Act-3000 Théorie du risque (Méthodes d'agrégation)

Hélène Cossette, Etienne Marceau

École d'Actuariat, Université Laval, Québec, Canada

8 octobre 2022

Résumé

Ce document contient les exercices en lien avec les chapitres 6, 8 et 11 de [Cossette and Marceau, 2021]

Mots-clés : Produit convolution ; fonctions génératrices ; fonctions génératrices de probabilité ; algorithme de DePril ; algorithme de Panjer ; transformmée rapide de Fourier (FFT) ; méthodes de discrétisation (arithmétisation) ; allocation du risque ; méthode d'allocation basée sur le théorème d'Euler.

Nom du fichier : main.tex

1 Énoncés

1.1 Exercices traditionnels

1. Soit une v.a. $X \sim BNComp\,(r, q; F_B)$ avec

$r = 0.2$	$q = \frac{1}{2}$
$\Pr(B = 1000k) = \gamma\,(1-\gamma)^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}^+$	$\gamma = \frac{1}{4}$

   On dispose des valeurs suivantes :

k	0	1	2	3
$f_X\,(1000k)$	? ? ?	0.02176376	0.01795511	? ? ?

   Calculer $f_X\,(0)$ et utiliser l'algorithme de Panjer pour calculer $f_X\,(3000)$.
   Code LaTeX : ex-70001.tex

2. Le nombre total de sinistres pour un portefeuille d'assurance automobile composé de 3 classes est défini par la v.a. $N = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{n_j} M_{j,i}$ où $n_1 = 40$, $n_2 = 50$, $n_3 = 30$, $M_{1,i} \sim Poisson\,(0.04)$ $(i = 1, 2, \ldots, n_1)$, $M_{2,i} \sim BinNég\,(2, 0.97)$ $(i = 1, 2, \ldots, n_2)$, $M_{3,i} \sim BinNég\,(3, 0.99)$ $(i = 1, 2, \ldots, n_3)$. La v.a. $M_{j,i}$ représente le nombre de sinistres pour le contrat i de la classe j $(j = 1, 2, 3)$. Tous les contrats sont supposés indépendants.
   Calculer $f_N\,(k)$ pour $k = 0, 1, 2, 3$.
   Code LaTeX : ex-70013.tex

3. Les coûts pour un portefeuille de $n = 100$ contrats d'assurance IARD sont définis par la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où les coûts des contrats $X_1, \ldots, X_n$ sont supposés iid. Pour $i = 1, 2, \ldots, n$, $X_i \sim X \sim BNComp\,(r, q; F_B)$ avec $r = 0.2$, $q = \frac{1}{1.2}$ et $f_B\,(1000j) = 0.4 \times 0.6^{j-1}$, pour $j \in \mathbb{N}^+$.
   En utilisant l'algorithme de Panjer, évaluer $f_S\,(1000j)$ pour $j = 0, 1, 2, 3$.
   Code LaTeX : ex-70014.tex

4. On considère un contrat d'assurance habitation pour le volet protection incendie pour la résidence unifamiliale seulement. On suppose qu'au plus un incendie peut survenir pour une résidence au cours d'une année. Les coûts pour un contrat sont définis par X, où

$$X = \begin{cases} B, & I = 1 \\ 0, & I = 0 \end{cases},$$

   avec $E\,[I] = 0.005$ et $B = U \times c$. La v.a. U représente le pourcentage de dommage et la constante c représente la valeur de la résidence. Les v.a. U et I sont supposées indépendantes. On suppose que $\Pr\left(U = \frac{1}{2}\right) = 0.6$, $\Pr\left(U = \frac{2}{2}\right) = 0.4$ et que $c = 200\ 000$. On suppose que le même type de contrat est émis à 100 résidences. Les contrats sont supposés indépendants. On définit la v.a. $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$ en prenant la convention que $X_i \sim X$, $i = 1, 2, \ldots, 100$.
   Calculer $f_S\,(100\ 000k)$, pour $k = 0, 1, \ldots, 4$.
   Code LaTeX : ex-70015.tex

5. Les coûts totaux pour portefeuille d'assurance automobile de la compagnie d'assurance générale ABC sont définis par la v.a. $S = \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{n_j} X_{j,i}$ où la v.a. $X_{j,i}$ représente les coûts pour le contrat i dans la classe j, pour $i = 1, 2, \ldots, n_j$ $(j = 1, 2)$. Les v.a. $X_{1,1}, \ldots, X_{1,n_1}$, $X_{2,1}, \ldots, X_{1,n_2}$ sont supposées indépendantes. De plus, $X_{j,i} \sim PComp(\lambda_j; F_{B_j})$ avec $\lambda_1 = 0.036$, $\lambda_2 = 0.054$, $f_{B_1}\,(10\ 000k) = 0.4 \times 0.6^{k-1}$ $(k \in \mathbb{N}^+)$ et $f_{B_2}\,(10\ 000k) = 0.5 \times 0.5^{k-1}$ $(k \in \mathbb{N}^+)$. On mentionne que $E\,[B_1] = 25\ 000$, $E\,[B_2] = 20\ 000$, $n_1 = 120$ et $n_2 = 80$.
   (a) Calculer l'espérance S.
   (b) Indiquer la loi et les paramètres de la loi de S.
   (c) Utiliser l'algorithme de Panjer pour calculer $f_S\,(10\ 000k)$ pour $k = 0,\ 10,\ 20,\ 30$.

(d) Calculer $VaR_\kappa(S)$ et $TVaR_\kappa(S)$, pour $\kappa = 0.95$ et 0.995.

Code LaTeX : ex-70016.tex

6. Les coûts pendant une semaine pour une compagnie sont définis par la v.a. X où $X \sim BNComp(r, q; F_B)$, avec $r = 0.4$, $q = \frac{2}{3}$, $B = \min(C; 5000)$ et $C \sim Weibull\left(0.8, \frac{1}{1000}\right)$. On utilise la méthode *lower* pour approximer la v.a. B par la $\widetilde{B} \in \{1000, 2000, \ldots, 5000\}$. Cela conduit à l'approximation de la v.a. X par la v.a. $\widetilde{X} \in \{0, 1000, 2000, \ldots\}$.

   (a) Calculer les valeurs de $f_{\widetilde{B}}(1000k)$ pour $k = 0, 1, \ldots, 5$.

   (b) Calculer les valeurs de $f_{\widetilde{X}}(1000k)$ pour $k = 0, 1, \ldots, 7$.

   (c) Approximer $VaR_{0.99}(X)$ par $VaR_{0.99}\left(\widetilde{X}\right)$.

   Code LaTeX : ex-70018.tex

7. On considère un contrat d'assurance auto dont les coûts sont modélisés selon l'approche fréquence-sévérité. L'actuaire constate que la loi de Poisson n'est pas appropriée pour décrire le comportement du nombre de sinistres pour un contrat. Il choisit plutôt de modifier la loi de Poisson de telle sorte que
$$F_M(k) = (1-\theta) + \theta F_{M'}(k), \ (k \in \mathbb{N}),$$
où $\theta = 0.05$ et $M' \sim Poisson(1)$. La fonction de masse de probabilité du montant d'un sinistre est donnée par $f_B(10\ 000j) = 0.4 \times 0.6^{j-1}$, pour $j \in \mathbb{N}^+$.

   (a) Calculer $E[M]$ et $E[X]$.

   (b) Donner l'expression de la fgp de M.

   (c) Calculer $f_X(10\ 000j)$, pour $j = 0, 1, 2, 3$.

   Code LaTeX : ex-70020.tex

8. On examine le risque associé à un contrat d'assurance automobile émis à des assurés du Québec. L'actuaire croit que la population du Québec est composée de 80% de bons conducteurs et de 20% de mauvais conducteurs. On modélise les coûts pour un contrat par l'approche fréquence-sévérité. Si l'assuré est un bon conducteur, le nombre de sinistres obéit à une loi de Poisson de moyenne 0.1. Si l'assuré est un mauvais conducteur, le nombre de sinistres obéit à une loi de Poisson de moyenne 0.25. En cas de sinistre, le montant d'un sinistre obéit à une loi discrète de moyenne 3000 quel que soit le type de conducteur, où $f_B(1000j) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1}$, pour $j \in \mathbb{N}^+$. Au moment de l'émission d'un nouveau contrat, on ne dispose pas d'information sur le type de conducteur.
   Calculer $f_X(1000j)$, pour $j = 0, 1, 2, 3$.
   Code LaTeX : ex-70022.tex

9. On considère un portefeuille de contrats d'assurance maladie au cours des 2 prochaines années. Les coûts pour l'année k sont définis par la v.a. W_k, pour $k = 1, 2$. On définit la valeur actualisée des coûts pour les 2 prochaines années par la v.a. $Z = vW_1 + v^2W_2$. Les v.a. W_1 et W_2 sont supposées iid avec $W_i \sim W$, $(i = 1,\ 2)$. De plus, $W \sim BNComp(r, q; F_B)$, avec $r = 2$, $\beta = 1$ et $B \sim Pareto(3, 4000)$. On note que $v = 0.95$.

   Pour évaluer $VaR_\kappa(Z)$, on approxime la v.a. Z par la v.a. discrète $\widetilde{Z} \in \{0, 1000, 2000, \ldots\}$. On utilise des algorithmes récursifs en appliquant la méthode *lower* de discrétisation avec un pas de discrétisation de 1000 pour définir $\widetilde{Z}$ et obtenir les valeurs de $f_{\widetilde{Z}}(1000k)$, $k \in \mathbb{N}$.

   (a) Calculer l'espérance et la variance des coûts totaux Z.

   (b) Calculer $\Pr(\widetilde{Z} = 1000k)$ pour $k = 0, 10$ et 20.

   (c) Utiliser $VaR_\kappa\left(\widetilde{Z}\right)$ pour évaluer approximativement $VaR_\kappa(Z)$ pour $\kappa = 99$ %.

   Code LaTeX : ex-70025.tex

10. On peut représenter le produit de convolution discret par un produit matriciel. Soit les v.a. X_1 et X_2 avec
$$f_{X_i}(k) = \Pr(X_i = k) > 0,$$
pour $k = 0, 1, \ldots, n_1 - 1$, et $f_{X_i}(k) = 0$, pour $k = n, n+1, \ldots$. À noter que $n = \max(n_1, n_2)$ où n_i est tel que $f_{X_i}(k) = \Pr(X_i = k) > 0$, pour $k = 0, 1, \ldots, n_i - 1$ $(i = 1, 2)$. On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$, avec
$$f_S(k) = \Pr(S = k) = \sum_{j=0}^{k} f_{X_1}(j) f_{X_2}(k-j),$$
pour $k = 0, 1, 2, \ldots, 2(n-1)$. On définit les vecteurs suivants :
$$\begin{aligned} \underline{a}^T &= (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}), \text{ avec } a_k = f_{X_1}(k) \ (k = 0, 1, \ldots, n-1), \\ \underline{b}^T &= (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}), \text{ avec } b_k = f_{X_2}(k) \ (k = 0, 1, \ldots, n-1), \end{aligned}$$
et
$$\underline{c}^T = \left(c_0, c_1, \ldots, c_{2(n-1)}\right) \ (k = 0, 1, \ldots, 2(n-1)),$$
où "^{T}" désigne la transposée d'un vecteur ou d'une matrice.
Alors, on a que
$$\underline{c} = \underline{a} * \underline{b}$$
est le produit de convolution des vecteurs $\underline{a}$ et $\underline{b}$. Il est donné par
$$\underline{c}^T = \underline{a}^T \otimes \underline{B}, \tag{1}$$
où
$$\underline{B} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \end{pmatrix}$$
est une matrice avec n lignes et $2n-1$ colonnes. La matrice $\underline{B}$ est appelée la matrice de Toeplitz. Cette méthode d'effectuer le produit de convolution est élégante. Soit les hypothèses suivantes :

k	$f_{X_1}(k) = a_k$	$f_{X_1}(k) = b_k$
0	0.7	0.3
1	0.2	0.5
2	0.1	0.2

(a) Construire la matrice de Toeplitz $\underline{B}$.

(b) Effectuer le produit de convolution en (1) pour obtenir les valeurs du vecteur $\underline{c}$, i.e., les valeurs de $f_S(k) = c_k$, $k = 0, 1, \ldots, 2n-2$.

Code LaTeX : ex-70035.tex

11. Pour la compagnie d'assurance ABC, l'évolution du nombre de décès avec un montant de prestation de décès $1000i$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ est représentée par le processus de Poisson
$$\underline{M}_i = \{M_i(t), t \geq 0\},$$
avec une intensité $\lambda_i = 0.06 - 0.01i$, pour $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Les processus $\underline{M}_1, \ldots, \underline{M}_5$ sont supposés indépendants. Le processus du montant total des sinistres est défini par $\underline{S} = \{S(t), t \geq 0\}$.

(a) Montrer que $\underline{S}$ est un processus Poisson composé avec $S(0) = 0$ et
$$S(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N(t)} B_k, & N(t) > 0 \\ 0, & N(t) = 0 \end{cases},$$
où $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson avec paramètre λ_N et $\{B_k, \quad k \in \mathbb{N}^+\}$ forme une suite de v.a. iid et indépendante de $\underline{N}$ où
$$B_k \sim B \in \{1000, 2000, \ldots, 5000\}.$$

(b) Calculer la valeur de λ_N et calculer les valeurs de la fonction de masse de probabilité de B.

(c) Utiliser l'algorithme de Panjer pour calculer $f_{S(0.25,1.25]}(1000k)$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Code LaTeX : ex-70036.tex

12. La transformée de Laplace-Stieltjes d'une v.a. Y de loi exponentielle est donnée par

$$\mathcal{L}_Y(t) = \frac{\beta}{\beta + t} \leq 1, \text{ pour } t > 0,\ \beta > 0.$$

Soit $0 < \beta_1 < \beta_2 < \infty$.

(a) Vérifier la relation suivante :

$$\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + t}\right) = \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right) \frac{q}{1 - (1-q)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)}, \tag{2}$$

avec $q = \frac{\beta_1}{\beta_2} \in (0,1)$.

(b) Soit une v.a. $Y \sim Exp(\beta_1)$ avec $\mathcal{L}_Y(t) = \frac{\beta_1}{\beta_1+t}$. Démontrer que

$$F_Y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k H(x; 1+k, \beta_2),\ x \geq 0$$

Indiquer les valeurs de γ_k, $k \in \mathbb{N}$.

Code LaTeX : ex-70041.tex

1.2 Exercices informatiques

1. Soit les v.a. iid $M_1, \ldots, M_n$ avec $M_i \sim M$ où
$$\mathcal{P}_M(t) = 0.5 + 0.1t + 0.2t^2 + 0.15t^2 + 0.05t^3,\, t \in [0,1].$$
On définit $S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i$. Utiliser l'algorithme de DePril pour calculer les valeurs de $f_{S_{10}}(k)$, $k = 0, 1, 10, 20$. Les calculs s'effectuent en R. [Note : Les calculs peuvent aussi être effectués avec FFT]
Code LaTeX : ex-70030.tex
2. Soit les v.a. iid $M_1, \ldots, M_n$ avec $M_i \sim M$ où
$$\mathcal{P}_M(t) = 0.6 + 0.3\mathrm{e}^{0.1(t-1)} + 0.1\mathrm{e}^{0.2(t-1)},\, t \in [0,1].$$
On définit $N_n = \sum_{i=1}^{n} M_i$. Les valeurs de $f_{N_{100}}(k)$, $k \in \mathbb{N}$, sont calculés avec l'algorithme de DePril. Les calculs s'effectuent en R.
   (a) Déduire la fonction de masse de probabilité de M.
   (b) Calculer $E[M]$.
   (c) Calculer $E[N_n]$.
   (d) Calculer $f_{N_{100}}(k)$, $k = 0, 5, 10, 15$.

   Code LaTeX : ex-70031.tex
3. Soit les v.a. iid $X_1 \sim X_2 \sim X \sim Pareto(\alpha, \lambda)$ avec $\alpha = 1.5$ et $\lambda = 5$. On approxime les v.a. X_i $(i = 1, 2)$ par les v.a. $\widetilde{X}_i^{(met,h)}$ $(i = 1, 2;\, met = \texttt{"}u\texttt{"}$ (upper) ou $\texttt{"}l\texttt{"}$ (lower)). On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$ et les approximations correspondantes $\widetilde{S}^{(u,h)}$ et $\widetilde{S}^{(l,h)}$. On utilise le produit de convolution pour calculer les valeurs des fonctions de masse de probabilité des v.a. discrètes $\widetilde{S}^{(u,h)}$ et $\widetilde{S}^{(l,h)}$.
   (a) Calculer $VaR_\kappa\left(\widetilde{S}^{(u,h)}\right)$, pour $h = 1$, 0.1 et 0.01 et $\kappa = 0.9$, 0.99, 0.999, 0.9999.
   (b) Calculer $VaR_\kappa\left(\widetilde{S}^{(l,h)}\right)$, pour $h = 1$, 0.1 et 0.01 et $\kappa = 0.9$, 0.99, 0.999, 0.9999.

