



UNIVERSITÉ LAVAL

Jérémie Barde
(111 238 102)

Lectures dirigées
ACT-7014

Analyse et modélisation des pertes extrêmes :
approches et applications

Travail présenté à
M. Etienne Marceau

École d'actuariat
Université Laval
Automne et 2023

Résumé

La modélisation des valeurs extrêmes est une composante essentielle du domaine de l'actuariat, qui vise à évaluer et gérer les risques extrêmes. Les valeurs extrêmes, ou événements rares ont un impact significatif sur les résultats financiers et les réserves des compagnies d'assurance, ainsi que sur la prise de décision en matière de gestion des risques. Pour y parvenir, un outil mathématique intéressant est la théorie des valeurs extrêmes. On utilisera cet outil pour appliquer les méthodes présentées dans [Brazauskas and Kleefeld \(2016\)](#) à la National Fire Information Database. On identifiera quelques modèles potentiels qu'on testera avec des tests graphiques et quantitatifs. On analysera le risque en utilisant les mesures Value at Risk et Tail-Conditional Median pour chacun des modèles. On terminera par regarder le pouvoir prédictif des modèles testés. On calculera ensuite les mesures de risque Proportional Hazards Transform et Gini Shorfall pour la loi Pareto généralisée.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Revue de la littérature	3
3	Mise en contexte	5
3.1	Assurance IARD	5
3.2	Réassurance IARD	5
3.3	Défi de l'assurance	6
3.4	Loi Pareto	7
3.5	Théorie des valeurs extrêmes	8
4	Modélisation de la sévérité	11
4.1	Reproduction de Brazauskas & Kleefeld (2016)	11
4.2	Données ville Toronto	25
4.3	Données <i>National Fire Information Database</i>	31
5	Mesures de risque	38
5.1	Reproduction de Upadhyay & Brazauskas (2022)	38
5.2	Application à la loi Pareto généralisée	48
6	Conclusion	50
A		51
A.1	Liste complète des variables explicatives de la base de données de sinistres incendies de la ville de Toronto	51
A.2	Liste complète des variables explicatives de la base de données NFID	52
A.3	Preuve des formes analytiques des mesures de risques	53

Liste des illustrations

3.1	Conventions de réassurance pour deux chantiers impliquant deux compagnies d'assurance et trois compagnies de réassurance	6
3.2	Comparaison de la densité de deux lois Pareto selon $\alpha \in (1.5, 3)$	8
4.1	Comparaison de l'histogramme du log des pertes de 1984 sur le déductible de 500 000 \$ et la fonction de densité de la loi <i>folded-t</i>	19
4.2	<i>QQplots</i> pour les différents modèles pour les années respectives 1981-1992	21
4.3	Contribution des 10% plus grosses pertes estimées au total des pertes estimées	26
4.4	Pertes estimées selon la date du sinistre	27
4.5	<i>QQplots</i> pour les observations sous le seuil (ligne 1) et pour les observations au-dessus du seuil (ligne 2), pour le modèle LN-PaG (2011-2018)	29
4.6	<i>QQplots</i> pour les observations sous le seuil (ligne 1) et pour les observations au-dessus du seuil (ligne 2), pour le modèle We-PaG (2011-2018)	29
4.7	<i>QQplots</i> pour les observations sous le seuil (ligne 1) et pour les observations au-dessus du seuil (ligne 2), pour le modèle GB2-PaG (2011-2018)	29
4.8	Pertes estimées selon la date du sinistre	32
4.9	<i>QQplots</i> pour les observations sous le seuil (ligne 1) et pour les observations au-dessus du seuil (ligne 2), pour le modèle LN-PaG (2011-2018)	34
4.10	<i>QQplots</i> pour les observations sous le seuil (ligne 1) et pour les observations au-dessus du seuil (ligne 2), pour le modèle GB2-PaG (2011-2018)	35
5.1	Valeurs de la borne supérieure, inférieure, moyenne et théorique pour C_{PHT} avec $r = 0.55, 0.75, 0.95$	43
5.2	Valeurs de la borne supérieure, inférieure, moyenne et théorique pour $C_{WT}(\lambda)$ avec $\lambda = -1, -0.5, -0.25, 0.25, 0.5, 1$	44
5.3	Valeurs de la borne supérieure, inférieure, moyenne et théorique pour $C_{WT}(\lambda, \alpha = 2)$ avec $\lambda = -1, -0.5, -0.25, 0.25, 0.5, 1$	45

Liste des tableaux

3.1	Principales secteur d'activité pour un assureur de dommages au Canada en 2021, ainsi que leurs pourcentages de primes nettes écrites	5
3.2	Comparaison de la probabilité d'avoir un sinistre supérieur à 1 million	7
4.1	Sommaire des statistiques pour les pertes incendies de la base de données norvégienne de 1981 à 1992	11
4.2	Paramètres estimés par maximum de vraisemblance pour les pertes incendies de la base de données norvégienne de 1981 à 1992 avec une loi Pareto généralisée	12
4.3	Paramètres estimés par maximum de vraisemblance pour les modèles par raccordement de lois	18
4.4	Paramètres estimés par maximum de vraisemblance de la loi <i>Folded-t</i> pour les pertes incendies de la base de données norvégienne de 1981 à 1992	19
4.5	Test d'ajustement de modèles pour les données d'incendie norvégienes (1981-1992)	22
4.6	Mesures d'information des modèles ajustés pour les données d'incendie norvégienes (1981-1992)	23
4.7	Mesure <i>VaR</i> et <i>TCM</i> (2ieme lignes) au niveau de confiance 90%, pour les données d'incendie norvégienes (1981-1992)	24
4.8	Valeur prédictive et actuelle (2ieme lignes) de $\Pr(X > \text{VaR}_\kappa(X) X > 500000)$, pour les données d'incendie norvégienes (1981-1992)	25
4.9	Description de 7 variables explicatives des données de sinistre incendie de la ville de Toronto	26
4.10	Statistiques descriptives des $n = 13571$ pertes estimées retenues de la base de données de sinistres incendies de la ville de Toronto	26
4.11	Nombre de données dans des tranches de montants de sinistres	27
4.12	Paramètres estimés par maximum de vraisemblance des raccordements de loi pour les pertes incendies de la base de données de Toronto	28
4.13	Test d'ajustement de modèles pour les données canadienne de périls incendies	30
4.14	Mesures d'information des modèles ajustés pour les données d'incendie de Toronto (2011-2018)	30
4.15	Mesures <i>VaR</i> et <i>TCM</i> (2iemes lignes) au niveau de confiance 90%, pour les données d'incendie de Toronto (2012-2018)	31
4.16	Valeurs prédictive et actuelle de $\Pr(X > 100000)$, pour les données d'incendie de Toronto (2012-2018)	31
4.17	Description de 7 variables explicatives des données de sinistre incendie de la ville de Toronto	32
4.18	Statistiques descriptives des $n = 102\,635$ pertes retenues de la base de données NFID	32
4.19	Nombre de données par tranche de montants de sinistres	33
4.20	Pertes moyennes pour les sinistres supérieures à 1 million selon la présence d'un système d'arroseur	33
4.21	Paramètres estimés par maximum de vraisemblance des raccordements de loi pour les pertes incendies de la base de données NFID	34
4.22	Tests d'ajustements des modèles pour les données NFID	35
4.23	Critères d'informations des modèles ajustés pour les données NFID (2010-2015)	36
4.24	Mesure <i>VaR</i> et <i>TCM</i> (2ieme lignes) au niveau de confiance 90%, pour les données (NFID) (2009-2015)	36
4.25	Valeurs prédictive et actuelle de $\Pr(X > 100000)$, pour les données (NFID) (2009-2015)	37

5.1	Évaluation numérique de $C_{PHT}(r, \sigma)$ pour des valeurs de r et de σ sélectionnées	39
5.2	Intervalle autour de $C_{PHT}(r, \sigma)$ à l'aide des bornes obtenues	39
5.3	Évaluation numérique de $C_{WT}(\lambda)$ et $C_{WT}(\lambda, \alpha)$ pour des valeurs de λ et de α sélectionnées . .	41
5.4	Évaluation numérique de $C_{GS}(\beta, \sigma)$ pour des valeurs de β et σ sélectionnées	41
5.5	Paramètres obtenus avec (5.4) en choisissant $\beta_1 = 0.10$ et $\beta_2 = 0.05$	42
5.6	Comparaison de la valeur théorique avec la valeur estimée pour C_{PHT} avec $x = 1$	43
5.7	Comparaison de la valeur théorique avec la valeur estimée pour $C_{WT}(\lambda)$	43
5.8	Comparaison de la valeur théorique avec la valeur estimée pour $C_{WT}(\lambda, \alpha = 2)$	45
5.9	Valeur théorique de la mesure de risque PHT pour la loi Exponentielle, Pareto I et Lognormale et les statistiques descriptives pour les estimés de la mesure de risque PHT basée sur les méthodes EMP, MTM, MWM, MLE	47
5.10	Paramètres estimés pour les bases de données canadiennes de périls incendie et NFID	48
5.11	Mesure de risque GS estimée pour les bases de données canadiennes de périls incendie et NFID .	48
5.12	Mesure de risque PHT estimée pour les bases de données canadiennes de périls incendie et NFID	49

Chapitre 1

Introduction

L'assurance de dommage remonte à plusieurs années dans le passé. En effet, en Allemagne, dans les années 1600, les premières sociétés mutuelles d'assurance font leur apparition. Cependant, le grand incendie de Londres en 1666, qui a brûlé les quatre cinquièmes de la ville, est un des événements qui a vraiment propulsé le besoin pour l'assurance. Un fait intéressant est que plusieurs des premières compagnies d'assurance sont créées pour faire face au risque incendie. En effet, la première compagnie d'assurance au Canada fait son apparition en 1809 et s'appelle la *Fire Association of Halifax*. Elle se spécialise principalement dans le risque incendie. À son tour en 1819 le Québec voit sa première compagnie d'assurance ouvrir ses portes et elle se nomme la *Québec Fire Insurance Company*. Puis, à compter de 1833, des sociétés mutuelles québécoises, établies à Montréal et en Estrie et spécialisées en assurance contre les incendies, ouvrent leur porte. On constate que l'assurance incendie a joué un gros morceau dans le développement de l'assurance dommages. Aujourd'hui encore, l'assurance incendie reste un défi pour les actuaires. Plusieurs personnes se sont vu amener à travailler sur ce risque et à proposer différentes techniques pour bien le comprendre. Dans [Ramachandran \(1974\)](#) l'auteur propose d'utiliser la théorie des valeurs extrêmes pour modéliser les grosses pertes dues aux incendies. Dans [Brazauskas and Kleefeld \(2016\)](#), les auteurs utilisent le raccordement de loi pour essayer de mieux modéliser la queue de la distribution et testent sur des données de sinistres incendies. Bien qu'il soit important de modéliser la sévérité, il est aussi important de regarder la distribution du nombre de sinistres. Les auteurs de [Corradin and Verbrighe \(2001\)](#) et [Corradin et al. \(2002\)](#) proposent d'utiliser la binomiale négative comme loi pour la fréquence. Il y a aussi [Lin \(2005\)](#) dans lequel l'auteur propose d'utiliser le processus de Poisson pour modéliser la fréquence.

L'objectif de ce rapport est de reproduire les articles [Brazauskas and Kleefeld \(2016\)](#) et [Upretee and Brazauskas \(2022\)](#) et d'appliquer les méthodes proposées dans ces articles aux données canadiennes de périls incendie et aux données *National Fire Information Database* (NFID). Plus précisément, dans [Brazauskas and Kleefeld \(2016\)](#) on identifiera quelques modèles potentiels qu'on testera avec des tests graphiques et quantitatifs, pour voir lesquels performent le mieux. On regardera, ensuite, les mesures *VaR* et *TCM*. On terminera par regarder le pouvoir prédictif des modèles testés. Pour l'article [Upretee and Brazauskas \(2022\)](#) on explorera diverses mesures de risque et calculera les limites inférieures et supérieures de ces mesures, dans les cas où elles ne sont pas calculables pour certaines distributions. On regardera essentiellement les mesures *Proportional Hazards Transform* (PHT) et *Gini Shorfall* (GS), car on peut trouver des formes analytiques pour la loi Pareto généralisée.

Au chapitre 2, on entamera une revue partielle de la littérature existante. On présentera quelques articles qui ont traité du risque incendie, de la modélisation des pertes extrêmes et finalement qui ont traité du sujet conjointement. Dans le chapitre 3 on fera une mise en contexte des notions utiles aux différentes sections de ce rapport. On commencera par une brève introduction à l'assurance, en mettant en évidence les principaux domaines de l'assurance dommages. Ensuite, on abordera la réassurance, en expliquant son importance et en justifiant son utilisation. Enfin, on abordera les défis liés à l'assurance. Ensuite, on présentera brièvement la loi Pareto et la théorie des valeurs extrêmes. Au chapitre 4 on présente la reproduction de l'article [Brazauskas and Kleefeld \(2016\)](#) et l'application des méthodes de cet article sur les deux bases de données.

On terminera au chapitre 5 avec la présentation de la reproduction de l'article [Upretee and Brazauskas \(2022\)](#). On s'intéressera aux mesures de risques *Value-at-Risk* (*VaR*), *Conditional Tail Expectation* (*CTE*), *Proportional Hazards Transform* (*PHT*), *Wang Transform* (*WT*) et *Gini Shortfall* (*GS*). Les preuves des formes analytiques seront effectuées pour les lois Exponentielle translatée, Pareto I, Lognormale translatée et Pareto généralisée.

Chapitre 2

Revue de la littérature

Dans [Longley-Cook \(1952\)](#), l'auteur aborde le sujet des pertes élevées dues au feu. Il est mentionné qu'il est difficile de trouver une loi pour modéliser les pertes élevées, mais qu'il est possible d'utiliser des données pour créer un modèle empirique. L'auteur réussit à construire une base de données qu'il regroupe en différentes catégories selon le montant de perte. Il calcule le coût au-dessus d'une certaine franchise préalablement choisie pour chaque montant de perte et remarque qu'il est possible d'assumer que la deuxième dérivée du log des pertes décroît de manière géométrique. Cela permettait donc d'estimer l'espérance des pertes pour chaque groupe. Il mentionne cependant que ce modèle n'était pas excellent. Dans [Longley-Cook \(1951\)](#), l'auteur présente les principales difficultés dans la tarification incendie à cette époque. Il critique principalement le fait que les procédures mises en place étaient trop basées sur le jugement et qu'il était donc difficile de savoir si le taux trouvé était juste et équitable. Une autre critique est que les méthodes n'étaient pas standardisées entre les états. En effet, certains états considéraient seulement deux types de bâtiments, soit les bâtiments en brique et ceux en bois, alors que d'autres états avaient beaucoup plus de catégories. Il propose justement dans [Longley-Cook \(1959\)](#) d'avoir un seul bureau de tarification puisqu'à cette époque, aux États-Unis, il y en avait 38 . Il propose aussi de standardiser la tarification en assurance de propriété.

[Benckert and Sternberg \(1957\)](#) introduit la loi Pareto, [Mandelbrot \(1964\)](#) pousse les travaux plus loin. Dans [Charpentier and Flachaire \(2021\)](#) les auteurs montrent l'utilisation de la loi Pareto dans les domaines de l'assurance, de la réassurance et de la finance ainsi que son utilisation pour des mesures de risques. Ils modélisent aussi, à l'aide de la loi Pareto, des sinistres élevés à la suite d'un incendie avec la base de données *Danish dataset*.

Dans [Almer \(1963\)](#), l'auteur utilise la théorie du risques pour analyser le risque incendie. Il mentionne que cela se fait naturellement puisque les assurés pour le risque incendie sont généralement indépendants et cela s'applique bien à la théorie du risque individuel.

L'auteur de [Antal and Re \(2007\)](#) propose une excellente introduction, plus moderne, à la théorie du risque. Il présente les outils mathématiques pour la tarification en assurance de dommages et la modélisation. De plus, il propose une introduction à la théorie du risque, une excellente explication du capital et une introduction à la tarification des contrats de réassurance.

Ramachandran a énormément travaillé et écrit sur le risque incendie. Dans [Ramachandran \(1974\)](#), il évoque que la théorie des valeurs extrêmes pourrait être un bon outil pour modéliser les grosses pertes dues aux incendies, mais qu'il faudrait l'utiliser avec prudence. Dans [Rydman \(2018\)](#) l'auteur utilise la méthode *Peak-over-Threshold* pour modéliser une base de données de montants sinistres en assurance automobile. L'auteur présente deux techniques pour trouver les paramètres de la Pareto généralisée, soit la méthode du maximum de vraisemblance et la méthode *Probability Weighted Moments*.

Plusieurs chercheurs ont tenté de modéliser les pertes dues aux incendies. Par exemple, [Shpilberg \(1977\)](#) critique que la majorité des lois soient bonnes uniquement pour modéliser la portion centrale, soit autour de la médiane, et moins bonnes pour la queue de la distribution. Il propose de tester les lois lognormale, quasi-

lognormale et Pareto. Il conclut qu'il est très difficile de choisir la meilleure loi puisque, graphiquement, les résultats sont similaires. En outre, il utilise le fait que la fonction d'intensité du feu devrait être décroissante pour montrer que la loi lognormale est un meilleur choix puisque celle de la Pareto est une constante.

Dans [Cummins et al. \(1990\)](#), les auteurs proposent la famille de distributions GB2 pour la modélisation des pertes. Cette famille contient la loi gamma généralisée, bêta généralisée de type 1 et bêta généralisée de type 2. Cette famille de distributions a l'avantage d'être très flexible. Les auteurs mentionnent qu'avec cette famille, on peut modéliser la sévérité, mais aussi la distribution des montants agrégés.

Pour [Brazauskas and Kleefeld \(2016\)](#), les auteurs visent à modéliser les montants de pertes d'incendie de la base de données norvégienne d'incendie. Ils proposent le raccordement de lois, c'est-à-dire de modéliser différentes portions de la distribution avec différentes lois, par exemple les lois lognormale-Pareto généralisée et Weibull-Pareto Généralisée. Ils proposent aussi d'utiliser la famille de distributions *Folded-t* en appliquant une transformation aux données. Ils présentent différents tests statistiques pour sélectionner la meilleure loi. Dans leur cas, ce sont les lois avec la Pareto généralisée et le modèle avec la famille de distributions *Folded-t* qui étaient les meilleures.

Une autre approche présentée dans [Laudagé et al. \(2019\)](#) est de modéliser les pertes au-dessus d'un seuil par une loi Pareto généralisée et de modéliser les pertes sous le seuil par un GLM lognormale. Cette méthode présente l'avantage d'incorporer des covariables dans le modèle par régression pour les données situées en dessous du seuil, offrant ainsi la possibilité d'expliquer une portion du montant des pertes observées.

Pour [Biffis and Chavez \(2014\)](#), les auteurs utilisent une base de données obtenue auprès de 2 syndicats de *Lloyd's of London*. Ils veulent estimer l'index de la queue de la distribution pour avoir de l'information sur la lourdeur des montants de sinistre en assurance commerciale. Deux méthodes sont présentées, une méthode de régression et l'utilisation de l'estimateur de Hill. Ils trouvent l'indice de la queue de la distribution pour différents secteurs comme les secteurs résidentiel, commercial et manufacturier.

Dans [Corradin and Verbrigghe \(2001\)](#) et [Corradin et al. \(2002\)](#), les auteurs proposent aussi une analyse d'une base de données de montants de sinistre incendie. Ils utilisent le modèle fréquence-sévérité pour modéliser le montant de pertes au-dessus d'un montant préétabli. Les auteurs utilisent la loi binomiale négative pour modéliser la fréquence et la loi Pareto généralisée pour modéliser la sévérité. Ils poussent plus loin en utilisant leur modèle pour faire de la simulation et ainsi tester différents scénarios de réassurance et voir l'impact sur le capital.

Dans [Lin \(2005\)](#), l'auteure montre qu'il est envisageable de modéliser la fréquence des incendies par un processus de Poisson. Elle présente les résultats qu'elle a obtenus avec des données en provenance de Taiwan. Elle teste le processus de Poisson sur différents types de bâtiments et montre que les bâtiments industriels ont le plus gros taux d'incendie par unité de surface du sol.

Dans un article récent, [Chao \(2022\)](#), l'auteur donne une façon de calculer une prime de réassurance en utilisant la méthode *Peak-Over-Threshold*. Il donne des formes analytiques pour le calcul de la prime d'un contrat, et ce, que le niveau de rétention soit égal ou supérieur au seuil spécifié.

Une méthode de tarification utilisée en réassurance est *exposure rating*. Elle est expliquée dans le chapitre 21 de [Parodi \(2014\)](#). On utilise une courbe d'exposition au lieu d'une courbe de sévérité. Elle donne le pourcentage de risque qui est conservé par l'assureur si une franchise est imposée. Une courbe d'exposition couramment utilisée est la MBBED, introduite dans [Bernegger \(1997\)](#), car elle a l'avantage de pouvoir produire d'autres courbes selon sa paramétrisation. [Riegel \(2010\)](#) présente une application de cette technique dans le cas de la réassurance pour le risque d'incendie. Cette méthode est aussi utilisée par [Abramson \(2022\)](#) pour la tarification dans le milieu de la construction.

Chapitre 3

Mise en contexte

3.1 Assurance IARD

Dans le glossaire du Bureau d'Assurance du Canada [BAC 2023], on classifie l'industrie de l'assurance en deux branches. La première est l'assurance vie et maladie, dont on ne traite pas dans cet article. La deuxième branche est l'assurance IARD (acronyme pour Incendies, Accidents et Risques Divers), appelée aussi assurance générale. Cette branche de l'industrie « couvre l'assurance habitation, l'assurance automobile et l'assurance entreprise » [BAC 2023].

L'ensemble des secteur d'activités est présenté au tableau 3.1.

Secteur d'activité	Primes nettes écrites
Assurance automobile	43 %
Assurance habitation ligne personnelle	22 %
Assurance aux entreprises	15 %
Assurance responsabilité	11 %
Autres	11 %

TABLEAU 3.1 – Principales secteur d'activité pour un assureur de dommages au Canada en 2021, ainsi que leurs pourcentages de primes nettes écrites

À la colonne 2 du tableau 3.1, on trouve les pourcentages de primes nettes écrites pour chaque secteur d'activité. Ces pourcentages sont extraits d'*Assurances de dommages au Canada*¹, publié par le Bureau d'Assurance du Canada. On constate que l'assurance automobile représente un gros morceau de l'assurance dommages puisqu'elle représente un peu moins de la moitié des primes nettes écrites. Dans ce rapport, on s'intéressera davantage à l'assurance aux entreprises.

3.2 Réassurance IARD

Une compagnie d'assurance générale a la capacité financière pour émettre des contrats d'assurance aux particuliers et, pour la plupart d'entre eux, de rencontrer les engagements attachés à ces contrats. Par contre, il lui serait impossible d'émettre des contrats d'assurance chantier, ou plusieurs autres types de contrats d'assurance commerciale, et de remplir la totalité des engagements de ces contrats sans mettre en péril sa santé financière. Dans ce contexte, la compagnie transfère une part du risque lié à ces contrats en achetant elle-même de l'assurance auprès de compagnies de réassurance.

1. Bureau d'Assurance du Canada, [www.ibc.ca/fr/ns/ressources/état-de-l-industrie/publication-assurances-de-dommages-au-canada](http://www.ibc.ca/fr/ns/ressources/etat-de-l-industrie/publication-assurances-de-dommages-au-canada)

Cela peut être fait de différentes façons, par exemple par un pourcentage de la perte ou par la portion supérieure à une limite préétablie. Dans [Albrecher et al. \(2017\)](#), les auteurs proposent une excellente introduction à la réassurance.

Voici quelques raisons, mentionnées dans ce livre, qui poussent les assureurs à avoir recours à la réassurance. Elle leur permet d'abord de réduire la probabilité de subir des pertes difficiles à assumer. En d'autres mots, la réassurance permet de diminuer l'exposition au risque des assureurs.

Elle permet aussi de stabiliser les résultats commerciaux. En effet, une difficulté de l'assurance est de prévoir les coûts futurs qu'une police pourrait engendrer. Cependant, avec la réassurance, ces coûts futurs inconnus se transforment en une prime connue d'avance par les assureurs.

En faisant affaire avec des réassureurs, les assureurs peuvent diminuer leur capital requis, c'est-à-dire qu'ils ont besoin de moins d'argent pour un certain contrat. Cela leur permet de prendre davantage de contrats ou d'avoir une plus grande possibilité d'investissement.

Les assureurs peuvent aussi augmenter leur capacité à la souscription. En effet, en transférant une partie du risque aux réassureurs, ils peuvent accepter plus de contrats en plus d'accepter des contrats qu'ils n'auraient pas pu prendre seuls.

Les assureurs opèrent généralement dans une région relativement restreinte. La réassurance leur permet d'accéder à des pools de diversification plus importants. En effet, puisque les réassureurs opèrent généralement à l'international, les assureurs qui font affaire avec eux ont accès à des marchés qui seraient autrement trop risqués pour eux.

