Convolution de sommes aléatoires avec sévérité de loi Exponentielle ou Erlang

Jérémie Barde

16 février 2026

Résumé

Ce document explique comment évaluer avec exactitude la convolution de v.a. composée avec des sévérités qui suivent des lois exponentielles et Erlang. On commence par le cas particulier des variables aléatoires de lois Poisson composées, puis on généralise à d'autres types de lois de fréquence. Le document aborde aussi des cas spécifiques, comme la loi de Poisson-Teicher avec des sévérités exponentielles ou Erlang, ainsi que des méthodes pour des lois discrètes composées. Des exemples numériques sont fournis pour chaque section.

Table des matières

1 Convolution de Poisson composées - sévérité loi Exponentielle

1.1 Preuve

Soit les variables indépendantes,

$$X_i \sim PoComp(\lambda_i, F_{B_i}) \quad \text{où} \quad B_i \sim Exp(\beta_i),\ i \in \{1,2\} \text{ et } \beta_1 < \beta_2.$$

On définit $S = X_1 + X_2$ et on veut démontrer que,

$$F_S(x) = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k H(x; k, \beta_2),\ x \geq 0$$

où les γ_k sont les probabilités d'une loi discrète.

(1) Résultats préliminaires :
- La somme de deux v.a. de lois Poisson composées donne une v.a. de loi Poisson composées.
- Lemme 2020 :

$$\frac{\beta_1}{\beta_1 + t} = \frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\left(\frac{q}{1-(1-q)\frac{\beta_2}{\beta_2+t}}\right)$$

(2) Trouver la tls de S :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_S(t) &= \mathcal{L}_{X_1}(t) \cdot \mathcal{L}_{X_2}(t) \\
&= e^{\lambda_1(\mathcal{L}_{B_1}(t)-1)+\lambda_2(\mathcal{L}_{B_2}(t)-1)} \\
&= e^{\lambda_1\mathcal{L}_{B_1}(t)-\lambda_1+\lambda_2\mathcal{L}_{B_2}(t)-\lambda_2} \\
&= e^{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}(\lambda_1\mathcal{L}_{B_1}(t)+\lambda_2\mathcal{L}_{B_2}(t)-(\lambda_1+\lambda_2))} \\
&= e^{(\lambda_1+\lambda_2)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\mathcal{L}_{B_1}(t)+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\mathcal{L}_{B_2}(t)-1\right)} \\
&= \mathcal{P}_N(\mathcal{L}_C(t))
\end{aligned} \tag{1}$$

(3) De (eq. 1), on va réécrire $\mathcal{L}_C(t)$ avec le lemme 2020 :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_C(t) &= \alpha\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+t}\right) + (1-\alpha)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right) \\
&= \alpha\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\frac{q}{1-(1-q)\frac{\beta_2}{\beta_2+t}}\right) + (1-\alpha)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right) \\
&= \underbrace{\alpha\left(\frac{qr}{1-(1-q)r}\right)}_{\mathcal{P}_J(r)} + (1-\alpha)\underbrace{(r)}_{\mathcal{P}_I(r)}
\end{aligned} \tag{2}$$

où
- $\alpha = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$
- $r = \frac{\beta_2}{\beta_2+t}$
- $J \sim Geo(q = \frac{\beta_1}{\beta_2}),\ k = 1, 2, \ldots$
- $\Pr(I = 1) \rightarrow \mathcal{P}_I(r) = r$

(4) De (eq. 2) on peut réécrire $\mathcal{L}_C(t)$ comme :

$$\mathcal{L}_C(t) = \alpha\mathcal{P}_J\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right) + (1-\alpha)\frac{\beta_2}{\beta_2+t} \tag{3}$$

(5) On introduit une variable K discrète sur $\mathbb{N}^+$, qui à la fgp suivante :

$$\mathcal{P}_K(r) = \alpha \mathcal{P}_J(r) + (1-\alpha)r \tag{4}$$

(6) On écrit (eq. 4) comme une série de puissances :

$$\mathcal{P}_K(r) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} f_J(k) \times r^k + (1-\alpha)r \tag{5}$$

