VaR et TVaR

Jérémie Barde

31 janvier 2022

Résumé

Le présent document contient des exemples de codes R pour se familiariser avec les techniques pour trouver la VaR et la TVaR dans le cas discret et continu.

Table des matières

1 Cas discret

Dans le cas discret, il est possible de trouver la VaR et la $TVaR$ de manière exacte.

1.1 Exemple 1

Nous avons la f.g.p. suivante :

$$\mathcal{P}_X(t) = (0.5 + 0.15t + 0.25t^2 + 0.1t^3)^2$$

On développe le carré pour trouver la fonction de masse de probabilité.

$$\mathcal{P}_X(t) = 0.25 + 0.15t + 0.2725t^2 + 0.175t^3 + 0.0925t^4 + 0.05t^5 + 0.01t^6$$

On vérifie que les probabilités somment à 1 :

```
fX <- c(0.25, 0.15, 0.2725, 0.175, 0.0925, 0.05, 0.01)
sum(fX)
```

```
## [1] 1
```

Pour trouver la VaR, on se souvient de la définition :

$$F_X^{-1}(\kappa) = VaR_\kappa(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq u\}, \quad \text{pour } u \in (0,1)$$

On peut voir ça comme la plus petite prime à charger pour être sûr à au moins $100\kappa\%$ qu'on est capable de payer si une réclamation survient.

```
k <- 0.9
FX <- cumsum(fX)

VaR <- min(which(FX >= k)) - 1  # On fait -1 comme les vecteurs commencent à 1 et non à 0
VaR
```

```
## [1] 4
```

```
# On peut s'en convaincre en faisant un tableau
cbind(c(0:6), FX)
```

```
##            FX
## [1,] 0 0.2500
## [2,] 1 0.4000
## [3,] 2 0.6725
## [4,] 3 0.8475
## [5,] 4 0.9400
## [6,] 5 0.9900
## [7,] 6 1.0000
```

Ensuite, pour la $TVaR$, on choisit l'une des trois formules qu'on connait:

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(x) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_0^\infty VaR_S(X)ds \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\left(E\left[X \times 1_{\{x > VaR_\kappa(X)\}}\right] + VaR_\kappa(X)(F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa)\right) \\
&= VaR_\kappa(X) + \frac{1}{1-\kappa}\pi_X(VaR_\kappa(X))
\end{aligned}$$

Trouvons maintenant la $TVaR$ en utilisant les deux dernières formules, qui sont généralement plus simples à utiliser.

```
# Plus visuel (sum(5:6 * fX[(5+1):(6+1)]) + VaR * (FX[VaR + 1] - k))/(1 - k)

# Préférable comme ceci, car on peut facilement changer la valeur de k
TVaR <- (sum((VaR + 1):(length(fX) - 1) * fX[c(VaR + 2):(length(fX))]) + VaR * (FX[VaR +
    1] - k))/(1 - k)
TVaRSL <- VaR + sum(pmax(0:6 - VaR, 0) * fX)/(1 - k)
sum(0:6 * fX)
```

```
## [1] 1.9
```

```
cbind(TVaR, TVaRSL)
```

```
##      TVaR TVaRSL
## [1,]  4.7    4.7
```