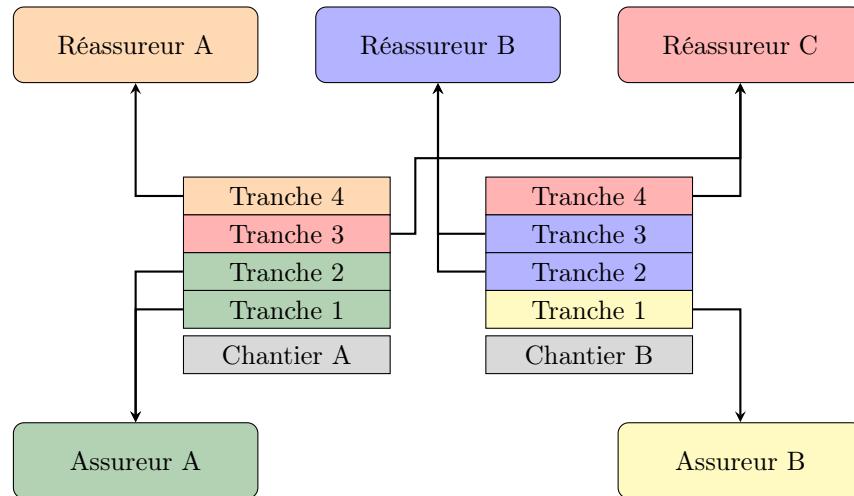


ILLUSTRATION 3.1 – Conventions de réassurance pour deux chantiers impliquant deux compagnies d'assurance et trois compagnies de réassurance

L'illustration 3.1 présente un exemple d'échange entre des chantiers, des assureurs et des réassureurs. Le défi pour l'actuaire de chacune des compagnies d'assurance et de réassurance est de calculer la prime associée à chaque tranche à laquelle cette compagnie est exposée.

3.3 Défi de l'assurance

Le défi de l'assurance est de déterminer une prime juste et équitable qui permettra à la compagnie de répondre à ses obligations futures. Ce défi est plus complexe qu'il n'en a l'air, car un assureur ne sait pas à

l'avance combien il devra payer dans le futur. Pour une entreprise standard, c'est plus simple, car les coûts sont en partie connus d'avance. On a donc une équation simple pour identifier le prix d'un produit,

$$\text{Prix} = \text{Coût} + \text{Profit}.$$

Par contre, en assurance, cette équation est un peu plus complexe,

$$\begin{aligned}\text{Prime} &= \text{Sinistre} + \\ &\quad \text{Frais de règlement de sinistre} + \\ &\quad \text{Frais de souscription de sinistre} + \\ &\quad \text{Profit de souscription}.\end{aligned}$$

Les sinistres constituent la portion difficile à évaluer puisqu'ils ne sont pas connus d'avance.

L'assurance aux entreprises amène aussi ces défis. En assurance de particulier, l'exposition au risque est beaucoup moins importante pour un assureur comparativement à l'assurance aux entreprises. En général, une police d'assurance pour un particulier ne dépassera pas le capital de l'assureur. Cependant, pour une police d'assurance aux entreprises, le capital de l'assureur pourrait ne pas être suffisant. Les assureurs peuvent donc aussi avoir une aversion au risque et avoir recours aux réassureurs.

3.4 Loi Pareto

3.4.1 Pareto Lomax

En actuariat, on a recours à la distribution de Pareto pour décrire adéquatement le comportement aléatoire des montants élevés de sinistre. Cette distribution est définie à l'aide de deux paramètres dont l'un est appelé l'indice de queue, que l'on désigne par la lettre grecque α et l'autre est le paramètre d'échelle, que l'on désigne par la lettre grecque λ . La fonction de répartition est donnée par

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x} \right)^\alpha, \quad x > 0.$$

L'espérance et la variance sont

$$E[X] = \frac{\lambda}{\alpha - 1}, \quad \alpha > 1, \quad \text{Var}(X) = \frac{\alpha \lambda^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)}, \quad \alpha > 2.$$

L'indice de queue α a une incidence sur la dangerosité de la distribution. Comme on l'observe à l'illustration 3.2, la queue de la distribution Pareto avec un α de 1.5 est bien plus épaisse que celle avec un α de 3. Cela a donc inévitablement une incidence sur la prime, comme la probabilité d'observer des sinistres très élevés s'accroît lorsque l'indice de queue α diminue. On présente au tableau 3.2 ce phénomène.

α	$\Pr(X > 1000000)$
2.5	0.003
2.0	0.010
1.5	0.032
1.2	0.063

TABLEAU 3.2 – Comparaison de la probabilité d'avoir un sinistre supérieur à 1 million

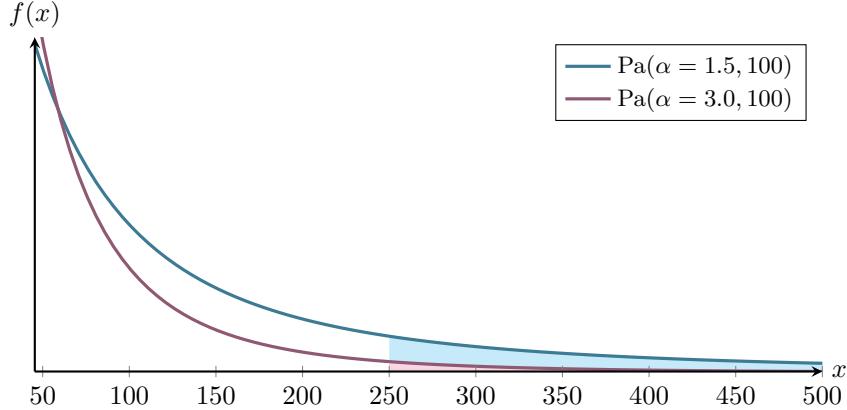


ILLUSTRATION 3.2 – Comparaison de la densité de deux lois Pareto selon $\alpha \in (1.5, 3)$

3.4.2 Pareto généralisée

On utilise généralement la loi Pareto généralisée, de répartition noté $G_{\xi,\sigma}$, pour modéliser le comportement dans la queue de la distribution. La fonction de répartition est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - (1 - \frac{\gamma}{\sigma}x)^{\frac{1}{\gamma}} & , \gamma \neq 0, x \geq 0 (\gamma \leq 0) \text{ et } 0 \leq x \leq \sigma/\gamma (\gamma > 0). \\ 1 - e^{-\frac{x}{\sigma}} & , \gamma = 0 \end{cases}$$

On verra généralement le paramètre de forme écrit $\xi = -\gamma$. On a donc la fonction de répartition suivante

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\sigma}x\right)^{-\frac{1}{\xi}} & , \xi \neq 0, x > 0. \\ 1 - e^{-\frac{x}{\sigma}} & , \xi = 0 \end{cases}$$

Comme la loi Pareto généralisée est généralement utilisée pour modéliser la queue de la distribution on verra souvent cette loi écrite avec un paramètre de translation :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\sigma}(x - \theta)\right)^{-\frac{1}{\xi}} & , \xi \neq 0, x > \theta. \\ 1 - e^{-\frac{x-\theta}{\sigma}} & , \xi = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

3.5 Théorie des valeurs extrêmes

La modélisation des valeurs extrêmes est une composante essentielle du domaine de l'actuariat, qui vise à évaluer et gérer les risques extrêmes. Les valeurs extrêmes, ou événements rares, ont un impact significatif sur les résultats financiers et les réserves des compagnies d'assurance, ainsi que sur la prise de décision en matière de gestion des risques. Le risque incendie est un exemple de risque où des valeurs extrêmes peuvent survenir.

La théorie des valeurs extrêmes, [Pickands III \(1975\)](#), est un outil mathématique essentiel pour la modélisation des événements extrêmes. Pour cela on s'intéressera à la distribution généralisée de la valeur extrême (GEV), qui est justement utilisée pour décrire le comportement du maximum d'un échantillon de v.a. i.i.d. La fonction

de répartition de cette distribution est donnée par

$$H_{\xi,\sigma,\mu} = \begin{cases} \exp\left\{-\left(\frac{1}{1+\frac{\xi}{\sigma}(x-\mu)}\right)^{\frac{1}{\xi}}\right\} & , \xi < 0, 0 < x < -\frac{\sigma}{\xi} \text{ (Weibull)} \\ \exp\left\{-\exp\left\{-\frac{x-\mu}{\sigma}\right\}\right\} & , \xi = 0, x > 0 \text{ (Gumbel)} \\ \exp\left\{-\left(\frac{1}{1+\frac{\xi}{\sigma}(x-\mu)}\right)^{\frac{1}{\xi}}\right\} & , \xi > 0, x > 0 \text{ (Fréchet).} \end{cases} \quad (3.2)$$

On verra souvent la fonction de répartition de la distribution GEV écrite sous forme compacte,

$$H_{\xi,\sigma} = \begin{cases} \exp\left\{-\left(1 + \frac{\xi}{\sigma}(x-\mu)\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right\} & , \xi \neq 0 \\ \exp\left\{-\exp\left\{-\frac{x-\mu}{\sigma}\right\}\right\} & , \xi = 0 \end{cases}. \quad (3.3)$$

Cette représentation est plus utile pour l'estimation comme il n'est pas nécessaire de faire une hypothèse sur la loi sous-subjacente, Weibull, Gumbel ou Fréchet.

Les bases théoriques sont bien expliquées dans [McNeil \(1997\)](#) ou dans le livre [Coles et al. \(2001\)](#). Essentiellement, on considère une suite de v.a. i.i.d X_1, X_2, \dots . On définit la maximum des n premières v.a. par

$$M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}.$$

On s'intéresse à la convergence du maximum. Soit $x_F = \sup\{x; F(x) < 1\}$, le point extrême droite de F . Il est possible de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = x_F.$$

La valeur de x_F peut être finie ou infinie. Cependant, on remarque que la maximum converge vers une distribution dégénérée à x_F , cela ne donne pratiquement aucune information. Pour en apprendre plus sur l'ordre de grandeur du maximum on s'intéressera à la convergence faible du maximum centré et réduit,

$$\frac{M_n - b_n}{a_n}, \quad a_n > 0.$$

On suppose que ces entiers normalisants $a_n > 0$ et b_n existe tels que

$$\Pr\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = F(a_n x + b_n)^n \rightarrow H(x), \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

où $H(x)$ est une fonction de répartition non dégénérée. Si cette condition est respectée alors on dit que F fait partie du domaine d'attraction du maximum de la distribution H , qui est noté $F \in DAM(H)$. Le théorème de Fisher-Tippett, [Fisher and Tippett \(1928\)](#), indique qu'elle est la distribution de H .

Théorème 1 (Fisher-Tippett). *Soit, X_1, X_2, \dots une suite de variable aléatoire i.i.d. S'il existe des constantes de standardisations $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ et une distribution non dégénérées H telles que*

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} H,$$

alors la seule fonction de répartition non dégénérée H est la fonction de répartition H_ξ de la distribution GEV.

Donc, le théorème 1, indique que si le maximum centré et réduit converge vers une distribution non dégénérée, alors il s'agit absolument de la distribution GEV. Il s'agit d'un premier résultat très important de la théorie des valeurs extrêmes. Ensuite, on veut faire un lien entre la loi Pareto généralisée et la distribution GEV. On commence par regarder la distribution de l'excédent.

Définition 1 (Distribution de l'excédent). *Soit la v.a. X et la v.a. W_u représentant l'excédent d'un sinistre par rapport à un seuil u . La v.a. W_u est définie comme*

$$W_u = (X - u | X > u).$$

La fonction de répartition de la v.a. W_u est donnée par

$$F_{W_u}(x) = \frac{F_X(x+u) - F_X(u)}{1 - F_X(u)}, \quad x > 0.$$

On voudra approximer la distribution des excédents par la loi Pareto généralisée. Pour ce faire on utilise le théorème de Pickands–Belkema–de Haan, qui est un deuxième théorème fondamental de la théorie des valeurs extrêmes.

Théorème 2 (Pickands–Belkema–de Haan). *Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $F \in MDA(H_\xi)$ si et seulement si*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 0} |F_{W_u}(x) - GP_{\xi, \sigma(\theta)}(x)| = 0$$

pour une certaine fonction σ positive et mesurable.

Donc, le théorème 2 donne des bases théoriques raisonnables pour approximer la distribution des excédents par la loi Pareto généralisée pour un seuil u assez élevé.

Chapitre 4

Modélisation de la sévérité

4.1 Reproduction de Brazauskas & Kleefeld (2016)

Dans cette section on reproduit et démontre la majorité des résultats présentés dans [Brazauskas and Kleefeld \(2016\)](#). Donc, tous les tableaux et illustrations de cette section sont reproduits par moi-même.

4.1.1 Analyse du jeu de données

Pour faire leur analyse les auteurs utilisent la base de données *Norwegian fire claims*, accessible dans la librairie **CASdatasets** de [R](#) ([Dutang and Charpentier, 2020](#)). Au tableau 4.1 on présente les valeurs des fréquences relatives, des trois pertes les plus importantes et du nombre de données, tout cela sur une base annuelle (1981-1992).

	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
Fréquence relative (%) :												
[0.5; 1.0)	54.5	54.7	53.8	48.3	49.6	50.7	41.9	41.2	41.9	40.4	43.3	45.5
[1.0; 2.0)	23.5	23.8	27.8	29.8	29.2	31.2	34.7	32.8	33.3	39.0	34.0	31.4
[2.0; 5.0)	13.5	14.3	12.0	15.4	14.0	11.9	17.1	16.9	18.0	16.2	17.9	16.4
[5.0; 10.0)	4.4	4.7	3.4	4.8	4.0	3.2	4.2	5.2	3.9	1.9	3.2	4.1
[10.0; 20.0)	2.3	2.1	2.2	1.1	1.6	1.7	1.2	1.9	1.9	1.4	1.3	1.6
20+	1.6	0.5	0.7	0.5	1.6	1.2	1.0	1.9	1	1	0.3	1
Pertes élevées (millions) :												
	43	19	22	22	60	87	35	84	45	26	17	45
	62	20	30	56	70	98	38	151	86	41	35	50
	78	23	51	106	135	188	45	465	145	79	50	102
Nombre de données :												
	429	428	407	557	607	647	767	827	718	628	624	615

TABLEAU 4.1 – Sommaire des statistiques pour les pertes incendies de la base de données norvégienne de 1981 à 1992

Dans le tableau 4.1 on constate que pour les sinistres égaux ou supérieurs à 5 millions la fréquence relative est au maximum 5%. Cela montre bien que les sinistres les plus élevés arrivent peu souvent.

4.1.2 Modélisation de la sévérité

Pareto généralisée

Dans [Brazauskas and Kleefeld \(2016\)](#) les auteurs utilisent une version tronquée et reparamétrisée de la loi Pareto généralisée dont la fonction de répartition est donnée par

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{\lambda + \theta}{\lambda + x} \right)^\alpha, \quad x \geq \theta \quad (4.1)$$

et la fonction de densité est donné par

$$f_X(x) = \frac{\alpha(\lambda + \theta)^\alpha}{(\lambda + x)^{\alpha+1}}, \quad x \geq \theta \quad (4.2)$$

La fonction de répartition en (4.1) est équivalente à celle en (3.1) en appliquant les transformations $\alpha = \frac{1}{\xi}$ et $\lambda = \sigma\alpha - \theta$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= 1 - \left(\frac{\lambda + \theta}{\lambda + x} \right)^\alpha \\ &= 1 - \left(\frac{\lambda + \theta}{(\lambda + \theta) + (x - \theta)} \right)^\alpha \\ &= 1 - \left(\frac{\sigma\alpha}{\sigma\alpha + (x - \theta)} \right)^{\frac{1}{\xi}} \\ &= 1 - \left(\frac{\sigma\alpha + (x - \theta)}{\sigma\alpha} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \\ &= 1 - \left(1 - \frac{(x - \theta)}{\sigma\alpha} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \\ &= 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\sigma}(x - \theta) \right)^{-\frac{1}{\xi}} \end{aligned}$$

□

On obtient bien la version de la Pareto généralisée qui est définie en (3.1). Les auteurs décident de modéliser, comme premier modèle (GPD), l'entièreté de la distribution avec la loi Pareto généralisée. On présente les paramètres estimés au tableau 4.2.

Param.	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
γ	0.83	0.70	0.71	0.56	0.75	0.71	0.51	0.69	0.56	0.42	0.42	0.58
$\sigma (\times 10^{-3})$	70.6	160.7	126.9	344.16	170.4	174.4	488.7	382.8	487.8	554.7	526.0	397.2

TABLEAU 4.2 – Paramètres estimés par maximum de vraisemblance pour les pertes incendies de la base de données norvégienne de 1981 à 1992 avec une loi Pareto généralisée

Comme il n'y a aucun $\hat{\gamma}$ supérieur à 1 l'espérance existe pour toutes les années. Cependant, il n'y a que pour les années 1990 et 1991 que la variance existe, i.e. que $\hat{\gamma} < 0.5$.

Raccordement de lois

Définition

On commence par définir les lois par raccordement. Pour cela on regarde la définition 2, qui est la définition générale du raccordement de lois. Dans ce papier on s'intéressera seulement au cas où l'on raccorde deux lois ensemble.

Définition 2. Soit X une variable qui suit une loi composite et soient $\{X_j, j = 1, \dots, n\}$ des variables non identiquement distribuées. Alors, la fonction de densité de X est

$$f_X(x) = \begin{cases} w_1 \frac{f_{X_1}(x)}{F_{X_1}(\theta_1) - F_{X_1}(\theta_0)} & , \theta_0 < x \leq \theta_1 \\ \dots \\ w_n \frac{f_{X_n}(x)}{F_{X_n}(\theta_n) - F_{X_n}(\theta_{n-1})} & , \theta_{n-1} < x \leq \theta_n \end{cases}$$

où $w_i > 0$ et $\sum_{i=1}^n w_i = 1$.

Comme montré par [Brazauskas and Kleefeld \(2016\)](#) il est possible d'assurer la continuité et la dérivabilité aux points θ_i . Cela a aussi comme effet de réduire le nombre de paramètres à optimiser. Par exemple pour une combinaison de deux lois on obtient

$$\begin{cases} w \frac{f_{X_1}(\theta)}{F_{X_1}(\theta)} = (1-w) \frac{f_{X_2}(\theta)}{F_{X_2}(\theta)} & (\text{continuité}) \\ w \frac{f'_{X_1}(\theta)}{F_{X_1}(\theta)} = (1-w) \frac{f'_{X_2}(\theta)}{F_{X_2}(\theta)} & (\text{dérivabilité}). \end{cases} \quad (4.3)$$

Lognormale-Pareto I

On teste le modèle LNPa2, on a X_1 qui est de loi lognormale et X_2 qui est de loi Pareto I.

Définition 3. La fonction de densité de la loi composite lognormale-Pareto I est

$$f_X(x) = \begin{cases} w \frac{f_{X_1}(x)}{F_{X_1}(\theta)} & , 0 < x \leq \theta \\ (1-w)f_{X_2}(x) & , x > \theta \end{cases}$$

où

$$f_{X_1}(x) = \frac{1}{xr\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

et

$$f_{X_2}(x) = \frac{\alpha\theta^\alpha}{x^{\alpha+1}}, \quad x > \theta.$$

Si on tient compte de la continuité et de la dérivabilité, on résout le système d'équations (4.3) et on trouve :

$$\begin{aligned} \mu &= \ln(\theta) - \alpha\sigma^2, \\ w &= \left(\frac{\theta}{\alpha} \frac{f_{X_1}(\theta)}{F_{X_1}(\theta)} + 1 \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Démonstration. On a le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \frac{w}{F_1(\theta)} \frac{1}{\theta\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(\theta)-\mu}{\sigma}\right)^2} = (1-w) \frac{\alpha}{\theta} \\ \frac{w}{F_1(\theta)} \frac{-1}{\theta^2\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(\theta)-\mu}{\sigma}\right)^2} \left(1 + \frac{\ln(\theta)-\mu}{\sigma^2}\right) = -(1-w) \frac{\alpha(\alpha+1)}{\theta^2} \end{cases}$$

On peut réécrire

$$\begin{cases} \frac{w}{F_1(\theta)} \frac{1}{\theta \sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(\theta) - \mu}{\sigma} \right)^2} = (1-w) \frac{\alpha}{\theta} \\ \frac{w}{F_1(\theta)} \frac{-1}{\theta \sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(\theta) - \mu}{\sigma} \right)^2} = (1-w) \frac{\alpha(\alpha+1)}{\theta} \left(1 + \frac{\ln(\theta) - \mu}{\sigma^2} \right)^{-1} \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned} (1-w) \frac{\alpha}{\theta} &= (1-w) \frac{\alpha(\alpha+1)}{\theta} \left(1 + \frac{\ln(\theta) - \mu}{\sigma^2} \right)^{-1} \\ \alpha + 1 &= \left(1 + \frac{\ln(\theta) - \mu}{\sigma^2} \right) \\ \mu &= \ln(\theta) - \alpha \sigma^2 \end{aligned}$$

□

Il reste donc les paramètres σ , α et θ à estimer.

Lognormale-Pareto généralisée

On teste le modèle LNPa3, on a X_1 qui est de loi lognormale et X_2 qui est de loi Pareto généralisée, la version de l'équation (4.2).

Définition 4. La fonction de densité de la loi composite lognormale-Pareto I est

$$f_X(x) = \begin{cases} w \frac{f_1(x)}{F_1(\theta)} & , 0 < x \leq \theta \\ (1-w)f_2(x) & , x > \theta \end{cases}$$

où

$$f_1(x) = \frac{1}{x \sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma} \right)^2}$$

et

$$f_2(x) = \frac{\alpha(\lambda + \theta)^\alpha}{(\lambda + x)^{\alpha+1}}, \quad x > \theta.$$

Si on tient compte de la continuité et de la dérivalibilité, on résout le système d'équations (4.3) et on trouve :

$$\begin{aligned} \mu &= \ln(\theta) - \sigma^2 \left(\theta \frac{\alpha+1}{\lambda+\theta} - 1 \right) \\ w &= \left(\frac{\lambda+\theta}{\alpha} \frac{f_{X_1}(\theta)}{F_{X_1}(\theta)} + 1 \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Démonstration. On a le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{w}{F_1(\theta)} \frac{1}{\theta \sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(\theta) - \mu}{\sigma} \right)^2} = (1-w) \frac{\alpha}{\lambda+\theta} \\ \frac{w}{F_1(\theta)} \frac{-1}{\theta^2 \sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(\theta) - \mu}{\sigma} \right)^2} \left(1 + \frac{\ln(\theta) - \mu}{\sigma^2} \right) = -(1-w) \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\lambda+\theta)^2} \end{cases}$$

On peut réécrire

$$\begin{cases} \frac{w}{F_1(\theta)} \frac{1}{\theta \sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(\theta) - \mu}{\sigma} \right)^2} = (1-w) \frac{\alpha}{\lambda+\theta} \\ \frac{w}{F_1(\theta)} \frac{-1}{\theta \sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(\theta) - \mu}{\sigma} \right)^2} = (1-w) \frac{\alpha(\alpha+1)\theta}{(\lambda+\theta)^2} \left(1 + \frac{\ln(\theta) - \mu}{\sigma^2} \right)^{-1} \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
(1-w)\frac{\alpha}{\lambda+\theta} &= (1-w)\frac{\alpha(\alpha+1)\theta}{(\lambda+\theta)^2} \left(1 + \frac{\ln(\theta) - \mu}{\sigma^2}\right)^{-1} \\
\frac{(\alpha+1)\theta}{\lambda+\theta} &= \left(1 + \frac{\ln(\theta) - \mu}{\sigma^2}\right) \\
\mu &= \ln(\theta) - \sigma^2 \left(\theta \frac{\alpha+1}{\lambda+\theta} - 1\right) \\
\mu &= \ln(\theta) - \sigma^2 \left(\frac{\alpha\theta - \lambda}{\lambda+\theta}\right)
\end{aligned}$$

□

Il reste donc les paramètres σ , α , λ et θ à estimer.

Weibull-Pareto I

On teste le modèle WePa2, on a X_1 qui suit une loi lognormale et X_2 qui suis une loi Pareto I.

Définition 5. La fonction de densité de la loi composite lognormale-Pareto I est

$$f_X(x) = \begin{cases} w \frac{f_1(x)}{F_1(\theta)} & , 0 < x \leq \theta \\ (1-w)f_2(x) & , x > \theta \end{cases}$$

où

$$f_{X_1}(x) = \frac{\tau}{\phi} \left(\frac{x}{\phi}\right)^{\tau-1} e^{-(\frac{x}{\phi})^\tau}, \quad x > 0$$

et

$$f_{X_2}(x) = \frac{\alpha\theta^\alpha}{x^{\alpha+1}}, \quad x > \theta.$$

Si on tient compte de la continuité et de la dérivableté, on résout le système d'équations (4.3) et on trouve :

$$\begin{aligned}
\phi &= \theta \left(\frac{\alpha}{\tau} + 1\right)^{-\frac{1}{\tau}}, \\
w &= \left(\frac{\theta}{\alpha} \frac{f_1(\theta)}{F_1(\theta)} + 1\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Démonstration. On a le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{w}{F_1(\theta)} \frac{\tau}{\phi} \left(\frac{\theta}{\phi}\right)^{\tau-1} e^{-(\frac{\theta}{\phi})^\tau} = (1-w) \frac{\alpha}{\theta} \\ \frac{w}{F_1(\theta)} \frac{\tau}{\phi^2} e^{-(\frac{\theta}{\phi})^\tau} \left[(\tau-1) \left(\frac{\theta}{\phi}\right)^{\tau-2} - \tau \left(\frac{\theta}{\phi}\right)^{2\tau-2} \right] = -(1-w) \frac{\alpha(\alpha+1)}{\theta^2} \end{cases}$$

On peut le réécrire

$$\begin{cases} \frac{w}{F_1(\theta)} \frac{\tau}{\phi} e^{-(\frac{\theta}{\phi})^\tau} = (1-w) \frac{\alpha}{\theta} \left(\frac{\theta}{\phi}\right)^{1-\tau} \\ \frac{w}{F_1(\theta)} \frac{\tau}{\phi} e^{-(\frac{\theta}{\phi})^\tau} = -(1-w) \phi \frac{\alpha(\alpha+1)}{\theta^2} \left[(\tau-1) \left(\frac{\theta}{\phi}\right)^{\tau-2} - \tau \left(\frac{\theta}{\phi}\right)^{2\tau-2} \right]^{-1} \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
(1-w)\frac{\alpha}{\theta}\left(\frac{\theta}{\phi}\right)^{1-\tau} &= -(1-w)\phi\frac{\alpha(\alpha+1)}{\theta^2}\left[\left(\tau-1\right)\left(\frac{\theta}{\phi}\right)^{\tau-2}-\tau\left(\frac{\theta}{\phi}\right)^{2\tau-2}\right]^{-1} \\
\left(\frac{\theta}{\phi}\right)^{1-\tau}\left[\left(\tau-1\right)\left(\frac{\theta}{\phi}\right)^{\tau-2}-\tau\left(\frac{\theta}{\phi}\right)^{2\tau-2}\right] &= -\phi\frac{\alpha+1}{\theta} \\
(\tau-1)\frac{\phi}{\theta}-\tau\left(\frac{\theta}{\phi}\right)^{\tau-1} &= -\phi\frac{\alpha+1}{\theta} \\
(\tau-1)-\tau\left(\frac{\theta}{\phi}\right)^{\tau} &= -(\alpha+1) \\
\frac{\theta}{\phi} &= \left(\frac{\alpha}{\tau}+1\right)^{\frac{1}{\tau}} \\
\phi &= \theta\left(\frac{\alpha}{\tau}+1\right)^{-\frac{1}{\tau}}
\end{aligned}$$

□

Il reste donc les paramètres τ , α et θ à estimer.

