

EUF

Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

Para o segundo semestre de 2014

23 abril 2014

Parte 1

Instruções

- **Não escreva seu nome na prova.**
Ela deverá ser identificada apenas através do código (EUFxxx).
- Esta prova contém problemas de:
eletromagnetismo, física moderna e termodinâmica.
Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**.
O tempo mínimo de permanência na sala é de 60 minutos.
- Não é permitido o uso de calculadoras ou outros instrumentos eletrônicos.
- **Resolva cada questão na página correspondente do caderno de respostas.**
As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Qx) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas. Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas identificadas como **rascunho**, que se encontram no fim do caderno de respostas. Não as destaque. As folhas de rascunho serão descartadas e questões nelas resolvidas não serão consideradas.
- Não escreva nada no formulário.
Devolva-o ao fim da prova, pois será utilizado na prova de amanhã.

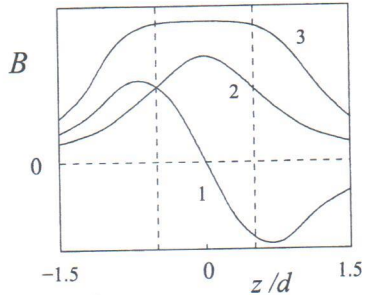
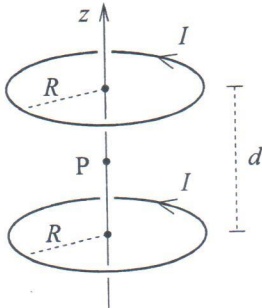
Boa prova!

Q1. Um capacitor esférico é composto por uma esfera condutora de raio R_1 , concêntrica com uma casca condutora esférica de raio R_2 e espessura desprezível, com $R_1 < R_2$. O condutor interno possui carga $+Q$ e o externo possui carga $-Q$.

- Calcule o campo elétrico e a densidade de energia em função de r , onde r é a distância radial a partir do centro dos condutores, para qualquer r .
- Determine a capacitância C do capacitor.
- Calcule a energia do campo elétrico armazenada em uma casca esférica de raio r , espessura dr e volume $4\pi r^2 dr$, localizada entre os condutores. Integre a expressão obtida para encontrar a energia total armazenada entre os condutores. Dê sua resposta em termos da carga Q e da capacitância C .

Q2. Duas bobinas idênticas, compostas cada uma por um anel de raio R e espessura desprezível, são montadas com seus eixos coincidentes com o eixo- z , conforme se vê na figura abaixo. Seus centros estão separados por uma distância d , com o ponto médio P coincidindo com a origem do eixo- z . Cada bobina transporta uma corrente elétrica total de intensidade I . Ambas as correntes têm o mesmo sentido anti-horário.

- Utilize a lei de Biot-Savart para determinar o campo magnético de uma única bobina ao longo de seu eixo de simetria.
- A partir do resultado anterior, obtenha o campo magnético $B(z)$ ao longo do eixo- z das duas bobinas.
- Admitindo que o espaçamento d seja igual ao raio R das bobinas, mostre que, no ponto P , as seguintes igualdades são válidas: $dB/dz = 0$ e $d^2B/dz^2 = 0$.
- Considerando os gráficos abaixo, de B (em unidades arbitrárias) versus z , qual curva descreve o campo magnético ao longo do eixo- z na configuração do item (b)? Justifique.
- Supondo que a corrente na bobina superior tenha seu sentido invertido, calcule o novo valor do campo magnético no ponto P .



Q3. A lei de radiação de Planck permite obter a seguinte densidade de energia do espectro de corpo negro de uma cavidade à temperatura T :

$$\rho(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

- (a) Expresse a densidade de energia em função do comprimento de onda $\lambda = c/\nu$ no lugar da frequência ν .
- (b) Mostre que para comprimentos de onda longos e altas temperaturas, o resultado anterior se reduz à lei clássica de Rayleigh-Jeans.
- (c) Obtenha a lei de Stefan-Boltzmann a partir da lei de radiação de Planck. Note que a radiância $R(\lambda)$, que é o fluxo de energia por unidade de área em uma pequena abertura da cavidade, é dada por $R(\lambda) = c\rho(\lambda)/4$.

Q4. Considere uma colisão relativística frontal completamente inelástica de duas partículas que se movem ao longo do eixo- x . Ambas as partículas possuem massa m . Antes da colisão, um observador A, em um referencial inercial, nota que elas se movem com velocidades constantes de mesma magnitude mas em direção opostas, isto é, a partícula 1 se move com velocidade v e a partícula 2 se move com velocidade $-v$. De acordo com outro observador B, entretanto, a partícula 1 está em repouso antes da colisão.