1.2 Exemple 2

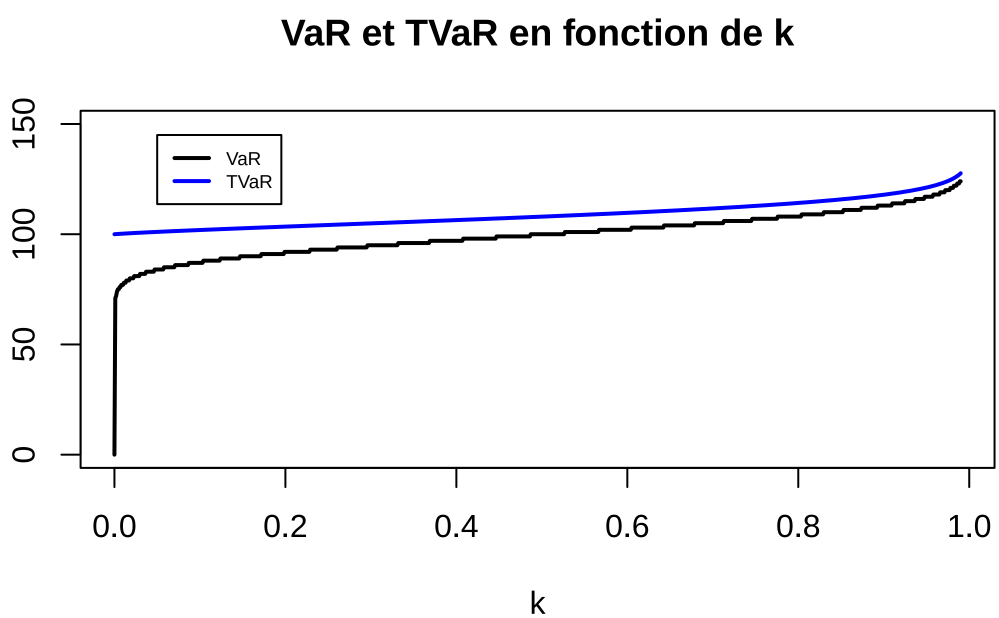
On a $Y \sim Po(10)$ et on cherche la VaR et la $TVaR$ pour $\kappa = 0.9$.

```
vk <- 0:1000
fY <- dpois(vk, 100)
FY <- cumsum(fY)

# On s'assure que la f.m.p. somme à 1
sum(fY)
```

```
## [1] 1
```

```
VaR <- function(k) min(which(FY >= k)) - 1
# VaR(0.9) == qpois(0.9, 100) # On aurait pu utiliser directement qpois

TVaR <- function(k) {
    VaR(k) + sum(pmax(vk - VaR(k), 0) * fY)/(1 - k)
}
```

On peut tracer le graphique.



1.3 Exemple 3

On a la densité suivante et on cherche $VaR_{0.95}(K)$ et $TVaR_{0.95}(K)$:

$$\Pr(K=k) = \begin{cases} 0.20 & ,k=0 \\ 0.30 & ,k=5 \\ 0.40 & ,k=20 \\ 0.08 & ,k=500 \\ 0.02 & ,k=2000 \end{cases} \qquad F_K(k) = \begin{cases} 0.20 & ,k=0 \\ 0.50 & ,k=5 \\ 0.90 & ,k=20 \\ 0.98 & ,k=500 \\ 1 & ,k=2000 \end{cases}$$

La méthode reste simillaire mais il faut faire un ajustement.

```
k <- 0.95
x <- c(0, 5, 20, 500, 2000)
fx <- c(0.2, 0.3, 0.4, 0.08, 0.02)
Fx <- cumsum(fx)

VaR <- x[min(which(Fx >= k)) - 1 + 1]  # Il faut aller chercher la bonne valeur dans nos x
TVaR <- VaR + sum(pmax(x - VaR, 0) * fx)/(1 - k)
cbind(VaR, TVaR)
```

```
##      VaR TVaR
## [1,] 500 1100
```

2 Cas continue

Pour le cas continu, il n'est pas vraiment possible de trouver la valeur exacte de la TVaR sauf s'il existe une forme analytique.

2.1 Exemple 1

On a deux lignes d'affaires et on modélise les coûts de chacune par $X \sim Erlang(5, 0.1)$ et $Y \sim MxExp(0.45, 0.55, 0.02, 0.05)$. On veut trouver la $TVaR_{0.9}(X)$ et la $TVaR_{0.9}(Y)$. Il faut commencer par trouver la VaR. Dans les deux cas, il faut le faire numériquement.

```
p <- c(0.45, 0.55)
l <- c(0.02, 0.05)
b <- 0.1
n <- 5

FX <- function(x) pgamma(x, n, b)
FY <- function(y) p[1] * pexp(y, l[1]) + p[2] * pexp(y, l[2])

VaRX <- function(k) optimize(function(x) abs(FX(x) - k), c(0, 500))$min
VaRY <- function(k) optimize(function(y) abs(FY(y) - k), c(0, 1000))$min
```

Maintenant, il faut trouver les formes analytiques de chacune des $TVaR$. On trouve l'espérance tronquée de X :

$$\begin{aligned} E[x \times 1_{\{x>d\}}] &= \int_d^\infty x f_X(x) dx \\ &= \int_d^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(n)} x^{(n+1)-1} e^{-\beta x} dx \\ &= \frac{\beta^\alpha \Gamma(n+1)}{\Gamma(n)\beta^{\alpha+1}} \int_d^\infty \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(n+1)} x^{(n+1)-1} e^{-\beta x} dx \\ &= \frac{n}{\beta} \bar{H}(d, n+1, \beta) \end{aligned}$$