Weibull-Pareto généralisée

On teste le modèle WePa3, on a X_1 qui suis une loi lognormale et X_2 qui suis une loi Pareto généralisée définie comme dans l'équation (4.2).

Définition 6. La fonction de densité de la loi composite lognormale-Pareto généralisée est

$$f_X(x) = \begin{cases} w\frac{f_1(x)}{F_1(\theta)} & , 0 < x \leq \theta \\ (1-w)f_2(x) & , x > \theta \end{cases}$$

où

$$f_{X_1}(x) = \frac{\tau}{\phi}\left(\frac{x}{\phi}\right)^{\tau-1}e^{-\left(\frac{x}{\phi}\right)^{\tau}}, \quad x > 0$$

et

$$f_2(x) = \frac{\alpha(\lambda+\theta)^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}, \quad x > \theta.$$

Si on tient compte de la continuité et de la dérivabilité, on résout le système d'équations (4.3) et on trouve :

$$\begin{aligned}
\phi &= \theta\left(\frac{\alpha\theta-\lambda}{(\lambda+\theta)\tau}+1\right)^{-\frac{1}{\tau}}, \\
w &= \left(\frac{\lambda+\theta}{\alpha}\frac{f_1(\theta)}{F_1(\theta)}+1\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Démonstration. On a le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{w}{F_1(\theta)}\frac{\tau}{\phi}\left(\frac{\theta}{\phi}\right)^{\tau-1}e^{-\left(\frac{\theta}{\phi}\right)^{\tau}} = (1-w)\frac{\alpha}{\lambda+\theta} \\ \frac{w}{F_1(\theta)}\frac{\tau}{\phi^2}e^{-\left(\frac{\theta}{\phi}\right)^{\tau}}\left[\left(\tau-1\right)\left(\frac{\theta}{\phi}\right)^{\tau-2}-\tau\left(\frac{\theta}{\phi}\right)^{2\tau-2}\right] = -(1-w)\frac{\alpha(\alpha+1)}{(\lambda+\theta)^2} \end{cases}$$

On peut le réécrire

$$\begin{cases} \frac{w}{F_1(\theta)} \frac{\tau}{\phi} e^{-(\frac{\theta}{\phi})^\tau} = (1-w) \frac{\alpha}{\lambda+\theta} \left(\frac{\theta}{\phi}\right)^{1-\tau} \\ \frac{w}{F_1(\theta)} \frac{\tau}{\phi} e^{-(\frac{\theta}{\phi})^\tau} = -(1-w)\phi \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\lambda+\theta)^2} \left[(\tau-1) \left(\frac{\theta}{\phi}\right)^{\tau-2} - \tau \left(\frac{\theta}{\phi}\right)^{2\tau-2} \right]^{-1} \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned} (1-w) \frac{\alpha}{\lambda+\theta} \left(\frac{\theta}{\phi}\right)^{1-\tau} &= -(1-w)\phi \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\lambda+\theta)^2} \left[(\tau-1) \left(\frac{\theta}{\phi}\right)^{\tau-2} - \tau \left(\frac{\theta}{\phi}\right)^{2\tau-2} \right]^{-1} \\ \left(\frac{\theta}{\phi}\right)^{1-\tau} \left[(\tau-1) \left(\frac{\theta}{\phi}\right)^{\tau-2} - \tau \left(\frac{\theta}{\phi}\right)^{2\tau-2} \right]^{-1} &= -\phi \frac{\alpha+1}{\lambda+\theta} \\ (\tau-1) \frac{\phi}{\theta} - \tau \left(\frac{\theta}{\phi}\right)^{\tau-1} &= -\frac{\phi}{\theta} \theta \frac{\alpha+1}{\lambda+\theta} \\ (\tau-1) - \tau \left(\frac{\theta}{\phi}\right)^\tau &= -\theta \frac{\alpha+1}{\lambda+\theta} \\ \left(\frac{\theta}{\phi}\right)^\tau &= \left(\frac{\alpha\theta - \lambda}{(\lambda+\theta)\tau} + 1 \right) \\ \phi &= \theta \left(\frac{\alpha\theta - \lambda}{(\lambda+\theta)\tau} + 1 \right)^{-\frac{1}{\tau}} \end{aligned}$$

□

Il reste donc les paramètres τ , α et θ à estimer.

Résultats numériques

Pour maximiser la fonction de vraisemblance avec un outil numérique il faut obtenir la fonction de log-vraisemblance, qui est

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{L}(\theta, \dots | x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n \ln f_1(x_i) \times \mathbb{1}\{x_i \leq \theta\} + \sum_{i=1}^n \ln f_2(x_i) \times \mathbb{1}\{x_i > \theta\} \\ &\quad + \ln \left(\frac{w}{F_1(\theta)} \right) \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{x_i \leq \theta\} + \ln(1-w) \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{x_i > \theta\} \\ &\quad - n \ln \left(1 - w \frac{F_1(x_i)}{F_1(\theta)} \right) \times \mathbb{1}\{d \leq \theta\} - n \ln((1-w)(1 - F_2(d))) \times \mathbb{1}\{d > \theta\} \end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\ln \mathcal{L}(\theta, \dots | x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{f(x_i)}{1 - F(d)} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \ln \left(w \frac{f_1(x_i)}{F_1(\theta)} \times \mathbb{1}\{x_i \leq \theta\} + (1-w)f_2(x_i) \times \mathbb{1}\{x_i > \theta\} \right) - n \ln(1 - F(x_i)) \\
&= \sum_{i=1}^n \ln \left(w \frac{f_1(x_i)}{F_1(\theta)} \right) \times \mathbb{1}\{x_i \leq \theta\} + \sum_{i=1}^n \ln((1-w)f_2(x_i)) \times \mathbb{1}\{x_i > \theta\} - n \ln(1 - F(x_i)) \\
&= \sum_{i=1}^n \ln f_1(x_i) \times \mathbb{1}\{x_i \leq \theta\} + \sum_{i=1}^n \ln f_2(x_i) \times \mathbb{1}\{x_i > \theta\} \\
&\quad + \ln \left(\frac{w}{F_1(\theta)} \right) \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{x_i \leq \theta\} + \ln(1-w) \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{x_i > \theta\} \\
&\quad - n \ln \left(1 - w \frac{F_1(x_i)}{F_1(\theta)} \times \mathbb{1}\{d \leq \theta\} - (w + (1-w)F_2(d)) \times \mathbb{1}\{d > \theta\} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \ln f_1(x_i) \times \mathbb{1}\{x_i \leq \theta\} + \sum_{i=1}^n \ln f_2(x_i) \times \mathbb{1}\{x_i > \theta\} \\
&\quad + \ln \left(\frac{w}{F_1(\theta)} \right) \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{x_i \leq \theta\} + \ln(1-w) \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{x_i > \theta\} \\
&\quad - n \ln \left(1 - w \frac{F_1(x_i)}{F_1(\theta)} \right) \times \mathbb{1}\{d \leq \theta\} - n \ln((1-w)(1 - F_2(d))) \times \mathbb{1}\{d > \theta\}
\end{aligned}$$

□

On présente les paramètres estimés au tableau 4.3. On note que les paramètres μ , ϕ et w n'ont pas besoin d'être estimés.

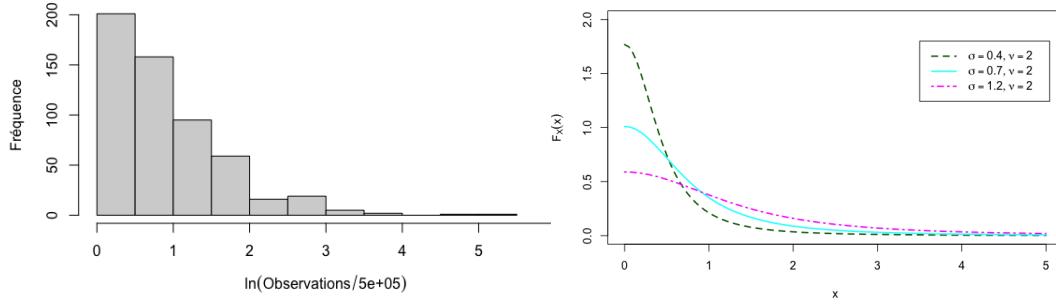
	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
LNPa2												
σ	0.70	0.74	0.84	1.03	0.83	0.89	0.78	0.89	0.88	0.71	0.86	0.96
α	1.19	1.25	1.29	1.47	1.21	1.30	1.43	1.21	1.39	1.63	1.67	1.40
θ	955	1018	1120	2424	1219	1413	1922	1840	2292	2056	2597	2282
WePa2												
τ	1.18	1.06	0.92	0.64	0.99	0.86	1.16	0.94	0.92	1.32	0.89	0.79
α	1.19	1.26	1.29	1.48	1.20	1.31	1.43	1.21	1.39	1.63	1.68	1.39
θ	934	998	1069	2295	1127	1327	1686	1684	2062	1779	2339	2015
LNPa3												
σ	0.60	0.82	0.81	1.00	1.07	0.81	0.78	0.90	0.93	0.71	0.85	0.97
α	0.98	1.33	1.19	1.33	0.98	1.02	1.44	1.14	1.21	1.27	1.59	1.32
λ	-255	84	-128	-291	-559	-462	20	-150	-535	-648	-135	-194
θ	1086	992	1239	2696	2461	1792	1905	2049	3156	2558	2682	2581
WePa3												
τ	1.47	0.99	0.93	0.65	0.58	0.95	1.16	0.96	0.89	1.27	0.89	0.75
α	0.97	1.32	1.18	1.30	0.98	1.00	1.42	1.14	1.28	1.28	1.52	1.32
λ	-268	68	-139	-374	-552	-490	-10	-1409	-256	-590	-301	-184
θ	1043	966	1193	2619	2323	1674	1690	1782	2326	2144	2536	2320

TABLEAU 4.3 – Paramètres estimés par maximum de vraisemblance pour les modèles par raccordement de lois

Pour les paramètres σ , τ et α les résultats obtenus sont pratiquement identiques à ceux de l'article dans tous les cas. Cependant, pour le seuil θ qu'on estime aussi par maximum de vraisemblance les résultats diffèrent légèrement de ceux de l'article, mais restent tout de même très proches. On note aussi que pour tous les modèles la variance n'existe jamais. De plus, pour les modèles LNPa3 et WePa3 pour les années 1981 et 1985 l'espérance n'existe pas non plus.

Famille *Folded-t*

Dans [Brazauskas and Kleefeld \(2011\)](#) les auteurs montrent que la famille de distribution *folded-t* peut être utilisée avec une simple transformation des données. Par exemple, en assurance il n'est pas rare qu'il y ait un déductible, donc si X est le montant de perte et d le déductible, alors $\ln\left(\frac{X}{d}\right)$ peut être approximé correctement par la loi *folded-t*.



(a) Histogramme du log des pertes de 1984 sur le déductible de 500 000 \$ (b) Fonction de densité de la loi *folded-t* selon différents paramètres

ILLUSTRATION 4.1 – Comparaison de l'histogramme du log des pertes de 1984 sur le déductible de 500 000 \$ et la fonction de densité de la loi *folded-t*

À l'illustration 4.1 on observe que si l'on prend $\sigma = 0.4$ et $\nu = 2$ on pourrait probablement bien estimer le log des pertes sur le déductible. Afin d'obtenir les meilleurs paramètres on voudra avec un outil numérique maximiser la log-vraisemblance, qui est

$$\ln \mathcal{L}(\sigma, \nu | x_1, \dots, x_n) = n \ln \left(\frac{2}{\sigma} \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu \pi} \Gamma(\frac{\nu}{2})} \right) - \frac{\nu+1}{2} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{x_i^2}{\nu \sigma^2} \right) - n \ln(1 - F(d)) \quad (4.4)$$

Donc en maximisant l'équation (4.4) on obtient les paramètres estimés au tableau 4.4.

	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
$\sigma (\times 10^{-3})$	266.4	341.4	325.0	565.1	399.9	412.0	722.0	631.4	728.7	803.4	744.4	626.3
ν	1.19	1.32	1.33	1.52	1.26	1.35	1.60	1.29	1.51	1.88	1.82	1.48

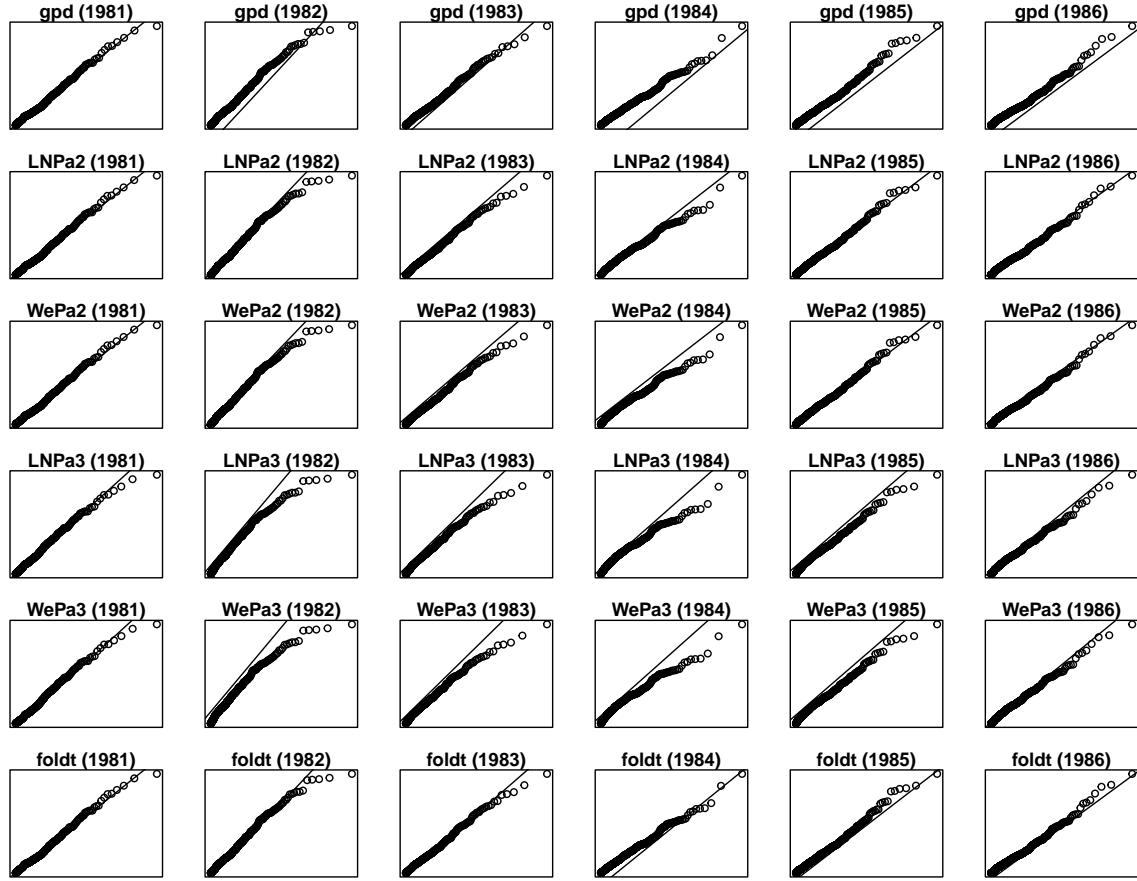
TABLEAU 4.4 – Paramètres estimés par maximum de vraisemblance de la loi *Folded-t* pour les pertes incendies de la base de données norvégienne de 1981 à 1992

On note que les résultats obtenus sont pratiquement en tout point égaux à ceux de l'article.

4.1.3 Validation des modèles

Graphique quantile-quantile

On commence par valider graphiquement l'ajustement des modèles à l'aide des graphiques quantile-quantile présentés à l'illustration 4.2.



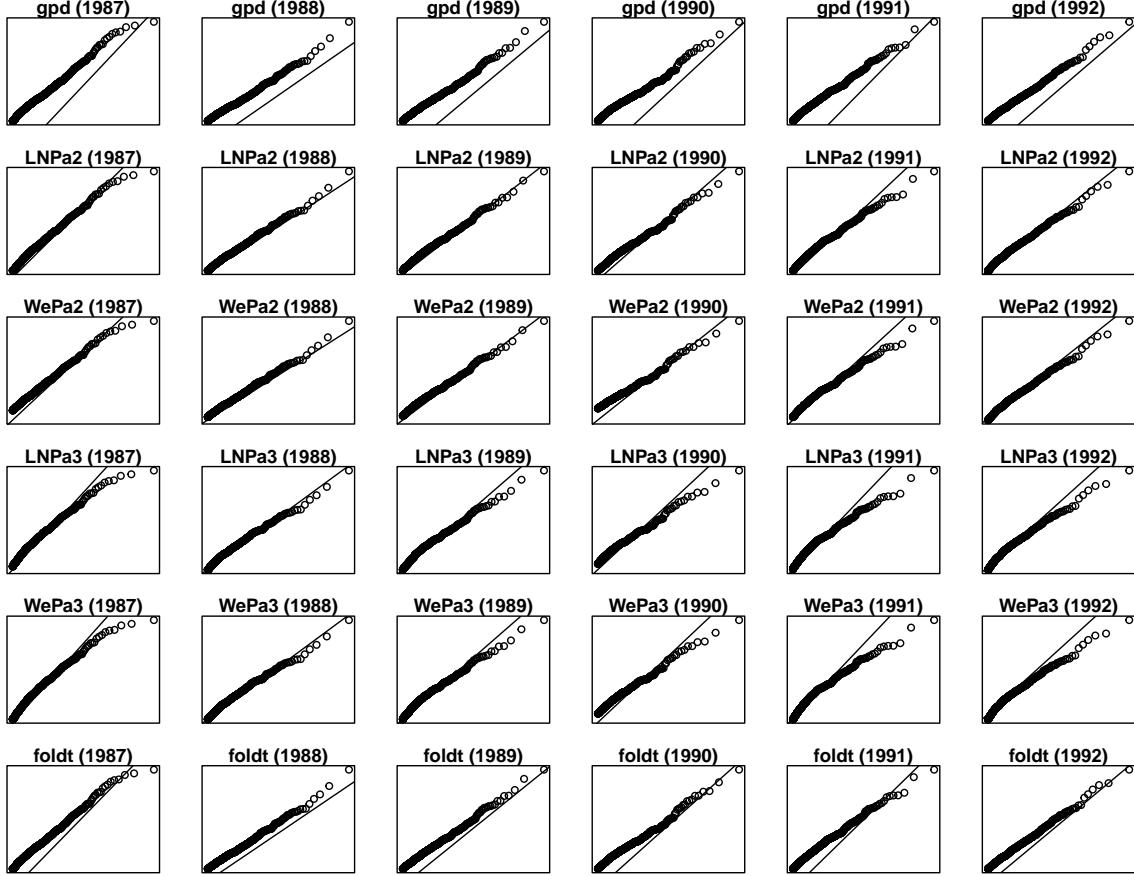


ILLUSTRATION 4.2 – *QQplots* pour les différents modèles pour les années respectives 1981-1992

La plus part des modèles semblent avoir une bonne adéquation, la plus part des lignes sont à 45 degrés. Par contre, le modèle GPD ne semble pas être un si bon modèle selon ce test graphique. En effet, on voit que les points passent au-dessus de la droite. On remarque aussi que pour l'année 1984 l'ajustement n'est pas très bon pour l'ensemble des modèles.

Statistiques d'ajustement du modèle

On veut évaluer chacun des modèles, pour ce faire on utilise la statistique de Kolmogorov-Smirnov (D) et celle de Anderson-Darling (A^2). On utilise la fonction de répartition estimée tronquée à gauche,

$$\hat{F}^*(x) = \frac{\hat{F}(x) - \hat{F}(500)}{1 - \hat{F}(500)}, \quad x > 500.$$

Pour les statistiques, à des fins calculatoires, on utilise des représentations adaptées. Pour la statistique D on a

$$D = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \left| F^*(x_{[j]}) - \frac{j-1}{n} \right|, \left| F^*(x_{[j]}) - \frac{j}{n} \right| \right\},$$

où $x_{[j]}$ sont les statistiques d'ordre. Pour la statistique A^2 on a

$$A^2 = -n + n \sum_{j=1}^n (j/n)^2 \ln \left(\frac{\hat{F}^*(x_{[j+1]})}{\hat{F}^*(x_{[j]})} \right) - n \sum_{j=0}^{n-1} (1-j/n)^2 \ln \left(1 - \frac{\hat{F}^*(x_{[j+1]})}{1 - \hat{F}^*(x_{[j]})} \right), \quad (4.5)$$

où $500 = x_{[0]} < x_{[1]} < \dots < x_{[n]} < x_{[n+1]} = \infty$ sont les statistiques d'ordre. Par contre, en utilisant l'équation (4.5) on n'obtient pas les résultats dans l'article. Pour vérifier, on utilise une autre représentation de la statistique A^2 , celle dans Chernobai et al. (2005), qui est définie comme suit :

$$\begin{aligned} A^2 = & -n + 2n \ln(1 - \hat{F}(x_{[0]})) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (1 + 2(n-j)) \ln(1 - \hat{F}(x_{[j]})) \\ & + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (1 - 2j) \ln(\hat{F}(x_{[j]}) - \hat{F}(x_{[0]})), \end{aligned} \quad (4.6)$$

où $500 = x_{[0]} < x_{[1]} < \dots < x_{[n]}$ sont les statistiques d'ordre. En calculant la statistique en utilisant l'équation (4.6) on obtient les mêmes résultats que si l'on utilise l'équation (4.5). On est assez sûr qu'il n'y a pas d'erreurs calculatoires, mais impossible de reproduire les valeurs de l'article. Cependant, pour la statistique D on obtient les mêmes résultats que dans l'article. Les résultats pour les deux statistiques sont présentés au tableau 4.5.

	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
Staistique D												
GPD	0.05	0.05	0.04	0.03	0.04	0.05	0.04	0.03	0.03	0.05	0.03	0.03
LNPa2	0.04	0.04	0.03	0.02	0.02	0.04	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
WePa2	0.04	0.04	0.03	0.03	0.02	0.04	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
LNPa3	0.04	0.04	0.03	0.02	0.03	0.04	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
WePa3	0.07	0.05	0.04	0.07	0.11	0.10	0.02	0.04	0.05	0.10	0.06	0.05
FT	0.05	0.04	0.03	0.02	0.03	0.04	0.02	0.03	0.02	0.04	0.03	0.02
Statistique A^2												
GPD	1.13	1.44	1.27	0.88	1.78	5.04	2.90	2.24	1.48	2.90	1.63	1.36
LNPa2	0.67	1.09	0.65	0.43	0.81	2.64	0.77	0.74	0.37	0.33	0.50	0.57
WePa2	0.67	1.05	0.61	0.51	0.82	2.50	0.68	0.64	0.40	0.25	0.60	0.58
LNPa3	0.44	1.09	0.62	0.41	0.82	2.47	0.77	0.73	0.36	0.26	0.49	0.57
WePa3	2.54	1.65	0.40	4.08	11.60	7.95	0.53	0.47	2.17	11.63	2.14	0.83
FT	0.97	1.32	0.98	0.44	1.15	3.62	1.33	1.09	0.53	1.08	0.64	0.64

TABLEAU 4.5 – Test d'ajustement de modèles pour les données d'incendie norvégienes (1981-1992)

Pour la statistique D les résultats sont assez similaires. Par contre, on remarque que le modèle WePa3 est moins bon que les autres pour les années 1981, 1984, 1985, 1986 et 1990. Pour la statistique A^2 on observe que le modèle GPD est moins bon que les autres. Pour le modèle WePa3, on observe la même chose que pour la statistique D .

Critères d'informations

Pour sélectionner le meilleur modèle, on peut sélectionner le modèle qui maximise la fonction de log-vraisemblance. Par contre, le défaut de cette méthode est que les modèles qui ont plus de paramètres ont tendance à avoir une log-vraisemblance plus élevée. Pour remédier à ce problème, on utilise les critères d'information Akaike Information Criterion (AIC) et Bayesian Information Criterion (BIC). L'avantage de ces deux critères est qu'ils accordent des pénalités aux modèles qui ont plus de paramètres. Le critère AIC est défini comme

$$AIC = 2\text{LVN} + 2\dim(\Theta) \quad (4.7)$$

où LVN est la log-vraisemblance négative et $\dim(\Theta)$ est la dimension du vecteur de paramètres. Le critère BIC, lui, est défini comme

$$BIC = 2\text{LVN} + \dim(\Theta) \ln(n) \quad (4.8)$$

où LNV et $\dim(\Theta)$ ont la même signification que pour l'AIC et n est le nombre d'observations.

