

# Preuves algorithmes de DePril et de Panjer

Jérémie Barde

5 septembre 2024

## Résumé

Ce document contient les preuves pour l'algorithme de DePril et de l'algorithme de Panjer.

# 1 Algorithme de DePril : Convolution de variables iid

(1) Résultats préliminaires :

- La fgp peut s'écrire comme une série de puissances :  $\mathcal{P}_Y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$ .
- Pour identifier la fonction de densité de  $Y$  on veut trouver les coefficients  $c_i$ .

(2) Identifier la fgp de  $S_n$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{S_n}(t) &= \mathcal{P}_{X_1}(t) \times \cdots \times \mathcal{P}_{X_n}(t), \quad X_i \sim X \\ &= (\mathcal{P}_X(t))^n\end{aligned}$$

(3) On dérive  $\mathcal{P}_{S_n}(t)$  :

$$\mathcal{P}'_{S_n}(t) = n \times (\mathcal{P}_X(t))^{n-1} \times \mathcal{P}'_X(t) \quad (1)$$

(4) On multiplie (eq. 1) par  $\mathcal{P}_X(t)$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}'_{S_n}(t) \times \mathcal{P}_X(t) &= n \times (\mathcal{P}_X(t))^{n-1} \times \mathcal{P}'_X(t) \times \mathcal{P}_X(t) \\ \mathcal{P}_{S_n}(t) \times \mathcal{P}_X(t) &= n \times (\mathcal{P}_X(t))^n \times \mathcal{P}'_X(t) \\ \mathcal{P}'_{S_n}(t) \times \mathcal{P}_X(t) &= n \times \mathcal{P}_{S_n}(t) \times \mathcal{P}'_X(t)\end{aligned} \quad (2)$$

(5) On écrit (eq. 2) sous forme de série de puissances et on multiplie par  $t$  :

$$\begin{aligned}t \left( \sum_{k=1}^{\infty} k f_{S_n}(k) t^{k-1} \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} f_X(j) t^j \right) &= nt \left( \sum_{k=0}^{\infty} f_{S_n}(k) t^k \right) \left( \sum_{j=1}^{\infty} j f_X(j) t^{j-1} \right) \\ \left( \sum_{k=0}^{\infty} k f_{S_n}(k) t^k \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} f_X(j) t^j \right) &= n \left( \sum_{k=0}^{\infty} f_{S_n}(k) t^k \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} j f_X(j) t^j \right)\end{aligned} \quad (3)$$

(6) On écrit (eq. 3) sous forme de série de puissances, voir tableaux 1 et 2 :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left( \sum_{j=0}^k (k-j) f_X(j) f_{S_n}(k-j) \right)}_{a_k} t^k = n \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left( \sum_{j=0}^k (j) f_X(j) f_{S_n}(k-j) \right)}_{b_k} t^k$$

(7) Pour  $k \in \{1, 2, \dots\}$ , la relation suivante est vérifiée :

$$a_k = n \times b_k$$

(8) Donc,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^k (k-j) f_X(j) f_{S_n}(k-j) &= n \sum_{j=0}^k (j) f_X(j) f_{S_n}(k-j) \\ \sum_{j=1}^k (k-j) f_X(j) f_{S_n}(k-j) + k f_X(0) f_{S_n}(k) &= n \sum_{j=1}^k (j) f_X(j) f_{S_n}(k-j) \\ \sum_{j=1}^k (k-j-nj) f_X(j) f_{S_n}(k-j) &= -k f_X(0) f_{S_n}(k) \\ f_{S_n}(k) &= \frac{1}{f_X(0)} \sum_{j=1}^k (n+1) \left( \frac{j}{k} - 1 \right) f_X(j) f_{S_n}(k-j) \quad \square\end{aligned}$$

## 2 Algorithme de Panjer

(1) Résultats préliminaires :

- La fgp peut s'écrire comme une série de puissances :  $\mathcal{P}_Y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$ .
- Pour identifier la fonction de densité de  $Y$  on veut trouver les coefficients  $c_i$ .
- $\mathcal{P}_X(t) = \mathcal{P}_M(\mathcal{P}_B(t))$ , pour une somme aléatoire.

