathbf{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right)\hat{\mathbf{e}}_\rho + \left(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\right)\hat{\mathbf{e}}_\varphi + \ddot{z}\hat{\mathbf{e}}_z$$

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{e}}_r \qquad \begin{aligned}\mathbf{v} = {} & \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta \\ & + r\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\mathbf{a} = {} & \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}^2\theta\right)\hat{\mathbf{e}}_r \\ & + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta \\ & + \left(r\ddot{\varphi}\operatorname{sen}\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\right)\hat{\mathbf{e}}_\varphi\end{aligned}$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \qquad V(r) = -\int_{r_0}^{r} F(r')\mathrm{d}r' \qquad V_{\text{efetivo}} = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$\int_{R_0}^{R} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{E - V(r) - \frac{L}{2mr^2}}} = \sqrt{\frac{2}{m}}\,(t - t_0) \qquad \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2u^2}F(1/u), \quad u = \frac{1}{r}; \qquad \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2m}{L^2}\left[E - V(1/u)\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad L = T - V \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N} F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_k} \qquad Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\text{rotação}} = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\text{fixo}} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$$

$$H = \sum_{k=1}^{f} p_k\dot{q}_k - L; \qquad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}; \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Eletromagnetismo

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\vec{\ell} + \frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0 \qquad \nabla\times\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0 \qquad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0$$

$$\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = Q = \int \rho dV \qquad \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho$$

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\vec{\ell} - \frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = I = \int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} \qquad \nabla\times\mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon\mathbf{E} \qquad \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu\mathbf{H}$$

$$\oint \mathbf{P}\cdot d\mathbf{S} = -Q_P \qquad \nabla\cdot\mathbf{P} = -\rho_P \qquad \oint \mathbf{M}\cdot d\vec{\ell} = I_M \qquad \nabla\times\mathbf{M} = \mathbf{J}_M$$

$$V = -\int \mathbf{E}\cdot d\vec{\ell} \qquad \mathbf{E} = -\nabla V \qquad d\mathbf{H} = \frac{I d\vec{\ell}\times\hat{\mathbf{e}}_r}{4\pi r^2} \qquad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$$

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r \qquad dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{r} \qquad \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}) \qquad d\mathbf{F} = I d\vec{\ell}\times\mathbf{B}$$

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \qquad \nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

$$u = \frac{1}{2}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) \qquad \mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} \qquad \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}dV}{r}$$

$$(\rho = 0,\ \mathbf{J} = 0) \Rightarrow \nabla^2\mathbf{E} = \mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} \qquad n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

Relatividade

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \qquad x' = \gamma(x - Vt) \qquad t' = \gamma\left(t - Vx/c^2\right)$$

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - Vv_x/c^2} \qquad v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - Vv_x/c^2)} \qquad v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - Vv_x/c^2)}$$

$$E = mc^2 = \gamma m_0c^2 = m_0c^2 + K \qquad E = \sqrt{(pc)^2 + (m_0c^2)^2}$$

Mecânica Quântica

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = H\Psi(x,t) \qquad H = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$p_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \qquad [x,p_x] = i\hbar$$

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right) \qquad \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle\,, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

$$L_\pm = L_x \pm iL_y \qquad L_\pm Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m\pm 1)}\,Y_{\ell m\pm 1}(\theta,\varphi)$$

$$L_z = x\,p_y - y\,p_x \qquad L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\,; \quad [L_x,L_y] = i\hbar L_z$$

$$E_n^{(1)} = \langle n|\delta H|n\rangle \qquad E_n^{(2)} = \sum_{m/n}\frac{|\langle m|\delta H|n\rangle|^2}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}}\,, \quad \phi_n^{(1)} = \sum_{m/n}\frac{\langle m|\delta H|n\rangle}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}}\phi_m^{(0)}$$

$$\hat{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \qquad \sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\,, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\,, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Física Moderna

$$p = \frac{h}{\lambda} \qquad E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \qquad E_n = -Z^2\frac{hcR_H}{n^2}$$

$$R_T = \sigma T^4 \qquad \lambda_{max}T = b \qquad L = mvr = n\hbar$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta) \qquad n\lambda = 2d\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \Delta x\,\Delta p \geq \hbar/2$$