	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
Log-vraisemblance												
GPD	3439	3393	3213	4457	4891	5160	6232	6849	5886	5066	5008	4985
LNPa2	3437	3393	3213	4456	4889	5157	6228	6845	5882	5057	5005	4983
WePa2	3437	3393	3212	4456	4889	5157	6227	6844	5882	5056	5005	4983
LNPa3	3437	3393	3212	4456	4889	5157	6227	6844	5882	5056	5005	4983
WePa3	3436	3393	3212	4456	4888	5154	6227	6844	5882	5055	5005	4983
FT	3438	3394	3213	4456	4890	5159	6229	6846	5883	5060	5006	4983
Akaike Information Criterion, AIC												
GPD	6881	6791	6431	8919	9786	10325	12469	13701	11776	10137	10020	9973
LNPa2	6880	6792	6431	8918	9784	10320	12462	13696	11770	10119	10017	9971
WePa2	6880	6792	6431	8918	9784	10319	12460	13695	11770	10118	10016	9971
LNPa3	6880	6794	6433	8920	9785	10318	12464	13697	11772	10120	10018	9973
WePa3	6879	6794	6433	8920	9785	10317	12462	13696	11772	10118	10018	9973
FT	6881	6791	6430	8916	9784	10321	12462	13696	11770	10124	10016	9970
Bayesian Information Criterion, BIC												
GPD	6889	6799	6439	8927	9795	10334	12478	13711	11785	10146	10029	9982
LNPa2	6892	6805	6443	8931	9798	10333	12475	13710	11784	10133	10030	9985
WePa2	6892	6804	6443	8931	9798	10333	12474	13709	11784	10132	10030	9985
LNPa3	6896	6810	6449	8937	9802	10336	12482	13716	11790	10137	10036	9991
WePa3	6895	6810	6449	8937	9802	10335	12481	13715	11790	10136	10036	9991
FT	6889	6799	6438	8925	9792	10330	12471	13706	11779	10133	10024	9979

TABLEAU 4.6 – Mesures d'information des modèles ajustés pour les données d'incendie norvégiennes (1981-1992)

Dans le tableau 4.6, on observe plusieurs résultats. Selon le critère du maximum de vraisemblance les modèles LNPa3 et WePa2 performent très légèrement mieux. À noter qu'il s'agit de modèles à 4 paramètres. Pour le critère AIC, les résultats sont tous relativement proches l'un de l'autre et finalement, pour le critère BIC, on constate que le modèle FT est meilleur que les autres.

4.1.4 Mesure de la queue de distribution

Risque au fil du temps

Pour mesurer le risque, on utilise deux mesures la *VaR* et la *tail-Conditional mean* (TCM). La mesure *VaR* est définie comme suit, avec un niveau de confiance à 90%,

$$VaR_{0.90}(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq 0.90\}, \in (0, 1). \quad (4.9)$$

La mesure TCM, au même niveau de confiance, est définie comme :

$$TCM_{0.90}[X] = \text{med}[X | X > VaR_{0.90}(X)] = VaR_{0.95}(X), \quad (4.10)$$

voir [So and Wong \(2012\)](#). On préfère utiliser la mesure TCM plutôt que la mesure *TVaR*, comme elle existe toujours.

Des valeurs légèrement différentes sont obtenues, tableau 4.7, principalement en raison de légères variations dans certains paramètres.

Modèle	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
GPD	0.49	0.92	0.74	1.62	1.06	1.01	2.15	2.16	2.28	2.17	2.05	1.91
	0.94	1.63	1.33	2.69	1.93	1.80	3.47	3.83	3.77	3.36	3.17	3.18
LNPa2	2.42	2.12	1.87	2.12	2.35	2.09	2.93	3.19	3.00	2.83	2.57	2.52
	4.33	3.69	3.20	3.40	4.17	3.56	4.76	5.68	4.94	4.33	3.89	4.14
WePa2	1.93	1.65	1.42	1.43	1.87	1.60	2.54	2.59	2.45	2.54	2.10	1.95
	3.45	2.86	2.43	2.32	3.32	2.71	4.14	4.59	4.02	3.90	3.17	3.20
LNPa3	2.65	1.97	1.92	2.15	1.87	2.16	2.93	3.15	2.89	2.74	2.57	2.50
	5.11	3.38	3.33	3.43	3.23	3.82	4.76	5.66	4.71	4.27	3.89	4.09
WePa3	2.20	1.57	1.44	1.47	1.13	1.68	2.55	2.59	2.39	2.43	2.09	1.87
	4.20	2.70	2.47	2.36	1.93	2.87	4.15	4.65	3.91	3.76	3.14	3.04
FT	1.29	1.45	1.37	2.07	1.79	1.71	2.52	2.77	2.69	2.45	2.33	2.35
	2.33	2.50	2.34	3.34	3.14	2.90	3.98	4.81	4.36	3.68	3.53	3.84

TABLEAU 4.7 – Mesure VaR et TCM (2ieme lignes) au niveau de confiance 90%, pour les données d’incendie norvégiennes (1981-1992)

Les auteurs constatent qu'il n'y a pas de tendance apparente tant à la hausse qu'à la baisse. On peut aussi noter que les modèles avec la loi lognormale donnent des valeurs plus élevées que les autres modèles. Alors que le modèle GPD donne des valeurs inférieures aux autres.

Prédiction

On s'intéresse à la capacité des 6 modèles à prédire le risque de l'année suivante. Pour ce faire, on utilise la probabilité suivante :

$$\Pr\left(X > \widehat{VaR}_\kappa(X) | X > 500000\right) = \frac{1 - \kappa}{\Pr(X > 500000)}, \quad \widehat{VaR}_\kappa(X) > 500000.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \Pr(X > \widehat{VaR}_\kappa(X) | X > 500000) &= \frac{\Pr(X > \widehat{VaR}_\kappa(X), X > 500000)}{\Pr(X > 500000)} \\ &= \frac{\Pr(X > \widehat{VaR}_\kappa(X))}{\Pr(X > 500000)} \\ &= \frac{1 - F_X(F_X^{-1}(\kappa))}{\Pr(X > 500000)} \\ &= \frac{1 - \kappa}{\Pr(X > 500000)} \end{aligned}$$

□

Si $\widehat{VaR}_\kappa(X) < 500000$ alors la probabilité sera de 1.

κ	Modèle	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991
0.90	GPD	1.00	0.52	0.65	0.29	0.47	0.48	0.23	0.25	0.23	0.21	0.22
		1.00	0.51	0.72	0.27	0.46	0.57	0.24	0.22	0.16	0.19	0.22
	LNPa2	0.17	0.18	0.21	0.19	0.18	0.19	0.13	0.15	0.14	0.12	0.14
		0.17	0.17	0.23	0.20	0.16	0.22	0.16	0.12	0.11	0.11	0.16
	WePa2	0.22	0.25	0.29	0.34	0.24	0.27	0.16	0.19	0.19	0.15	0.20
		0.21	0.23	0.34	0.34	0.20	0.31	0.19	0.18	0.15	0.13	0.21
	LNPa3	0.15	0.20	0.19	0.19	0.23	0.17	0.13	0.15	0.15	0.12	0.14
		0.15	0.19	0.23	0.20	0.20	0.21	0.16	0.12	0.11	0.11	0.16
	WePa2	0.16	0.28	0.25	0.27	0.29	0.18	0.16	0.18	0.18	0.13	0.18
		0.18	0.25	0.33	0.32	0.42	0.29	0.19	0.17	0.15	0.15	0.21
	FT	0.36	0.30	0.31	0.20	0.25	0.25	0.17	0.18	0.17	0.17	0.17
		0.33	0.28	0.36	0.20	0.21	0.28	0.19	0.16	0.12	0.15	0.18
0.95	GPD	0.51	0.26	0.33	0.14	0.24	0.24	0.11	0.13	0.11	0.11	0.11
		0.49	0.23	0.37	0.14	0.19	0.26	0.13	0.10	0.07	0.09	0.11
	LNPa2	0.08	0.09	0.10	0.10	0.09	0.09	0.07	0.07	0.07	0.06	0.07
		0.09	0.10	0.10	0.11	0.08	0.10	0.10	0.05	0.04	0.06	0.09
	WePa2	0.11	0.12	0.15	0.17	0.12	0.13	0.08	0.10	0.09	0.07	0.10
		0.11	0.12	0.15	0.17	0.10	0.15	0.11	0.07	0.06	0.08	0.11
	LNPa3	0.07	0.10	0.10	0.09	0.11	0.08	0.07	0.07	0.07	0.06	0.07
		0.07	0.10	0.09	0.11	0.11	0.09	0.10	0.06	0.04	0.06	0.09
	WePa3	0.08	0.14	0.13	0.13	0.15	0.09	0.08	0.09	0.09	0.07	0.09
		0.09	0.13	0.14	0.17	0.19	0.14	0.11	0.07	0.06	0.08	0.11
	FT	0.18	0.15	0.16	0.10	0.13	0.13	0.09	0.09	0.09	0.08	0.09
		0.17	0.14	0.17	0.11	0.11	0.14	0.11	0.07	0.06	0.08	0.10

TABLEAU 4.8 – Valeur prédictée et actuelle (2ieme lignes) de $\Pr(X > VaR_\kappa(X)|X > 500000)$, pour les données d’incendie norvégiennes (1981-1992)

Les valeurs du tableau 4.8 sont calculées pour les six modèles précédents avec les paramètres trouvés par maximum de vraisemblance. La probabilité actuelle peut être estimée empiriquement,

$$\widehat{\Pr}(X > \widehat{VaR}_\kappa(X)|X > 500000) = \frac{1}{n_{t+1}} \sum_{i=1}^{n_{t+1}} \mathbb{1}\{X_i > \widehat{VaR}_\kappa(X)\}.$$

4.2 Données ville Toronto

4.2.1 Description des données

On utilise une base de données canadienne provenant de Toronto pour tester les méthodes proposées dans [Brazauskas and Kleefeld \(2016\)](#). La base de données est accessible sur le site [City of Toronto’s Open Data Portal](#)¹. Le jeu de données contient de l’information sur 17 536 cas d’incendies. Pour chaque incident, il y a 43 variables explicatives. Dans le tableau 4.9, on présente 7 de ces 43 variables explicatives et la liste complète se trouve dans l’annexe A.1.

1. *Fire Services*, <https://open.toronto.ca/dataset/fire-incidents/>

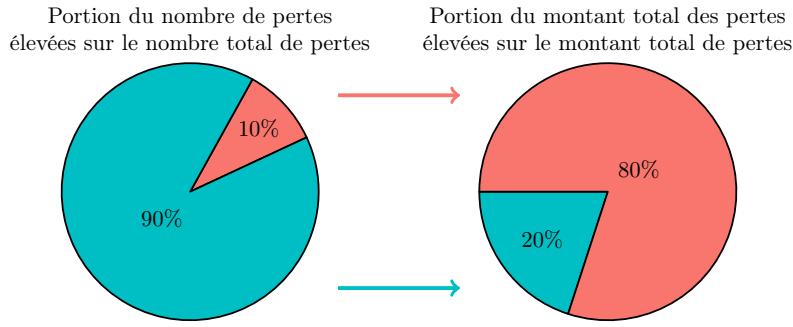


ILLUSTRATION 4.3 – Contribution des 10% plus grosses pertes estimées au total des pertes estimées

Variable	Définition
Emplacement d'origine :	Brève description de l'emplacement d'origine du feu.
Perte civile :	Nombre de personnes décédées suite à l'incendie.
Pertes estimées :	Montants de sinistre estimé.
Contagion :	Description de la contagion de l'incendie.
Nombre de répondants à l'appel :	Nombre de personnes présentes pour régler l'incendie.
État de l'incendie à l'arrivée :	Éteint, avec fumée, contagion.
Type de bâtiment :	Normal, en construction, en rénovation, etc.

TABLEAU 4.9 – Description de 7 variables explicatives des données de sinistre incendie de la ville de Toronto

Pour la présente analyse, seule la variable *pertes estimées* sera utilisée. Il est important de souligner qu'il s'agit de pertes estimées, ce qui explique qu'il y a plusieurs occurrences d'un même montant. Afin de faciliter l'analyse, il a été nécessaire de retirer les 1909 données dont les pertes estimées sont indisponibles. De plus, on a aussi retiré les 2056 données dont les pertes estimées sont de 0. Ainsi, on fait l'analyse avec $n = 13\,571$ données. Au tableau 4.10, on présente les statistiques descriptives de la variable *pertes estimées* après les modifications.

Min.	1 ^{er} Qu.	Médiane	Moyenne	Variance	3 ^{er} Qu.	Max.
1	1000	5000	40 296	2.38×10^{11}	20 000	5×10^7

TABLEAU 4.10 – Statistiques descriptives des $n = 13571$ pertes estimées retenues de la base de données de sinistres incendies de la ville de Toronto

La moyenne des pertes est de 40 296 \$ CAN et elle est considérablement plus élevée que la médiane des pertes qui est de 5000 \$ CAN. De son côté, la variance des pertes est extrêmement élevée. Cela pourrait potentiellement indiquer qu'elle n'existe pas. De plus, l'illustration 4.4 permet de bien voir que certaines valeurs sont extrêmement élevées comparativement aux autres. En effet, l'illustration 4.4a montre les pertes totales de 2011 à 2019. La ligne horizontale rouge représente le 99.9 % percentile qui est de 2.7 millions. On remarque qu'il y a quand même 14 pertes qui sont au-dessus du 99.9 % percentile. L'illustration 4.4b montre les sinistres supérieurs à 1 million. La ligne horizontale rouge est la borne inférieure. On constate qu'il y a 69 pertes supérieures ou égales à 1 million. Sur l'illustration 4.4, on observe que la perte maximale de 50 millions n'est arrivée qu'une seule fois durant ces années. Par contre, cette observation ne peut pas être considérée comme aberrante, car elle est typique des données de sinistres incendies. On observe ce phénomène dans plusieurs bases de données de sinistre incendie.

On s'intéresse aussi à la fréquence des sinistres. Au tableau 4.11, on constate qu'il y a peu de montants de sinistre extrêmement élevés en comparaison avec les sinistres plus normaux, mais les sinistres élevés restent

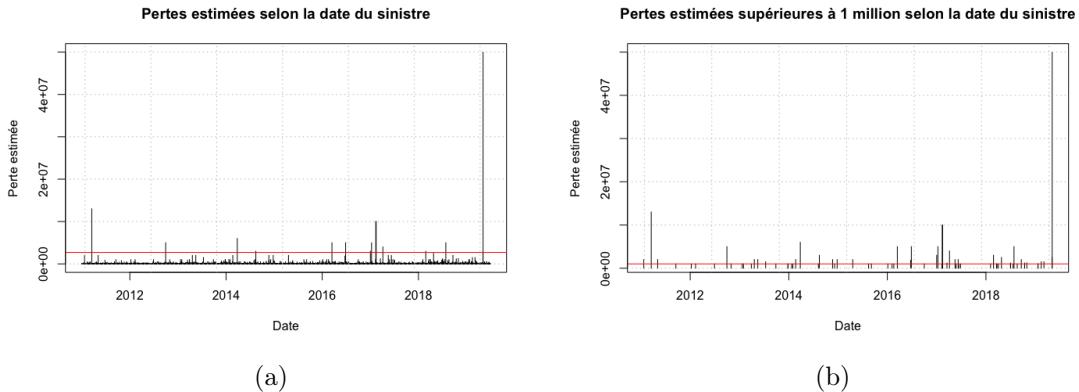


ILLUSTRATION 4.4 – Pertes estimées selon la date du sinistre

responsables d'une grande partie des pertes totales. On constate cela en regardant l'illustration 4.3, plus de 80 % des pertes totales sont dues à 10 % des données.

TABLEAU 4.11 – Nombre de données dans des tranches de montants de sinistres

4.2.2 Modélisation de la sévérité

Pour la modélisation des pertes incendie de la ville de Toronto on utilisera la version tronquée de la Pareto généralisée présentée à l'équation (3.1) dont on rappelle la fonction de répartition

$$F_X(x) = 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\sigma}(x - \theta)\right)^{-\frac{1}{\xi}}, \quad x \geq \theta$$

Pour présenter les résultats, on appliquera les transformations suivantes $\alpha = \frac{1}{\xi}$ et $\lambda = \frac{\sigma}{\xi}$, afin d'utiliser les paramètres standard de la loi Pareto. Encore une fois, pour estimer ces paramètres on utilisera une méthode numérique pour maximiser la fonction de log-vraisemblance. On rappelle que dans [Barde \(2022\)](#) le seuil pour cette base de données avait été déterminé à 75 000. Cependant, dans cet article les auteurs choisissent le seuil en l'incluant comme paramètre et en l'estimant par maximum de vraisemblance. On se servira donc de la valeur de 75 000 comme valeur de départ.

	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
LN-PaG								
μ	8.26	8.44	8.24	8.56	8.68	8.61	8.85	9.04
r	2.63	2.76	2.48	2.69	2.72	2.57	2.69	2.80
α	1.61	2.14	1.58	1.35	2.31	1.61	1.10	1.31
λ	133909	178184	143275	122003	230095	161367	99800	116401
w	0.93	0.92	0.91	0.92	0.93	0.91	0.92	0.90
θ	75000	75000	79999	80068	80000	80000	80004	83319
We-PaG								
τ	0.54	0.54	0.57	0.55	0.57	0.58	0.57	0.58
β	6122	6559	6167	7091	7218	7387	8146	8990
α	1.57	1.73	1.53	1.29	1.95	1.42	1.10	1.31
λ	133116	144386	129907	109428	163092	119967	92171	108796
w	0.93	0.93	0.90	0.91	0.91	0.90	0.91	0.88
θ	80000	100000	75000	80000	75000	75000	75000	75000
GB2-PaG								
a	0.50	0.49	0.49	0.47	0.58	0.54	0.45	0.77
b	12947	23551	11936	19350	21116	16705	16436	22103
p	1.46	1.40	1.65	1.61	1.15	1.37	1.77	0.77
q	2.64	3.17	2.78	3.08	2.52	2.61	2.70	1.82
α	1.55	1.74	1.37	1.28	1.86	1.20	1.08	1.04
λ	128536	144342	123289	106466	155004	103518	94051	86866
w	0.93	0.93	0.92	0.91	0.92	0.91	0.92	0.90
θ	79987	99996	99000	79988	79987	99000	80842	99999

TABLEAU 4.12 – Paramètres estimés par maximum de vraisemblance des raccordements de loi pour les pertes incendies de la base de données de Toronto

On présente au tableau 4.12 les paramètres pour les raccordements de lois construits. On observe que peu importe le raccordement de lois, le paramètre θ reste entre 75 000 et 100 000, même s'il est majoritairement 75 000. Pour le paramètre α , qui influence la queue de la distribution, on remarque qu'il est pratiquement toujours inférieur à 2. Il y a seulement pour le modèle LN-PaG pour les années 2011 et 2015 que le paramètre α est supérieur à 2. Donc, dans la grande majorité des modèles la variance est infinie.

4.2.3 Validation des modèles

Graphiques quantile-quantile

On commence par valider graphiquement l'ajustement des modèles à l'aide des graphiques quantile-quantile présentés aux illustrations 4.5, 4.6 et 4.7.

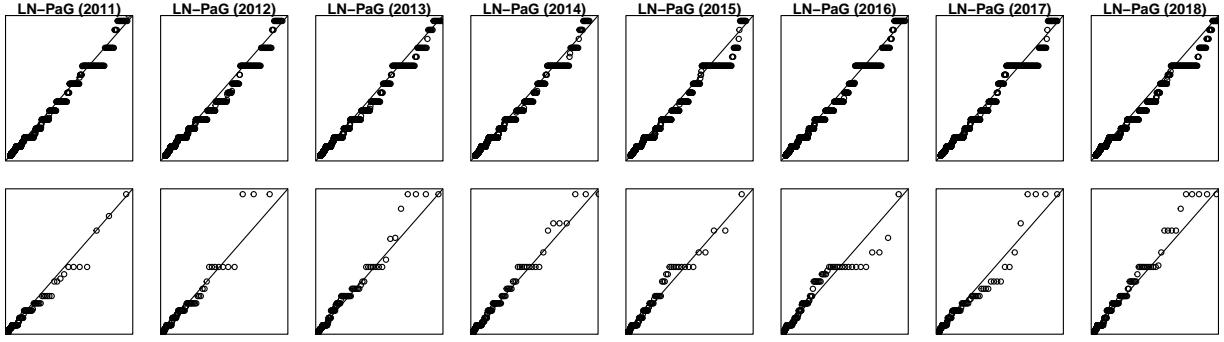


ILLUSTRATION 4.5 – *Q-Qplots* pour les observations sous le seuil (ligne 1) et pour les observations au-dessus du seuil (ligne 2), pour le modèle LN-PaG (2011-2018)

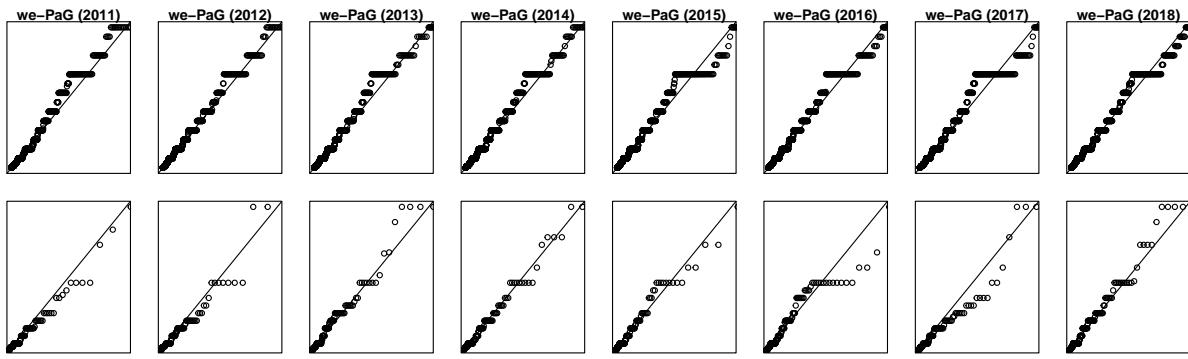


ILLUSTRATION 4.6 – *Q-Qplots* pour les observations sous le seuil (ligne 1) et pour les observations au-dessus du seuil (ligne 2), pour le modèle We-PaG (2011-2018)

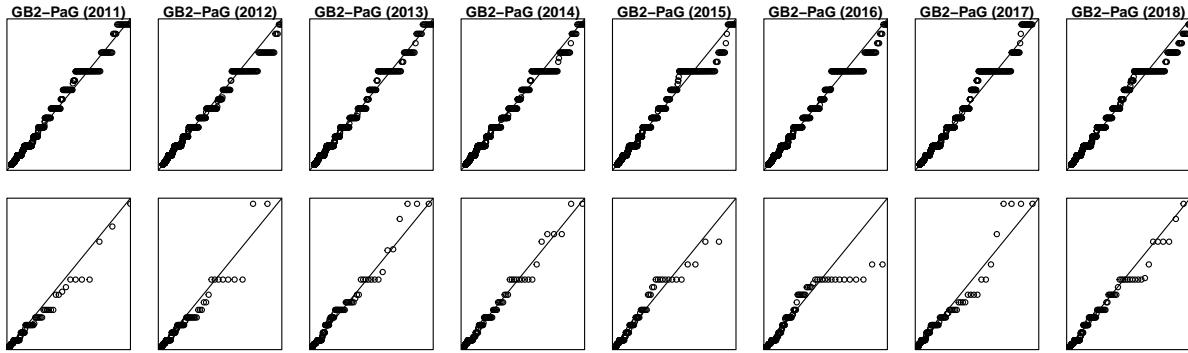


ILLUSTRATION 4.7 – *Q-Qplots* pour les observations sous le seuil (ligne 1) et pour les observations au-dessus du seuil (ligne 2), pour le modèle GB2-PaG (2011-2018)

On remarque que l'ajustement est globalement assez bon. Par contre, pour les trois modèles, l'ajustement semble moins bon pour l'année 2017. En effet, on remarque que les points passent davantage sous la droite comparativement aux autres années. Il est donc difficile avec ce test de dire quel est le meilleur modèle.

Tests statistiques

Une autre façon de vérifier l'ajustement des modèles et de regarder des statistiques d'ajustement. On utilise encore les statistiques D et A^2 .

	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Statistique D								
LN-PaG	0.06	0.06	0.06	0.06	0.07	0.06	0.06	0.07
We-PaG	0.07	0.07	0.08	0.07	0.06	0.07	0.07	0.06
GB2-PaG	0.06	0.07	0.07	0.06	0.06	0.07	0.06	0.06
Statistique A^2								
LN-PaG	4.55	3.53	3.84	3.53	4.81	4.07	3.90	5.73
We-PaG	5.04	3.74	4.48	4.15	3.79	4.18	4.43	3.52
GB2-PaG	3.13	3.36	3.21	2.94	3.02	3.49	3.16	3.67

TABLEAU 4.13 – Test d’ajustement de modèles pour les données canadienne de périls incendies

Au tableau 4.13 on présente les valeurs obtenues pour les deux statistiques pour les deux modèles. On observe que pour la statistique D le modèle We-PaG est légèrement moins bon que les deux autres, qui semblent assez équivalents. Pour la statistique A^2 le modèle GB2-PaG est meilleur que les deux autres. Selon ces tests le modèle GB2-PaG serait celui à utiliser.

Critère d’information

On cherche à comparer la log-vraisemblance et les critères d’information AIC et BIC pour chacun des 3 modèles.

