Act-3000 Théorie du risque
Exercices

Hélène Cossette, Etienne Marceau

École d'Actuariat, Université Laval, Québec, Canada

12 novembre 2022

Résumé

Ce document contient les exercices du chapitre 13 « Distributions multivariées et agrégation des risques » dans [Cossette and Marceau, 2022].

Keywords : Monotonicité ; Antimonotonicité ; Distributions multivariées ; Produit convolution ; fonctions génératrices de probabilité algorithme de Panjer ; transformmée rapide de Fourier (FFT).

Nom du fichier : main.tex

Matériel complémentaire

1. Soit une v.a. X pour laquelle la fgm $\mathcal{M}_X(t) = E\left[e^{tX}\right]$ existe pour des valeurs de $t > 0$. Le principe de prime d'Esscher est définie par

$$\Pi_h(X) = \frac{E\left[X\mathrm{e}^{hX}\right]}{E\left[\mathrm{e}^{hX}\right]} = \left.\frac{\mathcal{M}_X'(t)}{\mathcal{M}_X(t)}\right|_{t=h}, \text{ pour un certain } h > 0.$$

   Ce principe est notamment utilisée en finance mathématique. On peut aussi utiliser la transformée d'Esscher, notée par

$$\frac{E\left[X\mathrm{e}^{hX}\right]}{E\left[\mathrm{e}^{hX}\right]} = E\left[X\frac{\mathrm{e}^{hX}}{E\left[\mathrm{e}^{hX}\right]}\right],$$

   pour définir une mesure de risque

$$\rho_h^{ESS}(X) = \frac{E\left[X\mathrm{e}^{hX}\right]}{E\left[\mathrm{e}^{hX}\right]} = E\left[X\frac{\mathrm{e}^{hX}}{E\left[\mathrm{e}^{hX}\right]}\right], \text{ pour un certain } h > 0.$$

   La mesure d'Esscher n'est pas homogène.

2. Soit une v.a. X dont la fgm $\mathcal{M}_X(t)$ existe pour $0 < t < t^*$, où $t^* < \infty$ ou $t^* = \infty$.
   L'inégalité suivante est obtenue à partir de l'inégalité de Markov :

$$\overline{F}_X(x) = \Pr(X > x) \leq e^{-tx}\mathcal{M}_X(t), \tag{1}$$

   pour $t > 0$.
   On fixe $\kappa \in (0,1)$. On définit $t_\kappa \in (0,1)$ où

$$t_\kappa = \underset{t>0}{\arg\min}\varphi_\kappa(t),$$

   i.e. t_κ correspond au $t > 0$ qui minimise la fonction φ_κ. On précise que $\varphi_\kappa(t)$ est convexe pour $0 < t < t^*$.
   On définit la mesure de risque ρ_κ par

$$\rho_\kappa(X) = eVaR_\kappa(X) = \varphi_\kappa(t_\kappa),$$

   appelée la mesure de "VaR entropique". La mesure Var entropique est cohérente. Important : cette mesure de risque peut être calculée uniquement pour des v.a. X dont la fgm existe. Ainsi, on ne peut pas développer l'expression $eVaR_\kappa(X)$ pour $X \sim Pareto(\alpha, \lambda)$.

1 Énoncés

1.1 Exercices traditionnels

1. Soit la paire de v.a. comonotones (X_1, X_2) où
$$X_1 \sim Exp\left(\frac{1}{100}\right)$$
et
$$X_2 \sim LNorm\left(\mu = \ln(100) - \frac{1}{2}, \sigma = 1\right).$$
Calculer $VaR_{0.95}(S)$ pour $S = X_1 + X_2$.

2. (a) Soit un couple de v.a. comonotones (X_1, X_2) avec
$$X_1 \sim Pareto\,(\alpha = 3, \lambda = 2000) \text{ et } X_2 \sim Weibull\left(\tau = 0.5, \beta = \frac{1}{2000}\right).$$
On a produit la réalisation suivante de la loi exponentielle avec moyenne 1400 : 3728. Produire une réalisation de (X_1, X_2). Produire une réalisation de $S = X_1 + X_2$.

   (b) Soit un couple de v.a. antimonotones (X_1, X_2) avec
$$X_1 \sim Pareto\,(\alpha = 3, \lambda = 2000) \text{ et } X_2 \sim Weibull\left(\tau = 0.5, \beta = \frac{1}{2000}\right).$$
On a produit la réalisation suivante de la loi exponentielle avec moyenne 1400 : 3728. Produire une réalisation de (X_1, X_2). Produire une réalisation de $S = X_1 + X_2$.

3. Soit un couple de v.a. (X_1, X_2) où
$$X_1 \sim LNorm\,(\mu_1, \sigma_1)$$
et
$$X_2 \sim LNorm\,(\mu_2, \sigma_2),$$
avec $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$.
Note : $E[X_i] = \exp\left(\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2\right)$, pour $i = 1, 2$.
On définit
$$S = X_1 + X_2.$$

Questions :

   (a) Les composantes de (X_1, X_2) sont comonotones.

      i. Montrer que
$$S \sim LNorm\,(a, b).$$
Identifier a et b en fonction de μ_1, μ_2 et σ.

      ii. Si $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 2$ et $\sigma = 1$, calculer $F_S(40)$.

   (b) Les composantes de (X_1, X_2) sont antimonotones.

      i. Montrer que
$$F_S(x) = \Phi(c) - \Phi(d),$$
pour $x \geq e > 0$.
Identifier c, d et e en fonction de x, μ_1, μ_2 et σ.

      ii. Si $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 2$ et $\sigma = 1$, calculer $F_S(40)$.

4. On considère l'exercice annuel d'une institution financière. À la fin de l'année, les engagements de l'institution sont définis par la v.a. $S = X_1 + X_2$ où $X_i = c_i e^{a_i R + b_i}$, $i = 1, 2$.
On a
$$R \sim Norm\left(\mu_R = 0.05, \sigma_R^2 = (0.015)^2\right)$$
et

i	a_i	b_i	c_i
1	-3.2	-0.12	1000
2	-4.3	-0.35	2000

Information : $VaR_{0.995}(Z) = 2.575829$ où $Z \sim Norm(0,1)$.
Important : aucune simulation et aucune approximation ne doivent être faites pour les calculs.
Questions :
   (a) Calculer l'espérance et l'écart-type de S.
   (b) Calculer $VaR_{0.005}(R)$ et $VaR_{0.995}(R)$.
   (c) Calculer $VaR_{0.005}(S)$ et $VaR_{0.995}(S)$.

5. Soit un couple de v.a. antimonotones (X_1, X_2), où
$$f_{X_i}(k) = \alpha_i(k)$$
pour $k = 0, 1, 2, ..., m$. De plus, on suppose que $\alpha_1(0) > 0.5$ et $\alpha_2(0) > 0.5$. On définit $S = X_1 + X_2$.
Questions :
   (a) Montrer que
$$f_{X_1,X_2}(k_1,k_2) = \begin{cases} \gamma(0,0), & k_1 = k_2 = 0 \\ \gamma(k_1,0), & k_1 > 0, k_2 = 0 \\ \gamma(0,k_2), & k_1 = 0, k_2 > 0 \\ 0 & k_1 > 0, k_2 > 0 \end{cases}$$
   et identifier les expression de $\gamma(0,0)$, $\gamma(k_1,0)$ et $\gamma(0,k_2)$.
   (b) Montrer que
$$E[X_1 X_2] = 0$$
   et
$$Cov(X_1, X_2) = -E[X_1]E[X_2].$$
   De plus, si $X_1 \sim X_2 \sim X$, alors on a
$$Var(S) = 2E\left[X^2\right].$$
   (c) Montrer que
$$f_S(k) = \begin{cases} \gamma(0,0), & k = 0 \\ \gamma(k,0) + \gamma(0,k), & k = 1, ..., m \end{cases}.$$
   (d) Montrer que
$$E[\max(S-k;0)] = \sum_{i=1}^{2} E[\max(X_i - k;0)],$$
   pour $k = 0, 1, 2, ..., m$.
   (e) Vérifier les résultats des items précédents (sauf le cas identiquement distribué) avec
$$\alpha_i(k) = \begin{cases} (1-q_i) + q_i \times \binom{10}{k}(\eta_i)^k (1-\eta_i)^{10-k}, & k = 0, \\ q_i \times \binom{10}{k}(\eta_i)^k (1-\eta_i)^{10-k}, & k = 1, 2, ..., 10, \end{cases}$$
   où $q_1 = 0.3$, $q_2 = 0.2$, $\eta_1 = 0.5$ et $\eta_2 = 0.6$. Calculer aussi l'espérance et la variance de S. Refaire les calculs en supposant que les v.a. X_1 et X_2 sont comonotones.

6. Soit la v.a. $S = X_1 + X_2$ où $X_1 \sim Unif\,(0,2)$ et $X_2 \sim Unif\,(0,1)$.
   Questions :
   (a) On suppose que les v.a. X_1 et X_2 sont comonotones. Identifier l'expression de $F_S\,(x)$.
   (b) On suppose que les v.a. X_1 et X_2 sont antimonotones. Identifier l'expression de $F_S\,(x)$.
7. Soit la v.a. $S = X_1 + X_2$ où $X_1 \sim Norm\,(0,3)$ et $X_2 \sim Norm\,(0,1)$.
   Questions :
   (a) On suppose que les v.a. X_1 et X_2 sont comonotones. Identifier l'expression de $F_S\,(x)$.
   (b) On suppose que les v.a. X_1 et X_2 sont antimonotones. Identifier l'expression de $F_S\,(x)$.
8. Soit une paire de v.a. continues positives $\underline{X} = (X_1, X_2)$ où $F_{\underline{X}} \in \Gamma\,(F_{X_1}, F_{X_n})$, la classe de Fréchet générée par les marginales F_{X_1} et F_{X_2}. Soit $F_{\underline{X}^{\max}}, F_{\underline{X}^{\min}} \in \Gamma\,(F_{X_1}, F_{X_2})$ et où
$$F_{\underline{X}^{\min}}\,(x_1,x_2) \leq F_{\underline{X}}\,(x_1,x_2) \leq F_{\underline{X}^{\max}}\,(x_1,x_2)\,,\ x_1,x_2 \in \mathbb{R}^+,$$
   avec
$$F_{\underline{X}^{\max}}\,(x_1,x_2) = \min\left(F_{X_1}\,(x)\,, F_{X_2}\,(x_n)\right)$$
   et
$$F_{\underline{X}^{\min}}\,(x_1,x_2) = \max\left(F_{X_1}\,(x) + F_{X_2}\,(x_n) - 1; 0\right).$$
   Démontrer
$$Cov\left(X_1^{\min}, X_2^{\min}\right) \leq Cov\,(X_1,X_2) \leq Cov\left(X_1^{\max}, X_2^{\max}\right)$$
   et
$$\rho_P\left(X_1^{\min}, X_2^{\min}\right) \leq \rho_P\,(X_1,X_2) \leq \rho_P\left(X_1^{\max}, X_2^{\max}\right).$$
9. Soit les paires de v.a. continues positives $\underline{X} = (X_1, X_2)$ et $\underline{X}' = (X_1', X_2')$ où $F_{\underline{X}}$ et $F_{\underline{X}'} \in \Gamma\,(F_1, F_2)$, la classe de Fréchet générée par les marginales F_1 et F_2 (note : $F_{X_1} = F_{X_1'} = F_1$ et $F_{X_2} = F_{X_2'} = F_2$). De plus, $E\,[X_i] < \infty$. On sait que
$$F_{\underline{X}}\,(x_1,x_2) \leq F_{\underline{X}'}\,(x_1,x_2)\,,\ x_1,x_2 \in \mathbb{R}^+.$$
   On définit
$$M = \max\,(X_1,X_2) \quad \text{et} \quad M' = \max\,(X_1', X_2')\,.$$
   Questions :
   (a) Démontrer
$$Cov\,(X_1,X_2) \leq Cov\,(X_1',X_2')$$
   et
$$\rho_P\,(X_1,X_2) \leq \rho_P\,(X_1',X_2')\,.$$
   (b) Établir la relation entre $F_M\,(x)$ et $F_{M'}\,(x)$, pour $x \geq 0$.
   (c) Établir la relation entre $E\,[M]$ et $E\,[M']$.
   (d) Établir la relation entre $E\,[\max\,(M-x;0)]$ et $E\,[\max\,(M-x;0)]$, pour $x \geq 0$.
10. Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) avec
$$F_{X_1}\,(x) = 0.9 + 0.1\left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right) \quad \text{et} \quad F_{X_2}\,(x) = 0.8 + 0.2\left(1 - e^{-x}\right), \quad x \geq 0.$$
   On définit $S = X_1 + X_2$.
   Hypothèses :
   - H_1 : $F_{X_1,X_2}\,(x_1,x_2) = \min\left(F_{X_1}\,(x_1)\,; F_{X_2}\,(x_2)\right);$
   - H_2 : $F_{X_1,X_2}\,(x_1,x_2) = \max\left(F_{X_1}\,(x_1) + F_{X_2}\,(x_2) - 1; 0\right).$

   Questions :

(a) H_1 : Calculer $VaR_\kappa(S)$, $\kappa = 0.5$, 0.85 et 0.999.
(b) H_1 : Calculer $TVaR_\kappa(S)$, $\kappa = 0.5$, 0.85 et 0.999.
(c) H_1 et H_2 : Calculer $\Pr(S = 0)$.
(d) H_1 et H_2 : Calculer $\Pr(X_1 = 0, X_2 > 0)$.
(e) H_1 et H_2 : Calculer $\Pr(X_1 > 0, X_2 = 0)$.
(f) H_1 et H_2 : Calculer $\Pr(X_1 > 0, X_2 > 0)$.
(g) H_2 :

i. Développer l'expression de $\Pr(X_1 > x, X_2 = 0)$.
ii. Développer l'expression de $\Pr(X_1 = 0, X_2 > x)$.
iii. Démontrer
$$\Pr(S > x) = \Pr(X_1 > x, X_2 = 0) + \Pr(X_1 = 0, X_2 > x),$$
pour $x > 0$.
iv. Démontrer que
$$F_S(x) = F_{X_1}(x) + F_{X_2}(x) - 1, \text{ pour } x > 0.$$
v. Démontrer que
$$E[\max(S - x; 0)] = E[\max(X_1 - x; 0)] + E[\max(X_2 - x; 0)], \text{ pour } x > 0.$$
vi. Calculer $\kappa = F_S(3)$, puis calculer $VaR_\kappa(S)$ et $TVaR_\kappa(S)$.

11. Démontrer que la mesure d'Esscher ρ_h^{ESS} n'est pas homogène.
12. Utiliser l'inégalité en (1) pour démontrer que
$$VaR_\kappa(X) \leq \varphi_\kappa(t) = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{\mathcal{M}_X(t)}{1-\kappa}\right),$$
pour $0 < t < t^*$. Suggestion : poser $\overline{F}_X(x) = 1 - \kappa$ et isoler x (qui se trouve dans la borne).
13. Soit $X \sim Norm(\mu, \sigma^2)$. On définit $\varphi_\kappa(t) = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{\mathcal{M}_X(t)}{1-\kappa}\right)$, $t > 0$.

(a) Identifier l'expression de $\varphi_\kappa(t)$ selon ces hypothèses.
(b) Identifier $t_\kappa \in (0,1)$ où
$$t_\kappa = \underset{t>0}{\arg\min}\,\varphi_\kappa(t),$$
i.e. trouver l'expression du $t > 0$ qui minimise la fonction φ_κ.
(c) Démontrer que
$$eVaR_\kappa(X) = \mu + \sigma\sqrt{-2\ln(1-\kappa)}.$$

14. Soit $X \sim PoisComp(\lambda = 1, B)$ avec $B \sim Exp(1)$. On définit $\varphi_\kappa(t) = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{\mathcal{M}_X(t)}{1-\kappa}\right)$, $0 < t < 1$.

(a) Identifier l'expression de $\varphi_\kappa(t)$ selon ces hypothèses.
(b) Identifier $t_\kappa \in (0,1)$ où
$$t_\kappa = \underset{t\in(0,1)}{\arg\min}\,\varphi_\kappa(t).$$
(c) Calculer $eVaR_{0.9}(X)$.

15. Soit le couple de v.a. $\underline{X}^{(\theta)} = \left(X_1^{(\theta)}, X_2^{(\theta)}\right)$ avec
$$F_{\underline{X}^{(\theta)}}(x_1, x_2) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\right) + \theta\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\right)\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2},$$
pour $\theta \in [-1, 1]$, $x_1, x_2 \geq 0$.
Questions :

(a) Si $-1 \leq \theta \leq \theta' \leq 1$, on a
$$F_{\underline{X}^{(\theta)}}(x_1, x_2) \leq F_{\underline{X}^{(\theta')}}(x_1, x_2)$$
pour $x_1, x_2 \geq 0$.

(b) On définit
$$M^{(\theta)} = \max\left(X_1^{(\theta)}, X_2^{(\theta)}\right) \quad \text{et} \quad M^{(\theta')} = \max\left(X_1^{(\theta')}, X_2^{(\theta')}\right).$$

i. Si $-1 \leq \theta \leq \theta' \leq 1$, établir la relation entre $F_{M^{(\theta)}}(x)$ et $F_{M^{(\theta')}}(x)$, pour $x \geq 0$.
ii. Si $-1 \leq \theta \leq \theta' \leq 1$, établir la relation entre $E\left[M^{(\theta)}\right]$ et $E\left[M^{(\theta')}\right]$.
iii. Si $-1 \leq \theta \leq \theta' \leq 1$, établir la relation entre $VaR_\kappa\left(M^{(\theta)}\right)$ et $VaR_\kappa\left(M^{(\theta')}\right)$, pour κ fixé dans $(0, 1)$.
iv. Interpréter.

(c) On définit
$$M^{(\theta)} = \min\left(X_1^{(\theta)}, X_2^{(\theta)}\right) \quad \text{et} \quad M^{(\theta')} = \min\left(X_1^{(\theta')}, X_2^{(\theta')}\right).$$

i. Si $-1 \leq \theta \leq \theta' \leq 1$, établir la relation entre $F_{M^{(\theta)}}(x)$ et $F_{M^{(\theta')}}(x)$, pour $x \geq 0$.
ii. Si $-1 \leq \theta \leq \theta' \leq 1$, établir la relation entre $E\left[M^{(\theta)}\right]$ et $E\left[M^{(\theta')}\right]$.
iii. Si $-1 \leq \theta \leq \theta' \leq 1$, établir la relation entre $VaR_\kappa\left(M^{(\theta)}\right)$ et $VaR_\kappa\left(M^{(\theta')}\right)$, pour κ fixé dans $(0, 1)$.
iv. Interpréter.

16. Soit le couple de v.a. discrètes $\underline{X} = (X_1, X_2)$ dont la fgp conjointe est donnée par
$$\mathcal{P}_{\underline{X}}(t_1, t_2) = (0.18 + 0.05t_1 + 0.05t_2 + 0.72t_1t_2)^3.$$
On définit $S = X_1 + X_2$.
Questions :
(a) Identifier la distribution marginale de X_1. Fournir l'expression de sa fonction de masse de probabilité.
(b) Identifier la distribution marginale de X_2. Fournir l'expression de sa fonction de masse de probabilité.
(c) Identifier l'expression de la fgp $\mathcal{P}_S(t)$ de S.
(d) Utiliser $\mathcal{P}_S(t)$ pour calculer les toutes les valeurs de $f_S(k)$.
(e) Calculer $E\left[X_1 \times 1_{\{X_2=0\}}\right]$.
(f) Calculer $\rho_{0.02}^{ESS}(S)$.

17. Soit les v.a. continues indépendantes $Y_i \sim Gamma(\gamma_i, 1)$, pour $i = 1, 2, ..., 5$. Soit un vecteur de v.a. continues $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ où
$$X_i \sim Gamma(\alpha_i, \beta_i)$$
pour des valeurs fixées de α_i, $i = 1, 2, 3$. De plus, on a
$$X_1 = \tfrac{1}{\beta_1}(Y_1 + Y_4) \quad X_2 = \tfrac{1}{\beta_2}(Y_2 + Y_4 + Y_5) \quad X_3 = \tfrac{1}{\beta_3}(Y_3 + Y_4 + Y_5)$$
avec
$$\begin{aligned} 0 &\leq \gamma_4 \leq \min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ 0 &\leq \gamma_5 \leq \min(\alpha_2 - \gamma_4, \alpha_3 - \gamma_4). \end{aligned}$$

Convention : si $\gamma_i = 0$, alors $Y_i = 0$, $i = 1, 2, ..., 5$.
On définit
$$S = X_1 + X_2 + X_3.$$

Questions :

(a) Développer les expressions des fgm ($\mathcal{M}_{\underline{X}}$) et de TLS ($\mathcal{L}_{\underline{X}}$) de $\underline{X}$.

(b) Développer les expressions des covariances pour les paires (X_1, X_2), (X_1, X_3), (X_2, X_3).

(c) Développer l'expression de $\rho_h^{ESS}(S)$. On observe que $\mathcal{M}_S(t)$ existe pour $t \in (0, t_0)$. Identifier la valeur de t_0.

(d) On définit la mesure de risque
$$\rho_\kappa(Y) = E[Y] + \frac{1}{1-\kappa}\sqrt{Var(Y)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}}.$$

Questions : On suppose que $\gamma_i > 0$, $i = 1, 2, ..., 5$ (tout en satisfaisant les contraintes).

i. Montrer que la fonction
$$\varphi(X_1, X_2, X_3) = \rho_\kappa(S) = \rho_\kappa(X_1 + X_2 + X_3)$$
est homogène.

ii. Calculer $E[X_i]$ et $Var(X_i)$, $i = 1, 2, 3$.

iii. Développer l'expression de $\rho_\kappa(S)$.

iv. Appliquer le théorème d'Euler à la mesure $\rho_\kappa(S)$ pour développer les expressions des contributions $C_\kappa^\rho(X_i; S)$, $i = 1, 2, 3$.

(e) Soit $\alpha_i = 0.5i$, $i = 1, 2, 3$, $\gamma_4 = 0.1$, $\gamma_5 = 0.2$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$. Calculer $eVaR_{0.99}(S)$.

18. Soit les v.a. indépendantes Y_0, Y_1, Y_2 où
$$Y_0 \sim Gamma(\gamma = 2, 1),$$
$$Y_1 \sim Y_2 \sim Gamma(\alpha - \gamma = 3, 1).$$
Soit la paire de v.a. (X_1, X_2) où $X_1 = Y_0 + Y_1$ et $X_2 = Y_0 + Y_2$.
Pour $S = X_1 + X_2$ et $\theta = 0.2$, calculer les valeurs des expressions de
$$\Pi_\theta(S) = \frac{1}{\theta}\ln E[\exp(\theta S)]$$
et
$$\varphi_\theta(S) = \frac{E[S\exp(\theta S)]}{E[\exp(\theta S)]}$$
où
$$E[S\exp(rS)] = \frac{\mathrm{d}E[\exp(rS)]}{\mathrm{d}r}.$$

19. Soit une paire de v.a. discrète (M_1, M_2) dont la f.g.p. bivariée est
$$P_{M_1,M_2}(t_1, t_2) = 0.6 + 0.1t_2^5 + 0.05t_1^1t_2^4 + 0.05t_1^2t_2^3 + 0.05t_1^3t_2^2 + 0.05t_1^4t_2^1 + 0.1t_1^5.$$
La fonction de masses de probabilité de (M_1, M_2) est notée par f_{M_1,M_2}.
Questions :

(a) Indiquer les paires de valeurs prises par (M_1, M_2) pour lesquelles la valeur de f_{M_1,M_2} est non-nulle. Spécifier clairement les valeurs prises par f_{M_1,M_2}.

(b) Indiquer les valeurs non-nulles des fonctions de masses de probabilité marginales de M_1 et M_2.

(c) Calculer $Cov(M_1, M_2)$. À partir de la valeur de $Cov(M_1, M_2)$, que pouvons-nous déduire de la relation de dépendance entre les v.a. M_1 et M_2 ? Si nécessaire, vous pouvez utiliser un contre-exemple pour appuyer votre réponse.

(d) On définit $N = M_1 + M_2$.

i. Démontrer que la v.a. N peut être représentée comme une fonction d'une v.a. K qui obéit à une loi discrète très connue (et fournie en annexe).

ii. Indiquer clairement les valeurs (non-nulles) de la fonction de masses de probabilité de la v.a. K et de celle de la v.a. N.

20. Soit un couple de v.a. (Θ_1, Θ_2) avec une la fgm $M_{\Theta_1,\Theta_2}(t_1, t_2)$.
Un couple de v.a. (M_1, M_2) est défini de telle sorte que

- $(M_1|\Theta_1 = \theta_1)$ et $(M_2|\Theta_2 = \theta_2)$ sont conditionnellement indépendantes
- $(M_i|\Theta_i = \theta_i) \sim Pois(\theta_i\lambda_i)$ pour $i = 1, 2$.

De plus, $E[\Theta_i] = 1$, pour $i = 1$, 2.
Questions :

(a) Développer l'expression de la f.g.p. de (M_1, M_2) en fonction de la fgm de (Θ_1, Θ_2).

(b) Démontrer que
$$Cov(M_1, M_2) = a \times \mathrm{Cov}(\Theta_1, \Theta_2)$$
et identifier clairement a.