(7) En combinant (eq. 4) et (eq. 5), on déduit :

$$f_K(k) = \begin{cases} 0 & , \ k = 0 \\ \alpha q + (1-\alpha) & , \ k = 1 \\ \alpha q(1-q)^{k-1} & , \ k = 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{6}$$

(8) On résume un peu :

$$\mathcal{L}_S(t) = \mathcal{P}_N(\mathcal{L}_C(t)) = \mathcal{P}_N\left(\mathcal{P}_K\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right)\right) \tag{7}$$

(9) On peut écrire (eq. 7) comme une convolution :

$$\mathcal{L}_S(t) = \mathcal{P}_N \mathcal{P}_K(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k r^k, \qquad \text{(fgp d'une loi discrète)} \tag{8}$$

(10) On introduit une variable L :

$$\begin{gathered} \Pr(L = k) = \gamma_k \\ \mathcal{P}_L(r) = \mathcal{P}_N \underbrace{(\mathcal{P}_K(r))}_{\mathcal{L}_C(t)} \end{gathered} \tag{9}$$

(11) On peut conclure que $L \sim PoComp(\lambda_N = \lambda_1 + \lambda_2, F_K)$.

(12) Avec (eq. 9) on réécrit $\mathcal{L}_S(t)$:

$$\mathcal{L}_S(t) = \mathcal{P}_L\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right)^k \tag{10}$$

(13) On déduit de (eq. 10) que c'est un mélange discret de gamma :

$$F_S(x) = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k H(x; k, \beta_2) \quad \square$$

1.2 Exemple numérique

1.2.1 Avec Panjer

Question 4g et 4f de l'examen partiel informatique 2018.

```
> lam <- c(0.03, 0.07)
> lamN <- 10*lam[1] + 10*lam[2]
> b <- c(1/12, 0.5)
> q <- b[1]/b[2]
> alpha <- lam[1]/(lam[1] + lam[2])
>
> fK <- c(0, alpha * q + (1-alpha), alpha * q * (1-q)^(2:1000 - 1))
> sum(fK)
[1] 1
>
> k <- Panjer_poisson(lamN, fK, 1000)
> sum(k)
[1] 1
>
> k[c(1, 2, 6, 7, 11)]
[1] 0.36787944 0.27590958 0.02302362 0.01938873 0.01043058
>
> FK <- sapply(0:1000, function(x) k[1] + sum(k[-1] * pgamma(x, 1:1000, 0.5)))
> FK[c(1, 11, 16, 21)]
[1] 0.3678794 0.8491508 0.8994602 0.9305636
```

1.2.2 Avec FFT

```
> nFFT <- 2^20
> lam <- c(0.03, 0.07)
> lamN <- 10 * lam[1] + 10 * lam[2]
> b <- c(1/12, 0.5)
> q <- b[1]/b[2]
> alpha <- lam[1]/(lam[1] + lam[2])
>
> fK <- c(0, alpha * q + (1 - alpha), alpha * q * (1 - q)^(2:(nFFT-1) - 1))
> sum(fK)
[1] 1
>
> fKt <- fft(fK)
> gkt <- exp(lamN * (fKt - 1))
> gk <- Re(fft(gkt, inverse = TRUE))/nFFT
> gk[c(1, 2, 6, 7, 11)]
[1] 0.36787944 0.27590958 0.02302362 0.01938873 0.01043058
>
> v <- seq(0, 1000, 1)
> FS <- sapply(v, function(x) gK[1] + sum(gK[2:1001] * pgamma(x, 1:1000, b[2])))
> FS[c(1, 11, 16, 21)]
[1] 0.3678794 0.8491508 0.8994602 0.9305636
```

2 Convolution de sommes aléatoires - sévérité loi Exponentielle

2.1 Preuve

Soit les variables indépendantes,

$$X_i \sim v.a.Comp(\ldots, F_{B_i}) \quad \text{où} \quad B_i \sim Exp(\beta_i),\ i \in \{1,2\} \text{ et } \beta_1 < \beta_2.$$

On définit $S = X_1 + X_2$ et on veut démontrer que,

$$F_S(x) = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k H(x; k, \beta_2),\ x \geq 0$$

où les γ_k sont les probabilités d'une loi discrète.

