**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования**

**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**(СПбГЭУ)**

Факультетинформатики и прикладной математики

Кафедра прикладной математики и экономико-математических методов

**КУРСОВАЯ РАБОТА**

по дисциплине:

«**Численные методы**»

Тема: «МДМ-метод для общей квадратичной задачи математической диагностики, связь с жестким линейным отделением»

Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Направленность «Прикладная математика и информатика в экономике  
и управлении»

Обучающийся Круглов Александр Денисович

Группа ПМ-2101 Подпись

Проверил Соловьева Наталья Анатольевна

Должность к.ф-м.н., доцент

Оценка Дата

Подпись

Санкт-Петербург

2023 г.

Содержание

[Введение 3](#_Toc132387006)

[1. ОПисание Обобщенного Мдм-метода 4](#_Toc132387007)

[1.1. Постановка задачи 4](#_Toc132387008)

[1.2. Итерационный переход 4](#_Toc132387009)

[1.3. Схема работы алгоритма 8](#_Toc132387010)

[1.4. Связь с жестким SVM-отделением 8](#_Toc132387011)

[2. Программная РеализациЯ МДМ-метода 9](#_Toc132387012)

[Заключение 10](#_Toc132387013)

[Библиографический Список 11](#_Toc132387014)

Введение

Данная работа посвящена изучению обобщенного МДМ-метода, являющегося естественным развитием идей МДМ-метода, изложенного в работе [1]. Обобщенный МДМ-метод позволяет за сравнительно небольшое число операций получать решение квадратичной задачи общей математической диагностики с требуемой точностью. Также в работе представлена программная реализация метода на языке Python c использованием сторонней библиотеки .

# ОПисание Обобщенного Мдм-метода

## Постановка задачи

Пусть в пространстве с евклидовой нормой заданы два конечных множества: и , где . Обозначим через и выпуклые оболочки множеств и соответственно. Выберем по произвольному вектору из каждой выпуклой оболочки: и . Тогда квадратичная задача общей математической диагностики ставится следующим образом: Таким образом, эта задача состоит в нахождении точек из двух выпуклых оболочек с минимальным расстоянием между ними.

## Итерационный переход

Приведем описание шага алгоритма, изложенного в работе [2].

Пусть имеется некоторое приближение к решению исходной задачи

.

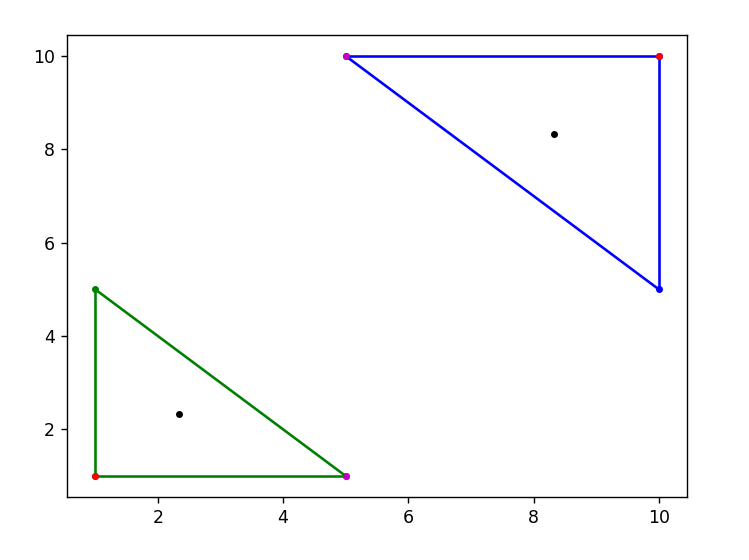
В силу выпуклости оболочек и точки и можно представить через векторы исходных множеств и соответственно

Дополнительно введем следующие обозначения:

.

Для текущего приближения найдем индексы , такие что:

Приведем демонстрационный пример для простых линейных оболочек – треугольников. Пусть первый треугольник имеет вершины в точках (1, 1), (1, 5) и (5, 1); второй треугольник – в точках (10, 10), (5, 10) и (10, 5). Выберем в качестве начальных приближений центры масс данных треугольников и найдем точки , , и . Они будут соответственно точками (1, 1), (1, 5), (10, 10) и (5, 10). На рисунке 1 первый треугольник выделен зелёным цветом, второй – синим; начальные приближения обозначены чёрными точками; точки , - красным цветом; точки , - фиолетовым.



Пример поиска индексов , , и

Вычислим следующие показатели:

Покажем, что равенство выполняется в том и только в том случае если – решение исходной задачи. Сначала докажем, что оптимальность следует из . Для этого покажем, что для произвольного плана исходной задачи , где - оптимальное решение. При доказательстве также воспользуемся вспомогательным утверждением, что для произвольного плана . Обоснование последнего утверждения приводится в работе [2].