(c) Démontrer que
$$\rho_P(M_1, M_2) = b \times \rho_P(\Theta_1, \Theta_2)$$
et identifier clairement b.

(d) Soit
$$M_{\Theta_1,\Theta_2}(t_1, t_2) = (1 - t_1)^{-1}(1 - t_2)^{-1}(1 - t_1 - t_2)^{-1}.$$
De plus, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. On définit $N = M_1 + M_2$.

i. Développer l'expression de la f.g.p. de N.

ii. Expliquer que la v.a. N peut être représentée comme la somme de deux v.a. indépendantes dont les distributions sont très connues (voir annexes).

iii. Utiliser cette représentation pour calculer $f_N(0)$, $f_N(1)$ et $f_N(2)$.

21. Soient les v.a. comonotones X_i de loi exponentielle avec paramètre $\beta_i = \frac{1}{10i}$ où $i = 1, 2, 3, 4, 5$. On définit la v.a. $S = \sum_{i=1}^{5} X_i$.

(a) Identifier la loi de S.

(b) Calculer $\Pr(S \leq 200)$.

(c) Calculer $VaR_{0.95}(S)$.

22. Soient les v.a. comonotones X_i de loi de Pareto avec paramètres $\alpha = 3$ et $\lambda_i = 20i$ où $i = 1, 2, 3, 4, 5$. On définit la v.a. $S = \sum_{i=1}^{5} X_i$.

(a) Identifier la loi de S.

(b) Calculer $\Pr(S \leq 200)$.

(c) Calculer $VaR_{0.95}(S)$.

23. On considère un couple de v.a. (X_1, X_2) comonotones où $X_1 \sim LN(4, 2^2)$ et $X_2 \sim Pa(2.1, 440)$. On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$.
Calculer les valeurs exactes de $VaR_{0.95}(S)$ et $TVaR_{0.95}(S)$. (2857.417)

24. Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) obéissant à une loi gamma bivariée Cheriyan – Ramabhadran – Mathai – Moschopoulos avec $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.2$, $\alpha_1 = 2.5$, $\alpha_2 = 5$. On définit $S = X_1 + X_2$.

(a) Développer l'expression de $F_S(x)$.

(b) Calculer $E[S]$ et $\mathrm{Var}(S)$ pour $\gamma_0 = 0$, 1 et 2.

(c) Calculer $VaR_\kappa(S)$ et $TVaR_\kappa(S)$ pour $\gamma_0 = 0$, 1 et 2 et $\kappa = 0.99$.

25. On considère le modèle Poisson choc commun pour le vecteur aléatoire $(M_1, ..., M_n)$ qui est défini avec $M_i = J_i + J_0$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Les v.a. J_0, J_1, ..., J_n sont indépendantes où $J_0 \sim Pois(\gamma_0)$ avec $0 \leq \gamma_0 \leq \min(\lambda_1; ...; \lambda_n)$ et $J_i \sim Pois(\gamma_i = \lambda_i - \gamma_0)$. Le vecteur de v.a. $(X_1, ..., X_n)$ obéit à une loi Poisson composée multivariée où $X_i = \sum_{k=1}^{M_i} B_{i,k}$ avec les hypothèses usuelles et $B_{i,1} \sim B_{i,2} \sim ... \sim B_i \sim Ga(\alpha_i, 1/1000)$ pour $i = 1, 2, ..., n$. De plus, on définit $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Les hypothèses addtionnelles sont : $n = 1000$; $\lambda_i = 0.003$, $i = 1, 2, ..., 500$; $\lambda_i = 0.004$, $i = 501, 502, ..., 1000$; $\alpha_i = 2$, $i = 1, 2, ..., 500$; $\alpha_i = 1$, $i = 501, 502, ..., 1000$.

(a) Indiquer les caractéristiques de la loi de S.

(b) Calculer $VaR_\kappa(X_i)$, $TVaR_\kappa(X_i)$ pour $i = 1, 2, ..., 1000$ et $\kappa = 0.995$.

(c) Calculer $VaR_\kappa(S)$, $TVaR_\kappa(S)$ pour $\gamma_0 = 0$, 0.001, 0.002 et $\kappa = 0.995$.

26. On considère un portefeuille constitué de deux lignes d'affaires dont les coûts sont définis par le couple de v.a. (X_1, X_2) obéissant à la loi Poisson composée bivariée décrite ci-dessus. Les paramètres de la loi de Poisson bivariée sont $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ et $\alpha_0 = 0.5$. Le montant d'un sinistre de la ligne i est définie par la v.a. $B_i = 100U_i$ où $\Pr\left(U_i = \frac{k}{5}\right) = \binom{4}{k-1}(0.6i - 0.4)^{k-1}(1.4 - 0.6i)^{4-(k-1)}$ pour $i = 1, 2$. On définit $S = X_1 + X_2$.

(a) Calculer les espérances de X_1, X_2 et S.

(b) Calculer la covariance de $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

(c) Calculer la variance de S.

(d) Calculer $\Pr(S = 100k)$, pour $k = 0, 1, ..., 5$.

(e) Calculer $VaR_\kappa(X_1)$, $TVaR_\kappa(X_1)$, $VaR_\kappa(X_2)$, $TVaR_\kappa(X_2)$, $VaR_\kappa(S)$, $TVaR_\kappa(S)$, pour $\kappa = 0.99$ et $\kappa = 0.995$.

27. On considère un portefeuille de n contrats d'assurance vie. Les coûts pour le contrat i sont définis par la v.a. $X_i = bI_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ avec $b = 1000$. Les v.a. I_1, ..., I_n sont i.i.d.. La v.a. I_i obéit à une loi de Bernoulli de moyenne 0.05. On suppose le modèle avec mélange commun pour décrire la relation de dépendance entre les v.a. I_1, ..., I_n. On suppose que

$$\Pr(I_i = 1 \mid \Theta = \theta) = 1 - r^\theta \text{ et } \Pr(I_i = 0 \mid \Theta = \theta) = r^\theta,$$

avec $\theta > 0$. Sachant $\Theta = \theta$, les v.a. I_1,..., I_n sont conditionnellement indépendantes. On suppose que Θ obéit à une loi $Ga(\alpha, \alpha)$ de moyenne 1. On définit $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

(a) Isoler la valeur de r pour $\alpha = 0.1$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 10$.

(b) Pour $n = 10$, calculer $\Pr(S = kb)$ pour $k = 0,1,...,5$ et pour $\alpha = 0.1$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 10$.

(c) Calculer $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ pour $i \neq j$ et pour $\alpha = 0.1$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 10$.

(d) Calculer $\mathrm{Var}(S)$ pour $\alpha = 0.1$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 10$.

(e) Calculer $VaR_{0.99}(S)$ pour $\alpha = 0.1$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 10$.

(f) Calculer $TVaR_{0.99}(S)$ pour $\alpha = 0.1$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 10$.

(g) Calculer $\mathrm{Var}(S)$, $VaR_{0.99}(S)$ et $TVaR_{0.99}(S)$ en supposant l'indépendance entre les v.a. I_1, ..., I_{10}.

28. On considère un portefeuille composé de 2 lignes d'affaires, qui est exposé à 1 seul type de catastrophe. Les coûts pour les lignes d'affaires sont définis par les v.a. X_1,X_2 où

$$X_i = \sum_{k_i=1}^{M^{(i)}} B_{i,k_i}^{(i)} + \sum_{k_0=1}^{M^{(0)}} B_{i,k_0}^{(0)}$$

pour $i = 1, 2, ..., n$. Les v.a. $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$ sont indépendantes avec $M^{(j)} \sim Pois(\gamma_j)$, $j = 0, 1, 2$. Pour le type 0 fixé de risque, $\left(B_{1,k_0}^{(0)}, B_{2,k_0}^{(0)}\right)$ forment une suite de vecteurs aléatoires i.i.d. où

$$\left(B_{1,k_0}^{(0)}, B_{2,k_0}^{(0)}\right) \sim \left(B_1^{(0)}, B_2^{(0)}\right),$$

pour $k_0 \in \mathbb{N}^+$. De plus, $\left\{B_{i,k_i}^{(i)}, k_i \in \mathbb{N}^+\right\}$ forme une suite de v.a. i.i.d. où $B_{i,k_i}^{(i)} \sim B_i^{(i)}$ pour $i = 1, 2$. Les suites $\left\{\left(B_{1,k_0}^{(0)}, B_{2,k_0}^{(0)}\right), k_0 \in \mathbb{N}^+\right\}$, $\left\{B_{1,k_1}^{(1)}, k_1 \in \mathbb{N}^+\right\}$, $\left\{B_{2,k_2}^{(2)}, k_2 \in \mathbb{N}^+\right\}$ et les v.a. $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$ sont indépendantes. Le couple $\left(B_1^{(0)}, B_2^{(0)}\right)$ obéit à une loi exponentielle bivariée EFGM avec $\beta_1 = \frac{1}{2}$, $\beta_2 = \frac{1}{3}$. De plus, $B_1^{(1)} \sim Exp\left(\frac{5}{8}\right)$ et $B_2^{(2)} \sim Exp\left(\frac{5}{9}\right)$. Enfin, $\gamma_j = j + 1$ pour $j = 0, 1, 2$. On définit $S = X_1 + X_2$.

(a) Calculer les espérances de X_1, X_2 et S.

(b) Calculer les variances de X_1 et X_2.

(c) Calculer la covariance entre X_1 et X_2 pour $\theta = -1, 0, 1$ (paramètre de la loi bivariée de $\left(B_1^{(0)}, B_2^{(0)}\right)$).

(d) Calculer la variance de S pour $\theta = -1, 0, 1$ (paramètre de la loi bivariée de $\left(B_1^{(0)}, B_2^{(0)}\right)$).

(e) Indiquer les caractéristiques des lois de X_1, X_2 et S. Calculer $F_S(20)$.

(f) Calculer $VaR_{0.99}(S)$. (37.3761, 38.2743, 39.1082)

29. Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) dont la fonction de répartition est définie par

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2} p_{1,2}(i_1, i_2) H(x_1; i_1, \beta) H(x_2; i_2, \beta),$$

où $p_{1,2}(i_1, i_2)$ sont des probabilités i.e. $p_{1,2}(i_1, i_2) \geq 0$ (pour i_1, $i_2 \in \{1, 2\}$) et $\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2} p_{1,2}(i_1, i_2) = 1$. De plus, on a $\sum_{i_1=1}^{2} p_{1,2}(i_1, i_2) = p_2(i_2)$ et $\sum_{i_2=1}^{2} p_{1,2}(i_1, i_2) = p_1(i_1)$. On suppose que $\beta = \frac{1}{10}$. On définit $S = X_1 + X_2$.
Hypothèses additionnelles :

Hypothèse H1		
$i_1 \mid i_2$	1	2
1	0.42	0.18
2	0.28	0.12

Hypothèse H2		
$i_1 \mid i_2$	1	2
1	0.55	0.05
2	0.15	0.25

Hypothèse H3		
$i_1 \mid i_2$	1	2
1	0.32	0.28
2	0.38	0.02

Les calculs ci-dessous doivent être faits avec les hypothèses H1, H2, H3 :

(a) Calculer $F_{X_1,X_2}(30, 20)$.

(b) Calculer $E\left[X_1 \times 1_{\{X_2 > 20\}}\right]$.

(c) Calculer $E[\max(X_1 - 30; 0)\max(X_2 - 20; 0)]$.

(d) Calculer $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$, $E[S]$ et $\mathrm{Var}(S)$.

(e) Calculer $F_S(50)$.

30. Soit un couple de v.a. (I_1, I_2) dont la fonction de masse de probabilité conjointe est $f_{I_1,I_2}(i_1, i_2)$, i_1, $i_2 \in \{0, 1\}$. Soient les n vecteurs aléatoires i.i.d. $(I_{1,1}, I_{2,1})$, ..., $(I_{1,n}, I_{2,n})$ où $(I_{1,i}, I_{2,i}) \sim (I_1, I_2)$, pour $i = 1, 2, ..., n$. On définit le couple (M_1, M_2) où $M_j = \sum_{i=1}^{n} I_{j,i}$, $j = 1, 2$. On définit $N = M_1 + M_2$. Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) où $X_i = \sum_{k=1}^{M_i} B_{i,k}$, où $\{B_{i,k}, k = 1, 2, ...\}$ forme une suite de v.a. i.i.d. avec $B_{i,k} \sim B_i$ $(i = 1, 2)$. De plus, $\{B_{i,k}, k = 1, 2, ...\}$, $\{B_{i,k}, k = 1, 2, ...\}$ et (M_1, M_2) sont indépendants. Enfin, $B_1 \sim B_2 \sim Exp(\beta)$. On définit $S = X_1 + X_2$.

(a) Identifier la f.g.p. de (M_1, M_2) et de N. Identifier la f.m.p. de (M_1, M_2) et de N.

(b) Développer l'expression de la covariance de (M_1, M_2).

(c) Identifier la f.g.m. de (X_1, X_2) et de S.

(d) Développer l'expression de la covariance de (X_1, X_2).

(e) Calculer les espérances de X_1, X_2 et S.

(f) Calculer les variances de X_1 et X_2.

(g) On suppose que $\beta = \frac{1}{10}$ et $n = 10$. Hypothèses additionnelles :

Hypothèse H1		
$i_1 \vert i_2$	0	1
0	0.42	0.18
1	0.28	0.12

Hypothèse H2		
$i_1 \vert i_2$	0	1
0	0.55	0.05
1	0.15	0.25

Hypothèse H3		
$i_1 \vert i_2$	0	1
0	0.32	0.28
1	0.38	0.02

Questions pour les 3 hypothèses H1, H2, H3 :

i. Calculer $\mathrm{Cov}\,(X_1, X_2)$ et $\mathrm{Var}\,(S)$.

ii. Calculer $VaR_{0.99}\,(S)$ et $TVaR_{0.99}\,(S)$.

31. Soit un couple de v.a. (I_1, I_2) dont la fonction de masse de probabilité conjointe est $f_{I_1,I_2}\,(i_1, i_2)$, i_1, $i_2 \in \{0, 1\}$. On a $f_{I_1,I_2}\,(1, 1) = f_{I_1,I_2}\,(0, 0) = \frac{(1+\rho)}{4}$ pour $-1 \leq \rho \leq 1$. Le paramètre ρ correspond au coefficient de corrélation entre (I_1, I_2). Soit une suite de vecteurs aléatoires i.i.d. $(I_{1,1}, I_{2,1})$, $(I_{1,1}, I_{2,1})$, ... où $(I_{1,i}, I_{2,i}) \sim (I_1, I_2)$, pour $i \in \mathbb{N}^+$. Soient les v.a. indépendantes K_0, K_1 et K_2 où $K_i \sim Pois\,(\gamma_i)$, $i = 0, 1, 2$. On définit le couple (M_1, M_2) où $M_j = K_j + \sum_{i=1}^{K_0} I_{j,i}$, $j = 1, 2$. La suite $(I_{1,1}, I_{2,1})$, $(I_{1,1}, I_{2,1})$, ... est indépendante de K_0, K_1 et K_2. On définit $N = M_1 + M_2$. Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) où $X_i = \sum_{k=1}^{M_i} B_{i,k}$, où $\{B_{i,k}, k = 1, 2, ...\}$ forme une suite i.i.d. de v.a. avec $B_{i,k} \sim B_i$ $(i = 1, 2)$. De plus, $\{B_{i,k}, k = 1, 2, ...\}$, $\{B_{i,k}, k = 1, 2, ...\}$ et (M_1, M_2) sont indépendants. Enfin, $B_1 \sim B_2 \sim Exp\,(\beta)$. On définit $S = X_1 + X_2$.

(a) Identifier la f.g.p. et la f.m.p. de (M_1, M_2).

(b) Identifier la f.g.p. et la f.m.p. de N.

(c) Développer l'expression de la covariance de (M_1, M_2).

(d) Identifier la f.g.m. de (X_1, X_2) et de S.

(e) Développer l'expression de la covariance de (X_1, X_2).

(f) On suppose que $\beta = \frac{1}{10}$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\gamma_0 = 3$ $\gamma_i = \lambda_i - 1.5$. Questions à faire pour $\rho = -0.9$, 0, 0.9 :

i. Calculer $E\,[N]$ et $E\,[S]$.

ii. Calculer $\mathrm{Cov}\,(M_1, M_2)$ et $\mathrm{Var}\,(N)$.

iii. Calculer $VaR_{0.99}\,(N)$ et $TVaR_{0.99}\,(N)$.

iv. Calculer $\mathrm{Cov}\,(X_1, X_2)$ et $\mathrm{Var}\,(S)$.

v. Calculer $VaR_{0.99}\,(S)$ et $TVaR_{0.99}\,(S)$.

32. On considère le volet incendie d'un contrat d'assurance pour un commerce. On suppose qu'au plus un incendie peut se produire au cours d'une année. Les coûts pour un contrat sont définis par la v.a. $X = I \times B$ avec $I \sim Bern\,(0.1)$. La v.a. B est définie par $B = C_1 + C_2$, où la v.a. C_1 correspond aux dommages matériels au commerce et la v.a. C_2 représente les coûts résultant des pertes en affaires. La paire de v.a. (C_1, C_2) obéit à la loi de Pareto bivariée avec $\alpha = 3$, $\lambda_1 = 20$ et $\lambda_2 = 40$. De plus, la v.a. I est indépendante du couple de v.a. (C_1, C_2).

(a) Calculer $E\,[B]$, $\mathrm{Cov}\,(C_1, C_2)$ et $\mathrm{Var}\,(B)$.

(b) Calculer l'espérance et la variance de X.

(c) Trouver l'expression de f_B et F_B.

(d) Calculer $\Pr\,(X > 70)$.

1.2 Exercices informatiques

1. Soit le vecteur de v.a. comonotones (X_1, X_2, X_3) avec

$$\begin{aligned} X_1 &\sim Pareto\,(\alpha = 1.5, \lambda = 50) \\ X_2 &\sim Exp\left(\beta = \frac{1}{100}\right) \\ X_3 &\sim LNorm\left(\mu = \ln(100) - \frac{1}{2}, \sigma = 1\right). \end{aligned}$$

On définit $S = X_1 + X_2 + X_3$.
Questions :

   (a) Développer l'expression de $VaR_\kappa(S)$.
   (b) Calculer $VaR_{0.99}(S)$. Vérification : $VaR_{0.95}(S) = 932.1745$
   (c) Avec un outil d'optimisation, calculer $F_S(2000)$. Vérification : $F_S(1000) = 0.9562015$ (calculée en R avec `optimize`)

2. Soit un couple de v.a. $X_1 \in \{x_{1,1}, ..., x_{1,m}\}$ et $X_2 \in \{x_{2,1}, ..., x_{2,m}\}$ avec

$$x_{1,j} = -100 \times \ln\left(1 - \tfrac{j}{m+1}\right) \quad \text{et} \quad x_{2,j} = 100 \times \mathrm{e}^{-\frac{0.04}{2} + 0.2 \times \Phi^{-1}\left(\frac{j}{m+1}\right)} \quad \text{pour } j = 1, 2, 3, m.$$

De plus, $\Pr(X_i = x_{i,j}) = \frac{1}{m}$, pour $i = 1, 2$ et $j = 1, 2, ..., m$.
On définit $S = X_1 + X_2$.
Questions :

   (a) Hypothèses : $m = 4$; X_1 et X_2 sont comonotoniques.
      i. Calculer $E[X_i]$, $Var(X_i)$ pour $i = 1, 2$.
      ii. Calculer $VaR_\kappa(X_i)$, pour $i = 1, 2$ et $\kappa = 0.5$, 0.75 et 0.95.
      iii. Calculer $TVaR_\kappa(X_i)$, pour $i = 1, 2$ et $\kappa = 0.5$, 0.75 et 0.95.
      iv. Calculer $Cov(X_1, X_2)$ et $\rho_P(X_1, X_2)$.
      v. Calculer $E[\max(S - x; 0)]$, pour $x = 200$, 400, et 600.
      vi. Calculer $VaR_{0.5}(S)$ et $TVaR_{0.5}(S)$.
      vii. Calculer $VaR_{0.75}(S)$ et $TVaR_{0.75}(S)$.
      viii. Calculer $VaR_{0.95}(S)$ et $TVaR_{0.95}(S)$. Pour la mesure sous-additive, calculer la valeur de l'indice du bénéfice de mutualisation.

   (b) Hypothèses : $m = 4$; X_1 et X_2 sont antimonotoniques.
      i. Calculer $E[X_i]$, $Var(X_i)$ pour $i = 1, 2$.
      ii. Calculer $VaR_\kappa(X_i)$, pour $i = 1, 2$ et $\kappa = 0.5$, 0.75 et 0.95.
      iii. Calculer $TVaR_\kappa(X_i)$, pour $i = 1, 2$ et $\kappa = 0.5$, 0.75 et 0.95.
      iv. Calculer $Cov(X_1, X_2)$ et $\rho_P(X_1, X_2)$.
      v. Calculer $E[\max(S - x; 0)]$, pour $x = 200$, 400, et 600.
      vi. Calculer $VaR_{0.5}(S)$ et $TVaR_{0.5}(S)$.
      vii. Calculer $VaR_{0.75}(S)$ et $TVaR_{0.75}(S)$.
      viii. Calculer $VaR_{0.95}(S)$ et $TVaR_{0.95}(S)$. Pour la mesure sous-additive, calculer la valeur de l'indice du bénéfice de mutualisation.

   (c) Hypothèses : $m = 1000$; X_1 et X_2 sont comonotoniques.
      i. Calculer $E[X_i]$, $Var(X_i)$ pour $i = 1, 2$.

ii. Calculer $VaR_{\kappa}(X_i)$, pour $i = 1, 2$ et $\kappa = 0.5$, 0.75 et 0.95.
iii. Calculer $TVaR_{\kappa}(X_i)$, pour $i = 1, 2$ et $\kappa = 0.5$, 0.75 et 0.95.
iv. Calculer $Cov(X_1, X_2)$ et $\rho_P(X_1, X_2)$.
v. Calculer $E[\max(S - x; 0)]$, pour $x = 200$, 400, et 600.
vi. Calculer $VaR_{0.5}(S)$ et $TVaR_{0.5}(S)$.
vii. Calculer $VaR_{0.75}(S)$ et $TVaR_{0.75}(S)$.
viii. Calculer $VaR_{0.95}(S)$ et $TVaR_{0.95}(S)$. Pour la mesure sous-additive, calculer la valeur de l'indice du bénéfice de mutualisation.

(d) Hypothèses : $m = 1000$; X_1 et X_2 sont antimonotoniques.

i. Calculer $E[X_i]$, $Var(X_i)$ pour $i = 1, 2$.
ii. Calculer $VaR_{\kappa}(X_i)$, pour $i = 1, 2$ et $\kappa = 0.5$, 0.75 et 0.95.
iii. Calculer $TVaR_{\kappa}(X_i)$, pour $i = 1, 2$ et $\kappa = 0.5$, 0.75 et 0.95.
iv. Calculer $Cov(X_1, X_2)$ et $\rho_P(X_1, X_2)$.
v. Calculer $E[\max(S - x; 0)]$, pour $x = 200$, 400, et 600.
vi. Calculer $VaR_{0.5}(S)$ et $TVaR_{0.5}(S)$.
vii. Calculer $VaR_{0.75}(S)$ et $TVaR_{0.75}(S)$.
viii. Calculer $VaR_{0.95}(S)$ et $TVaR_{0.95}(S)$. Pour la mesure sous-additive, calculer la valeur de l'indice du bénéfice de mutualisation.

(e) Hypothèses : $m = 1000000$; X_1 et X_2 sont comonotoniques.

i. Calculer $E[X_i]$, $Var(X_i)$ pour $i = 1, 2$.
ii. Calculer $VaR_{\kappa}(X_i)$, pour $i = 1, 2$ et $\kappa = 0.5$, 0.75 et 0.95.
iii. Calculer $TVaR_{\kappa}(X_i)$, pour $i = 1, 2$ et $\kappa = 0.5$, 0.75 et 0.95.
iv. Calculer $Cov(X_1, X_2)$ et $\rho_P(X_1, X_2)$.
v. Calculer $E[\max(S - x; 0)]$, pour $x = 200$, 400, et 600.
vi. Calculer $VaR_{0.5}(S)$ et $TVaR_{0.5}(S)$.
vii. Calculer $VaR_{0.75}(S)$ et $TVaR_{0.75}(S)$.
viii. Calculer $VaR_{0.95}(S)$ et $TVaR_{0.95}(S)$. Pour la mesure sous-additive, calculer la valeur de l'indice du bénéfice de mutualisation.

(f) Hypothèses : $m = 1000000$; X_1 et X_2 sont antimonotoniques.

i. Calculer $E[X_i]$, $Var(X_i)$ pour $i = 1, 2$.
ii. Calculer $VaR_{\kappa}(X_i)$, pour $i = 1, 2$ et $\kappa = 0.5$, 0.75 et 0.95.
iii. Calculer $TVaR_{\kappa}(X_i)$, pour $i = 1, 2$ et $\kappa = 0.5$, 0.75 et 0.95.
iv. Calculer $Cov(X_1, X_2)$ et $\rho_P(X_1, X_2)$.
v. Calculer $E[\max(S - x; 0)]$, pour $x = 200$, 400, et 600.
vi. Calculer $VaR_{0.5}(S)$ et $TVaR_{0.5}(S)$.
vii. Calculer $VaR_{0.75}(S)$ et $TVaR_{0.75}(S)$.
viii. Calculer $VaR_{0.95}(S)$ et $TVaR_{0.95}(S)$. Pour la mesure sous-additive, calculer la valeur de l'indice du bénéfice de mutualisation.