   Code LaTeX : ex-70032.tex
4. Soit $X \sim BNComp(r, q; F_B)$ avec $r = 1.5$, $q = \frac{1}{3}$ et $B \sim LN\left(\mu = \ln(10) - \frac{0.36}{2}, \sigma = 0.6\right)$. On approxime la v.a. X par la v.a. $\widetilde{X} \sim BNComp\left(r, q; F_{\widetilde{B}}\right)$ où $\widetilde{B}$ est une v.a. discrète obtenue en discrétisant la v.a. B avec la méthode lower avec un pas de discrétisation $h = 1$.
   (a) Calculer les valeurs de $f_{\widetilde{B}}(k)$, $k = 0, 1, 2, ..., 500$. Vérification : $f_{\widetilde{B}}(15) = 0.03008972$.
      i. Indiquer la formule pour calculer ces valeurs.
      ii. Fournir les valeurs de $f_{\widetilde{B}}(k)$, pour $k = 0, 10$.
   (b) Calculer les valeurs de $f_{\widetilde{X}}(k)$, $k = 0, 1, 2, ..., 600$. Vérification : $f_{\widetilde{X}}(15) = 0.01593689$.
      i. Indiquer la méthode utilisée.
      ii. Fournir les valeurs de $f_{\widetilde{X}}(k)$, pour $k = 0, 20$.
   (c) Calculer $F_{\widetilde{X}}(k)$ et $\pi_{\widetilde{X}}(k) = E\left[\max\left(\widetilde{X} - k; 0\right)\right]$ pour $k = 50$. Indiquer les formules pour calculer ces valeurs. Vérification : $F_{\widetilde{X}}(60) = 0.8382003$.
   (d) Soit une v.a. discrète K définie sur $\mathbb{N}$. Démontrer que
   $$TVaR_\kappa(K) = VaR_\kappa(K) + \frac{1}{1-\kappa}\pi_K(VaR_\kappa(K))$$
   pour $\kappa \in (0,1)$ et $\pi_K(k) = E[\max(K - k; 0)]$, $k \in \mathbb{N}$.

(e) Calculer $TVaR_\kappa\left(\widetilde{X}\right)$ pour $\kappa = F_{\widetilde{X}}(50)$. (**Suggestion** : regarder (4c) et (4d) avant de toucher au clavier).

Code LaTeX : ex-70006.tex

5. Soit une v.a. $S = X_1 + X_2$ où les v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes avec $X_1 \sim LN\left(8, 1^2\right)$ et $X_2 \sim Gamma\left(4, \frac{1}{1000}\right)$. Pour $i = 1, 2$, on approxime X_i par $\widetilde{X}_i$ en appliquant la méthode *lower* de discrétisation avec un pas de discrétisation de 1000 (suggestion : il est suffisant de discrétiser sur le support $\{0, 1000, \ldots, 500\ 000\}$). On approxime la v.a. S par la v.a. $\widetilde{S} = \widetilde{X}_1 + \widetilde{X}_2 \in \{0, 1000, \ldots\}$

   (a) Calculer les valeurs de $f_{\widetilde{S}}(1000k)$, pour $k = 10$, 20 et 30.

   (b) Utiliser $VaR_\kappa\left(\widetilde{S}\right)$ pour approximer $VaR_\kappa(S)$ pour $\kappa = 0.95$ et 0.995.

   Code LaTeX : ex-70017.tex

6. Soit les v.a. indépendantes $X_1 \sim Bin(10, 0.2)$ et $X_2 \sim Bin(20, 0.3)$. On définit $S = X_1 + X_2 \in \{0, 1, 2, \ldots, 30\}$. Utiliser la FFT pour calculer les valeurs exactes de $f_S(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 30$ (Suggestion : appliquer la FFT avec des vecteurs comprenant 32 éléments).
   Code LaTeX : ex-70012.tex

7. Les coûts pour un portefeuille de 1000 contrats d'assurance IARD sont définis par la v.a. $S = \sum_{i=1}^{1000} X_i$. Les v.a. $X_1, \ldots, X_{1000}$ sont iid avec $X_i \sim BNComp(r, q; F_B)$, où $r = 0.01$, $q = \frac{1}{4}$ et $B \sim Pareto(2.5, 15\ 000)$. On évalue approximativement la v.a. X par la v.a. $\widetilde{X}$ qui résulte de la discrétisation de la v.a. B avec un pas de discrétisation $h = 1000$. Cela signifie que $\widetilde{B}$ et $\widetilde{X}$ $\in \{0, 1000, 2000, \ldots, 40000 \times 1000\}$. On a recours à la méthode *lower* pour discrétiser la v.a. B. On évalue approximativement S par $\widetilde{S} = \sum_{i=1}^{1000} \widetilde{X}_i$.

   (a) Calculer l'espérance de S.

   (b) Déterminer les valeurs de $f_{\widetilde{S}}(1000k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ et évaluer $E\left[\widetilde{S}\right]$, $E\left[\max\left(\widetilde{S} - 2\ 000\ 000; 0\right)\right]$, $F_{\widetilde{S}}(500\ 000)$, $F_{\widetilde{S}}(1\ 000\ 000)$ et $F_{\widetilde{S}}(2\ 000\ 000)$.

   Code LaTeX : ex-70024.tex

8. Pour la classe j ($j = 1, 2, \ldots, 5$), les coûts sont définis par les processus de Poisson (homogène) composé $\underline{X}_j = \{X_j(t), t \geq 0\}$ où le processus de Poisson homogène sous-jacent est représenté par

$$\underline{M}_j = \{M_j(t), t \geq 0\}$$

   avec une intensité $\lambda_j = 0.6 - 0.1j$, pour $j = 1, 2, 3, 4, 5$, et la suite de v.a. iid (montants de sinistres) sous-jacente est notée par

$$\underline{B}_j = \left\{B_{j,k}, k \in \mathbb{N}^+\right\},$$

   avec $B_{j,k} \sim B_j \sim Erlang\left(j, \frac{1}{1000}\right)$, $k \in \mathbb{N}^+$ et $j = 1, 2, \ldots, 5$.
   Les processus $\underline{M}_1, \ldots, \underline{M}_5$ sont supposés indépendants. Les suites $\underline{B}_1, \ldots, \underline{B}_5$ sont supposées indépendantes. Les processus $\underline{M}_1, \ldots, \underline{M}_5$ et les suites $\underline{B}_1, \ldots, \underline{B}_5$ sont supposés indépendants.
   Ainsi, les processus $\underline{X}_1$, ..., $\underline{X}_5$ sont indépendants.
   On définit le processus agrégé des coûts totaux pour le portefeuille par $\underline{S} = \{S(t), t \geq 0\}$ avec

$$S(t) = \sum_{j=1}^{5} X_j(t)$$

   pour $t \geq 0$.

   (a) Montrer que $\underline{S}$ est un processus Poisson composé avec $S(0) = 0$ et

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N(t)} C_k, & N(t) > 0 \\ 0, & N(t) = 0 \end{cases},$$

où $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ (avec $S(t) = \sum_{j=1}^{5} X_j(t)$, $t \geq 0$) est le processus de Poisson homogène sous-jacent avec un paramètre λ_N et $\underline{C} = \{C_k, \quad k \in \mathbb{N}^+\}$ forme une suite de v.a. iid et indépendante de $\underline{N}$ où $C_k \sim C$ et

$$F_C(x) = \sum_{j=1}^{5} p_j H\left(x; k, \frac{1}{1000}\right), \ x \geq 0.$$

(b) Calculer la valeur de λ_N et calculer les valeurs de p_j, $j = 1, 2, \ldots, 5$.

(c) Calculer $F_C(x)$, $x = 2000$ et 8000.

(d) Démontrer que

$$F_{S(s,s+t]}(x) = \gamma_{(s,s+t]}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{(s,s+t]}(k) H\left(x; k, \frac{1}{1000}\right), \tag{3}$$

où $\gamma_{(s,s+t]}(k)$ sont des probabilités telles que $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{(s,s+t]}(k) = 1$. Les probabilités sont calculées avec l'algorithme de Panjer. [Note : les probabilités peuvent aussi avec la FFT].

(e) Utiliser l'algorithme de Panjer pour calculer $\gamma_{(0.25,1.25]}(k)$, $k = 0, 1, 2, 3$.

(f) Pour des fins d'évaluation on approxime $F_{S(s,s+t]}(x)$ en (3) par

$$\widetilde{F}_{S(s,s+t]}(x) = \gamma_{(s,s+t]}(0) + \sum_{k=1}^{k_0} \gamma_{(s,s+t]}(k) H\left(x; k, \frac{1}{1000}\right), \tag{4}$$

i.e., on approxime la somme infinie de termes par une somme finie de termes, en s'assurant que $\gamma_{(s,s+t]}(0) + \sum_{k=1}^{k_0} \gamma_{(s,s+t]}(k) = 1$. Utiliser l'algorithme de Panjer pour calculer $\gamma_{(0.25,1.25]}(k)$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, k_0$ et la relation en (4) pour évaluer approximativement $F_{S(s,s+t]}(x)$ par $\widetilde{F}_{S(s,s+t]}(x)$, pour $x = 0$, 2000, 8000, 20000. On fixe $k_0 = 100$.

Code LaTeX : ex-70037.tex

9. Pour la classe j ($j = 1, 2, \ldots, 5$), les coûts sont définis par les processus de Poisson (homogène) composé $\underline{X}_j = \{X_j(t), t \geq 0\}$ où le processus de Poisson homogène sous-jacent est représenté

$$\underline{M}_j = \{M_j(t), t \geq 0\}$$

avec une intensité $\lambda_j = 0.6 - 0.1j$, pour $j = 1, 2, 3, 4, 5$, et la suite de v.a. iid sous-jacente est notée par

$$\underline{B}_j = \left\{B_{j,k}, k \in \mathbb{N}^+\right\},$$

avec $B_{j,k} \sim B_j$, $k \in \mathbb{N}^+$ et $j = 1, 2, \ldots, 5$. Pour $j = 1, 2, \ldots, 5$, la v.a. B_j discrète obéit à une loi de Pareto discrète avec

$$f_{B_j}(0) = \begin{cases} 0 & , \quad k = 0 \text{ et } k \in \{201, 202, \ldots\} \\ \left(\frac{\eta_j}{\eta_j + 100(k-1)}\right)^{\alpha_j} - \left(\frac{\eta_j}{\eta_j + 100k}\right)^{\alpha_j} & , \quad k \in \{1, 2, \ldots, 199\} \\ \left(\frac{\eta_j}{\eta_j + 100 \times 199}\right)^{\alpha_j} & , \quad k = 200 \end{cases}.$$

À noter que cette loi discrète résulte de la discrétisation de la loi Pareto continue, avec la méthode "lower" et $h = 100$, et en supposant une limite par sinistre de 20000.

Les processus $\underline{M}_1, \ldots, \underline{M}_5$ sont supposés indépendants. Les suites $\underline{B}_1, \ldots, \underline{B}_5$ sont supposées indépendantes. Les processus $\underline{M}_1, \ldots, \underline{M}_5$ et les suites $\underline{B}_1, \ldots, \underline{B}_5$ sont supposés indépendants.

Ainsi, les processus $\underline{X}_1$, ..., $\underline{X}_5$ sont indépendants.

On définit le processus agrégé des coûts totaux pour le portefeuille par $\underline{S} = \{S(t), t \geq 0\}$ avec

$$S(t) = \sum_{j=1}^{5} X_j(t)$$

pour $t \geq 0$. On détient les données suivantes :

j	1	2	3	4	5
α_j	2.9	2.7	2.5	2.3	2.1
η_j	1900	1700	1500	1300	1100

(a) Montrer que $\underline{S}$ est un processus Poisson composé avec $S(0) = 0$ et

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N(t)} C_k, & N(t) > 0 \\ 0, & N(t) = 0 \end{cases},$$

où $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ (avec $S(t) = \sum_{j=1}^{5} X_j(t)$, $t \geq 0$) est le processus de Poisson homogène sous-jacent avec un paramètre λ_N et $\underline{C} = \{C_k, \quad k \in \mathbb{N}^+\}$ forme une suite de v.a. iid et indépendante de $\underline{N}$ où $C_k \sim C$ et

$$f_C(100k) = \sum_{j=1}^{5} p_j f_{B_j}(100k), \ k \in \mathbb{N}.$$

(b) Calculer la valeur de λ_N et calculer les valeurs de p_j, $j = 1, 2, \ldots, 5$.

(c) Calculer $f_C(100k)$, $k = 20$ et 80.

(d) Calculer $E[C]$, $E\left[N_{(2.2,3.8]}\right]$ et $E\left[S_{(2.2,3.8]}\right]$.

(e) Utiliser l'algorithme de Panjer pour calculer $f_{S_{(2.2,3.8]}}(100k)$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 4 \times 200$. Indiquer les valeurs de $f_{S_{(2.2,3.8]}}(100k)$, $k = 0, 20, 80$.

(f) Calculer $F_{S_{(2.2,3.8]}}(100k)$, $k = 0, 20, 80, 100$.

(g) Calculer

$$\pi_{(2.2,3.8]}(100k) = E\left[\max\left(S_{(2.2,3.8]} - 100k; 0\right)\right],$$

pour $k = 0, 20, 80, 200$.

(h) Calculer $TVaR_\kappa\left(S_{(2.2,3.8]}\right)$, $\kappa = F_{S_{(2.2,3.8]}}(100k)$, $k = 0, 20, 80, 100$.

Code LaTeX : ex-70038.tex

10. À partir des données de sinistres, un actuaire conclut que les coûts en sinistres, représentés par la v.a. X, obéissent à une loi mélange exponentielle avec

$$\mathcal{L}_X(t) = \alpha\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + t}\right) + (1-\alpha)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right),$$

où $0 < \beta_1 < \beta_2 < \infty$ et $\alpha \in (0, 1)$.

(a) Démontrer que

$$\mathcal{L}_X(t) = \mathcal{P}_K\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right),$$

où $\mathcal{P}_K$ est la fgp d'une v.a. discrète K définie sur $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, \ldots\}$ et

$$\mathcal{P}_K(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k r^k,$$

pour $r \in [0, 1]$, $\gamma_k \in [0, 1]$, et $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k = 1$. Identifier les expressions de γ_k en fonction de $q = \frac{\beta_1}{\beta_2}$ et α.

(b) Soit les v.a. iid $X_1, \ldots, X_n$ avec $X_i \sim X$, $i = 1, 2, \ldots, n$. On note

$$\mathcal{L}_{X_i}(t) = \mathcal{P}_{K_i}\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right)$$

avec $\mathcal{P}_{K_i}(r) = \mathcal{P}_K(r)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. On définit

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

i. Démontrer

$$\mathcal{L}_{S_n}(t) = \mathcal{P}_{M_n}\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right)$$

pour $t > 0$, où

$$\mathcal{P}_{M_n}(r) = \sum_{k=n}^{\infty} \eta_k r^k$$

pour $r \in [0,1]$, $\eta_k \in [0,1]$, et $\sum_{k=n}^{\infty} \eta_k = 1$. On interprète $M_n = K_1 + \cdots + K_n$, où $K_1, \ldots, K_n$ sont des v.a. iid avec $K_i \sim K$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

ii. À partir de l'algorithme de DePril, développer un algorithme récursif pour calculer les probabilités η_k, $k \in \{n, n+1, \ldots\}$. Identifier le point de départ et la relation récursive. On ne peut pas appliquer directement l'algorithme de DePril. Indiquer l'expression de $F_S(x)$.

iii. Soit les ypothèses suivantes : $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = \frac{5}{8}$ tel que $E[X] = 7$. On fixe $n = 20$. Calculer $E[S_n]$. Calculer les valeurs de q, γ_k $(k = 1, 2, \ldots, 5)$, η_k $(k = 20, 21, \ldots, 25)$. Calculer $F_{S_n}(x)$, pour $x = 100$, 140, 200, 300. Dans les calculs de F_{S_n}, on somme 1000 termes.

Code LaTeX : ex-70043.tex

1.3 Exercices en atelier

Read Me :

- Les articles servent de base aux activités en atelier.
- Les solutions seront fournies uniquement et exclusivement pendant les séances en atelier.

1. Soit les deux v.a. indépendantes discrètes positives X_1 et X_2, définies sur $\mathbb{N}$, dont les fonctions de masse de probabilité et les f.g.p. sont respectivement définies par f_{X_i}, $i \in \{1,2\}$, et $\mathcal{P}_{X_i}$, $i \in \{1,2\}$. Il est à noter que $E[X_i] < \infty$. Les v.a. X_1 et X_2 représentent les coûts annuels en assurance pour les assurés $i \in \{1,2\}$ qu'ils décident de mutualiser pour la prochaine année. On définit les coûts annuels du portefeuille résultat de la mise en commun de leurs risques individuels d'assurance par la v.a. $S = X_1 + X_2$. Au temps 0, les deux assurés conviennent de la règle de partage suivante pour les coûts à survenir durant la prochaine année :
   - Part de l'assuré 1 : $\varphi_{X_1}(k) = E[X_1|S=k]$;
   - Part de l'assuré 2 : $\varphi_{X_2}(k) = E[X_2|S=k]$.
   - Interprétation : l'assuré i paiera l'espérance des coûts X_i sachant que les coûts totaux du portefeuille sont d'un montant k.

   (a) Démontrez que $\varphi_{X_1}(k) + \varphi_{X_2}(k) = k$, $k \in \mathbb{N}$.

   (b) Démontrez que
   $$E[X_1 \times 1_{\{S=k\}}] = E[X_1] \times (g_{X_1} * f_{X_2}(k)), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{5}$$
   où
   $$g_{X_i}(j) = \frac{j}{E[X_i]} f_{X_i}(j), \quad j \in \mathbb{N}, \quad i \in \{1,2\}.$$

   (c) Démontrez que g_{X_i} est une fonction de masse de probabilité, $i \in \{1,2\}$.

   (d) Démontrez que
   $$\varphi_{X_1}(k) = E[X_1]\frac{g_{X_1} * f_{X_2}(k)}{f_S(k)}, \quad k \in \mathbb{N},$$
   et
   $$\varphi_{X_2}(k) = E[X_2]\frac{f_{X_1} * g_{X_2}(k)}{f_S(k)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

   (e) Démontrez que $E[\varphi_{X_i}(S)] = E[X_i]$, $i \in \{1,2\}$. Interprétez.

   (f) Suggérez une procédure pour évaluer $\varphi_{X_i}(k)$, $k \in \mathbb{N}$ et $i \in \{1,2\}$.

2. Dans l'exercice 1, on suppose $X_i \sim NBinom(r_i, q_i)$, $i \in \{1,2\}$, avec $(r_1 = 0.5, q_1 = 0.2)$ et $(r_2 = 8, q_1 = 0.5)$.

