Problemas parcial II
Métodos Computacionales I

Edward Enrique Manosalva Pinto
Juan David Vasquez Hernandez

September 29, 2023

1 Ejercicios: Integración - 3.14.8

1.1 Ejercicio 1

Partiendo de la definición del polinomio interpolador en el conjunto $\Omega = ((a, f(a)), (b, f(b)))$ para el método de trapecio simple, tenemos:

$$f(x) \cong p_1(x) = \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b), \forall x \in [a,b] \tag{1}$$

De aquí es posible obtener la integral dada por la siguiente fórmula:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b p_1(x) = \int_a^b \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) \tag{2}$$

Si ahora desarrollamos la ecuación al interior, obtenemos lo siguiente...

$$\int_a^b \frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b) = \left(\frac{x^2}{2(a-b)} - \frac{xb}{a-b}\right)f(a)+\left(\frac{x^2}{2(b-a)} - \frac{xa}{b-a}\right)f(b)\Big|_a^b \tag{3}$$

Reemplazando ahora los límites a y b en la ecuación obtenida, se tiene...

$$\left(\frac{b^2}{2(a-b)} - \frac{b^2}{a-b}\right)f(a)+\left(\frac{b^2}{2(b-a)} - \frac{ba}{b-a}\right)f(b)-\left(\left(\frac{a^2}{2(a-b)} - \frac{ab}{a-b}\right)f(a) + \left(\frac{a^2}{2(b-a)} - \frac{a^2}{b-a}\right)f(b)\right) \tag{4}$$

Simplificando un poco los términos al volver similares los términos equivalentes, se tendría...

$$\left(\frac{b^2-2b^2}{2(a-b)}\right)f(a)+\left(\frac{b^2}{2(b-a)} - \frac{ba}{b-a}\right)f(b)-\left(\left(\frac{a^2}{2(a-b)} - \frac{ab}{a-b}\right)f(a) + \left(\frac{a^2-2a^2}{2(b-a)}\right)f(b)\right) \tag{5}$$

Ahora juntando los términos de a y b resultantes al evaluar los límites, tendríamos...

$$\frac{-a^2-b^2}{2(a-b)}f(a)+\left(\frac{b^2+a^2}{2(b-a)}\right)f(b)+\left(-\frac{ab}{b-a}\right)(f(b)+f(a)) \tag{6}$$

Factorizando un negativo del primer término, podemos juntar la función evaluada en a y b del primer término, obteniendo...

$$\frac{b^2+a^2}{2(b-a)}(f(b)+f(a))+\left(-\frac{ab}{b-a}\right)(f(b)+f(a)) \tag{7}$$

Si juntamos los factores que posee la suma entre $f(a)$ y $f(b)$ se obtiene...

$$\left(\frac{b^2+a^2}{2(b-a)}-\frac{2ab}{2(b-a)}\right)(f(b)+f(a)) \tag{8}$$

Al juntar todos los términos obtenemos una expresión factorizable como $(b-a)^2$, de lo cual...

$$\begin{aligned}\left(\frac{b^2-2ab+a^2}{2(b-a)}\right)(f(a)+f(b))\\ \frac{(b-a)^2}{2(b-a)}(f(a)+f(b))\end{aligned} \tag{9}$$

Simplificando, obtenemos la ecuación original del método de trapecio simple...

$$\left(\frac{b-a}{2}\right)(f(a)+f(b)) \tag{10}$$

1.2 Ejercicio 10

Partiendo de la integral que considera el error asociado a cada término de la regla de simspon basado en la partición del espacio $\frac{b-a}{3h}$, tenemos la siguiente integral...

$$E=\frac{f^{(4)}}{4!}\int_a^b(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)dx \tag{11}$$

Podemos aproximar la integral anterior de la siguiente forma...

$$I=\int_0^{3h}(x)(x-h)(x-2h)(x-3h)dx \tag{12}$$

Que al expandir la ecuación obtenemos...

$$I=\int_0^{3h}x^4-6hx^3+11h^2x^2-6h^3xdx \tag{13}$$

Si ahora resolvemos la integral, obtenemos...

$$I = \frac{x^5}{5} - \frac{6hx^4}{4} + \frac{11h^2x^3}{3} - \frac{6h^3x^2}{2}\Big|_0^{3h} \tag{14}$$

Al reemplazar el límite obtenemos...

$$I = \frac{243h^5}{5} - \frac{486h^5}{4} + \frac{297h^5}{3} - \frac{54h^5}{2} \tag{15}$$

Al simplificar los términos, al final se obtiene...

$$I = \frac{243h^5}{5} - \frac{243h^5}{2} + 72h^5 \tag{16}$$

Si colocamos el resultado de esta integral sobre la expresión original, se obtiene...

$$E = \frac{f^{(4)}}{4!}\left(\frac{243h^5}{5} - \frac{243h^5}{2} + 72h\right) = \frac{f^{(4)}}{24}\left(\frac{243h^5}{5} - \frac{243h^5}{2} + 72h^5\right) \tag{17}$$

Y una vez simplificamos los coeficientes, se obtiene...

$$E = -\frac{3}{80}h^5 f^{(4)} \tag{18}$$