3. Soit le couple de v.a. (Θ_1, Θ_2) obéissant à une loi gamma bivariée où

$$M_{\Theta_1,\Theta_2}(t_1, t_2) = \left(\frac{(1-\gamma)}{\left(1 - \frac{1-\gamma}{r} t_1\right)\left(1 - \frac{1-\gamma}{r} t_2\right) - \gamma} \right)^r$$

avec

$$\Theta_1 \sim \Theta_2 \sim Gamma\left(r, r\right).$$

Soit le couple de v.a. (M_1, M_2) où $(M_1|\Theta_1 = \theta_1)$ et $(M_2|\Theta_2 = \theta_2)$ sont conditionnellement indépendantes avec

$$\left(M_1|\Theta_1 = \theta_1\right) \sim Pois\left(\lambda_1\theta_1\right) \quad \text{et} \quad \left(M_2|\Theta_2 = \theta_2\right) \sim Pois\left(\lambda_2\theta_2\right).$$

Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) avec

$$X_1 = \begin{cases} \sum_{k_1=1}^{M_1} B_{1,k_1} & , M_1 > 0 \\ 0 & , M_1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad X_2 = \begin{cases} \sum_{k_2=1}^{M_2} B_{2,k_2} & , M_2 > 0 \\ 0 & , M_2 = 0 \end{cases},$$

où

$\underline{B}_1 = \{B_{1,k_1}, k_1 \in \mathbb{N}^+\}$ avec $B_{1,k_1} \sim B_1 \sim Binom\left(n_1, q_1\right)$
$\underline{B}_2 = \{B_{2,k_2}, k_2 \in \mathbb{N}^+\}$ avec $B_{2,k_2} \sim B_2 \sim Binom\left(n_2, q_2\right)$
$\underline{B}_1$, $\underline{B}_2$ et (M_1, M_2) sont indépendantes.

Hypothèses :

$r = 2$	$\lambda_1 = 1.5$	$\lambda_2 = 2$	$\gamma = 0.8$
$n_1 = 10$	$q_1 = 0.2$	$n_2 = 10$	$q_2 = 0.3$

On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$.
La mesure TVaR est utilisée pour calculer le capital.
Questions :

(a) Développer l'expression de la fgp de (M_1, M_2).

(b) Développer l'expression de la fonction caractéristique de (X_1, X_2).

(c) Développer l'expression de la fonction caractéristique de S.

(d) Calculer les valeurs de $f_S(k)$, $k = 0, 1, 2, ..., 4095$.

   i. Indiquer la méthode pour calculer les valeurs de $f_S(k)$.

   ii. Indiquer les valeurs de $F_S(k)$, $k = 30, 40$. Vérification : $F_S(35) = 0.988977$.

1.3 Exercices A2021

1. **Distribution bêta-Bernoulli multivariée et distribution bêta-binomiale.** Soit un vecteur de v.a. échangeables $\underline{I} = (I_1, ..., I_n)$ avec

$$I_j \overset{\mathcal{D}}{=} I \sim Bern\left(\zeta_1\right), \quad j \in \{1, \ldots, n\}$$

et

$$\Pr\left(I_j = 1, I_{j'} = 1\right) = \zeta_2, \quad j \neq j', \quad j, j' \in \{1, \ldots, n\}.$$

Soit la v.a. mélange $\Theta \sim Beta\left(a = 2, b = 48\right)$.

On définit $(I_i|\Theta = \theta) \sim Bern\left(\theta\right)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ et les v.a. $(I_1|\Theta = \theta)$, ..., $(I_n|\Theta = \theta)$ sont conditionnellement indépendantes.

On définit $N_n = \sum_{i=1}^{n} I_i$ et $W_n = \frac{N_n}{n}$, $n \in \{2, 3, \ldots\}$.

Notation pour la fonction bêta :

$$I\left(\alpha, \beta\right) = \int_0^1 u^{\alpha-1}\left(1-u\right)^{\beta-1} du = \frac{\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\beta\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}$$

Exemples d'interprétation de N_n :
- N_n = nombre de défauts pour un portefeuille de n titres hypothécaires ;
- N_n = nombre d'individus infectés dans un groupe (clos) de n individus.

Questions :

(a) Développez l'expression de $Cov(I_1, I_2)$ en fonction de a et b.

(b) Développez l'expression de $\rho = \rho_P(I_1, I_2)$ en fonction de a et b.

(c) En supposant que b est fixé de telle sorte que $q = \frac{a}{a+b}$, développez l'expression de $\rho_P(I_1, I_2)$ en fonction de a et q. En supposant que b est fixé de telle sorte que $q = \frac{a}{a+b}$, calculez $\lim_{a\to 0} \rho_P(I_1, I_2)$ et calculez $\lim_{a\to\infty} \rho_P(I_1, I_2)$.

(d) Démontrez

$$Var(N_n) = Var(N_n^{\perp}) + Var(N_n^{\perp})(n-1)\rho,$$

où $N_n^{\perp} \sim Binom(n, \zeta_1)$.

(e) Démontrez

$$Var(W_n) = \frac{1}{n} Var(I) + Var(I)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\rho.$$

(f) Démontrez

$$\Pr\left(N_n = k\right) = \binom{n}{k} \frac{I\left(a+k, b+n-k\right)}{I\left(a, b\right)}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

(g) Hypothèses : $a = 2$ et $b = 48$.

   i. Calculez de q et ρ.
   ii. Calculez $E[N_n]$ et $Var(N_n)$, $n = 20$.
   iii. Calculez $\Pr(N_n = k)$, $n = 20$ et $k \in \{0, 1, 2\}$.
   iv. Calculez $\Pr(I_1 = 0, I_2 = 0, I_3 = 0, \ldots, I_n = 0)$, $n = 20$.
   v. Calculez $\Pr(I_1 = 1, I_2 = 0, I_3 = 0, \ldots, I_n = 0)$, $n = 20$.
   vi. Calculez $\Pr(I_1 = 1, I_2 = 1, I_3 = 0, \ldots, I_n = 0)$, $n = 20$.

vii. Calculez $\lim_{n\to\infty} E[W_n]$ et $\lim_{n\to\infty} Var(W_n)$.

2. **Distribution Bernoulli multivariée échangeable et loi gamma.** Soit un vecteur de v.a. échangeables $\underline{I} = (I_1, ..., I_n)$ avec

$$I_j \stackrel{\mathcal{D}}{=} I \sim Bern\,(\zeta_1)\,, \quad j \in \{1, \dots, n\}$$

et

$$\Pr\left(I_j = 1, I_{j'} = 1\right) = \zeta_2, \quad j \neq j', \quad j, j' \in \{1, \dots, n\}.$$

Soit la v.a. mélange $\Theta = \mathrm{e}^{-rY}$, où $Y \sim Gamma\left(\frac{1}{\alpha}, 1\right)$, $\mathcal{L}_Y(t) = \left(\frac{1}{1+t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, $t \geq 0$, et $\alpha > 0$.

On définit $(I_i|\Theta = \theta) \sim Bern\,(\theta)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ et les v.a. $(I_1|\Theta = \theta)$, ..., $(I_n|\Theta = \theta)$ sont conditionnellement indépendantes.

On définit $N_n = \sum_{i=1}^{n} I_i$ et $W_n = \frac{N_n}{n}$, $n \in \{2, 3, \dots\}$.
Questions :

(a) Développez l'expression de $\zeta_k = \Pr(I_1 = 1, \dots, I_k = 1)$ en fonction de $\mathcal{L}_Y$ et k, $k \in \mathbb{N}$.

(b) Soit $E[I_1] = q$. Isolez la valeur de $r > 0$ en fonction de q et α.

(c) Sachant que r est fixé de telle sorte que $E[I_1] = q$, développez l'expression de $\rho_P(I_1, I_2)$.

(d) Démontrez

$$\Pr(N_n = k) = \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} \mathcal{L}_Y((j + k)r), \quad k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

(e) Hypothèses : $q = 0.08$ et $\alpha = 2$.

i. Calculez r.

ii. Calculez $\rho_P(I_1, I_2)$.

iii. Calculez $\Pr(N_2 = k)$, $k \in \{0, 1, 2\}$.

iv. Calculez $\Pr(N_4 = k)$, $k \in \{3, 4\}$.

3. **Chaîne Markov-Bernoulli et distribution Markov-binomiale.** Soit $\mathbf{I} = \{I_k, k \in \mathbb{N}_+\}$ une chaîne de Markov homogène en temps discret définie sur l'espace d'états $\{0, 1\}$. La matrice de probabilités de transition est définie par la matrice 2×2

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (1 - \alpha)q & (1 - \alpha)q \\ (1 - \alpha)(1 - q) & \alpha + (1 - \alpha)q \end{pmatrix}, \quad q \in (0, 1), \tag{2}$$

où $q \in (0, 1)$ et $\alpha \in [-1, 1]$ est le paramètre de dépendance.

On introduit le processus Markov-binomial $\mathbf{M} = \{M_k, k \in \mathbb{N}_+\}$ où

$$M_k = I_1 + \dots + I_k, \;\; k \in \mathbb{N}_+.$$

On introduit le processus Markov-binomial composé $\mathbf{S} = \{S_k, k \in \mathbb{N}_+\}$ où

$$S_k = I_1 \times B_1 + \dots + I_k \times B_k, \;\; k \in \mathbb{N}_+,$$

où

- $\{B_j, j \in \{1, 2, \dots, k\}\}$ forme une suite de v.a. i.i.d. ;
- $B_j \stackrel{\mathcal{D}}{=} B$; et

- $\{B_j, j \in \{1,2,\ldots,k\}\}$ et $\{I_j, j \in \{1,2,\ldots,k\}\}$ sont indépendantes.

Hypothèses pour les calculs numériques :

$$q = \frac{1}{3} \text{ et } \alpha = \frac{1}{5}. \tag{3}$$

Définitions additionnelles :
- $\mathbf{I}^{\perp} = \{I_k^{\perp}, k \in \mathbb{N}_+\}$ = somme de v.a. i.i.d. de distribution Bernoulli avec paramètre $q \in (0,1)$.
- $M_k^{\perp} = I_1^{\perp} + \cdots + I_1^{\perp} \sim Binom(k,q)$, $k \in \mathbb{N}_+$.

Questions :

(a) Développez l'expression de $E[M_k]$, $k \in \mathbb{N}_+$.
(b) Développez l'expression de $\rho_P(I_k, I_{k+h})$, $k \in \mathbb{N}_+$.
(c) Supposons que $I_k = 1$, s'il pleut le jour k, et $I_k = 0$, s'il ne pleut pas le jour k.
  i. Avec les hypothèses en (3), calculez le nombre espéré de jours de pluie pendant le mois de juin.
  ii. Avec les hypothèses en (3), calculez la probabilité qu'il pleuve 5 jours de suite.
  iii. Avec les hypothèses en (3), calculez les valeurs $\Pr(M_2 = j)$, $j \in \{0,1,2\}$.

4. **Distribution Bernoulli multivariée échangeable particulière.** Soit le vecteur de v.a. échangeables $\underline{I} = (I_1, I_2, I_3, I_4)$ et la v.a. $N = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ où

$$I_j \sim Bern\left(q = \frac{1}{2}\right), \quad j \in \{1,2,3,4\}, \text{ et}$$
$$\Pr(N = 2) = 1.$$

Questions :

(a) Calculez les valeurs $f_{\underline{I}}(i_1, i_2, i_3, i_4) = \Pr(I_1 = i_1, \ldots, I_4 = i_4)$, $\forall (i_1, \ldots, i_4) \in \{0,1\}^4$.
(b) Calculez les valeurs $f_{I_1,I_2,I_3}(i_1, i_2, i_3) = \Pr(I_1 = i_1, I_2 = i_2, I_3 = i_3)$, $\forall (i_1, i_2, i_3) \in \{0,1\}^3$.
(c) Calculez les valeurs $f_{I_1,I_2}(i_1, i_2) = \Pr(I_1 = i_1, I_2 = i_2)$, $\forall (i_1, i_2) \in \{0,1\}^2$.
(d) Démontrez que $I_j \sim Bern(q = \frac{1}{2})$. Est-ce que $F_{\underline{I}} \in \mathcal{CF}(F_1, \ldots, F_4)$, $F_j = F$ et F est la fonction de répartition de la loi Bernoulli de paramètre $q = \frac{1}{2}$?
(e) Calculez $E[N]$ et $Var(N)$.
(f) Calculez $Cov(I_1, I_2)$.
(g) Calculez $\rho_P(I_1, I_2)$.
(h) Soit les vecteurs de v.a. $\underline{I}'$ et $\underline{I}^+$ avec $F_{\underline{I}'}, F_{\underline{I}^+} \in \mathcal{CF}(F_1, \ldots, F_4)$. On définit $N' = I_1' + \cdots + I_4'$ et $N^+ = I_1^+ + \cdots + I_4^+$. Les composantes de $\underline{I}^+$ sont comonotones. On ne précise par la distribution multivariée de $\underline{I}'$.
  i. Calculez $Var(N^+)$.
  ii. Établissez la relation entre $Var(N')$ et $Var(N^+)$.
  iii. Établissez la relation entre $Var(N')$ et $Var(N)$.
  iv. Établissez les deux bornes $\rho_(I_{j_1}, I_{j_2})$ toutes les paires du vecteur de v.a. $\underline{I}' = (I_1', \ldots, I_4')$ avec $F_{\underline{I}'} \in \mathcal{CF}(F_1, \ldots, F_4)$.
(i) Soit la v.a. $U \sim Unif(0,1)$. Soit le vecteur de v.a. $\underline{I}^\dagger$ avec $F_{\underline{I}^\dagger} \in \mathcal{CF}(F_1, \ldots, F_4)$. On définit $N^\dagger = I_1^\dagger + \cdots + I_4^\dagger$. Les composantes de $\underline{I}^\dagger$ sont définies comme suit :

$$I_1^\dagger = F_1^{-1}(U), \quad I_2^\dagger = F_2^{-1}(1-U), \quad I_3^\dagger = F_3^{-1}(U), \quad I_4^\dagger = F_4^{-1}(1-U). \tag{4}$$

  i. Développez l'expression de $F_{\underline{I}^\dagger}$.
  ii. Décrivez la relation de dépendance entre les composantes de $\underline{I}^\dagger$.
  iii. Calculez les valeurs de $\Pr(N^\dagger = k)$, $k \in \{0,1,2,3,4\}$.

2 Solutions

2.1 Exercices traditionnels

1. On a

$$VaR_{\kappa}\left(X_1\right) = -100\log(1-\kappa)$$

et

$$VaR_{\kappa}\left(X_2\right)\exp\left(\ln(100) - \frac{1}{2} + VaR_{\kappa}(Z)\right).$$

De plus, car les v.a. sont comonotones, on a

$$VaR_{\kappa}(S) = \sum_{i=1}^{2} VaR_{\kappa}(X_i),$$

alors, on obtient

$$\begin{aligned}
VaR_{0.95}(S) &= VaR_{0.95}(X_1) + VaR_{0.95}(X_2) \\
&= -100\log(1-0.95) + \exp\left(\ln(100) - \frac{1}{2} + VaR_{0.95}(Z)\right) \\
&= -100\log(1-0.95) + 100\exp\left(-\frac{1}{2} + VaR_{0.95}(Z)\right) \\
&= 299.5732 + 100 \times 3.141981 \\
&= 613.7714
\end{aligned}$$

2. (a) On simule la réalisation de $(X_1^{(1)}, X_2^{(1)})$ selon à partir de $(U_1^{(1)}, U_2^{(1)})$, où

$$X_1^{(1)} = \lambda\left((1-U_1^{(1)})^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)$$

et

$$X_2^{(1)} = \frac{1}{\beta}\left(-\log(1-U_2^{(1)})\right)^{\frac{1}{\tau}}.$$

Puisque les v.a sont comonotones, on a $U_2^{(1)} = U_1^{(1)}$. On obtient $U_1^{(1)}$ selon

$$-1400\log(1-U_1^{(1)}) = 3728,$$

qui devient

$$U_1^{(1)} = 1 - \exp\left(-\frac{3728}{1400}\right) = 0.9302513.$$

Alors, on obtient

$$X_1^{(1)} = 2000\left((1-0.9302513)^{-\frac{1}{3}} - 1\right) = 2858.676$$

et

$$X_2^{(1)} = 2000\left(-\log(1-0.9302513)\right)^2 = 14181.61.$$

Ainsi, on obtient

$$S^{(1)} = X_1^{(1)} + X_2^{(1)}) = 2858.676 + 14181.61 = 17040.29$$

(b) On simule la réalisation de $(X_1^{(1)}, X_2^{(1)})$ selon à partir de $(U_1^{(1)}, U_2^{(1)})$, où

$$X_1^{(1)} = \lambda\left((1-U_1^{(1)})^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)$$

et

$$X_2^{(1)} = \frac{1}{\beta}\left(-\log(1-U_2^{(1)})\right)^{\frac{1}{\tau}}.$$

Puisque les v.a sont antimonotones, on a $U_2^{(1)} = 1 - U_1^{(1)}$. On obtient $U_1^{(1)}$ selon

$$-1400\log(1-U_1^{(1)}) = 3728,$$

qui devient

$$U_1^{(1)} = 1 - \exp\left(-\frac{3728}{1400}\right) = 0.9302513.$$

Alors, on obtient

$$X_1^{(1)} = 2000\left((1-0.9302513)^{-\frac{1}{3}} - 1\right) = 2858.676$$

et

$$X_2^{(1)} = 2000\left(-\log(1-(1+0.9302513))\right)^2 = 10.45473.$$

$$S^{(1)} = X_1^{(1)} + X_2^{(1)}) = 2858.676 + 10.45473 = 2869.131.$$

3. (a) i. On a

$$\begin{aligned} VaR_\kappa(S) &= VaR_\kappa(X_1) + VaR_\kappa(X_2) \\ &= \exp\left(\mu_1 + \sigma VaR_\kappa(Z)\right) + \exp\left(\mu_2 + \sigma VaR_\kappa(Z)\right) \\ &= \exp\left(\mu_1\right)\exp\left(\sigma VaR_\kappa(Z)\right) + \exp\left(\mu_2\right)\exp\left(\sigma VaR_\kappa(Z)\right) \\ &= \left(\exp\left(\mu_1\right) + \exp\left(\mu_2\right)\right)\exp\left(\sigma VaR_\kappa(Z)\right) \\ &= \exp\left(a + bVaR_\kappa(Z)\right), \end{aligned}$$

où

$$a = \log\left(e^{\mu_1} + e^{\mu_2}\right)$$

et

$$b = \sigma.$$

ii. On a $a = \log\left(e^3 + e^2\right) = 3.313262$ et $b = 1$. On calcule

$$\begin{aligned} F_S(40) &= \Phi\left(\frac{\log(40) - 3.313262}{1}\right) \\ &= 0.6463993. \end{aligned}$$

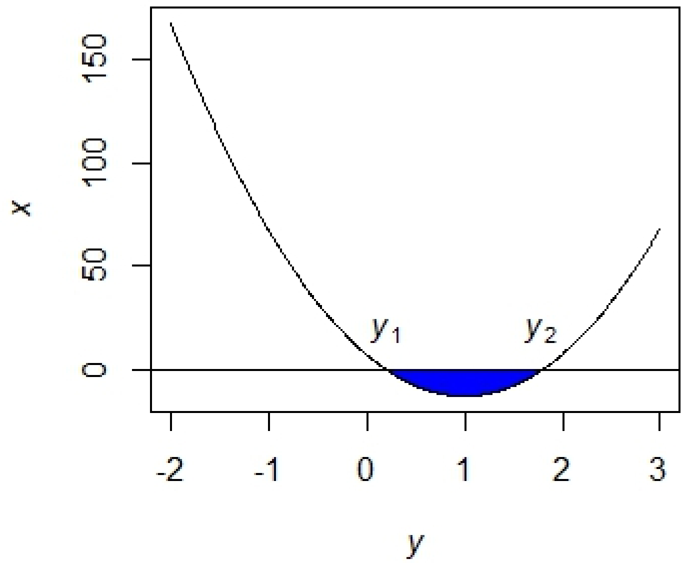
(b) On a

$$\begin{aligned} \Pr(S < x) &= \Pr(VaR_U(X_1) + VaR_{1-U}(X_2) < x) \\ &= \Pr(\exp\left(\mu_1 + \sigma VaR_U(Z)\right) + \exp\left(\mu_2 + \sigma VaR_{1-U}(Z)\right) < x) \\ &= \Pr(\exp\left(\mu_1 + \sigma VaR_U(Z)\right) + \exp\left(\mu_2 - \sigma VaR_U(Z)\right) < x). \end{aligned}$$

Soit $y = \exp\left(\sigma VaR_U(Z)\right)$. Alors, on multiplie les deux côtés de l'équation à l'intérieur de la probabilité par y et on obtient

$$\Pr(S < x) = \Pr(e^{\mu_1}y^2 - xy + e^{\mu_2} < 0).$$

On s'intéresse alors par la partie ombragée dans l'illustration suivante.



L'inégalité est de forme quadratique alors on obtient les limites selon

$$y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4e^{\mu_1+\mu_2}}}{2e^{\mu_1}}$$

sous la contrainte

$$\begin{aligned} x^2 - 4e^{\mu_1+\mu_2} &> 0 \\ x^2 &> 4e^{\mu_1+\mu_2} \\ x &> 2e^{\frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2)}. \end{aligned}$$

On déduit

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{x - \sqrt{x^2 - 4e^{\mu_1+\mu_2}}}{2e^{\mu_1}} \\ y_2 &= \frac{x + \sqrt{x^2 - 4e^{\mu_1+\mu_2}}}{2e^{\mu_1}}. \end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} \Pr(S < 0) &= \Pr(e^{\mu_1}y^2 - xy + e^{\mu_2} < 0) \\ &= \Pr(y_1 \leq y \leq y_2) \\ &= \Pr(y_1 \leq \exp(\sigma VaR_U(Z)) \leq y_2) \\ &= \Pr(\frac{1}{\sigma}\ln(y_1) \leq VaR_U(Z) \leq \frac{1}{\sigma}\ln(y_2)) \\ &= \Pr\left(\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\ln(y_1)\right) \leq U \leq \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\ln(y_2)\right)\right) \\ &= \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\ln(y_1)\right) - \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\ln(y_2)\right). \end{aligned}$$

On conclut que

$$
\begin{aligned}
c &= \frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4e^{\mu_1+\mu_2}}}{2e^{\mu_1}}\right)\\
d &= \frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4e^{\mu_1+\mu_2}}}{2e^{\mu_1}}\right)\\
e &= 2e^{\frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2)}.
\end{aligned}
$$

(c) On a $y_1 = 0.2060443$ et $y_2 = 1.785438$ et

$$\Phi\left(\ln(y_1)\right) - \Phi\left(\ln(y_2)\right) = 0.6618375.$$

4. (a) On a

$$
\begin{aligned}
E[X_1] &= c_1 e^{b_1} M_R(a_1)\\
&= 1000e^{-0.12}e^{-3.2\times 0.05+0.5\times 0.015^2\times 3.2^2}\\
&= 756.6549;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[X_2] &= c_2 e^{b_2} M_R(a_2)\\
&= 2000e^{-0.35}e^{-4.3\times 0.05+0.5\times 0.015^2\times 4.3^2}\\
&= 1139.087;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[X_1^2] &= c_1^2 e^{2b_1} M_R(2a_1)\\
&= 1000^2e^{-2\times 0.12}e^{-2\times 3.2\times 0.05+0.5\times 0.015^2\times 2^2\times 3.2^2}\\
&= 573847.3;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[X_2^2] &= c_2^2 e^{2b_2} M_R(2a_2)\\
&= 2000^2e^{-2\times 0.35}e^{-2\times 4.3\times 0.05+0.5\times 0.015^2\times 2^2\times 4.3^2}\\
&= 1302929;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[X_1X_2] &= c_1c_2e^{b_1+b_2}M_R(a_1+a_2)\\
&= 1000\times 2000\times e^{-0.47}\times M_R(7.5)\\
&= 1000\times 2000\times e^{-0.47}\times e^{-7.5\times 0.05+0.5\times 0.015^2\times 7.5^2}\\
&= 864568.5.
\end{aligned}
$$

Alors, on obtient

$$
\begin{aligned}
E[S] &= E[X_1+X_2]\\
&= E[X_1]+E[X_2]\\
&= 756.6549+1139.087\\
&= 1895.742
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
Var(S) &= E[S^2]-E[S]^2\\
&= E\left[(X_1+X_2)^2\right]-1895.742^2\\
&= E[X_1^2]+2E[X_1x_2]+E[X_2^2]-1895.742^2\\
&= 573847.3+2\times 864568.5+1302929-1895.742^2\\
&= 12075.57.
\end{aligned}
$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
VaR_{0.005}(R) &= 0.05 + 0.015VaR_{0.005}(Z) \\
&= 0.05 + 0.015^2 \times (-2.575829) \\
&= 0.01136257; \\
VaR_{0.995}(R) &= 0.05 + 0.015VaR_{0.995}(Z) \\
&= 0.05 + 0.015^2 \times 2.575829 \\
&= 0.08863744.
\end{aligned}$$