	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Log-vraisemblance								
LN-PaG	16069	16095	16103	16905	16226	16723	16140	18881
We-PaG	16072	16087	16110	16898	16215	16728	16140	18860
GB2-PaG	16050	16083	16089	16894	16208	16707	16130	18851
Akaike Information Criterion, AIC								
LN-PaG	32150	32202	32217	33822	32465	33457	32292	37774
We-PaG	32155	32187	32232	33807	32442	33467	32291	37732
GB2-PaG	32116	32182	32194	33805	32432	33429	32277	37717
Bayesian Information Criterion, BIC								
LN-PaG	32183	32234	32249	33855	32497	33489	32324	37806
We-PaG	32187	32219	32264	33840	32475	33499	32323	37765
GB2-PaG	32159	32224	32237	33848	32475	33472	32320	37761

TABLEAU 4.14 – Mesures d’information des modèles ajustés pour les données d’incendie de Toronto (2011-2018)

Au tableau 4.14, on présente les valeurs obtenues pour ces différents critères. On remarque que le modèle GB2-PaG est meilleur que les deux autres selon le critère AIC et BIC. Alors que les modèles LN-PaG et We-PaG sont relativement équivalents. En effet, pour certaines années le modèle LN-PaG est meilleur que celui We-PaG alors que pour d’autres c’est l’inverse. Selon ce test le modèle GB2-PaG serait le modèle à sélectionner.

Conclusion

Selon les différents tests effectués, autant graphiques que qualitatifs, le modèle GB2-PaG serait le meilleur modèle parmi les trois testés. Pour les deux autres, il n’était pas très évident de dire lequel était réellement meilleur que l’autre.

4.2.4 Mesure de la queue de la distribution

Risque au fil du temps

On calcule la mesure VaR et la mesure TCM, dont les définitions sont données en (4.9) et en (4.10), pour les 3 modèles.

	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
LN-PaG	53680	59251	72661	67429	61019	71068	64542	84927
	104969	114281	148013	135497	117150	148591	124776	167301
We-PaG	45629	52764	75683	68103	57585	77389	66992	87669
	109768	129393	150519	146140	126429	154148	145589	172558
GB2-PaG	50688	60200	72075	71473	59778	78614	62494	98220
	109057	129444	152992	145159	122951	158853	124164	180194

TABLEAU 4.15 – Mesures VaR et TCM (2ièmes lignes) au niveau de confiance 90%, pour les données d’incendie de Toronto (2012-2018)

Les résultats pour ces mesures sont présentés à l’illustration 4.15. Avec ces modèles il aurait été possible de calculer la mesure $TVaR$ au lieu de la mesure TCM comme tous les α sont supérieurs à 1, mais pour rester cohérent avec l’article la mesure TCM est calculée. On peut constater que pour cette base de données les années 2013, 2014, 2016 et 2018 ont les mesures les plus élevées. On pourrait peut-être croire qu’il y a une faible tendance à la hausse au fil des années comme les mesures en 2011 et 2012 sont moins élevées que celle des années suivantes, alors que celles de 2018 sont plus élevées que les autres.

Prédiction

Afin de comparer le pouvoir prédictif de nos 3 modèles, on utilise les données de l’année précédente pour estimer $\Pr(X > 100000)$ de l’année actuel.

Modèle	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Actuel	0.05	0.06	0.05	0.04	0.06	0.05	0.06
LN-PaG	0.05	0.06	0.08	0.07	0.06	0.07	0.06
We-PaG	0.06	0.07	0.08	0.07	0.06	0.08	0.07
GB2-PaG	0.05	0.07	0.08	0.07	0.06	0.09	0.06

TABLEAU 4.16 – Valeurs prédictive et actuelle de $\Pr(X > 100000)$, pour les données d’incendie de Toronto (2012-2018)

À l’illustration 4.16 on présente le résultat de cette probabilité pour chacun des modèles. On remarque que chaque modèle prédit de façon assez similaire. De plus, tous les modèles ont tendance à prédire une probabilité plus élevée que ce qui est vraiment survenu, principalement pour les années 2014, 2015 et 2017. Pour les autres années, on obtient quelque chose de très près de ce qui est survenu.

4.3 Données *National Fire Information Database*

4.3.1 Description des données

On veut aussi appliquer les techniques présentées dans Brazauskas and Kleefeld (2016) à la base de données NFID. Cette base de données contient de l’information sur 467 929 cas d’incendies. Pour chaque incident, il y a 136 variables explicatives. Dans le tableau 4.17, on présente 5 des 136 variables explicatives et la liste complète se trouve dans l’annexe A.2.

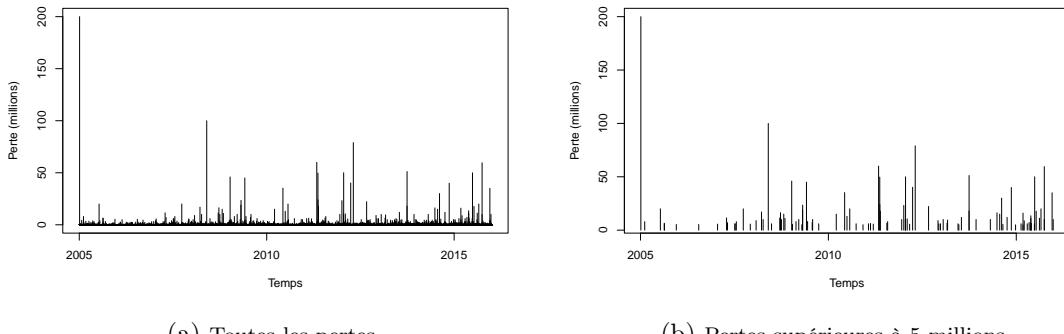


ILLUSTRATION 4.8 – Pertes estimées selon la date du sinistre

Variable	Définition
DOLLOSSA :	Montants de sinistre estimé pour le bâtiment
PROPCLAS :	La classe du bâtiment
GENCOST :	Type de construction
SPRINPRO :	Présence d'un système de gicleur
FIREDET :	Présence d'un système de détection de fumé.

TABLEAU 4.17 – Description de 7 variables explicatives des données de sinistre incendie de la ville de Toronto

Pour cette analyse, on utilisera seulement la variable *DOLLOSSA*. Afin de faciliter l'analyse, il a été nécessaire de retirer les 360 181 observations dont la perte est indisponible. De plus, on a aussi retiré les 5112 observations dont les pertes sont de 0. Donc, on fait l'analyse avec les $n = 102\,635$ données restantes. Au tableau 4.18, on présente les statistiques descriptives de la variable *DOLLOSSA* après modifications.

Min.	$1^{er} Qu.$	Médiane	Moyenne	Variance	$3^{er} Qu.$	Max.
1	1000	5000	75 800	9.73×10^{11}	30 000	2×10^8

TABLEAU 4.18 – Statistiques descriptives des $n = 102\,635$ pertes retenues de la base de données NFID

On observe les mêmes résultats que pour la base de données des sinistres incendies de la ville de Toronto : une moyenne plus élevée que la médiane et une variance très élevée. On observe encore une fois que les 10% des plus gros sinistres représentent plus de 80% de la perte totale. À l'aide de l'illustration 4.8, on constate encore que certaines pertes sont vraiment plus élevées que les autres. L'illustration 4.8b montre l'ensemble des sinistres supérieurs à 5 millions, au nombre de 102.

Au tableau 4.19 on présente les fréquences des sinistres dans certaines tranches pour chaque année. On constate, encore, qu'il y a peu de montants de sinistres extrêmement élevés en comparaison avec les sinistres plus normaux, mais les gros sinistres restent responsables d'une grande partie des pertes totales.

Intervalles	Nombre de données						
	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
[1, 50 000[7134	6869	7581	8083	7531	7234	7428
[5 × 10 ⁴ , 5 × 10 ⁵ [1594	1431	2022	1902	1778	1811	1752
[5 × 10 ⁵ , 1 × 10 ⁶ [127	124	388	159	174	145	166
[1 × 10 ⁶ , 1 × 10 ⁷ [78	58	107	98	89	83	89
[1 × 10 ⁷ , 5 × 10 ⁷ [6	4	4	6	4	6	9
[5 × 10 ⁷ , ∞[0	0	1	2	1	0	2

TABLEAU 4.19 – Nombre de données par tranche de montants de sinistres

Dans cette base de données, la variable *SPRINPRO* donne l’information sur la présence d’un système d’arroseur dans le bâtiment. Il serait donc intéressant de regarder si la présence ou non d’un tel système a une influence sur le montant de la perte. Au tableau 4.20, on présente les pertes moyennes pour les sinistres supérieurs à 1 million selon la présence d’un système d’arroseurs.

Arroseur	Perte moyenne	Nombre	Pourcentage
Système d’arroseurs	2 885 714	7	32%
Pas d’arroseur	6 823 333	15	68%

TABLEAU 4.20 – Pertes moyennes pour les sinistres supérieurs à 1 million selon la présence d’un système d’arroseur

On constate que la présence d’un système d’arroseurs peut influencer la perte moyenne. En effet, si l’on prend tous les sinistres supérieurs à 1 million pour lesquels on a l’information sur la présence ou non d’un système d’arrosage, on obtient une perte moyenne globale de 5 570 455 \$. Si la propriété est munie d’un système d’arroseurs, la perte moyenne passe à 2 885 714 \$ et augmente à 6 823 333 \$ pour ceux qui ne le sont pas. Donc, la présence d’un système d’arrosage a bien un effet significatif sur la perte moyenne des sinistres. Pour cette présente analyse on n’en tiendra pas compte, mais il s’agirait d’une piste intéressante pour de futurs travaux.

4.3.2 Modélisation de la sévérité

Pour modéliser les montants de pertes de cette base de données, on utilise la même approche que pour la section 4.2.2. On notera aussi que le seuil avait déjà été analysé et évalué à 350 000 ([Barde, 2022](#)). On utilisera donc cette valeur comme seuil de départ pour l’optimisation.

	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
LN-PaG							
μ	8.74	8.72	9.06	8.91	8.93	9.07	9.24
σ	2.57	2.60	2.55	2.51	2.51	2.58	3.43
α	0.87	0.63	0.50	0.89	0.80	0.87	0.92
λ	275433	244808	244807	244807	245082	244808	253558
w	0.97	0.96	0.93	0.96	0.96	0.97	0.96
θ	355206	350021	399957	399841	399975	399974	377058
GB2-PaG							
a	0.19	0.21	0.17	0.28	0.26	0.27	0.68
b	18493	18417	23656	24074	25147	48452	38102
p	8.34	6.35	9.93	4.19	4.56	4.06	0.66
q	10.21	7.99	11.79	5.67	6.14	6.30	1.46
α	0.96	0.63	0.50	0.89	0.80	0.87	0.91
λ	273219	244850	244577	244827	244835	244784	253695
w	0.97	0.96	0.93	0.96	0.96	0.97	0.96
θ	399978	349992	400000	399848	396500	399996	370000

TABLEAU 4.21 – Paramètres estimés par maximum de vraisemblance des raccordements de loi pour les pertes incendies de la base de données NFID

On constate au tableau 4.21 que tous les α pour les deux modèles sont en dessous de 1, ce qui implique que l'espérance et la variance n'existent pas. De plus, on remarque aussi que les paramètres α et λ sont similaires pour le modèle LN-PaG et le modèle GB2-PaG. On observe aussi que le seuil, pour les années 2010-2014, est passé à 400 000.

4.3.3 Validation des modèles

Graphiques quantile-quantile

On commence par valider graphiquement l'ajustement des modèles à l'aide des graphiques quantile-quantile présentés aux illustrations 4.9 et 4.10.

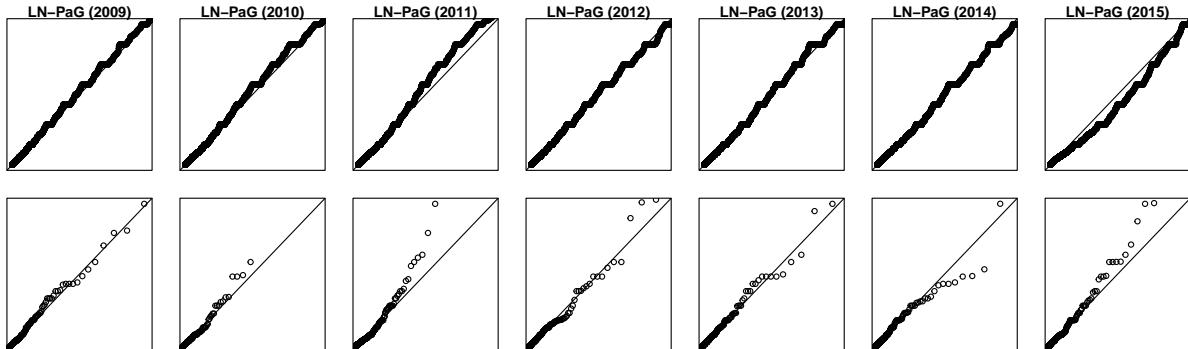


ILLUSTRATION 4.9 – *Q-Qplots* pour les observations sous le seuil (ligne 1) et pour les observations au-dessus du seuil (ligne 2), pour le modèle LN-PaG (2011-2018)

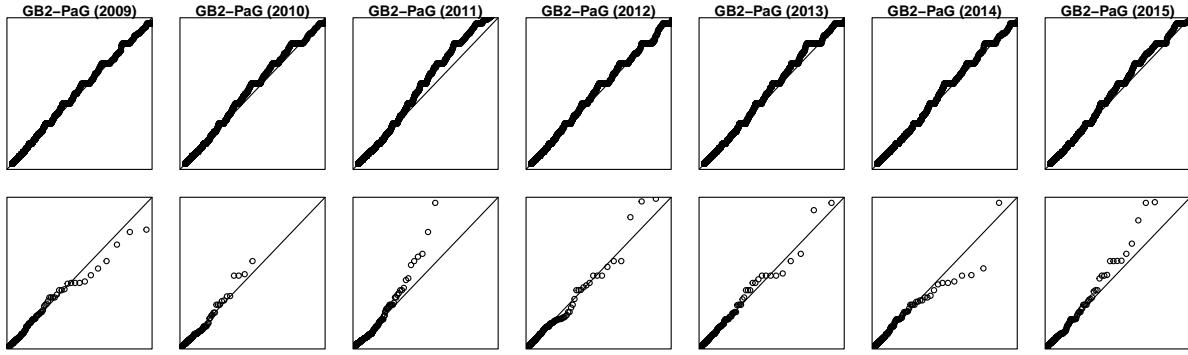


ILLUSTRATION 4.10 – *QQplots* pour les observations sous le seuil (ligne 1) et pour les observations au-dessus du seuil (ligne 2), pour le modèle **GB2-PaG** (2011-2018)

L'ajustement est globalement bon pour les deux modèles, mais pour les deux modèles, il est moins bon pour l'année 2011. En effet, on remarque que les points passent davantage au-dessus de la droite. On constate aussi que les deux modèles s'ajustent moins bien, au-dessus du seuil, pour l'année 2014, les points passent sous la droite. Il est encore une fois difficile de dire quel est le meilleur modèle.

Tests statistiques

Une autre façon de vérifier l'ajustement des modèles et de regarder des statistiques d'ajustement. On utilise encore les statistiques D et A^2 .

	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Statistique D							
LN-PaG	0.04	0.04	0.03	0.04	0.04	0.04	0.07
GB2-PaG	0.04	0.04	0.03	0.04	0.03	0.04	0.04
Statistique A^2							
LN-PaG	7.20	7.30	7.88	8.40	7.24	7.94	57.78
GB2-PaG	7.58	7.17	7.80	7.69	6.04	6.09	12.07

TABLEAU 4.22 – Tests d'ajustements des modèles pour les données NFID

Au tableau 4.22 on présente les valeurs obtenues pour les deux statistiques pour les deux modèles. On constate que pour la statistique D les valeurs sont extrêmement similaires sauf pour les années 2013 et 2015 où le modèle GB2-PaG est meilleur. Pour la statistique A^2 le modèle GB2-PaG est meilleur sur toutes les années sauf 2009. Il est aussi intéressant de constater que les deux modèles semblent moins bons pour l'année 2015, où les statistiques sont bien plus élevées que pour les autres années. Donc, selon ces tests le modèle GB2-PaG serait celui à utiliser.

Critère d'information

On cherche à comparer la log-vraisemblance et les critères d'information AIC et BIC pour chacun des 3 modèles.

	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Log-vraisemblance							
LN-PaG	97512	92308	114854	113518	106300	103512	103642
GB2-PaG	97511	92304	114854	113506	106290	103495	103440
Akaike Information Criterion, AIC							
LN-PaG	195035	184629	229719	227048	212612	207036	207296
GB2-PaG	195037	184624	229724	227028	212595	207006	206896
Bayesian Information Criterion, BIC							
LN-PaG	195036	184630	229720	227049	212613	207037	207297
GB2-PaG	195038	184625	229725	227029	212596	207007	206897

TABLEAU 4.23 – Critères d’informations des modèles ajustés pour les données NFID (2010-2015)

Pour les critères d’informations, on constate, au tableau 4.23, que les valeurs sont très proches pour les deux modèles. Cependant, le modèle GB2-PaG est plus bas pour la majorité des années, sauf pour l’année 2011 où le modèle LN-PaG est meilleur. Avec ce test aussi on choisirait le modèle GB2-PaG.

Conclusion

Comme pour la base de données canadienne de périls incendies le modèle à sélectionner serait le modèle GB2-PaG. Il faut par contre noter que les modèles étaient assez équivalents et que quelqu’un pourrait choisir le modèle Ln-PaG sous prétexte qu’il est moins complexe.

4.3.4 Mesure de risque

Risque au fil du temps

On calcule la mesure VaR et la mesure TCM, dont les définitions sont données en (4.9) et en (4.10), pour les deux modèles.

	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
LN-PaG	124679	124803	255829	143172	148252	154937	182285
	260561	261245	508444	300120	313850	306233	327310
GB2-PaG	122645	121814	252683	135606	141059	145117	137745
	265530	264512	508524	291984	307738	296373	301814

TABLEAU 4.24 – Mesure VaR et TCM (2ieme lignes) au niveau de confiance 90%, pour les données (NFID) (2009-2015)

Les résultats pour ces mesures sont présentés à l’illustration 4.24. Avec ce modèle on n’a pas le choix de calculer la mesure TCM, comme l’espérance n’existe pas : la mesure $TVaR$ ne peut pas être calculée. Il n’y a pas de tendance apparente, soit à la hausse ou à la baisse. On constate aussi que les deux modèles donnent des mesures assez similaires. Si l’on regarde entre les années, l’année 2011 est l’année où les mesures de risques sont les plus élevées et sans surprise il s’agit de l’année où la perte moyenne est la plus élevée.

Prédiction

Afin de comparer le pouvoir prédictif des deux modèles, on utilise les données de l’année précédente pour estimer $\Pr(X > 100000)$ de l’année actuelle.

	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Actuel	0.12	0.17	0.12	0.12	0.13	0.12
LN-PaG	0.12	0.12	0.18	0.13	0.13	0.14
GB2-PaG	0.12	0.12	0.17	0.13	0.13	0.13

TABLEAU 4.25 – Valeurs prédictes et actuelles de $\Pr(X > 100000)$, pour les données (NFID) (2009-2015)

On présente le résultat de cette probabilité au tableau 4.25. On remarque qu'on prédit moins bien l'année 2011 et 2012. Cela peut être expliqué par le fait que l'année 2011 était un peu hors du commun. Alors, les résultats de l'année 2010 prédisent moins bien ceux de 2011. Et de la même façon, les résultats de 2011 prédisent à la hausse les résultats de 2012.

Chapitre 5

Mesures de risque

5.1 Reproduction de Upretee & Brazauskas (2022)

Dans cette section on reproduit les résultats obtenus dans l'article [Upretee and Brazauskas \(2022\)](#). Principalement les preuves des formes analytiques des mesures de risque au tableau 1 page 3 et les résultats numériques des différentes sections.

5.1.1 Notions préliminaire

Distortion Risk Mesure

On définit les *distortion risk measures* comme

$$R[F] = \int_0^\infty g(1 - F(x))dx, \quad (5.1)$$

où la fonction de distorsion $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est une fonction croissante avec $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. De plus, si g est différentiable il est possible de définir (5.1) comme

$$R[F] = \int_0^1 F^{-1}(u)\psi(u)du, \quad (5.2)$$

où $\psi(u) = g'(1 - u)$.

Démonstration. On fait l'intégration par partie avec $u = g(1 - F(x))$ et $dv = dx$:

$$\begin{aligned} R[F] &= xg(1 - F(x)) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty xg'(1 - F(x))f(x)dx \\ &= \int_0^\infty xg'(1 - F(x))f(x)dx \quad (u = F(x)) \\ &= \int_0^1 F^{-1}(u)g'(1 - u)du \end{aligned}$$

□

5.1.2 Fondation théorique

Mesure PHT de la loi lognormale translatée

Pour obtenir la mesure PHT avec la loi lognormale translatée il faut résoudre l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned}
 PHT[F, r] &= r \int_0^1 \left[x_0 + e^{\mu + \sigma \Phi^{-1}(u)} \right] (1-u)^{r-1} du \\
 &= x_0 + e^\mu \sigma \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \Phi(z))^r e^{\sigma z} dz \quad PH \\
 &= x_0 + e^\mu C_{PHT}(r, \sigma).
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

La démonstration est faite dans l'annexe A.3.3. Les auteurs obtiennent une borne inférieure et supérieure pour $C_{PHT}(r, \sigma) = \sigma \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \Phi(z))^r e^{\sigma z} dz$, présentées au théorème 3.

Théorème 3. *On définit $C_{PHT}(r, \sigma) = \sigma \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \Phi(z))^r e^{\sigma z} dz$, pour $0 < r < 1$ and $\sigma > 0$. Alors on a la double inégalité*

$$e^{\sigma x} [(1 - \Phi(x))^r - (1 - \Phi(x))] + e^{\frac{\sigma^2}{2}} \Phi(\sigma - x) \leq C_{PHT}(r, \sigma) < e^{\sigma x} + K_x(r, \sigma),$$

$$\text{où } K_x(r, \sigma) = \sigma x^{-r} r^{-\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1-r}{2}} e^{\frac{\sigma^2}{2r}} \Phi\left(\frac{\sigma - rx}{\sqrt{r}}\right), \forall x > 0.$$

Au tableau 5.1 on présente les valeurs de $C_{PHT}(r, \sigma)$, obtenue par intégration numérique, pour différentes valeurs de r et de σ .

r	σ							
	1/10	1/5	1/4	1/2	1	2	4	5
0.55	1.069	1.161	1.216	1.625	3.895	77.450	5.7×10^6	2.3×10^{10}
0.65	1.049	1.116	1.157	1.455	2.979	36.422	4.7×10^6	5.1×10^8
0.75	1.034	1.082	1.111	1.332	2.412	20.386	7.1×10^4	3.0×10^7
0.85	1.021	1.054	1.075	1.239	2.030	12.813	1.6×10^4	3.4×10^6
0.95	1.010	1.030	1.045	1.165	1.758	8.739	5.0×10^3	5.7×10^5
1.00	1.005	1.020	1.032	1.133	1.649	7.389	3.0×10^3	2.7×10^5

TABLEAU 5.1 – Évaluation numérique de $C_{PHT}(r, \sigma)$ pour des valeurs de r et de σ sélectionnées

On regarde ensuite quelques bornes pour différentes combinaisons de r et de σ . La difficulté est de trouver la valeur de x optimale, celle qui minimisera la distance entre les deux bornes. Les auteurs proposent d'utiliser $x = (\frac{1}{2})(\frac{\sigma}{r})$, pour faire une illustration des bornes. Les intervalles sont présentés dans le tableau

r	σ	inf.	$C_{PHT}(r, \sigma)$	sup.
0.55	1	1.405	3.896	6.481
0.75	2	6.599	20.386	43.913
0.95	4	2912	4987	13970

TABLEAU 5.2 – Intervalle autour de $C_{PHT}(r, \sigma)$ à l'aide des bornes obtenues

La difficulté est de trouver le x qui minimise la distance entre les deux bornes, ce qui explique pourquoi certains intervalles sont assez grands. Au tableau 5.2, on utilise le même x pour toutes les combinaisons de r et de σ pour faire un bref exemple de l'utilisation des bornes. Par exemple, si pour $r = 0.55$ et $\sigma = 1$ on choisissait $x = 1$, on obtiendrait plutôt $1.381 < 3.896 < 6.403$, déjà l'intervalle serait plus petit. On verra plus tard que de faire un graphique des bornes aiderait à choisir un x approprié.

Mesure WT de la loi Exponentielle translatée et Pareto I

Pour la loi Exponentielle translatée la mesure WT est obtenue en résolvant l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} WT[F, \lambda] &= \int_0^\infty \Phi\left(\Phi^{-1}\left(e^{-(x-x_0)/\theta}\right) + \lambda\right) dx \\ &= x_0 + \theta \int_{-\infty}^\infty \Phi(z+\theta) \frac{\varphi(z)}{\Phi(z)} dz \\ &= x_0 + \theta C_{WT}(\lambda) \end{aligned}$$

Pour la loi Pareto I la mesure WT est obtenue en résolvant l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} WT[F, \lambda] &= \int_0^\infty \Phi\left(\Phi^{-1}\left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha\right) + \lambda\right) dx \\ &= x_0 + \frac{x_0}{\alpha} \int_{-\infty}^\infty \Phi(z+\theta) \frac{\varphi(z)}{\Phi(z)^{1/\alpha+1}} dz \\ &= x_0 + \frac{x_0}{\alpha} C_{WT}(\lambda, \alpha) \end{aligned}$$

Les preuves se trouvent dans l'annexe A.3.1 et A.3.2. On a donc les théorèmes 4 et 5 qui donnent des bornes pour $C_{WT}(\lambda)$ et $C_{WT}(\lambda, \alpha)$.