(1) Résultats préliminaires :

- Lemme 2020 :

$$\frac{\beta_1}{\beta_1 + t} = \frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\left(\frac{q}{1-(1-q)\frac{\beta_2}{\beta_2+t}}\right)$$

(2) Développer la tls de S :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_S(t) &= \mathcal{L}_{X_1}(t)\mathcal{L}_{X_2}(t) \\
&= \mathcal{P}_{M_1}\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+t}\right)\mathcal{P}_{M_2}\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right) \\
&= \mathcal{P}_{M_1}\left(\frac{qr}{1-(1-q)r}\right)\mathcal{P}_{M_2}(r) \\
&= \mathcal{P}_{M_1}(\mathcal{P}_J(r))\mathcal{P}_{M_2}(r) \\
&= \mathcal{P}_K(r)\mathcal{P}_{M_2}(r) \\
&= \mathcal{P}_L(r)
\end{aligned}$$

où,

- $q = \frac{\beta_1}{\beta_2}$
- $r = \frac{\beta_2}{\beta_2+t}$
- M_i est une v.a. discrète
- $J \sim Geo(q),\ k \in \mathbb{N}_1$
- $K = \sum_{k=0}^{M_1} J_k$
- $L = K + M_2$.

(3) On écrit la tls de de la v.a. S sous forme de série de puissance :

$$\mathcal{L}_S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(L=k) r^k = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(L=k)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)^k$$

où $\gamma_k = \Pr(L=k)$.

(4) On reconnaît la tls d'un mélange d'Erlang, on déduit :

$$F_S(x) = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k H(x; k, \beta_2) \quad \square$$

2.2 Exemple numérique

Question 4g et 4f de l'examen partiel informatique 2018.

```
nFFT <- 2^15
k <- 0:(nFFT - 1)
lam <- c(0.03, 0.07)
lamN <- 10 * lam[1] + 10 * lam[2]
b <- c(1/12, 0.5)
q <- b[1]/b[2]
alpha <- lam[1]/(lam[1] + lam[2])

fJ <- c(0, q * (1 - q)^(1:(nFFT - 1) - 1))
M2 <- dpois(0:(nFFT - 1), 10*lam[2])

fKt <- exp(10*lam[1] * (fft(fJ) - 1))

gKt <- fKt * fft(M2)
gK <- Re(fft(gKt, inverse = TRUE))/nFFT
gK[c(1, 2, 6, 7, 11)]

FS <- function(x) gK[1] + sum(gK[-1] * pgamma(x, k[-1], b[2]))
sapply(c(0, 10, 15, 20), FS)
```

On a les v.a. $X_1 \sim BinComp(n = 6, q = 0.3, F_{B_1})$ avec $B_1 \sim Exp(\beta = 0.12)$, $X_2 \sim GeoComp(q = 0.3, F_{B_2})$ avec $B_2 \sim Exp(0.48)$ et $S = X_1 + X_2$. Trouver $F_S(50)$, $VaR_{0.90}(S)$ et $TVaR_{0.90}(S)$?

```
nfft <- 2^15
k <- 0:(nfft - 1)
pbin <- c(6, 0.3)
pgeo <- 0.4
b <- c(0.12, 0.48)
q <- b[1]/b[2]

# Variable J, K et M2
fj <- dgeom(k - 1, q)
fkt <- ((1 - pbin[2]) + pbin[2] * fft(fj))^pbin[1]
fm2t <- fft(dgeom(0:(nfft-1), pgeo))

# gamma K
flt <- fkt * fm2t
fl <- Re(fft(flt, TRUE))/nfft
sum(fL)

Fs <- function(x) fl[1] + sum(fl[-1] * pgamma(x, k[-1], b[2]))
Fs(50)
# 0.9574199

u <- 0.9
VaR <- optimize(function(x) abs(Fs(x) - u), c(0, 300))$min
[1] 38.93355

TVaR <- 1/(1 - u) * sum(fl * k/b[2] * pgamma(VaR, k + 1, b[2], low = F))
[1] 51.51759
```

