EUF

Exame Unificado das Pós-graduações em Física

Para o primeiro semestre de 2015

14 outubro 2014

Parte 1

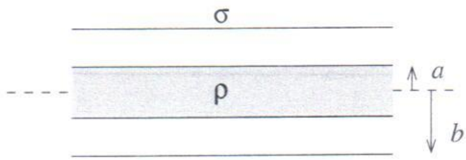
Instruções

- **Não escreva seu nome na prova.**
  Ela deverá ser identificada apenas através do código (**EUFxxx**).
- Esta prova contém problemas de:
  eletromagnetismo, física moderna e termodinâmica.
  Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**.
  O tempo mínimo de permanência na sala é de 60 minutos.
- Não é permitido o uso de calculadoras ou outros instrumentos eletrônicos.
- **Resolva cada questão na página correspondente do caderno de respostas.**
  As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Qx) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas. Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas identificadas como **rascunho**, que se encontram no fim do caderno de respostas. Não as destaque. As folhas de rascunho serão descartadas e questões nelas resolvidas não serão consideradas.
- Não escreva nada no formulário.
  Devolva-o ao fim da prova, pois será utilizado na prova de amanhã.

Boa prova!

Q1. a) Um cilíndrico dielétrico maciço, de comprimento infinito e raio a, possui uma densidade de carga volumétrica uniforme e positiva ρ. Uma casca cilíndrica, também dielétrica, de raio $b > a$, com eixo comum ao cilindro, tem uma densidade de carga superficial uniforme e negativa σ, de forma que a carga total do cilidro mais casca, em certo comprimento, é zero, e portanto $\sigma = -\rho a^2/2b$. Calcule o campo elétrico $\vec{E}(r)$ para as regiões $r < a$, $a < r < b$ e $b < r$ sendo r a distância ao eixo do cilindro.

b) Considere em seguida que o conjunto cilindro mais casca se move para a direita com velocidade $\vec{v}$. O movimento dá origem a uma corrente elétrica $I = \pi a^2 \rho v$ no cilindro maciço, para a direita e uniformemente distribuida na seção reta, de forma que a densidade de corrente fica sendo dada por $\vec{J} = \rho\vec{v}$. Da mesma forma, a casca em movimento dá origem a uma corrente de mesma intensidade I, mas em sentido contrário (para a esquerda). Calcule a indução magnética $\vec{B}$ para as regiões $r < a$, $a < r < b$ e $b < r$.



Q2. O campo elétrico de uma onda plana monocromática no vácuo é dado por

$$\vec{E}(z,t) = (E_1\,\hat{x} + E_2\,\hat{y})e^{i(kz-\omega t)},$$

onde $\hat{x}$ e $\hat{y}$ são versores cartesianos nas direções x e y, respectivamente, e E_1 e E_2 são constantes.

a) Encontre a indução magnética $\vec{B}(z,t)$.

b) Mostre que o campo elétrico e a indução magnética são ortogonais entre si.

c) Encontre o vetor de Poynting da onda.

Q3. Considere um gás de moléculas diatômicas com frequência de oscilação ω e momento de inércia I. À temperatura ambiente, as energias dos estados moleculares vibracionais são muito maiores do que k_BT. Portanto, a maioria das moléculas se encontra no estado vibracional de menor energia. Por outro lado, a energia característica dos estados rotacionais é muito menor do que k_BT. A energia rotacional-vibracional $E(n,\ell)$ do estado de uma molécula diatômica é caraterizada pelo número quântico n, para a energia vibracional, e pelo número quântico ℓ, para a energia rotacional.

a) Escreva $E(n,\ell)$ para $n = 0$ e ℓ qualquer.

b) Suponha que uma molécula sofra uma transição de um estado inicial com $n = 0$ e ℓ qualquer para um estado excitado com $n = 1$. Determine as duas energias totais permitidas para a molécula após a transição, lembrando que a regra de seleção impõe $\Delta\ell = \pm 1$. Calcule a diferença de energia entre esses dois estados permitidos e o estado inicial, bem como as respectivas frequências de transição.