   (a) Calculez $E[X_1]$, $E[X_2]$, et $E[S]$.

   (b) Calculez $Var(X_1)$, $Var(X_2)$, et $Var(S)$.

   (c) Calculez $f_S(k)$, $k \in \{0,1,\ldots,1000\}$.

   (d) Calculez $\varphi_{X_1}(k)$, $k \in \{0,1,\ldots,1000\}$.

   (e) Calculez $\varphi_{X_2}(k)$, $k \in \{0,1,\ldots,1000\}$.

   (f) Validez que $E[\varphi_{X_i}(S)] = E[X_i]$, $i \in \{1,2\}$. Interprétez.

3. Dans l'exercice 1, on suppose $X_i \sim Pois(\lambda_i)$, $i \in \{1,2\}$.

   (a) Démontrez que $\varphi_{X_i}(k) = k\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2}$, $i \in \{1,2\}$.

   (b) Quelle est la loi de $\varphi_{X_i}(S)$, $i \in \{1,2\}$?

   (c) Validez que $E[\varphi_{X_i}(S)] = E[X_i]$, $i \in \{1,2\}$. Interprétez.

   (d) Démontrez que $Var(\varphi_{X_i}(S)) = \lambda_i\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2} \leq Var(X_i) = \lambda_i$, $i \in \{1,2\}$. Interprétez.

1.4 Distributions de fréquence et FFT

1. **Distribution de Delaporte.** Dans [Delaporte, 1960], l'actuaire français Pierre J. Delaporte propose de modéliser le nombre de sinistres en assurance automobile par la v.a. $M = K_1 + K_2$ où les v.a. $K_1 \sim Pois(\lambda)$ et $K_2 \sim NBinom(r, q)$ sont indépendantes. Depuis, en science actuarielle, statistique et autres domaines connexes, on convient de dire que la v.a. M obéit à une loi Delaporte de paramètres (λ, r, q), avec la notation $M \sim Delaporte(\lambda, r, q)$, où $\lambda, r > 0, q \in (0, 1)$. La fgp de la v.a. M est
$$\mathcal{P}_M(s) = \frac{q^r \mathrm{e}^{\lambda(s-1)}}{(1-(1-q)s)^r}, \quad |s| \leq 1. \tag{6}$$
On considère aussi la distribution Delaporte comme un membre de la famille des distributions Poisson mélange.
   (a) Démontrez que $E[M] = \lambda + r\frac{1-q}{q}$.
   (b) Démontrez que $Var(M) = \lambda + r\frac{1-q}{q}$.
   (c) Démontrez que $\mathcal{P}_M$ correspond à l'expression en (6).
   (d) À partir de (6), identifiez deux distributions de fréquence qui sont des cas particuliers de la distribution Delaporte.
   (e) Utilisez le produit de convolution pour identifier l'expression de la fonction f_M de masse de probabilité de la v.a. M.
   (f) Hypothèse : $\lambda = 1.5, r = 0.5, q = \frac{1}{4}$.
      i. Utilisez l'approche habituelle du produit convolution pour calculer les valeurs de $f_M(k)$, $k \in \{0, 1, \ldots, 10\}$.
      ii. Utilisez `fft` pour calculer les valeurs de $f_M(k)$, $k \in \{0, 1, \ldots, 10\}$.

   Dans [Ruohonen, 1988], l'auteur (actuaire d'une compagnie d'assurances IARD) obtient cette loi via une loi Poisson mélange. Dans [Willmot and Sundt, 1989], les auteurs analysent en détails les propriétés de la distribution Delaporte. Dans [Tessera, 2007], on retrouve une application de cette loi avec des données médicales. Voir aussi [Panjer and Willmot, 1992].

2. **Distribution de Delaporte composée.** Les coûts d'un contrat d'assurance sont définis par la v.a. X où $\mathcal{P}_X(s) = \mathcal{P}_M(\mathcal{P}_B(s))$ où la fgp de la v.a. du nombre M de sinistres est
$$\mathcal{P}_M(s) = \frac{q^r \mathrm{e}^{\lambda(s-1)}}{(1-(1-q)s)^r}, \quad |s| \leq 1, \tag{7}$$
avec $\lambda = 1.5, r = 0.5, q = \frac{1}{4}$. La fonction f_B de masse de probabilité de la v.a. discrète du montant B de sinistre est
$$f_B(k) = \Phi\left(\frac{\ln(k)-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln(k-1)-\mu}{\sigma}\right), \quad k \in \mathbb{N}_+, \tag{8}$$
avec $f_B(k) = 0$, $\mu = \ln(100) - \frac{\sigma^2}{2}$ et $\sigma = 0.8$.
   (a) Calculez les espérances $E[M]$, $E[B]$ et $E[X]$.
   (b) Calculez les variances $Var(M)$, $Var(B)$ et $Var(X)$.
   (c) Utilisez l'algorithme de Panjer et le produit de convolution pour calculer les valeurs de $f_X(k)$, $k \in \mathbb{N}$.
   (d) Utilisez `fft` pour calculer les valeurs de $f_X(k)$, $k \in \mathbb{N}$.
   (e) Calculez $VaR_\kappa(X)$, $\kappa \in \{0.5, 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999\}$.

3. **Distribution inverse gaussienne composée.** Les coûts d'un contrat d'assurance sont définis par la v.a. X où $\mathcal{P}_X(s) = \mathcal{P}_M(\mathcal{P}_B(s))$ où la fonction f_B de masse de probabilité de la v.a. discrète du montant B de sinistre est
$$f_B(k) = \Phi\left(\frac{\ln(k)-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln(k-1)-\mu}{\sigma}\right), \quad k \in \mathbb{N}_+, \tag{9}$$

avec $f_B(k) = 0$, $\mu = \ln(100) - \frac{\sigma^2}{2}$ et $\sigma = 0.8$.
La v.a. M de fréquence obéit à une distribution Poisson inverse-gaussienne (appelée aussi distribution Sichel), $M \sim PoisIG(\lambda, \beta)$, avec

$$E[M] = \lambda \quad \text{et} \quad Var(M) = \lambda + \lambda^2\beta$$

et

$$\mathcal{P}_M(s) = \mathrm{e}^{\frac{1}{\beta}(1-\sqrt{1-2\beta\lambda(s-1)})}, \ \ |s| \leq 1. \tag{10}$$

Pour des détails sur la loi Poisson inverse-gaussienne, on peut consulter [Cossette and Marceau, 2021]) pour les détails. Voir aussi [Panjer and Willmot, 1992].
Hypothèses pour la loi Poisson inverse-gaussienne : $\lambda = 3$ et $\beta = 0.5$.

(a) Calculez les espérances $E[M]$, $E[B]$ et $E[X]$.

(b) Calculez les variances $Var(M)$, $Var(B)$ et $Var(X)$.

(c) Utilisez `fft` pour calculer les valeurs de $f_X(k)$, $k \in \mathbb{N}$.

(d) Calculez $VaR_\kappa(X)$, $\kappa \in \{0.5, 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999\}$.

1.5 Allocation du risque - volet 1

1.5.1 Exercices traditionnels

1. On rappelle deux des quatres propriétés que doit satisfaire une mesure de risque pour être cohérente.

   - **Invariance à la translation**. Soient un risque X et un scalaire $a \in \mathbb{R}$. Une mesure ς_κ est invariante à la translation si
   $$\varsigma_\kappa (X + a) = \varsigma_\kappa (X) + a,$$
   pour $0 < \kappa < 1$.
   - **Monotonocité**. Soient deux risques X_1 et X_2 tels que $\Pr (X_1 \leq X_2) = 1$. Une mesure ς_κ est monotone si
   $$\varsigma_\kappa (X_1) \leq \varsigma_\kappa (X_2),$$
   pour $0 < \kappa < 1$.

   Questions :

   (a) Montrer avec un exemple simple que la mesure $\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ ne satisfait pas la propriété d'invariance à la translation.

   (b) Soient les v.a. X_1 et X_2 telles que $X_1 \sim Unif (0, 1)$ et $\Pr (X_2 = 10) = 1$. Utiliser ce contre-exemple pour montrer que la mesure $\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ ne satisfait pas la propriété de monotonocité.

   Code LaTeX : ex-50001.tex

2. Soit un portefeuille de n risques X_1, ..., X_n. Le montant total des coûts est défini par la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. On calcule les primes
   $$\Pi_A (S) = E [S] + \sqrt{\mathrm{Var}(S)}\Phi^{-1} (\kappa)$$
   et
   $$\Pi_B (S) = E [S] + \sqrt{\mathrm{Var}(S)}\frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}}.$$
   Questions :

   (a) Montrer que la fonction
   $$\varphi (X_1, ..., X_n) = \Pi_A (S) = \Pi_A \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$
   est homogène. Utiliser le théorème d'Euler pour identifier la contribution $C^B (X_i)$ (pour chaque risque X_i) associée à la prime $\Pi_A (S)$.

   (b) Montrer que la fonction
   $$\varphi (X_1, ..., X_n) = \Pi_B (S) = \Pi_B \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$
   est homogène. Utiliser le théorème d'Euler pour identifier la contribution $C^B (X_i)$ (pour chaque risque X_i) associée à la prime $\Pi_B (S)$.

   Code LaTeX : ex-50002.tex

3. Soit le vecteur de v.a. (X_1, X_2, X_3) dont la fonction de répartition conjointe est définie par

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{2} p_i \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x_1}{10i^2}}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x_2}{20i^2}}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x_3}{10(5-i^2)}}\right)$$

pour $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.
Hypothèses : $p_1 = 0.75$, $p_2 = 0.25$.

(a) Identifier les lois de X_1, X_2 et X_3.

(b) Calculer $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$, $\mathrm{Cov}(X_1, X_3)$ et $\mathrm{Cov}(X_2, X_3)$.

(c) Soit $S = X_1 + X_2 + X_3$. Calculer $E[S]$ et $\mathrm{Var}(S)$.

(d) Calculer la mesure $\sqrt{Var(S)}$ et les contributions $C^{\sqrt{Var}}(X_i)$, $i = 1, 2, 3$, associées à cette mesure.

(e) Soit la prime
$$\Pi_A(S) = E[S] + \sqrt{\mathrm{Var}(S)}\Phi^{-1}(\kappa).$$
Utiliser le théorème d'Euler pour calculer les 3 contribution $C^A(X_i)$, $i = 1, 2, 3$, associées à la prime $\Pi_A(S)$.
Comparer $C^A(X_i)$ avec
$$\Pi_A(X_i) = E[X_i] + \sqrt{\mathrm{Var}(X_i)}\Phi^{-1}(\kappa)$$
pour $i = 1, 2, 3$. Commenter.

(f) Soit la prime
$$\Pi_B(S) = E[S] + \sqrt{\mathrm{Var}(S)}\frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}}.$$
Utiliser le théorème d'Euler pour calculer les 3 contribution $C^B(X_i)$, $i = 1, 2, 3$, associées à la prime $\Pi_B(S)$.
Comparer $C^B(X_i)$ avec
$$\Pi_B(X_i) = E[X_i] + \sqrt{\mathrm{Var}(X_i)}\frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}}$$
pour $i = 1, 2, 3$. Commenter.

Code LaTeX : ex-50003.tex

1.5.2 Exercices informatiques

1. Soit le vecteur de v.a. indépendantes $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ avec $X_i \sim Gamma\,(\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, 2, 3$:

i	α_i	β_i
1	10	$1/300$
2	4	$1/500$
3	1	$1/1000$

On définit $S = X_1 + X_2 + X_3$.
On utilise le générateur de base du logiciel `R` (`set.seed(2019)`) pour générer $m = 100000$ (cent milles) réalisations $\underline{X}^{(j)} = \left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}\right)$ de $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$.
Note :

j	$X_1^{(j)}$	$X_2^{(j)}$	$X_3^{(j)}$	S
1	3642.99	2423.51	361.49	6427.98
m	3001.87	3529.86	289.08	6820.81

Questions :

(a) Calculer $E[X_1]$, $E[X_2]$, $E[X_3]$ et $E[S]$.
(b) Utiliser les m réalisations pour calculer des approximations de $E[X_1]$, $E[X_2]$, $E[X_3]$ et $E[S]$.
(c) Calculer $\widetilde{VaR}_\kappa\,(S)$, $\widetilde{C}_\kappa^{VaR}\,(X_1)$, $\widetilde{C}_\kappa^{VaR}\,(X_2)$ et $\widetilde{C}_\kappa^{VaR}\,(X_3)$, pour $\kappa = 0.9,\ 0.99,\ 0.999$.
(d) Calculer $\widetilde{TVaR}_\kappa\,(S)$, $\widetilde{C}_\kappa^{TVaR}\,(X_1)$, $\widetilde{C}_\kappa^{TVaR}\,(X_2)$ et $\widetilde{C}_\kappa^{TVaR}\,(X_3)$, pour $\kappa = 0.9,\ 0.99,\ 0.999$.

Code LaTeX : ex-51001.tex

2. Soit le vecteur de v.a. indépendantes $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ avec

$$\begin{aligned} X_1 &\sim Pareto\,(\alpha_P, \lambda) \\ X_2 &\sim Gamma\,(\alpha_G, \beta) \\ X_3 &\sim LN\,(\mu, \sigma) \end{aligned}$$

dont les paramètres sont fixés de telle sorte que $E\,[X_i] = 100$ et $Var\,(X_i) = 300^2$. On définit $S = X_1 + X_2 + X_3$.
On utilise le générateur de base du logiciel `R` (`set.seed(2019)`) pour générer $m = 100000$ (cent milles) réalisations $\underline{X}^{(j)} = \left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}\right)$ de $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$.
Note :

j	$X_1^{(j)}$	$X_2^{(j)}$	$X_3^{(j)}$	S
1	115.1618	26.9021	14.4800	156.5438
m	52.0086	370.2364	11.4204	433.6654

Questions :

(a) Calculer les paramètres pour les 3 lois à partir des informations fournies.
(b) Utiliser les m réalisations pour calculer des approximations de $E[X_1]$, $E[X_2]$, $E[X_3]$ et $E[S]$.
(c) Calculer $\widetilde{VaR}_\kappa\,(S)$, $\widetilde{C}_\kappa^{VaR}\,(X_1)$, $\widetilde{C}_\kappa^{VaR}\,(X_2)$ et $\widetilde{C}_\kappa^{VaR}\,(X_3)$, pour $\kappa = 0.9,\ 0.99,\ 0.999$.
(d) Calculer $\widetilde{TVaR}_\kappa\,(S)$, $\widetilde{C}_\kappa^{TVaR}\,(X_1)$, $\widetilde{C}_\kappa^{TVaR}\,(X_2)$ et $\widetilde{C}_\kappa^{TVaR}\,(X_3)$, pour $\kappa = 0.9,\ 0.99,\ 0.999$.

Code LaTeX : ex-51002.tex

1.6 Allocation du risque - volet 2

1.6.1 Exercices traditionnels

1. On considère deux v.a. X_1 et X_2 indépendantes avec $X_i \sim Exp(\beta_i)$ pour $i = 1, 2$ et $\beta_1 = 0.1$ et $\beta_2 = 0.2$. On définit $S = X_1 + X_2$.
   (a) Calculer $VaR_{0.99}(S)$ et $TVaR_{0.99}(S)$.
   (b) Calculer les parts allouées du capital total déterminé avec $TVaR_{0.99}(S)$ aux risques X_1 et X_2 selon la règle d'attribution basée sur la $TVaR$.

1.6.2 Exercices informatiques en atelier

1. Soient les v.a. indépendantes M_1, M_2, M_3 où $M_i \sim Pois(\lambda_i = i)$ $i = 1, 2, 3$. On définit $N = M_1 + M_2 + M_3$.
   Questions :
   (a) Calculer $VaR_\kappa(N)$, $\kappa = 0.9$, 0.99, 0.999.
   (b) Calculer $TVaR_\kappa(N)$, $\kappa = 0.9$, 0.99, 0.999.
   (c) Pour la mesure TVaR, utiliser la règle d'Euler, pour calculer les contributions des risques M_1, M_2 et M_3. (Note : cela revient à utiliser la méthode d'allocation basée sur la TVaR).
2. Soient les v.a. indépendantes M_1, M_2, M_3 où $M_i \sim BinNeg\left(r_i = i, q_i = \frac{i}{i+2}\right)$ $i = 1, 2, 3$, avec On définit $N = M_1 + M_2 + M_3$.
   Questions :
   (a) Calculer $VaR_\kappa(N)$, $\kappa = 0.9$, 0.99, 0.999.
   (b) Calculer $TVaR_\kappa(N)$, $\kappa = 0.9$, 0.99, 0.999.
   (c) Pour la mesure TVaR, utiliser la règle d'Euler, pour calculer les contributions des risques M_1, M_2 et M_3. (Note : cela revient à utiliser la méthode d'allocation basée sur la TVaR).

