

# Convolution de variables aléatoires de lois exponentielles ou Erlang

Jérémie Barde

21 novembre 2024

## Résumé

Ce document fournit les démonstrations pour évaluer avec exactitude la convolution de variables aléatoires suivant des lois exponentielles ou Gamma, avec des paramètres  $\beta$  distincts. Il traite des cas spécifiques de la somme de deux variables aléatoires exponentielles, de deux variables Gamma, et de trois variables Gamma avec différents paramètres. Le document aborde également le cas de la loi Gamma bivariée CRMM. Chaque section inclut la démonstration ainsi qu'un exemple numérique pour illustrer les concepts.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Convolution de deux v.a. de loi exponentielle différentes</b>	<b>3</b>
1.1	Preuve . . . . .	3
1.2	Exemple numérique . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Convolution de deux v.a. de loi gamma différentes</b>	<b>5</b>
2.1	Preuve . . . . .	5
2.2	Exemple numérique . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Convolution de trois v.a. de loi gamma différente</b>	<b>7</b>
3.1	Preuve . . . . .	7
3.2	Exemple de code . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Loi gamma bivariée Cheriyān – Ramabhadran – Mathai – Moschopoulos</b>	<b>9</b>
4.1	Exemple de code . . . . .	10

# 1 Convolution de deux v.a. de loi exponentielle différentes

## 1.1 Preuve

Soit les variables indépendantes,

$$X_i \sim \text{Exp}(\beta_i), \quad i \in \{1, 2\} \text{ et } \beta_1 < \beta_2.$$

On définit  $S = X_1 + X_2$  et on veut démontrer que,

$$F_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_J(k) H(x; 2+k, \beta_2)$$

(1) Résultat préliminaire : lemme 2020

$$\frac{\beta_1}{\beta_1 + t} = \frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \left( \frac{q}{1 - (1-q) \frac{\beta_2}{\beta_2 + t}} \right)$$

(2) Identifier la tls de  $S$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S(t) &= \mathcal{L}_{X_1}(t) \times \mathcal{L}_{X_2}(t) \\ &= \frac{\beta_1}{\beta_1 - t} \times \frac{\beta_2}{\beta_2 - t} \\ &= \frac{\beta_2}{\beta_2 - t} \times \frac{q_1}{1 - (1-q_1) \frac{\beta_2}{\beta_2 + t}} \times \frac{\beta_2}{\beta_2 - t} \\ &= \left( \frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right)^2 \mathcal{P}_J \left( \frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right) \end{aligned}$$

Où,

$$J \sim \text{Geo} \left( q_1 = \frac{\beta_1}{\beta_2} \right)$$

(3) On peut écrire les fgp sous forme de série de puissances :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S(t) &= \left( \frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} f_J(k) \left( \frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f_J(k) \left( \frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right)^{k+2} \end{aligned}$$

(4) On déduit,

$$F_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_J(k) H(x; k+2, \beta_2) \quad \square$$

## 1.2 Exemple numérique

Soit les v.a.  $X_1 \sim \text{Exp}(\beta = 0.1)$ ,  $X_2 \sim \text{Exp}(\beta = 0.2)$  et  $S = X_1 + X_2$ . Trouver  $F_X(10)$ ,  $\text{VaR}_{0.90}(X)$  et  $\text{TVaR}_{0.90}(X)$ .

```
b <- c(0.1, 0.2)
q <- b[1]/b[2]
k <- 0:1000
fj <- dgeom(k, q)
sum(fj)

Fs <- function(x) sum(fj * pgamma(x, k + 2, b[2]))
Fs(10)
# 0.3995764

u <- 0.9
VaR <- optimize(function(x) abs(Fs(x) - u), c(0, 250))$min
# 29.6974

TVaR <- 1/(1 - u) * sum(fj * (k + 2)/b[2] * pgamma(VaR, k + 3, b[2], low=F))
# 39.82902
```