3 Convolution de sommes aléatoires - sévérité loi Erlang

3.1 Preuve

Soit les variables indépendantes,

$$X_i \sim v.a.Comp(\dots, F_{B_i}) \quad \text{où} \quad B_i \sim Erlang(\alpha_i, \beta_i),\ i \in \{1, 2\} \text{ et } \beta_1 < \beta_2.$$

On définit $S = X_1 + X_2$ et on veut démontrer que,

$$F_S(x) = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k H(x; k, \beta_2),\ x \geq 0$$

où les γ_k sont les probabilités d'une loi discrète.

(1) Résultats préliminaires :

- Lemme 2020 :

$$\frac{\beta_1}{\beta_1 + t} = \frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\left(\frac{q}{1 - (1-q)\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}}\right)$$

(2) Trouver la tls de S :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_S(t) &= \mathcal{L}_{X_1}(t)\mathcal{L}_{X_2}(t) \\
&= \mathcal{P}_{M_1}\left(\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + t}\right)^{\alpha_1}\right)\mathcal{P}_{M_2}\left(\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right)^{\alpha_2}\right) \\
&= \mathcal{P}_{M_1}\left(\left(\frac{qr}{1 - (1-q)r}\right)^{\alpha_1}\right)\mathcal{P}_{M_2}(r^{\alpha_2}) \\
&= \mathcal{P}_{M_1}(\mathcal{P}_{J_1}(r))\mathcal{P}_{M_2}(\mathcal{P}_{J_2}(r)) \\
&= \mathcal{P}_{K_1}(r)\mathcal{P}_{K_2}(r) \\
&= \mathcal{P}_L(r)
\end{aligned}$$

où,

- $q = \frac{\beta_1}{\beta_2}$
- $r = \frac{\beta_2}{\beta_2 + t}$
- M_i est une v.a discrète
- $J_1 \sim BinNeg(r = \alpha_1, q),\ k \in \mathbb{N}_r$
- $\Pr(J_2 = \alpha_2) = 1$
- $K_i = \sum_{k=0}^{M_i} J_{i,k}$
- $L = K_1 + K_2$

(3) On écrit la tls de de la v.a. S sous forme de série de puissance :

$$\mathcal{L}_S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(L = k) r^k = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(L = k)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right)^k$$

où $\gamma_k = \Pr(L = k)$.

(4) On reconnaît la tls d'un mélange d'Erlang, on déduit :

$$F_S(x) = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k H(x; k, \beta_2) \quad \square$$

3.2 Exemple numérique

On a les v.a. $X_1 \sim PoComp(\lambda = 10, F_{B_1})$ avec $B_1 \sim Erlang(\alpha_1 = 7, \beta_1 = 0.12)$, $X_2 \sim PoComp(\lambda = 5, F_{B_2})$ avec $B_2 \sim Erlang(\alpha_2 = 6, \beta_2 = 0.8)$ et $S = X_1 + X_2$.

```r
nfft <- 2^15
k <- 0:(nfft - 1)
lam <- c(10, 5)
a <- c(7, 6)
b <- c(0.6, 0.8)
q <- b[1]/b[2]

# Variable Ji
fj1 <- dnbinom(k - a[1], a[1], q)
fj2 <- numeric(nfft)
fj2[a[2] + 1] <- 1

# Variable K et H
fk1t <- exp(lam[1] * (fft(fj1) - 1))
fk2t <- exp(lam[2] * (fft(fj2) - 1))

# Gamma k
flt <- fk1t * fk2t
fl <- Re(fft(flt, inverse = TRUE))/nfft

Fs <- function(x) fl[1] + sum(fl[-1] * pgamma(x, k[-1], b[2]))
```

4 Convolution de sommes aléatoires - sévérité loi Gamma

4.1 Preuve

Soit les variables indépendantes,

$$X_i \sim v.a.Comp(\ldots, F_{B_i}) \quad \text{où} \quad B_i \sim \text{Gamma}(\alpha_i, \beta_i),\ i \in \{1,2\},\ \alpha_i \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \beta_1 < \beta_2.$$

On définit $S = X_1 + X_2$ et on veut démontrer que,

$$F_S(x) = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k H(x; hk, \beta_2),\ x \geq 0$$

où les γ_k sont les probabilités d'une loi discrète.