Действительно:

.

Таким образом, из по только что доказанному неравенству следует, что .

Теперь докажем и обратное утверждение: из следует . Рассмотрим случай . Введем следующие вектора:

,

Умножая скалярно на , получаем следующее соотношение:

.

Из этого следует, что , а вспоминая о том, что и, значит, , . В силу того, что , заключаем, что .

Аналогичным образом рассмотрим случай, когда . Введём вектора:

,

Умножая скалярно на , получаем следующее неравенство:

.

Отсюда, как и в предыдущем случае, следует, что , что вместе с неравенством обеспечивает равенство . На этом доказательство завершено.

Пусть . Тогда следующее приближение к решению можно построить следующим образом:

Такое построение не противоречиво, так как в силу построения, а .

Если , то формула построения следующего приближения примет следующий вид:

В этом случае противоречий также не возникает: по построению и .

По приведённым выше формулам строится последовательность приближений. Данная последовательность является строго убывающей по норме и сходится к точному решению исходной задачи. Обоснование данного факта приведено в работе [3].

## Схема работы алгоритма

Исходя из описанного выше итерационного перехода, можно составить общую схему приближенного решения задачи общей математической диагностики при помощи обобщённого МДМ-метода, с требуемой точностью :

* + 1. Строим некоторое начальное приближение .
    2. Рассчитываем показатель для начального приближения; если , то начальное приближение является искомым решением, в противном случае начинаем строить последовательные приближения .
    3. Находим индексы для текущего приближения.
    4. Вычисляем значение .
    5. Если , то строим следующее приближение и возвращаемся к пункту 3.
    6. Если , то текущее приближение – искомое.

## Связь с жестким SVM-отделением

Покажем теперь связь между решениями задачи общей математической диагностики и задачи строгого линейного отделения двух множеств, которая в введенных выше обозначениях примет следующий вид:

, ;

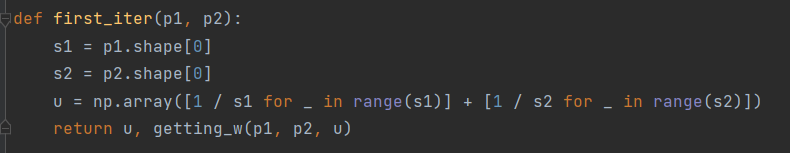
Пусть имеется оптимальное решение квадратичной задачи общей математической диагностики . Тогда, как это обосновано в работе [4], оптимальный план решения задачи строгого линейного отделения двух множеств можно выразить следующим образом:

Стоит отметить, что условие равносильно , что означает отсутствие решения у задачи строгого линейного отделения.

# Программная РеализациЯ МДМ-метода

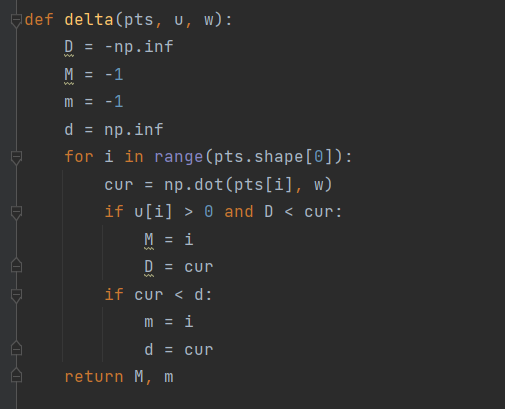
## Основные функции в программной реализации

Программная реализация обобщенного МДМ-метода была осуществлена на языке Python; при этом был частично задействован функционал сторонней библиотеки *Numpy*. В итоговой программе, кроме главной функции, непосредственно воплощающей МДМ-метод, присутствуют несколько вспомогательных подпрограмм. Так, функция под названием first\_iter генерирует начальное приближение к решению, которое по совместительству является центрами масс исходных множеств. Текст подпрограммы представлен на рисунке 2.



