Preuves algorithmes de DePril et de Panjer

Jérémie Barde

5 septembre 2024

Résumé

Ce document contient les preuves pour l'algorithme de DePril et de l'algorithme de Panjer.

1 Algorithme de DePril : Convolution de variables iid

(1) Résultats préliminaires :
- La fgp peut s'écrire comme une série de puissances : $\mathcal{P}_Y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$.
- Pour identifier la fonction de densité de Y on veut trouver les coefficients c_i.

(2) Identifier la fgp de S_n :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{S_n}(t) &= \mathcal{P}_{X_1}(t) \times \cdots \times \mathcal{P}_{X_n}(t), \quad X_i \sim X \\ &= (\mathcal{P}_X(t))^n\end{aligned}$$

(3) On dérive $\mathcal{P}_{S_n}(t)$:

$$\mathcal{P}'_{S_n}(t) = n \times (\mathcal{P}_X(t))^{n-1} \times \mathcal{P}'_X(t) \tag{1}$$

(4) On multiplie (eq. 1) par $\mathcal{P}_X(t)$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}'_{S_n}(t) \times \mathcal{P}_X(t) &= n \times (\mathcal{P}_X(t))^{n-1} \times \mathcal{P}'_X(t) \times \mathcal{P}_X(t) \\ &= n \times (\mathcal{P}_X(t))^n \times \mathcal{P}'_X(t) \\ &= n \times \mathcal{P}_{S_n}(t) \times \mathcal{P}'_X(t)\end{aligned} \tag{2}$$

(5) On écrit (eq. 2) sous forme de série de puissances et on multiplie par t :

$$\begin{aligned}t\left(\sum_{k=1}^{\infty} k f_{S_n}(k) t^{k-1}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_X(j) t^j\right) &= nt\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_{S_n}(k) t^k\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} j f_X(j) t^{j-1}\right) \\ \left(\sum_{k=0}^{\infty} k f_{S_n}(k) t^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_X(j) t^j\right) &= n\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_{S_n}(k) t^k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} j f_X(j) t^j\right)\end{aligned} \tag{3}$$

(6) On écrit (eq. 3) sous forme de série de puissances, voir tableaux 1 et 2 :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{k} (k-j) f_X(j) f_{S_n}(k-j)\right) t^k}_{a_k} = n \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{k} (j) f_X(j) f_{S_n}(k-j)\right) t^k}_{b_k}$$

(7) Pour $k \in \{1, 2, \ldots\}$, la relation suivante est vérifiée :

$$a_k = n \times b_k$$

(8) Donc,

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{k} (k-j) f_X(j) f_{S_n}(k-j) = n \sum_{j=0}^{k} (j) f_X(j) f_{S_n}(k-j) \\ &\sum_{j=1}^{k} (k-j) f_X(j) f_{S_n}(k-j) + k f_X(0) f_{S_n}(k) = n \sum_{j=1}^{k} (j) f_X(j) f_{S_n}(k-j) \\ &\sum_{j=1}^{k} (k-j-nj) f_X(j) f_{S_n}(k-j) = -k f_X(0) f_{S_n}(k) \\ &f_{S_n}(k) = \frac{1}{f_X(0)} \sum_{j=1}^{k} (n+1)\left(\frac{j}{k} - 1\right) f_X(j) f_{S_n}(k-j) \quad \square\end{aligned}$$

2 Algorithme de Panjer

(1) Résultats préliminaires :
- La fgp peut s'écrire comme une série de puissances : $\mathcal{P}_Y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$.
- Pour identifier la fonction de densité de Y on veut trouver les coefficients c_i.
- $\mathcal{P}_X(t) = \mathcal{P}_M(\mathcal{P}_B(t))$, pour une somme aléatoire.

(2) On commence doucement en dérivant par rapport à t :

$$\mathcal{P}'_X(t) = \mathcal{P}'_B(t) \times \mathcal{P}'_M(\mathcal{P}_B(t)) \tag{4}$$

(3) Puis on utilise la relation récursive pour $\mathcal{P}'_M(t)$ quand la loi de M appartient à la famille $(a, b, 0)$:

$$\mathcal{P}'_M(t) = at\mathcal{P}'_M(t) + (a+b)\mathcal{P}_M(t) \tag{5}$$

(4) On combine (eq. 4) et (eq. 5) :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'_X(t) &= \mathcal{P}'_B(t)\left\{a\mathcal{P}_B(t)\mathcal{P}'_M(\mathcal{P}_B(t)) + (a+b)\mathcal{P}_M(\mathcal{P}_B(t))\right\} \\ &= a\mathcal{P}'_B(t)\mathcal{P}_B(t)\mathcal{P}'_M(\mathcal{P}_B(t)) + (a+b)\mathcal{P}'_B(t)\mathcal{P}_M(\mathcal{P}_B(t)) \end{aligned} \tag{6}$$

(5) On réécrit (eq. 6) :

$$\mathcal{P}'_X(t) = a\mathcal{P}_B(t)\mathcal{P}'_X(t) + (a+b)\mathcal{P}'_B(t)\mathcal{P}_X(t) \tag{7}$$

(6) On remplace les fgp par les séries de puissances correspondantes :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} kf_X(k)t^{k-1} =& a\left(\sum_{m_1=0}^{\infty} f_B(m_1)t^{m_1}\right)\left(\sum_{m_2=1}^{\infty} m_2 f_X(m_2)t^{m_2-1}\right) \\ &+ (a+b)\left(\sum_{l_1=1}^{\infty} l_1 f_B(l_1)t^{l_1-1}\right)\left(\sum_{l_2=0}^{\infty} f_X(l_2)t^{l_2}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

(7) On multiplie (eq. 8) par t pour ne pas travailler avec les t^{w-1} :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} kf_X(k)t^{k} =& a\left(\sum_{m_1=0}^{\infty} f_B(m_1)t^{m_1}\right)\left(\sum_{m_2=0}^{\infty} m_2 f_X(m_2)t^{m_2}\right) \\ &+ (a+b)\left(\sum_{l_1=0}^{\infty} l_1 f_B(l_1)t^{l_1}\right)\left(\sum_{l_2=0}^{\infty} f_X(l_2)t^{l_2}\right) \end{aligned} \tag{9}$$

On peut débuter toutes les sommes à 0 car $0f_m(0)t^0 = 0$.