(1) Résultats préliminaires :

- Lemme 2020 :

$$\frac{\beta_1}{\beta_1 + t} = \frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\left(\frac{q}{1-(1-q)\frac{\beta_2}{\beta_2+t}}\right)$$

(2) Développer la tls de S :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_S(t) &= \mathcal{L}_{X_1}(t)\mathcal{L}_{X_2}(t) \\
&= \mathcal{P}_{M_1}\left(\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+t}\right)^{\alpha_1}\right)\mathcal{P}_{M_2}\left(\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)^{\alpha_2}\right) \\
&= \mathcal{P}_{M_1}\left(\left(\frac{q\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)^{\frac{h}{h}}}{1-(1-q)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)^{\frac{h}{h}}}\right)^{\alpha_1}\right)\mathcal{P}_{M_2}\left(\left(\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)^{\frac{h}{h}}\right)^{\alpha_2}\right) \\
&= \mathcal{P}_{M_1}\left(\left(\frac{qr^{\frac{1}{h}}}{1-(1-q)r^{\frac{1}{h}}}\right)^{\alpha_1}\right)\mathcal{P}_{M_2}\left(r^{\frac{\alpha_2}{h}}\right) \\
&= \mathcal{P}_{M_1}\left(\mathcal{P}_H(\mathcal{P}_{I_2}(r))r^{\frac{\alpha_1}{h}}\right)\mathcal{P}_{M_2}(\mathcal{P}_{J_2}(r)) \\
&= \mathcal{P}_{M_1}(\mathcal{P}_H(\mathcal{P}_{I_2}(r))\mathcal{P}_{I_1}(r))\mathcal{P}_{M_2}(\mathcal{P}_{J_2}(r)) \\
&= \mathcal{P}_{M_1}(\mathcal{P}_T(r)\mathcal{P}_{I_1}(r))\mathcal{P}_{M_2}(\mathcal{P}_{J_2}(r)) \\
&= \mathcal{P}_{M_1}(\mathcal{P}_{J_1}(r))\mathcal{P}_{M_2}(\mathcal{P}_{J_2}(r)) \\
&= \mathcal{P}_{K_1}(r)\mathcal{P}_{K_2}(r) \\
&= \mathcal{P}_L(r)
\end{aligned}$$

où,

- $q = \frac{\beta_1}{\beta_2}$
- $r = \left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)^h$
- $L = K_1 + K_2$

(3) On écrit la tls de de la v.a. S sous forme de série de puissance :

$$\mathcal{L}_S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(L=k)r^k = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(L=k)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)^{hk} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)^{hk}$$

où $\gamma_k = \Pr(L=k)$.

(4) On reconnaît la tls d'un mélange d'Erlang, on déduit :

$$F_S(x) = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k H(x; hk, \beta_2) \quad \square$$

5 Exemple typique

On a les v.a. $X_1 \sim PoComp(\lambda = 10, F_{B_1})$ avec $B_1 \sim Exp(\beta_1 = 0.12)$, $X_2 \sim BinComp(n = 25, p = 0.45, F_{B_2})$ avec $B_2 \sim Exp(\beta_2 = 0.8)$ et $S = X_1 + X_2$.