- (a) Determine a velocidade v'_x da partícula 2 medida pelo observador B antes da colisão.
- (b) Ache as velocidades v_A e v'_B da partícula resultante após a colisão, medidas, respectivamente, pelos observadores A e B.
- (c) Utilize a conservação relativística massa-energia para calcular a massa M da partícula resultante após a colisão.

Q5. A pressão p de um gás se comporta, como função da temperatura T e do volume molar v , de acordo com a seguinte equação de estado

$$p = \frac{RT}{v} - \frac{a}{v^2},$$

onde a é uma constante positiva e R é a constante universal dos gases.

- (a) Utilize a identidade

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p$$

para determinar a energia molar u como função de v .

- (b) Admitindo que $c_v = (\partial u / \partial T)_v$ seja constante e igual a c , ache u como função de T e v .
- (c) Numa expansão livre do gás, a temperatura cresce ou decresce? Leve em conta que numa expansão livre u permanece invariante e v cresce.
- (d) Demonstre a identidade do item (a).

EUF

Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

Para o segundo semestre de 2014

24 abril 2014

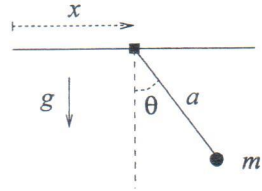
Parte 2

Instruções

- **Não escreva seu nome na prova.**
Ela deverá ser identificada apenas através do código (**EUFxxx**).
- Esta prova contém problemas de:
mecânica clássica, mecânica quântica e mecânica estatística.
Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**.
O tempo mínimo de permanência na sala é de 60 minutos.
- Não é permitido o uso de calculadoras ou outros instrumentos eletrônicos.
- **Resolva cada questão na página correspondente do caderno de respostas.**
As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Qx) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas. Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas identificadas como **rascunho**, que se encontram no fim do caderno de respostas. Não as destaque. As folhas de rascunho serão descartadas e questões nelas resolvidas não serão consideradas.
- Não é necessário devolver o formulário.

Boa prova!

Q6. Um pêndulo simples é constituído por uma partícula de massa m suspensa por um fio inextensível de comprimento a e massa desprezível. Seu ponto de suspensão é conectado a um suporte que se movimenta horizontalmente sem atrito como mostrado na figura. Suponha que o suporte seja muito pequeno e que o pêndulo se movimente apenas no plano vertical. Usando como coordenadas generalizadas x e θ , onde x é a posição horizontal do suporte e θ o deslocamento angular do pêndulo, conforme se vê na figura, o movimento do sistema é descrito pela lagrangiana:



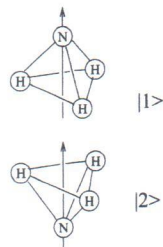
$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}(a^2\dot{\theta}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) + mga\cos\theta.$$

- Obtenha a equação de movimento para a coordenada θ .
- Admitindo que os deslocamentos angulares sejam pequenos e que o suporte esteja sujeito a um movimento harmônico forçado de frequência ω , isto é, descrito por $x(t) = x_0 \cos \omega t$, obtenha a solução geral $\theta(t)$ da equação do movimento para a coordenada θ .
- No caso do item anterior, obtenha a frequência de ressonância ω_R .
- Escreva a solução geral para $\theta(t)$, quando as condições iniciais forem $\theta(0) = 0$ e $\dot{\theta}(0) = 0$ e o suporte movimentar-se com frequência $\omega < \omega_R$.

Q7. Um átomo de trítio pode ser descrito *classicamente* como um núcleo com carga elétrica $+e$, composto por um próton e dois nêutrons, circundado por um elétron orbital de carga $-e$, o qual percorre uma órbita circular de raio r_0 . Em um processo conhecido como decaimento beta, o núcleo de trítio se transforma em um núcleo de hélio, composto por dois prótons e um nêutron, emitindo um par de partículas que rapidamente escapa do sistema atômico. Como consequência desse processo, o átomo de hélio fica ionizado uma vez, e o elétron orbital passa subitamente para uma nova situação, orbitando agora em torno de um núcleo de carga $+2e$.