1.6.3 Exercices du chapitre 10 de [Marceau, 2013]

1. On considère un portefeuille d'une compagnie d'assurance constitué de 3 lignes d'affaires. Les coûts totaux pour la ligne d'affaires i sont représentés par la v.a. X_i où $X_i \sim Ga\left(2^{i-1}, \frac{1}{20000}\right)$ $(i = 1, 2, 3)$. Les v.a. X_1, X_2, X_3 sont indépendantes. Le montant total des coûts pour l'ensemble du portefeuille est défini par la v.a. $S = \sum_{i=1}^{3} X_i$. Le capital total requis pour l'ensemble du portefeuille est calculé à l'aide de la $TVaR_\kappa(S)$. Le bénéfice de diversification correspond à

$$B_\kappa^{TVaR}(S) = \sum_{i=1}^{3} TVaR_\kappa(X_i) - TVaR_\kappa(S).$$

   La contribution allouée à chaque ligne d'affaires est calculée selon la règle basée sur la $TVaR$.
   (a) Calculer $VaR_{0.995}(X_i)$ pour $i = 1, 2, 3$ et $VaR_{0.995}(S)$.
   (b) Calculer $TVaR_{0.995}(X_i)$ pour $i = 1, 2, 3$ et $TVaR_{0.995}(S)$.
   (c) Déterminer $B_\kappa^{TVaR}(S)$. Commenter.
   (d) En utilisant la règle d'allocation basée sur la $TVaR$, calculer la part (du capital total déterminé avec $TVaR_{0.95}(S)$) allouée à chaque ligne d'affaires. Est-ce que la part allouée à la ligne $i \geq TVaR_{0.995}(X_i)$ ou $\leq TVaR_{0.995}(X_i)$? Commenter.
2. On considère deux v.a. X_1 et X_2 indépendantes avec $X_i \sim Exp(\beta_i)$ pour $i = 1, 2$ et $\beta_1 = 0.1$ et $\beta_2 = 0.2$. On définit $S = X_1 + X_2$.
   (a) Calculer $VaR_{0.99}(S)$ et $TVaR_{0.99}(S)$.
   (b) Calculer les parts allouées du capital total déterminé avec $TVaR_{0.99}(S)$ aux risques X_1 et X_2 selon la règle d'attribution basée sur la $TVaR$.

2 Solutions

2.1 Exercices traditionnels

1. On a

$$\begin{aligned}
f_Y(0) &= P_Y(0) \\
&= P_M(P_B(0)) \\
&= \left(\frac{q}{1-(1-q)f_B(0)}\right)^r \\
&= \left(\frac{q}{1-(1-q)\times 0}\right)^r \\
&= q^r \\
&= 0.8705505632961241.
\end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
f_X(3000) &= \frac{\sum_{j=1}^{3}\left(1-q+\frac{(1-q)(r-1)j}{3}\right) f_B(j\times 1000) f_X((3-j)\times 1000)}{1-(1-q)f_B(0)} \\
&= \sum_{j=1}^{3}\left(1-0.5+\frac{(1-0.5)(0.2-1)j}{3}\right) f_B(j\times 1000) f_X((3-j)\times 1000) \\
&= \sum_{j=1}^{3}\left(0.5-0.4\frac{j}{3}\right) f_B(j\times 1000) f_X((3-j)\times 1000),
\end{aligned}$$

qui devient

$$\begin{aligned}
f_X(3000) &= \left(0.5-\frac{0.4}{3}\right) f_B(1000) f_X(2000) + \\
&\quad \left(0.5-\frac{0.4\times 2}{3}\right) f_B(2000) f_X(1000) + \\
&\quad \left(0.5-\frac{0.4\times 3}{3}\right) f_B(3000) f_X(0) \\
&= \left(0.5-\frac{0.4}{3}\right) 0.25\times 0.01795511 + \\
&\quad \left(0.5-\frac{0.4\times 2}{3}\right) 0.25\times 0.75\times \times 0.02176376 + \\
&\quad \left(0.5-\frac{0.4\times 3}{3}\right) 0.25\times 0.75^2\times 0.87055056 \\
&= 0.01484017.
\end{aligned}$$

Code LaTeX : sol-70001.tex

2. Le nombre total de sinistres pour la classe i est défini par la v.a. $N_{TOT}^{(i)}$ et $N_{TOT} = N_{TOT}^{(1)} + N_{TOT}^{(2)} + N_{TOT}^{(3)}$ est le nombre total de sinistres pour le portefeuille.
On a

$$\begin{aligned}
N_{TOT}^{(1)} &\sim Poisson\,(40\times 0.04)\,; \\
N_{TOT}^{(2)} &\sim BinNég\,(50\times 2, 0.97)\,; \\
N_{TOT}^{(3)} &\sim BinNég\,(30\times 3, 0.99)\,.
\end{aligned}$$

On commence par calculer

$$\begin{aligned}\Pr\left(N_{TOT}^{(1,2)} = k\right) &= \Pr\left(N_{TOT}^{(1)} + N_{TOT}^{(2)} = k\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \Pr\left(N_{TOT}^{(1)} = j\right) \Pr\left(N_{TOT}^{(2)} = k - j\right)\end{aligned}$$

pour $k = 0, 1, 2$. On obtient

$$\begin{aligned}\Pr\left(N_{TOT}^{(1,2)} = 0\right) &= 0.009600686; \\ \Pr\left(N_{TOT}^{(1,2)} = 1\right) &= 0.044163155; \\ \Pr\left(N_{TOT}^{(1,2)} = 2\right) &= 0.102007286.\end{aligned}$$

On poursuit en calculant

$$\begin{aligned}\Pr\left(N_{TOT} = k\right) &= \Pr\left(N_{TOT}^{(3)} + N_{TOT}^{(1,2)} = k\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \Pr\left(N_{TOT}^{(3)} = j\right) \Pr\left(N_{TOT}^{(1,2)} = k - j\right)\end{aligned}$$

pour $k = 0, 1, 2$. On obtient

$$\begin{aligned}\Pr\left(N_{TOT} = 0\right) &= 0.003885704; \\ \Pr\left(N_{TOT} = 1\right) &= 0.021371375; \\ \Pr\left(N_{TOT} = 2\right) &= 0.058963623; \\ \Pr\left(N_{TOT} = 2\right) &= \text{À venir...}\end{aligned}$$

Code LaTeX : sol-70013.tex

3. On a $S_{TOT} = X_1 + \cdots + X_{100}$. On déduit que S_{TOT} obéit à une loi binomiale négative composée où

$$S_{TOT} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{N_{TOT}} B'_j, & N_{TOT} > 0 \\ 0, & N_{TOT} = 0 \end{cases}$$

avec les hypothèses usuelle, $N_{TOT} = M_1 + \cdots + M_{100} \sim BinN\acute{e}g\,(r = 100 \times 0.2, \beta = 0.2)$ et $B' \sim B$. On utilise l'algorithme de Panjer pour calculer $f_{S^{TOT}}(k)$ pour $k = 0, 1, 2, 3$ dont on reproduit les valeurs ci-dessous :

0	0.02608405
1	0.03477874
2	0.04521236
3	0.05363654

Code LaTeX : sol-70014.tex

4. On définit $S_{TOT} = X_1 + \cdots + X_{100}$. On peut exprimer la v.a. S_{TOT} sous la forme

$$S_{TOT} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{N_{TOT}} B'_j, & N_{TOT} > 0 \\ 0, & N_{TOT} = 0 \end{cases}$$

avec les hypothèses usuelles. On sait que

$$N_{TOT} \sim Binom\,(100, q)$$

avec $q = 0.005$ et

$$B' \in \{100000, 200000\}$$

avec

$$\begin{aligned} f_{B'}(100000) &= \Pr(B' = 100000) = 0.6 \\ f_{B'}(200000) &= \Pr(B' = 200000) = 0.4 \end{aligned}$$

et

$$\Pr(B' = 0) = 0.$$

On applique directement l'algorithme de Panjer pour calculer $f_{S_{TOT}}(100000k){=}\Pr(S_{TOT} = 100000k),\ k = 0, 1, 2, 3, 4$. On obtient :

$$\begin{aligned} f_{S_{TOT}}(0) &= P_{N_{TOT}}(f_{B'}(0)) \\ &= (1 - q + qf_B(0))^{100} \\ &= (0.995)^{100} \\ &= 0.605770; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{S_{TOT}}(100000) &= \frac{\sum_{j=1}^{1}\left(-q + \frac{(n+1)q100000j}{100000}\right) f_{B'}(100000j) f_{S_{TOT}}(100000(1-k))}{1 - q + qf_{B'}(0)} \\ &= \frac{\left(-0.005 + \frac{101\times0.005\times100000}{100000}\right) f_{B'}(100000) f_{S_{TOT}}(0)}{1 - 0.005} \\ &= 0.182644; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{S_{TOT}}(200000) &= \frac{\sum_{j=1}^{2}\left(-q + \frac{(n+1)q100000j}{200000}\right) f_{B'}(100000j) f_{S_{TOT}}(100000(2-k))}{1 - q + qf_{B'}(0)} \\ &= \frac{\left(-0.005 + \frac{101\times0.005\times100000}{200000}\right) f_{B'}(100000) f_{S_{TOT}}(100000)}{1 - 0.005} \\ &\quad + \frac{\left(-0.005 + \frac{101\times0.005\times200000}{200000}\right) f_{B'}(200000) f_{S_{TOT}}(0)}{1 - 0.005} \\ &= 0.149022; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{S_{TOT}}(300000) &= \frac{\sum_{j=1}^{3}\left(-q + \frac{(n+1)q100000j}{300000}\right) f_{B'}(100000j) f_{S_{TOT}}(100000(3-k))}{1 - q + qf_{B'}(0)} \\ &= 0.039030; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{S_{TOT}}(400000) &= \frac{\sum_{j=1}^{4}\left(-q + \frac{(n+1)q100000j}{400000}\right) f_{B'}(100000j) f_{S_{TOT}}(100000(4-k))}{1 - q + qf_{B'}(0)} \\ &= 0.017681. \end{aligned}$$

Code LaTeX : sol-70015.tex

5. (a) On a

$$
\begin{aligned}
E[S] &= E\left[\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{n_j} X_{i,j}\right] \\
&= E\left[\sum_{i=1}^{n_1} X_{i,1}\right] + E\left[\sum_{i=1}^{n_2} X_{i,2}\right] \\
&= n_1 E[X_{i,1}] + n_2 E[X_{i,2}] \\
&= n_1 \lambda_1 E[B_1] + n_2 \lambda_2 E[B_2] \\
&= 120 \times 0.036 \times 25000 + 80 \times 0.054 \times 20000 \\
&= 194400.
\end{aligned}
$$

(b) On a

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_S(t) &= \mathcal{P}_{X_1}(t)^{n_1} \times \mathcal{P}_{X_2}(t)^{n_2} \\
&= \left(\exp\left\{\lambda_1\left(P_{B_1}(t)-1\right)\right\}\right)^{n_1} \times \left(\exp\left\{\lambda_2\left(P_{B_2}(t)-1\right)\right\}\right)^{n_2} \\
&= \exp\left\{\lambda_1 n_1\left(P_{B_1}(t)-1\right)\right\} \times \exp\left\{\lambda_2 n_2\left(P_{B_2}(t)-1\right)\right\} \\
&= \exp\left\{\lambda_1 n_1\left(P_{B_1}(t)-1\right) + \lambda_2 n_2\left(P_{B_2}(t)-1\right)\right\} \\
&= \exp\left\{(\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2)\left(\frac{\lambda_1 n_1}{\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2} P_{B_1}(t) + \frac{\lambda_2 n_2}{\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2} P_{B_2}(t) - 1\right)\right\} \\
&= \exp\left\{8.64\left(0.5 P_{B_1}(t) + 0.5 P_{B_2}(t) - 1\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

On conclut que $S \sim PComp(8.64, F_C)$, où $F_C = 0.5F_{B_1} + 0.5F_{B_2}$.

(c) On a

$$
\begin{aligned}
f_S(0) &= \mathcal{P}_S(0) \\
&= \exp\{8.64(0-1)\} \\
&= \exp\{-8.64\} \\
&= 0.0001768869.
\end{aligned}
$$

Ensuite, on applique l'algorithme de Panjer avec

$$
\begin{aligned}
\Pr(C = 10000) &= 0.5 f_{B_1}(10000) + 0.5 f_{B_2}(10000) \\
&= 0.5 \times 0.4 + 0.5 \times 0.5 \\
&= 0.45000; \\
\Pr(C = 20000) &= 0.5 f_{B_1}(20000) + 0.5 f_{B_2}(20000) \\
&= 0.5 \times 0.4 \times 0.6 + 0.5 \times 0.5^2 \\
&= 0.24500; \\
\Pr(C = 30000) &= 0.5 f_{B_1}(30000) + 0.5 f_{B_2}(30000) \\
&= 0.5 \times 0.4 \times 0.6^2 + 0.5 \times 0.5^3 \\
&= 0.13450.
\end{aligned}
$$

On obtient

$$
\begin{aligned}
f_S(10000) &= \frac{8.64}{1}\sum_{j=1}^{1} j f_C(10000j) f_S(10000(1-j)) \\
&= 8.64 \times 1 \times f_C(1) \times f_S(0) \\
&= 8.64 \times 1 \times 0.45000 \times 0.0001768869 \\
&= 0.0006877363;
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
f_S(20000) &= \frac{8.64}{2}\sum_{j=1}^{2} j f_C(10000j) f_S(10000(2-j)) \\
&= \frac{8.64}{2}\left(f_C(10000)\times f_S(10000) + 2\times f_C(20000)\times f_S(0)\right) \\
&= \frac{8.64}{2}\left(0.45\times 0.0006877363 + 2\times 0.245\times 0.0001768869\right) \\
&= 0.0017113935;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_S(30000) &= \frac{8.64}{3}\sum_{j=1}^{3} j f_C(10000j) f_S(10000(3-j)) \\
&= \frac{8.64}{3}\left(f_C(10000)\times f_S(20000) + 2\times f_C(20000)\times f_S(10000) + 3\times f_C(30000)\times f_S(0)\right) \\
&= \frac{8.64}{2}\left(0.45\times 0.0017113935 + 2\times 0.245\times 0.0006877363 + 3\times 0.1345\times 0.0001768869\right) \\
&= 0.0033940562.
\end{aligned}$$

Code LaTeX : sol-70016.tex

6. (a) Calculer les valeurs de $f_{\widetilde{B}}(1000k)$ pour $k = 1, 2, ..., 5$.
On a

$$\begin{aligned}
f_{\widetilde{B}}(1000k) &= F_B(1000k) - F_B(1000(k-1)),\ k = 1, 2, 3, 4 \\
f_{\widetilde{B}}(1000\times 5) &= 1 - F_B(4000)
\end{aligned}$$

On obtient les valeurs suivantes pour $f_{\widetilde{B}}(1000k)$:

k	$f_{\widetilde{B}}(1000k)$
0	0.00000000
1	0.63212056
2	0.19255220
3	0.08535235
4	0.04172844
5	0.04824644

(b) On obtient les valeurs suivantes de $f_{\widetilde{X}}(1000k)$:

k	$f_{\widetilde{X}}(1000k)$
0	0.850283
1	0.071664
2	0.032400
3	0.017898
4	0.010513
5	0.009401
6	0.003526
7	0.001863

(c) Les valeurs de $F_{\widetilde{X}}(1000k)$ sont

k	$F_{\widetilde{X}}(1000k)$
0	0.850283
1	0.921947
2	0.954347
3	0.972245
4	0.982758
5	0.992159
6	0.995684
7	0.997547

On déduit que $VaR_{0.99}\left(\widetilde{X}\right) = 5000$.

Code LaTeX : sol-70018.tex

7. (a) Pour $k = 0$, on déduit que

$$f_M(0) = (1-\theta) + \theta F_{M'}(0) = (1-\theta) + \theta f_{M'}(0)$$

et, pour $k = 1, 2, 3, ...$, on a

$$\begin{aligned} f_M(k) &= F_M(k) - F_M(k-1) \\ &= \theta\left(F_{M'}(k) - F_{M'}(k-1)\right) \\ &= \theta f_{M'}(k). \end{aligned}$$

Alors, on déduit

$$E[M] = \theta E[M'] = \theta \times \lambda = 0.05.$$

On a

$$E[X] = E[M] \times E[B]$$

avec

$$E[B] = \frac{1}{0.4} = 2.5.$$

Alors,

$$E[X] = E[M] \times E[B] = 0.05 \times 2.5 = 0.125.$$

(b) On a

$$\begin{aligned} P_M(t) &= E\left[t^M\right] \\ &= (1-\theta)t^0 + \theta P_{M'}(t) \\ &= (1-\theta) + \theta \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}. \end{aligned}$$

(c) Il faut appliquer l'algorithme de Panjer de façon adéquate. On identifie la fgm de X

$$\begin{aligned} M_X(t) &= P_M(M_B(t)) \\ &= (1-\theta) + \theta P_{M'}(M_B(t)). \end{aligned}$$

On définit une v.a X' telle que

$$M_X(t) = P_{M'}(M_B(t))$$

ce qui signifie X' obéit à une loi Poisson composée

$$X' = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M'} B_j, & M' > 0 \\ 0, & M' > 0 \end{cases}$$

avec les hypothèses usuelles. Cela implique que l'on peut aussi calculer $f_{X'}(k)$ avec l'algorithme de Panjer.