c) Considere o estado da molécula no qual $n = 0$ e ℓ qualquer. Sabendo que a degenerescência do estado é $2\ell + 1$, determine a população do estado rotacional-vibracional, $N(E)$, como função de E, a partir da distribuição de Boltzmann.

d) Para $n = 0$, o estado $\ell = 0$ não é o estado mais populado à temperatura ambiente. Para pequenos valores de ℓ, a população do estado aumenta ligeiramente em relação a $\ell = 0$ por causa do aumento da densidade de estados. Para grandes valores de ℓ, a população diminui por causa do fator de Boltzmann. Determine o valor de ℓ para o qual a população é máxima.

Q4. Suponha que um fóton encontre um elétron que está inicialmente em repouso no referencial S, como na figura 1A. Na maioria das vezes, o fóton é simplesmente desviado da trajetória original, mas, ocasionalmente, o evento resulta no desaparecimento do fóton e na criação de um par elétron-pósitron, na presença do elétron original. Suponha que os detalhes da interação que produziu o par sejam tais que as três partículas resultantes se movam para direita, como na figura 1B, com a mesma velocidade u, isto é, que estejam todas em repouso no referencial S′, que está se movendo para a direita com velocidade u em relação a S.

a) Escreva as leis de conservação de energia e momento antes e depois da criação do par.

b) Usando a conservação da energia-momento no caso relativístico, obtenha no sistema S′ a energia do fóton para que seja criado um par de partículas com energia equivalente à energia de repouso de 2 elétrons.

c) Utilize a relação $m_0^2c^4 = E^2 - p^2c^2$ para obter a relação $u/c = pc/E$.

d) Determine a partir do item (c) a velocidade u com a qual as três partículas se movem no referencial S.

Figura 1: (A) Situação anterior à colisão, no referencial S. (B) Situação após a colisão, no referencial S.

Q5. Um gás ideal contido num recipiente, inicialmente com volume V_A e pressão p_A (estado A), sofre expansão isobárica até atingir o volume V_B (estado B). O gás sofre então uma expansão adiabática, até que sua pressão seja p_C (estado C), de forma que uma contração isobárica (até o estado D) seguida de uma compressão adiabática levem o gás novamente à situação inicial (estado A). Considere dada a razão γ entre os calores específicos do gás a pressão constante e a volume constante.

a) Represente as transformações descritas acima em um diagrama $p-V$, indicando os estados A, B, C e D.

(b) Calcule o calor trocado em cada trecho do ciclo, em termos de p_A, V_A, V_B, p_C e γ.

(c) Determine a eficiência do ciclo, isto é, a razão entre o trabalho realizado pelo gás e o calor absorvido por ele.

EUF

Exame Unificado das Pós-graduações em Física

Para o primeiro semestre de 2015

15 outubro 2014

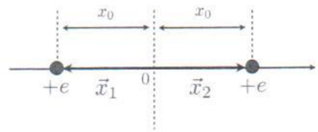
Parte 2

Instruções

- **Não escreva seu nome na prova.** Ela deverá ser identificada apenas através do código (**EUFxxx**).
- Esta prova contém problemas de: mecânica clássica, mecânica quântica e mecânica estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**. O tempo mínimo de permanência na sala é de 60 minutos.
- Não é permitido o uso de calculadoras ou outros instrumentos eletrônicos.
- **Resolva cada questão na página correspondente do caderno de respostas.** As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Qx) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas. Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas identificadas como **rascunho**, que se encontram no fim do caderno de respostas. Não as destaque. As folhas de rascunho serão descartadas e questões nelas resolvidas não serão consideradas.
- Não é necessário devolver o formulário.

Boa prova!

