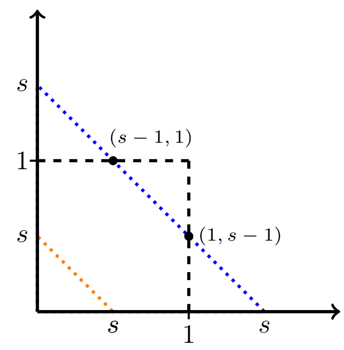

ILLUSTRATION 1 – Région d'intégration dans le cas avec de deux v.a. uniforme sur [0, 1]

1 Convolution de loi uniforme

On cherche à faire le produit de convolution entre $X \sim U(0,1)$ et $Y \sim U(0,1)$. On rappelle rapidement le produit de convolution,

$$\begin{aligned} F_{X+Y}(s) &= \Pr(X+Y \leq s) \\ &= \iint\limits_{x+y=s} f_{X,Y}(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \iint\limits_{x+y=s} f_X(x)f_Y(y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Pour faciliter la compréhension on fait un schéma, voir Illustration 1. On remarque qu'il faut faire attention au domaine d'intégration.

- Si $0 \leq s \leq 1$

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \int_0^s \int_0^{s-y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^s (s-y)\mathrm{d}y \\ &= \frac{s^2}{2} \end{aligned}$$

- Si $1 \leq s \leq 2$

$$\begin{aligned} F_S(s) &= 1 - \int_{s-1}^1 \int_{s-x}^1 \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= 1 - \left(\frac{s^2}{2} - 2s + 2\right) \end{aligned}$$

Donc,

$$F_S(s) = \begin{cases} \frac{s^2}{2}, & 0 \leq s \leq 1 \\ 1 - \left(\frac{s^2}{2} - 2s + 2\right), & 1 \leq s \leq 2 \end{cases}$$

2 Convolution de loi bêta

Pour obtenir la fonction de densité de S, on utilise la même approche que pour la somme de deux v.a. uniforme sur [0, 1].

Il suffit ensuite de changer les marginales pour celle des v.a. $X \sim \text{Beta}(1,2)$ et $Y \sim \text{Beta}(2,1)$:

- Si $0 \leq s \leq 1$

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \int_0^s \int_0^{s-y} 4x(1-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^s 2(1-y)(s-y)^2\mathrm{d}y \\ &= \int_0^s 2(s^2 - ys^2 - 2ys + 2y^2 s + y^2 - y^3)\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{3}s^3 - \frac{1}{6}s^4 \end{aligned}$$

- Si $1 \leq s \leq 2$

$$\begin{aligned} F_S(s) &= 1 - \int_{s-1}^1 \int_{s-x}^1 4x\,(1-y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= 1 + \frac{s^4 - 4s^3 + 16s - 16}{6} \end{aligned}$$

Donc,

$$F_S(s) = \begin{cases} \frac{2}{3}s^3 - \frac{1}{6}s^4, & 0 \leq s \leq 1 \\ 1 + \frac{s^4 - 4s^3 + 16s - 16}{6}, & 1 \leq s \leq 2 \end{cases}$$