(2) On commence doucement en dérivant par rapport à  $t$  :

$$\mathcal{P}'_X(t) = \mathcal{P}'_B(t) \times \mathcal{P}'_M(\mathcal{P}_B(t)) \quad (4)$$

(3) Puis on utilise la relation récursive pour  $\mathcal{P}'_M(t)$  quand la loi de  $M$  appartient à la famille  $(a, b, 0)$  :

$$\mathcal{P}'_M(t) = at\mathcal{P}'_M(t) + (a+b)\mathcal{P}_M(t) \quad (5)$$

(4) On combine (eq. 4) et (eq. 5) :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'_X(t) &= \mathcal{P}'_B(t) \{a\mathcal{P}_B(t)\mathcal{P}'_M(\mathcal{P}_B(t)) + (a+b)\mathcal{P}_M(\mathcal{P}_B(t))\} \\ &= a\mathcal{P}'_B(t)\mathcal{P}_B(t)\mathcal{P}'_M(\mathcal{P}_B(t)) + (a+b)\mathcal{P}'_B(t)\mathcal{P}_M(\mathcal{P}_B(t)) \end{aligned} \quad (6)$$

(5) On réécrit (eq. 6) :

$$\mathcal{P}'_X(t) = a\mathcal{P}_B(t)\mathcal{P}'_X(t) + (a+b)\mathcal{P}'_B(t)\mathcal{P}_X(t) \quad (7)$$

(6) On remplace les fgp par les séries de puissances correspondantes :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k f_X(k) t^{k-1} &= a \left( \sum_{m_1=0}^{\infty} f_B(m_1) t^{m_1} \right) \left( \sum_{m_2=1}^{\infty} m_2 f_X(m_2) t^{m_2-1} \right) \\ &\quad + (a+b) \left( \sum_{l_1=1}^{\infty} l_1 f_B(l_1) t^{l_1-1} \right) \left( \sum_{l_2=0}^{\infty} f_X(l_2) t^{l_2} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

(7) On multiplie (eq. 8) par  $t$  pour ne pas travailler avec les  $t^{w-1}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} k f_X(k) t^k &= a \left( \sum_{m_1=0}^{\infty} f_B(m_1) t^{m_1} \right) \left( \sum_{m_2=0}^{\infty} m_2 f_X(m_2) t^{m_2} \right) \\ &\quad + (a+b) \left( \sum_{l_1=0}^{\infty} l_1 f_B(l_1) t^{l_1} \right) \left( \sum_{l_2=0}^{\infty} f_X(l_2) t^{l_2} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

On peut débiter toutes les sommes à 0 car  $0f_m(0)t^0 = 0$ .

(8) Dans (eq. 9), on reconnaît 3 séries de puissances, voir Tableau 1 et Tableau 2 :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{k f_X(k)}_{c_k} t^k \\ \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k &= \left( \sum_{m_1=0}^{\infty} f_B(m_1) t^{m_1} \right) \left( \sum_{m_2=0}^{\infty} m_2 f_X(m_2) t^{m_2} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left( \sum_{j_1=0}^k (k-j_1) f_B(j_1) f_X(k-j_1) \right)}_{d_k} t^k \\ \sum_{k=0}^{\infty} e_k t^k &= \left( \sum_{l_1=0}^{\infty} l_1 f_B(l_1) t^{l_1} \right) \left( \sum_{l_2=0}^{\infty} f_X(l_2) t^{l_2} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left( \sum_{j_2=0}^k j_2 f_B(j_2) f_X(k-j_2) \right)}_{e_k} t^k \end{aligned} \quad (10)$$

(9) De (eq. 10), on conclut que (eq. 9) peut s'écrire :

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = a \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k + (a+b) \sum_{k=0}^{\infty} e_k t^k$$