Q6. É possível construir armadilhas capazes de confinar íons de massa m e carga q. Em particular, a armadilha pode restringir o movimento dos íons a apenas uma dada direção espacial, x. Assim, considere dois íons de cálcio uma vez ionizado (Ca^+), submetidos a um potencial confinante externo harmônico $U(x) = m\omega^2 x^2/2$. Esses íons interagem adicionalmente através da repulsão coulombiana,



$$F_C = \frac{e^2}{(x_1 - x_2)^2}$$

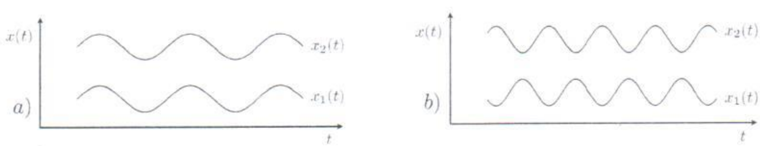
onde x_1 e x_2 são as posições dos íons de cálcio e, por simplicidade, foi definido: $e^2 = q^2/(4\pi\varepsilon_0)$. A figura acima define um sistema de coordenadas conveniente e representa os íons na posição de equilíbrio em que $-x_1 = x_2 = x_0$. O objetivo deste problema é estudar os modos normais dessa cadeia unidimensional constituida pelos dois íons de cálcio.

a) Obtenha a posição de equilibrio x_0 em termos de e, m e ω.

b) Escreva as equações de Newton para o movimento de cada íon e obtenha a frequência de oscilação do sistema quando a separação entre os íons for constante. Este é o primeiro modo normal de oscilação dessa cadeia.

c) O segundo modo normal corresponde a um movimento antissimétrico dos íons, em cujo caso o centro de massa está parado em $x = 0$. Obtenha esse segundo modo normal no limite de pequenas oscilações. Obtenha a razão entre as frequências dos dois modos normais de oscilação do sistema.

d) As figuras a) e b) abaixo representam os modos normais de oscilação desse sistema de dois íons. Identifique o primeiro e o segundo modo normal obtidos, respectivamente, nos itens b e c acima. Qual deles tem menor energia?



Q7. Um satélite artificial de massa m está em órbita elíptica em torno da Terra. Admita que a Terra seja uma esfera de densidade uniforme com raio R e massa M, e denote por G a constante de gravitação universal. Considere conhecidos d e D, as distâncias entre o centro da Terra e o satélite nos pontos de menor e maior afastamento, respectivamente. Uma partícula de massa m_0 menor do que m, choca-se centralmente e de forma completamente inelástica com o satélite no ponto de menor afastamento da Terra. No instante da colisão, o satélite e a partícula tinham velocidades iguais em módulo, mas com sentidos opostos.

a) Obtenha a velocidade v_S do sistema satélite-partícula *imediatamente após* a colisão em termos de v_p, a velocidade no ponto de menor afastamento.

b) Expresse o momento angular do satélite nos pontos de mínimo e máximo afastamento em termos de v_p e de v_a (a velocidade no ponto de maior afastamento), respectivamente, antes da colisão.

c) Obtenha a velocidade v_p, antes da colisão, em termos de M, d, D e G.

d) Obtenha a energia E_S e o momento angular L_S do sistema satélite-partícula. depois da colisão, em termos de m_0 e das grandezas que caracterizam o movimento do satélite antes da colisão.