## 2 Convolution de deux v.a. de loi gamma différentes

### 2.1 Preuve

Soit les variables indépendantes,

$$X_i \sim \text{Gamma}(\alpha_i, \beta_i), \quad i \in \{1, 2\} \text{ et } \beta_1 < \beta_2.$$

On définit  $S = X_1 + X_2$  et on veut démontrer que,

$$F_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_J(k) H(x; \alpha_1 + \alpha_2 + k, \beta_2)$$

(1) Résultat préliminaire : lemme 2020

$$\frac{\beta_1}{\beta_1 + t} = \frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \left( \frac{q}{1 - (1 - q) \frac{\beta_2}{\beta_2 + t}} \right)$$

(2) Identifier la tls de  $S$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S(t) &= \mathcal{L}_{X_1}(t) \times \mathcal{L}_{X_2}(t) \\ &= \left( \frac{\beta_1}{\beta_1 + t} \right)^{\alpha_1} \times \left( \frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right)^{\alpha_2} \\ &= \left( \frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{q_1}{1 - (1 - q_1) \frac{\beta_2}{\beta_2 + t}} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right)^{\alpha_2} \\ &= \left( \frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2} \mathcal{P}_J \left( \frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right) \end{aligned}$$

Où,

$$J \sim \text{BinNeg} \left( \alpha_1, q_1 = \frac{\beta_1}{\beta_2} \right), \quad \alpha_i \in \mathbb{R}^+$$

(3) On peut écrire les fgp sous forme de série de puissances :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S(t) &= \left( \frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2} \sum_{k=0}^{\infty} f_J(k) \left( \frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f_J(k) \left( \frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2 + k} \end{aligned}$$

(4) On déduit,

$$F_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_J(k) H(x; \alpha_1 + \alpha_2 + k, \beta_2) \quad \square$$

## 2.2 Exemple numérique

Soit les v.a.  $X_1 \sim \text{Gamma}(\alpha = 3.2, \beta = 0.1)$ ,  $X_2 \sim \text{Gamma}(\alpha = 5, \beta = 0.2)$  et  $S = X_1 + X_2$ . Trouver  $F_S(50)$ ,  $\text{VaR}_{0.90}(X)$  et  $\text{TVaR}_{0.90}(X)$ .

```
b <- c(0.1, 0.2)
a <- c(3.2, 5)
atot <- sum(a)
q <- b[1]/b[2]
k <- 0:1000
fj <- dnbinom(k, a[1], q)
sum(fj)

Fs <- function(x) sum(fj * pgamma(x, k + atot, b[2]))
Fs(50)
# 0.4149836

u <- 0.9
VaR <- optimize(function(x) abs(Fs(x) - u), c(0, 300))$min
# 85.07405

TVaR <- 1/(1 - u) * sum(fj * (k + atot)/b[2] * pgamma(VaR, k + atot + 1, b[2], low=F))
# 99.78886
```

### 3 Convolution de trois v.a. de loi gamma différente

#### 3.1 Preuve

Soit les variables indépendantes,

$$X_i \sim \text{Gamma}(\alpha_i, \beta_i), \quad i \in \{1, 2, 3\} \text{ et } \beta_1 < \beta_2 < \beta_3.$$

On définit  $S = X_1 + X_2 + X_3$  et on veut démontrer que,

$$F_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_M(k) \cdot H(x; \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + k, \beta_3)$$

(1) Résultat préliminaire : lemme 2020

$$\frac{\beta_1}{\beta_1 + t} = \frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \left( \frac{q}{1 - (1 - q) \frac{\beta_2}{\beta_2 + t}} \right)$$