- Supondo que o par de partículas que escapa do átomo tenha momento linear total de módulo p , obtenha a velocidade de recuo do átomo de hélio de massa M .
- Obtenha a energia E_a do elétron orbital antes do decaimento beta.
- Calcule a energia E_d do elétron orbital depois do decaimento beta e obtenha a razão $\rho = E_a/E_d$.
- Determine o momento angular total do elétron em função de r_0 e da massa m do elétron. Calcule a maior e a menor distância entre o elétron e o núcleo na nova órbita em termos de r_0 .

Q8. Considere os dois estados $|1\rangle$ e $|2\rangle$ da molécula de amônia ilustrados ao lado. Suponha que eles estão ortonormalizados, $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$ e que apenas esses dois estados sejam acessíveis ao sistema, de forma que podemos descrevê-lo usando a base formada por $|1\rangle$ e $|2\rangle$. Nessa base, o hamiltoniano H do sistema é dado por



$$H = \begin{pmatrix} E_0 & -E_1 \\ -E_1 & E_0 \end{pmatrix}$$

- (a) Se inicialmente o sistema estiver no estado $|1\rangle$, ele permanecerá no estado $|1\rangle$ em um instante posterior? E se estiver no estado $|2\rangle$, ele permanecerá no estado $|2\rangle$?
- (b) Ache os autovalores E_I e E_{II} e os respectivos autovetores $|I\rangle$ e $|II\rangle$ de H , expressando-os em termos de $|1\rangle$ e $|2\rangle$.
- (c) Baseado no resultado acima, podemos prever pelo menos uma frequência de emissão de radiação eletromagnética possível para uma molécula de amônia. Qual é essa frequência?
- (d) Ache a probabilidade de medirmos uma energia E_I no seguinte estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|1\rangle - \frac{2}{\sqrt{5}}|2\rangle.$$

Q9. Uma partícula quântica de massa m está sujeita a um potencial

$$V = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2).$$

- (a) Obtenha os níveis de energia dessa partícula. Isto é, determine os autovalores de

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi.$$

- (b) Considere o estado fundamental e os dois primeiros níveis excitados. Monte uma tabela mostrando para cada um desses três níveis, o valor da energia, a degenerescência e os respectivos estados em termos dos números quânticos.
- (c) Utilizando

$$\nabla^2\psi = \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2} \psi \right]$$

e lembrado que $L^2 Y_{\ell m} = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_{\ell m}$, escreva a equação diferencial do item (a) para a parte radial da função de onda (não é preciso resolvê-la). Identifique nessa equação o potencial efetivo $V_{\text{ef}}(r)$.

- (d) Resolva a equação diferencial do item anterior para o caso em que $\ell = 0$ e determine o autovalor correspondente. Para isso, admita uma solução do tipo $e^{-\alpha r^2}$ e determine α .

Q10. Considere um gás monoatômico clássico constituído por N átomos não interagentes de massa m confinados num recipiente de volume V , à temperatura T . A hamiltoniana correspondente a um átomo é dada por $\mathcal{H} = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m$.

- (a) Mostre que a função de partição canônica atômica é $\zeta = V/\lambda^3$, onde $\lambda = h/\sqrt{2\pi m k_B T}$ é o comprimento de onda térmico de de Broglie.
- (b) Utilizando ζ do item anterior, obtenha a função de partição Z do sistema e a energia livre de Helmholtz F . Obtenha, também, a energia livre por átomo $f = F/N$ no limite termodinâmico $N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$, $v = V/N$ fixo.
- (c) Obtenha a energia interna U e a pressão p do gás.
- (d) Calcule a entropia por átomo no limite termodinâmico.

EUF

**Exame Unificado
das Pós-graduações em Física**

Para o segundo semestre de 2014

23-24 abril 2014

FORMULÁRIO

Não escreva nada neste formulário. Devolva-o ao fim do primeiro dia de prova.

Constantes físicas

Velocidade da luz no vácuo	$c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$
Constante de Planck	$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ Js} = 4.14 \times 10^{-15} \text{ eV s}$
	$hc = 1240 \text{ eV nm}$
Constante de Wien	$W = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m K}$
Permeabilidade magnética do vácuo	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 = 12.6 \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$
Permissividade elétrica do vácuo	$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$
	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.99 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$
Constante gravitacional	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$
Carga elementar	$e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Massa do elétron	$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg} = 511 \text{ keV}/c^2$
Comprimento de onda Compton	$\lambda_C = 2.43 \times 10^{-12} \text{ m}$
Massa do próton	$m_p = 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg} = 938 \text{ MeV}/c^2$
Massa do neutrón	$m_n = 1.675 \times 10^{-27} \text{ kg} = 940 \text{ MeV}/c^2$
Massa do deuteron	$m_d = 3.344 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1876 \text{ MeV}/c^2$
Massa da partícula α	$m_\alpha = 6.645 \times 10^{-27} \text{ kg} = 3727 \text{ MeV}/c^2$
Constante de Rydberg	$R_H = 1.10 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \quad R_H h c = 13.6 \text{ eV}$
Raio de Bohr	$a_0 = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$
Constante de Avogadro	$N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K} = 8.62 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$
Constante universal dos gases	$R = 8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$