(c) La fonction $c_i e^{a_i R + b_i}$ est décroissante en R car $a_i < 0, i = 1, 2$. Alors,

$$\begin{aligned}
VaR_{0.005}(S) &= 1000 \times e^{-3.2 \times VaR_{0.995}(R) - 0.12} + 2000 \times e^{-4.3 \times VaR_{0.995}(R) - 0.35} \\
&= 1000 \times e^{-3.2 \times 0.08863744 - 0.12} + 2000 \times e^{-4.3 \times 0.08863744 - 0.35} \\
&= 1630.604; \\
VaR_{0.995}(S) &= 1000 \times e^{-3.2 \times VaR_{0.005}(R) - 0.12} + 2000 \times e^{-4.3 \times VaR_{0.005}(R) - 0.35} \\
&= 1000 \times e^{-3.2 \times 0.01136257 - 0.12} + 2000 \times e^{-4.3 \times 0.01136257 - 0.35} \\
&= 2197.422.
\end{aligned}$$

5. Le couple (X_1, X_2) est antimonotone. On déduit

$$F_{X_1,X_2}(k_1, k_2) = \max(F_{X_1}(k_1) + F_{X_2}(k_2) - 1; 0).$$

De plus, vu que $\alpha_1(0) > 0.5, i = 1, 2$, on a $F_{X_1}(k_i)$ pour $k_i \geq 0$. Alors,

$$F_{X_1,X_2}(k_1, k_2) = \begin{cases} F_{X_1}(k_1) + F_{X_2}(k_2) - 1, & k_1 \geq 0, k_2 \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) On sait que

$$f_{X_1,X_2}(k_1, k_2) = F_{X_1,X_2}(k_1, k_2) - F_{X_1,X_2}(k_1 - 1, k_2) - \quad = \quad F_{X_1,X_2}(k_1, k_2 - 1) + F_{X_1,X_2}(k_1 - 1, k_2 - 1).$$

On déduit les quatre cas possibles.

i. Cas $k_1 = 0, k_2 = 0$:

$$f_{X_1,X_2}(0, 0) = F_{X_1,X_2}(0, 0) = \alpha_1(0) + \alpha_2(0) - 1$$

ii. Cas $k_1 > 0, k_2 = 0$:

$$\begin{aligned}
f_{X_1,X_2}(k_1, 0) &= F_{X_1,X_2}(k_1, 0) - F_{X_1,X_2}(k_1 - 1, 0) - 0 + 0 \\
&= \sum_{j=0}^{k_1} \alpha_1(j) + \alpha_2(0) - 1 - \sum_{j=0}^{k_1 - 1} \alpha_1(j) - \alpha_2(0) + 1 \\
&= \alpha_1(k_1)
\end{aligned}$$

iii. Cas $k_1 = 0, k_2 > 0$:

$$\begin{aligned}
f_{X_1,X_2}(0, k_2) &= F_{X_1,X_2}(0, k_2) - 0 - F_{X_1,X_2}(0, k_2) + 0 \\
&= \sum_{j=0}^{k_2} \alpha_2(j) + \alpha_1(0) - 1 - \sum_{j=0}^{k_2 - 1} \alpha_2(j) - \alpha_1(0) + 1 \\
&= \alpha_2(k_2)
\end{aligned}$$

iv. Cas $k_1 > 0, k_2 > 0$:

$$\begin{aligned} f_{X_1,X_2}(0,k_2) &= F_{X_1}(k_1) + F_{X_2}(k_2) - 1 - F_{X_1}(k_1-1) - F_{X_2}(k_2) + 1 - \\ &\quad F_{X_1}(k_1) - F_{X_2}(k_2-1) + 1 + F_{X_1}(k_1-1) + F_{X_2}(k_2-1) - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned} E[X_1X_2] &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} ij f_{X_1,X_2}(i,j) \\ &= 0 \times 0 \times f_{X_1,X_2}(0,0) + \sum_{j=1}^{m} 0 \times j f_{X_1,X_2}(0,j) + \\ &\quad \sum_{i=1}^{m} i \times 0 f_{X_1,X_2}(i,0) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} i \times j \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Intuituvement, les v.a. sont jamais non-nuls en même temps, alors l'espérance de leur produit est nul. Ensuite, on calcule

$$\begin{aligned} Cov(X_1,X_2) &= E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2] \\ &= 0 - E[X_1]E[X_2] \\ &= E[X_1]E[X_2]. \end{aligned}$$

De plus, on obtient

$$\begin{aligned} Var(S) &= 2Var(X) + 2Cov(X_1,X_2) \\ &= 2E[X^2] - 2E[X]^2 - 2E[X]^2 \\ &= 2E[X^2] - 4E[X]^2 \end{aligned}$$

(c) On applique un produit de convolution, i.e. $f_S(k) = \sum_{i=0}^{k} f_{X_1,X_2}(i,k-i)$. Pour $k = 0$, on a $f_S(0) = f_{X_1,X_2}(0,0)$. Pour $0 < k \leq m$, on obtient

$$\begin{aligned} f_S(k) &= \sum_{i=0}^{k} f_{X_1,X_2}(i,k-i) \\ &= f_{X_1,X_2}(0,k) + \sum_{i=1}^{k-1} 0 + f_{X_1,X_2}(k,0) \\ &= f_{X_1,X_2}(0,k) + f_{X_1,X_2}(k,0) \end{aligned}$$

(d) Puisque les v.a. ne prennent pas de valeurs positives en même temps, on a

$$\begin{aligned} E\left[\max(S-k;0)\right] &= E\left[\max(X_1+X_2-k;0)\right] \\ &= \sum_{j=0}^{m} \max(j-k;0) f_{X_1,X_2}(0,j) + \sum_{i=0}^{m} \max(i-k;0) f_{X_1,X_2}(i,0) \\ &= \sum_{j=0}^{m} \max(j-k;0)\alpha_2(j) + \sum_{i=0}^{m} \max(i-k;0)\alpha_1(i) \\ &= E\left[\max(X_1-k;0)\right] + E\left[\max(X_2-k;0)\right] \end{aligned}$$

(e) Voir le code sur GitHub

6. (a) On a

$$\begin{aligned}F_S(x) &= \Pr(X_1 + X_2 \leq x)\\ &= \Pr(2U + U \leq x)\\ &= \Pr(3U \leq x)\\ &= \frac{x}{3},\ \text{pour } x \in [0,3].\end{aligned}$$

(b) On obtient

$$\begin{aligned}F_S(x) &= \Pr(X_1 + X_2 \leq x)\\ &= \Pr(2U + (1-U) \leq x)\\ &= \Pr(1 + U \leq x)\\ &= \Pr(U \leq x-1)\\ &= x-1,\ \text{pour } x \in [1,2]\end{aligned}$$

7. (a) On a

$$\begin{aligned}F_S(x) &= \Pr(X_1 + X_2 \leq x)\\ &= \Pr\left(F_{X_1}^{-1}(U) + F_{X_2}^{-1}(U) \leq x\right)\\ &= \Pr\left((\sigma_1+\sigma_2)\Phi^{-1}(U) \leq x\right)\\ &= \Pr\left(U \leq \Phi\left(\frac{x}{\sigma_1+\sigma_2}\right)\right)\\ &= \Phi\left(\frac{x}{\sigma_1+\sigma_2}\right).\end{aligned}$$

(b) On obtient

$$\begin{aligned}F_S(x) &= \Pr(X_1 + X_2 \leq x)\\ &= \Pr\left(F_{X_1}^{-1}(U) + F_{X_2}^{-1}(U) \leq x\right)\\ &= \Pr\left((\sigma_1-\sigma_2)\Phi^{-1}(U) \leq x\right)\\ &= \Pr\left(U \leq \Phi\left(\frac{x}{\sigma_1-\sigma_2}\right)\right)\\ &= \Phi\left(\frac{x}{\sigma_1-\sigma_2}\right).\end{aligned}$$

8. (a) On nous demande de démontrer que

$$Cov(X_1^{\min}, X_2^{\min}) \leq Cov(X_1, X_2) \leq Cov(X_1^{\max}, X_2^{\max}).$$

On peut décomposer la covariance par sa définition pour trouver

$$E[X_1^{\min}X_2^{\min}] - E[X_1^{\min}]E[X_2^{\min}] \leq E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2] \leq E[X_1^{\max}X_2^{\max}] - E[X_1^{\max}]E[X_2^{\max}].$$

On sait que $E[X_i^{\min}] = E[X_i] = E[X_i^{\max}]$, pour $i = 1, 2$, alors

$$E[X_1^{\min}X_2^{\min}] \leq E[X_1X_2] \leq E[X_1^{\max}X_2^{\max}],$$

ce qu'on doit maintenant démontrer. On sait que

$$E[X_1X_2] = \int_0^\infty \overline{F}_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 \text{ et}$$

$$\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = 1 - F_{X_1}(x_1) - F_{X_2}(x_2) + F_{X_1,X_2}(x_1,x_2).$$

On développe :

$$F_{X_1^{\min},X_2^{\min}}(x_1,x_2) \leq F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \leq F_{X_1^{\max},X_2^{\max}}(x_1,x_2)$$

$$\overline{F}_{X_1^{\min},X_2^{\min}}(x_1,x_2) \leq \overline{F}_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \leq \overline{F}_{X_1^{\max},X_2^{\max}}(x_1,x_2)$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_{X_1^{\min},X_2^{\min}}(x_1,x_2)dx_1dx_2 \leq \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 \leq \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_{X_1^{\max},X_2^{\max}}(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

$$E[X_1^{\min}X_2^{\min}] \leq E[X_1X_2] \leq E[X_1^{\max}X_2^{\max}],$$

ce qui prouve le résultat.

(b) On demande de démontrer que

$$\rho_P(X_1^{\min},X_2^{\min}) \leq \rho_P(X_1,X_2) \leq \rho_P(X_1^{\max},X_2^{\max}). \tag{5}$$

On sais que

$$\rho_P(X_1,X_2) = \frac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}}$$

et que

$$Var(X_i^{\min}) = Var(X_i) = Var(X_i^{\max}), \text{ pour } i = 1,2.$$

Alors le terme $\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}$ est une constante commune à chaque terme de l'équation (5). Pour démontrer (5), on doit seulement démontrer que

$$Cov(X_1^{\min},X_2^{\min}) \leq Cov(X_1,X_2) \leq Cov(X_1^{\max},X_2^{\max}),$$

qui a déjà été démontré dans la partie a).

9. (a) On répète la démarche présentée dans la question 8. Pour démontrer que

$$\rho_P(X_1,X_2) \leq \rho_P(X_1',X_2') \text{ et}$$

$$Cov(X_1,X_2) \leq Cov(X_1',X_2'),$$

on doit démontrer que

$$E[X_1X_2] \leq E[X_1'X_2'].$$

On y va.

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \leq F_{X_1',X_2'}(x_1,x_2)$$
$$\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \leq \overline{F}_{X_1',X_2'}(x_1,x_2)$$
$$\int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \leq \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_{X_1',X_2'}(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$
$$E[X_1X_2] \leq E[X_1'X_2'].$$

(b) La fonction de répartition de $M = \max(X_1,X_2)$ est

$$F_M(x) = \Pr(M \leq x) = \Pr(\max(X_1,X_2) \leq x) = F_{X_1,X_2}(x,x).$$

On conclut donc que

$$F_{X_1,X_2}(x,x) \leq F_{X_1',X_2'}(x,x) \text{ et}$$
$$F_M(x) \leq F_{M'}(x).$$

Note : $M' \preceq_{st} M$.

(c)

$$
\begin{aligned}
F_M(x) &\leq F_{M'}(x) \\
\overline{F}_M(x) &\geq \overline{F}_{M'}(x) \\
\int_0^\infty \overline{F}_M(m)\mathrm{d}m &\geq \int_0^\infty \overline{F}_{M'}(m)\mathrm{d}m \\
E[M] &\geq E[M']
\end{aligned}
$$

Note : $M' \preceq_{st} M$ implique $E[M] \geq E[M']$.

(d) On simplifie premièrement l'expression $E[\max(M - x; 0)]$.

$$
\begin{aligned}
E[\max(M - x; 0)] &= \int_0^\infty \max(m - x; 0) f_M(m)\mathrm{d}m \\
&= \int_0^x 0 f_M(m) dm + \int_x^\infty (m - x) f_M(m)\mathrm{d}m \\
&= -(m - x)\overline{F}_M(x)|_x^\infty + \int_x^\infty \frac{d}{dm}(m - x)\overline{F}_M(m)\mathrm{d}m \\
&= -0 + 0 + \int_x^\infty \overline{F}_M(m)\mathrm{d}m = \int_x^\infty \overline{F}_M(m)\mathrm{d}m.
\end{aligned}
$$

On applique le résultat de la partie b).

$$
\begin{aligned}
F_M(m) &\leq F_{M'}(m) \\
\overline{F}_M(m) &\geq \overline{F}_{M'}(m) \\
\int_x^\infty \overline{F}_M(m)\mathrm{d}m &\geq \int_x^\infty \overline{F}_{M'}(m)\mathrm{d}m \\
E[\max(M - x; 0)] &\geq E[\max(M' - x; 0)].
\end{aligned}
$$

Note : $M' \preceq_{st} M$ implique $M' \preceq_{sl} M$. De plus, $M' \preceq_{sl} M$ implique $E[\max(M - x; 0)] \geq E[\max(M' - x; 0)]$.

10. Certains calculs sont fait en R, voir GitHub.

(a) On a

$$
VaR_\kappa(S) = VaR_\kappa(X_1) + VaR_\kappa(X_2)
$$

On cherche la VaR de X_1 et X_2. On isole pour x dans $u = F_{X_i}(x), i = 1, 2$.

$$
\begin{aligned}
u &= 0.9 + 0.1\left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right) \\
\frac{u - 0.9}{0.1} &= 1 - e^{-\frac{x}{2}} \\
e^{-\frac{x}{2}} &= 1 - \frac{u - 0.9}{0.1} \\
-\frac{x}{2} &= \ln\left(1 - \frac{u - 0.9}{0.1}\right) \\
x &= -2\ln\left(1 - \frac{u - 0.9}{0.1}\right);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u &= 0.8 + 0.2\left(1 - e^{-x}\right) \\
\frac{u - 0.8}{0.2} &= 1 - e^{-x} \\
e^{-x} &= 1 - \frac{u - 0.8}{0.2} \\
x &= -\ln\left(1 - \frac{\kappa - 0.8}{0.2}\right).
\end{aligned}
$$

On conclut

$$VaR_\kappa(X_1) = \begin{cases} -2\ln\left(1 - \frac{\kappa - 0.9}{0.1}\right), & \text{si } 0.9 \leq \kappa \leq 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases};$$

$$VaR_\kappa(X_2) = \begin{cases} -\ln\left(1 - \frac{\kappa - 0.8}{0.2}\right), & \text{si } 0.8 \leq \kappa \leq 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases};$$

et

$$VaR_\kappa(S) = \begin{cases} -\ln\left(1 - \frac{\kappa - 0.8}{0.2}\right), & \text{si } 0.8 \leq \kappa \leq 0.9 \\ -\ln\left(1 - \frac{\kappa - 0.8}{0.2}\right) - 2\ln\left(1 - \frac{\kappa - 0.9}{0.1}\right), & \text{si } 0.9 \leq \kappa \leq 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

On calcule

$$VaR_{0.5}(S) = 0.0000000, VaR_{0.85}(S) = 0.2876821, VaR_{0.999}(S) = 14.5086577.$$

(b) Note : cette question est sous l'hypothèse H_1. Pour des variables comonotones, on a

$$TVaR_\kappa(S) = TVaR_\kappa(X_1) + TVaR_\kappa(X_2).$$

Soit $I_i \sim Bern(q_i)$ et $Y_i \sim Exp(\beta_i)$. Alors,

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X_i) &= \frac{q_i E\left[Y_i \mathbb{1}_{Y_i > VaR_\kappa(X_i)}\right] + VaR_\kappa(X_i)\left(F_{X_i}(VaR_\kappa(X_i)) - \kappa\right)}{1-\kappa} \\ &= \frac{q_i \overline{F}_{Y_i}(VaR_\kappa(Y_i))(VaR_\kappa(X_i) + 1/\beta_i) + VaR_\kappa(X_i)\left(F_{X_i}(VaR_\kappa(X_i)) - \kappa\right)}{1-\kappa} \\ &= \frac{\overline{F}_{X_i}(VaR_\kappa(X_i))\{VaR_\kappa(X_i) + 1/\beta_i\} + VaR_\kappa(X_i)\left(F_{X_i}(VaR_\kappa(X_i)) - \kappa\right)}{1-\kappa}. \end{aligned}$$

Si X_i est continu sur $(VaR_\kappa(X_i), \infty)$, on a

$$TVaR_\kappa(X_i) = VaR_\kappa(X_i) + 1/\beta_i.$$

On calcule

$$\begin{aligned} TVaR_{0.5}(X_1) &= \frac{0.1 * 2 + 0}{0.5} = 0.4 \\ TVaR_{0.85}(X_1) &= \frac{0.1 * 2 + 0}{0.15} = 1.33333 \\ TVaR_{0.999}(X_1) &= -2\ln\left(1 - \frac{0.999 - 0.9}{0.1}\right) + 2 = 11.21034 \\ TVaR_{0.5}(X_2) &= \frac{0.2 * 1 + 0}{0.5} = 0.4 \\ TVaR_{0.85}(X_2) &= -\ln\left(1 - \frac{0.85 - 0.8}{0.2}\right) + 1 = 1.28768 \\ TVaR_{0.999}(X_2) &= -\ln\left(1 - \frac{0.999 - 0.8}{0.2}\right) + 1 = 6.29831 \\ TVaR_{0.5}(S) &= 0.4 + 0.4 = 0.8 \\ TVaR_{0.85}(S) &= 1 + 1.28768 = 2.621013 \\ TVaR_{0.999}(S) &= 11.21034 + 6.29831 = 17.50865 \end{aligned}$$

Note : solution alternative sur GitHub.

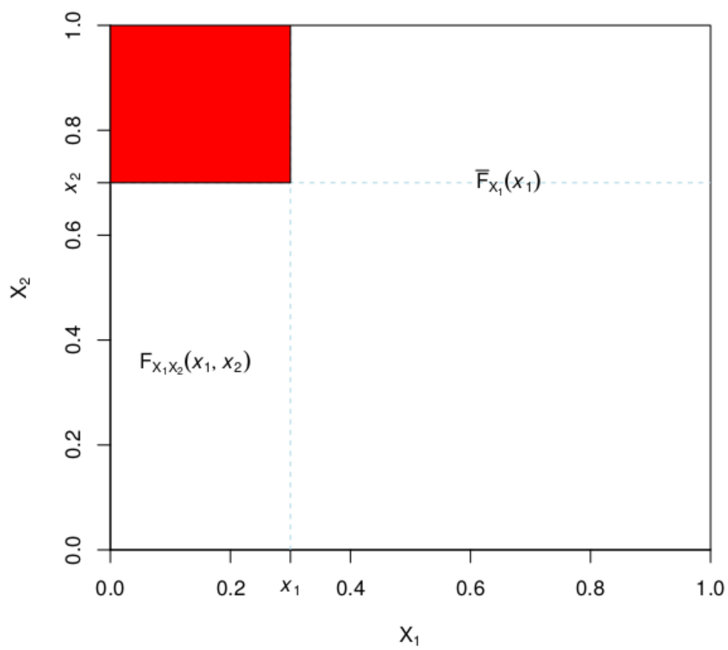
(c) Sous l'hypothèse H_1, on a

$$\begin{aligned} Pr(S = 0) &= Pr(X_1 = 0, P_2 = 0) \\ &= F_{X_1, X_2}(0, 0) \\ &= \min(0.9; 0.8) \\ &= 0.8. \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse H_2, on a

$$\begin{aligned} Pr(S=0) &= Pr(X_1=0, P_2=0) \\ &= F_{X_1,X_2}(0,0) \\ &= \max(0.9+0.8-1;0) \\ &= 0.7. \end{aligned}$$

(d) On sait que $Pr(X_1 < x_1, X_2 > x_2) = 1 - \overline{F}_{X_1}(x_1) - F_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$, comme présenté dans l'illustration suivante.



Pour H_1,

$$\begin{aligned} Pr(X_1=0, X_2>0) &= 1 - \overline{F}_{X_1}(0) - F_{X_1,X_2}(0,0) \\ &= 1 - 0.1 - \min(0.9;0.8) \\ &= 1 - 0.1 - 0.8 = 0.1. \end{aligned}$$

Pour H_2,

$$\begin{aligned} Pr(X_1=0, X_2>0) &= 1 - \overline{F}_{X_1}(0) - F_{X_1,X_2}(0,0) \\ &= 1 - 0.1 - \max(0.9+0.8-1;0) \\ &= 1 - 0.1 - 0.7 = 0.2. \end{aligned}$$

(e) Pour H_1,

$$\begin{aligned} Pr(X_1>0, X_2=0) &= 1 - \overline{F}_{X_2}(0) - F_{X_1,X_2}(0,0) \\ &= 1 - 0.2 - \min(0.9;0.8) \\ &= 1 - 0.2 - 0.8 = 0. \end{aligned}$$

Pour H_2,

$$\begin{aligned} Pr(X_1 > 0, X_2 = 0) &= 1 - \overline{F}_{X_2}(0) - F_{X_1,X_2}(0,0) \\ &= 1 - 0.2 - \max(0.9 + 0.8 - 1; 0) \\ &= 1 - 0.2 - 0.7 = 0.1. \end{aligned}$$

(f) Pour H_1,

$$\begin{aligned} Pr(X_1 > 0, X_2 > 0) &= \overline{F}_{X_1,X_2}(0,0) \\ &= 1 - F_{X_1}(0) - F_{X_2}(0) + F_{X_1,X_2}(0,0) \\ &= 1 - 0.9 - 0.8 + \min(0.9; 0.8) \\ &= 1 - 0.9 - 0.8 + 0.8 = 0.1. \end{aligned}$$

Pour H_2,

$$\begin{aligned} Pr(X_1 > 0, X_2 > 0) &= \overline{F}_{X_1,X_2}(0,0) \\ &= 1 - F_{X_1}(0) - F_{X_2}(0) + F_{X_1,X_2}(0,0) \\ &= 1 - 0.9 - 0.8 + \max(0.9 + 0.8 - 1; 0) \\ &= 1 - 0.9 - 0.8 + 0.7 = 0. \end{aligned}$$

(g) i. On cherche $Pr(X_1 > x, X_2 = 0) = P(X_1 > x) - P(X_1 > x, X_2 > 0)$, mais $Pr(X_1 > 0, X_2 > 0) = 0$. Alors

$$Pr(X_1 > x, X_2 = 0) = \overline{F}_{X_1}(x).$$

ii. On cherche $Pr(X_1 = 0, X_2 > x) = P(X_2 > x) - P(X_1 > 0, X_2 > x)$, mais $Pr(X_1 > 0, X_2 > 0) = 0$. Alors

$$Pr(X_1 = x, X_2 > 0) = \overline{F}_{X_2}(x).$$

iii.

$$Pr(S > x) = Pr(X_1 > x, X_2 = 0) + Pr(X_1 = 0, X_2 > x) + \sum_{\alpha \in (0,x)} Pr(X_1 > \alpha, X_2 > x - \alpha).$$

Mais on sait que $Pr(X_1 > 0, X_2 > 0) = 0$, alors

$$Pr(S > x) = Pr(X_1 > x, X_2 = 0) + Pr(X_1 = 0, X_2 > x) = \overline{F}_{X_1}(x) + \overline{F}_{X_2}(x).$$

iv. On obtient

$$\begin{aligned} F_S(x) &= 1 - Pr(S > x) \\ &= 1 - \overline{F}_{X_1}(x) - \overline{F}_{X_2}(x) \\ &= 1 - (1 - F_{X_1}(x)) - (1 - F_{X_2}(x)) \\ &= F_{X_1}(x) + F_{X_2}(x) - 1 \end{aligned}$$

v. On calcule

$$\begin{aligned} E[\max(S - x; 0)] &= \int_x^\infty \overline{F}_S(s) ds \\ &= \int_x^\infty (1 - F_{X_1}(s) - F_{X_2}(s) + 1)\, ds \\ &= \int_x^\infty (1 - F_{X_1}(s)) + (1 - F_{X_2}(s))\, ds \\ &= \int_x^\infty \overline{F}_{X_1}(s) ds + \int_x^\infty \overline{F}_{X_2}(s) ds \\ &= E[\max(X_1 - x; 0)] + E[\max(X_2 - x; 0)] \end{aligned}$$

vi. On calcule premièrement la VaR_κ.

$$\begin{aligned}F_S(3) &= F_{X_1}(3) + F_{X_2}(3) - 1 \\ &= 0.9 + 0.1\left(1 - e^{-\frac{3}{2}}\right) + 0.8 + 0.2\left(1 - e^{-3}\right) - 1 \\ &= 0.96773;\end{aligned}$$