Théorème 4. *On définit $C_{WT}(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty \Phi(z+\lambda) \frac{\varphi(z)}{\Phi(z)} dz$, pour toute valeur de λ . Alors on a*

- a. Pour $\lambda \leq 0$, la double inégalité

$$-\Phi(x+\lambda) \ln(\Phi(x)) \leq C_{WT}(\lambda) \leq \Phi(x+\lambda) - \ln(\Phi(x)),$$

pour tout $x < 0$.

- b. Pour $\lambda > 0$, la double inégalité

$$-\Phi(x+\lambda) \ln(\Phi(x)) \leq C_{WT}(\lambda) \leq \frac{x}{x+\lambda} \Phi(x+\lambda) - \ln(\Phi(x)),$$

pour tout $x < -\lambda$.

Théorème 5. *On définit $C_{WT}(\lambda, \alpha) = \int_{-\infty}^\infty \Phi(z+\lambda) \frac{\varphi(z)}{\Phi(z)^{1/\alpha+1}} dz$, pour toute valeur de λ . Alors on a*

- a. Pour $\lambda \leq 0$, la double inégalité

$$\Phi(x+\lambda) c_x(\alpha) \leq C_{WT}(\lambda) \leq c_x(\alpha) + \frac{\alpha}{\alpha-1} e^{-\lambda x - \lambda^2/2} \Phi(x)^{1-1/\alpha},$$

où $c_x(\alpha) = \alpha (\Phi(x)^{-1/\alpha} - 1)$, pour tout $x < 0$.

- b. Pour $\lambda > 0$, la double inégalité

$$-\Phi(x+\lambda) \ln(\Phi(x)) \leq C_{WT}(\lambda) \leq c_x(\alpha) + \frac{\alpha}{\alpha-1} \left[e^{-\lambda x - \lambda^2/2} \Phi(x)^{1-1/\alpha} + C_x(\alpha, \lambda) \right],$$

où $C_x(\alpha, \lambda) = \lambda \sqrt{\alpha(2\pi)^{1/\alpha}/(\alpha-1)} (-x)^{1/\alpha-1} e^{-(\lambda^2/2)/(\alpha-1)} \Phi\left(\frac{x+\lambda\alpha/(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha/(\alpha-1)}}\right)$, pour tout $x < -\lambda$.

Au tableau 5.3, on présente les valeurs de $C_{WT}(\lambda)$ et $C_{WT}(\lambda, \alpha)$, obtenues par intégration numérique, pour différentes valeurs de λ et de α .

λ	$C_{WT}(\lambda)$	$C_{WT}(\lambda, \alpha)$ pour α								
		1.1	1.25	1.5	1.75	2	2.5	3	4	5
-1.00	0.359	0.806	0.681	0.582	0.531	0.499	0.461	0.440	0.416	0.403
-0.50	0.619	2.389	1.692	1.281	1.101	0.999	0.886	0.825	0.760	0.727
-0.25	0.792	4.719	2.820	1.938	1.595	1.411	1.217	1.116	1.011	0.958
0.00	1.000	11.000	5.000	3.000	2.333	2.000	1.667	1.500	1.333	1.250
0.25	1.245	33.003	9.663	4.799	3.468	2.857	2.283	2.009	1.745	1.616
0.50	1.530	141.659	20.965	8.020	5.271	4.132	3.135	2.686	2.270	2.074
1.00	2.232	11090.860	158.182	26.874	13.403	9.143	6.035	4.824	3.803	3.355

TABLEAU 5.3 – Évaluation numérique de $C_{WT}(\lambda)$ et $C_{WT}(\lambda, \alpha)$ pour des valeurs de λ et de α sélectionnées

Mesure GS pour la loi lognormale translatée

Pour la loi lognormale translatée la mesure GS est obtenue en résolvant l'intégral suivante :

$$\begin{aligned}
GS[F, \beta, \delta] &= \frac{1}{\beta^2} \int_{1-\beta}^1 \left[x_0 + e^{\mu+\sigma\Phi^{-1}(p)} \right] (\beta(1+2\delta) - 4\delta(1-p)) dp \\
&= x_0 + \frac{1}{\beta^2} e^{\mu+\sigma^2/2} (\beta(1+2\delta) - 4\delta) \Phi(\sigma - \Phi^{-1}(1-\beta)) \\
&\quad + \frac{4\delta}{\beta^2} e^{\mu+\sigma^2/2} \int_{\Phi^{-1}(1-\beta)}^{\infty} \Phi(z) \varphi(z-\delta) dz \\
&= x_0 + \frac{1}{\beta^2} e^{\mu+\sigma^2/2} ([\beta(1+2\delta) - 4\delta] \Phi(\sigma - \Phi^{-1}(1-\beta)) + 4\delta C_{GS}(\beta, \sigma))
\end{aligned}$$

La démonstration est faite dans l'annexe A.3.3. On a donc le théorème 6 qui donne des bornes pour $C_{GS}(\beta, \sigma)$.

Théorème 6. *On définit $C_{GS}(\beta, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(z) \varphi(z-\sigma) dz$ pour $0 < \beta < 1$ et $\sigma > 0$. Alors on a*

$$(1-\beta)\Phi(\sigma - \Phi^{-1}(1-\beta)) \leq C_{GS}(\beta, \sigma) \leq \Phi(\sigma - \Phi^{-1}(1-\beta)).$$

Il est intéressant de noter que pour cette mesure les bornes ne dépendent pas de x . Au tableau 5.4 on présente les valeurs de $C_{GS}(\beta, \sigma)$, obtenue par intégration numérique, pour différentes valeurs de β et de σ .

β	σ							
	1/10	1/5	1/4	1/3	1	2	4	5
0.01	0.013	0.017	0.019	0.034	0.092	0.371	0.952	0.996
0.05	0.060	0.072	0.080	0.123	0.254	0.631	0.989	0.999
0.10	0.113	0.133	0.144	0.208	0.375	0.747	0.995	1.000
0.15	0.162	0.187	0.201	0.276	0.459	0.807	0.996	1.000
0.20	0.207	0.236	0.251	0.335	0.523	0.844	0.997	1.000
0.25	0.248	0.280	0.297	0.385	0.573	0.868	0.997	1.000

TABLEAU 5.4 – Évaluation numérique de $C_{GS}(\beta, \sigma)$ pour des valeurs de β et σ sélectionnées

5.1.3 Illustrations numériques

Distributions avec risque similaire

Pour analyser les différentes mesures de risque présentées on veut choisir des paramètres qui feront en sorte que F_1, F_2 et F_3 auront une queue similaire. On commence par fixer $F_1 = \text{Pa}(x_0 = 1, \alpha = 2)$. Pour assurer un

risque similaire, on veux que $VaR[F_1, \beta_1] = VaR[F_2, \beta_1] = VaR[F_3, \beta_1]$ et que $VaR[F_1, \beta_2] = VaR[F_3, \beta_2]$. En résolvant ces trois équations, on obtient

$$\theta = \frac{1 - \beta_1^{-\frac{1}{2}}}{\ln(\beta_1)}, \quad \mu = \ln\left(\beta_1^{-\frac{1}{2}} - 1\right) - \sigma\Phi^{-1}(1 - \beta_1), \quad \sigma = \frac{\ln(\ln(\beta_2))/\ln(\beta_1)}{\Phi^{-1}(1 - \beta_2) - \Phi^{-1}(1 - \beta_1)}. \quad (5.4)$$

Démonstration. On commence par trouver le paramètre θ ,

$$1 + \theta \ln(\beta_1) = \beta_1^{-\frac{1}{2}}$$

$$\theta = \frac{1 - \beta_1^{-\frac{1}{2}}}{\ln(\beta_1)}.$$

Ensuite on obtient μ ,

$$\beta^{-\frac{1}{2}} = 1 + e^{\mu + \sigma\Phi^{-1}(1 - \beta_1)}$$

$$\ln\left(\beta^{-\frac{1}{2}} - 1\right) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(1 - \beta_1)$$

$$\mu = \ln\left(\beta_1^{-\frac{1}{2}} - 1\right) - \sigma\Phi^{-1}(1 - \beta_1).$$

Finalement, on obtient σ ,

$$1 - \theta \ln(1 - \beta_2) = 1 + e^{\mu + \sigma\Phi^{-1}(1 - \beta_2)}$$

$$\ln\left(-\left(1 - \beta_1^{-\frac{1}{2}}\right) \frac{\ln(\beta_2)}{\ln(\beta_1)}\right) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(1 - \beta_2)$$

$$\ln\left(\left(\beta_1^{-\frac{1}{2}} - 1\right) \frac{\ln(\beta_2)}{\ln(\beta_1)}\right) = \ln\left(\beta_1^{-\frac{1}{2}} - 1\right) - \sigma\Phi^{-1}(1 - \beta_1) + \sigma\Phi^{-1}(1 - \beta_2)$$

$$\ln\left(\beta_1^{-\frac{1}{2}} - 1\right) + \ln\left(\frac{\ln(\beta_2)}{\ln(\beta_1)}\right) = \ln\left(\beta_1^{-\frac{1}{2}} - 1\right) + \sigma(\Phi^{-1}(1 - \beta_2) - \Phi^{-1}(1 - \beta_1))$$

$$\sigma = \frac{\ln(\ln(\beta_2))/\ln(\beta_1)}{\Phi^{-1}(1 - \beta_2) - \Phi^{-1}(1 - \beta_1)}.$$

□

Les auteurs choisissent $\beta_1 = 0.10$ et $\beta_2 = 0.05$, avec ces valeurs on obtient les valeurs présentées dans le tableau 5.5.

θ	μ	σ
0.9391	0.7243	-0.1571

TABLEAU 5.5 – Paramètres obtenus avec (5.4) en choisissant $\beta_1 = 0.10$ et $\beta_2 = 0.05$

Bornes pour les mesures de risques PHT et WT

Dans cette section les auteurs regardent à quel point les bornes obtenues peuvent être efficaces pour C_{PHT} et C_{WT} . On sait que ces quantités peuvent être obtenues via l'intégration numérique, mais pour de la simulation l'intégration numérique peut ne pas être pas très efficace. C'est pourquoi on veut utiliser la moyenne entre la borne supérieure et la borne inférieure pour estimer C_{PHT} et C_{WT} .

À l'illustration 5.1 on trace la borne supérieure, la borne inférieure et la moyenne pour $C_{CPHT}(r, \sigma = 0.7243)$ avec $r = 0.55, 0.75, 0.95$. Idéalement on voudrait trouver la valeur de x qui minimise la valeur moyenne entre les deux bornes, mais cet exercice n'est pas toujours très simple. On remarque, par contre, sur chacun des graphiques de l'illustration 5.1, que $x = 1$ semble être un bon choix pour la valeur qui minimise la moyenne.

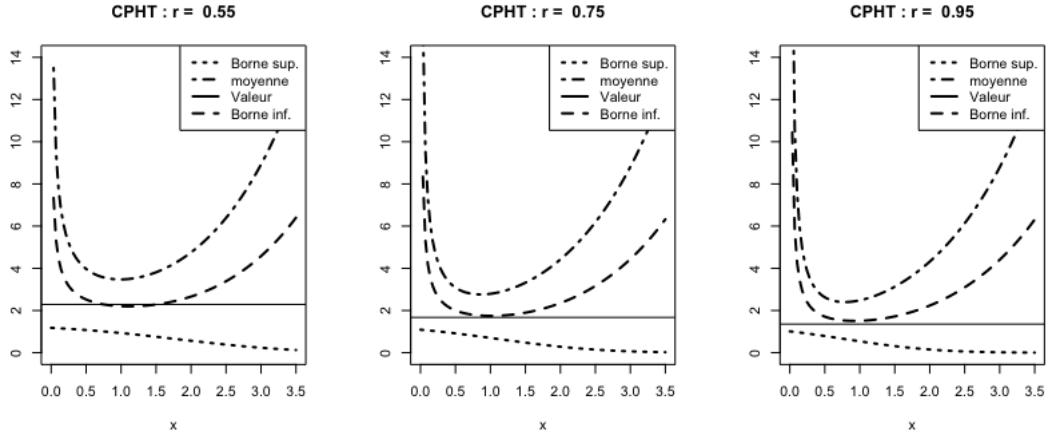


ILLUSTRATION 5.1 – Valeurs de la borne supérieure, inférieure, moyenne et théorique pour C_{PHT} avec $r = 0.55, 0.75, 0.95$

r	Valeur théorique	Valeur approximé
0.55	2.289	2.203
0.75	1.673	1.746
0.95	1.357	1.511

TABLEAU 5.6 – Comparaison de la valeur théorique avec la valeur estimée pour C_{PHT} avec $x = 1$

Au tableau 5.6 on présente les valeurs théoriques et estimées pour $C_{PHT}(r, \sigma = 0.7243)$ avec $r = 0.55, 0.75, 0.95$. On calcule l'erreur relative avec la formule suivante

$$R.E. = \frac{|V.T. - V.E.|}{V.E.}.$$

On obtient une erreur relative de 4% pour $r = 0.55, 0.75$ et 10% pour $r = 0.95$.

On veut donc produire les mêmes graphiques pour $C_{WT}(\lambda)$ avec $\lambda = -1, -0.5, -0.25$ et $\lambda = 0.25, 0.5, 1$ et $C_{WT}(\lambda, \alpha = 2)$ pour les mêmes valeurs de λ . Ces graphiques sont présentés à l'illustration 5.2 et à l'illustration 5.3. On remarque que la valeur empirique semble être raisonnablement bien estimée avec $x = -0.25$ pour $\lambda < 0$ et $x = -\lambda - 0.5$ pour $\lambda > 0$. Les valeurs sont présentées dans le tableau 5.7.

λ	Valeur théorique	Valeur approximée	λ	Valeur théorique	Valeur approximée
-1.00	0.359	0.558	0.25	1.245	1.203
-0.50	0.619	0.673	0.50	1.530	1.513
-0.25	0.792	0.752	1.00	2.232	2.233

(a) Pour $\lambda < 0$ et $x = -0.25$

(b) Pour $\lambda > 0$ et $x = -\lambda - 0.5$

TABLEAU 5.7 – Comparaison de la valeur théorique avec la valeur estimée pour $C_{WT}(\lambda)$

L'erreur relative est de 36% pour $\lambda = -1$, 8% pour $\lambda = -0.5$ et 5% pour $\lambda = -0.25$. Pour $\lambda > 0$, les erreurs relatives sont toutes inférieures à 4%.

Pour $C_{WT}(\lambda, \alpha = 2)$ on utilise les mêmes valeurs de λ que pour $C_{WT}(\lambda)$. On présente les graphiques à l'illustration 5.3. En choisissant encore $x = -0.5$ pour $\lambda < 0$ et $x = -\lambda - 0.5$ pour $\lambda > 0$, on obtient les valeurs du tableau 5.8.

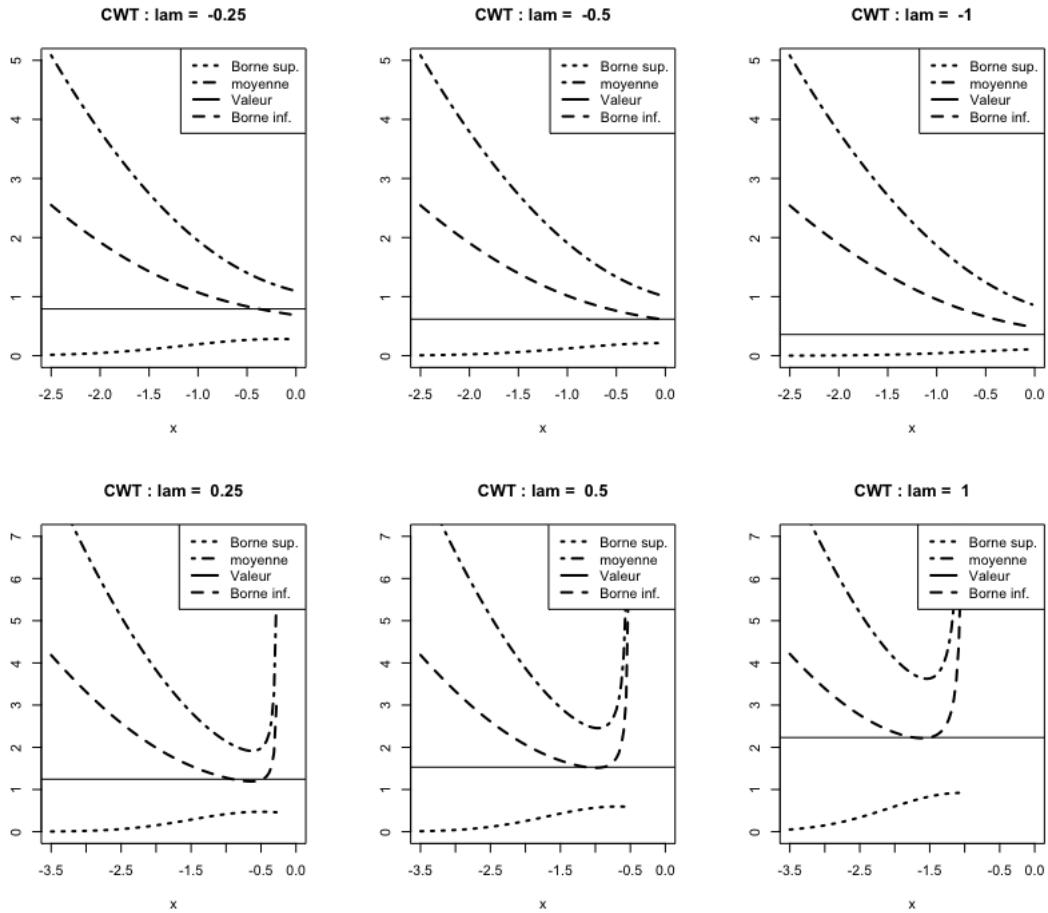


ILLUSTRATION 5.2 – Valeurs de la borne supérieure, inférieure, moyenne et théorique pour $C_{WT}(\lambda)$ avec $\lambda = -1, -0.5, -0.25, 0.25, 0.5, 1$

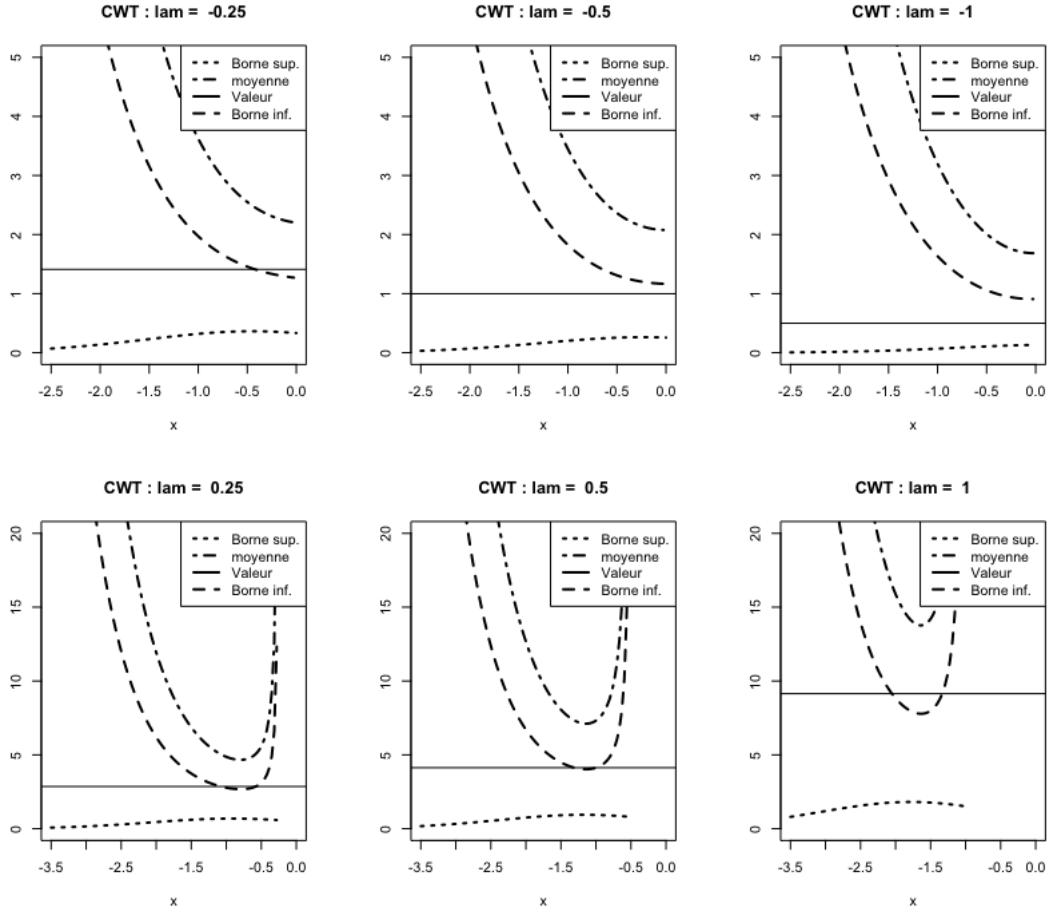


ILLUSTRATION 5.3 – Valeurs de la borne supérieure, inférieure, moyenne et théorique pour $C_{WT}(\lambda, \alpha = 2)$ avec $\lambda = -1, -0.5, -0.25, 0.25, 0.5, 1$

On présente au tableau

λ	Valeur théorique	Valeur approximé
-1.00	0.499	0.939
-0.50	0.999	1.203
-0.25	1.411	1.334

(a) Pour $\lambda < 0$ et $x = -0.25$

λ	Valeur théorique	Valeur approximé
0.25	2.857	2.679
0.50	4.132	4.124
1.00	9.143	7.985

(b) Pour $\lambda > 0$ et $x = -\lambda - 0.5$

TABLEAU 5.8 – Comparaison de la valeur théorique avec la valeur estimée pour $C_{WT}(\lambda, \alpha = 2)$

L'erreur relative est de 47% pour $\lambda = -1$, 17% pour $\lambda = -0.5$ et 6% pour $\lambda = -0.25$. Pour $\lambda > 0$ l'erreur relative est 7% pour $\lambda = 1$, <1% pour $\lambda = 0.5$ et 15% pour $\lambda = 0.25$.

5.1.4 Estimation des mesures de risques

Les auteurs utilisent la simulation Monte-Carlo pour regarder l'efficacité de l'approximation des mesures de risques. Pour cela, on crée trois jeux de données qu'on simule à partir de F_1 , F_2 et F_3 . On calcule ensuite la moyenne, la médiane, le 1er Qu., le 3e Qu. et la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne. Voici les caractéristiques de l'étude de simulation :

- *Paramètres à l'étude, caractéristiques des estimateurs et mesure de risque* : $M = 10^5$ (Nombre d'échantillon), $n = 100$ (dimension de chaque échantillon), $a = b = 0.05$, (*trimming/winsorizing* proportion des estimateurs MTM et MWM), $PHT[F, r = 0.75]$ (mesure de risque à estimer).
 - *Échantillon simulé* : x_1, \dots, x_n (i.i.d) sont des réalisations de la v.a. X qui est distribuée comme F . Le choix de F inclut : $F_1 = \text{Exp}(x_0 = 1, \theta = 0.9391)$, $F_2 = \text{PaI}(x_0 = 1, \alpha = 2)$ et $F_3 = \text{Ln}(x_0 = 1, \mu = -0.1571, \sigma = 0.7243)$.
 - *Estimateur non-paramétrique* : pour trouver la forme empirique de $PHT[F, r]$ on remplace F par sa fonction de répartition empirique \hat{F} , ([Jones and Zitikis, 2003](#)) section 3.

$$\widehat{PHT}_{\text{EMP}} = \sum_{i=1}^n x_{(i)}((1 - (i-1)/n)^r - (1 - i/n)^r),$$

où $x_{(i)}$ sont les statistiques d'ordre de x_1, \dots, x_n .