Termodinâmica e Mecânica Estatística

$U = TS - PV + \mu N$

$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V + \mu \mathrm{d}N$

$F = U - TS$

$G = F + PV$

$H = U + PV$

$\Phi = U - TS - \mu N = -pV$

$\mathrm{d}S = \mathrm{d}Q/T$

$S\mathrm{d}T - V\mathrm{d}P + N\mathrm{d}\mu = 0$

$Z = \sum_j e^{-\beta E_j}$

$U\mathrm{d}\left(\frac{1}{T}\right) + V\mathrm{d}\left(\frac{P}{T}\right) + N\mathrm{d}\left(\frac{\mu}{T}\right) = 0$

$Z(T,V,N) = \int \mathrm{d}\Omega\, \mathrm{e}^{-\beta E(\Omega)}$

$F(T,V,N) = -k_B T \ln Z(T,V,N)$

$\beta = \frac{1}{k_B T}$

$U(T,V,N) = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$

$\Xi(T,V,\mu) = \sum_N \int \mathrm{d}\Omega_N\, \mathrm{e}^{-\beta[E(\Omega_N) - \mu N]}$

$\Phi(T,V,\mu) = -k_B T \ln \Xi(T,V,\mu)$

$S = k_B \ln \Omega$

$\tilde{f}(p) = f(x(p)) - x(p)p$ (transf. de Legendre)

$PV = nRT, \quad U = C_V T$

$PV^\gamma =$ constante, $\quad \gamma = C_P/C_V = 1 + R/C_V$

$f_{FD}(\epsilon) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}$

$f_{BE}(\epsilon) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}$

$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,N} = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,N}$

$C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{P,N} = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{P,N}$

Resultados matemáticos úteis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1.3.5...(2n+1)}{(2n+1)2^n \alpha^n} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1/(1-q), \quad (q<1)$$

$$\int \frac{du}{u(u-1)} = \ln(1 - 1/u) \qquad e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

$$\int \frac{dz}{(a^2+z^2)^{1/2}} = \ln\left(z + \sqrt{z^2+a^2}\right) \qquad \ln N! \approx N \ln N - N$$

$$\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{x-1}}{e^z+1} dz = (1 - 2^{1-x})\, \Gamma(x)\, \zeta(x) \qquad (\text{para } x > 0)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{x-1}}{e^z-1} dz = \Gamma(x)\, \zeta(x) \qquad (\text{para } x > 1)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\, \operatorname{sen}(nx)\, dx = \pi\delta_{m,n} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\, \cos(nx)\, dx = \pi\delta_{m,n}$$

$$dV = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz \qquad dV = r^2 dr \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$Y_{0,0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \qquad Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \qquad Y_{1,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta e^{\pm i\phi}$$

$$Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left(3\cos^2\theta - 1\right) \qquad Y_{2,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta \cos\theta e^{\pm i\phi} \qquad Y_{2,\pm2} = \mp\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \operatorname{sen}^2\theta e^{\pm 2i\phi}$$

$$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x \qquad P_2(x) = (3x^2-1)/2$$

Solução geral para a Eq. de Laplace em coordenadas esféricas, com simetria azimutal:

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right) P_l(\cos\theta)$$

Coordenadas cartesianas

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{e}_z$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{e}_z \qquad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordenadas cilíndricas

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right]\hat{e}_\rho + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right]\hat{e}_\varphi + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right]\hat{e}_z$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial\rho}\hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\hat{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{e}_z \qquad \nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordenadas esféricas

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial(\mathrm{sen}\,\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial(A_\varphi)}{\partial\varphi}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left[\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial(\mathrm{sen}\,\theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\hat{e}_r$$

$$+\left[\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right]\hat{e}_\theta + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat{e}_\varphi$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\hat{e}_\varphi$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

Teoremas do Cálculo Vetorial

$$\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \int (\nabla\cdot\mathbf{A})\,dV \qquad \oint \mathbf{A}\cdot d\vec{\ell} = \int (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}$$