De l'expression de $M_X(t)$ on déduit

$$F_X(k) = (1-\theta) + \theta F_{X'}(k)$$

avec $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Pour $k = 0$, on déduit que

$$f_X(0) = (1-\theta) + \theta F_{X'}(0) = (1-\theta) + \theta f_{X'}(0)$$

et, pour $k = 1, 2, 3, ...$, on a

$$\begin{aligned} f_X(k) &= F_X(k) - F_X(k-1) \\ &= \theta\left(F_{X'}(k) - F_{X'}(k-1)\right) \\ &= \theta f_{X'}(k), \end{aligned}$$

où $f_{X'}(k)$ est calculée récursivement avec l'algorithme de Panjer. On obtient les valeurs suivantes de $f_{X'}(k)$:

k	$f_{X'}(k)$
0	0.36787944
1	0.14715178
2	0.11772142
3	0.09221511

On obtient les valeurs suivantes de $f_X(k)$:

k	$f_X(k)$
0	0.968393972
1	0.007357589
2	0.005886071
3	0.004610756

Code LaTeX : sol-70020.tex

8. Soit X_1, la v.a. qui représente les coûts en sinistre pour les bons conducteurs et X_2, la v.a. qui représente les coûts pour les mauvais conducteurs. Alors, on a

$$\begin{aligned}
f_{X_1}(0) &= \mathrm{e}^{-0.25} \\
&= 0.9048374; \\
f_{X_1}(1000) &= \frac{0.1}{1}\sum_{j=1}^{1} j f_B(1000j) f_{X_1}(1000(1-j)) \\
&= 0.1 \times \frac{1}{3} \times 0.9048374 \\
&= 0.03016125; \\
f_{X_1}(2000) &= \frac{0.1}{2}\sum_{j=1}^{2} j f_B(1000j) f_{X_1}(1000(2-j)) \\
&= \frac{0.1}{2}\left(f_B(1000) f_{X_1}(1000) + 2 f_B(2000) f_{X_1}(0)\right) \\
&= \frac{0.1}{2}\left(\frac{1}{3} \times 0.03016125 + 2 \times \frac{2}{9} \times 0.9048374\right) \\
&= 0.02061019; \\
f_{X_1}(3000) &= \frac{0.1}{3}\sum_{j=1}^{3} j f_B(1000j) f_{X_1}(1000(3-j)) \\
&= \frac{0.1}{3}\left(f_B(1000) f_{X_1}(2000) + 2 f_B(2000) f_{X_1}(1000) + 3 f_B(1000) f_{X_1}(0)\right) \\
&= \frac{0.1}{3}\left(\frac{1}{3} \times 0.02061019 + 2 \times \frac{2}{9} \times 0.03016125 + 3 \times \frac{4}{27} \times 0.9048374\right) \\
&= 0.02061019.
\end{aligned}$$

Ensuite, on obtient

$$\begin{aligned}
f_{X_2}(0) &= \mathrm{e}^{-0.25} \\
&= 0.778801; \\
f_{X_2}(1000) &= \frac{0.25}{1}\sum_{j=1}^{1} j f_B(1000j) f_{X_2}(1000(1-j)) \\
&= 0.25 \times \frac{1}{3} \times 0.0486750489 \\
&= 0.064900; \\
f_{X_2}(2000) &= \frac{0.25}{2}\sum_{j=1}^{2} j f_B(1000j) f_{X_2}(1000(2-j)) \\
&= \frac{0.25}{2}\left(f_B(1000) f_{X_2}(1000) + 2 f_B(2000) f_{X_2}(0)\right) \\
&= \frac{0.25}{2}\left(\frac{1}{3} \times 0.064900 + 2 \times \frac{2}{9} \times 0.0486750489\right) \\
&= 0.045971; \\
f_{X_2}(3000) &= \frac{0.25}{3}\sum_{j=1}^{3} j f_B(1000j) f_{X_2}(1000(3-j)) \\
&= \frac{0.25}{3}\left(f_B(1000) f_{X_2}(2000) + 2 f_B(2000) f_{X_2}(1000) + 3 f_B(1000) f_{X_2}(0)\right) \\
&= \frac{0.25}{3}\left(\frac{1}{3} \times 0.045971 + 2 \times \frac{2}{9} \times 0.064900 + 3 \times \frac{4}{27} \times 0.778801\right) \\
&= 0.032525.
\end{aligned}$$

Code LaTeX : sol-70022.tex

9. (a) On obtient

$$\begin{aligned}
E[Z] &= vE[W_1] + v^2 E[W_2] \\
&= 0.95 \times 2 \times 1 \times \frac{4000}{3-1} + 0.95^2 \times 2 \times 1 \times \frac{4000}{3-1} \\
&= 7410.0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(Z) &= v^2 Var(W_1) + v^4 Var(W_2) \\
&= \left(0.95^2 + 0.95^4\right) Var(W) \\
&= \left(0.95^2 + 0.95^4\right)\left(E[M]\, Var(B) + Var(M)\, E[B]^2\right) \\
&= \left(0.95^2 + 0.95^4\right)\left(2 \times 1 \times \left(\frac{4000}{3-1}\right)^2 \frac{3}{3-1} + 2 \times 1 \times (1+1)\left(\frac{4000}{3-1}\right)^2\right) \\
&= 48076175.0.
\end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
Z &= vW_1 + v^2 W_2 \\
&= Y_1 + Y_2.
\end{aligned}$$

On approxime Y_1 et Y_2 par $\widetilde{Y}_1$ et $\widetilde{Y}_2$. On définit

$$\widetilde{Z} = \widetilde{Y}_1 + \widetilde{Y}_2$$

Pour évaluer $f_{\widetilde{Y}_1}$ et $f_{\widetilde{Y}_2}$, on discrétise vB et v^2B (approximées par $\widetilde{C}$ et $\widetilde{D}$)
On a

$$\begin{aligned} f_{\widetilde{C}}(1000k) &= F_B\left(\frac{1000k}{v}\right) - F_B\left(\frac{1000(k-1)}{v}\right) \\ &= \left(\frac{v\lambda}{v\lambda+1000(k-1)}\right)^{\alpha} - \left(\frac{v\lambda}{v\lambda+1000k}\right)^{\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{\widetilde{D}}(1000k) &= F_B\left(\frac{1000k}{v^2}\right) - F_B\left(\frac{1000(k-1)}{v^2}\right) \\ &= \left(\frac{v^2\lambda}{v^2\lambda+1000(k-1)}\right)^{\alpha} - \left(\frac{v^2\lambda}{v^2\lambda+1000k}\right)^{\alpha} \end{aligned}$$

On calcule $f_{\widetilde{Y}_1}(1000k) = \Pr\left(\widetilde{Y}_1 = 1000k\right)$ et $f_{\widetilde{Y}_2}(1000k) = \Pr\left(\widetilde{Y}_2 = 1000k\right)$ avec Panjer
On convolue $f_{\widetilde{Y}_1}$ et $f_{\widetilde{Y}_2}$ pour avoir $f_{\widetilde{Z}}$
Rép : 0.0625 ; 0.04269752 ; 0.01351135

(c) On veut calculer le montant de capital économique à mettre de côté pour la compagnie d'assurance. Évaluer à l'aide de l'approximation le montant de capital économique en se basant sur la $VaR_{\kappa}(Z)$ pour $\kappa = 99\%$.
Rép : $VaR_{\kappa}(Z) = 42000$; $E\left[\widetilde{Z}\right] = 9673.619$; $CE = 42000 - 9673.619 = 32326.381 =$
Ou $CE = 42000 - 7410 = 34590.0 =$

Code LaTeX : sol-70025.tex

10. Solution :
   (a) Par identification.
   (b) On a
$$\underline{c}^T = \underline{a}^T \otimes \underline{B}$$
qui devient
$$\begin{aligned} (c_0, c_1, c_2, c_3, c_4) &= (a_0, a_1, a_2) \otimes \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} \\ &= (0.7, 0.2, 0.1) \otimes \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix} \\ &= (0.21, 0.41, 0.27, 0.09, 0.02). \end{aligned}$$
Rép : 0.21, 0.41, 0.27, 0.09, 0.02

11. Solution :
   (a) Pour $s \geq 0$ et $t > 0$, l'expression de la TLS de $S(s, s+t]$ est donnée par
$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{S(s,s+t]}(r) &= \Pi_{j=1}^{5} \mathcal{L}_{M_j(s,s+t]}(r) \\ &= \Pi_{j=1}^{5} \exp\left(\lambda_j t\left(\mathrm{e}^{1000jr} - 1\right)\right) \\ &= \exp\left(\sum_{j=1}^{5}\left(\lambda_j t\left(\mathrm{e}^{1000jr} - 1\right)\right)\right). \end{aligned}$$

On réarrange les termes

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{S(s,s+t]}(r) &= \exp\left(\sum_{j=1}^{5}\left(\lambda_j t\left(\mathrm{e}^{1000jr}-1\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(\lambda_N\left(\sum_{j=1}^{5} p_j \mathrm{e}^{1000jr}-1\right)\right) \\ &= \exp\left(\lambda_N\left(\mathcal{L}_B(r)-1\right)\right),\end{aligned}$$

où

$$\lambda_N = \sum_{j=1}^{5}\lambda_j$$

et

$$\mathcal{L}_B(r) = \sum_{j=1}^{5} p_j \mathrm{e}^{1000jr}.$$

correspondant à la TLS d'une v.a. discrète B avec $f_B(1000j) = p_j = \frac{\lambda_j}{\lambda_N}$, $j = 1, 2, ..., 5$. Puisque

$$\mathcal{L}_{S(s,s+t]}(r) = \exp\left(\lambda_N\left(\mathcal{L}_B(r)-1\right)\right)$$

on déduit que $S(s, s+t]$ obéit à une loi Poisson composée. Ainsi, $\underline{S}$ est un processus Poisson composé et le processus de comptage sous-jacent $\underline{N}$ est un processus de Poisson homogène avec une intensité λ_N.

(b) Valeurs de λ_N :

$$\lambda_N = 0.05 + ... + 0.01 = 0.15$$

Valeurs de f_B :

$$\begin{aligned}f_B(1000) &= \frac{0.05}{0.15} \\ f_B(2000) &= \frac{0.04}{0.15} \\ f_B(3000) &= \frac{0.03}{0.15} \\ f_B(4000) &= \frac{0.02}{0.15} \\ f_B(5000) &= \frac{0.01}{0.15}\end{aligned}$$

(c) On applique l'algorithme et on obtient les valeurs suivantes (dans l'ordre) de $f_{S(0.25,1.25]}(1000k)$, $k = 0, 1, 2, 3$: 0.86070 ; 0.043035 ; 0.035504 ; 0.027561

12. Solution :

(a) On a

$$\begin{aligned}\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)\times q \times \frac{1}{1-(1-q)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)} &= \beta_2 q \frac{1}{\beta_2+t-(1-q)\beta_2} \\ &= \beta_2 q\left(\frac{1}{\beta_2 q+t}\right) \\ &= \beta_2\frac{\beta_1}{\beta_2}\left(\frac{1}{\beta_2\frac{\beta_1}{\beta_2}+t}\right) = \left(\frac{\beta_1}{\beta_1+t}\right).\end{aligned}$$

(b) On a

$$\mathcal{L}_Y(t) = \left(\frac{\beta_1}{\beta_1+t}\right) = \left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)\left(\frac{q}{1-(1-q)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)}\right)$$

où $q = \frac{\beta_1}{\beta_2} \in (0,1)$.

On introduit la v.a. discrète J (avec support $\mathbb{N}^+$) avec

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_J(r) &= \left(\frac{q}{1-(1-q)r}\right) \\ &= \sum_{\kappa=0}^{\infty} \gamma_k r^k,\ r \in [0,1].\end{aligned}$$

On reconnaît la fgp de la loi binomiale négative de paramètres $\alpha_1 = 1$ et $q = \frac{\beta_1}{\beta_2}$

$$f_J(k) = \gamma_k = \frac{\Gamma(\alpha_1+k)}{\Gamma(\alpha_1)k!} q^{\alpha_1}(1-q)^k$$

pour $k \in \mathbb{N}$.

La TLS de Y devient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X_1}(t) &= \left(\frac{\beta_1}{\beta_1+t}\right) \\ &= \left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)\mathcal{P}_J\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right) \\ &= \left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)\sum_{\kappa=0}^{\infty}\gamma_k\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)^k,\end{aligned}$$

où $q = \frac{\beta_1}{\beta_2} \in (0,1)$.

On déduit l'expression suivante de F_Y [note : c'est une expression alternative] :

$$F_Y(x) = H(x;1,\beta_2) = \sum_{\kappa=0}^{\infty}\gamma_k H(x;1+k,\beta_2),\ x \geq 0.$$

2.2 Exercices informatiques

1. Solution : on applique directement l'algorithme de DePril. Reponses : 0.000977 ; 0.001953 ; 0.091571 ; 0.013021.
2. Solutions :
   (a) Par identification. La v.a. M obéit à une loi Poisson mélange avec une masse modifiée à 0.
   (b) On a

$$\begin{aligned}
E[M] &= \sum_{k=0}^{\infty} k f_M(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\left(0.6 \times 1_{\{k=0\}} + 0.3 f_Y(k) + 0.1 \times f_Z(k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k 0.6 \times 1_{\{k=0\}} + 0.3 \times \sum_{k=0}^{\infty} k f_Y(k) + 0.1 \times \sum_{k=0}^{\infty} k f_Z(k) \\
&= 0 + 0.3 E[Y] + 0.1 E[Z] \\
&= 0.3 \times 0.1 + 0.1 \times 0.2 = 0.05
\end{aligned}$$

   (c) On a

$$\begin{aligned}
E[N_n] &= \sum_{i=1}^{100} E[M_i] \\
&= 100 \times E[M] \ \text{(i.d.)} \\
&= 5
\end{aligned}$$

   (d) On applique directement l'algorithme de DePril.

   Reponses :
   (a) Rép : $f_M(k) = 0.6 \times 1_{\{k=0\}} + 0.3 f_Y(k) + 0.1 \times f_Z(k)$ où $Y \sim Pois(0.1)$ et $Z \sim Pois(0.2)$. La v.a. M obéit à une loi Poisson mélange avec une masse modifiée à 0.
   (b) Rép : 0.05.
   (c) Rép : 5
   (d) Rép : 0.008396 ; 0.167952 ; 0.020416 ; 0.000298
3. Solutions :
   (a) On applique la méthode "upper" et on utilise le produit de convolution.
   (b) On applique la méthode "lower" et on utilise le produit de convolution.

   Reponses :

	$VaR_\kappa\left(Y^{(u,h)}\right)$			$VaR_\kappa\left(Y^{(l,h)}\right)$		
κ	$h=1$	$h=0.1$	$h=0.01$	$h=0.01$	$h=0.1$	$h=1$
0.9	35	36.4	36.45	36.47	36.6	37
0.99	173	174.1	174.18	174.20	174.3	175
0.999	797	798.2	798.24	798.26	798.4	799
0.9999	3688	3688.8	3688.92	3688.94	3689.0	3690

4. (a) On a $f_{\widetilde{B}}(k) = F_B(k) - F_B(k-1)$, $k = 1, 2, ...500$ et $f_{\widetilde{B}}(0) = 0$. On calcule
      - $f_{\widetilde{B}}(10)$ =0.06841105
      - $f_{\widetilde{B}}(0) = 0$

   (b) On applique FFT ou l'algorithme de Panjer. On obtient
      - $f_{\widetilde{X}}(0) = P_M\left(f_{\widetilde{B}}(0)\right) = f_M(0)$ =0.19245009 ;
      - $f_{\widetilde{X}}(20)$ =0.01433501

   (c) On a
      - $F_{\widetilde{X}}(k) = \sum_{j=0}^{k} f_{\widetilde{X}}(j)$
      - $F_{\widetilde{X}}(50)$ =0.7810518

- $\pi_{\widetilde{X}}(k) = E\left[\max\left(\widetilde{X} - k; 0\right)\right] = \sum_{j=0}^{600} \max(j-k;0) f_{\widetilde{X}}(j)$
- $\pi_{\widetilde{X}}(50)$ =7.137878

(d) On effectue les opérations suivantes

- $VaR_\kappa(K) = F_K^{-1}(\kappa) = k_\kappa$
- $TVaR_\kappa(K) = \frac{1}{1-\kappa} \times \left\{E\left[K \times 1_{\{K>k_\kappa\}}\right] + k_\kappa \times (F_K(k_\kappa) - \kappa)\right\}$
- $E\left[K \times 1_{\{K>k_\kappa\}}\right] = \sum_{j=k_\kappa}^{\infty} j \times f_K(j) = \sum_{j=k_\kappa}^{\infty} (j - k_\kappa + k_\kappa) \times f_K(j)$
- $E\left[K \times 1_{\{K>k_\kappa\}}\right] = \sum_{j=k_\kappa}^{\infty} (j - k_\kappa) \times f_K(j) + \sum_{j=k_\kappa}^{\infty} k_\kappa \times f_K(j)$
- $E\left[K \times 1_{\{K>k_\kappa\}}\right] = \pi_K(k_\kappa) + k_\kappa \times (1 - F_K(k_\kappa))$
- $TVaR_\kappa(K) = \frac{1}{1-\kappa} \times \{\pi_K(k_\kappa) + k_\kappa \times (1 - F_K(k_\kappa)) + k_\kappa \times (F_K(k_\kappa) - \kappa)\}$
- $TVaR_\kappa(K) = k_\kappa + \frac{1}{1-\kappa}\pi_K(k_\kappa)$
- $TVaR_\kappa(K) = VaR_\kappa(K) + \frac{1}{1-\kappa}\pi_K(VaR_\kappa(K))$

(e) On obtient

- $\kappa = F_{\widetilde{X}}(50) \Rightarrow VaR_\kappa\left(\widetilde{X}\right) = 50 = k_\kappa$
- $TVaR_{F_{\widetilde{X}}(50)}(K) = 50 + \frac{1}{1-F_{\widetilde{X}}(50)}\pi_K(50)$
- $TVaR_{F_{\widetilde{X}}(50)}(K)$ =82.60076

5. Voir GitHub

(a) On applique `fft` et on obtient

$$f_S(10000) = 0.075976, f_S(20000) = 0.007988, f_S(30000) = 0.001742.$$

(b) On obtient

$$VaR_{0.95}(\widetilde{S}) = 21; VaR_{0.995}(\widetilde{S}) = 44.$$

6. GitHub

7. (a) On a

$$\begin{aligned} E[S] &= 1000E[X] \\ &= 1000 \times E[M]E[B] \\ &= 1000 \times r\frac{1-q}{q} \times \frac{\lambda}{\alpha - 1} \\ &= 1000 \times 0.01 \times \frac{3}{1} \times \frac{15000}{2.5-1} \\ &= 300000. \end{aligned}$$

(b) Voir GitHub. On obtient

$$\begin{aligned} E\left[\widetilde{S}\right] &= 315410.6; \\ E\left[\max\left(\widetilde{S} - 2000000; 0\right)\right] &= 256.3232; \\ F_{\widetilde{S}}(500000) &= 0.8881155; \\ F_{\widetilde{S}}(1000000) &= 0.9965815; \\ F_{\widetilde{S}}(2000000) &= 0.9997574. \end{aligned}$$

8. Voir GitHub

(a) Pour $s \geq 0$ et $t > 0$, l'expression de la TLS de $S(s, s+t]$ est donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{S(s,s+t]}(r) &= \Pi_{j=1}^{5} \mathcal{L}_{X_j(s,s+t]}(r) \\ &= \Pi_{j=1}^{5} \mathcal{P}_{M_j(s,s+t]}\left(\mathcal{L}_{B_j}(r)\right) \\ &= \Pi_{j=1}^{5} \exp\left(\lambda_j t \left(\mathcal{L}_{B_j}(r) - 1\right)\right).\end{aligned}$$

On réarrange les termes

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{S(s,s+t]}(r) &= \exp\left(\sum_{j=1}^{5}\left(\lambda_j t\left(\mathcal{L}_{B_j}(r) - 1\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(\lambda_N t\left(\sum_{j=1}^{5} p_j \mathcal{L}_{B_j}(r) - 1\right)\right) \\ &= \exp\left(\lambda_N t\left(\mathcal{L}_C(r) - 1\right)\right),\end{aligned}$$

où

$$\lambda_N = \sum_{j=1}^{5} \lambda_j$$

et

$$\mathcal{L}_C(r) = \sum_{j=1}^{5} p_j \mathcal{L}_{B_j}(r).$$

correspondant à la TLS d'une v.a. continue C dont la fonction de répartition est

$$F_C(x) = \sum_{j=1}^{5} p_j H\left(x; k, \frac{1}{1000}\right), \; x \geq 0.$$

Puisque

$$\mathcal{L}_{S(s,s+t]}(r) = \exp\left(\lambda_N t\left(\mathcal{L}_C(r) - 1\right)\right)$$

on déduit que $S(s, s+t]$ obéit à une loi Poisson composée. Ainsi, $\underline{S}$ est un processus Poisson composé et le processus de comptage sous-jacent $\underline{N}$ est un processus de Poisson homogène avec une intensité λ_N. La distribution de C est appelée un mélange d'Erlang.