On peut aussi trouver une formule générale pour $VaR_\kappa(S)$. On définit $y = e^{-\frac{x}{2}}$. On a $F_S(0) = F_{X_1}(3) + F_{X_2}(3) - 1 = 0.7$, alors $VaR_\kappa(S) = 0$ pour $0 \leq \kappa < 0.7$. Pour $\kappa \geq 0.7$ on cherche x tel que $u = F_S(x)$

$$\begin{aligned}u &= 0.9 + 0.1\left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right) + 0.8 + 0.2\left(1 - e^{-x}\right) - 1 \\ u - 0.7 &= 0.1(1-y) + 0.2(1-y^2) \\ 0 &= 0.2y^2 + 0.1y + (u-1) \\ e^{-\frac{x}{2}} &= \frac{-0.1 + \sqrt{0.1^2 - 4(0.2)(u-1)}}{2(0.2)} \\ x &= -2\ln\left(\frac{-0.1 + \sqrt{0.81 - 0.8u}}{0.4}\right),\end{aligned}$$

alors, on obtient

$$VaR_\kappa(S) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq \kappa \leq 0.7 \\ -2\ln\left(\frac{-0.1+\sqrt{0.81-0.8\kappa}}{0.4}\right), & \text{si } 0.7 \leq \kappa \leq 1 \end{cases}.$$

Ensuite, on présente deux méthodes pour calculer la $TVaR_\kappa$. On sait que

$$TVaR_\kappa(X) = VaR_\kappa(X) + \frac{1}{1-\kappa} E\left[\max(X - VaR_\kappa(X)); 0\right].$$

On déduit alors

$$\begin{aligned}TVaR_\kappa(S) &= VaR_\kappa(X) + \frac{1}{1-\kappa} E\left[\max(S - VaR_\kappa(S)); 0\right] \\ &= VaR_\kappa(S) + \frac{1}{1-\kappa}\left\{E\left[\max(X_1 - VaR_\kappa(S)); 0\right] + E\left[\max(X_2 - VaR_\kappa(S)); 0\right]\right\} \\ &= VaR_\kappa(S) + \frac{1}{1-\kappa}\left\{\int_{VaR_\kappa(S)}^{\infty} \overline{F}_{X_1}(s)ds + \int_{VaR_\kappa(S)}^{\infty} \overline{F}_{X_2}(s)ds\right\} \\ &= VaR_\kappa(S) + \frac{1}{1-\kappa}\left\{\int_{VaR_\kappa(S)}^{\infty} 0.1e^{-\frac{x}{2}}dx + \int_{VaR_\kappa(S)}^{\infty} 0.2e^{-x}dx\right\} \\ &= VaR_\kappa(S) + \frac{1}{1-\kappa}\left\{-0.1(2)e^{-\frac{x}{2}}\Big|_{VaR_\kappa(S)}^{\infty} - 0.2(1)e^{-x}\Big|_{VaR_\kappa(S)}^{\infty}\right\} \\ &= VaR_\kappa(S) + \frac{1}{1-\kappa}\left\{0.2e^{-\frac{VaR_\kappa(S)}{2}} + 0.2e^{-VaR_\kappa(S)}\right\} \\ &= VaR_\kappa(S) + \frac{1}{1-\kappa}\left\{0.2e^{-\frac{VaR_\kappa(S)}{2}} + 0.2e^{-VaR_\kappa(S)}\right\} \\ &= 3 + \frac{0.2}{1-0.96773}\left\{e^{-\frac{3}{2}} + e^{-3}\right\} \\ &= 4.6915.\end{aligned}$$

On présente maintenant une autre approche pour trouver $TVaR_\kappa(S)$. En posant $VaR_\kappa(S) = s$, on trouve

$$TVaR_\kappa(S) = \frac{E\left[S \times \mathbb{1}_{\{S>s\}}\right] + s\left(F_S(s) - \kappa\right)}{1-\kappa}.$$

Si $s = 0$, $\frac{s(F_S(s)-\kappa)}{1-\kappa} = 0$. Si $s > 0$, $F_S(s) = \kappa$ et $\frac{s(F_S(s)-\kappa)}{1-\kappa} = 0$. Alors, on a

$$
\begin{aligned}
TVaR_\kappa(S) &= \frac{E\left[S\mathbb{1}_{\{S>s\}}\right]}{1-\kappa} \\
&= \frac{E\left[(X_1+X_2)\mathbb{1}_{\{X_1+X_2>s\}}\right]}{1-\kappa} \\
&= \frac{E\left[X_1\mathbb{1}_{\{X_1+X_2>s\}}\right] + E\left[X_2\mathbb{1}_{\{X_1+X_2>s\}}\right]}{1-\kappa} \\
&= \frac{E\left[X_1\mathbb{1}_{\{X_1>s-X_2\}}\right] + E\left[X_2\mathbb{1}_{\{X_2>s-X_1\}}\right]}{1-\kappa} \\
&= \frac{E\left[X_1\mathbb{1}_{\{X_1>s\}}\right] + E\left[X_2\mathbb{1}_{\{X_2>s\}}\right]}{1-\kappa} \\
&= \frac{\overline{F}_{X_1}(s)TVaR_{F_{X_1}(s)}(X_1) + \overline{F}_{X_2}(s)TVaR_{F_{X_2}(s)}(X_2)}{1-\kappa}.
\end{aligned}
$$

En b), on a développé

$$
TVaR_\kappa(X_i) = \frac{\overline{F}_{X_i}(VaR_\kappa(X_i))\{VaR_\kappa(X_i) + 1/\beta_i\} + VaR_\kappa(X_i)\left(F_{X_i}(VaR_\kappa(X_i)) - \kappa\right)}{1-\kappa};
$$

$$
TVaR_{F_{X_i}(s)}(X_i) = \frac{\overline{F}_{X_i}(VaR_{F_{X_i}(s)}(X_i))\{VaR_{F_{X_i}(s)}(X_i) + 1/\beta_i\} + VaR_{F_{X_i}(s)}(X_i)\Big(F_{X_i}(VaR_{F_{X_i}(s)}(X_i)) -}{1-F_{X_i}(s)}
$$

On obtient

$$
\begin{aligned}
TVaR_\kappa(S) &= \frac{\overline{F}_{X_1}(s)TVaR_{F_{X_1}(s)}(X_1) + \overline{F}_{X_2}(s)TVaR_{F_{X_2}(s)}(X_2)}{1-\kappa} \\
&= \frac{\overline{F}_{X_1}(VaR_{F_{X_1}(s)}(X_1))\{VaR_{F_{X_1}(s)}(X_1) + 1/\beta_1\} + VaR_{F_{X_1}(s)}(X_1)\Big(F_{X_1}(VaR_{F_{X_1}(s)}(X_1)) - F_X}{1-\kappa} \\
&\quad + \frac{\overline{F}_{X_2}(VaR_{F_{X_2}(s)}(X_1))\{VaR_{F_{X_2}(s)}(X_1) + 1/\beta_2\} + VaR_{F_{X_2}(s)}(X_1)\Big(F_{X_2}(VaR_{F_{X_2}(s)}(X}{1-\kappa} \\
&= \frac{VaR_{F_{X_1}(s)}(X_1)(\overline{F}_{X_1}(VaR_{F_{X_1}(s)}(X_1)) + F_{X_1}(VaR_{F_{X_1}(s)}(X_1)) - F_{X_1}(s)) + \overline{F}_{X_1}(VaR_{F_{X_1}(s)}(X}{1-\kappa} \\
&\quad + \frac{VaR_{F_{X_2}(s)}(X_2)(\overline{F}_{X_2}(VaR_{F_{X_2}(s)}(X_2)) + F_{X_2}(VaR_{F_{X_2}(s)}(X_2)) - F_{X_2}(s)) + \overline{F}_{X_2}(VaR}{1-\kappa} \\
&= \frac{VaR_{F_{X_1}(s)}(X_1)\overline{F}_{X_1}(s) + \overline{F}_{X_1}(VaR_{F_{X_1}(s)}(X_1))/\beta_1}{1-\kappa} \\
&\quad + \frac{VaR_{F_{X_2}(s)}(X_2)\overline{F}_{X_2}(s) + \overline{F}_{X_2}(VaR_{F_{X_2}(s)}(X_2))/\beta_2}{1-\kappa}.
\end{aligned}
$$

De plus, $VaR_{F_{X_1}(s)}(X_1) = VaR_{F_{X_2}(s)}(X_2) = s$.

$$
\begin{aligned}
TVaR_\kappa(S) &= \frac{VaR_{F_{X_1}(s)}(X_1)\overline{F}_{X_1}(s) + \overline{F}_{X_1}(VaR_{F_{X_1}(s)}(X_1))/\beta_1}{1-\kappa} \\
&\quad + \frac{VaR_{F_{X_2}(s)}(X_2)\overline{F}_{X_2}(s) + \overline{F}_{X_2}(VaR_{F_{X_2}(s)}(X_2))/\beta_2}{1-\kappa} \\
&= \frac{s(\overline{F}_{X_1}(s) + \overline{F}_{X_2}(s))}{1-\kappa} + \frac{\overline{F}_{X_1}(VaR_{F_{X_1}(s)}(X_1))/\beta_1 + \overline{F}_{X_2}(VaR_{F_{X_2}(s)}(X_2))/\beta_2}{1-\kappa} \\
&= s + \frac{\overline{F}_{X_1}(VaR_{F_{X_1}(s)}(X_1))/\beta_1 + \overline{F}_{X_2}(VaR_{F_{X_2}(s)}(X_2))/\beta_2}{1-\kappa}.
\end{aligned}
$$

On conclut que

$$TVaR_\kappa(S) = VaR_\kappa(S) + \frac{\overline{F}_{X_1}(VaR_{F_{X_1}(VaR_\kappa(S))}(X_1))/\beta_1 + \overline{F}_{X_2}(VaR_{F_{X_2}(VaR_\kappa(S))}(X_2))/\beta_2}{1-\kappa}.$$

Les cas particuliers sont

$$TVaR_\kappa(S) = \begin{cases} \frac{E[X_1]+E[X_1]}{1-\kappa}, & \text{si } 0 \leq \kappa < 0.7 \\ VaR_\kappa(S) + \frac{\overline{F}_{X_1}(VaR_\kappa(s))/\beta_1 + \overline{F}_{X_1}(VaR_\kappa(s))/\beta_2}{1-\kappa}, & \text{si } 0.7 \leq \kappa < 1. \end{cases}.$$

11. Une mesure de risque est homogène si $\rho(aX) = a\rho(X)$. On a

$$\begin{aligned} \rho_h^{ESS}(aX) &= \frac{E\left[aXe^{haX}\right]}{E\left[e^{haX}\right]} \\ &= a\rho_{ah}^{ESS}(X) \neq \rho_h^{ESS}(X) \end{aligned}$$

12. On a

$$\overline{F}_X(x) = \Pr(X > x) = 1 - \kappa \leq e^{-tx}\mathcal{M}_X(t)$$

On isole x

$$e^{-tx} \geq \frac{1-\kappa}{\mathcal{M}_X(t)}$$

et on trouve

$$x \leq -\frac{1}{t}\ln\left(\frac{1-\kappa}{\mathcal{M}_X(t)}\right) = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{\mathcal{M}_X(t)}{1-\kappa}\right)$$

On obtient le résultat souhaité :

$$VaR_\kappa(X) \leq \varphi_\kappa(t) = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{\mathcal{M}_X(t)}{1-\kappa}\right),$$

13. (a) On a

$$\begin{aligned} \varphi_\kappa(t) &= \frac{1}{t}\left(\ln\left(e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}\right) - \ln(1-\kappa)\right) \\ &= \frac{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}{t} - \frac{\ln(1-\kappa)}{t} \\ &= \mu + \frac{1}{2}\sigma^2 t - \frac{\ln(1-\kappa)}{t} \end{aligned}$$

(b) On identifie $\varphi'(t)$:

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{\ln(1-\kappa)}{t^2} = 0.$$

On obtient

$$t_\kappa = \frac{1}{\sigma}\sqrt{-2\ln(1-\kappa)}.$$

(c) On remplace t_κ dans $\varphi_\kappa(t)$:

$$\begin{aligned} \rho_\kappa(X) &= \varphi_\kappa(t_\kappa) \\ &= \mu + \frac{1}{2}\sigma^2 t_\kappa - \frac{\ln(1-\kappa)}{t_\kappa} \\ &= \mu + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{1}{\sigma}\sqrt{-2\ln(1-\kappa)} - \frac{\ln(1-\kappa)}{\frac{1}{\sigma}\sqrt{-2\ln(1-\kappa)}} \\ &= \mu + \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma\sqrt{-\ln(1-\kappa)} + \sigma\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-\ln(1-\kappa)} \\ &= \mu + \frac{2}{\sqrt{2}}\sigma\sqrt{-\ln(1-\kappa)} \\ &= \mu + \sigma\sqrt{-2\ln(1-\kappa)} \end{aligned}$$

14. (a) On a

$$\begin{aligned}
\varphi_\kappa(t) &= \frac{1}{t}\left(\ln\left(e^{\lambda(\mathcal{M}_B(t)-1)}\right)-\ln(1-\kappa)\right)\\
&= \frac{\lambda(\mathcal{M}_B(t)-1)}{t}-\frac{\ln(1-\kappa)}{t}\\
&= \frac{\lambda\mathcal{M}_B(t)-1-\ln(1-\kappa)}{t}
\end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{M}_B(t)=\frac{1}{1-t}.$$

(b) On dérive

$$\varphi\prime(t)=\frac{1}{t}\lambda\mathcal{M}'_B(t)-\frac{1}{t^2}(\lambda\mathcal{M}_B(t)-1-\ln(1-\kappa))$$

On cherche t tel que

$$\varphi\prime(t)=0.$$

On a

$$\lambda t\mathcal{M}'_B(t)-(\lambda\mathcal{M}_B(t)-1-\ln(1-\kappa))=0$$

L'expression devient

$$\lambda t\frac{1}{(1-t)^2}-\left(\lambda\frac{1}{1-t}-1-\ln(1-\kappa)\right)=0$$

$$\lambda t-\left(\lambda(1-t)-(1-t)^2-(1-t)^2\ln(1-\kappa)\right)=0$$

On pose

$$u=1-t.$$

On a

$$\lambda(1-u)-\left(\lambda u-u^2-u^2\ln(1-\kappa)\right)=0$$

$$(1+\ln(1-\kappa))u^2-2\lambda u+\lambda=0$$

On obtient

$$\begin{aligned}
t_\kappa &= 1-\frac{2\lambda-\sqrt{4\lambda^2-4\lambda(1+\ln(1-\kappa))}}{2\times(1+\ln(1-\kappa))}\\
&= 1-\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-\lambda(1+\ln(1-\kappa))}}{2\times(1+\ln(1-\kappa))}
\end{aligned}$$

(c) On calcule

$$t_{0.9}=1-\frac{1-\sqrt{1-(1+\ln(1-0.9))}}{2\times(1+\ln(1-0.9))}=0.801384519074$$

On obtient

$$\begin{aligned}
eVaR_{0.9}(X) &= \varphi_\kappa(t_{0.9})\\
&= \frac{\lambda\mathcal{M}_B(t_{0.9})-1-\ln(1-0.9)}{t_{0.9}}\\
&= \frac{\lambda\frac{1}{1-t_{0.9}}-1-\ln(1-0.9)}{t_{0.9}}\\
&= \frac{\frac{1}{1-0.801384519074}-1-\ln(1-0.9)}{0.801384519074}\\
&= 7.90811302307
\end{aligned}$$

15. Soit
$$\alpha_1(x_1,x_2) = \left(1-e^{-\beta_1 x_1}\right)\left(1-e^{-\beta_2 x_2}\right)$$
et
$$\alpha_2(x_1,x_2) = \left(1-e^{-\beta_1 x_1}\right)\left(1-e^{-\beta_2 x_2}\right)e^{-\beta_1 x_1}e^{-\beta_2 x_2}.$$
Alors,
$$F_{\underline{X}^{(\theta)}}(x_1,x_2) = \alpha_1(x_1,x_2) + \theta\alpha_2(x_1,x_2).$$

(a) On a
$$\begin{aligned}\theta &\leq \theta' \\ \theta\alpha_2(x_1,x_2) &\leq \theta'\alpha_2(x_1,x_2) \\ \alpha_1(x_1,x_2)+\theta\alpha_2(x_1,x_2) &\leq \alpha_1(x_1,x_2)+\theta'\alpha_2(x_1,x_2) \\ F_{\underline{X}^{(\theta)}}(x_1,x_2) &\leq F_{\underline{X}^{(\theta')}}(x_1,x_2).\end{aligned}$$

(b) i. On a
$$\begin{aligned}F_{M^{(\theta)}}(x) &= \Pr(\max(X_1^{(\theta)};X_2^{(\theta)}) \leq x) \\ &= \Pr(X_1^{(\theta)} \leq x; X_2^{(\theta)} \leq x) \\ &= F_{\underline{X}^{(\theta)}}(x,x).\end{aligned}$$

On trouve alors
$$\begin{aligned}F_{\underline{X}^{(\theta)}}(x,x) &\leq F_{\underline{X}^{(\theta')}}(x,x) \\ F_{M^{(\theta)}}(x) &\leq F_{M^{(\theta')}}(x)\end{aligned}$$

ii. On obtient
$$\begin{aligned}F_{M^{(\theta)}}(x) &\leq F_{M^{(\theta')}}(x) \\ \overline{F}_{M^{(\theta)}}(x) &\geq \overline{F}_{M^{(\theta')}}(x) \\ E\left[M^{(\theta)}\right] &\geq E\left[M^{(\theta')}\right].\end{aligned}$$

iii. On sait que
$$VaR_\kappa(M^{(\theta)}) = \overline{F}^{-1}_{M^{(\theta)}}(1-\kappa)$$
et
$$\overline{F}_{M^{(\theta)}}(VaR_\kappa(M^{(\theta)})) = 1-\kappa.$$
De plus,
$$\overline{F}_{M^{(\theta)}}(VaR_\kappa(M^{(\theta)})) = \overline{F}_{M^{(\theta')}}(VaR_\kappa(M^{(\theta')})) = 1-\kappa.$$
Alors,
$$\overline{F}_{M^{(\theta')}}(VaR_\kappa(M^{(\theta')})) = \overline{F}_{M^{(\theta)}}(VaR_\kappa(M^{(\theta)})) \geq \overline{F}_{M^{(\theta')}}(VaR_\kappa(M^{(\theta)}))$$
$$\overline{F}_{M^{(\theta')}}(VaR_\kappa(M^{(\theta')})) \geq \overline{F}_{M^{(\theta')}}(VaR_\kappa(M^{(\theta)}))$$
et on conclut
$$VaR_\kappa(M^{(\theta')}) \leq VaR_\kappa(M^{(\theta)}).$$

(c) i. On a
$$\begin{aligned}F_{M^{(\theta)}}(x) &= \Pr(\min(X_1^{(\theta)};X_2^{(\theta)}) \leq x) \\ &= 1-\Pr(X_1 > x, X_2 > x) \\ &= F_{X_1}(x) + F_{X_2}(x) - F_{\underline{X}^{(\theta)}}(x,x).\end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned}F_{\underline{X}^{(\theta)}}(x,x) &\leq F_{\underline{X}^{(\theta')}}(x,x)\\ -F_{\underline{X}^{(\theta)}}(x,x) &\geq -F_{\underline{X}^{(\theta')}}(x,x)\\ F_{X_1}(x)+F_{X_2}(x)-F_{\underline{X}^{(\theta)}}(x,x) &\geq F_{X_1}(x)+F_{X_2}(x)-F_{\underline{X}^{(\theta')}}(x,x)\\ F_{M^{(\theta)}}(x) &\geq F_{M^{(\theta')}}(x).\end{aligned}$$

ii. On calcule

$$\begin{aligned}F_{M^{(\theta)}}(x) &\geq F_{M^{(\theta')}}(x)\\ \overline{F}_{M^{(\theta)}}(x) &\leq \overline{F}_{M^{(\theta')}}(x)\\ E\left[M^{(\theta)}\right] &\leq E\left[M^{(\theta')}\right].\end{aligned}$$

iii. On sait que

$$VaR_\kappa(M^{(\theta)}) = \overline{F}^{-1}_{M^{(\theta)}}(1-\kappa)$$

et

$$\overline{F}_{M^{(\theta)}}(VaR_\kappa(M^{(\theta)})) = 1-\kappa.$$

De plus,

$$\overline{F}_{M^{(\theta')}}(VaR_\kappa(M^{(\theta')})) = \overline{F}_{M^{(\theta)}}(VaR_\kappa(M^{(\theta)})) = 1-\kappa.$$

Alors, on a

$$\overline{F}_{M^{(\theta')}}(VaR_\kappa(M^{(\theta')})) = \overline{F}_{M^{(\theta)}}(VaR_\kappa(M^{(\theta)})) \leq \overline{F}_{M^{(\theta')}}(VaR_\kappa(M^{(\theta)}))$$

$$\overline{F}_{M^{(\theta')}}(VaR_\kappa(M^{(\theta')})) \leq \overline{F}_{M^{(\theta')}}(VaR_\kappa(M^{(\theta)}))$$

et on conclut

$$VaR_\kappa(M^{(\theta')}) \geq VaR_\kappa(M^{(\theta)}).$$

16. (a) On a

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{X_1}(t) &= \mathcal{P}_{X_1,X_2}(t,1)\\ &= (0.18+0.05t+0.05+0.72t)^3\\ &= (0.23+0.77t)^3\\ &= 0.012167+0.122199t+0.409101t^2+0.456533t^3.\end{aligned}$$

On conclut

k	$\Pr(X_1=k)$
0	0.012167
1	0.122199
2	0.409101
3	0.456533

(b) Idem à a)

(c) On a

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_S(t) &= \mathcal{P}_{X_1,X_2}(t,t)\\ &= (0.18+0.05t+0.05t+0.72t^2)^3\\ &= (0.18+0.1t+0.72t^2)^3\\ &= 0.005832+0.00972t+0.075384t^2+0.07876t^3+0.301536t^4+0.15552t^5+0.373248t^6.\end{aligned}$$

(d) On obtient

k	$\Pr(S=k)$
0	0.005832
1	0.00972
2	0.075384
3	0.07876
4	0.301536
5	0.15552
6	0.373248

(e) On a

$$\begin{aligned} E\left[X_1 \mathbb{1}_{\{X_2=0\}}\right] &= \sum_{x_1=0}^{3} x_1 \times \Pr(X_1 = x_1, X_2 = 0) \\ &= 0 \times 0.005832 + 1 \times 0.00486 + 2 \times 0.00135 + 3 \times 0.000125 \\ &= 0.007935. \end{aligned}$$

(f) On a

$$\begin{aligned} E\left[Se^{0.02S}\right] &= \sum_{s=0}^{6} se^{0.02s} \times \Pr(S=s) \\ &= 0.00972e^{0.02} + 0.075384 \times 2e^{0.04} + 0.07876 \times 3e^{0.06} + 0.301536 \times 4e^{0.08} + 0.15552 \times 5e^{0.1} + 0.3732 \\ &= 5.108725; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left[e^{0.02S}\right] &= \sum_{s=0}^{6} e^{0.02s} \times \Pr(S=s) \\ &= 0.005832 + 0.00972e^{0.02} + 0.075384e^{0.04} + 0.07876e^{0.06} + 0.301536e^{0.08} + 0.15552e^{0.1} + 0.373248e^{0.1} \\ &= 1.097201. \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} \rho_{0.02}^{ESS}(S) &= \frac{5.108725}{1.097201} \\ &= 4.656143. \end{aligned}$$