Q8. Seja o estado do spin de um elétron dado por

$$|\psi\rangle = \alpha\left(|z_+\rangle - \frac{\sqrt{2}}{2}|z_-\rangle\right)$$

$$|z_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |z_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lembrando que os operadores de spin $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$, $\hat{S}_z$ podem ser escritos em termos das matrizes de Pauli como $\hat{\mathbf{S}} = \hbar\,\vec{\sigma}/2$ (veja formulário), onde

$$\begin{aligned} \hat{S}_x|x_+\rangle &= +\frac{\hbar}{2}|x_+\rangle, & \hat{S}_x|x_-\rangle &= -\frac{\hbar}{2}|x_-\rangle, \\ \hat{S}_y|y_+\rangle &= +\frac{\hbar}{2}|y_+\rangle, & \hat{S}_y|y_-\rangle &= -\frac{\hbar}{2}|y_-\rangle, \\ \hat{S}_z|z_+\rangle &= +\frac{\hbar}{2}|z_+\rangle, & \hat{S}_z|z_-\rangle &= -\frac{\hbar}{2}|z_-\rangle, \end{aligned}$$

a) Qual é o valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que $|\psi\rangle$ fique normalizado?

b) Qual é a probabilidade de se medir $-\hbar/2$ para o spin na direção z?

c) Qual é a probabilidade de se medir $+\hbar/2$ para o spin na direção x?

d) Qual é o valor esperado do spin no plano $y = 0$ em uma direção de 45^0 entre os eixos x e z?

Q9. Seja o operador $\hat{A}$ associado a um certo observável físico A de um sistema satisfazendo $[\hat{A},\hat{H}] \neq 0$, onde $\hat{H}$ é um operador hamiltoniano independente do tempo. Sejam agora os autovetores normalizados, ϕ_+, ϕ_-, e autovalores correspondentes, a_+, a_- ($a_+ \neq a_-$) de $\hat{A}$:

$$\hat{A}\phi_+ = a_+\phi_+, \qquad \hat{A}\phi_- = a_-\phi_-,$$

com

$$\phi_+ = \frac{u_+ + u_-}{\sqrt{2}}, \qquad \phi_- = \frac{u_+ - u_-}{\sqrt{2}}$$

onde

$$\hat{H}u_+ = E_+u_+, \qquad \hat{H}u_- = E_-u_-$$

a) Calcule o valor esperado de $\hat{A}$ no estado ϕ_+.

b) Calcule a projeção de $\hat{H}u_+$ no estado u_-.

c) Admitindo que o sistema esteja inicialmente em um estado arbitrário, $\psi(0)$ escreva quanto valerá o estado $\psi(t)$ em um instante posterior como função de $\hat{H}$.

d) Calcule o valor esperado do observável A no instante $t = \hbar\pi/[3(E_+ - E_-)]$ admitindo que o sistema esteja inicialmente no estado $\psi(0) = \phi_+$ e $E_+ \neq E_-$.

Q10. Considere N osciladores harmônicos tridimensionais clássicos não-interagentes, de massa m e frequência angular ω, em contato com um reservatório térmico à temperatura T.

a) Escreva a hamiltoniana do sistema e obtenha a função de partição canônica.

b) Obtenha o valor médio da energia por oscilador. Qual a capacidade térmica do sistema?

EUF

Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

Para o primeiro semestre de 2015

14-15 outubro 2014

FORMULÁRIO

Não escreva nada neste formulário. Devolva-o ao fim do primeiro dia de prova.