(a) Trouver $E[S]$ et $Var(S)$? **Sol.** $E[S] = 97.40$ et $Var(S) = 1416.14$

(b) Trouver $F_S(200)$? **Sol.** $F_S(100) = 0.5705418$ et $F_S(200) = 0.988945$

(c) Trouver $VaR_\kappa(S)$, pour $\kappa = 0.9, 0.99$? **Sol.** $VaR_{0.9}(S) = 147.68$ et $VaR_{0.99}(S) = 202.13$

(d) Trouver $TVaR_\kappa(S)$, pour $\kappa = 0.9, 0.99$? **Sol.** $TVaR_{0.9}(S) = 171.93$ et $TVaR_{0.99}(S) = 222.15$

```r
nfft <- 2^15
k <- 0:(nfft - 1)
b <- c(0.12, 0.8)
lam <- 10
bin <- c(25, 0.45)
q <- b[1]/b[2]

# Variable J, K et M2
fJ <- c(0, q * (1 - q)^(1:(nfft - 1) - 1))
fKt <- exp(lam * (fft(fJ) - 1))
fM2t <- fft(dbinom(0:(nfft - 1), bin[1], bin[2]))

# Gamma k
gkt <- fKt * fM2t
gk <- Re(fft(gkt, TRUE))/nfft

## (a) Esperance
Ebin <- prod(bin)
Varbin <- Ebin * (1 - bin[2])
Esp <- lam * 1/b[1] + Ebin * 1/b[2]
Var <- lam * 2/b[1]^2 + 1/b[2]^2*(Ebin + Varbin)
cbind(Esp, Var)

## (b) Fs(200)
Fs <- function(x) gk[1] + sum(gk[-1] * pgamma(x, k[-1], b[2]))
Fs(200)

## (c) VaR 0.9, 0.99
VaR <- function(u) optimize(function(x) abs(Fs(x) - u), c(0, 450))$min
sapply(c(0.9, 0.99), VaR)

## (d) TVaR 0.9, 0.99
TVaR <- function(u) 1/(1-u) * sum(gk * k/b[2] * pgamma(VaR(u), k + 1, b[2], low = F))
sapply(c(0.9, 0.99), TVaR)
```

6 Loi poisson Teicher composée

6.1 Preuve

Soit le vecteur de v.a.,

$$(X_1, X_2) \sim PoTeiComp(\lambda_1, \lambda_2, \gamma_0, F_{B_1}, F_{B_2}) \text{ où } B_i \sim Erlang(\alpha_i, \beta_i),\ i \in \{1, 2\} \text{ et } \beta_1 < \beta_2.$$

On définit $S = X_1 + X_2$ et on veut démontrer que,

$$F_S(x) = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k H(x; k, \beta_2),\ x \geq 0$$

où les γ_k sont les probabilités d'une loi discrète.

(1) Résultats préliminaires :

- Lemme 2020 :

$$\frac{\beta_1}{\beta_1 + t} = \frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \left(\frac{q}{1 - (1-q)\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}} \right)$$

- $\mathcal{L}_S(t) = \mathcal{L}_{X_1,X_2}(t, t) = \mathcal{P}_{M_1,M_2}(\mathcal{L}_{B_1}(t), \mathcal{L}_{B_2}(t))$

(2) Trouver la tls de S :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_S(t) &= \mathcal{P}_{M_1,M_2}(\mathcal{L}_{B_1}(t), \mathcal{L}_{B_2}(t)) \\
&= \mathcal{P}_{M_1,M_2}\left(\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + t} \right)^{\alpha_1}, \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right)^{\alpha_2} \right) \\
&= \mathcal{P}_{K_1}\left(\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + t} \right)^{\alpha_1} \right) \mathcal{P}_{K_2}\left(\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right)^{\alpha_2} \right) \mathcal{P}_{K_0}\left(\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + t} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right)^{\alpha_2} \right) \\
&= \mathcal{P}_{K_1}\left(\left(\frac{rq}{1 - (1-q)r} \right)^{\alpha_1} \right) \mathcal{P}_{K_2}(r^{\alpha_2}) \mathcal{P}_{K_0}\left(\left(\frac{rq}{1 - (1-q)r} \right)^{\alpha_1} r^{\alpha_2} \right) \\
&= \mathcal{P}_{K_1}(\mathcal{P}_{J_1}(r)) \times \mathcal{P}_{K_2}(\mathcal{P}_{J_2}(r)) \times \mathcal{P}_{K_0}(\mathcal{P}_{J_1}(r)\mathcal{P}_{J_2}(r)) \\
&= \mathcal{P}_{K_1}(\mathcal{P}_{J_1}(r)) \times \mathcal{P}_{K_2}(\mathcal{P}_{J_2}(r)) \times \mathcal{P}_{K_0}(\mathcal{P}_{J_0}(r)) \\
&= \mathcal{P}_{W_1}(r)\mathcal{P}_{W_2}(r)\mathcal{P}_{W_0}(r) \\
&= \mathcal{P}_L(r)
\end{aligned}$$