17. (a) On a

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\underline{X}}(\underline{t}) &= E\left[e^{t_1X_1+t_2X_2+t_3X_3}\right] \\ &= E\left[e^{\frac{t_1}{\beta_1}(Y_1+Y_4)+\frac{t_2}{\beta_2}(Y_2+Y_4+Y_5)+\frac{t_3}{\beta_3}(Y_3+Y_4+Y_5)}\right] \\ &= E\left[e^{\frac{t_1}{\beta_1}Y_1}e^{\frac{t_2}{\beta_2}Y_2}e^{\frac{t_3}{\beta_3}Y_3}e^{\left(\frac{t_1}{\beta_1}+\frac{t_2}{\beta_2}+\frac{t_3}{\beta_3}\right)Y_4}e^{\left(\frac{t_2}{\beta_2}+\frac{t_3}{\beta_3}\right)Y_5}\right] \\ &\stackrel{\text{ind}}{=} E\left[e^{\frac{t_1}{\beta_1}Y_1}\right]E\left[e^{\frac{t_2}{\beta_2}Y_2}\right]E\left[e^{\frac{t_3}{\beta_3}Y_3}\right]E\left[e^{\left(\frac{t_1}{\beta_1}+\frac{t_2}{\beta_2}+\frac{t_3}{\beta_3}\right)Y_4}\right]E\left[e^{\left(\frac{t_2}{\beta_2}+\frac{t_3}{\beta_3}\right)Y_5}\right] \\ &= M_{Y_1}\left(\frac{t_1}{\beta_1}\right) \times M_{Y_2}\left(\frac{t_2}{\beta_2}\right) \times M_{Y_3}\left(\frac{t_3}{\beta_3}\right) \times M_{Y_4}\left(\frac{t_1}{\beta_1}+\frac{t_2}{\beta_2}+\frac{t_3}{\beta_3}\right) \times M_{Y_5}\left(\frac{t_2}{\beta_2}+\frac{t_3}{\beta_3}\right), \end{aligned}$$

qui devient

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\underline{X}}(\underline{t}) &= M_{Y_1}\left(\frac{t_1}{\beta_1}\right) \times M_{Y_2}\left(\frac{t_2}{\beta_2}\right) \times M_{Y_3}\left(\frac{t_3}{\beta_3}\right) \times M_{Y_4}\left(\frac{t_1}{\beta_1}+\frac{t_2}{\beta_2}+\frac{t_3}{\beta_3}\right) \times M_{Y_5}\left(\frac{t_2}{\beta_2}+\frac{t_3}{\beta_3}\right) \\ &= \left(1-\frac{t_1}{\beta_1}\right)^{-\gamma_1} \times \left(1-\frac{t_2}{\beta_2}\right)^{-\gamma_2} \times \left(1-\frac{t_3}{\beta_3}\right)^{-\gamma_3} \times \left(1-\frac{t_1}{\beta_1}-\frac{t_2}{\beta_2}-\frac{t_3}{\beta_3}\right)^{-\gamma_4} \times \left(1-\frac{t_2}{\beta_2}-\frac{t_3}{\beta_4}\right)^{-\gamma_5}.\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\underline{X}}(\underline{t}) &= \mathcal{M}_{\underline{X}}(-\underline{t}) \\ &= \left(1+\frac{t_1}{\beta_1}\right)^{-\gamma_1} \times \left(1+\frac{t_2}{\beta_2}\right)^{-\gamma_2} \times \left(1+\frac{t_3}{\beta_3}\right)^{-\gamma_3} \times \left(1+\frac{t_1}{\beta_1}+\frac{t_2}{\beta_2}+\frac{t_3}{\beta_3}\right)^{-\gamma_4} \times \left(1+\frac{t_2}{\beta_2}+\frac{t_3}{\beta_4}\right)^{-\gamma_5}.\end{aligned}$$

(b) D'abord, on calcule

$$\begin{aligned}E[X_1] &= \frac{1}{\beta_1}E[Y_1+Y_4] \\ &= \frac{1}{\beta_1}\left(E[Y_1]+E[Y_4]\right) \\ &= \frac{1}{\beta_1}\left(\gamma_1+\gamma_4\right); \\ E[X_2] &= \frac{1}{\beta_2}\left(\gamma_2+\gamma_4+\gamma_5\right); \\ E[X_3] &= \frac{1}{\beta_3}\left(\gamma_3+\gamma_4+\gamma_5\right).\end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}E\left[X_1X_2\right] &= E\left[\frac{1}{\beta_1}\left(Y_1+Y_4\right) \times \frac{1}{\beta_2}\left(Y_2+Y_4+Y_5\right)\right] \\ &= \frac{1}{\beta_1\beta_2}E[\left(Y_1+Y_4\right)\left(Y_2+Y_4+Y_5\right)] \\ &= \frac{1}{\beta_1\beta_2}E[Y_1Y_2+Y_1Y_4+Y_1Y_5+Y_4Y_2+Y_4Y_4+Y_4Y_5] \\ &= \frac{1}{\beta_1\beta_2}\left(E[Y_1Y_2]+E[Y_1Y_4]+E[Y_1Y_5]+E[Y_4Y_2]+E[Y_4^2]+E[Y_4Y_5]\right) \\ &= \frac{1}{\beta_1\beta_2}\left(E[Y_1]E[Y_2]+E[Y_1]E[Y_4]+E[Y_1]E[Y_5]+E[Y_4]E[Y_2]+Var(Y_4)+E[Y_4]^2+E[Y_4]E[Y_5]\right) \\ &= \frac{1}{\beta_1\beta_2}\left(\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\gamma_4+\gamma_1\gamma_5+\gamma_4\gamma_2+\gamma_4+\gamma_4^2+\gamma_4\gamma_5\right).\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}Cov(X_1,X_2) &= E[X_1X_2]-E[X_1]E[X_2] \\ &= \frac{1}{\beta_1\beta_2}\left(\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\gamma_4+\gamma_1\gamma_5+\gamma_4\gamma_2+\gamma_4+\gamma_4^2+\gamma_4\gamma_5\right)-\frac{1}{\beta_1}\left(\gamma_1+\gamma_4\right)\times\frac{1}{\beta_2}\left(\gamma_2+\gamma_4+\gamma_5\right) \\ &= \frac{1}{\beta_1\beta_2}\left(\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\gamma_4+\gamma_1\gamma_5+\gamma_4\gamma_2+\gamma_4+\gamma_4^2+\gamma_4\gamma_5\right) \\ &\quad -\frac{1}{\beta_1\beta_2}\left(\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\gamma_4+\gamma_1\gamma_5+\gamma_4\gamma_2+\gamma_4\gamma_4+\gamma_4\gamma_5\right) \\ &= \frac{\gamma_4}{\beta_1\beta_2}\end{aligned}$$

Autre approche :

$$\begin{aligned}
Cov(X_1, X_2) &= Cov\left(\frac{1}{\beta_1}(Y_1+Y_4), \frac{1}{\beta_2}(Y_2+Y_4+Y_5)\right)\\
&= \frac{1}{\beta_1\beta_2} Cov(Y_4, Y_4)\\
&= \frac{1}{\beta_1\beta_2} Var(Y_4)\\
&= \frac{\gamma_4}{\beta_1\beta_2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Cov(X_1, X_3) &= Cov\left(\frac{1}{\beta_1}(Y_1+Y_4), \frac{1}{\beta_2}(Y_3+Y_4+Y_5)\right)\\
&= \frac{1}{\beta_1\beta_3} Cov(Y_4, Y_4)\\
&= \frac{1}{\beta_1\beta_3} Var(Y_4)\\
&= \frac{\gamma_4}{\beta_1\beta_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Cov(X_2, X_3) &= Cov\left(\frac{1}{\beta_3}(Y_3+Y_4+Y_5), \frac{1}{\beta_2}(Y_3+Y_4+Y_5)\right)\\
&= \frac{1}{\beta_2\beta_3} Cov(Y_4+Y_5, Y_4+Y_5)\\
&= \frac{1}{\beta_2\beta_3}(Var(Y_4)+Var(Y_5))\\
&= \frac{\gamma_4+\gamma_5}{\beta_2\beta_3}
\end{aligned}$$

(c) À venir

(d) i. On a

$$\begin{aligned}
\rho_\kappa(S) &= E[S] + \frac{1}{1-\kappa}\sqrt{Var(S)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}};\\
\rho_\kappa(aS) &= E[aS] + \frac{1}{1-\kappa}\sqrt{Var(aS)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}}\\
&= a\left(E[S] + \frac{1}{1-\kappa}\sqrt{Var(S)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}}\right)\\
&= a\rho_\kappa(S)
\end{aligned}$$

18. Soit les v.a. indépendantes Y_0, Y_1, Y_2 où

$$Y_0 \sim Gamma\left(\gamma = 2, 1\right),$$

$$Y_1 \sim Y_2 \sim Gamma\left(\alpha - \gamma = 3, 1\right).$$

Soit la paire de v.a. (X_1, X_2) où $X_1 = Y_0 + Y_1$ et $X_2 = Y_0 + Y_2$.

Pour $S = X_1 + X_2$ et $\theta = 0.2$, calculer les valeurs des expressions de

$$\Pi_\theta\left(S\right) = \frac{1}{\theta}\ln E\left[\exp\left(\theta S\right)\right]$$

et

$$\varphi_\theta\left(S\right) = \frac{E\left[S\exp\left(\theta S\right)\right]}{E\left[\exp\left(\theta S\right)\right]}$$

où

$$E\left[S\exp\left(rS\right)\right] = \frac{dE\left[\exp\left(rS\right)\right]}{dr}.$$

$$\Pi_\theta\left(S\right) = \frac{1}{\theta}\ln E\left[\exp\left(\theta S\right)\right]$$

et

$$\varphi_\theta\left(S\right) = \frac{E\left[S\exp\left(\theta S\right)\right]}{E\left[\exp\left(\theta S\right)\right]}$$

où

$$E\left[S\exp\left(rS\right)\right] = \frac{dE\left[\exp\left(rS\right)\right]}{dr}.$$

On a

$$\begin{aligned}
E\left[\exp\left(rS\right)\right] &= M_S\left(r\right) \\
&= M_{X_1,X_2}\left(r,r\right) \\
&= E\left[\exp\left(r\left(Y_0+Y_2+Y_0+Y_1\right)\right)\right] \\
&= M_{Y_0}\left(2r\right)M_{Y_1}\left(r\right)M_{Y_2}\left(r\right) \\
&= M_{Y_0}\left(2r\right)\left(M_{Y_1}\left(r\right)\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{1-2r}\right)^2\left(\frac{1}{1-r}\right)^6
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
E\left[S\exp\left(rS\right)\right] = \frac{dE\left[\exp\left(rS\right)\right]}{dr} &= \frac{d}{dr}\left[\left(\frac{1}{1-2r}\right)^2\left(\frac{1}{1-r}\right)^6\right] \\
&= 2\times 2\left(\frac{1}{1-2r}\right)^3\left(\frac{1}{1-r}\right)^6 + 6\left(\frac{1}{1-2r}\right)^2\left(\frac{1}{1-r}\right)^7
\end{aligned}$$

On déduit

$$\begin{aligned}
\Pi_\theta\left(S\right) &= \frac{1}{\theta}\ln E\left[\exp\left(\theta S\right)\right] \\
&= -\frac{2}{\theta}\ln\left(1-2\theta\right) + -\frac{6}{\theta}\ln\left(1-\theta\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\varphi_\theta\left(S\right) &= \frac{E\left[S\exp\left(\theta S\right)\right]}{E\left[\exp\left(\theta S\right)\right]} \\
&= \frac{2\times 2\left(\frac{1}{1-2\theta}\right)^3\left(\frac{1}{1-\theta}\right)^6 + 6\left(\frac{1}{1-2\theta}\right)^2\left(\frac{1}{1-\theta}\right)^7}{\left(\frac{1}{1-2\theta}\right)^2\left(\frac{1}{1-\theta}\right)^6} \\
&= 2\times 2\left(\frac{1}{1-2\theta}\right) + 6\left(\frac{1}{1-\theta}\right)
\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}\Pi_{0.2}(S) &= -\frac{2}{0.2}\ln(1-2\times 0.2)-\frac{6}{0.2}\ln(1-0.2)\\ &= 11.802562\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi_{0.2}(S) &= 2\times 2\left(\frac{1}{1-2\times 0.2}\right)+6\left(\frac{1}{1-0.2}\right)\\ &= 14.166667\end{aligned}$$

19. (a) Indiquer les paires de valeurs prises par (M_1, M_2) pour lesquelles la valeur de f_{M_1,M_2} est non-nulle. Spécifier clairement les valeurs prises par f_{M_1,M_2}.

On déduit

m_1	m_2	$f_{M_1,M_2}(m_1,m_2) = \Pr(M_1 = m_1, M_2 = m_2)$
0	0	0.6
0	5	0.1
1	4	0.05
2	3	0.05
3	2	0.05
4	1	0.05
5	0	0.1

(b) Indiquer les valeurs non-nulles des fonctions de masses de probabilité marginales de M_1 et M_2.

On sait que

$$\Pr(M_1 = m_1) = \sum_{m_2=0}^{5}\Pr(M_1 = m_1, M_2 = m_2)$$

$$\Pr(M_2 = m_2) = \sum_{m_1=0}^{5}\Pr(M_1 = m_1, M_2 = m_2)$$

On obtient

k	$f_{M_1}(k) = f_{M_2}(k)$
0	0.7
1	0.05
2	0.05
3	0.05
4	0.05
5	0.1

(c) Calculer $Cov(M_1, M_2)$. À partir de la valeur de $Cov(M_1, M_2)$, que pouvons-nous déduire de la relation de dépendance entre les v.a. M_1 et M_2 ? Si nécessaire, vous pouvez utiliser un contre-exemple pour appuyer votre réponse.

- **Calcul de la covariance.** On obtient

$$\begin{aligned}E[M_1M_2] &= \sum_{m_1=0}^{5}\sum_{m_2=0}^{5} m_1 m_2 f_{M_1,M_2}(m_1,m_2)\\ &= 4\times 0.05+6\times 0.05+6\times 0.05+4\times 0.05 = 1\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}E[M_i] &= \sum_{k=0}^{5} k f_{M_i}(k)\\ &= 1\times 0.05+2\times 0.05+3\times 0.05+4\times 0.05+5\times 0.1 = 1\end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned} Cov\left(M_1, M_2\right) &= E\left[M_1 M_2\right] - E\left[M_1\right] E\left[M_2\right] \\ &= 1 - 1 \times 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- **Commentaire.** Les v.a. M_1 et M_2 sont non-corrélées mais elles ne sont pas indépendantes.
- **Contre-exemple.** En effet, par exemple, on observe

$$\Pr\left(M_1 = 0, M_2 = 0\right) = 0.6 \neq \Pr\left(M_1 = 0\right) \Pr\left(M_2 = 0\right) = 0.49.$$

(d) On définit $N = M_1 + M_2$.

i. Démontrer que la v.a. N peut être représentée comme une fonction d'une v.a. K qui obéit à une loi discrète très connue (et fournie en annexe).
On observe

$$\Pr\left(N = 0\right) = f_{M_1, M_2}\left(0, 0\right) = 0.6$$

et

$$\Pr\left(N = 5\right) = \sum_{k=0}^{5} f_{M_1, M_2}\left(k, 5 - k\right) = 0.4$$

On peut écrire

$$N = 5K$$

où

$$K \sim Bern\left(q\right)$$

ii. Indiquer clairement les valeurs (non-nulles) de la fonction de masses de probabilité de la v.a. K et de celle de la v.a. N.
On identifie $q = 0.4$.
Ainsi, on a

$$\Pr\left(K = 0\right) = 6 \text{ et } \Pr\left(K = 1\right) = 0.4$$

et

$$\Pr\left(N = 0\right) = 6 \text{ et } \Pr\left(N = 5\right) = 0.4$$

20. (a) On a

$$\begin{aligned} P_{M_1, M_2}\left(t_1, t_2\right) &= E\left[t_1^{M_1} t_2^{M_2}\right] \\ &= E_{\Theta_1, \Theta_2}\left[E\left[t_1^{M_1} t_2^{M_2} | \Theta_1, \Theta_2\right]\right] \\ &= E_{\Theta_1, \Theta_2}\left[E\left[t_1^{M_1} | \Theta_1, \Theta_2\right] \times E\left[t_2^{M_2} | \Theta_1, \Theta_2\right]\right] \\ &= E_{\Theta_1, \Theta_2}\left[E\left[t_1^{M_1} | \Theta_1\right] \times E\left[t_2^{M_2} | \Theta_2\right]\right] \\ &= E_{\Theta_1, \Theta_2}\left[\mathrm{e}^{\Theta_1 \lambda_1 (t_1 - 1)} \times \mathrm{e}^{\Theta_1 \lambda_1 (t_1 - 1)}\right] \end{aligned}$$

qui devient

$$\begin{aligned} P_{M_1, M_2}\left(t_1, t_2\right) &= E\left[t_1^{M_1} t_2^{M_2}\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{\Theta_1 \lambda_1 (t_1 - 1)} \times \mathrm{e}^{\Theta_1 \lambda_1 (t_1 - 1)}\right] \\ &= M_{\Theta_1, \Theta_2}\left(\lambda_1\left(t_1 - 1\right), \lambda_2\left(t_2 - 1\right)\right) \end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned} Cov(M_1, M_2) &= E[Cov(M_1, M_2|\Theta_1, \Theta_2)] + Cov(E[M_1|\Theta_1], E[M_2|\Theta_2]) \\ &= 0 + Cov(\lambda_1\Theta_1, \lambda_2\Theta_2) \\ &= \lambda_1\lambda_2 Cov(\Theta_1, \Theta_2) \end{aligned}$$

Alors, on a

$$a = \lambda_1\lambda_2$$

(c) On sait que

$$\begin{aligned} Var(M_i) &= E[Var(M_i|\Theta_i)] + Var(E[M_i|\Theta_i]) \\ &= E[\lambda_i\Theta_i] + Var(\lambda_i\Theta_i) \\ &= \lambda_i(1 + \lambda_i Var(\Theta_i)) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \rho_P(M_1, M_2) &= \frac{Cov(M_1, M_2)}{\sqrt{Var(M_1) Var(M_2)}} \\ &= \frac{\lambda_1\lambda_2 Cov(\Theta_1, \Theta_2)}{\sqrt{(\lambda_1(1 + \lambda_1 Var(\Theta_1)))(\lambda_2(1 + \lambda_2 Var(\Theta_2)))}} \\ &= \frac{\sqrt{\lambda_1 Var(\Theta_1)}\sqrt{\lambda_2 Var(\Theta_2)}}{\sqrt{(1 + \lambda_1 Var(\Theta_1))(1 + \lambda_2 Var(\Theta_2))}} \times \rho_P(\Theta_1, \Theta_2) \end{aligned}$$

Alors, on déduit

$$b = \frac{\sqrt{\lambda_1 Var(\Theta_1)}\sqrt{\lambda_2 Var(\Theta_2)}}{\sqrt{(1 + \lambda_1 Var(\Theta_1))(1 + \lambda_2 Var(\Theta_2))}} \leq 1$$

(d) i. On a

$$\begin{aligned} P_{M_1,M_2}(t_1, t_2) &= M_{\Theta_1,\Theta_2}(\lambda_1(t_1 - 1), \lambda_2(t_2 - 1)) \\ &= (1 - \lambda_1(t_1 - 1))^{-1}(1 - \lambda_1(t_1 - 1))^{-1}(1 - \lambda_1(t_1 - 1) - \lambda_1(t_2 - 1))^{-1} \\ &= (1 - (t_1 - 1))^{-1}(1 - (t_2 - 1))^{-1}(1 - 1(t_1 - 1) - 1(t_2 - 1))^{-1} \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} P_N(t) &= P_{M_1,M_2}(t, t) \\ &= (1 - (t - 1))^{-2}(1 - 2(t - 1))^{-1} \\ &= P_{K_1}(t) P_{K_2}(t) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} P_{K_1}(t) &= (1 - (t - 1))^{-2} \\ &= \left(\frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)t}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{K_2}(t) &= (1 - 2(t - 1))^{-1} \\ &= \left(\frac{\frac{1}{3}}{1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)t}\right)^1 \end{aligned}$$

ii. On a

$$N = K_1 + K_2$$

où les v.a.

$$K_1 \sim BNeg\left(2, \frac{1}{2}\right)$$

et

$$K_2 \sim BNeg\left(1, \frac{1}{3}\right)$$

sont indépendantes.

iii. On a

$$f_N(0) = f_{K_1}(0) f_{K_2}(0) = 0.0625000$$

$$f_N(1) = f_{K_1}(0) f_{K_2}(1) + f_{K_1}(1) f_{K_2}(0) = 0.1093750$$

$$f_N(1) = f_{K_1}(0) f_{K_2}(2) + f_{K_1}(1) f_{K_2}(1) + f_{K_1}(2) f_{K_2}(0) = 0.1289062$$

21. On utilise un résultat d'un exemple. Soient les v.a. comonotones $X_i \sim Exp(\beta_i)$ avec $\overline{F}_{X_i}(x) = \exp(-\beta_i x)$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Pour $S = \sum_{i=1}^n X_i$, on a

$$\begin{aligned} S &= \left(-\frac{1}{\beta_1}\ln(1-U)\right) + ... + \left(-\frac{1}{\beta_n}\ln(1-U)\right) \\ &= -\left(\frac{1}{\beta_1} + ... + \frac{1}{\beta_n}\right)\ln(1-U), \end{aligned}$$

ce qui nous permet de déduire que $S \sim Exp\left(\frac{1}{\frac{1}{\beta_1}+...+\frac{1}{\beta_n}}\right)$.

22. On utilise un résultat d'un exemple. Soient les v.a. comonotones $X_i \sim Pa(\alpha, \lambda_i)$ avec $F_{X_i}(x) = 1 - \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + x}\right)^\alpha$ et $F_{X_i}^{-1}(u) = \frac{\lambda_i}{(1-u)^{\frac{1}{\alpha}}} - \lambda_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Pour $S = \sum_{i=1}^n X_i$, on a

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n X_i = \left(\frac{\lambda_1}{(1-U)^{\frac{1}{\alpha}}} - \lambda_1\right) + ... + \left(\frac{\lambda_n}{(1-u)^{\frac{1}{\alpha}}} - \lambda_n\right) \\ &= \frac{\lambda^*}{(1-U)^{\frac{1}{\alpha}}} - \lambda^*, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que $S \sim Pa(\alpha, \lambda^*)$ où $\lambda^* = \lambda_1 + ... + \lambda_n$.

23. On utilise les relations

$$VaR_\kappa(S) = VaR_\kappa(X_1) + VaR_\kappa(X_2)$$

$$TVaR_\kappa(S) = TVaR_\kappa(X_1) + TVaR_\kappa(X_2)$$

24. (a) Développer l'expression de F_S.

On a

$$M_S(t) = \left(1 - \frac{t}{\beta_1}\right)^{-(\alpha_1 - \gamma_0)} \left(1 - \frac{t}{\beta_2}\right)^{-(\alpha_2 - \gamma_0)} \left(1 - \frac{t}{\beta_1} - \frac{t}{\beta_2}\right)^{-\gamma_0},$$

ce qui correspond à la f.g.m. d'une somme de 3 v.a. indépendantes de loi gamma dont les paramètres d'échelle diffèrent.L

La v.a. S obéit à un mélange de lois gamma dont la fonction de densité est donnée par

$$f_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k h(x; \alpha + k, \beta),$$

où $\beta = \max\left(\beta_1; \beta_2; \left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}\right)^{-1}\right)$ et $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma_0$. Les probabilités p_k, $k \in \mathbb{N}$, sont définies par $p_k = \sigma \times \xi_k$ où

$$\sigma = \beta^{-\gamma_0}\left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}\right)^{-\gamma_0}\prod_{i=1}^{2}\left(\frac{\beta_i}{\beta}\right)^{\alpha_i-\gamma_0},$$

et

$$\xi_0 = 1,\ \xi_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} i\zeta_i\xi_{k-i},\ k \in \mathbb{N}^+,$$

avec

$$\zeta_k = \frac{\gamma_0}{k}\left(1 - \left(\beta\left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}\right)\right)^{-1}\right)^k + \sum_{i=1}^{2}\frac{(\alpha_i - \gamma_0)}{k}\left(1 - \frac{\beta_i}{\beta}\right)^k,$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$. On déduit que

$$F_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k H(x; \alpha + k, \beta)$$

et

$$E\left[S \times 1_{\{S>b\}}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \frac{\alpha + k}{\beta}\overline{H}(x; \alpha + k + 1, \beta).$$

(b) Calculer $E[S]$ et $\mathrm{Var}(S)$ pour $\gamma_0 = 0$, 1 et 2.
On a

$$\begin{aligned} E[S] &= E[X_1] + E[X_2] \\ Var(S) &= Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, X_2) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2) &= \sqrt{Var(X_1)\,Var(X_2)}\rho_P(X_1, X_2) \\ &= \sqrt{\frac{\alpha_1}{\beta_1^2}}\sqrt{\frac{\alpha_2}{\beta_2^2}}\frac{\gamma_0}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \\ &= \frac{\gamma_0}{\beta_1\beta_2}. \end{aligned}$$

(c) Les valeurs sont obtenues en appliquant les relations.

25. (a) Indiquer les caractéristiques de la loi de S.
La fgm de S est

$$\begin{aligned} M_S(r) &= M_{M_1,\ldots,M_n}\left(M_{B_1}(r), \ldots, M_{B_n}(r)\right) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n} e^{(\lambda_i-\gamma_0)\left(M_{B_i}(r)-1\right)}\right) e^{\gamma_0\left(\prod_{i=1}^{n} M_{B_i}(r)-1\right)} \\ &= \left(e^{500(\lambda_1-\gamma_0)\left(M_{B_1}(r)-1\right)}\right)\left(e^{500(\lambda_{500}-\gamma_0)\left(M_{B_{500}}(r)-1\right)}\right) e^{\gamma_0\left(M_{B_1}(r)^{500} M_{B_{500}}(r)^{500}-1\right)} \\ &= e^{\lambda_S(M_D(r)-1)} \end{aligned}$$

avec

$$\lambda_S = 500(\lambda_1 - \gamma_0) + 500(\lambda_{500} - \gamma_0) + \gamma_0$$

et

$$\begin{aligned} M_D(t) &= \frac{500(\lambda_1-\gamma_0)}{\lambda_S}\left(\frac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{1000}-t}\right)^2 \\ &+\frac{500(\lambda_{500}-\gamma_0)}{\lambda_S}\left(\frac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{1000}-t}\right) \\ &+\frac{\gamma_0}{\lambda_S}\left(\frac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{1000}-t}\right)^{2\times 500}\left(\frac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{1000}-t}\right)^{500} \end{aligned}$$

On observe que D est un mélange de 3 Erlang : $Erlang\left(1, \frac{1}{1000}\right)$ (poids $\frac{500(\lambda_{500}-\gamma_0)}{\lambda_S}$), $Erlang\left(2, \frac{1}{1000}\right)$ (poids $\frac{500(\lambda_1-\gamma_0)}{\lambda_S}$), et $Erlang\left(1500, \frac{1}{1000}\right)$ (poids $\frac{\gamma_0}{\lambda_S}$)

(b) Comme au chapitre 2. La dépendance n'a pas d'impact.