Constantes físicas

Velocidade da luz no vácuo	$c = 3{,}00\times10^{8}$ m/s
Constante de Planck	$h = 6{,}63\times10^{-34}$ J s $= 4{,}14\times10^{-15}$ eV s
	$hc = 1240$ eV nm
Constante de Wien	$W = 2{,}898\times10^{-3}$ m K
Permeabilidade magnética do vácuo	$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ N/A^2 $= 12{,}6\times10^{-7}$ N/A^2
Permissividade elétrica do vácuo	$\epsilon_0 = \dfrac{1}{\mu_0 c^2} = 8{,}85\times10^{-12}$ F/m
	$\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8{,}99\times10^{9}$ Nm^2/C^2
Constante gravitacional	$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2/kg^2
Carga elementar	$e = 1{,}60\times10^{-19}$ C
Massa do elétron	$m_e = 9{,}11\times10^{-31}$ kg $= 511$ keV/c^2
Comprimento de onda Compton	$\lambda_C = 2{,}43\times10^{-12}$ m
Massa do próton	$m_p = 1{,}673\times10^{-27}$ kg $= 938$ MeV/c^2
Massa do nêutron	$m_n = 1{,}675\times10^{-27}$ kg $= 940$ MeV/c^2
Massa do dêuteron	$m_d = 3{,}344\times10^{-27}$ kg $= 1.876$ MeV/c^2
Massa da partícula α	$m_\alpha = 6{,}645\times10^{-27}$ kg $= 3.727$ MeV/c^2
Constante de Rydberg	$R_H = 1{,}10\times10^{7}$ m^{-1}, $R_H hc = 13{,}6$ eV
Raio de Bohr	$a_0 = 5{,}29\times10^{-11}$ m
Constante de Avogadro	$N_A = 6{,}02\times10^{23}$ mol^{-1}
Constante de Boltzmann	$k_B = 1{,}38\times10^{-23}$ J/K $= 8{,}62\times10^{-5}$ eV/K
Constante universal dos gases	$R = 8{,}31$ J mol^{-1} K^{-1}
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5{,}67\times10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}

Raio do Sol	=	$6{,}96\times10^{8}$ m	Massa do Sol	=	$1{,}99\times10^{30}$ kg
Raio da Terra	=	$6{,}37\times10^{6}$ m	Massa da Terra	=	$5{,}98\times10^{24}$ kg
Distância Sol-Terra	=	$1{,}50\times10^{11}$ m			

1 J $= 10^7$ erg   1 eV $= 1{,}60\times10^{-19}$ J

Constantes numéricas

$\pi \cong 3{,}142$	$\ln 2 \cong 0{,}693$	$\cos(30°) = \sin(60°) = \sqrt{3}/2 \cong 0{,}866$
$e \cong 2{,}718$	$\ln 3 \cong 1{,}099$	$\sin(30°) = \cos(60°) = 1/2$
$1/e \cong 0{,}368$	$\ln 5 \cong 1{,}609$	
$\log_{10} e \cong 0{,}434$	$\ln 10 \cong 2{,}303$	

Mecânica Clássica

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad L_i = \sum_j I_{ij}\omega_j \qquad T_R = \sum_{ij} \frac{1}{2} I_{ij}\omega_i\omega_j \qquad I = \int r^2 \, dm$$

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathrm{e}}_r \qquad \mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathrm{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathrm{e}}_\theta \qquad \mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathrm{e}}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\mathrm{e}}_\theta$$

$$\mathbf{r} = \rho\hat{\mathrm{e}}_\rho + z\hat{\mathrm{e}}_z \qquad \mathbf{v} = \dot{\rho}\hat{\mathrm{e}}_\rho + \rho\dot{\varphi}\hat{\mathrm{e}}_\varphi + \dot{z}\hat{\mathrm{e}}_z \qquad \mathbf{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right)\hat{\mathrm{e}}_\rho + \left(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\right)\hat{\mathrm{e}}_\varphi + \ddot{z}\hat{\mathrm{e}}_z$$

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathrm{e}}_r \qquad \begin{aligned}\mathbf{v} = {} & \dot{r}\hat{\mathrm{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathrm{e}}_\theta \\ & + r\dot{\varphi}\sin\theta\hat{\mathrm{e}}_\varphi\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\mathbf{a} = {} & \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\hat{\mathrm{e}}_r \\ & + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\mathrm{e}}_\theta \\ & + \left(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\right)\hat{\mathrm{e}}_\varphi\end{aligned}$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \qquad V(r) = -\int_{r_0}^{r} F(r')\mathrm{d}r' \qquad V_{\text{efetivo}} = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$\int_{R_0}^{R} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{E - V(r) - \frac{L}{2mr^2}}} = \sqrt{\frac{2}{m}}\,(t - t_0) \qquad \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2u^2}F\left(1/u\right), \quad u = \frac{1}{r}; \qquad \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2m}{L^2}\left[E - V(1/u)\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad L = T - V \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N} F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_k} \qquad Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\text{rotação}} = \left(\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\text{fixo}} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$$

$$H = \sum_{k=1}^{f} p_k\dot{q}_k - L; \qquad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}; \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Eletromagnetismo

