Convolution de variables aléatoires de lois exponentielles ou Erlang

Jérémie Barde

13 août 2024

Résumé

Ce document fournit les démonstrations pour évaluer avec précision la convolution de variables aléatoires suivant des lois exponentielles ou Gamma, avec des paramètres β distincts. Il traite des cas spécifiques de la somme de deux variables aléatoires exponentielles, de deux variables Gamma, et de trois variables Gamma avec différents paramètres. Le document aborde également le cas de la loi Gamma bivariée CRMM. Chaque section inclut la démonstration ainsi qu'un exemple numérique pour illustrer les concepts.

Table des matières

1 Convolution de deux v.a. de loi exponentielle différentes

1.1 Preuve

Soit les variables indépendantes,

$$X_i \sim Exp(\beta_i),\ i \in \{1, 2\} \text{ et } \beta_1 < \beta_2.$$

On définit $S = X_1 + X_2$ et on veut démontrer que,

$$F_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_J(k) H(x; 2 + k, \beta_2)$$

(1) Résultat préliminaire : lemme 2020

$$\frac{\beta_1}{\beta_1 + t} = \frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \left(\frac{q}{1 - (1 - q)\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}} \right)$$

(2) Identifier la tls de S :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_S(t) &= \mathcal{L}_{X_1}(t) \times \mathcal{L}_{X_2}(t) \\
&= \frac{\beta_1}{\beta_1 - t} \times \frac{\beta_2}{\beta_2 - t} \\
&= \frac{\beta_2}{\beta_2 - t} \times \frac{q_1}{1 - (1 - q_1)\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}} \times \frac{\beta_2}{\beta_2 - t} \\
&= \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right)^2 \mathcal{P}_J \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right)
\end{aligned}$$

Où,

$$J \sim Geo\left(q_1 = \frac{\beta_1}{\beta_2} \right)$$

(3) On peut écrire les fgp sous forme de série de puissances :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_S(t) &= \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} f_J(k) \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} f_J(k) \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right)^{k+2}
\end{aligned}$$

(4) On déduit,

$$F_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_J(k) H(x; k + 2, \beta_2) \quad \square$$

1.2 Exemple numérique

Soit les v.a. $X_1 \sim Exp(\beta = 0.1)$, $X_1 \sim Exp(\beta = 0.2)$ et $S = X_1 + X_2$. Trouver $F_X(10)$, $VaR_{0.90}(X)$ et $TVaR_{0.90}(X)$.

```
b <- c(0.1, 0.2)
q <- b[1]/b[2]
k <- 0:1000
fj <- dgeom(k, q)
sum(fj)

Fs <- function(x) sum(fj * pgamma(x, k + 2, b[2]))
Fs(10)
# 0.3995764

u <- 0.9
VaR <- optimize(function(x) abs(Fs(x) - u), c(0, 250))$min
# 29.6974

TVaR <- 1/(1 - u) * sum(fj * (k + 2)/b[2] * pgamma(VaR, k + 3, b[2], low=F))
# 39.82902
```

2 Convolution de deux v.a. de loi gamma différentes

2.1 Preuve

Soit les variables indépendantes,

$$X_i \sim Gamma(\alpha_i, \beta_i),\ i \in \{1,2\} \text{ et } \beta_1 < \beta_2.$$

On définit $S = X_1 + X_2$ et on veut démontrer que,

$$F_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_J(k) H(x; \alpha_1 + \alpha_2 + k, \beta_2)$$

(1) Résultat préliminaire : lemme 2020

$$\frac{\beta_1}{\beta_1 + t} = \frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \left(\frac{q}{1 - (1-q)\frac{\beta_2}{\beta_2+t}} \right)$$

(2) Identifier la tls de S :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_S(t) &= \mathcal{L}_{X_1}(t) \times \mathcal{L}_{X_2}(t) \\
&= \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + t} \right)^{\alpha_1} \times \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right)^{\alpha_2} \\
&= \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{q_1}{1 - (1-q_1)\frac{\beta_2}{\beta_2+t}} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right)^{\alpha_2} \\
&= \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right)^{\alpha_1+\alpha_2} \mathcal{P}_J\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right)
\end{aligned}$$

Où,

$$J \sim BinNeg\left(\alpha_1,\ q_1 = \frac{\beta_1}{\beta_2} \right),\ \alpha_i \in \mathbb{R}^+$$

(3) On peut écrire les fgp sous forme de série de puissances :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_S(t) &= \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right)^{\alpha_1+\alpha_2} \sum_{k=0}^{\infty} f_J(k) \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right)^{k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} f_J(k) \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right)^{\alpha_1+\alpha_2+k}
\end{aligned}$$