(c) Comme S obéit une loi poisson composée et que le montant de chaque siniitre obéit à un mélange d'Erlang, on peut aussi représenter sa distribution comme un mélange d'Erlang. On a $D \sim MélErl\left(\underline{\xi}, \beta = \frac{1}{1000}\right)$ avec

$$\begin{aligned} \xi_0 &= 0 \\ \xi_1 &= \frac{500(\lambda_{500}-\gamma_0)}{\lambda_S} \\ \xi_2 &= \frac{500(\lambda_1-\gamma_0)}{\lambda_S} \\ \xi_{1500} &= \frac{\gamma_0}{\lambda_S} \\ \xi_k &= 0,\ k \neq 1, 2, 1500. \end{aligned}$$

Cela signifie que l'on peut écrire D sous la forme

$$D = \begin{cases} \sum_{j=1}^{K} C_j,\ K>0 \\ 0,\ K=0 \end{cases}$$

où

$$f_K(k) = \xi_k,\ k \in \mathbb{N},$$

et

$$C_j \sim Exp(\beta),\ j \in \mathbb{N}^+.$$

Cela est équivalent à

$$M_D(t) = P_K(M_C(t))$$

(d) On déduit que $S \sim MélErl\left(\underline{\nu}, \beta = \frac{1}{1000}\right)$

$$\begin{aligned} M_S(t) &= P_N(M_D(t)) = P_N(P_K(M_C(t))) \\ &= P_{N'}(M_C(t)) \end{aligned}$$

où

$$P_{N'}(s) = P_N(P_K(s)).$$

Cela signifie que l'on peut écrire S sous la forme

$$S = \begin{cases} \sum_{j=1}^{N'} C_j,\ N'>0 \\ 0,\ N'=0 \end{cases}$$

où les valeurs de

$$f_{N'}(k) = \nu_k,\ k \in \mathbb{N},$$

sont calculées avec l'algo de Panjer ou la FFT.

26. (a) Espérance de X_1, X_2 et S. On utilise les expressions usuelles.
   (b) Calculer la covariance de $Cov\left(X_1, X_2\right)$.
   On a
   $$Cov\left(X_1, X_2\right) = E\left[B_1\right] E\left[B_2\right] Cov\left(M_1, M_2\right)$$
   (c) On utilise les expressions usuelles.
   (d) Démontrer que $S \sim PoisComp\left(\lambda_S, F_D\right)$.
   La fgm de S est
   $$\begin{aligned} M_S\left(r\right) &= M_{M_1,M_2}\left(M_{B_1}\left(r\right), M_{B_2}\left(r\right)\right) \\ &= e^{\left(\lambda_1-\alpha_0\right)\left(M_{B_1}(r)-1\right)} e^{\left(\lambda_2-\alpha_0\right)\left(M_{B_2}(r)-1\right)} e^{\alpha_0\left(M_{B_1}(r)M_{B_2}(r)-1\right)} \\ &= e^{\lambda_S\left(M_D(r)-1\right)} \end{aligned}$$
   où
   $$\begin{aligned} \lambda_S &= \left(\lambda_1 - \alpha_0\right) + \left(\lambda_2 - \alpha_0\right) + \alpha_0 \\ &= 2 + 1 - 0.5 \\ &= 2.5 \end{aligned}$$
   et
   $$f_D\left(100k\right) = \frac{1.5}{2.5} f_{B_1}\left(100k\right) + \frac{0.5}{2.5} f_{B_2}\left(100k\right) + \frac{0.5}{2.5} f_{B_1 * B_2}\left(100k\right)$$
   On déduit de la fgm de S que $S \sim PoisComp\left(\lambda_S, F_D\right)$.
   - Calculer la valeur de λ_S.
     On a
     $$f_D\left(100k\right) = \frac{1.5}{2.5} f_{B_1}\left(100k\right) + \frac{0.5}{2.5} f_{B_2}\left(100k\right) + \frac{0.5}{2.5} f_{B_1 * B_2}\left(100k\right)$$
   - Donner les valeurs de $f_D\left(100k\right)$, pour $k = 0, 1, 2, 3$.

   (e) **4pts** Calculer $\Pr\left(S = 100k\right)$, pour $k = 0, 1, 2, 3$, en utilisant l'algorithme de Panjer.
   On applique l'algo de Panjer.
27. On considère un portefeuille de n contrats d'assurance vie. Les coûts pour un contrat i sont définis par la v.a $X_i = bI_i$ pour (i=1,2,....).
   (a) Isoler la valeur de r pour $\alpha = 0.1$,$\alpha = 1$ et $\alpha = 10$:
   On a
   $$Pr\left[I_i = 0\right] = 1 - q = 0.95 = M_\theta\left(ln(r)\right)$$
   Et puisque
   $$\Theta \sim Gamma(\alpha, \alpha)$$
   Donc
   $$\begin{aligned} r &= exp\left[-\alpha \times \left(\frac{1}{(0.95)^{(1/\alpha)}} - 1\right)\right] \\ r &= \begin{cases} & ,\alpha = 0.1 \\ 0.948729 & ,\alpha = 1 \\ & ,\alpha = 10 \end{cases} \end{aligned}$$
   (b) Pour $n = 10$, calculer $Pr\left[S = kb\right]$
   $$\begin{aligned} Pr\left(S = kb\right) &= Pr\left(I_1 + ... + I_n = k\right) \\ &= Pr\left(N = k\right) \\ &= \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \times \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} (-1)^j M_\theta\left((n + j - k) ln(r)\right) \end{aligned}$$

(c) Calculer $Cov(X_i, X_j)$ pour $i \neq j$:

$$\begin{aligned} Cov(X_i, X_j) &= Cov(bI_i, bI_j) \\ &= b^2 Cov(I_i, I_j) \\ &= b^2 \left(E\left[I_i I_j\right] - E\left[I_i\right] E\left[I_j\right]\right) \end{aligned}$$

Et on a :

$$\begin{aligned} E\left[I_i I_j\right] &= \int_0^{+\infty} (1 - r\theta)^2 dG_\theta(\theta) \\ &= 1 - 2\int_0^{+\infty} r\theta \times dG_\theta(\theta) + \int_0^{+\infty} \left(r^2\right)^\theta \times dG_\theta(\theta) \\ &= 1 - 2M_\theta(ln(r)) + M_\theta\left(ln(r^2)\right) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

(d) Calculer $Var(S)$

$$\begin{aligned} Var(S) &= Var(X_1 + ... + X_n) \\ &= n \times Var(X_i) + n \times (n-1) \times Cov(X_i, X_j) \\ &= \begin{cases} 193568.11 & , \alpha = 0.1 \\ 678571.432 & , \alpha = 1 \\ 496264.084 & , \alpha = 10 \end{cases} \end{aligned}$$

(e) Calculer $VaR_{0.99}(S)$. On a

$$Pr(S \leq s) = Pr\left(I_1 + ... + I_n \leq \frac{s}{b}\right)$$

Et on trouve la VaR facilement.

$$VaR_{0.99}(S) = \begin{cases} 7000 & , \alpha = 0.1 \\ 3000 & , \alpha = 1 \\ 3000 & , \alpha = 10 \end{cases}$$

(f) Calculer $TVaR_{0.99}(S)$

$$\begin{aligned} TVaR_{0.99}(S) &= \frac{E\left[S \times 1_{\{S > VaR_{0.99}(S)\}}\right] + VaR_{0.99}(S) \times \left(Pr\left(S \leq VaR_{0.99}(S)\right) - 0.99\right)}{1 - 0.99} \\ &= \begin{cases} 8320.8983 & , \alpha = 0.1 \\ 4149.4253 & , \alpha = 1 \\ 3170.7031 & , \alpha = 10 \end{cases} \end{aligned}$$

(g) On suppose maintenant l'indépendance entre les v.a $I_1, ..., I_{10}$. Donc,

$$\begin{aligned} I_i &\sim Bern(q) \\ \sum_{i=1}^{10} I_i &\sim Binomiale(n = 10, q) \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} Var(S) &= n \times Var(X_i) \\ &= n \times q \times (1-q) \times b^2 \\ &= 475000 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} VaR_{0.99}(S) &= 3000 \\ TVaR_{0.99}(S) &= 3109.503 \end{aligned}$$

28. On considère un portefeuille composé de 2 lignes d'affaires, qui est exposé à un seul type de catastrophe. Les coûts pour les lignes d'affaires sont définis par les v.a X_1, X_2 où

$$X_i = \sum_{k_i=1}^{M^{(i)}} B_{i,k_i}^{(i)} + \sum_{k_i=1}^{M^{(0)}} B_{i,k_i}^{(0)}$$

(a) Calculer les espérances de X_1, X_2 et de S. On a

$$\begin{aligned} E\left[X_1\right] &= E\left[M^{(1)}\right] \times E\left[B_1^{(1)}\right] + E\left[M^{(0)}\right] \times E\left[B_1^{(0)}\right] \\ &= \gamma_1 \times \frac{1}{\frac{5}{8}} + \gamma_0 \times \frac{1}{\frac{1}{2}} = 5.2 \\ E\left[X_2\right] &= E\left[M^{(2)}\right] \times E\left[B_2^{(2)}\right] + E\left[M^{(0)}\right] \times E\left[B_2^{(0)}\right] \\ &= \gamma_2 \times \frac{1}{\frac{5}{9}} + \gamma_0 \times \frac{1}{\frac{1}{3}} = 8.4 \\ E\left[S\right] &= E\left[X_1\right] + E\left[X_2\right] \end{aligned}$$

(b) Calculer les variances de X_1, X_2 :

$$\begin{aligned} Var(X_1) &= Var\left(\sum_{k_i=1}^{M^{(i)}} B_{i,k_i}^{(i)} + \sum_{k_i=1}^{M^{(0)}} B_{i,k_i}^{(0)}\right) \\ &= Var\left(\sum_{k_i=1}^{M^{(i)}} B_{i,k_i}^{(i)}\right) + Var\left(+\sum_{k_i=1}^{M^{(0)}} B_{i,k_i}^{(0)}\right) \\ &= Var(M^{(1)}) \times E\left[B_1^{(1)}\right]^2 + E(M^{(1)}) \times Var\left[B_1^{(1)}\right] + Var(M^{(0)}) \times E\left[B_1^{(0)}\right]^2 + E(M^{(0)}) \times Var\left[B\right. \end{aligned}$$

De la même manière on calcule $Var(X_2)$.

(c) Calculer $Cov(X_1, X_2)$

$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2) &= Cov\left(\sum_{k_i=1}^{M^{(1)}} B_{1,k_i}^{(1)} + \sum_{k_i=1}^{M^{(0)}} B_{1,k_i}^{(0)}, \sum_{k_i=1}^{M^{(2)}} B_{2,k_i}^{(2)} + \sum_{k_i=1}^{M^{(0)}} B_{2,k_i}^{(0)}\right) \\ &= E\left[M^{(0)}\right] \times Cov\left(B_1^{(0)}, B_2^{(0)}\right) + Var(M^{(0)}) \times E\left[B_1^{(0)}\right] \times E\left[B_2^{(0)}\right] \end{aligned}$$

Et on sait que :

$$\rho_p\left(B_1^{(0)}, B_2^{(0)}\right) = \frac{\theta}{4}$$

Donc

$$Cov(B_1^{(0)}, B_2^{(0)}) = \frac{\rho_p\left(B_1^{(0)}, B_2^{(0)}\right)}{\beta_1 \times \beta_2}$$

D'où le résultat

(d) Calculer $Var(S)$

$$\begin{aligned} Var(S) &= Var(X_1) + Var(X_2) + 2 \times Cov(X_1, X_2) \\ &= \begin{cases} 64.68 & ,\theta = -1 \\ 67.68 & ,\theta = 0 \\ 70,68 & ,\theta = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

(e) Indiquer les lois de X_1, X_2et S

$$X_i \sim Poisson.Composée\left(\lambda_i, F_{C_i}\right)$$

Avec :

$$\lambda_i = \gamma_0 + \gamma_i$$

et :

$$F_{C_i}(x) = \frac{\gamma_0}{\lambda_i} F_{B_i^{(0)}}(x) + \frac{\gamma_i}{\lambda_i} F_{B_i^{(i)}}(x) \quad i = 1, 2$$

Pour S on a :

$$S \sim PoissonComposée\left(\lambda, F_D\right)$$

Avec :

$$\lambda = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2$$

et :

$$F_D(x) = \frac{\gamma_0}{\lambda} F_{B_1^{(0)}+B_2^{(0)}}(x) + \frac{\gamma_1}{\lambda} F_{B_1^{(1)}}(x) + \frac{\gamma_2}{\lambda} F_{B_2^{(2)}}(x)$$

29. Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) dont la fonction de répartition est définie par

$$F_{X_1,X_2}\left(x_1, x_2\right) = \sum_{i_1=1}^{2} \sum_{i_2=1}^{2} p_{1,2}\left(i_1, i_2\right) H\left(x_1; i_1, \beta\right) H\left(x_2; i_2, \beta\right)$$

où $p_{1,2}\left(i_1, i_2\right)$ sont des probabilités i.e. $p_{1,2}\left(i_1, i_2\right) \geq 0$ (pour i_1, $i_2 \in \{1, 2\}$) et $\sum_{i_1=1}^{2} \sum_{i_2=1}^{2} p_{1,2}\left(i_1, i_2\right) = 1$. De plus, on a $\sum_{i_1=1}^{2} p_{1,2}\left(i_1, i_2\right) = p_2\left(i_2\right)$ et $\sum_{i_2=1}^{2} p_{1,2}\left(i_1, i_2\right) = p_1\left(i_1\right)$. On suppose que $\beta = \frac{1}{10}$. Hypothèses additionnelles :

Hypothèse H1		
$i_1 \vert i_2$	1	2
1	0.42	0.18
2	0.28	0.12

Hypothèse H2		
$i_1 \vert i_2$	1	2
1	0.55	0.05
2	0.15	0.25

Hypothèse H3		
$i_1 \vert i_2$	1	2
1	0.32	0.28
2	0.38	0.02

On définit $S = X_1 + X_2$. Questions pour les 3 hypothèses H1, H2, H3 :

(a) Calculer $F_{X_1,X_2}(30, 20)$. (Rép : 0.6976496 ; B : 0.7029052 ; C : 0.6936068)
On applique la formule.

(b) Calculer $E\left[X_1 \times 1_{\{X_2>20\}}\right]$. (Rép : A : 3.03151 ; B : 3.38338 ; C : 2.76084)
On déduit

$$f_{X_1,X_2}\left(x_1, x_2\right) = \sum_{i_1=1}^{2} \sum_{i_2=1}^{2} p_{1,2}\left(i_1, i_2\right) h\left(x_1; i_1, \beta\right) h\left(x_2; i_2, \beta\right)$$

On constate

$$E\left[\phi_1\left(X_1\right) \phi_2\left(X_2\right)\right] = \sum_{i_1=1}^{2} \sum_{i_2=1}^{2} p_{1,2}\left(i_1, i_2\right) \left(\int_0^\infty x_1 h\left(x_1; i_1, \beta\right) dx_1\right) \int_0^\infty x_2 h\left(x_2; i_2, \beta\right) dx_2$$

Bon, on y va

$$E\left[X_1 \times 1_{\{X_2>20\}}\right] = \sum_{i_1=1}^{2} \sum_{i_2=1}^{2} p_{1,2}\left(i_1, i_2\right) \frac{i_1}{\beta} \overline{H}\left(20; i_2, \beta\right)$$

(c) Calculer $E\left[\max\left(X_1-30;0\right)\max\left(X_2-20;0\right)\right]$. (Rép : A : 11.60274 ; 11.47135 ; C : 11.70381)
On applique la relation

$$E\left[\phi_1\left(X_1\right)\phi_2\left(X_2\right)\right]=\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2}p_{1,2}\left(i_1,i_2\right)\left(\int_0^\infty x_1h\left(x_1;i_1,\beta\right)dx_1\right)\int_0^\infty x_2h\left(x_2;i_2,\beta\right)dx_2$$

On a

$$\begin{aligned}&E\left[\max\left(X_1-30;0\right)\max\left(X_2-20;0\right)\right]\\=&\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2}p_{1,2}\left(i_1,i_2\right)\left(\int_0^\infty \max\left(x_1-30;0\right)h\left(x_1;i_1,\beta\right)dx_1\right)\int_0^\infty \max\left(x_2-30;0\right)h\left(x_2;i_2,\beta\right)dx_2\end{aligned}$$

et on prend la formule pour stop-loss en annexe pour la loi gamma (ou Erlang)
On a

$$\begin{aligned}&E\left[\max\left(X_1-30;0\right)\max\left(X_2-20;0\right)\right]\\=&\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2}p_{1,2}\left(i_1,i_2\right)\left(\frac{i_1}{\beta}\overline{H}\left(30;i_1+1,\beta\right)-30\overline{H}\left(30;i_1,\beta\right)\right)\left(\frac{i_2}{\beta}\overline{H}\left(20;i_2+1,\beta\right)-20\overline{H}\left(30;i_2,\beta\right)\right)\end{aligned}$$

(d) Calculer $Cov\left(X_1,X_2\right)$, $E\left[S\right]$ et $Var\left(S\right)$. (Rép : H1 : 0, 27, 315 ; H2 : 13, 27, 341 ; H : -10 ; 27 ; 295)
On applique la relation

$$E\left[\phi_1\left(X_1\right)\phi_2\left(X_2\right)\right]=\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2}p_{1,2}\left(i_1,i_2\right)\left(\int_0^\infty x_1h\left(x_1;i_1,\beta\right)dx_1\right)\int_0^\infty x_2h\left(x_2;i_2,\beta\right)dx_2$$

On a

$$\begin{aligned}&E\left[X_1X_2\right]\\=&\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2}p_{1,2}\left(i_1,i_2\right)\frac{i_1}{\beta}\frac{i_2}{\beta}\end{aligned}$$

On a

$$E\left[S\right]=10\left(0.7+0.3\times2\right)+10\left(0.6+0.4\times2\right)$$

: 27.0 : 13.0 : 26.0

$$E\left[X_1X_2\right]=100\left(0.42+0.28\times2+0.18\times2+0.12\times4\right)$$

: $182-13\times14=0.0$

$$E\left[X_1X_2\right]=100\left(0.55+0.15\times2+0.05\times2+0.25\times4\right)$$

: $195-13\times14=13.0$

$$E\left[X_1X_2\right]=100\left(0.32+0.38\times2+0.28\times2+0.02\times4\right)$$

: $172.0-13\times14=-10.0=103.0$

$$E[X_1]=0.7\times10^2\times2+0.3\times10^2\times6$$

: 320.0

$$E[X_2]=0.6\times10^2\times2+0.4\times10^2\times6$$

: 360.0

$$Var\left(X_1\right)=320-\left(13^2\right)=$$

: 151.0

$$Var\left(X_2\right)=360-\left(14^2\right)=164$$

: 164.0 : 151.0
164+151= 315.0+

(e) Calculer $F_S(50)$. (Rép : A : 0.8938773 ; B : 0.8865779 ; C : 0.8994923
On a

$$\begin{aligned} F_S(x) &= p_{12}(1,1)\, H(x;2,\beta) \\ &\quad + p_{12}(2,1)\, H(x;3,\beta) \\ &\quad + p_{12}(1,2)\, H(x;3,\beta) \\ &\quad + p_{12}(2,2)\, H(x;4,\beta) \end{aligned}$$

30. Soient

$$M_j = \sum_{i=1}^{n} I_{j,i}$$

et

$$N = M_1 + M_2$$

et

$$X_i = \sum_{k=1}^{M_i} B_{i,k}$$

(a) Trouver la fgp de (M_1, M_2) et de N

$$\begin{aligned} P_{M_1,M_2}(t_1,t_2) &= E\left[t_1^{M_1} \times t_2^{M_2}\right] \\ &= \prod_{i=1}^{n} E\left[t_1^{I_{i,1}} t_2^{I_{i,2}}\right] \\ &= \left[f_{\underline{I}}(0,0) + f_{\underline{I}}(1,0) \times t_1 + f_{\underline{I}}(0,1) \times t_2 + f_{\underline{I}}(1,1) \times t_1 \times t_2\right]^n \end{aligned}$$

et donc

$$P_N(t) = \left[f_{\underline{I}}(0,0) + \left(f_{\underline{I}}(1,0) + f_{\underline{I}}(0,1)\right) \times t + f_{\underline{I}}(1,1) \times t^2\right]^n$$

(b) Développer la $Cov(M_1, M_2)$

$$\begin{aligned} Cov(M_1,M_2) &= Cov\left(\sum_{i=1}^{n} I_{1,i}, \sum_{i=1}^{n} I_{2,i}\right) \\ &= n \times Cov(I_1, I_2) \end{aligned}$$

(c) Identifier la fgm de (X_1, X_2) et de S

$$\begin{aligned} M_{X_1,X_2}(t_1,t_2) &= P_{M_1,M_2}\left(M_{B_1}(t_1), M_{B_2}(t_2)\right) \\ &= \left(f_{\underline{I}}(0,0) + f_{\underline{I}}(1,0) \times M_{B_1}(t_1) + f_{\underline{I}}(0,1) \times M_{B_2}(t_2)\right. \\ &\quad \left. + f_{\underline{I}}(1,1) \times M_{B_1}(t_1) \times M_{B_2}(t_2)\right)^n \end{aligned}$$

et

$$M_S(t) = M_{X_1,X_2}(t,t)$$

(d) Calculer $Cov(X_1, X_2)$

$$\begin{aligned} Cov(X_1,X_2) &= Cov\left(\sum_{k=1}^{M_1} B_{1,k}, \sum_{k=1}^{M_2} B_{2,k}\right) \\ &= E[B_1] \times E[B_2] \times Cov(M_1, M_2) \end{aligned}$$

(e) Calculer les espérance de X_1, X_2et S

$$\begin{aligned} E[X_1] &= E[M_1] \times E[B_1] \\ &= n \times E[I_1] \times E[B_1] \\ &= 10 \times 0.4 \times 10 \end{aligned}$$

De la même manière on trouve $E[X_2]$.
Enfin, on a

$$E[S] = E[X_1] + E[X_2] = 70$$

(f) Calculer les variance de X_1 et X_2

$$Var(X_1) = E[M_1] \times Var[B_1] + Var[M_1] \times E[B_1]^2$$

avec

$$E[M_1] = n \times E[I_1]$$

et

$$Var[M_1] = n \times Var[I_1]$$

La même chose pour X_2.

(g) Calculer la $Cov(X_1, X_2)$ et la variance de S. La formule de la covariance est donnée à la question d), il reste à calculer la variance de S :

$$Var(S) = Var(X_1) + Var(X_1) + 2 \times Cov(X_1, X_2)$$

31. Soit un couple de v.a (I_1, I_2) dont la fonction de masse de probabilité conjointe est f_{I_1,I_2}. On a

$$f_{I_1,I_2}(1,1) = f_{I_1,I_2}(0,0) = \frac{1+\rho}{4}$$

ρ étant le coéfficient de corrélation entre (I_1, I_2).