Pour Y, on trouve plutôt $\pi_Y(d)$, car on peut utiliser la définition suivante,

$$\pi_Y(d) = \int_d^\infty \bar{F}_X(x)dx$$

et le calcul se fait facilement :

$$\pi_Y(d) = \int_d^\infty p_1 \cdot e^{-\beta_1 y} + p_2 \cdot e^{-\beta_2 y} dy$$
$$\pi_Y(d) = \frac{p_1}{\beta_1} \int_d^\infty \beta_1 e^{-\beta_1 y} dy + \frac{p_2}{\beta_2} \int_d^\infty \beta_2 e^{-\beta_2 y} dy$$
$$= p_1 \cdot \frac{1}{\beta_1} e^{-\beta_1 d} + p_2 \cdot \frac{1}{\beta_2} e^{-\beta_2 d}$$

On trouve les deux TVaR suivantes :

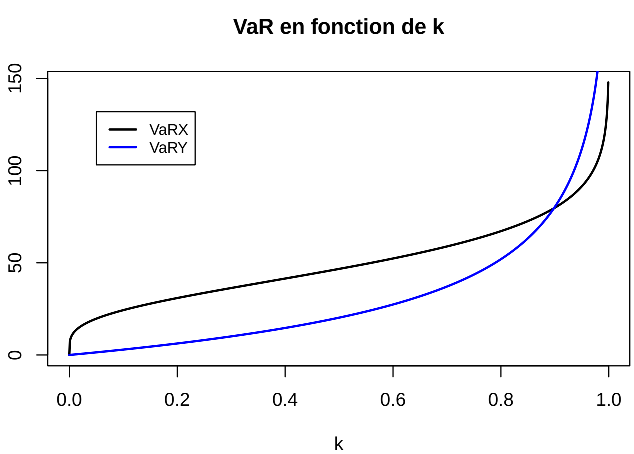
$$TVaR_\kappa(X) = \frac{n}{\beta(1-\kappa)} \bar{H}(VaR_\kappa(X), n+1, \beta)$$
$$TVaR_\kappa(Y) = VaR_\kappa(Y) + \frac{1}{1-k} \left(p_1 \cdot \frac{1}{\beta_1} e^{-\beta_1 \cdot VaR_\kappa(Y)} + p_2 \cdot \frac{1}{\beta_2} e^{-\beta_2 \cdot VaR_\kappa(Y)} \right)$$

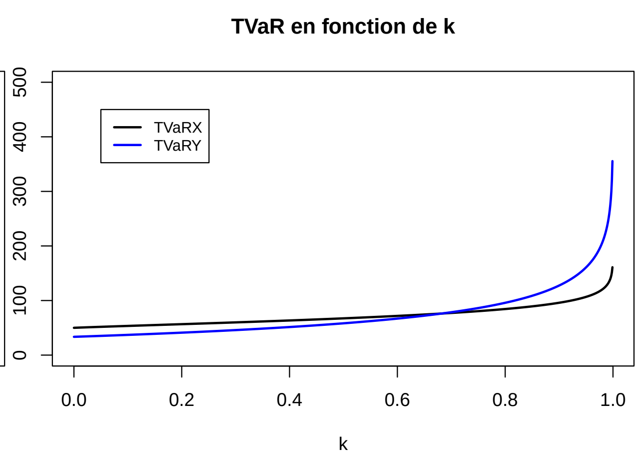
Bien sûr, on aurait pu prendre les formules directement dans l'annexe. Il nous reste à évaluer les $TVaR$.

```r
k <- 0.9
TVaRX <- function(k) n/b * pgamma(VaRX(k), n + 1, b, lower.tail = FALSE)/(1 - k)
TVaRY <- function(k) VaRY(k) + sum(p * (1/l) * (1 - pexp(VaRY(k), l)))/(1 - k)

# Formule de l'annexe pour Y
TVaRYtest <- sum((p * ((1/l) * (1 - pexp(VaRY(k), l)) + VaRY(k) * (1 - pexp(VaRY(k),
    l)))))/(1 - k)

# Vérification
round(cbind(TVaRX(k), TVaRY(k), TVaRYtest), 2)
```

```
##                    TVaRYtest
## [1,] 95.91 127.44    127.44
```

Déjà, on observe que Y a une $TVaR$ à $\kappa = 0.9$ plus élevé que X. Regardons un graphique pour se convaincre que Y peut être plus dangereuse que X dans les cas extrêmes.

