

1 Convolution de loi uniforme ou bêta

Pour obtenir la fonction de densité de S , on utilise la même approche que pour la somme de deux v.a. uniforme sur $[0, 1]$.

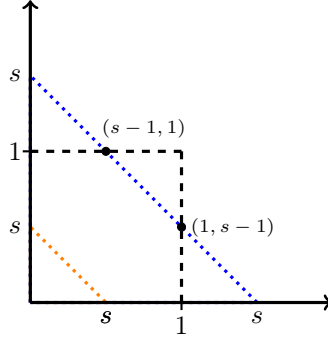


ILLUSTRATION 1 – Région d'intégration dans le cas avec de deux v.a. uniforme sur $[0, 1]$

On rappelle rapidement le produit de convolution,

$$\begin{aligned} F_{X+Y}(s) &= \Pr(X + Y \leq s) \\ &= \iint_{x+y \leq s} f_{X,Y}(x, y) \, dx dy \\ &\stackrel{=}{=} \iint_{x+y \leq s} f_X(x) f_Y(y) \, dx dy. \end{aligned}$$

Il suffit ensuite de changer les marginales pour celle des v.a. $X \sim \text{Beta}(1, 2)$ et $Y \sim \text{Beta}(2, 1)$:

- Si $0 \leq s \leq 1$

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \int_0^s \int_0^{s-y} 4x(1-y) \, dx dy \\ &= \int_0^s 2(1-y)(s-y)^2 \, dy \\ &= \int_0^s 2(s^2 - ys^2 - 2ys + 2y^2s + y^2 - y^3) \, dy \\ &= \frac{2}{3}s^3 - \frac{1}{6}s^4 \end{aligned}$$

- Si $1 \leq s \leq 2$

$$\begin{aligned} F_S(s) &= 1 - \int_{s-1}^1 \int_{s-x}^1 4x(1-y) \, dy dx \\ &= 1 + \frac{s^4 - 4s^3 + 16s - 16}{6} \end{aligned}$$

Donc,

$$F_S(s) = \begin{cases} \frac{2}{3}s^3 - \frac{1}{6}s^4, & 0 \leq s \leq 1 \\ 1 + \frac{s^4 - 4s^3 + 16s - 16}{6}, & 1 \leq s \leq 2 \end{cases}$$