(a) Trouver la fgp de (M_1, M_2) et de N

$$\begin{aligned} P_{M_1,M_2}(t_1,t_2) &= E\left[t_1^{M_1} \times t_2^{M_2}\right] \\ &= E\left[t_1^{K_1+\sum_{i=1}^{K_0} I_{1,i}} \times t_2^{K_2+\sum_{i=1}^{K_0} I_{2,i}}\right] \\ &= P_{k_1}(t_1) P_{k_2}(t_2) E\left[t_1^{\sum_{i=1}^{K_0} I_{1,i}} \times t_2^{\sum_{i=1}^{K_0} I_{2,i}}\right] \\ &= P_{k_1}(t_1) P_{k_2}(t_2) P_{K_0}(M_{I_1}(ln(t_1)) \times M_{I_1}(ln(t_2))) \end{aligned}$$

(b) et donc

$$\begin{aligned} P_N(t) &= P_{M_1,M_2}(t,t) \\ &= \end{aligned}$$

(c) Développer la $Cov(M_1, M_2)$

$$\begin{aligned} Cov(M_1,M_2) &= Cov\left(K_1 + \sum_{i=1}^{K_0} I_{1,i}, K_2 + \sum_{i=1}^{K_0} I_{2,i}\right) \\ &= Cov\left(\sum_{i=1}^{K_0} I_{1,i}, \sum_{i=1}^{K_0} I_{2,i}\right) \\ &= E[K_0] \times Cov(I_1, I_2) + Var[K_0] \times E[I_1] \times E[I_2] \\ &= \gamma_0 \times E[I_1 I_2] \\ &= \gamma_0 \times \frac{1+\rho}{4} \end{aligned}$$

(d) Identifier la fgm de (X_1, X_2) et de S

$$M_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = P_{M_1,M_2}\left(M_{B_1}(t_1), M_{B_2}(t_2)\right)$$

et

$$M_S(t) = M_{X_1,X_2}(t,t)$$

(e) Calculer $Cov(X_1, X_2)$

$$\begin{aligned}
Cov(X_1,X_2) &= Cov\left(\sum_{k=1}^{M_1} B_{1,k}, \sum_{k=1}^{M_2} B_{2,k}\right) \\
&= E\left[B_1\right] \times E\left[B_2\right] \times Cov\left(M_1, M_2\right) \\
&= \frac{1}{\beta} \times \frac{1}{\beta} \times Cov\left(M_1, M_2\right) \\
&= 100 \times \gamma_0 \times \frac{1+\rho}{4}
\end{aligned}$$

(f) Calculer les espérance de X_1, X_2et S

i. On a

$$\begin{aligned}
E\left[N\right] &= E\left[M_1\right] + E\left[M_2\right] \\
&= E\left[K_1\right] + E\left[K_0\right] \times E\left[I_1\right] + E\left[K_2\right] + E\left[K_0\right] \times E\left[I_2\right] \\
&= E\left[K_1\right] + E\left[K_2\right] + E\left[K_0\right] \\
&= 5
\end{aligned}$$

Enfin, on a

$$\begin{aligned}
E\left[S\right] &= E\left[X_1\right] + E\left[X_2\right] \\
&= E\left[M_1\right] \times E\left[B_1\right] + E\left[M_2\right] \times E\left[B_2\right] \\
&= E\left[N\right] \times E\left[B\right] \\
&= 50
\end{aligned}$$

ii. Calculer la $Cov(M_1, M_2)$ et la la $Var(N)$

$$\begin{aligned}
Cov(M_1, M_2) &= \gamma_0 \times \frac{1+\rho}{4} \\
&= \begin{cases} 0.075 & ,\rho = -1 \\ 0.75 & ,\rho = 0 \\ 1.425 & ,\rho = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
Var(N) &= Var(M_1) + Var(M_2) + 2Cov(M_1, M_2) \\
&= Var(K_1) + Var(K_2) + Var\left(\sum_{i=1}^{K_0} I_{1,i}\right) + Var\left(\sum_{i=1}^{K_0} I_{2,i}\right) + 2Cov(M_1, M_2) \\
&= Var(K_1) + Var(K_2) + 2Cov(M_1, M_2) + \gamma_0 \times E\left[I_1^2\right] + \gamma_0 \times E\left[I_1^2\right] \\
&= \begin{cases} 5.15 & ,\rho = -1 \\ 6.5 & ,\rho = 0 \\ 7.85 & ,\rho = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

iii. ...

iv. Calculer $Cov(X_1, X_2)$ et $Var(S)$

$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2) &= 100 \times \gamma_0 \times \frac{1+\rho}{4} \\ &= \begin{cases} 7.5 & ,\rho = -1 \\ 75 & ,\rho = 0 \\ 142.5 & ,\rho = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Var(N) &= Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, X_2) \\ &= \begin{cases} 1015 & ,\rho = -1 \\ 1150 & ,\rho = 0 \\ 1285 & ,\rho = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

32. (a) Calculer $E[B]$, $\mathrm{Cov}(C_1, C_2)$ et $\mathrm{Var}(B)$.
On applique les relations habituelles pour $E[B]$ et $Var(B)$.
De plus, on a

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{\alpha - 2} - \frac{1}{\alpha - 1}\right),$$

(b) Calculer l'espérance et la variance de X.
On applique les relations habituelles $E[X] = E[I]\,E[B]$, etc.

(c) Trouver l'expression de f_B et F_B.
En supposant $\lambda_2 > \lambda_1$ sans perte de généralité, l'expression de f_B est

$$\begin{aligned} f_B(x) &= \int_0^x f_{C_1,C_2}(y, x-y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^x \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda_1 \lambda_2}\left(\frac{1}{1 + \frac{y}{\lambda_1} + \frac{x-y}{\lambda_2}}\right)^{\alpha+2} \mathrm{d}y \\ &= \frac{\alpha}{\lambda_2 - \lambda_1}\left\{\left(\frac{1}{1+\frac{x}{\lambda_2}}\right)^{\alpha+1} - \left(\frac{1}{1+\frac{x}{\lambda_1}}\right)^{\alpha+1}\right\} \end{aligned}$$

et celle de F_B correspond à

$$\begin{aligned} F_B(x) &= \int_0^x f_B(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(1 - \left(\frac{1}{1+\frac{x}{\lambda_2}}\right)^{\alpha}\right) \\ &\quad - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(1 - \left(\frac{1}{1+\frac{x}{\lambda_1}}\right)^{\alpha}\right). \end{aligned}$$

(d) Calculer $\Pr(X > 70)$
On a pplique les relations habituelles

$$\begin{aligned} \Pr(X > 70) &= 1 - F_X(70) \\ &= 1 - (1 - q + qF_B(x)) \end{aligned}$$

2.2 Exercices informatiques

1. (a) On a

$$\begin{aligned} VaR_\kappa(S) &= VaR_\kappa(X_1) + VaR_\kappa(X_2) + VaR_\kappa(X_3) \\ &= 50\left((1-\kappa)^{-\frac{1}{1.5}} - 1\right) - \\ &\quad 100\log(1-\kappa) + \\ &\quad \exp\left(\log(100) - \frac{1}{2} + VaR_\kappa(Z)\right) \end{aligned}$$

   (b) Voir GitHub

   (c) Voir GitHub

2. Voir GitHub

3. (a) Développer l'expression de la fgp de (M_1, M_2).

   - On a

$$\begin{aligned} P_{M_1,M_2}(t_1,t_2) &= E\left[e^{\Theta_1\lambda_1(t_1-1)}e^{\Theta_2\lambda_2(t_2-1)}\right] \\ &= M_{\Theta_1,\Theta_2}\left(\lambda_1(t_1-1), \lambda_2(t_2-1)\right) \end{aligned}$$

   (b) Développer l'expression de la fonction caractéristique de (X_1, X_2).

   - On a

$$\begin{aligned} \varphi_{X_1,X_2}(t_1,t_2) &= P_{M_1,M_2}\left(\varphi_{B_1}(t_1), \varphi_{B_2}(t_2)\right) \\ &= M_{\Theta_1,\Theta_2}\left(\lambda_1\left(\varphi_{B_1}(t_1)-1\right), \lambda_2\left(\varphi_{B_2}(t_2)-1\right)\right) \end{aligned}$$

   (c) Développer l'expression de la fonction caractéristique de S.

   - On a

$$\varphi_S(t) = \varphi_{X_1,X_2}(t,t) = P_{M_1,M_2}\left(\varphi_{B_1}(t), \varphi_{B_2}(t)\right) = M_{\Theta_1,\Theta_2}\left(\lambda_1\left(\varphi_{B_1}(t_1)-1\right), \lambda_2\left(\varphi_{B_2}(t_2)-1\right)\right) \quad (6)$$

   (d) Calculer les valeurs de $f_S(k)$, $k = 0, 1, 2, ..., 4095$.

      i. Indiquer la méthode pour calculer les valeurs de $f_S(k)$.

      - Les v.a. B_1, B_2, X_1, X_2, S sont discrètes.
      - On utilise les méthodes basées sur les fonctions caractéristiques des v.a. discrètes pour calculer les valeurs de $f_S(k)$
      - On utilise la fonction FFT pour construire les valeurs des vecteurs de fonctions caractéristiques associées aux vecteurs des fonctions de masses de proba de B_1 et B_2
      - On utilise (6) pour les valeurs du vecteur associé à φ_S
      - On utilise la fonction FFT pour inverser et calculer les valeurs de $f_S(k)$

      ii. Indiquer les valeurs de $F_S(k)$, $k = 30, 40$. Vérification : $F_S(35) = 0.988977$.

      - $F_S(k) = \sum_{j=0}^{k} f_S(j)$
      - $F_S(30)$ =0.977110
      - $F_S(40)$ =0.994759

2.3 Exercices A2021

1. **Solution à l'exercice 1.**

   (a) Expression de $Cov(I_1, I_2)$ en fonction de a et b.

   - On a
   $$\zeta_1 = E[\Theta] = \frac{a}{a+b}.$$
   - On a
   $$\zeta_2 = E[\Theta^2] = \frac{ab + a^2(a+b+1)}{(a+b)^2(a+b+1)}.$$
   - On obtient
   $$Cov(I_1, I_2) = \zeta_2 - \zeta_1^2 = E[\Theta^2] - E[\Theta]^2 = Var(\Theta) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.$$

   (b) Expression de $\rho = \rho_P(I_1, I_2)$ en fonction de a et b.

   - On a
   $$\begin{aligned}\rho_P(I_1, I_2) &= \frac{Cov(I_1, I_2)}{\sqrt{Var(I_1)Var(I_2)}} \\ &= \frac{\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}}{\frac{a}{a+b} - \frac{a^2}{(a+b)^2}} \\ &= \frac{1}{a+b+1}.\end{aligned}$$

   (c) On fixe b tel que $q = \frac{a}{a+b}$.

   - Alors, on déduit
   $$a + b = \frac{a}{q}$$
   et
   $$\begin{aligned}\rho_P(I_1, I_2) &= \frac{1}{a+b+1} \\ &= \frac{1}{\frac{a}{q} + 1} \\ &= \frac{q}{a+q}.\end{aligned}$$
   - On observe
   $$\lim_{a \to \infty} \rho_P(I_1, I_2) = 0$$
   et
   $$\lim_{a \to 0} \rho_P(I_1, I_2) = 1.$$

   (d) Expression de $Var(N_n)$:
   $$\begin{aligned}Var(N_n) &= Var(I_1 + \cdots + I_n) \\ &= nVar(I) + n(n-1)Cov(I_1, I_2) \\ &= nVar(I) + n(n-1)Var(I)\rho) \\ &= Var(N_n^{\perp}) + (n-1)Var(N_n^{\perp})\rho.\end{aligned}$$
   où $N_n^{\perp} \sim Binom(n, \zeta_1)$.

(e) Expression de $Var(W_n)$:

$$\begin{aligned}
Var(W_n) &= \frac{1}{n^2} Var(N_n) \\
&= \frac{1}{n^2}\left(Var(N_n^{\perp}) + (n-1)Var(N_n^{\perp})\rho\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\left(nVar(I) + (n-1)nVar(I)\rho\right) \\
&= \frac{1}{n}Var(I) + Var(I)\left(1-\frac{1}{n}\right)\rho.
\end{aligned}$$

(f) Expression de $\Pr(N_n = k)$:

$$\begin{aligned}
\Pr(N_n = k) &= \int_0^1 \Pr(N_n = k|\Theta = \theta)\, f_\Theta(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^1 \binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k} f_\Theta(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \binom{n}{k}\int_0^1 \theta^k(1-\theta)^{n-k} f_\Theta(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \binom{n}{k}\int_0^1 \theta^k(1-\theta)^{n-k} \frac{\theta^a(1-\theta)^b}{I(a,b)}\mathrm{d}\theta \\
&= \binom{n}{k}\frac{1}{I(a,b)}\int_0^1 \theta^{a+k}(1-\theta)^{b+n-k}\mathrm{d}\theta \\
&= \binom{n}{k}\frac{I\left(a+k, b+n-k\right)}{I\left(a,b\right)}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\}.
\end{aligned}$$

(g) Hypothèses : $a = 2$ et $b = 48$.

i. Valeurs de q et ρ :

$$q = \frac{2}{2+48} = \frac{1}{25} = 0.04 \qquad \rho = \frac{q}{a+q} = \frac{\frac{1}{25}}{2+\frac{1}{25}} = \frac{1}{27}.$$

ii. Valeurs de $E[N_n]$ et $Var(N_n)$, $n = 20$:

$$E[N_n] = 20q \qquad Var(N_n) = 20q(1-q) + 380q(1-q)\rho.$$

iii. Calculez $\Pr(N_n = k)$, $n = 20$ et $k \in \{0, 1, 2\}$.

iv. Valeur de $\Pr(I_1 = 0, I_2 = 0, I_3 = 0, \ldots, I_n = 0)$, $n = 20$:

- On utilise
$$\Pr(I_1 = i_1, \ldots, I_n = i_n) = \frac{\Pr(N_n = k)}{\binom{n}{k}},$$
où $k = \sum_{j=1}^n i_j$.
- On obtient
$$\Pr(I_1 = 0, I_2 = 0, I_3 = 0, \ldots, I_n = 0) = \frac{\Pr(N_n = 0)}{\binom{n}{0}}.$$

v. Valeur de $\Pr(I_1 = 1, I_2 = 0, I_3 = 0, \ldots, I_n = 0)$, $n = 20$.

- On utilise
$$\Pr(I_1 = i_1, \ldots, I_n = i_n) = \frac{\Pr(N_n = k)}{\binom{n}{k}},$$
où $k = \sum_{j=1}^n i_j$.

- On obtient
$$\Pr(I_1 = 1, I_2 = 0, I_3 = 0, \ldots, I_n = 0) = \frac{\Pr(N_n = 1)}{\binom{n}{1}}.$$

vi. Valeur de $\Pr(I_1 = 1, I_2 = 1, I_3 = 0, \ldots, I_n = 0)$, $n = 20$:

- On utilise
$$\Pr(I_1 = i_1, \ldots, I_n = i_n) = \frac{\Pr(N_n = k)}{\binom{n}{k}},$$
où $k = \sum_{j=1}^{n} i_j$.
- On obtient
$$\Pr(I_1 = 1, I_2 = 1, I_3 = 0, \ldots, I_n = 0) = \frac{\Pr(N_n = 2)}{\binom{n}{2}}.$$

vii. Valeur de $\lim\limits_{n\to\infty} E[W_n]$ et $\lim\limits_{n\to\infty} Var(W_n)$:
$$\lim_{n\to\infty} E[W_n] = q \qquad \lim_{n\to\infty} Var(W_n) = \rho.$$

2. **Solution à l'exercice 2.**
   (a) Expression de $\zeta_k = \Pr(I_1 = 1, \ldots, I_k = 1)$ en fonction de $\mathcal{L}_Y$ et k, $k \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned}\zeta_k &= \Pr(I_1 = 1, \ldots, I_k = 1)\\ &= E_\Theta[\Pr(I_1 = 1, \ldots, I_k = 1|\Theta)]\\ &= E[\Theta^k]\\ &= E[\mathrm{e}^{-rkY}]\\ &= \mathcal{L}_Y(rk).\end{aligned}$$
   (b) Soit $E[I_1] = q$. Valeur de $r > 0$ en fonction de q et α :
   - On a
$$q = \zeta_1 = \mathcal{L}_Y(r) = \frac{1}{(1+r)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$
   - On isole r
$$\begin{gathered}1 + r = q^{-\alpha}\\ \Leftrightarrow\\ r = q^{-\alpha} - 1.\end{gathered}$$
   (c) On fixe r de telle sorte que $E[I_1] = q$. Expression de $\rho_P(I_1, I_2)$:
   - On a
$$\begin{aligned}\rho_P(I_1, I_2) &= \frac{\zeta_2 - q^2}{q - q^2}\\ &= \frac{\mathcal{L}_Y(2r) - q^2}{q - q^2}\\ &= \frac{(1 + 2(q^{-\alpha} - 1))^{-\frac{1}{\alpha}} - q^2}{q - q^2}.\end{aligned}$$
   - On obtient
$$\begin{aligned}\rho_P(I_1, I_2) &= \frac{(1 + 2(q^{-\alpha} - 1))^{-\frac{1}{\alpha}} - q^2}{q - q^2}\\ &= \frac{(2q^{-\alpha} - 1)^{-\frac{1}{\alpha}} - q^2}{q - q^2}\end{aligned}$$

(d) Démonstration de

$$\Pr(N_n = k) = \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} \mathcal{L}_Y((j+k)r), \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Pour $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on effectue les étapes suivantes :

- Étape 1 :

$$\begin{aligned}
\Pr(N_n = k) &= E_\Theta[\Pr(N_n = k)|\Theta] \\
&= E[\binom{n}{k}\Theta^k (1-\Theta)^{n-k}] \\
&= \binom{n}{k} E[\Theta^k (1-\Theta)^{n-k}].
\end{aligned}$$

- Étape 2 :

$$\begin{aligned}
\Pr(N_n = k) &= \binom{n}{k} E[\Theta^k (1-\Theta)^{n-k}] \\
&= \binom{n}{k} E\left[\Theta^k \left(\sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} \Theta^j\right)\right] \\
&= \binom{n}{k} E\left[\sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} \Theta^{k+j}\right] \\
&= \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} E[\Theta^{k+j}] \\
&= \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} \zeta_{k+j}.
\end{aligned}$$

- Étape 3 :

$$\begin{aligned}
\Pr(N_n = k) &= \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} \zeta_{k+j} \\
&= \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} \mathcal{L}_Y((k+j)r) \\
&= \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} \frac{1}{(1+(k+j)r)^{\frac{1}{\alpha}}} \\
&= \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} \frac{1}{((k+j)q^\alpha - ((k+j-1)))^{\frac{1}{\alpha}}}.
\end{aligned}$$

- Merci au théorème du binôme qui est beau, vraiment beau, comme le dirait Fernando.

(e) Hypothèses : $q = 0.08$ et $\alpha = 2$.

i. Calculez r.

ii. Calculez $\rho_P(I_1, I_2)$.

iii. Calculez $\Pr(N_2 = k)$, $k \in \{0, 1, 2\}$.

iv. Calculez $\Pr(N_4 = k)$, $k \in \{3, 4\}$.

3. **Solution à l'exercice 3.**

(a) Expression de $E[M_k]$, $k \in \mathbb{N}_+$. On a

$$E[M_k] = E[I_1] + \cdots + E[I_k] = kE[I] = kq, \quad k \in \mathbb{N}_+.$$

(b) Expression de $\rho_P(I_k, I_{k+h})$, $k \in \mathbb{N}_+$. On a

$$\rho_P(I_k, I_{k+h}) = \frac{Cov(I_k, I_{k+h})}{\sqrt{Var(I_k)Var(I_{k+h}}} = \frac{\alpha^h q(1-q)}{q(1-q)} = \alpha^h.$$

(c) Supposons que $I_k = 1$, s'il pleut le jour k, et $I_k = 0$, s'il ne pleut pas le jour k.

i. Nombre espéré de jours de pluie pendant le mois de juin.

$$E[M_{30}] = 30E[I_1] = 30q = 10.$$

ii. Valeur de la probabilité qu'il pleuve 5 jours de suite.

$$\Pr(I_1 = 1, \ldots, I_5 = 1) = \cdots = qp_{11}^4 = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^3}{4^4} = \frac{27}{625} = 0.0432.$$

iii. Avec les hypothèses en (3), calculez les valeurs $\Pr(M_2 = j)$, $j \in \{0, 1, 2\}$.

$$\Pr(M_2 = 0) = (1-q)p_{00} = \frac{2}{3}\frac{11}{15}$$
$$\Pr(M_2 = 1) = (1-q)p_{01} + qp_{10} = \frac{2}{3}\frac{4}{15} + \frac{1}{3}\frac{6}{15}$$
$$\Pr(M_2 = 2) = qp_{11} = \frac{1}{3}\frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$

4. **Solution à l'exercice 4.**

(a) Valeurs de $f_{\underline{I}}(i_1, i_2, i_3, i_4) = \Pr(I_1 = i_1, \ldots, I_4 = i_4)$, $\forall (i_1, \ldots, i_4) \in \{0, 1\}^4$. On déduit

$$f_{\underline{I}}(0,0,0,0) = 0$$
$$f_{\underline{I}}(1,0,0,0) = \cdots = f_{\underline{I}}(0,0,0,1) = 0$$
$$f_{\underline{I}}(1,1,0,0) = \cdots = f_{\underline{I}}(0,0,1,1) = \frac{\Pr(N=2)}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}$$
$$f_{\underline{I}}(1,1,1,0) = \cdots = f_{\underline{I}}(0,1,1,1) = 0$$
$$f_{\underline{I}}(1,1,1,1) = 0.$$

(b) Valeurs de $f_{I_1,I_2,I_3}(i_1, i_2, i_3) = \Pr(I_1 = i_1, I_2 = i_2, I_3 = i_3)$, $\forall (i_1, i_2, i_3) \in \{0, 1\}^3$. En utilisant les propriétés des probabilités conjointes, on obtient

$$f_{I_1,I_2,I_3}(0,0,0) = 0$$
$$f_{I_1,I_2,I_3}(1,0,0) = f_{I_1,I_2,I_3}(0,1,0) = f_{I_1,I_2,I_3}(0,0,1) = \frac{1}{6}$$
$$f_{I_1,I_2,I_3}(1,1,0) = f_{I_1,I_2,I_3}(1,0,1) = f_{I_1,I_2,I_3}(0,1,1) = \frac{1}{6}$$
$$f_{I_1,I_2,I_3}(1,1,1) = 0.$$

(c) Valeurs de $f_{I_1,I_2}(i_1, i_2) = \Pr(I_1 = i_1, I_2 = i_2)$, $\forall (i_1, i_2) \in \{0, 1\}^2$. On déduit

$$f_{I_1,I_2}(0,0) = \frac{1}{6}$$
$$f_{I_1,I_2}(1,0) = f_{I_1,I_2}(0,1) = \frac{1}{3}$$
$$f_{I_1,I_2}(1,1) = \frac{1}{6}.$$

(d) Démontrez que $I_j \sim Bern(q = \frac{1}{2})$. Est-ce que $F_{\underline{I}} \in \mathcal{CF}(F_1, \ldots, F_4)$, $F_j = F$ et F est la fonction de répartition de la loi Bernoulli de paramètre $q = \frac{1}{2}$? On déduit

$$f_{I_1}(0) = f_{I_2}(0) = \frac{1}{2}$$
$$f_{I_1}(1) = f_{I_2}(1) = \frac{1}{2},$$

ce qui signifie que $I_1 \sim Bern\left(q = \frac{1}{2}\right)$. Comme les v.a. I_1, I_2, I_3 et I_4 sont échangeables, il en suit que $I_j \sim Bern\left(q = \frac{1}{2}\right)$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. On conclut que $F_{\underline{I}} \in \mathcal{CF}(F_1, \ldots, F_4)$, $F_j = F$ et F est la fonction de répartition de la loi Bernoulli de paramètre $q = \frac{1}{2}$.

(e) Calculez $E[N]$ et $Var(N)$.
- Espérance :
$$E[N] = 2\Pr(N = 2) = 2.$$
- Variance :
$$Var(N) = (2 - E[N])^2 \Pr(N = 2) = 0.$$

(f) Valeur de $Cov(I_1, I_2)$.
- Puisque les v.a. I_1, I_2, I_3 et I_4 sont échangeables, on a
$$Var(N) = 4Var(I_1) + 4 \times 3Cov(I_1, I_2) = 0.$$
- On isole $Cov(I_1, I_2)$
$$Cov(I_1, I_2) = -\frac{Var(I_1)}{3} = -\frac{\frac{1}{4}}{3} = -\frac{1}{12}.$$

(g) Valeur de $\rho_P(I_1, I_2)$. On obtient
$$\rho_P(I_1, I_2) = \frac{Cov(I_1, I_2)}{\sqrt{Var(I_1)Var(I_2)}} = \frac{-\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{3}.$$

(h) Soit les vecteurs de v.a. $\underline{I}'$ et $\underline{I}^+$ avec $F_{\underline{I}'}, F_{\underline{I}^+} \in \mathcal{CF}(F_1, \ldots, F_4)$. On définit $N' = I_1' + \cdots + I_4'$ et $N^+ = I_1^+ + \cdots + I_4^+$. Les composantes de $\underline{I}^+$ sont comonotones. On ne précise par la distribution multivariée de $\underline{I}'$.

i. Valeur de $Var(N^+)$. Puisque les v.a. I_1, I_2, I_3 et I_4 sont échangeables et comonotones, on obient
$$Var(N^+) = Var(4I_1) = 16Var(I_1) = 4.$$

ii. Relation entre $Var(N')$ et $Var(N^+)$.
- On sait que
$$Cov(I_1', I_2') \leq Cov(I_1^+, I_2^+).$$
- Alors,
$$\begin{aligned} Var(N') &= 4Var(I_1') + 12Cov(I_1', I_2') \\ &\leq 4Var(I_1') + 12Cov(I_1^+, I_2^+) \\ &= 4Var(I_1^+) + 12Cov(I_1^+, I_2^+) \\ &= Var(N^+). \end{aligned}$$

iii. Relation entre $Var(N')$ et $Var(N)$.
- Par définition de la variance, on sait que
$$Var(N') \geq 0.$$
- Alors, déduit que
$$Var(N') \geq Var(N).$$

iv. Pour tout $\underline{I}' = (I_1', \ldots, I_4')$ avec $F_{\underline{I}'} \in \mathcal{CF}(F_1, \ldots, F_4)$, on déduit que
$$-\frac{1}{3} \leq \rho_P(I_1, I_2) = \cdots = \rho_P(I_2, I_4) \leq 1.$$

Références

[Cossette and Marceau, 2022] Cossette, H. and Marceau, E. (2022). *Mathématiques actuarielles du risque : modèles, mesures de risque et méthodes quantitatives.* Monographie.