(8) Dans (eq. 9), on reconnaît 3 séries de puissances, voir Tableau 1 et Tableau 2 :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{kf_X(k)}_{c_k} t^k \\ \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k &= \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} f_B(m_1)t^{m_1}\right)\left(\sum_{m_2=0}^{\infty} m_2 f_X(m_2)t^{m_2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{j_1=0}^{k} (k-j_1) f_B(j_1) f_X(k-j_1)\right)}_{d_k} t^k \\ \sum_{k=0}^{\infty} e_k t^k &= \left(\sum_{l_1=0}^{\infty} l_1 f_B(l_1)t^{l_1}\right)\left(\sum_{l_2=0}^{\infty} f_X(l_2)t^{l_2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{j_2=0}^{k} j_2 f_B(j_2) f_X(k-j_2)\right)}_{e_k} t^k \end{aligned} \tag{10}$$

(9) De (eq. 10), on conclut que (eq. 9) peut s'écrire :

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = a \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k + (a+b) \sum_{k=0}^{\infty} e_k t^k$$

(10) Pour $k \in \{1, 2, \ldots\}$, la relation suivante est satisfaite :

$$c_k = a d_k + (a+b) e_k \tag{11}$$

(11) On développe (eq. 11) :

$$k f_X(k) = a \sum_{j_1=0}^{k} (k-j_1) f_B(j_1) f_X(k-j_1) + (a+b) \sum_{j_2=0}^{k} j_2 f_B(j_2) f_X(k-j_2) \tag{12}$$

(12) On isole $f_X(k)$ dans (eq. 12) :

$$k f_X(k) = a \sum_{j_1=1}^{k} (k-j_1) f_B(j_1) f_X(k-j_1) + \underbrace{k f_X(k) f_B(0)}_{\text{Quand } j_1=0} + (a+b) \sum_{j_2=1}^{k} j_2 f_B(j_2) f_X(k-j_2) + \underbrace{0 f_B(0) f_X(k)}_{\text{quand } j_2=0}$$

$$k f_X(k) - a k f_X(k) f_B(0) = a \sum_{j_1=1}^{k} (k-j_1) f_B(j_1) f_X(k-j_1) + (a+b) \sum_{j_2=1}^{k} j_2 f_B(j_2) f_X(k-j_2)$$

$$f_X(k) k (1 - a f_B(0)) = \sum_{j=1}^{k} \{a(k-j) + (a+b)j\} \times f_B(j) f_X(k-j)$$

$$f_X(k) = \frac{1}{1 - a f_B(0)} \sum_{j=1}^{k} \left(a + b\frac{j}{k}\right) \times f_B(j) f_X(k-j) \quad \square$$

$\times$	$0 \times f_X(0)t^0$	$1 \times f_X(1)t^1$	$2 \times f_X(2)t^2$	$3 \times f_X(3)t^3$
$f_B(0)t^0$	0	$1 \times f_B(0) f_X(1) t^1$	$2 \times f_B(0) f_X(2) t^2$	$3 \times f_B(0) f_X(3) t^3$
$f_B(1)t^1$	0	$1 \times f_B(1) f_X(1) t^2$	$2 \times f_B(1) f_X(2) t^3$	$3 \times f_B(1) f_X(3) t^4$
$f_B(2)t^2$	0	$1 \times f_B(2) f_X(1) t^3$	$2 \times f_B(2) f_X(2) t^4$	$3 \times f_B(2) f_X(3) t^5$
$f_B(3)t^3$	0	$1 \times f_B(3) f_X(1) t^4$	$2 \times f_B(3) f_X(2) t^5$	$3 \times f_B(3) f_X(3) t^6$
$\vdots$	0	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

TABLE 1 – Produit des séries de puissances (eq. 10)

On somme les diagonales de bas en haut pour trouver la relation : $\sum_{j_1=0}^{k} (k-j_1) f_B(j_1) f_X(k-j_1)$

$\times$	$0 \times f_B(0)t^0$	$1 \times f_B(1)t^1$	$2 \times f_B(2)t^2$	$3 \times f_B(3)t^3$
$f_X(0)t^0$	0	$1 \times f_B(1) f_X(0) t^1$	$2 \times f_B(2) f_X(0) t^1$	$3 \times f_B(3) f_X(0) t^3$
$f_X(1)t^1$	0	$1 \times f_B(1) f_X(1) t^2$	$2 \times f_B(2) f_X(1) t^2$	$3 \times f_B(3) f_X(1) t^4$
$f_X(2)t^2$	0	$1 \times f_B(1) f_X(2) t^3$	$2 \times f_B(2) f_X(2) t^4$	$3 \times f_B(3) f_X(2) t^5$
$f_X(3)t^3$	0	$1 \times f_B(1) f_X(3) t^4$	$2 \times f_B(2) f_X(3) t^5$	$3 \times f_B(3) f_X(3) t^6$
$\vdots$	0	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

TABLE 2 – Produit des séries de puissances (eq. 10)

On somme les diagonales de haut en bas pour trouver la relation : $\sum_{j_2=0}^{k} j_2 f_B(j_2) f_X(k-j_2)$