- *Estimateur paramétrique* : Les estimateurs pour le MLE sont facilement calculables et connus. Pour l'estimateur MTM, les formules sont données dans [Brazauskas et al. \(2009\)](#). Pour l'estimateur MWM, les formules sont données dans [Zhao et al. \(2018\)](#).
 - *Loi exponentielle*, $\text{Exp}(x_0, \theta)$:

$$\hat{\theta}_{\text{MLE}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_0), \quad \hat{\theta}_{\text{MTM}} = \frac{\hat{T}_1(a, b)}{I_t(a, b)}, \quad \hat{\theta}_{\text{MWM}} = \frac{\hat{W}_1(a, b)}{I_w(a, b)}$$

où

$$I_t(a, b) = (1 - a - b)^{-1} \int_a^{1-b} -\ln(1 - p) dp \quad (\text{P.P.})$$

$$= (1 - a - b)^{-1} [a \ln(a) - (1 - b) \ln(1 - b) + ((1 - b) - a)]$$

$$- \hat{T}_1(a, b) = (n - [na] - [nb])^{-1} \sum_{[na]+1}^{n-[nb]} (x_{(i)} - x_0)$$

$$- I_w(a, b) = -a \ln(1 - a) + (1 - a - b)I_t(a, b) - b \ln(b)$$

$$- \hat{W}_1(a, b) = \frac{1}{n} \left([na](x_{([na]+1)} - x_0) + \sum_{[na]+1}^{n-[nb]} (x_{(i)} - x_0) + [nb](x_{(n-[nb])} - x_0) \right)$$

- Loi Pareto I, $\text{PaI}(x_0, \alpha)$:

$$\hat{\alpha}_{\text{MLE}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(x_i/x_0)}, \quad \hat{\alpha}_{\text{MTM}} = \frac{\hat{I}_t(a, b)}{T_2(a, b)}, \quad \hat{\alpha}_{\text{MWM}} = \frac{\hat{I}_w(a, b)}{W_2(a, b)}$$

ou

- I_t et I_w sont comme pour la loi exponentielle
 - $\hat{T}_2(a, b) = (n - [na] - [nb])^{-1} \sum_{[na]+1}^{n-[nb]} \ln(x_{(i)}/x_0)$
 - $\hat{W}_w(a, b) = \frac{1}{n} \left([na] \ln(x_{([na]+1)}/x_0) + \sum_{[na]+1}^{n-[nb]} \ln(x_{(i)}/x_0) + [nb] \ln(x_{(n-[nb])}/x_0) \right)$

- Loi lognormale, $\text{LN}(x_0, \mu, \sigma)$:

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_{\text{MLE}} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i - x_0), & \hat{\sigma}_{\text{MLE}} &= \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i - x_0) - \hat{\mu}_{\text{MLE}} \right)^{0.5} \\ \hat{\mu}_{\text{MTM}} &= \hat{T}_{3,1}(a, b) - I_{t,1} \hat{\sigma}_{\text{MTM}}, & \hat{\sigma}_{\text{MTM}} &= \left(\frac{\hat{T}_{3,2}(a, b) - \hat{T}_{3,1}^2(a, b)}{I_{t,2}(a, b) - I_{t,1}^2(a, b)} \right)^{0.5} \\ \hat{\mu}_{\text{MWM}} &= \hat{W}_{3,1}(a, b) - I_{w,1} \hat{\sigma}_{\text{MWM}}, & \hat{\sigma}_{\text{MWM}} &= \left(\frac{\hat{W}_{3,2}(a, b) - \hat{W}_{3,1}^2(a, b)}{I_{w,2}(a, b) - I_{w,1}^2(a, b)} \right)^{0.5}\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
I_{t,k} &= (1-a-b)^{-1} \int_a^{1-b} \Phi^{-1}(p)^k dp \\
I_{t,1} &= (1-a-b)^{-1} \int_a^{1-b} \Phi^{-1}(p) dp \\
&= (1-a-b)^{-1} [(1-a)TVaR_a(Z) - (b)TVaR_{1-b}(Z)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{t,2} &= (1-a-b)^{-1} \int_a^{1-b} [\Phi^{-1}(p)]^2 dp, \quad (z = \Phi^{-1}(p)) \\
&= (1-a-b)^{-1} \int_{\Phi^{-1}(a)}^{\Phi^{-1}(1-b)} z^2 \varphi(z) dz \\
&= (1-a-b)^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Phi^{-1}(a)}^{\Phi^{-1}(1-b)} z \left(ze^{-\frac{z^2}{2}}\right) dz, \quad (\text{P.P.}) \\
&= (1-a-b)^{-1} \left[-\frac{z}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_c^d + \int_c^d \varphi(z) dz \right] \\
&= (1-a-b)^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-de^{-\frac{d^2}{2}} + ce^{-\frac{c^2}{2}} \right) + \Phi(d) - \Phi(c) \right] \\
&= (1-a-b)^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-de^{-\frac{d^2}{2}} + ce^{-\frac{c^2}{2}} \right) + (1-b) - a \right] \\
&= (1-a-b)^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-de^{-\frac{d^2}{2}} + ce^{-\frac{c^2}{2}} \right) + 1
\end{aligned}$$

où $d = \Phi^{-1}(1-b)$ et $c = \Phi^{-1}(a)$

- $\hat{T}_{3,k}(a, b) = (n - [na] - [nb])^{-1} \sum_{[na]+1}^{n-[nb]} \ln(x_{(i)} - x_0)^k$
- $\hat{W}_1(a, b) = \frac{1}{n} \left([na] \ln(x_{([na]+1)} - x_0)^k + \sum_{[na]+1}^{n-[nb]} \ln(x_{(i)} - x_0)^k + [nb] \ln(x_{(n-[nb])} - x_0)^k \right)$

On présente les résultats de cet exemple dans le tableau 5.9.

Loi de la perte	Valeur théorique	Méthode d'estimation	Statistiques descriptives				
			Moyenne	Médiane	1st Qu.	3rd Qu.	$\sqrt{\text{mse}}$
Exponentiel	2.252	EMP	2.232	2.227	2.143	2.316	0.130
		MTM	2.259	2.254	2.168	2.345	0.132
		MWM	2.252	2.248	2.163	2.336	0.129
		MLE	2.252	2.248	2.165	2.334	0.126
Pareto I	3.000	EMP	2.657	2.468	2.233	2.803	2.750
		MTM	3.212	3.014	2.647	3.519	1.451
		MWM	3.165	2.985	2.630	3.468	0.982
		MLE	3.152	2.983	2.637	3.453	0.857
Lognormale	2.430	EMP	2.400	2.389	2.301	2.486	0.146
		MTM	2.508	2.496	2.382	2.619	0.195
		MWM	2.490	2.479	2.371	2.597	0.181
		MLE	2.490	2.480	2.376	2.592	0.173

TABLEAU 5.9 – Valeur théorique de la mesure de risque PHT pour la loi Exponentielle, Pareto I et Lognormale et les statistiques descriptives pour les estimés de la mesure de risque PHT basée sur les méthodes EMP, MTM, MWM, MLE

On obtient de très près les résultats obtenus dans l'article, mais il est normal d'obtenir des résultats différents comme il s'agit d'une étude par simulation. La différence est plus importante avec la loi Pareto, comme $\alpha = 2$, cela implique que la variance n'existe pas, donc la variabilité est infinie. On constate que la méthode d'estimation par MLE est meilleurs que les autres mêmes si dans certains cas la méthode par MWM est très proche.

5.2 Application à la loi Pareto généralisée

On calcule les mesures de risques PHT et GS pour la portion des observations modélisées par la loi Pareto généralisée, définie à l'équation (3.1), sur les données de sinistre incendie en provenance de Toronto et sur les données de la NFID. On commence par présenter les formes analytiques pour les deux mesures, comme on a l'habitude d'utiliser κ , on utilisera la notation $\kappa = 1 - \beta$. Pour la mesure de risque PHT, on a

$$PHT[X, r] = \theta + \frac{\sigma}{r - \xi}, \quad r > \xi.$$

Ensuite, pour la mesure de risque GS on a,

$$GS[X, \kappa, \delta] = \frac{\sigma}{\xi} \left(\frac{(1 - \kappa)^{-\xi}}{1 - \xi} - 1 \right) + \frac{1}{(1 - \kappa)^\xi} \frac{2\delta\sigma}{(1 - \xi)(2 - \xi)} + \theta, \quad \xi < 1.$$

Les preuves pour ces formes analytiques sont fournies dans l'annexe A.3.4. On veut donc calculer cette mesure sur des observations en excès d'un seuil, qui sont modélisées par une loi Pareto généralisée. On utilisera les bases de données précédemment utilisées. Dans le cadre du travail effectué pour le rapport technique Barde (2022), les seuils et les paramètres pour ces deux bases de données ont déjà été calculés. On avait les paramètres estimés au tableau 5.10.

$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	u
1.41	117 038	75 000

(a) Données canadienne de périls incendie

$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	u
1.36	333 537	350 000

(b) Données NFID

TABLEAU 5.10 – Paramètres estimés pour les bases de données canadiennes de périls incendie et NFID

Avec ces paramètres il est donc possible d'estimer les mesures de risque PHT et GS. Pour la mesure PHT on obtient les valeurs présentées dans le tableau 5.12.

r	$PHT[\bar{Y}, r]$
0.75	2 193 892
0.90	514 525
1.00	362 576

(a) Données canadiennes de périls incendie

r	$PHT[\bar{Y}, r]$
0.75	15 626 068
0.90	1 824 517
1.00	1 270 240

(b) Données NFID

TABLEAU 5.11 – Mesure de risque GS estimée pour les bases de données canadiennes de périls incendie et NFID

Pour la mesure GS on obtient les valeurs présentées dans le tableau 5.11.

κ	$GS[\widehat{Y}, \kappa, 0.25]$
0.9	2 609 581
0.95	4 297 722
0.99	13 580 341

(a) Données canadiennes de périls incendie

κ	$GS[\widehat{Y}, \kappa, 0.25]$
0.9	8 781 260
0.95	14 594 203
0.99	47 518 946

(b) Données NFID

TABLEAU 5.12 – Mesure de risque PHT estimée pour les bases de données canadiennes de périls incendie et NFID

Pour les deux mesures, on est facilement capable de calculer les valeurs pour les données en excès d'un seuil, qui sont modélisées par une loi Pareto généralisée. On peut donc ajouter ces mesures de risque aux mesures usuelles comme la VaR et la $TVaR$.

Chapitre 6

Conclusion

Pour le présent travail, il a été possible de reproduire l'article [Brazauskas and Kleefeld \(2016\)](#) en presque totalité. Les méthodes de modélisation présentées ont pu être appliquées autant à la base de données canadienne de périls incendies qu'à la *National Fire Information Database* (NFID). Après avoir fait le test graphique quantile-quantile et les tests quantitatifs, qui incluaient les statistiques de Kolmogorov-Smirnov et d'Anderson-Darling et les critères d'information AIC et BIC, pour les deux bases de données le modèle GB2-PaG a été le modèle retenu. Il est intéressant de noter que pour la base de données canadienne de périls incendies le modèle GB2-PaG avait aussi été retenu dans [Barde \(2022\)](#).

Dans la section [4.3.1](#) il a été mentionné qu'il serait intéressant de regarder l'influence que la présence d'un système d'arroseurs pourrait avoir sur le montant de perte. Dans l'esprit de l'article [Laudagé et al. \(2019\)](#), il serait envisageable de modéliser les pertes sous un seuil par un GLM qui pourrait tenir compte de la présence d'un système d'arroseurs.

Pour l'article [Upretee and Brazauskas \(2022\)](#) il a été possible de reproduire en entier les valeurs obtenues. Les preuves pour obtenir les mesures de risque ont aussi été réalisées pour toutes les lois présentées dans l'article. De plus, on a appliqué les mesures PHT et GS à la loi Pareto généralisée ,comme il était possible de trouver des formes analytiques.

Annexe A

A.1 Liste complète des variables explicatives de la base de données de sinistres incendies de la ville de Toronto

1. *Area of Origin*
2. *Building Status*
3. *Business Impact*
4. *Civilian Casualties*
5. *Count of Persons Rescued*
6. *Estimated Dollar Loss*
7. *Estimated Number Of Persons Displaced*
8. *Exposures*
9. *Ext agent app or defer time*
10. *Extent Of Fire*
11. *Final Incident Type*
12. *Fire Alarm System Impact on Evacuation*
13. *Fire Alarm System Operation*
14. *Fire Alarm System Presence*
15. *Fire Under Control Time*
16. *Ignition Source*
17. *Incident Number*
18. *Incident Station Area*
19. *Incident Ward*
20. *Initial CAD Event Type*
21. *Intersection*
22. *Last TFS Unit Clear Time*
23. *Latitude*
24. *Level Of Origin*
25. *Longitude*
26. *Material First Ignited*
27. *Method Of Fire Control*
28. *Number of responding apparatus*
29. *Number of responding personnel*
30. *Possible Cause*
31. *Property Use*
32. *Smoke Alarm Impact on Persons Evacuating Impact on Evacuation*
33. *Smoke Alarm at Fire Origin*
34. *Smoke Alarm at Fire Origin Alarm Failure*
35. *Smoke Alarm at Fire Origin Alarm Type*
36. *Smoke Spread*
37. *Sprinkler System Operation*
38. *Sprinkler System Presence*
39. *Status of Fire On Arrival*
40. *TFS Alarm Time*
41. *TFS Arrival Time*
42. *TFS Firefighter Casualties*
43. *X id*

A.2 Liste complète des variables explicatives de la base de données NFID

- | | | |
|---------------------|---------------------------|----------------------------|
| 1. <i>LINK_ID</i> | 47. <i>WATER</i> | 93. <i>PSDDWELL_CSD6</i> |
| 2. <i>INCDNTID</i> | 48. <i>SERVICE</i> | 94. <i>PSDDWELL_CSD11</i> |
| 3. <i>JURIS</i> | 49. <i>IGNIOBJ</i> | 95. <i>ELDERPOP_CMA</i> |
| 4. <i>YEAR</i> | 50. <i>IGNOBGRP</i> | 96. <i>ELDERPOP_CSD</i> |
| 5. <i>MONTH</i> | 51. <i>FUELERGY</i> | 97. <i>YOUNGPOP_CMA</i> |
| 6. <i>DATE</i> | 52. <i>ENERGY</i> | 98. <i>YOUNGPOP_CSD</i> |
| 7. <i>DAY</i> | 53. <i>MATERIAL</i> | 99. <i>LONEPAR_CMA6</i> |
| 8. <i>TIME</i> | 54. <i>MATERGRP</i> | 100. <i>LONEPAR_CMA11</i> |
| 9. <i>INCIDLOC</i> | 55. <i>ACTOROM</i> | 101. <i>LONEPAR_CSD6</i> |
| 10. <i>RESPONSE</i> | 56. <i>ACTOMGRP</i> | 102. <i>LONEPAR_CSD11</i> |
| 11. <i>MUTLAID</i> | 57. <i>ORIGIN</i> | 103. <i>AVNUMPER_CMA6</i> |
| 12. <i>CREWSIZE</i> | 58. <i>ORIGGRP</i> | 104. <i>AVNUMPER_CMA11</i> |
| 13. <i>RESPSUB</i> | 59. <i>LEVELOR</i> | 105. <i>AVNUMPER_CSD6</i> |
| 14. <i>SUBSSIZE</i> | 60. <i>FLAMEINT</i> | 106. <i>AVNUMPER_CSD11</i> |
| 15. <i>NUMBENG</i> | 61. <i>FLAMEVER</i> | 107. <i>MOVERS1_CMA6</i> |
| 16. <i>NUMBAER</i> | 62. <i>FLAMEHOR</i> | 108. <i>MOVERS1_CMA11</i> |
| 17. <i>NUMBTANK</i> | 63. <i>SMOKSPRD</i> | 109. <i>MOVERS5_CMA6</i> |
| 18. <i>NUMBCFR</i> | 64. <i>FIREEXT</i> | 110. <i>MOVERS5_CMA11</i> |
| 19. <i>DISTANCE</i> | 65. <i>DAMEXT</i> | 111. <i>MEDINC_CMA6</i> |
| 20. <i>STATARR</i> | 66. <i>DOLLOSSA</i> | 112. <i>MEDINC_CMA11</i> |
| 21. <i>NUMBRESC</i> | 67. <i>DOLLOSSB</i> | 113. <i>MEDINC_CSD6</i> |
| 22. <i>NUMDEATH</i> | 68. <i>DOLLOSSC</i> | 114. <i>MEDINC_CSD11</i> |
| 23. <i>NUMBINJ</i> | 69. <i>DETECT</i> | 115. <i>EMPLOY_CMA6</i> |
| 24. <i>NUMBCAS</i> | 70. <i>TRANSALM</i> | 116. <i>EMPLOY_CMA11</i> |
| 25. <i>MAJOC</i> | 71. <i>ACTION</i> | 117. <i>EMPLOY_CSD6</i> |
| 26. <i>MAJOCGRP</i> | 72. <i>PERFORM</i> | 118. <i>EMPLOY_CSD11</i> |
| 27. <i>PROPCLAS</i> | 73. <i>CONTMETH</i> | 119. <i>UNEMPLOY_CMA6</i> |
| 28. <i>PROPGRP</i> | 74. <i>METHDGRP</i> | 120. <i>UNEMPLOY_CMA11</i> |
| 29. <i>PROPSUBG</i> | 75. <i>SADPERF</i> | 121. <i>UNEMPLOY_CSD6</i> |
| 30. <i>PROPOWN</i> | 76. <i>IMPACT</i> | 122. <i>UNEMPLOY_CSD11</i> |
| 31. <i>ILLUSE</i> | 77. <i>OCCPNTSA</i> | 123. <i>LOWEDUC_CMA6</i> |
| 32. <i>GENCONST</i> | 78. <i>OCCPNTSB</i> | 124. <i>LOWEDUC_CMA11</i> |
| 33. <i>METHCONS</i> | 79. <i>OCCPNTSC</i> | 125. <i>LOWEDUC_CSD6</i> |
| 34. <i>YEARCONS</i> | 80. <i>OCCPNTSD</i> | 126. <i>LOWEDUC_CSD11</i> |
| 35. <i>HEIGHT</i> | 81. <i>CSD</i> | 127. <i>CRIMRATE_CMA</i> |
| 36. <i>FLRAREA</i> | 82. <i>CSD_name</i> | 128. <i>CRIMRATE_CSD</i> |
| 37. <i>NUMBOCC</i> | 83. <i>csdtype</i> | 129. <i>PROPCRIM_CMA</i> |
| 38. <i>RISKVALA</i> | 84. <i>cmaca</i> | 130. <i>PROPCRIM_CSD</i> |
| 39. <i>RISKVALB</i> | 85. <i>CMA_name</i> | 131. <i>VIOLCRIM_CMA</i> |
| 40. <i>RISKVALC</i> | 86. <i>sactyp</i> | 132. <i>VIOLCRIM_CSD</i> |
| 41. <i>MANPROT</i> | 87. <i>ct</i> | 133. <i>UCRCSSI_CMA</i> |
| 42. <i>SPRINPRO</i> | 88. <i>fedres</i> | 134. <i>UCRCSSI_CSD</i> |
| 43. <i>FIXEDSYS</i> | 89. <i>da</i> | 135. <i>respcode</i> |
| 44. <i>AUTODET</i> | 90. <i>postcd</i> | 136. <i>CSD_flag</i> |
| 45. <i>FIREDET</i> | 91. <i>PSDDWELL_CMA6</i> | |
| 46. <i>OUTPROT</i> | 92. <i>PSDDWELL_CMA11</i> | |

A.3 Preuve des formes analytiques des mesures de risques

On définit $1 - \kappa = \beta$ et $c = VaR_\kappa(X)$. De plus, on sait qu'on peut réécrire la mesure de risque *Gini Shortfall* comme

$$\begin{aligned} GS[F, \beta, \delta] &= CTE + \frac{2\delta}{\beta^2} \int_c^\infty [1 - F(x)][(1 - \kappa) - (1 - F(x))] dx \\ &= CTE + \underbrace{\frac{2\delta}{\beta^2} \int_c^\infty [(1 - \kappa)(1 - F(x)) - (1 - F(x))^2] dx}_A \end{aligned}$$

Comme la mesure CTE à déjà été calculée, il reste à trouver le deuxième terme. On aura aussi besoin du théorème 7.

Théorème 7. Soit une fonction inversible $f(x)$, la dérivée de sa fonction inverse $f^{-1}(a)$ évaluée à $x = a$ est

$$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'[f^{-1}(a)]}.$$

À l'aide du Théorème 7, on montre que

$$(F^{-1})'(u) = \frac{1}{f'(x)}. \quad (\text{A.1})$$

A.3.1 Loi Exponentielle translatée

Value-at-Risk (VaR)

Démonstration.

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\frac{(x-x_0)}{\theta}} &= \kappa \\ \frac{(x-x_0)}{\theta} &= -\ln(1-\kappa) \\ VaR[F, \beta] &= x_0 - \theta \ln(\beta) \end{aligned}$$

□

Conditional Tail Expectation (CTE)

Démonstration. On fait le changement de variable $p = 1 - u$:

$$\begin{aligned} TVaR[F, \beta] &= \frac{1}{1-\kappa} \int_k^1 (x_0 - \theta \ln(1-u)) du \\ &= x_0 - \frac{1}{1-\kappa} \int_k^1 \theta \ln(1-u) du \\ &= x_0 - \frac{1}{1-\kappa} \int_0^{1-p} \theta \ln(p) dp \\ &= x_0 - \frac{\theta}{1-\kappa} ((1-\kappa) \ln(1-\kappa) - \kappa) \\ &= x_0 - \theta \ln(1-\kappa) + \theta \\ &= x_0 - \theta \ln(\beta) + \theta \end{aligned}$$

□

Proportional Hazards Transform (PHT)

On fait le changement de variable $u = x - x_0$:

Démonstration.

$$\begin{aligned} PHT[F, r] &= \int_0^\infty e^{-r \frac{(x-x_0)}{\theta}} dx \\ &= x_0 + \int_{x_0}^\infty e^{-r \frac{(x-x_0)}{\theta}} dx \\ &= x_0 + \int_0^\infty e^{-r \frac{u}{\theta}} du \\ &= x_0 + \frac{\theta}{r} \end{aligned}$$

□

Wang transformation (WT)

Démonstration.

$$\begin{aligned} WT[F, \lambda] &= \int_0^\infty \Phi \left(\Phi^{-1} \left(e^{-(x-x_0)/\theta} \right) + \lambda \right) dx \\ &= x_0 + \int_{x_0}^\infty \Phi \left(\Phi^{-1} \left(e^{-(x-x_0)/\theta} \right) + \lambda \right) dx, \quad (z = (x - x_0)/\theta) \\ &= x_0 + \theta \int_0^\infty \Phi \left(\Phi^{-1} \left(e^{-z} \right) + \lambda \right) dx, \quad (u = e^{-z}) \\ &= x_0 + \theta \int_0^1 \Phi \left(\Phi^{-1} \left(u \right) + \lambda \right) \frac{1}{u} du, \quad (z = \Phi^{-1}(u)) \\ &= x_0 + \theta \int_{-\infty}^\infty \Phi(z + \lambda) \frac{\varphi(z)}{\Phi(x)} dz \\ &= x_0 + \theta C_{WT}(\lambda) \end{aligned}$$

□

Gini Shortfall

Démonstration.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{2\delta}{(1-\kappa)^2} \int_c^\infty \left[(1-\kappa)e^{-\frac{(x-x_0)}{\theta}} - e^{-\frac{2}{\theta}(x-x_0)} \right] dx \\
&= \frac{2\delta}{(1-\kappa)^2} \left[\int_c^\infty (1-\kappa)e^{-\frac{(x-x_0)}{\theta}} dx - \int_c^\infty e^{-\frac{2}{\theta}(x-x_0)} dx \right] \\
&= \frac{2\delta}{(1-\kappa)^2} \left[(1-k)^2 [CTE - VaR] - \frac{\theta}{2} \int_{c-x_0}^\infty \frac{2}{\theta} e^{-\frac{2}{\theta}u} du \right] \\
&= \frac{2\delta}{(1-\kappa)^2} \left[(1-k)^2 \theta - \frac{\theta}{2} e^{-\frac{2}{\theta}(c-x_0)} \right] \\
&= \frac{2\delta}{(1-\kappa)^2} \left[(1-k)^2 \theta - \frac{\theta}{2} e^{-\frac{2}{\theta}(x_0 - \theta \ln(1-\kappa) - x_0)} \right] \\
&= \frac{2\delta}{(1-\kappa)^2} \left[(1-k)^2 \theta - \frac{\theta}{2} e^{2 \ln(1-\kappa)} \right] \\
&= \frac{2\delta}{(1-\kappa)^2} \left[(1-k)^2 \theta - \frac{\theta}{2} (1-\kappa)^2 \right] \\
&= [2\delta\theta - \delta\theta] \\
&= \delta\theta.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
GS[F, \beta, \delta] &= x_0 - \theta \ln(1-\kappa) + \theta + \delta\theta \\
&= x_0 - \theta \ln(1-\kappa) + \theta(1+\delta) \\
&= x_0 - \theta \ln(\beta) + \theta(1+\delta)
\end{aligned}$$

□

A.3.2 Loi Pareto I

Value-at-Risk (VaR)

Démonstration.

$$\begin{aligned}
1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^\alpha &= \kappa \\
\frac{x}{x_0} &= (1-\kappa)^{-\frac{1}{\alpha}} \\
x &= x_0 (1-\kappa)^{-\frac{1}{\alpha}} \\
VaR[F, \beta] &= x_0 (\beta)^{-\frac{1}{\alpha}}
\end{aligned}$$

□

Conditional Tail Expectation (CTE)

Démonstration.

$$\begin{aligned}
CTE[F, \beta] &= \frac{1}{\beta} \int_{1-\beta}^1 x_0 (1-u)^{-\frac{1}{\alpha}} du \\
&= \frac{1}{\beta} \int_0^\beta x_0 p^{-\frac{1}{\alpha}} dp \\
&= \frac{x_0}{\beta} \frac{p^{-\frac{1}{\alpha}+1}}{1-\frac{1}{\alpha}} \Big|_0^\beta \\
&= \frac{x_0}{\beta} \frac{p^{-\frac{1}{\alpha}+1}}{1-\frac{1}{\alpha}} \Big|_0^\beta \\
&= x_0 \frac{\alpha}{\alpha-1} \beta^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha > 1
\end{aligned}$$

□

Proportional Hazards Transform (PHT)

Démonstration.

$$\begin{aligned}
PHT[F, r] &= \int_{x_0}^\infty \left(\left(\frac{x_0}{x} \right)^\alpha \right)^r dx \\
&= \int_{x_0}^\infty \left(\frac{x_0}{x} \right)^{r\alpha} dx \\
&= x_0 \frac{r\alpha}{r\alpha-1}, \quad \alpha > \frac{1}{r}
\end{aligned}$$

□

Wang Transformation (WT)

Démonstration.