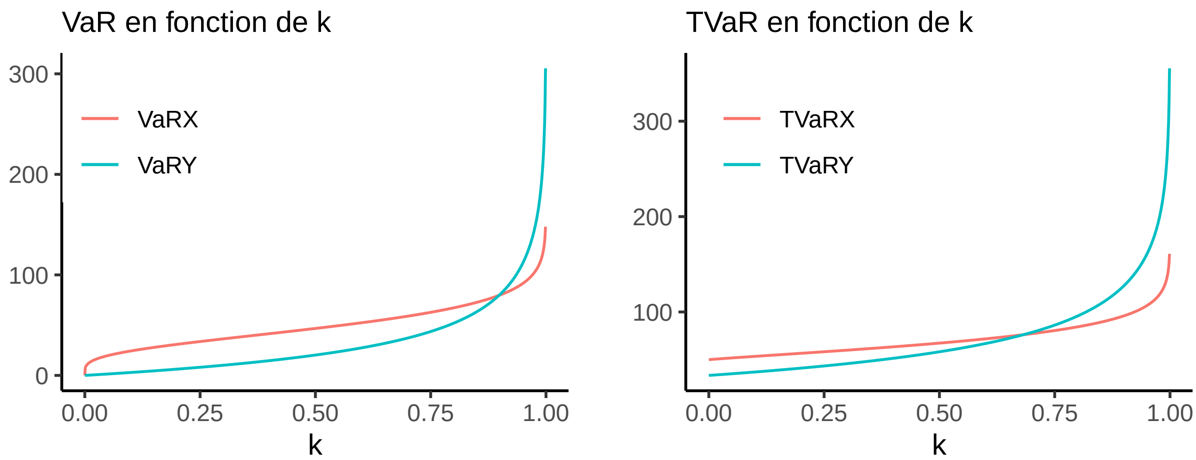




Visiblement, Y peut engendrer des coûts bien plus élevés que X.

2.1.1 Pour le plaisir : utilisation de ggplot

On peut aussi faire le graphique avec `ggplot`. Cependant, çe n'est pas nécessaire de savoir le faire.



2.2 Exemple 2

On a $Y \sim We(\tau, \beta)$ et on sais que $E[Y] = 20$ et $Var(Y) = 2000$. On cherche $VaR_{0.95}(Y)$ et $TVaR_{0.95}(Y)$. On commence par trouver les paramêtres de la lois.

$$E[Y] = \frac{1}{\beta}\Gamma\left(1 + \frac{1}{\tau}\right), \quad Var(Y) = \frac{1}{\beta^2}\Gamma\left(1 + \frac{2}{\tau}\right) - E[Y]^2$$

On va isoler un paramêtre pour pouvoir utiliser `optimize`.

$$\beta = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\tau}\right)}{20} \Rightarrow \frac{20^2}{\left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\tau}\right)\right)^2}\Gamma\left(1 + \frac{2}{\tau}\right) = 2000$$

Maitenant on peut utiliser `optimize` pour trouver τ et ensuite trouver β.

```
f <- function(par) 20^2/(gamma(1 + 1/par))^2 * gamma(1 + 2/par) - 20^2
f(0.8)
```

```
## [1] 635.557
```

```
f(10)
```

```
## [1] 5.78982
```

```
t <- optimize(function(x) abs(f(x) - 2000), c(0, 1))$min
b <- gamma(1 + 1/t)/20
cbind(t, b)
```

```
##              t          b
## [1,] 0.5000242 0.09999105
```

Avec les paramêtres il donc possible de trouver $VaR_{0.95}(Y)$ et $TVaR_{0.95}(Y)$.

```
k <- 0.95
VaR <- 1/b * (-log(1 - k))^(1/t)  # Annexe
TVaR <- 1/(b * (1 - k)) * pgamma(-log(1 - k), 1 + 1/t, b^t, lower.tail = F)
cbind(VaR, TVaR)
```

```
##          VaR     TVaR
## [1,] 89.7426 185.8434
```