Raio do Sol	$= 6.96 \times 10^8 \text{ m}$	Massa do Sol	$= 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Raio da Terra	$= 6.37 \times 10^6 \text{ m}$	Massa da Terra	$= 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$
Distância Sol-Terra	$= 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$		

$$1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg} \quad 1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Constantes numéricas

$\pi \cong 3.142$	$\ln 2 \cong 0.693$	$\cos(30^\circ) = \sin(60^\circ) = \sqrt{3}/2 \cong 0.866$
$e \cong 2.718$	$\ln 3 \cong 1.099$	$\sin(30^\circ) = \cos(60^\circ) = 1/2$
$1/e \cong 0.368$	$\ln 5 \cong 1.609$	
$\log_{10} e \cong 0.434$	$\ln 10 \cong 2.303$	

Mecânica Clássica

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \qquad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad L_i = \sum_j L_{ij} \omega_j \qquad T_R = \sum_{ij} \frac{1}{2} L_{ij} \omega_i \omega_j \qquad I = \int r^2 \, dm$$

$$\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{e}}_r \qquad \mathbf{v} = \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta \qquad \mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \right) \hat{\mathbf{e}}_r + \left(r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} \right) \hat{\mathbf{e}}_\theta$$

$$\mathbf{r} = \rho \hat{\mathbf{e}}_\rho + z \hat{\mathbf{e}}_z \qquad \mathbf{v} = \dot{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\rho + \rho \dot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \dot{z} \hat{\mathbf{e}}_z \qquad \mathbf{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 \right) \hat{\mathbf{e}}_\rho + \left(\rho \ddot{\varphi} + 2 \dot{\rho} \dot{\varphi} \right) \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \ddot{z} \hat{\mathbf{e}}_z$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r \hat{\mathbf{e}}_r & \mathbf{v} &= \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ & & &+ r \dot{\varphi} \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\varphi & \mathbf{a} &= \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) \hat{\mathbf{e}}_r \\ & & & & &+ \left(r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ & & & & &+ \left(r \dot{\varphi} \sin \theta + 2 \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta + 2 r \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta \right) \hat{\mathbf{e}}_\varphi \end{aligned}$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \qquad V(r) = - \int_{r_0}^r F(r') dr' \qquad V_{\text{efetivo}} = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$\int_{R_0}^R \frac{dr}{\sqrt{E - V(r) - \frac{L}{2mr^2}}} = \sqrt{\frac{2}{m}} (t - t_0) \qquad \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = - \frac{m}{L^2 u^2} F(1/u), \quad u = \frac{1}{r} \qquad \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 = \frac{2m}{L^2} [E - V(1/u)]$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad L = T - V \qquad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^N F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \qquad Q_k = - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$$\left(\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right)_{\text{rotação}} = \left(\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right)_{\text{fixo}} - 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$$

$$H = \sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k - L; \qquad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \qquad \dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k}; \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

Eletrromagnetismo

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\vec{\ell} + \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q = \int \rho dV$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\vec{\ell} - \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu \mathbf{H}$$

$$\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = -Q_P$$

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_P$$

$$\oint \mathbf{M} \cdot d\vec{\ell} = I_M$$

$$\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_M$$

$$V = - \int \mathbf{E} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

$$d\mathbf{H} = \frac{I d\vec{\ell} \times \hat{e}_r}{4\pi r^2}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} \hat{e}_r$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r}$$

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$d\mathbf{F} = I d\vec{\ell} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$u = \frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} dV}{r}$$

$$(\rho = 0, \mathbf{J} = 0) \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{e}_r$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{e}_r$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