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\vec{\ell} + \frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0 \qquad \nabla\times\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0 \qquad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0$$

$$\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = Q = \int \rho dV \qquad \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho$$

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\vec{\ell} - \frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = I = \int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} \qquad \nabla\times\mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon\mathbf{E} \qquad \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M}) = \mu\mathbf{H}$$

$$\oint \mathbf{P}\cdot d\mathbf{S} = -Q_P \qquad \nabla\cdot\mathbf{P} = -\rho_P \qquad \oint \mathbf{M}\cdot d\vec{\ell} = I_M \qquad \nabla\times\mathbf{M} = \mathbf{J}_M$$

$$V = -\int \mathbf{E}\cdot d\vec{\ell} \qquad \mathbf{E} = -\nabla V \qquad d\mathbf{H} = \frac{I d\vec{\ell}\times\hat{e}_r}{4\pi r^2} \qquad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$$

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{r^2}\hat{e}_r \qquad dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{r} \qquad \mathbf{F} = q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}) \qquad d\mathbf{F} = I d\vec{\ell}\times\mathbf{B}$$

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \qquad \nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

$$u = \frac{1}{2}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) \qquad \mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} \qquad \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J} dV}{r}$$

$$(\rho = 0, \mathbf{J} = \mathbf{0}) \Rightarrow \nabla^2\mathbf{E} = \mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} \qquad n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\hat{e}_r \qquad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{r} \qquad \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{e}_r \qquad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}$$

Relatividade

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \qquad x' = \gamma(x - Vt) \qquad t' = \gamma\left(t - Vx/c^2\right)$$

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - Vv_x/c^2} \qquad v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - Vv_x/c^2)} \qquad v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - Vv_x/c^2)}$$

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 + K \qquad E = \sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2}$$

Mecânica Quântica

$$i\hbar\,\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = H\Psi(x,t) \qquad H = \frac{-\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}\,r + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$p_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \qquad [x, p_x] = i\hbar$$

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right) \qquad \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle\,, \qquad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

$$L_\pm = L_x \pm iL_y \qquad L_\pm Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}\;Y_{\ell m\pm 1}(\theta,\varphi)$$

$$L_z = x\,p_y - y\,p_x \qquad L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\,, \qquad [L_x,L_y] = i\hbar L_z$$

$$E_n^{(1)} = \langle n|\delta H|n\rangle \qquad E_n^{(2)} = \sum_{m\neq n}\frac{|\langle m|\delta H|n\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}\,, \qquad \phi_n^{(1)} = \sum_{m\neq n}\frac{\langle m|\delta H|n\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}\phi_m^{(0)}$$

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \qquad \sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\,, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\,, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\bar{\psi}(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int d^3r\,e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}\,\psi(\vec{r}) \qquad \psi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int d^3p\,e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}\,\bar{\psi}(\vec{p})$$

Física Moderna

$$p = \frac{h}{\lambda} \qquad E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \qquad E_n = -Z^2\,\frac{hcR_H}{n^2}$$

$$R_T = \sigma T^4 \qquad \lambda_{\max}T = b \qquad L = mvr = n\hbar$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta) \qquad n\lambda = 2d\sin\theta \qquad \Delta x\,\Delta p \geq \hbar/2$$

Termodinâmica e Mecânica Estatística

$dU = dQ - dW$ $\qquad$ $dU = TdS - pdV + \mu dN$

$dF = -SdT - pdV + \mu dN$ $\qquad$ $dH = TdS + Vdp + \mu dN$

$dG = -SdT + Vdp + \mu dN$ $\qquad$ $d\Phi = -SdT - pdV - Nd\mu$

$F = U - TS$ $\qquad$ $G = F + pV$

$H = U + pV$ $\qquad$ $\Phi = F - \mu N$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T \qquad S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \qquad C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p$$