$$\begin{aligned}
WT[F, \lambda] &= \int_0^\infty \Phi \left(\Phi^{-1} \left(\left(\frac{x_0}{x} \right)^\alpha \right) + \lambda \right) dx \\
&= x_0 + \int_{x_0}^\infty \Phi \left(\Phi^{-1} \left(\left(\frac{x_0}{x} \right)^\alpha \right) + \lambda \right) dx \\
&= x_0 + \int_0^\infty \Phi \left(\Phi^{-1} \left(\left(\frac{x_0}{x+x_0} \right)^\alpha \right) + \lambda \right) dx \\
&= x_0 + \int_0^\infty \Phi \left(\Phi^{-1} \left(\left(\frac{x}{x_0+1} \right)^{-\alpha} \right) + \lambda \right) dx, \quad \left(u = \left(\frac{x}{x_0+1} \right)^{-\alpha} \right) \\
&= x_0 + \frac{x_0}{\alpha} \int_0^1 \Phi(\Phi^{-1}(u) + \lambda) \frac{1}{u^{1/\alpha+1}} du, \quad (z = \Phi^{-1}(u)) \\
&= x_0 + \frac{x_0}{\alpha} \int_{-\infty}^\infty \Phi(z + \lambda) \frac{\varphi(z)}{\Phi(z)^{1/\alpha+1}} dz \\
&= x_0 + \frac{x_0}{\alpha} C_{WT}(\lambda, \alpha)
\end{aligned}$$

□

Gini Shortfall

Démonstration.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{2\delta}{\beta^2} \int_c^\infty \left(\beta \left(\frac{x_0}{x} \right)^\alpha - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{2\alpha} \right) dx \\
&= \frac{2\delta}{\beta^2} \left[\int_c^\infty \beta \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-\alpha} dx - \int_c^\infty \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-2\alpha} dx \right] \\
&= \frac{2\delta}{\beta^2} \left[\beta \left(\frac{x}{x_0} \right)^{1-\alpha} \frac{1}{1-\alpha} \Big|_c^\infty - \left(\frac{x}{x_0} \right)^{1-2\alpha} \frac{1}{1-2\alpha} \Big|_c^\infty \right] \\
&= \frac{2\delta}{\beta^2} \left[\frac{x_0}{\alpha-1} \beta^{2-\frac{1}{\alpha}} - \frac{x_0}{2\alpha-1} \beta^{2-\frac{1}{\alpha}} \right] \\
&= 2\delta x_0 \beta^{-\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{2\alpha-1} \right)
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
GS[F, \delta, \beta] &= x_0 \beta^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{\alpha}{\alpha-1} + 2\delta x_0 \beta^{-\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{2\alpha-1} \right) \\
&= x_0 \beta^{-\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} + \frac{2\delta}{\alpha-1} - \frac{2\delta}{2\alpha-1} \right) \\
&= x_0 \beta^{-\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{(\alpha+2\delta)(2\alpha-1) - 2\delta(\alpha-1)}{(\alpha-1)(2\alpha-1)} \right) \\
&= x_0 \beta^{-\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{2\alpha^2 - \alpha + 2\delta\alpha}{(\alpha-1)(2\alpha-1)} \right) \\
&= x_0 \beta^{-\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{\alpha(2(\alpha+\delta)-1)}{(\alpha-1)(2\alpha-1)} \right) \\
&= x_0 \beta^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{2(\alpha+\delta)-1}{2\alpha-1}
\end{aligned}$$

□

A.3.3 Loi Lognormale translatée

Value-at-Risk

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\Phi \left(\frac{\ln(x - x_0) - \mu}{\sigma} \right) &= 1 - \beta \\
\ln(x - x_0) &= \mu + \sigma \Phi(1 - \beta) \\
VaR[F, \beta] &= x_0 + e^{\mu + \sigma \Phi(1 - \beta)}
\end{aligned}$$

□

Conditional Tail Expectation

On fait le changement de variable $u = x - x_0$:

Démonstration.

$$\begin{aligned}
CTE[F, \beta] &= \frac{1}{\beta} \int_c^\infty x \frac{1}{(x - x_0) \sqrt{(2\pi)\sigma}} e^{-\frac{(\ln(x-x_0)-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \frac{1}{\beta} \int_{c-x_0}^\infty (u + x_0) \frac{1}{u \sqrt{(2\pi)\sigma}} e^{-\frac{(\ln(u)-\mu)^2}{2\sigma^2}} du \\
&= \frac{1}{\beta} \left[\int_{c-x_0}^\infty u \frac{1}{u \sqrt{(2\pi)\sigma}} e^{-\frac{(\ln(u)-\mu)^2}{2\sigma^2}} du + \int_{c-x_0}^\infty x_0 \frac{1}{u \sqrt{(2\pi)\sigma}} e^{-\frac{(\ln(u)-\mu)^2}{2\sigma^2}} du \right] \\
&= \frac{1}{\beta} \left[\int_{\ln(c-x_0)}^\infty e^u \frac{1}{\sqrt{(2\pi)\sigma}} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du + x_0 \left(1 - \Phi \left(\frac{\ln(x_0 + e^{\mu+\sigma\Phi^{-1}(1-\beta)} - x_0) - \mu}{\sigma} \right) \right) \right] \\
&= \frac{1}{\beta} \left[\int_{\ln(c-x_0)}^\infty \frac{1}{\sqrt{(2\pi)\sigma}} e^{u - \frac{u^2 - 2\mu u + \mu^2}{2\sigma^2}} du + x_0 \beta \right] \\
&= \frac{1}{\beta} \left[\int_{\ln(c-x_0)}^\infty \frac{1}{\sqrt{(2\pi)\sigma}} e^{\frac{2\sigma^2 u - u^2 + 2\mu u - \mu^2}{2\sigma^2}} du + x_0 \beta \right] \\
&= \frac{1}{\beta} \left[\int_{\ln(c-x_0)}^\infty \frac{1}{\sqrt{(2\pi)\sigma}} e^{\frac{-[u^2 - 2u(\mu+\sigma^2) + (\mu+\sigma^2)^2 - (\mu+\sigma^2)^2 + \mu^2]}{2\sigma^2}} du + x_0 \beta \right] \\
&= \frac{1}{\beta} \left[\int_{\ln(c-x_0)}^\infty \frac{1}{\sqrt{(2\pi)\sigma}} e^{\frac{-[(u-(\mu+\sigma^2))^2 - \mu^2 - 2\sigma^2\mu - \sigma^4 + \mu^2]}{2\sigma^2}} du + x_0 \beta \right] \\
&= \frac{1}{\beta} \left[\int_{\ln(c-x_0)}^\infty \frac{1}{\sqrt{(2\pi)\sigma}} e^{\frac{-(u-(\mu+\sigma^2))^2}{2\sigma^2} + \mu + \frac{\sigma^2}{2}} du + x_0 \beta \right] \\
&= \frac{1}{\beta} \left[e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \Phi \left(-\frac{\ln(c-x_0) - \mu - \sigma^2}{\sigma} \right) + x_0 \beta \right] \\
&= x_0 + \frac{1}{\beta} e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \Phi(\sigma - \Phi^{-1}(1 - \beta))
\end{aligned}$$

□

Proportional Hazards Transform (PHT)

Démonstration.

$$\begin{aligned}
PHT[F, r] &= r \int_0^1 \left[x_0 + e^{\mu + \sigma \Phi^{-1}(u)} \right] (1-u)^{r-1} du \\
&= \int_0^1 x_0 r (1-u)^{r-1} du + \int_0^1 e^{\mu + \sigma \Phi^{-1}(u)} r (1-u)^{r-1} du \quad (\text{P.P.}) \\
&= x_0 (1-u)^r \Big|_0^1 - e^{\mu + \sigma \Phi^{-1}(u)} (1-u)^r \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\sigma}{\varphi(x)} e^{\mu + \sigma \Phi^{-1}(u)} (1-u)^r du \\
&= x_0 + \int_0^1 \frac{\sigma}{\varphi(z)} e^{\mu + \sigma \Phi^{-1}(u)} (1-u)^r du \quad (z = \Phi^{-1}(u)) \\
&= x_0 + \sigma \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu + \sigma z} (1 - \Phi(z))^r dz \\
&= x_0 + e^\mu \sigma \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \Phi(z))^r e^{\sigma z} dz
\end{aligned}$$

avec l'intégration par partie suivante

$$\begin{aligned} u &= e^{\mu + \sigma \Phi^{-1}(u)}, & dv &= r(1-u)^{r-1} du \\ du &= e^{\mu + \sigma \Phi^{-1}(u)} \frac{\sigma}{\varphi(x)}, & v &= -(1-u)^r \end{aligned}$$

□

Wang Transformation (WT)

On utilise les résultats préliminaire suivants :

- Si $Y \sim N(\mu, \sigma)$ alors $\ln(Y) \sim LN(\mu, \sigma)$.
- Si $Y \sim N(\mu, \sigma)$, alors $cY + k \sim N(c\mu + k, c\sigma)$.

On définit les variables suivantes :

- $K \sim LN(x_0, \mu, \sigma)$
- $X \sim LN(\mu, \sigma)$
- $Y \sim N(\mu, \sigma)$
- $H \sim LN(\mu + \sigma\lambda, \sigma)$

Démonstration.

$$\begin{aligned} WT[F, \lambda] &= \int_0^\infty \Phi(\Phi^{-1}(1 - F_K(x)) + \lambda) dx \\ &= \int_{x_0}^\infty \Phi(\Phi^{-1}(1 - F_X(x)) + \lambda) dx \\ &= x_0 + \int_0^\infty \Phi(\Phi^{-1}(1 - F_X(x)) + \lambda) dx \\ &= x_0 + \int_0^\infty \Phi(\Phi^{-1}(1 - F_Y(\ln(x))) + \lambda) dx \\ &= x_0 + \int_0^\infty \Phi\left(\Phi^{-1}\left(\Phi\left(-\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right)\right) + \lambda\right) dx \\ &= x_0 + \int_0^\infty \Phi\left(\frac{-\ln(x) + \mu}{\sigma} + \lambda\right) dx \\ &= x_0 + \int_0^\infty \Phi\left(\frac{-\ln(x) + \mu + \sigma\lambda}{\sigma}\right) dx \\ &= x_0 + \int_0^\infty \Phi\left(\frac{-\ln(x) - \mu - \sigma\lambda}{\sigma}\right) dx \\ &= x_0 + \int_0^\infty 1 - \Phi\left(\frac{\ln(x) - (\mu + \sigma\lambda)}{\sigma}\right) dx \\ &= x_0 + \int_0^\infty (1 - F_H(x)) dx \\ &= x_0 + E[H] \\ &= x_0 + e^{\mu + \sigma\lambda + \frac{\sigma^2}{2}} \end{aligned}$$

□

Gini Shortfall (GS)

Démonstration.

$$\begin{aligned}
GS[F, \beta, \delta] &= \frac{1}{\beta^2} \int_{1-\beta}^1 \left[x_0 + e^{\mu+\sigma\Phi^{-1}(p)} \right] (\beta(1+2\delta) - 4\delta(1-p)) dp \\
&= \frac{1}{\beta^2} \left[\underbrace{\int_{1-\beta}^1 \left(x_0 + e^{\mu+\sigma\Phi^{-1}(p)} \right) \beta(1+2\delta) dp}_A - \underbrace{\int_{1-\beta}^1 \left(x_0 + e^{\mu+\sigma\Phi^{-1}(p)} \right) 4\delta dp}_B \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\int_{1-\beta}^1 px_0 4\delta dp}_C + \underbrace{\int_{1-\beta}^1 pe^{\mu+\sigma\Phi^{-1}(p)} 4\delta dp}_D \right]
\end{aligned}$$

On résout les quatre intégrales séparément :

$$\begin{aligned}
A &= \int_{1-\beta}^1 \left(x_0 + e^{\mu+\sigma\Phi^{-1}(p)} \right) \beta(1+2\delta) dp \\
&= \beta(1+2\delta) \int_{1-\beta}^1 \left(x_0 + e^{\mu+\sigma\Phi^{-1}(p)} \right) dp \\
&= \beta(1+2\delta) \frac{\beta}{\beta} \int_{1-\beta}^1 \left(x_0 + e^{\mu+\sigma\Phi^{-1}(p)} \right) dp \\
&= \beta^2(1+2\delta) TVaR_{1-\beta}(X) \\
&= \beta^2(1+2\delta) \left[x_0 + \frac{1}{\beta} e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \Phi(\sigma - \Phi^{-1}(1-\beta)) \right] \\
&= x_0 \beta^2 + 2\delta \beta^2 x_0 + \beta(1+2\delta) e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \Phi(\sigma - \Phi^{-1}(1-\beta))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \int_{1-\beta}^1 \left(x_0 + e^{\mu+\sigma\Phi^{-1}(p)} \right) 4\delta dp \\
&= 4\delta \beta TVaR_{1-\beta}(X) \\
&= 4\delta \beta \left[x_0 + \frac{1}{\beta} e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \Phi(\sigma - \Phi^{-1}(1-\beta)) \right] \\
&= 4\delta \beta x_0 + 4\delta e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \Phi(\sigma - \Phi^{-1}(1-\beta))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= 4\delta x_0 \int_{1-\beta}^1 pdp \\
&= 4\delta x_0 \frac{p^2}{2} \Big|_{1-\beta}^1 \\
&= 2\delta x_0 - 2\delta(1-\beta)^2 x_0 \\
&= 2\delta x_0 - 2\delta x_0 + 4\delta \beta x_0 - 2\delta \beta^2 x_0 \\
&= 4\delta \beta x_0 - 2\delta \beta^2 x_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= 4\delta \int_{1-\beta}^1 p e^{\mu + \sigma \Phi^{-1}(p)} dp, \quad (z = \Phi^{-1}(p)) \\
&= 4\delta \int_{\Phi^{-1}(1-\beta)}^{\infty} \Phi(z) e^{\mu + \sigma z} \varphi(z) dz \\
&= 4\delta \int_{\Phi^{-1}(1-\beta)}^1 \Phi(z) e^{\mu + \sigma z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\
&= 4\delta \int_{\Phi^{-1}(1-\beta)}^1 \Phi(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu + \sigma z - \frac{1}{2}z^2} dz \\
&= 4\delta \int_{\Phi^{-1}(1-\beta)}^1 \Phi(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{2\mu + 2\sigma z - z^2}{2}} dz \\
&= 4\delta \int_{\Phi^{-1}(1-\beta)}^1 \Phi(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z^2 - 2\sigma z + \sigma^2 - 2\mu - \sigma^2)} dz \\
&= 4\delta \int_{\Phi^{-1}(1-\beta)}^1 \Phi(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z - \sigma)^2 + \mu + \frac{\sigma^2}{2}} dz \\
&= 4\delta e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \int_{\Phi^{-1}(1-\beta)}^1 \Phi(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z - \sigma)^2} dz \\
&= 4\delta e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \int_{\Phi^{-1}(1-\beta)}^1 \Phi(z) \varphi(z - \sigma) dz
\end{aligned}$$

Donc, il reste à remettre les intégrales ensemble :

$$\begin{aligned}
GS[F, \beta, \delta] &= \frac{1}{\beta^2} [\mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D}] \\
&= \frac{1}{\beta^2} \left[x_0 \beta^2 + 2\delta \beta^2 x_0 + \beta(1 + 2\delta) e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \Phi(\sigma - \Phi^{-1}(1 - \beta)) \right. \\
&\quad - 4\delta \beta x_0 + 4\delta e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \Phi(\sigma - \Phi^{-1}(1 - \beta)) \\
&\quad + 4\delta \beta x_0 - 2\delta \beta^2 x_0 \\
&\quad \left. + 4\delta e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \int_{\Phi^{-1}(1-\beta)}^1 \Phi(z) \varphi(z - \sigma) dz \right] \\
&= x_0 + \frac{1}{\beta^2} e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \Phi(\sigma - \Phi^{-1}(1 - \beta)) (\beta(1 + 2\delta) - 4\delta \\
&\quad + 4\delta \int_{\Phi^{-1}(1-\beta)}^1 \Phi(z) \varphi(z - \sigma) dz) \\
&= x_0 + \frac{1}{\beta^2} e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} ([\beta(1 + 2\delta) - 4\delta] \Phi(\sigma - \Phi^{-1}(1 - \beta)) + 4\delta C_{GS}(\beta, \sigma))
\end{aligned}$$

□

A.3.4 Loi Pareto généralisée

Proportional Hazards Transform (PHT)

Démonstration.

$$\begin{aligned}
PHT[F, r] &= \int_0^\infty \left(1 + \frac{\xi}{\sigma}(x - \theta)\right)^{-\frac{r}{\xi}} dx \\
&= \theta + \int_\theta^\infty \left(1 + \frac{\xi}{\sigma}(x - \theta)\right)^{-\frac{r}{\xi}} dx \\
&= \theta + \int_\theta^\infty \left(1 + \frac{\xi}{\sigma}(x - \theta)\right)^{-\frac{r}{\xi}} dx \\
&= \theta + \int_0^\infty \left(1 + \frac{\xi}{\sigma}x\right)^{-\frac{r}{\xi}} dx \\
&= \theta + \frac{\sigma}{\xi} \int_1^\infty u^{-\frac{r}{\xi}} du \\
&= \theta + \frac{\sigma}{\xi} \frac{u^{-\frac{r}{\xi}+1}}{-\frac{r}{\xi}+1} \Big|_1^\infty \\
&= \theta - \frac{\sigma}{\xi} \frac{1}{-\frac{r}{\xi}+1}, \quad \xi < r \\
&= \theta - \frac{\sigma}{\xi} \frac{\xi}{\xi - r}, \quad \xi < r \\
&= \theta - \frac{\sigma}{\xi - r}, \quad \xi < r \\
&= \theta + \frac{\sigma}{r - \xi}, \quad \xi < r
\end{aligned}$$

□

Gini Shortfall (GS)

Démonstration.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{2\delta}{\beta^2} \int_c^\infty \left(\beta \left(1 + \frac{\xi}{\sigma}(x - \theta)\right)^{-\frac{1}{\xi}} - \left(1 + \frac{\xi}{\sigma}(x - \theta)\right)^{-\frac{2}{\xi}} \right) dx \\
&= \frac{2\delta}{\beta^2} \left[\beta \int_c^\infty \left(1 + \frac{\xi}{\sigma}(x - \theta)\right)^{-\frac{1}{\xi}} dx - \int_c^\infty \left(1 + \frac{\xi}{\sigma}(x - \theta)\right)^{-\frac{2}{\xi}} dx \right]
\end{aligned}$$

On commence par résoudre l'intégrale générale \mathbf{B} :

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \int_c^\infty \left(1 + \frac{\xi}{\sigma}(x - \theta)\right)^{-\frac{r}{\xi}} dx \\
&= \int_{c-\theta}^\infty \left(1 + \frac{\xi}{\sigma}x\right)^{-\frac{r}{\xi}} dx \\
&= \frac{\sigma}{\xi} \int_{1+\frac{\xi}{\sigma}(c-\theta)}^\infty u^{-\frac{r}{\xi}} du \\
&= \frac{\sigma}{r-\xi} \left(1 + \frac{\xi}{\sigma}(c-\theta)\right)^{1-\frac{r}{\xi}} \\
&= \frac{\sigma}{r-\xi} \left(1 + \frac{\xi}{\sigma} \left(\frac{\sigma}{\xi} (\beta^{-\xi} - 1) + \theta - \theta\right)\right)^{1-\frac{r}{\xi}} \\
&= \frac{\sigma}{r-\xi} \beta^{r-\xi}
\end{aligned}$$

Donc \mathbf{A} devient

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \frac{2\delta}{\beta^2} \left[\beta \int_c^\infty \left(1 + \frac{\xi}{\sigma}(x - \theta)\right)^{-\frac{1}{\xi}} dx - \int_c^\infty \left(1 + \frac{\xi}{\sigma}(x - \theta)\right)^{-\frac{2}{\xi}} dx \right] \\
&= \frac{2\delta}{\beta^2} \left[\beta \frac{\sigma}{1-\xi} \beta^{1-\xi} - \frac{\sigma}{2-\xi} \beta^{2-\xi} \right] \\
&= 2\delta \left[\frac{\sigma}{1-\xi} \beta^{-\xi} - \frac{\sigma}{2-\xi} \beta^{-\xi} \right] \\
&= \frac{2\delta\sigma}{\beta^\xi} \left[\frac{1}{1-\xi} - \frac{1}{2-\xi} \right] \\
&= \frac{1}{\beta^\xi} \frac{2\delta\sigma}{(1-\xi)(2-\xi)}, \quad \xi < 1
\end{aligned}$$

On peut donc obtenir la mesure

$$GS[F, \beta, \delta] = \frac{\sigma}{\xi} \left(\frac{\beta^{-\xi}}{1-\xi} - 1 \right) + \frac{1}{\beta^\xi} \frac{2\delta\sigma}{(1-\xi)(2-\xi)} + \theta, \quad \xi < 1$$

□

Bibliographie

- Abramson, D. (2022). A nonproportional premium rating method for construction risks. *North American Actuarial Journal*, pages 1–20.
- Albrecher, H., Beirlant, J., and Teugels, J. L. (2017). *Reinsurance : actuarial and statistical aspects*. John Wiley & Sons.
- Almer, B. (1963). Individual risk theory and risk statistics as applied to fire insurance. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 2(3) :365–379.
- Antal, D. P. and Re, S. (2007). Mathematical methods in reinsurance. *Lecture Notes, ETH Zurich*.
- Barde, J. (2022). Analyse actuarielle du péril incendie. Technical report, Université Laval.
- Benckert, L.-G. and Sternberg, I. (1957). An attempt to find an expression for the distribution of fire damage amount. In *XVth International Congress of Actuaries, New York*.
- Bernegger, S. (1997). The swiss re exposure curves and the mbbefd distribution class1. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 27(1) :99–111.
- Biffis, E. and Chavez, E. (2014). Tail risk in commercial property insurance. *Risks*, 2(4) :393–410.
- Brazauskas, V., Jones, B. L., and Zitikis, R. (2009). Robust fitting of claim severity distributions and the method of trimmed moments. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139(6) :2028–2043.
- Brazauskas, V. and Kleefeld, A. (2011). Folded and log-folded-t distributions as models for insurance loss data. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2011(1) :59–74.
- Brazauskas, V. and Kleefeld, A. (2016). Modeling severity and measuring tail risk of norwegian fire claims. *North American Actuarial Journal*, 20(1) :1–16.
- Chao, W. (2022). Pricing catastrophe reinsurance under the standard deviation premium principle. *AIMS Math*, 7 :4472–4484.
- Charpentier, A. and Flachaire, E. (2021). Pareto models for risk management. In *Recent Econometric Techniques for Macroeconomic and Financial Data*, pages 355–387. Springer.
- Chernobai, A., Rachev, S., and Fabozzi, F. (2005). Composite goodness-of-fit tests for left-truncated loss samples. *Handbook of financial econometrics and statistics*, pages 575–596.
- Coles, S., Bawa, J., Trenner, L., and Dorazio, P. (2001). *An introduction to statistical modeling of extreme values*, volume 208. Springer.
- Corradin, S., Spa, R., and di Gruppo, P. R. (2002). Economic risk capital and reinsurance : an extreme value theory's application to fire claims of an insurance company. *University Catholic de Louvain : Institute of statistics*.
- Corradin, S. and Verbrigghe, B. (2001). Economic risk capital and reinsurance : an application to fire claims of an insurance company. *RAS, Pianificazione Redditività di Gruppo, December*.

- Cummins, J. D., Dionne, G., McDonald, J. B., and Pritchett, B. M. (1990). Applications of the gb2 family of distributions in modeling insurance loss processes. *Insurance : Mathematics and Economics*, 9(4) :257–272.
- Dutang, C. and Charpentier, A. (2020). *CASdatasets : Insurance datasets*. R package version 1.0-11.
- Fisher, R. A. and Tippett, L. H. C. (1928). Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. In *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*, volume 24, pages 180–190. Cambridge University Press.
- Jones, B. L. and Zitikis, R. (2003). Empirical estimation of risk measures and related quantities. *North American Actuarial Journal*, 7(4) :44–54.
- Laudagé, C., Desmettre, S., and Wenzel, J. (2019). Severity modeling of extreme insurance claims for tariffication. *Insurance : Mathematics and Economics*, 88 :77–92.
- Lin, Y.-S. (2005). Estimations of the probability of fire occurrences in buildings. *Fire safety journal*, 40(8) :728–735.
- Longley-Cook, L. H. (1951). Problems of fire insurance rate making. In *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, volume 38, pages 94–102.
- Longley-Cook, L. H. (1952). A statistical study of large fire losses with application to a problem in catastrophe insurance. In *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, volume 39, pages 77–83.
- Longley-Cook, L. H. (1959). Notes on some actuarial problems of property insurance. In *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, volume 46, pages 66–81.
- Mandelbrot, B. (1964). Random walks, fire damage amount and other paretian risk phenomena. *Operations Research*, 12(4) :582–585.
- McNeil, A. J. (1997). Estimating the tails of loss severity distributions using extreme value theory. *ASTIN Bulletin*, 27(1) :117–137.
- Parodi, P. (2014). *Pricing in general insurance*. CRC press.
- Pickands III, J. (1975). Statistical inference using extreme order statistics. *the Annals of Statistics*, pages 119–131.
- Ramachandran, G. (1974). Extreme value theory and large fire losses. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 7(3) :293–310.
- Riegel, U. (2010). On fire exposure rating and the impact of the risk profile type. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 40(2) :727–777.
- Rydman, M. (2018). Application of the peaks-over-threshold method on insurance data.
- Shpilberg, D. C. (1977). The probability distribution of fire loss amount. *Journal of Risk and Insurance*, pages 103–115.
- So, M. K. and Wong, C.-M. (2012). Estimation of multiple period expected shortfall and median shortfall for risk management. *Quantitative Finance*, 12(5) :739–754.
- Upretee, S. and Brazauskas, V. (2022). Computing and estimating distortion risk measures : How to handle analytically intractable cases ? *North American Actuarial Journal*, pages 1–21.
- Zhao, Q., Brazauskas, V., and Ghorai, J. (2018). Robust and efficient fitting of severity models and the method of winsorized moments. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 48(1) :275–309.