où,

- $q = \frac{\beta_1}{\beta_2}$
- $r = \frac{\beta_2}{\beta_2 + t}$
- $J_1 \sim \text{BinNeg}(\alpha_1, q)$ et $\Pr(J_2 = \alpha_2) = 1$
- $J_0 = J_1 + J_2$
- $W_i \sim \text{PoComp}(\ldots, F_{J_i}),\ i = 0, 1, 2$
- $L = W_1 + W_2 + W_0$

(3) On écrit la tls de de la v.a. S sous forme de série de puissance :

$$\mathcal{L}_S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(L = k) r^k = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(L = k) \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right)^k = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right)^k$$

où $\gamma_k = \Pr(L = k)$.

(4) On déduit,

$$F_S(x) = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k H(x; k, \beta_2). \qquad \square$$

6.2 Exemple numérique

On a $(X_1, X_2) \sim \text{PoTeiComp}(\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \gamma_0 = 1, F_{B_1}, F_{B_2})$ avec $B_1 \sim \text{Gamma}(2, 0.2)$ et $B_2 \sim \text{Gamma}(3, 0.3)$ et $S = X_1 + X_2$. Trouver $F_S(100)$? **Sol.** $F_S(100) = 0.933869$.

```
### Variables utiles
nfft <- 2^10
k <- 0:(nfft - 1)
a <- c(2, 3)
g0 <- 1
b <- c(0.2, 0.3)
lam <- c(3, 2)
q <- b[1]/b[2]

### Variable Ji
fJ1 <- c(numeric(a[1]), dnbinom(head(k, - a[1]), a[1], q))
fJ2 <- c(numeric(a[2]), 1, numeric(nfft - 1 - a[2]))
fJ0t <- fft(fJ1) * fft(fJ2)

### Variable Wi
fW1t <- exp((lam[1] - g0)*(fft(fJ1) - 1))
fW2t <- exp((lam[2] - g0)*(fft(fJ2) - 1))
fW0t <- exp(g0*(fJ0t - 1))

### Variable L
fLt <- fW1t*fW2t*fW0t
fL <- Re(fft(fLt, T))/nfft

### Fonction de repartition de S
FS <- function(x) fL[1] + sum(fL[-1]*pgamma(x, k[-1], b[2]))
```

7 Loi discrète composée bivariée

7.1 Preuve

Soit le vecteurs de v.a. $\underline{M} = (M_1, M_2) \in \{0, n\}^2$ et les variables $B_i \sim \text{Gamma}(\alpha_i, \beta)$ pour $i \in \{1, 2\}$. On a le vecteur de v.a. $(X_1, X_2) \sim v.a.Comp(\ldots, F_{B_1}, f_{B_2})$. On définit $S = X_1 + X_2$ et on veut démontrer que,

$$\mathcal{L}_S(t) = p_0 + \sum_{k=1}^{n^2} p_k \left(\frac{\beta}{\beta + t}\right)^{\alpha_k^*}$$

où les p_k sont les probabilités d'une loi discrète.

(1) Notion préliminaire :

- La fgp du vecteur (M_1, M_2) est donné par

$$\mathcal{P}_{M_1,M_2}(t_1, t_2) = p_{00} + p_{10}t_1 + \cdots + p_{nn}t_1^n t_2^n$$

- La tls de la v.a. S est donnée par

$$\mathcal{L}_S(t) = \mathcal{L}_{X_1,X_2}(t, t) = \mathcal{P}_{M_1,M_2}(\mathcal{L}_{B_1}(t), \mathcal{L}_{B_2}(t))$$

- On note $A^{(*n)}$ la $n$ieme convolution d'une v.a avec elle même.