(4) On déduit,

$$F_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_J(k) H(x; \alpha_1 + \alpha_2 + k, \beta_2) \quad \square$$

2.2 Exemple numérique

Soit les v.a. $X_1 \sim Gamma(\alpha = 3.2, \beta = 0.1)$, $X_2 \sim Gamma(\alpha = 5, \beta = 0.2)$ et $S = X_1 + X_2$. Trouver $F_S(50)$, $VaR_{0.90}(X)$ et $TVaR_{0.90}(X)$.

```
b <- c(0.1, 0.2)
a <- c(3.2, 5)
atot <- sum(a)
q <- b[1]/b[2]
k <- 0:1000
fj <- dnbinom(k, a[1], q)
sum(fj)

Fs <- function(x) sum(fj * pgamma(x, k + atot, b[2]))
Fs(50)
# 0.4149836

u <- 0.9
VaR <- optimize(function(x) abs(Fs(x) - u), c(0, 300))$min
# 85.07405

TVaR <- 1/(1 - u) * sum(fj * (k + atot)/b[2] * pgamma(VaR, k + atot + 1, b[2], low=F))
# 99.78886
```

3 Convolution de trois v.a. de loi gamma différente

3.1 Preuve

Soit les variables indépendantes,

$$X_i \sim Gamma(\alpha_i, \beta_i),\ i \in \{1,2,3\} \text{ et } \beta_1 < \beta_2 < \beta_3.$$

On définit $S = X_1 + X_2 + X_3$ et on veut démontrer que,

$$F_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_M(k) \cdot H(x; \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + k, \beta_3)$$

(1) Résultat préliminaire : lemme 2020

$$\frac{\beta_1}{\beta_1 + t} = \frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\left(\frac{q}{1-(1-q)\frac{\beta_2}{\beta_2+t}}\right)$$

(2) Identifier la TLS de S :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_S(t) &= \mathcal{L}_{X_1}(t) \times \mathcal{L}_{X_2}(t) \times \mathcal{L}_{X_3}(t) \\
&= \left(\frac{\beta_1}{\beta_1+t}\right)^{\alpha_1} \times \left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)^{\alpha_2} \times \left(\frac{\beta_3}{\beta_3+t}\right)^{\alpha_3} \\
&= \left(\frac{\beta_3}{\beta_3+t}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{q_1}{1-(1-q_1)\frac{\beta_3}{\beta_3+t}}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\beta_3}{\beta_3+t}\right)^{\alpha_2}\left(\frac{q_2}{1-(1-q_2)\frac{\beta_3}{\beta_3+t}}\right)^{\alpha_2}\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+t}\right)^{\alpha_3} \\
&= \left(\frac{\beta_3}{\beta_3+t}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\mathcal{P}_{J_1}\left(\frac{\beta_3}{\beta_3+t}\right)\mathcal{P}_{J_2}\left(\frac{\beta_3}{\beta_3+t}\right)
\end{aligned}$$

Où,

$$J_1 \sim BinNeg\left(\alpha_1,\ q_1 = \frac{\beta_1}{\beta_3}\right), \quad J_2 \sim BinNeg\left(\alpha_2,\ q_2 = \frac{\beta_2}{\beta_3}\right),\ \alpha_i \in \mathbb{R}^+$$

(3) On peut écrire les fgp sous forme de série de puissances :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_S(t) &= \left(\frac{\beta_3}{\beta_3+t}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\sum_{k=0}^{\infty} f_{J_1}(k)\left(\frac{\beta_3}{\beta_3+t}\right)^k \sum_{k=0}^{\infty} f_{J_2}(k)\left(\frac{\beta_3}{\beta_3+t}\right)^k \\
&= \left(\frac{\beta_3}{\beta_3+t}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k} f_{J_1}(i) f_{J_2}(k-i)\right)}_{f_{J_1} * f_{J_2}(i)}\left(\frac{\beta_3}{\beta_3+t}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} f_M(k)\left(\frac{\beta_3}{\beta_3+t}\right)^{k+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}
\end{aligned}$$

Où $M = J_1 + J_2$

(4) On déduit,

$$F_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_M(k) H(x; k + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3) \quad \square$$