(10) Pour  $k \in \{1, 2, \dots\}$ , la relation suivante est satisfaite :

$$c_k = a d_k + (a+b) e_k \quad (11)$$

(11) On développe (eq. 11) :

$$k f_X(k) = a \sum_{j_1=0}^k (k-j_1) f_B(j_1) f_X(k-j_1) + (a+b) \sum_{j_2=0}^k j_2 f_B(j_2) f_X(k-j_2) \quad (12)$$

(12) On isole  $f_X(k)$  dans (eq. 12) :

$$\begin{aligned} k f_X(k) &= a \sum_{\substack{j_1=1 \\ \text{red}}}^k (k-j_1) f_B(j_1) f_X(k-j_1) + \underbrace{k f_X(k) f_B(0)}_{\text{Quand } j_1=0} + (a+b) \sum_{\substack{j_2=1 \\ \text{red}}}^k j_2 f_B(j_2) f_X(k-j_2) + \underbrace{0 f_B(0) f_X(k)}_{\text{quand } j_2=0} \\ k f_X(k) - a k f_X(k) f_B(0) &= a \sum_{j_1=1}^k (k-j_1) f_B(j_1) f_X(k-j_1) + (a+b) \sum_{j_2=1}^k j_2 f_B(j_2) f_X(k-j_2) \\ f_X(k) k (1 - a f_B(0)) &= \sum_{j=1}^k \{a(k-j) + (a+b)j\} \times f_B(j) f_X(k-j) \\ f_X(k) &= \frac{1}{1 - a f_B(0)} \sum_{j=1}^k \left( a + b \frac{j}{k} \right) \times f_B(j) f_X(k-j) \quad \square \end{aligned}$$

$\times$	$0 \times f_X(0)t^0$	$1 \times f_X(1)t^1$	$2 \times f_X(2)t^2$	$3 \times f_X(3)t^3$
$f_B(0)t^0$	0	$1 \times f_B(0)f_X(1)t^1$	$2 \times f_B(0)f_X(2)t^2$	$3 \times f_B(0)f_X(3)t^3$
$f_B(1)t^1$	0	$1 \times f_B(1)f_X(1)t^2$	$2 \times f_B(1)f_X(2)t^3$	$3 \times f_B(1)f_X(3)t^4$
$f_B(2)t^2$	0	$1 \times f_B(2)f_X(1)t^3$	$2 \times f_B(2)f_X(2)t^4$	$3 \times f_B(2)f_X(3)t^5$
$f_B(3)t^3$	0	$1 \times f_B(3)f_X(1)t^4$	$2 \times f_B(3)f_X(2)t^5$	$3 \times f_B(3)f_X(3)t^6$
$\vdots$	0	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

TABLE 1 – Produit des séries de puissances (eq. 10)

On somme les diagonales de bas en haut pour trouver la relation :  $\sum_{j_1=0}^k (k-j_1) f_B(j_1) f_X(k-j_1)$

$\times$	$0 \times f_B(0)t^0$	$1 \times f_B(1)t^1$	$2 \times f_B(2)t^2$	$3 \times f_B(3)t^3$
$f_X(0)t^0$	0	$1 \times f_B(1)f_X(0)t^1$	$2 \times f_B(2)f_X(0)t^1$	$3 \times f_B(3)f_X(0)t^3$
$f_X(1)t^1$	0	$1 \times f_B(1)f_X(1)t^2$	$2 \times f_B(2)f_X(1)t^2$	$3 \times f_B(3)f_X(1)t^4$
$f_X(2)t^2$	0	$1 \times f_B(1)f_X(2)t^3$	$2 \times f_B(2)f_X(2)t^4$	$3 \times f_B(3)f_X(2)t^5$
$f_X(3)t^3$	0	$1 \times f_B(1)f_X(3)t^4$	$2 \times f_B(2)f_X(3)t^5$	$3 \times f_B(3)f_X(3)t^6$
$\vdots$	0	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

TABLE 2 – Produit des séries de puissances (eq. 10)

On somme les diagonales de haut en bas pour trouver la relation :  $\sum_{j_2=0}^k j_2 f_B(j_2) f_X(k-j_2)$