(2) Trouver la tls de la v.a. S :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_S(t) &= \mathcal{P}_{M_1,M_2}(\mathcal{L}_{B_1}(t), \mathcal{L}_{B_2}(t)) \\ &= p_{00} + p_{10}\mathcal{L}_{B_1}(t) + \cdots + p_{ij}\mathcal{L}_{B_1}(t)^i\mathcal{L}_{B_2}(t)^j + \cdots + p_{nn}\mathcal{L}_{B_1}(t)^n\mathcal{L}_{B_2}(t)^n \\ &= p_{00} + p_{10}\mathcal{L}_{B_1}(t) + \cdots + p_{ij}\mathcal{L}_{B_1^{(*i)}+B_2^{(*j)}}(t) + \cdots + p_{nn}\mathcal{L}_{B_1^{(*n)}+B_2^{(*n)}}(t)\end{aligned}$$

où les p_{ij} sont les masses de probabilités du vecteur (M_1, M_2).

(3) On observe que pour une combinaison de ij on obtient,

$$B_1^{(*i)} + B_2^{(*j)} \sim \text{Gamma}(\alpha_k^* = i\alpha_1 + j\alpha_2, \beta).$$

(4) On peut donc réécrire la tls de la v.a. S comme,

$$\mathcal{L}_S(t) = p_0 + \sum_{k=1}^{n^2} p_k \left(\frac{\beta}{\beta + t}\right)^{\alpha_k^*}$$

où les p_k sont les masses de probabilité du vecteur (M_1, M_2), écrit dans l'ordre (1,0), (2,0), …, (m, 0), (0, 1) …, (n-1, m) ,(n, m). On constate qu'on trouve la forme d'une v.a. composée univariée.

(5) On note $\boldsymbol{\omega}$ la matrice des possibilités de vecteur (M_1, M_2). Alors on peut trouver le vecteur de paramètres $\underline{\alpha}^*$ de la façon suivante

$$\boldsymbol{\omega} \times \begin{bmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{bmatrix} = \underline{\alpha}^*.$$

Exemple on a $(M_1, M_2) \in \{0, 2\}^2$ et $\alpha_1 = 1.2$ et $\alpha_2 = 2.3$, alors $\underline{\alpha}^*$ est

$$\begin{bmatrix}0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1.2 \\ 2.3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.00 \\ 1.20 \\ 2.40 \\ 2.30 \\ 3.50 \\ 4.70 \\ 4.60 \\ 5.80 \\ 7.00\end{bmatrix} = \underline{\alpha}^*.$$

7.2 Exemple numérique

On a $(X_1, X_2) \sim \text{PoTeiComp}(\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \gamma_0 = 1, F_{B_1}, F_{B_2})$ avec $B_1 \sim \text{Gamma}(2, 0.2)$ et $B_2 \sim \text{Gamma}(3, 0.2)$ et $S = X_1 + X_2$. Trouver $F_S(100)$? **Sol.** $F_S(100) = 0.8598741$.

```
### Fonction utile
dPoTei <- function(m1, m2, lam1, lam2, a){
  f <- matrix(0, nrow=length(m1), ncol = length(m2))

  for (i in m1){
    for (j in m2){

      k <- 0:min(i, j)

      f[i + 1, j + 1] <- sum(dpois(k, a) * dpois(i - k, lam1 - a) * dpois(j - k, lam2 - a))
    }
  }
  f
}

### Variable
m1 <- 0:20
m2 <- 0:20
lam <- c(3, 2)
g0 <- 1
a <- c(2, 3)
b <- 0.2

### Fonction de densite de la Teicher
fm12 <- dPoTei(m1, m2, lam[1], lam[2], g0)

### Vecteur de densite pij
p <- as.vector(fm12)

### Vecteur de parametre a*
am <- colSums(t(as.matrix(expand.grid(0:20, 0:20))) * a)
# ou
am <- as.vector(as.matrix(expand.grid(0:20, 0:20)) %*% matrix(a))

### Repartition de FS
FS <- function(x) p[1] + sum(p[-1]*pgamma(x, am[-1], b))
FS(100)
```