Relatividade

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$x' = \gamma (x - Vt)$$

$$t' = \gamma (t - Vx/c^2)$$

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - Vv_x/c^2}$$

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma (1 - Vv_x/c^2)}$$

$$v'_z = \frac{v_z}{\gamma (1 - Vv_x/c^2)}$$

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 + K$$

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2}$$

Mecânica Quântica

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = H \Psi(x,t)$$

$$p_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + i \frac{\hat{p}}{m\omega} \right)$$

$$L_{\pm} = L_x \pm i L_y$$

$$L_z = x p_y - y p_x$$

$$E_n^{(1)} = \langle n | \delta H | n \rangle$$

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$$

$$\tilde{\psi}(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3r \, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar} \psi(\vec{r})$$

$$H = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$[x,p_x]=i\hbar$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \; , \qquad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

$$L_{\pm} Y_{lm}(\theta,\varphi) = \hbar \sqrt{l(l+1)-m(m\pm 1)} \; Y_{lm\pm 1}(\theta,\varphi)$$

$$L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} \; , \qquad [L_x,L_y] = i\hbar L_z$$

$$E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m | \delta H | n \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \; , \qquad \phi_n^{(1)} = \sum_{m \neq n} \frac{\langle m | \delta H | n \rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \phi_m^{(0)}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \; , \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3p \, e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar} \tilde{\psi}(\vec{p})$$

Física Moderna

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

$$E_n = -Z^2 \, \frac{hcR_H}{n^2}$$

$$R_T = \sigma T^4$$

$$\lambda_{\text{max}}T = b$$

$$L = mvr = n\hbar$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos \theta)$$

$$n\lambda = 2d \sin \theta$$

$$\Delta x \, \Delta p \geq \hbar/2$$

Termodinâmica e Mecânica Estatística

$$dU = dQ - dW$$

$$dU = TdS - pdV + \mu dN$$

$$dF = -SdT - pdV + \mu dN$$

$$dH = TdS + Vdp + \mu dN$$

$$dG = -SdT + Vdp + \mu dN$$

$$d\Phi = -SdT - pdV - Nd\mu$$

$$F = U - TS$$

$$G = F + pV$$

$$H = U + pV$$

$$\Phi = F - \mu N$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$$

$$C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p$$

$$\text{Gás Ideal: } pV = nRT \quad U = CT \quad pV^\gamma = \text{constante}$$

$$S = k_B \ln W$$

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$$

$$Z = \int d\gamma e^{-\beta E(\gamma)}$$

$$\beta = 1/k_B T$$

$$F = -k_B T \ln Z$$

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$$

$$\Xi = \sum_N Z_N e^{\beta \mu N}$$

$$\Phi = -k_B T \ln \Xi$$

$$f_{\text{FD}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1}$$

$$f_{\text{BE}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1}$$

Resultados matemáticos

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1.3.5 \dots (2n+1)}{(2n+1)2^n \alpha^n} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$$

$$\int \frac{du}{u(u-1)} = \ln(1-1/u)$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\int \frac{dz}{(a^2+z^2)^{1/2}} = \ln \left(z + \sqrt{z^2+a^2} \right)$$

$$\ln N! \approx N \ln N - N$$

$$\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+u}{1-u} \right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha t^2) dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int \frac{1}{a^2+y^2} dy = \frac{1}{a} \arctan \frac{y}{a}$$

$$\int \frac{x}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(a^2+x^2)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{x-1}}{e^z+1} dz = (1-2^{1-x}) \Gamma(x) \zeta(x) \quad (x > 0)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{x-1}}{e^z-1} dz = \Gamma(x) \zeta(x) \quad (x > 1)$$

$$\Gamma(2) = 1 \quad \Gamma(3) = 2 \quad \Gamma(4) = 6 \quad \Gamma(5) = 24$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = 1.645 \quad \zeta(3) = 1.202 \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} = 1.082 \quad \zeta(5) = 1.037$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \pi \delta_{m,n}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \pi \delta_{m,n}$$

$$dx dy dz = \rho d\rho d\phi dz$$

$$dx dy dz = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$$

$$Y_{0,0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

$$Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$Y_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}$$

$$Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$Y_{2,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi}$$

$$Y_{2,\pm 2} = \mp \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$$

Solução geral para a equação de Laplace em coordenadas esféricas, com simetria azimutal:

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV \qquad \oint \mathbf{A} \cdot d\vec{\ell} = \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

Coordenadas cartesianas

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{e}_z$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z \qquad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordenadas cilíndricas

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] \hat{e}_\rho + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] \hat{e}_\varphi + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right] \hat{e}_z$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z \qquad \nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordenadas esféricas

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\varphi)}{\partial \varphi}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right] \hat{e}_r \\ & + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right] \hat{e}_\theta + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{e}_\varphi \end{aligned}$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$