(b) Valeurs de λ_N :

$$\lambda_N = 0.5 + ... + 0.1 = 1.5$$

Valeurs de p_j :

$$\begin{aligned}p_1 &= \frac{0.5}{1.5} \\ p_2 &= \frac{0.4}{1.5} \\ p_3 &= \frac{0.3}{1.5} \\ p_4 &= \frac{0.2}{1.5} \\ p_5 &= \frac{0.1}{1.5}\end{aligned}$$

(c) On obtient $F_C(2000) = 0.5338451$ et $F_C(8000) = 0.9840394$.

(d) On fixe $s \geq 0$ et $t > 0$. La TLS de $S(s, s+t]$ est

$$\mathcal{L}_{S(s,s+t]}(r) = \exp\left(\lambda_N t \left(\mathcal{L}_C(r) - 1\right)\right).$$

Soit une v.a. discrète J avec une fonction de masse de probabilité

$$\Pr(J = j) = p_j,\ j = 1, 2, ..., 5,$$

et une fgp

$$P_J(r) = \sum_{j=1}^{5} p_j r^j,\ r \in [0,1].$$

Alors, on peut réécrire $\mathcal{L}_C(r)$ sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}_C(r) = \mathcal{P}_C\left(\frac{\beta}{\beta + r}\right) = \mathcal{P}_J\left(\mathcal{L}_D(r)\right)$$

où

$$\mathcal{L}_D(r) = \frac{\beta}{\beta + r} \in [0,1],\ \text{pour } r \geq 0,$$

est la TLS d'une loi exponentielle (avec $\beta = \frac{1}{1000}$).
Avec ces nouvelles informations, on présente

$$\mathcal{L}_{S(s,s+t]}(r) = \exp\left(\lambda_N t \left(\mathcal{L}_C(r) - 1\right)\right).$$

sous une nouvelle représentation

$$\mathcal{L}_{S(s,s+t]}(r) = \exp\left(\lambda_N t \left(\mathcal{P}_J\left(\mathcal{L}_D(r)\right) - 1\right)\right).$$

qui est commode pour des fins de calculs.
Pour simplifier l'écriture, on pose $\frac{\beta}{\beta+r} = r' \in [0,1]$. Or, on observe que

$$\exp\left(\lambda_N \left(\mathcal{P}_J(r') - 1\right)\right)$$

est la fgp de N dont l'argument est la fgp de J, ce qui implique que

$$\exp\left(\lambda_N t \left(\mathcal{P}_J(r') - 1\right)\right)$$

est aussi une fgp. Par la définition d'une fgp, on sait que

$$\exp\left(\lambda_N t \left(\mathcal{P}_J(r') - 1\right)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{(s,s+t]}(k) (r')^k$$

et on définit une v.a. K dont la fgp est

$$\exp\left(\lambda_N t \left(\mathcal{P}_J(r') - 1\right)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{(s,s+t]}(k) (r')^k = \mathcal{P}_K(r').$$

Puisque

$$\mathcal{P}_K(r') = \exp\left(\lambda_N \left(\mathcal{P}_J(r') - 1\right)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{(s,s+t]}(k) (r')^k,$$

on utilise l'algorithme de Panjer (ou la FFT) pour calculer les valeurs de $\gamma_{(s,s+t]}(k)$.
Ensuite, la TLS se définit aussi à l'aide de la fgp de K de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{S(s,s+t]}(r) &= \mathcal{P}_K\left(\frac{\beta}{\beta + r}\right) = \mathcal{P}_K\left(\mathcal{L}_D(r)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{(s,s+t]}(k) \left(\left(\frac{\beta}{\beta + r}\right)^k\right).\end{aligned}$$

On sait que

$$\left(\frac{\beta}{\beta+r}\right)^{k}$$

est la TLS d'une loi Erlang de paramètres k et β.
Par identification, on déduit de

$$\mathcal{L}_{S(s,s+t]}(r)=\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_{(s,s+t]}(k)\left(\left(\frac{\beta}{\beta+r}\right)^{k}\right).$$

que l'expression de $F_{S(s,s+t]}$ est

$$F_{S(s,s+t]}(x)=\gamma_{(s,s+t]}(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{(s,s+t]}(k)\,H\left(x;k,\frac{1}{1000}\right),$$

où $\gamma_{(s,s+t]}(k)$ sont des probabilités telles que $\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_{(s,s+t]}(k)=1$. Les probabilités sont calculées avec l'algorithme de Panjer. [Note : les probabilités peuvent aussi avec la FFT].

(e) On applique l'algorithme et on obtient les valeurs suivantes (dans l'ordre) de $\gamma_{S(0.25,1.25]}(1000k)$, $k=0,1,2,3$: 0.2231302 0.1115651 0.1171433 0.1162136

(f) On utilise l'approximation suivante :

$$\widetilde{F}_{S(s,s+t]}(x)=\gamma_{(s,s+t]}(0)+\sum_{k=1}^{k_0}\gamma_{(s,s+t]}(k)\,H\left(x;k,\frac{1}{1000}\right).$$

Les valeurs de $\gamma_{(0.25,1.25]}(k)$, $k=0,1,2,3,...,k_0$ ont été calculées avec l'algorithme de Panjer.
On a vérifier que $\sum_{k=0}^{k_0}\gamma_{(s,s+t]}(k)=1$.
On utilise la relation en (4) pour évaluer approximativement $F_{S(s,s+t]}(10000)$ par $\widetilde{F}_{S(s,s+t]}(10000)$ avec $k_0=100$.

Les valeurs de $\widetilde{F}_{S(s,s+t]}(x)$, pour $x=0$, 2000, 8000, 20000, sont respectivement les suivantes : 0.2231302 ; 0.4482519 ; 0.8781012 ; 0.9979141.

9. Voir GitHub.

(a) Pour $s\geq 0$ et $t>0$, l'expression de la TLS de $S(s,s+t]$ est donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{S(s,s+t]}(r) &= \Pi_{j=1}^{5}\mathcal{L}_{X_j(s,s+t]}(r)\\ &= \Pi_{j=1}^{5}\mathcal{P}_{M_j(s,s+t]}\left(\mathcal{L}_{B_j}(r)\right)\\ &= \Pi_{j=1}^{5}\exp\left(\lambda_j t\left(\mathcal{L}_{B_j}(r)-1\right)\right).\end{aligned}$$

On réarrange les termes

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{S(s,s+t]}(r) &= \exp\left(\sum_{j=1}^{5}\left(\lambda_j t\left(\mathcal{L}_{B_j}(r)-1\right)\right)\right)\\ &= \exp\left(\lambda_N t\left(\sum_{j=1}^{5}p_j\mathcal{L}_{B_j}(r)-1\right)\right)\\ &= \exp\left(\lambda_N t\left(\mathcal{L}_C(r)-1\right)\right),\end{aligned}$$

où

$$\lambda_N=\sum_{j=1}^{5}\lambda_j$$

et

$$\mathcal{L}_C(r) = \sum_{j=1}^{5} p_j \mathcal{L}_{B_j}(r).$$

correspondant à la TLS d'une v.a. discrète C dont la fonction de masse de probabilité est

$$f_C(100k) = \sum_{j=1}^{5} p_j f_B(100k), \; k \in \mathbb{N}.$$

Puisque

$$\mathcal{L}_{S(s,s+t]}(r) = \exp(\lambda_N t(\mathcal{L}_C(r) - 1))$$

on déduit que $S(s, s+t]$ obéit à une loi Poisson composée. Ainsi, $\underline{S}$ est un processus Poisson composé et le processus de comptage sous-jacent $\underline{N}$ est un processus de Poisson homogène avec une intensité λ_N.

(b) Valeurs de λ_N :

$$\lambda_N = 0.5 + ... + 0.1 = 1.5$$

Valeurs de p_j :

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{0.5}{1.5} \\ p_2 &= \frac{0.4}{1.5} \\ p_3 &= \frac{0.3}{1.5} \\ p_4 &= \frac{0.2}{1.5} \\ p_5 &= \frac{0.1}{1.5} \end{aligned}$$

(c) On utilise la formule en (b). Valeurs de $f_C(100k)$, $k = 20$ et 80 : 0.0092426985 ; 0.0002596987

(d) Calculer $E[C]$, $E\left[N_{(2.2,3.8]}\right]$ et $E\left[S_{(2.2,3.8]}\right]$. On utilise les définitions.
On a

$$E[C] = \sum_{k=0}^{200} 100k f_C(100k) = 1011.594$$

Puisque $N_{(2.2,3.8]} \sim Pois(\lambda_N 1.6)$, on obtient

$$E\left[N_{(2.2,3.8]}\right] = (3.8 - 2.2)\lambda_N = 2.4.$$

On sait que $S_{(2.2,3.8]} \sim PoisComp(\lambda_N 1.6, F_C)$. Alors, on a

$$E\left[S_{(2.2,3.8]}\right] = (3.8 - 2.2)\lambda_N \times E[C] = 2427.826.$$

(e) On applique l'algorithme de Panjer pour calculer $f_{S_{(2.2,3.8]}}(100k)$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 4 \times 200$.
Valeurs de $f_{S_{(2.2,3.8]}}(100k)$, $k = 0, 20, 80$: 0.090717953 ; 0.017228417 ; 0.001460364

(f) On utilise la définition

$$F_{S_{(2.2,3.8]}}(100k) = \sum_{j=0}^{k} f_{S_{(2.2,3.8]}}(100j)$$

Valeurs de $F_{S_{(2.2,3.8]}}(100k)$, $k = 0, 20, 80, 100$: 0.09071795 ; 0.58543432 ; 0.95166556 ; 0.97222405

(g) On ulise la définition

$$\pi_{(2.2,3.8]}(100k) = \sum_{j=0}^{200\times 4} E\left[\max(100j - 100k; 0)\right] f_{S_{(2.2,3.8]}}(100j),$$

Valeurs de $\pi_{(2.2,3.8]}(100k)$, $k = 0, 20, 80, 200$: 2421.077194 ; 1130.918961 ; 159.594638 ; 3.694383

(h) On a

$$TVaR_\kappa\left(S_{(2.2,3.8]}\right) = VaR_\kappa\left(S_{(2.2,3.8]}\right) + \frac{1}{1-\kappa}\pi_{(2.2,3.8]}\left(VaR_\kappa\left(S_{(2.2,3.8]}\right)\right).$$

Comme $\kappa = F_{S_{(2.2,3.8]}}(100k)$, $k = 0, 20, 80, 100$, on a

$$VaR_\kappa\left(S_{(2.2,3.8]}\right) = 100k,$$

et on utilise la relation suivante :

$$TVaR_\kappa\left(S_{(2.2,3.8]}\right) = 100k + \frac{1}{1 - F_{S_{(2.2,3.8]}}(100k)}\pi_{(2.2,3.8]}(100k)$$

Valeurs de $TVaR_\kappa\left(S_{(2.2,3.8]}\right)$, $\kappa = F_{S_{(2.2,3.8]}}(100k)$, $k = 0, 20, 80, 100$: 2662.625 ; 4727.961 ; 11301.883 ; 13253.565

10. Voir GitHub.

(a) La TLS de la v.a. X est

$$\mathcal{L}_X(t) = \alpha\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + t}\right) + (1-\alpha)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right). \tag{11}$$

Dans (11), on remplace

$$\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + t}\right)$$

par

$$\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + t}\right) = \mathcal{P}_J\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right) = \mathcal{P}_J\left(\mathcal{L}_C(t)\right),$$

où

$$\mathcal{L}_C(t) = \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right).$$

Alors, (11) devient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(t) &= \alpha\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + t}\right) + (1-\alpha)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right) \\ &= \alpha\mathcal{P}_J\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right) + (1-\alpha)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right). \end{aligned} \tag{12}$$

On définit une v.a. discrète K sur le support $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, ...\}$ dont la f.g.p. est

$$\mathcal{P}_K(r) = \alpha\mathcal{P}_J(r) + (1-\alpha) \times r, \tag{13}$$

pour $r \in [0, 1]$. [Note : $\Pr(K = 0) = 0$.]
On a

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_K(r) &= \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \times r^k \\ &= \alpha\mathcal{P}_J(r) + (1-\alpha) \times r \\ &= \alpha\sum_{k=0}^{\infty} f_J(k) \times r^k + (1-\alpha) \times r \end{aligned} \tag{14}$$

où

$$f_J(k) = \begin{cases} 0 & , \quad k=0 \\ q(1-q)^{k-1} & , \quad k \in \mathbb{N}^+ \end{cases} . \tag{15}$$

En combinant (14) et (13), on déduit que

$$f_K(k) = \gamma_k = \begin{cases} 0 & , \quad k=0 \\ \alpha \times q + (1-\alpha) & , \quad k=1 \\ \alpha \times q(1-q)^{k-1} & , \quad k=2,3,... \end{cases} .$$

Avec (12) et (13), et puisque $\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right) \in [0,1]$ pour $t \geq 0$, on conclut que

$$\mathcal{L}_X(t) = \mathcal{P}_K\left(\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)\right)$$

Clairement,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k &= \alpha \sum_{k=1}^{\infty} f_J(k) + (1-\alpha) \\ &= \alpha \times 1 + (1-\alpha) = 1. \end{aligned}$$

(b) On définit

$$S = X_1 + ... + X_n.$$

i. La TLS de la v.a. S_n est

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{S_n}(t) &= \prod_{i=1}^{n} \mathcal{L}_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}_{K_i}\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right) \qquad (16) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}_K(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}) \qquad (17) \\ &= \left(\mathcal{P}_K\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)\right)^n . \qquad (18) \end{aligned}$$

On définit la fgp d'une v.a. discrète M_n par

$$\mathcal{P}_{M_n}(r) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}_{K_i}(r) = (\mathcal{P}_K(r))^n \tag{19}$$

pour $r \in [0,1]$ [Note : $\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right) \in [0,1]$, pour $t \geq 0$]. D'après (19), la v.a. M_n est la somme des v.a. i.i.d. K_1, ..., K_n, dont le support est $\mathbb{N}^+ = \{1,2,...\}$. Ainsi, le support de la v.a. M_n est $\{n, n+1, n+2, ...\}$ et

$$\mathcal{P}_M(r) = \sum_{k=n}^{\infty} \eta_k r^k$$

pour $r \in [0,1]$, $\eta_k = \Pr(M_n = k) \in [0,1]$, et $\sum_{k=n}^{\infty} \eta_k = 1$.
Avec (19), (18) devient

$$\mathcal{L}_{S_n}(t) = \mathcal{P}_{M_n}\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)$$

pour $t > 0$, où

$$\mathcal{P}_M(r) = \sum_{k=n}^{\infty} \eta_k r^k$$

pour $r \in [0,1]$, $\eta_k \in [0,1]$, et $\sum_{k=n}^{\infty} \eta_k = 1$.

ii. **Indiquer** l'expression de $F_{S_n}(x)$ (somme infinie de termes) : La TLS de la v.a. S_n est

$$\mathcal{L}_{S_n}(t) = \mathcal{P}_{M_n}\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right) = \sum_{k=n}^{\infty} \eta_\kappa \left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)^n, \tag{20}$$

où

$$\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)^n$$

est la TLS de la loi Erlang (n, β_2).
De (20), on déduit que

$$F_{S_n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \eta_k H(x; k, \beta_2).$$

Algorithme : L'algorithme est défini une somme de v.a. i.i.d. sont le support est $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$. On définit les v.a. I_1, ..., I_n avec

$$I_i = K_i - 1$$

et

$$\Pr(I_i = k) = \Pr(K_i = k+1)$$

pour $k \in \mathbb{N}$. On définit

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} I_i = \sum_{i=1}^{n} (K_i - 1) = M_n - n$$

avec

$$\Pr(M_n = j) = \Pr(L_n = j - n)$$

pour $j \in \{n, n+1, ...\}$.
Les valeurs de $f_{J_n}(k)$ sont calculées directement avec l'algorithme de DePril.

iii. Hypothèses : $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = \frac{5}{8}$ tel que $E[X] = 7$. On fixe $n = 20$.
Calculer $E[S_n]$:

$$E[S_n] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = nE[X] \text{ (i.d.)}$$

Calculer $E[S_n]$ pour $n = 20$: 140
Valeur de q : $q = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{1}{5}$,
Valeurs de γ_k $(k = 1, 2, ..., 5)$: 0.5000 ; 0.1000 ; 0.0800 ; 0.0640 ; 0.0512
Valeurs η_k $(k = 50, 60, 70)$: 1.470448e-02 ; 2.188240e-02 ; 2.188623e-02
Valeurs de $F_S(x)$, pour x = 100, 140, 200, 300 : 0.1533268 ; 0.5375217 ; 0.9231409 ; 0.9992555.