Gás ideal: $\quad pV = nRT, \quad U = ncT, \quad pV^\gamma = \text{const.}, \quad \gamma = (c+R)/c$

$S = k_B \ln W$

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} \qquad Z = \int d\gamma e^{-\beta E(\gamma)} \qquad \beta = 1/k_B T$$

$$F = -k_B T \ln Z \qquad U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$$

$$\Xi = \sum_N Z_N e^{\beta\mu N} \qquad \Phi = -k_B T \ln \Xi$$

$$f_{\mathrm{FD}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \qquad f_{\mathrm{BE}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}$$

Resultados matemáticos

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} \mathrm{e}^{-\alpha x^2} \mathrm{d}x = \frac{1.3.5...(2n+1)}{(2n+1)2^n \alpha^n} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad (|x|<1)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u(u-1)} = \ln(1-1/u)$$

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{(a^2+z^2)^{1/2}} = \ln\left(z+\sqrt{z^2+a^2}\right)$$

$$\ln N! \approx N\ln N - N$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha t^2)\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int \frac{1}{a^2+y^2}\, dy = \frac{1}{a}\arctan\frac{y}{a}$$

$$\int \frac{x}{a^2+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\ln(a^2+x^2)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{x-1}}{e^z+1}\, dz = (1-2^{1-x})\,\Gamma(x)\,\zeta(x) \qquad (x>0)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{x-1}}{e^z-1}\, dz = \Gamma(x)\,\zeta(x) \qquad (x>1)$$

$$\Gamma(2)=1 \qquad \Gamma(3)=2 \qquad \Gamma(4)=6 \qquad \Gamma(5)=24$$

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}=1{,}645 \qquad \zeta(3)=1{,}202 \qquad \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}=1{,}082 \qquad \zeta(5)=1{,}037$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\ \sin(nx)\ dx = \pi\delta_{m,n} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\ \cos(nx)\ dx = \pi\delta_{m,n}$$

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z \qquad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r^2\mathrm{d}r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

$$Y_{0,0}=\sqrt{\frac{1}{4\pi}} \qquad Y_{1,0}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \qquad Y_{1,\pm1}=\mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\mathrm{e}^{\pm i\phi}$$

$$Y_{2,0}=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta-1\right) \qquad Y_{2,\pm1}=\mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{e}^{\pm i\phi} \qquad Y_{2,\pm2}=\mp\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\mathrm{e}^{\pm 2i\phi}$$

$$P_0(x)=1 \qquad P_1(x)=x \qquad P_2(x)=(3x^2-1)/2$$

Solução geral para a equação de Laplace em coordenadas esféricas, com simetria azimutal:

$$V(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}})\ P_l(\cos\theta)$$

$$\oint \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int (\nabla\cdot\mathbf{A})\,\mathrm{d}V \qquad\qquad \oint \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \int (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$$

Coordenadas cartesianas

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\mathrm{e}}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\mathrm{e}}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{\mathrm{e}}_z$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathrm{e}}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathrm{e}}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathrm{e}}_z \qquad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordenadas cilíndricas

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right]\hat{\mathrm{e}}_\rho + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right]\hat{\mathrm{e}}_\varphi + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right]\hat{\mathrm{e}}_z$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\mathrm{e}}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\mathrm{e}}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathrm{e}}_z \qquad \nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordenadas esféricas

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\varphi)}{\partial \varphi}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right]\hat{\mathrm{e}}_r$$

$$+ \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right]\hat{\mathrm{e}}_\theta + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\hat{\mathrm{e}}_\varphi$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathrm{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\mathrm{e}}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\mathrm{e}}_\varphi$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$