(2) Identifier la TLS de  $S$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S(t) &= \mathcal{L}_{X_1}(t) \times \mathcal{L}_{X_2}(t) \times \mathcal{L}_{X_3}(t) \\ &= \left( \frac{\beta_1}{\beta_1 + t} \right)^{\alpha_1} \times \left( \frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right)^{\alpha_2} \times \left( \frac{\beta_3}{\beta_3 + t} \right)^{\alpha_3} \\ &= \left( \frac{\beta_3}{\beta_3 + t} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{q_1}{1 - (1 - q_1) \frac{\beta_3}{\beta_3 + t}} \right)^{\alpha_1} \cdot \left( \frac{\beta_3}{\beta_3 + t} \right)^{\alpha_2} \left( \frac{q_2}{1 - (1 - q_2) \frac{\beta_3}{\beta_3 + t}} \right)^{\alpha_2} \left( \frac{\beta_1}{\beta_1 + t} \right)^{\alpha_3} \\ &= \left( \frac{\beta_3}{\beta_3 + t} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \mathcal{P}_{J_1} \left( \frac{\beta_3}{\beta_3 + t} \right) \mathcal{P}_{J_2} \left( \frac{\beta_3}{\beta_3 + t} \right) \end{aligned}$$

Où,

$$J_1 \sim \text{BinNeg} \left( \alpha_1, q_1 = \frac{\beta_1}{\beta_3} \right), \quad J_2 \sim \text{BinNeg} \left( \alpha_2, q_2 = \frac{\beta_2}{\beta_3} \right), \quad \alpha_i \in \mathbb{R}^+$$

(3) On peut écrire les fgp sous forme de série de puissances :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S(t) &= \left( \frac{\beta_3}{\beta_3 + t} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \sum_{k=0}^{\infty} f_{J_1}(k) \left( \frac{\beta_3}{\beta_3 + t} \right)^k \sum_{k=0}^{\infty} f_{J_2}(k) \left( \frac{\beta_3}{\beta_3 + t} \right)^k \\ &= \left( \frac{\beta_3}{\beta_3 + t} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left( \sum_{i=0}^k f_{J_1}(i) f_{J_2}(k - i) \right)}_{f_{J_1} * f_{J_2}(i)} \left( \frac{\beta_3}{\beta_3 + t} \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f_M(k) \left( \frac{\beta_3}{\beta_3 + t} \right)^{k + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \end{aligned}$$

Où  $M = J_1 + J_2$

(4) On déduit,

$$F_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_M(k) H(x; k + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3) \quad \square$$

### 3.2 Exemple de code

Soit les v.a.  $X_1 \sim \text{Gamma}(\alpha = 2.3, \beta = 0.1)$ ,  $X_2 \sim \text{Gamma}(\alpha = 3.2, \beta = 0.3)$ ,  $X_3 \sim \text{Gamma}(\alpha = 4.6, \beta = 0.4)$  et  $S = X_1 + X_2 + X_3$ . Trouver  $F_S(50)$ ,  $\text{VaR}_{0.90}(X)$  et  $\text{TVaR}_{0.90}(X)$ .

```
b <- c(0.1, 0.3, 0.4)
a <- c(2.3, 3.2, 4.6)
atot <- sum(a)
q <- c(b[1]/b[3], b[2]/b[3])

# Avec fft tres rapide meme si plusieurs Gamma
nfft <- 2^15
k <- 0:(nfft - 1)
fmt <- fft(dnbinom(k, a[1], q[1])) * fft(dnbinom(k, a[2], q[2]))
fm <- Re(fft(fmt, inverse = TRUE))/nfft
sum(fm)

Fs <- function(x) sum(fm * pgamma(x, k + atot, b[3]))
Fs(50)
# 0.6681426

u <- 0.9
VaR <- optimize(function(x) abs(Fs(x) - u), c(0, 300))$min
# 67.90583

TVaR <- 1/(1 - u) * sum(fm * (k + atot)/b[3] * pgamma(VaR, k + atot + 1, b[3], low=F))
# 80.76693
```



## 4 Loi gamma bivariee Cheriyan – Ramabhadran – Mathai – Moschopoulos

Soit le couple de v.a.  $(X_1, X_2)$  obéissant à une loi gamma CRMM. On définit  $S = X_1 + X_2$  et on veut démontrer que,

$$F_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k H(x, \alpha + k, \beta)$$

où les  $p_k$  sont les probabilités d'une loi discrète.