2.3 Exercices en atelier

Les solutions à ces exercices seront présentées en atelier.

2.4 Distributions de fréquence et FFT

1. **Solution à l'exercice 1.**

   (a) Espérance de $M = K_1 + K_2$ (somme de v.a. indépendantes) :

   $$E[M] = E[K_1] + E[K_2].$$

   (b) Variance de $M = K_1 + K_2$ (somme de v.a. indépendantes) :

   $$Var(M) = Var(K_1) + Var(K_2).$$

   (c) F.g.p. de $M = K_1 + K_2$ (somme de v.a. indépendantes) :

   $$\mathcal{P}_M(S) = \mathcal{P}_{K_1}(S)\mathcal{P}_{K_2}(S)$$

   (d) Expression de $\Pr(M = k)$ où $M = K_1 + K_2$ (somme de v.a. indépendantes) :

   $$\Pr(M = k) = f_M(k) = \sum_{j=0}^{k} f_{K_1}(j) f_{K_2}(k-j), \quad k \in \mathbb{N}.$$

   (e) Valeurs obtenues de $f_M(k)$, $k \in \{0, 1, \ldots, 5\}$:

0	1	2	3	4	5
0.111565	0.209185	0.211799	0.159830	0.105256	0.066663

2. **Solution à l'exercice 2.**

   (a) Espérances $E[M]$, $E[B]$ et $E[X]$: 3.0 ; 100.5 ; 301.5

   (b) Variances $Var(M)$, $Var(B)$ et $Var(X)$: 7.500 ; 8964.892 ; 102646.551

   (c) Algorithme de Panjer et produit de convolution pour calculer les valeurs de $f_X(k)$, $k \in \mathbb{N}$:

   - Soit $X = Y_1 + Y_2$ où

   $$\mathcal{P}_{Y_1}(s) = \mathcal{P}_{K_1}(\mathcal{P}_B(s)) \text{ et } \mathcal{P}_{Y_2}(s) = \mathcal{P}_{K_2}(\mathcal{P}_B(s))$$

   - Étape 1 : On utilise l'algorithme de Panjer pour calculer les valeurs de $f_{Y_1}(k)$, $k \in \mathbb{N}$.
   - Étape 2 : On utilise l'algorithme de Panjer pour calculer les valeurs de $f_{Y_2}(k)$, $k \in \mathbb{N}$.
   - Étape 3 : On utilise le produit de convolution pour calculer $f_X(k)$ avec

   $$f_X(k) = \sum_{j=0} f_{K_1}(j) f_{K_2}(k-j), \quad k \in \mathbb{N}.$$

   Valeurs de $f_X(k)$, $k \in \{0, 100, \ldots, 500\}$:

0	100	200	300	400	500
0.111565	0.002127	0.001698	0.001246	0.000886	0.000626

   (d) `fft` pour calculer les valeurs de $f_X(k)$, $k \in \mathbb{N}$:

   - Étape 1 (Construction) : $\widetilde{\mathbf{f}}_B = \texttt{fft}(\mathbf{f}_B)$.
   - Étape 2 (Agrégation) : $\widetilde{\mathbf{f}}_X = \mathcal{P}_M(\widetilde{\mathbf{f}}_B)$.
   - Étape 3 (Inversion) : $\mathbf{f}_X = \texttt{fft}^{-1}(\widetilde{\mathbf{f}}_X)$.

   Valeurs de $f_X(k)$, $k \in \{0, 100, \ldots, 500\}$:

0	100	200	300	400	500
0.111565	0.002142	0.001700	0.001241	0.000880	0.000620

(e) $VaR_\kappa(X)$, $\kappa \in \{0.5, 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999\}$:

κ	0.5000	0.9000	0.9900	0.9990	0.9999
$VaR_\kappa(X)$	209.0000	699.0000	1490.0000	2349.0000	3248.0000

3. Solution à l'exercice 3.
   (a) Espérances $E[M]$, $E[B]$ et $E[X]$: 3.0 ; 100.5 ; 301.5
   (b) Variances $Var(M)$, $Var(B)$ et $Var(X)$: 7.500 ; 8964.892 ; 102646.551
   (c) Utilisez `fft` pour calculer les valeurs de $f_X(k)$, $k \in \mathbb{N}$.
   - Étape 1 (Construction) : $\widetilde{\mathbf{f}}_B = \texttt{fft}(\mathbf{f}_B)$.
   - Étape 2 (Agrégation) : $\widetilde{\mathbf{f}}_X = \mathcal{P}_M(\widetilde{\mathbf{f}}_B)$.
   - Étape 3 (Inversion) : $\mathbf{f}_X = \texttt{fft}^{-1}(\widetilde{\mathbf{f}}_X)$.

   Valeurs de $f_X(k)$, $k \in \{0, 100, \ldots, 500\}$:

0	100	200	300	400	500
0.135335	0.001999	0.001582	0.001191	0.000876	0.000637

   (d) $VaR_\kappa(X)$, $\kappa \in \{0.5, 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999\}$:

κ	0.5000	0.9000	0.9900	0.9990	0.9999
$VaR_\kappa(X)$	209.0000	713.0000	1455.0000	2242.0000	3077.0000

2.5 Allocation du risque - volet 1

2.5.1 Exercices traditionnels

1. (a) On a

$$\sqrt{Var(X+a)} = \sqrt{Var(X)} \tag{21}$$

Donc $Var(X)$ ne satisfait pas à la proprité d'invariance à la translation.

(b) D'abord, on a que $\Pr(X_1 \leq X_2) = 1$. La racine carrée de la variance de X_1 est

$$\begin{aligned}\sqrt{Var(X_1)} &= \sqrt{\frac{(1-0)^2}{12}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{12}}\end{aligned}$$

Pour la racine carrée de la variance de X_2, on a

$$\begin{aligned}\sqrt{Var(X_2)} &= \sqrt{0} \\ &= 0\end{aligned}$$

La mesure $\sqrt{Var(X_1)}$ ne satisfait pas à la mesure de monotonicité puisque

$$Var(X_1) \nleq Var(X_2)$$

Code LaTeX : sol-50001.tex

2. (a) Montrer que la fonction $\Pi_A(S)$ est homogène. On a

$$\begin{aligned}\Pi_A\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i X_i\right) &= E\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i X_i\right) + \sqrt{Var\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i X_i\right)}\Phi^{-1}(\kappa) \\ &= \lambda E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) + \lambda\sqrt{Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}\Phi^{-1}(\kappa) \\ &= \lambda \Pi_A\left(S\right)\end{aligned}$$

La fonction est donc homogène.
Utiliser le théorème d'Euler pour identifier la contribution $C^A(X_i)$. On a

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\Pi_A\left(\lambda_1 X_1 + ... + \lambda_i X_i + ... + \lambda_n X_n\right) = \frac{\partial}{\partial\lambda_i}E\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i X_i\right) + \frac{\partial}{\partial\lambda_i}\sqrt{Var\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i X_i\right)}\Phi^{-1}(\kappa) \\ &= E(X_i) + \frac{\partial}{\partial\lambda_i}\sqrt{\sum_{l=1}^{n}\lambda_l^2 Var(X_l) + \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1, l\neq k}^{n}\lambda_l\lambda_k Cov\left(X_l, X_k\right)}\Phi^{-1}(\kappa) \\ &= \frac{\frac{1}{2}\left(2\lambda_i Var(X_i) + \sum_{k=1,k\neq i}^{n}\lambda_k Cov\left(X_i, X_k\right) + \sum_{k=1,k\neq i}^{n}\lambda_k Cov\left(X_k, X_i\right)\right)}{\sqrt{\sum_{l=1}^{n}\lambda_l^2 Var(X_l) + \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1,l\neq k}^{n}\lambda_l\lambda_k Cov\left(X_l, X_k\right)}}\Phi^{-1}(\kappa) + E(X_i)\end{aligned}$$

On pose $\lambda_1 = ... = \lambda_i = ... = \lambda_n = 1$. On a

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\Pi_A\left(\lambda_1X_1+...+\lambda_iX_i+...+\lambda_nX_n\right)\Big|_{\lambda_1=...=\lambda_i=...=\lambda_n=1}\\
&=\frac{2Var(X_i)+2\sum_{k=1,k\neq l}^{n}Cov\left(X_i,X_k\right)}{\sqrt{\sum_{l=1}^{n}Var(X_l)+\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1,l\neq k}^{n}Cov\left(X_l,X_k\right)}}\Phi^{-1}(\kappa)+E(X_i)\\
&=\frac{Cov\left(X_i,\sum_{l=1}^{n}X_l\right)}{\sqrt{Var\left(\sum_{l=1}^{n}X_l\right)}}\Phi^{-1}(\kappa)+E(X_i)\\
&=C^A(X_i)
\end{aligned}
$$

(b) Montrer que la fonction $\Pi_B(S)$ est homogène. La démarche est similaire à (a). On a

$$\Pi_B\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_iX_i\right)=\lambda\Pi_B\left(S\right)$$

Utiliser le théorème d'Euler pour identifier la contribution $C^B(X_i)$. On a

$$C^B(X_i)=E(X_i)+\frac{Cov\left(X_i,\sum_{l=1}^{n}X_l\right)}{\sqrt{Var\left(\sum_{l=1}^{n}X_l\right)}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1-\kappa}e^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}}$$

Code LaTeX : sol-50002.tex

3. (a) On remarque que ce sont des fonctions de répartition de lois exponentielles. Il s'ensuit que,

$X_1\sim Exp(1/10), X_2\sim Exp(1/20)$ et $X_3\sim Exp(1/40)$ avec probabilité 0.75

et que

$X_1\sim Exp(1/40), X_2\sim Exp(1/80)$ et $X_3\sim Exp(1/10)$ avec probabilité 0.25

(b) Calculer les covariances entre les X_i. On commencer par calculer les espérances de X_i. On a,

$$
\begin{aligned}
E(X_1)&=0.75\times10+0.25\times40=17.5\\
E(X_2)&=0.75\times20+0.25\times80=35\\
E(X_3)&=0.75\times40+0.25\times10=32.5
\end{aligned}
$$

On poursuit avec les covariances. On a,

$$
\begin{aligned}
Cov(X_1,X_2)&=(0.75\times10\times20+0.25\times40\times80)-E(X_1)E(X_2)\\
&=337.5;\\
Cov(X_1,X_3)&=(0.75\times10\times40+0.25\times40\times10)-E(X_1)E(X_3)\\
&=-168.75;\\
Cov(X_2,X_3)&=(0.75\times20\times40+0.25\times80\times10)-E(X_2)E(X_3)\\
&=-337.5;
\end{aligned}
$$

(c) On débute par calculer les variances des X_i. On a,

$$
\begin{aligned}
Var(X_1)&=\left(0.75\times2\times10^2+0.25\times2\times40^2\right)-EX_1^2=643.75\\
Var(X_2)&=\left(0.75\times2\times20^2+0.25\times2\times80^2\right)-EX_2^2=2575\\
Var(X_3)&=\left(0.75\times2\times40^2+0.25\times2\times10^2\right)-EX_3^2=1393.75
\end{aligned}
$$

Ainsi, on a que

$$
\begin{aligned}
E(S) &= E(X_1 + X_2 + X_3) = 85; \\
Var(S) &= Var(X_1) + Var(X_2) + Var(X_3) + 2Cov(X_1, X_2) + 2Cov(X_1, X_3) + 2Cov(X_2, X_3) \\
&= 4275.
\end{aligned}
$$

(d) Calculer la mesure $\sqrt{Var(S)}$ et les contributions $C^{\sqrt{Var}}(X_i)$ associés à cette mesure. On a, Pour la démarche détaillée, voir la démarche de l'exercice 5.1.2. La contribution selon l'écart type est donnée par

$$C^{\sqrt{Var}}(X_i) = \frac{Cov\left(X_i, \sum_{l=1}^{n} X_l\right)}{\sqrt{Var(S)}} \tag{22}$$

À l'aide de (22), on obtient

$$
\begin{aligned}
C^{\sqrt{Var}}(X_1) &= \frac{Cov\left(X_1, \sum_{l=1}^{3} X_l\right)}{\sqrt{4275}} \\
&= \frac{Cov(X_1, X_1) + Cov(X_1, X_2) + Cov(X_1, X_3)}{\sqrt{4275}} \\
&= 12.42668558; \\
C^{\sqrt{Var}}(X_2) &= 39.38303431; \\
C^{\sqrt{Var}}(X_3) &= 13.57376325.
\end{aligned}
$$

(e) Soit la prime $\Pi_A(S)$. Utiliser le principe d'Euler pour calculer les contributions de X_i pour $\kappa = 0.99$. Pour la démarche détaillée, voir la démarche du numéro 5.1.2. La contribution de X_i est donnée par

$$\frac{Cov\left(X_i, \sum_{l=1}^{n} X_l\right)}{\sqrt{Var\left(\sum_{l=1}^{n} X_l\right)}} \Phi^{-1}(\kappa) + E(X_i) \tag{23}$$

À l'aide de (23), on obtient

$$
\begin{aligned}
C^{A}(X_1) &= 46.40879; \\
C^{A}(X_2) &= 126.6186; \\
C^{A}(X_3) &= 64.0773.
\end{aligned}
$$

Pour ce qui est de $\Pi_A(S)$, on a

$$\Pi_A(S) = E(S) + \sqrt{Var(S)}\Phi^{-1}(\kappa) = 237.1047 = C^A(X_1) + C^A(X_2) + C^A(X_3)$$

(f) Soit la prime $\Pi_B(S)$. Utiliser le principe d'Euler pour calculer les contributions de X_i pour $\kappa = 0.99$. Pour la démarche détaillée, voir la démarche du numéro 5.1.2. La contribution de X_i est donnée par,

$$C^B(X_i) = E(X_i) + \frac{Cov\left(X_i, \sum_{l=1}^{n} X_l\right)}{\sqrt{Var\left(\sum_{l=1}^{n} X_l\right)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1-\kappa} e^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}} \tag{24}$$

On obtient, à l'aide de (3),

$$
\begin{aligned}
C^{B}(X_1) &= 50.61978; \\
C^{B}(X_2) &= 139.9642; \\
C^{B}(X_3) &= 68.67699.
\end{aligned}
$$

Pour ce qui est de $\Pi_B(S)$, on a

$$\Pi_B(S) = E(S) + \sqrt{Var(S)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1-\kappa}e^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}} = 259.261 = C^B(X_1) + C^B(X_2) + C^B(X_3).$$

Code LaTeX : sol-50003.tex

2.5.2 Exercices informatiques

1. (a) Calculer $E[X_1]$, $E[X_2]$, $E[X_3]$ et $E[S]$.
   On obtient : 3000, 2000, 1000 et 6000.

   (b) Utiliser les réalisations pour calculer des approximations de $E[X_1]$, $E[X_2]$, $E[X_3]$ et $E[S]$.
   On obtient : 2996.869, 2002.107, 1000.448 et 5999.424

   (c) On obtient les valeurs suivantes :

κ	$\widetilde{C}_\kappa^{VaR}(X_1)$	$\widetilde{C}_\kappa^{VaR}(X_2)$	$\widetilde{C}_\kappa^{VaR}(X_3)$	$\widetilde{VaR_\kappa}(S)$
0.9	3519.61	2144.96	2571.59	8236.16
0.99	2794.33	1726.33	6307.79	10828.45
0.999	3520.68	6613.16	3237.05	13370.89

   On observe l'incohérence dans les valeurs des contributions à la VaR. Cette inconhérence n'est pas due à la méthode d'allocation basée sur le principe d'Euler, mais sur la mesure VaR elle-même. Pour un risque donné, les contributions n'augmentent pas de façon monotones avec la valeur de κ.

   (d) On obtient les valeurs suivantes :

κ	$\widetilde{C}_\kappa^{TVaR}(X_1)$	$\widetilde{C}_\kappa^{TVaR}(X_2)$	$\widetilde{C}_\kappa^{TVaR}(X_3)$	$\widetilde{TVaR_\kappa}(S)$
0.9	3872.68	3150.97	2371.33	9394.98
0.99	4142.64	3662.24	4086.29	11891.17
0.999	4521.98	4008.08	5772.37	14302.44

   Code LaTeX : sol-51001.tex
   Code R : FnRsol-51001.R

2. (a) Calculer les paramètres pour les 3 lois à partir des informations fournies.
   Les paramètres de X_1 sont
   $$\alpha_P = 2.25, \lambda = 125$$
   Les paramètres de X_2 sont
   $$\alpha_G = 1/9, \beta = 1/900$$
   Les paramères de X_3 sont
   $$\mu = 3.453878, \sigma = 1.517427$$

   (b) Utiliser les m réalisations pour calculer des approximations de $E[X_1]$, $E[X_2]$, $E[X_3]$ et $E[S]$.
   On obtient : 99.2866, 101.3496, 99.7257, et 300.3619.