3.2 Exemple de code

Soit les v.a. $X_1 \sim Gamma(\alpha = 2.3, \beta = 0.1)$, $X_2 \sim Gamma(\alpha = 3.2, \beta = 0.3)$, $X_3 \sim Gamma(\alpha = 4.6, \beta = 0.4)$ et $S = X_1 + X_2 + X_3$. Trouver $F_S(50)$, $VaR_{0.90}(X)$ et $TVaR_{0.90}(X)$.

```
b <- c(0.1, 0.3, 0.4)
a <- c(2.3, 3.2, 4.6)
atot <- sum(a)
q <- c(b[1]/b[3], b[2]/b[3])

# Avec fft tres rappide meme si plusieurs Gamma
nfft <- 2^15
k <- 0:(nfft - 1)
fmt <- fft(dnbinom(k, a[1], q[1])) * fft(dnbinom(k, a[2], q[2]))
fm <- Re(fft(fmt, inverse = TRUE))/nfft
sum(fm)

Fs <- function(x) sum(fm * pgamma(x, k + atot, b[3]))
Fs(50)
# 0.6681426

u <- 0.9
VaR <- optimize(function(x) abs(Fs(x) - u), c(0, 300))$min
# 67.90583

TVaR <- 1/(1 - u) * sum(fm * (k + atot)/b[3] * pgamma(VaR, k + atot + 1, b[3], low=F))
# 80.76693
```

4 Loi gamma bivariée Cheriyan – Ramabhadran – Mathai – Moschopoulos

Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) obéissant à une loi gamma CRMM. On définit $S = X_1 + X_2$ et on veut démontrer que,

$$F_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k H(x, \alpha + k, \beta)$$

où les p_k sont les probabilités d'une loi discrète.

(1) Résultats préliminaires :

- Lemme 2020

$$\frac{\beta_1}{\beta_1 + t} = \frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \left(\frac{q}{1 - (1-q)\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}} \right)$$

(2) Trouver la fgm de S :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_S(t) &= \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 - t}\right)^{\alpha_1 - \gamma_0} \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 - t}\right)^{\alpha_2 - \gamma_0} \left(\frac{\left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}\right)^{-1}}{\left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}\right)^{-1} - t} \right)^{\gamma_0} \\
&= \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 - t}\right)^{\alpha_1 - \gamma_0} \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 - t}\right)^{\alpha_2 - \gamma_0} \left(\frac{\beta_3}{\beta_3 - t}\right)^{\gamma_0} \\
&= r^{\alpha_1 - \gamma_0} \left(\frac{q_1}{1 - (1-q_1)r}\right)^{\alpha_1 - \gamma_0} r^{\alpha_2 - \gamma_0} \left(\frac{q_2}{1 - (1-q_2)r}\right)^{\alpha_2 - \gamma_0} r^{\gamma_0} \\
&= \mathcal{P}_{J_1}(r)\mathcal{P}_{J_2}(r) r^{\alpha} \\
&= \mathcal{P}_K(r) r^{\alpha}
\end{aligned}$$

Où,

$$J_1 \sim BinNeg\left(\alpha_1,\ q_1 = \frac{\beta_1}{\beta_3}\right), \quad J_2 \sim BinNeg\left(\alpha_2,\ q_2 = \frac{\beta_2}{\beta_3}\right),\ \alpha_i \in \mathbb{R}^+, \quad K = J_1 + J_2$$

On choisit arbitrairement β_3 comme le $\max(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ et $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma_0$.

(3) On peut écrire les fgp sous forme de série de puissances :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_S(t) &= r^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} f_K(k) r^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} f_K(k) \left(\frac{\beta_3}{\beta_3 - t}\right)^{\alpha + k}
\end{aligned}$$

(4) On déduis :

$$F_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k H(x, \alpha + k, \beta_3)$$

4.1 Exemple de code

Soit le couple de v.a. (X 1, X 2) obéissant à une loi gamma bivariée Cheriyan – Ramabhadran – Mathai – Moschopoulos avec $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.2$, $\alpha_1 = 2.5$, $\alpha_2 = 5$ et $\gamma_0 = 1$. On définit $S = X1 + X2$.

```
library(Runuran)
nfft <- 2^20
b <- c(0.1, 0.2, 1/(1/0.1 + 1/0.2))
a <- c(2.5, 5, 1)
g <- c(0, 1, 2)
q <- (b/max(b))[-which.max((b/max(b)))]

j1 <- dnbinom(0:(nfft - 1), a[1] - g[2], q[1])
j2 <- dnbinom(0:(nfft - 1), g[2], q[2])

kt <- fft(j1) * fft(j2)
k <- Re(fft(kt, T))/nfft

Fs <- function(x) sum(k[1:1001] * pgamma(x, sum(a) + 0:1000, max(b)))

# Avec optimize
VaR <- function(k) optimize(function(x) abs(Fs(x) - k), c(0, 1000))$min
VaR(0.1)

# Par interpolation
gen <- pinv.new(cdf=Fs, lb=0, ub=Inf)
VaR2 <- function(u) uq(gen, u)

TVaR <- function(u) 1/(1 - u) * sum(k[1:1001] * (sum(a) + 0:1000)/max(b) * pgamma(VaR2(u), sum(a) +
     0:1000 + 1, max(b), low = F))
```