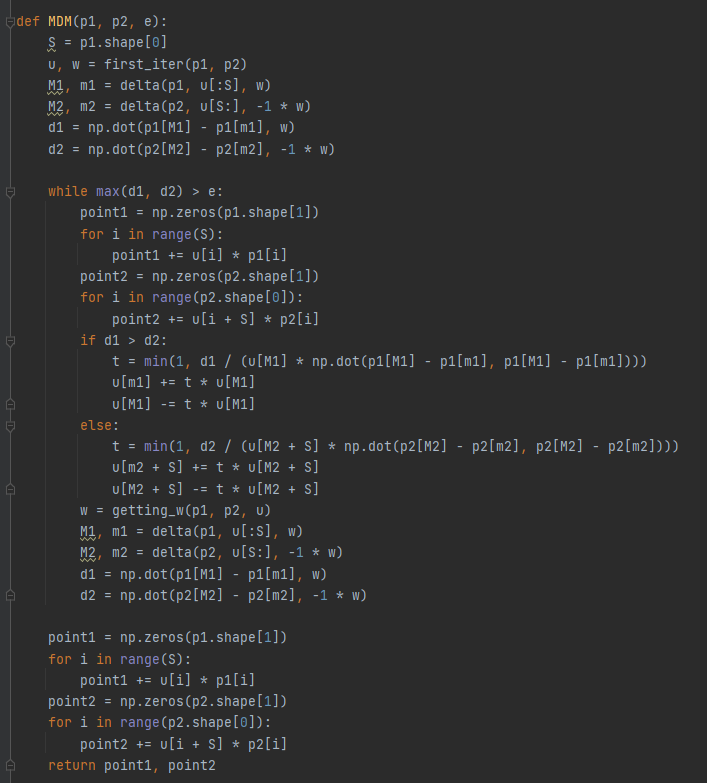
Код вспомогательной функции first\_iter

Другой дополнительной функцией в программе является delta, которая ищет точки максимума и минимума для исходных множеств по скалярному произведению с текущим приближением к решению (подробнее в п. 1.2). Код функции приведен на рисунке 3.



Код вспомогательной функции delta

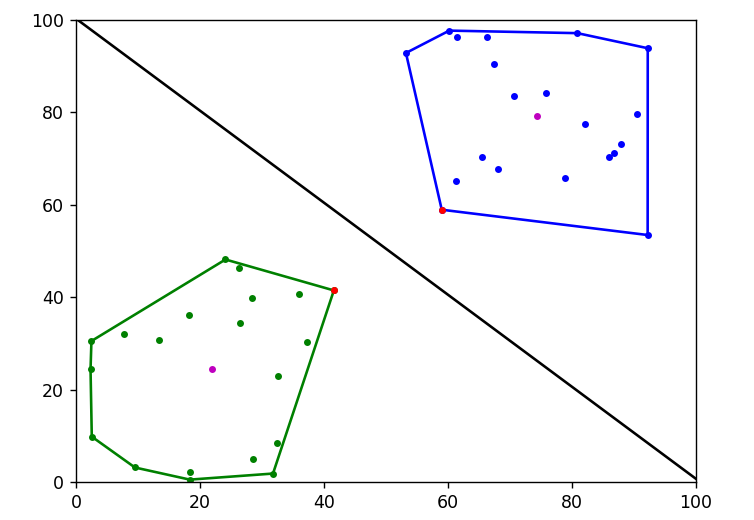
Главной функцией, непосредственно реализующий описанный метод, является MDM. В качестве аргументов, она принимает два набора точек, образующих выпуклые оболочки, и необходимую точность искомого решения. Сама функция выполняет алгоритм, описанный в пункте 1.3. Как итоговый результат, возвращаются координаты двух точек из каждой оболочки, являющихся решениями задачи общей математической диагностики. Текст программы представлен на рисунке 4.



Код основной функции MDM

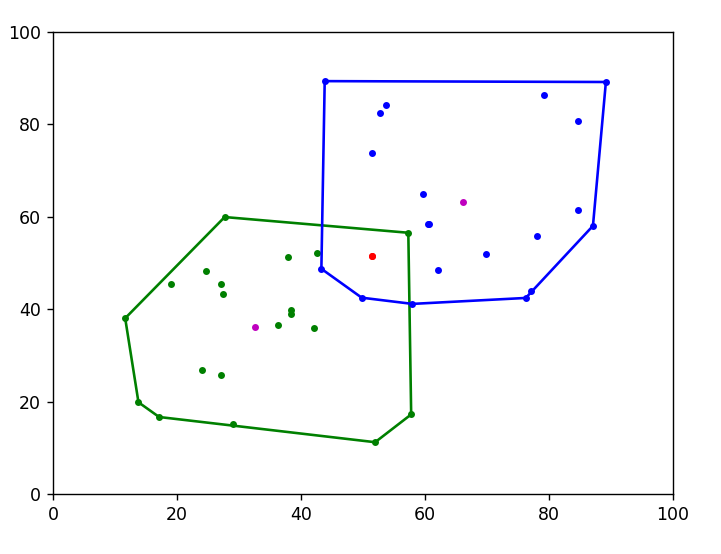
## Примеры работы программы

Приведем несколько примеров работы данной программы. В первом случае создадим случайные два множества точек на плоскости таким образом, что их выпуклые оболочки не пересекаются. Результат работы программы приведен на рисунке 5. Зеленым цветом изображены точки, входящие в первое исходное множество, и замкнутая ломаная, образующая первую выпуклую оболочку. Синим цветом изображены точки, входящие во второе исходное множество, и замкнутая ломаная, образующая вторую выпуклую оболочку. Фиолетовым цветом обозначены точки – начальные приближения к решению, красным – итоговые решения, удовлетворяющие степени точности . Так как оболочки не пересекаются, можно провести разделяющую прямую, изображенную на рисунке черным цветом.