(1) Résultats préliminaires :

- Lemme 2020

$$\frac{\beta_1}{\beta_1 + t} = \frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \left( \frac{q}{1 - (1 - q) \frac{\beta_2}{\beta_2 + t}} \right), \quad \beta_1 < \beta_2.$$

- On choisit arbitrairement  $\beta_2$  comme  $\max(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  et  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma_0$ .

(2) Trouver la fgm de S :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_S(t) &= \left( \frac{\beta_1}{\beta_1 - t} \right)^{\alpha_1 - \gamma_0} \left( \frac{\beta_2}{\beta_2 - t} \right)^{\alpha_2 - \gamma_0} \left( \frac{\left( \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \right)^{-1}}{\left( \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \right)^{-1} - t} \right)^{\gamma_0} \\ &= \left( \frac{\beta_1}{\beta_1 - t} \right)^{\alpha_1 - \gamma_0} \left( \frac{\beta_2}{\beta_2 - t} \right)^{\alpha_2 - \gamma_0} \left( \frac{\beta_3}{\beta_3 - t} \right)^{\gamma_0} \\ &= \left( \frac{rq_1}{1 - (1 - q_1)r} \right)^{\alpha_1 - \gamma_0} r^{\alpha_2 - \gamma_0} \left( \frac{rq_2}{1 - (1 - q_2)r} \right)^{\gamma_0} \\ &= r^{\alpha_1 - \gamma_0} \left( \frac{q_1}{1 - (1 - q_1)r} \right)^{\alpha_1 - \gamma_0} r^{\alpha_2 - \gamma_0} r^{\gamma_0} \left( \frac{q_2}{1 - (1 - q_2)r} \right)^{\gamma_0} \\ &= r^{\alpha} \mathcal{P}_{J_1}(r) \mathcal{P}_{J_2}(r) \\ &= r^{\alpha} \mathcal{P}_K(r) \end{aligned}$$

où,

$$J_1 \sim BinNeg \left( \alpha_1 - \gamma_0, q_1 = \frac{\beta_1}{\beta_2} \right), \quad J_2 \sim BinNeg \left( \gamma_0, q_2 = \frac{\beta_3}{\beta_2} \right), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad K = J_1 + J_2.$$

(3) On peut écrire les fgm sous forme de série de puissances :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_S(t) &= r^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} f_K(k) r^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f_K(k) \left( \frac{\beta_2}{\beta_2 - t} \right)^{\alpha + k} \end{aligned}$$

(4) On déduit :

$$F_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k H(x, \alpha + k, \beta_2)$$

## 4.1 Exemple de code

Soit le couple de v.a.  $(X_1, X_2)$  obéissant à une loi gamma bivariée Cheriyan – Ramabhadran – Mathai – Moschopoulos avec  $\beta_1 = 0.1$ ,  $\beta_2 = 0.2$ ,  $\alpha_1 = 2.5$ ,  $\alpha_2 = 5$  et  $\gamma_0 = 1$ . On définit  $S = X_1 + X_2$ .

```
library(Runuran)
nfft <- 2^20
b <- c(0.1, 0.2, 1/(1/0.1 + 1/0.2))
a <- c(2.5, 5, 1)
g <- c(0, 1, 2)
q <- (b/max(b))[-which.max((b/max(b)))]

j1 <- dnbinom(0:(nfft - 1), a[1] - g[2], q[1])
j2 <- dnbinom(0:(nfft - 1), g[2], q[2])

kt <- fft(j1) * fft(j2)
k <- Re(fft(kt, T))/nfft

Fs <- function(x) sum(k[1:1001] * pgamma(x, sum(a) + 0:1000, max(b)))

# Avec optimize
VaR <- function(k) optimize(function(x) abs(Fs(x) - k), c(0, 1000))$min
VaR(0.1)

# Par interpolation
gen <- pinv.new(cdf=Fs, lb=0, ub=Inf)
VaR2 <- function(u) uq(gen, u)

TVaR <- function(u) 1/(1 - u) * sum(k[1:1001] * (sum(a) + 0:1000)/max(b) * pgamma(VaR2(u), sum(a) +
0:1000 + 1, max(b), low = F))
```