   (c) On obtient les valeurs suivantes :

κ	$\widetilde{C}_\kappa^{VaR}(X_1)$	$\widetilde{C}_\kappa^{VaR}(X_2)$	$\widetilde{C}_\kappa^{VaR}(X_3)$	$\widetilde{VaR_\kappa}(S)$
0.9	11.87	674.40	4.13	690.41
0.99	43.80	2081.83	60.47	2186.10
0.999	18.80	15.61	4920.64	4955.04

(d) On obtient les valeurs suivantes :

κ	$\widetilde{C}_{\kappa}^{TVaR}(X_1)$	$\widetilde{C}_{\kappa}^{TVaR}(X_2)$	$\widetilde{C}_{\kappa}^{TVaR}(X_3)$	$\widetilde{TVaR_{\kappa}}(S)$
0.9	302.44	633.45	402.48	1338.38
0.99	733.12	1389.24	1229.64	3352.00
0.999	2839.99	697.03	3548.04	7085.06

Important : on sait que $TVaR_{\kappa}(S)$ augmente avec κ. Toutefois, ce n'est pas le cas des contributions à la TVaR (selon la méthode d'Euler). En effet, dans cet exemple, on observe l'impact joué par les queues des distributions *heavy tailed* telles que les distributions Pareto et lognormale. Pour $\kappa = 0.999$, la contribution au risque 2 décroît car les contributions aux risques 1 et 3 prennent des parts relatives plus importantes.

Code LaTeX : sol-51002.tex
Code R : FnRsol-51002.R

2.6 Allocation du risque - volet 2

2.6.1 Exercices traditionnels

1. (a) Les v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes. Alors, on a

$$\begin{aligned} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) \\ &= \beta_1 e^{-\beta_1 x_1}\beta_2 e^{\beta_2 x_2} \\ &= \beta_1\beta_2 e^{-\beta_1 x_1-\beta_2 x_2}. \end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} f_S(s) &= \int_0^s f_{X_1,X_2}(x_1, s-x_1)\mathrm{d}x_1 \\ &= \int_0^s \beta_1\beta_2 e^{-\beta_1 x_1-\beta_2(s-x_1)}\mathrm{d}x_1 \\ &= \int_0^s \beta_1\beta_2 e^{-\beta_1(x_1-x_2)-\beta_2 s}\mathrm{d}x_1 \\ &= \frac{\beta_1\beta_2 e^{-\beta_2 s}}{\beta_1-\beta_2}\left(1-e^{-(\beta_1-\beta_2)s}\right) \\ &= \frac{\beta_1}{\beta_1-\beta_2}\beta_2 e^{-\beta_2 s}+\frac{\beta_2}{\beta_2-\beta_1}\beta_1 e^{-\beta_1 s}. \end{aligned}$$

On déduit ensuite

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \int_0^s f_S(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^s \frac{\beta_1}{\beta_1-\beta_2}\beta_2 e^{-\beta_2 x}+\frac{\beta_2}{\beta_2-\beta_1}\beta_1 e^{-\beta_1 x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\beta_1}{\beta_1-\beta_2}\left(1-e^{-\beta_2 s}\right)+\frac{\beta_2}{\beta_2-\beta_1}\left(1-e^{-\beta_1 s}\right). \end{aligned}$$

La valeur de $VaR_{0.99}(S)$ est la solution pour s dans $F_S(s)=0.99$. On a

$$\begin{aligned} 0.99 &= \frac{\beta_1}{\beta_1-\beta_2}\left(1-e^{-\beta_2 s}\right)+\frac{\beta_2}{\beta_2-\beta_1}\left(1-e^{-\beta_1 s}\right) \\ 0.99 &= -\left(1-e^{-0.2x}\right)+2\left(1-e^{-0.1s}\right). \end{aligned}$$

Soit $\alpha=e^{-0.1s}$. On obtient

$$\begin{aligned} 0.99 &= 2(1-\alpha)-(1-\alpha^2) \\ 0 &= \alpha^2-2\alpha+0.01. \end{aligned}$$

La solution à cette équation quadratique est $\alpha=0.0055012563$ (l'autre solution offre une valeur de $VaR_\kappa(S)$ négative). Alors, on calcule

$$\begin{aligned} e^{-0.1s} &= 0.0055012563 \\ s &= 52.95807918. \end{aligned}$$

Ensuite, puisque la v.a. S est continue, on a

$$TVaR_\kappa(S)=\frac{E\left[S\mathbb{1}_{\{S>VaR_\kappa(S)\}}\right]}{1-\kappa}.$$

De plus, on obtient $E\left[S\mathbb{1}_{\{S>VaR_\kappa(S)\}}\right]$ selon l'égalité

$$E\left[S\mathbb{1}_{\{S>VaR_\kappa(S)\}}\right]=E[S]-E\left[S\mathbb{1}_{\{S\leq VaR_\kappa(S)\}}\right].$$

On obtient

$$
\begin{aligned}
E\left[S\mathbb{1}_{\{S\leq VaR_{0.99}(S)\}}\right] &= \int_0^{VaR_{0.99}} sf_S(s)\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{VaR_{0.99}(S)} s\left(\frac{\beta_1}{\beta_1-\beta_2}\beta_2 e^{-\beta_2 s} + \frac{\beta_2}{\beta_2-\beta_1}\beta_1 e^{-\beta_1 s}\right)\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{VaR_{0.99}(S)} -0.2se^{-0.2s}\mathrm{d}s + 2\int_0^{VaR_{0.99}(S)} 0.1se^{-0.1s}\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

On effectue une intégrale par parties. On a

$$
\begin{aligned}
E\left[S\mathbb{1}_{\{S\leq VaR_{0.99}(S)\}}\right] &= \left.\frac{0.2se^{-0.1s}}{0.2}\right|_{s=0}^{VaR_{0.99}(S)} + \int_0^{VaR_{0.99}(S)} 0.1se^{-0.1s}\mathrm{d}s \\
&= VaR_{0.99}(S)\left(e^{-0.2VaR_{0.99}(S)} - 2e^{-0.1VaR_{0.99}(S)}\right) \\
&\quad - \frac{1}{0.2}\left(1-e^{-0.2VaR_{0.99}(S)}\right) + \frac{2}{0.1}\left(1-e^{-0.2VaR_{0.99}(S)}\right) \\
&= 14.37029357.
\end{aligned}
$$

On obtient

$$
TVaR_{0.99}(S) = \frac{15-14.37029357}{1-0.99} = 62.970643.
$$

(b) On calcule d'abord $E\left[X_1\mathbb{1}_{\{S=s\}}\right]$. On a

$$
\begin{aligned}
E\left[X_1\mathbb{1}_{\{S=s\}}\right] &= \int_0^s xf_{X_1,X_2}(x,s-x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^s xf_{X_1}(x)f_{X_2}(s-x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^s x\beta_1 e^{-\beta_1 x}\beta_2 e^{-\beta_2(s-x)}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^s \beta_1\beta_2 xe^{-\beta_2 s}e^{-(\beta_1-\beta_2)x}\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

On effectue une intégrale par parties et on obtient

$$
\begin{aligned}
E\left[X_1\mathbb{1}_{\{S=s\}}\right] &= \beta_1\beta_2 e^{-\beta_2 s}\left(-\left.\frac{xe^{-(\beta_1-\beta_2)x}}{\beta_1-\beta_2}\right|_0^s + \int_0^s \frac{e^{-(\beta_1-\beta_2)x}}{\beta_1-\beta_2}\mathrm{d}x\right) \\
&= \beta_1\beta_2 e^{-\beta_2 s}\left(-\frac{se^{-(\beta_1-\beta_2)s}}{\beta_1-\beta_2} + \frac{1-e^{-(\beta_1-\beta_2)s}}{(\beta_1-\beta_2)^2}\right) \\
&= \frac{\beta_1\beta_2 se^{-\beta_1 s}}{\beta_1-\beta_2} + \frac{\beta_1\beta_2 se^{-\beta_2 s}}{(\beta_1-\beta_2)^2} - \frac{\beta_1\beta_2 se^{-\beta_1 s}}{(\beta_1-\beta_2)^2}.
\end{aligned}
$$

Ensuite, on a

$$
\begin{aligned}
E\left[X_1 \mathbb{1}_{\{S\leq VaR_\kappa(S)\}}\right] &= \int_0^{VaR_\kappa(S)} E\left[X_1 \mathbb{1}_{\{S=s\}}\right] \mathrm{d}s \\
&= \int_0^{VaR_\kappa(S)} \frac{\beta_1\beta_2 s e^{-\beta_1 s}}{\beta_1-\beta_2} + \frac{\beta_1\beta_2 s e^{-\beta_2 s}}{(\beta_1-\beta_2)^2} - \frac{\beta_1\beta_2 s e^{-\beta_1 s}}{(\beta_1-\beta_2)^2} \mathrm{d}s \\
&= \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1-\beta_2}\left(-\frac{s e^{-\beta_1 s}}{\beta_1}\bigg|_0^{VaR_\kappa(S)} + \int_0^{VaR_\kappa(S)} \frac{e^{-\beta_1 s}}{\beta_1}\mathrm{d}s\right) \\
&\quad + \frac{\beta_1\beta_2}{(\beta_1-\beta_2)^2}\left(-\frac{e^{-\beta_2 s}}{\beta_2}\bigg|_0^{VaR_\kappa(S)}\right) - \frac{\beta_1\beta_2}{(\beta_1-\beta_2)^2}\left(-\frac{e^{-\beta_1 s}}{\beta_1}\bigg|_0^{VaR_\kappa(S)}\right) \\
&= \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1-\beta_2}\left(-\frac{VaR_\kappa(S)e^{-\beta_1 VaR_\kappa(S)}}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_1^2}\left(e^{-\beta_1 VaR_\kappa(S)}\right) - 1\right) \\
&\quad + \frac{\beta_1\beta_2}{(\beta_1-\beta_2)^2}\left(-\frac{e^{-\beta_2 VaR_\kappa(S)}}{\beta_2}\right) - \frac{\beta_1\beta_2}{(\beta_1-\beta_2)^2}\left(-\frac{e^{-\beta_1 VaR_\kappa(S)}}{\beta_1}\right).
\end{aligned}
$$

Avec nos valeurs, on obtient

$$E\left[X_1 \mathbb{1}_{\{S\leq VaR_\kappa(S)\}}\right] = 9.468837326.$$

On calcule

$$TVaR_{0.99}(X_1;S) = \frac{10-9.468837326}{0.01} = 53.1162674$$

et

$$TVaR_{0.99}(X_2;S) = TVaR_{0.99}(S) - TVaR_{0.99}(X_1;S) = 9.8543756.$$

2.6.2 Exercices informatiques en atelier

1. En atelier.
2. En atelier.

2.6.3 Exercices du chapitre 10 de [Marceau, 2013]

1. (a) Calculer $VaR_{0.995}(X_i)$ pour $i=1,2,3$ et $VaR_{0.995}(S)$.
   On a

$$
\begin{aligned}
VaR_{0.995}(X_1) &= 2000000\times 5.298 = 10596000 \\
VaR_{0.995}(X_2) &= 2000000\times 7.430 = 14860000 \\
VaR_{0.995}(X_3) &= 2000000\times 10.977 = 21954000 \\
VaR_{0.995}(S) &= 2000000\times 15.660 = 31320000
\end{aligned}
$$

   (b) Calculer $TVaR_{0.995}(X_i)$ pour $i=1,2,3$ et $TVaR_{0.995}(S)$.
   On a

$$TVaR_{0.995}(X_i) = E[X_i]\frac{1-G\left(\frac{VaR_{0.995}(X_i)}{2000000};\alpha_i+1,1\right)}{1-0.995}$$

   On obtient

$$TVaR_{0.995}(X_1) = 1\times 2000000\frac{1-0.9685}{1-0.995} = 12600000$$

$$TVaR_{0.995}(X_2) = 2\times 2000000\frac{1-0.9786}{1-0.995} = 17120000$$

$$TVaR_{0.995}(X_3) = 4 \times 2000000 \frac{1-0.9847}{1-0.995} = 24480000$$
$$TVaR_{0.995}(S) = 7 \times 2000000 \frac{1-0.9878}{1-0.995} = 34160000$$

Les probabilités sont calculées par interpolation à partir des valeurs de la tables (les valeurs des étudiants peuvent légèrement différées).

(c) Déterminer $B_{0.995}(X_1, X_2, X_3)$. Est-ce que $B_{0.995}(X_1, X_2, X_3) \geq 0$ ou ≤ 0 ? Commenter sur le résultat obtenu (i.e. interpréter).
On a

$$\begin{aligned} B_{0.995}(X_1, X_2, X_3) &= 12600000 + 17120000 + 24480000 - 34160000 \\ &= 20040000 > 0 \end{aligned}$$

Le montant $B_{0.995}(X_1, X_2, X_3)$ correspond au "gain" relié à la mutualisation des risques.

(d) Déterminer la contribution allouée à chaque ligne d'affaires. Est-ce que la part allouée à la ligne $i \geq TVaR_{0.995}(X_i)$ ou $\leq TVaR_{0.995}(X_i)$. Commenter (interpréter).
On a

$$TVaR_{0.995}(X_i; S) = \frac{E[X_i]}{E[S]} TVaR_{0.995}(S)$$

On obtient

$$TVaR_{0.995}(X_1; S) = \frac{1}{7} \times 34160000 = 4880000$$
$$TVaR_{0.995}(X_2; S) = \frac{2}{7} \times 34160000 = 9760000$$
$$TVaR_{0.995}(X_3; S) = \frac{4}{7} \times 34160000 = 19520000$$

Commentaire : Comme prévu, le gain relié à la mutualisation des risques fait en sorte que la contribution attribuée à chaque risque est inférieure au montant à la $TVaR$ calculée pour chaque risque individuellement.

2. (a) Calculer $VaR_{0.99}(S_2)$ .Rép : 52.958
On a

$$2(1-y) - 1\left(1-y^2\right) = u$$

avec $y = e^{-0.1x}$ et 0.99. Alors

$$y^2 - 2y + 2 - 1 - u = 0$$

On déduit que

$$y = \frac{2 - \sqrt{4 - 4 \times 0.01}}{2} =: 0.0050126$$

Enfin, on obtient

$$VaR_{0.99}(S_2) = -\frac{1}{0.1} \ln(0.0050126) = 52.958$$

(b) Calculer $TVaR_{0.99}(S_2)$. Rép : 62.97
On applique la définition

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(S_2) &= \frac{E\left[S_2 \times 1_{\{S_2 > VaR_\kappa(S_2)\}}\right]}{1-\kappa} \\ &= \frac{E[S_2] - E\left[S_2 \times 1_{\{S_2 \leq VaR_\kappa(S_2)\}}\right]}{1-\kappa} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
E\left[S_2 \times 1_{\{S_2 \leq VaR_\kappa(S_2)\}}\right] &= \int_0^{VaR_\kappa(S_2)} x f_{S_2}(x)\,dx \\
&= \int_0^{VaR_\kappa(S_2)} x\left(\frac{\beta_2}{\beta_2-\beta_1}\beta_1 e^{-\beta_1 x} + \frac{\beta_1}{\beta_1-\beta_2}\beta_2 e^{-\beta_2 x}\right)dx \\
&= \ldots \\
&= \int_0^{52.958} x\left(2\left(0.1e^{-0.1x}\right) - \left(0.2e^{-0.2x}\right)\right)dx \\
&= : 14.3703
\end{aligned}$$

On déduit

$$TVaR_\kappa(S_2) = \frac{15 - 14.3703}{1-0.99} = 62.97$$

(c) Calculer les parts allouées aux risques X_1 et X_2 selon la règle d'attribution basée sur la $TVaR$. Rép : 53.117 et 9.854. On a

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(X_1;S_2) &= \frac{E\left[X_1 \times 1_{\{S_2 > VaR_\kappa(S_2)\}}\right]}{1-\kappa} \\
&= \frac{E[X_1] - E\left[X_1 \times 1_{\{S_2 \leq VaR_\kappa(S_2)\}}\right]}{1-\kappa}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
E\left[X_1 \times 1_{\{S_2 \leq VaR_\kappa(S_2)\}}\right] &= \int_0^{VaR_\kappa(S_2)} E\left[X_1 \times 1_{\{S_2 = s\}}\right] ds \\
&= \int_0^{VaR_\kappa(S_2)} \int_0^s x f_{X_1}(x) f_{X_2}(s-x)\,ds \\
&= \ldots \\
&= \int_0^{52.958}\int_0^s x0.1e^{-0.1x} \times 0.2e^{-0.2(s-x)} dxds \\
&= 9.46883
\end{aligned}$$

On obtient

$$TVaR_\kappa(X_1;S_2) = \frac{10 - 9.46883}{1-0.99} = 53.117$$

De la même façon, on déduit que la part allouée à la v.a.X_2 est

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(X_2;S_2) &= \frac{5 - \int_0^{52.958}\int_0^s x0.2e^{-0.2x} \times 0.1e^{-0.1(s-x)} dxds}{0.01} \\
&= 9.854452
\end{aligned}$$

On observe que $53.117 + 9.854 = 62.971$ comme prévu.

Références

[Cossette and Marceau, 2021] Cossette, H. and Marceau, E. (2021). *Mathématiques actuarielles du risque : modèles, mesures de risque et méthodes quantitatives*. Monographie.

[Delaporte, 1960] Delaporte, P. J. (1960). Quelques problèmes de statistiques mathématiques poses par l'assurance automobile et le bonus pour non sinistre. *Bulletin Trimestriel de l'Institut des Actuaires Français*, 227 :87–102.

[Marceau, 2013] Marceau, E. (2013). *Modélisation et évaluation quantitative des risques en actuariat : Modèles sur une période*. Springer.

[Panjer and Willmot, 1992] Panjer, H. H. and Willmot, G. E. (1992). *Insurance Risk Models*. Society of Actuaries.

[Ruohonen, 1988] Ruohonen, M. (1988). On a model for the claim number process. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 18(1) :57–68.

[Tessera, 2007] Tessera, A. (2007). Probabilistic models for medical insurance claims. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 23(4) :307–317.

[Willmot and Sundt, 1989] Willmot, G. E. and Sundt, B. (1989). On evaluation of the delaporte distribution and related distributions. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1989(2) :101–113.