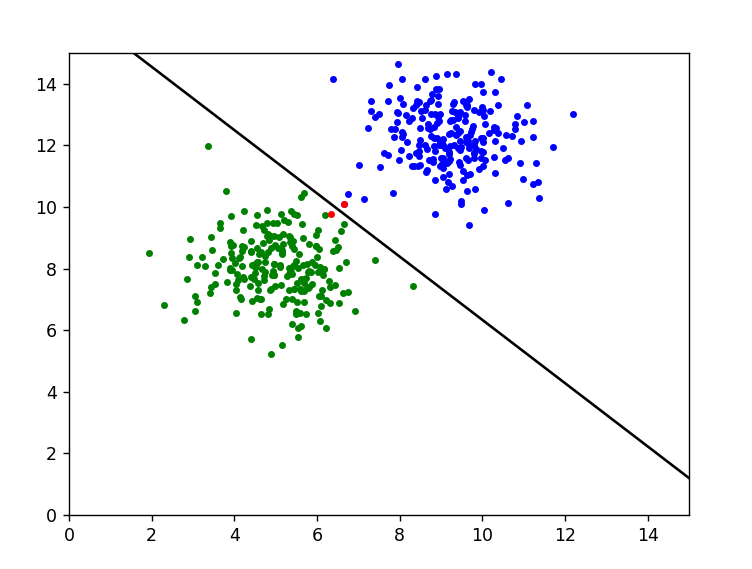
Пример работы программы с непересекающимися множествами на плоскости

Рассмотрим теперь множества, выпуклые оболочки которых имеют пересечение. Результат работы программы в этом случае приведен на рисунке 6 (используются все предыдущие обозначения по цветам). Как можно легко увидеть, при пересечении выпуклых оболочек, искомые решения сходятся в одну общую точку, непосредственно лежащую в пересечении. Понятно, что в таком случае жесткое линейное отделение невозможно.



Пример работы программы с пересекающимися множествами на плоскости

В конце рассмотрим пример на больших данных: непересекающиеся выпуклые оболочки образованы 450 точками на плоскости. Результаты работы программы приведен на рисунке 7 (изображены точки из двух разных классов – зелёные и синие соответственно, красным цветом обозначены решения задачи общей математической диагностики, а черным – разделяющая два множества прямая).



Пример работы программы на больших данных

Заключение

В данной работе был рассмотрен обобщенный МДМ-метод для решения квадратичной задачи общей математической диагностики. В первой части были рассмотрены ряд теоретических аспектов: приведена постановка исходной задачи общей математической диагностики, рассмотрен итерационный переход обобщенного МДМ-метода и доказана его сходимость, приведена полная схема работы МДМ-метода и обозначена связь между решением задачи общей математической диагностики и жестким линейным отделением двух множеств. Во второй части, посвященной практическим аспектами работы, была приведена программная реализация обобщенного МДМ-метода на языке Python и рассмотрены несколько примеров работы данной программы для множеств точек на плоскости.

Библиографический Список

Митчелл Б. Ф., Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Нахождение ближайшей к началу координат точки многогранника // Вестник ЛГУ. 1971. № 19. С. 38-45.

Семинар по оптимизации, машинному обучению и искусственному интеллекту [Электронный ресурс] / Избранные доклады за 2022 год / Малозёмов В. Н., Соловьева Н. А. *МДМ-метод для решения общей квадратичной задачи математической диагностики*.

URL:<http://oml.cmlaboratory.com/pdf/2022/Malozemov_1june2022_MDM_CH.pdf>.

Lopez J., Dorronsoro J. R. A common framework for the convergence of the GSK, MDM and SMO algorithms / Springer-Verlag Berlin Heidelberg. K. Diamantaras, W. Duch, L.S. Iliadis (Eds.): ICANN 2010, Part II, LNCS 6353, pp. 82-87.

Семинар по оптимизации, машинному обучению и искусственному интеллекту [Электронный ресурс] / Избранные доклады за 2022 год / Малозёмов В. Н., Соловьева Н. А. *Общая квадратичная задача математической диагностики*.

URL:<http://oml.cmlaboratory.com/pdf/2022/Malozemov_11may2022_QuadMathDiagn.pdf>