1-ая неделя

4.09.2023

Теорема 1 (Необходимое условие дифференцируемости). *Если $f : \mathbb{R}^n \supseteq O \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке a, то $\forall u \in \mathbb{R}^n \, \exists \frac{\partial f}{\partial u}(a)$ (далее показано, что это эквивалентно для частных производных только по x_i).*

Теорема 2 (Дифференциал композиции). *Пусть $g : X \to Y$, $f : Y \to Z$. Тогда если g дифференцируема в точке a и f дифференцируема в точке $g(a)$, то $f \circ g$ дифференцируема в точке a и $d_a(f \circ g) = d_{g(a)}f \cdot d_a g$.*

Или, если рассматривать матрицу Якоби, $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$

Теорема 3 (Дифференцирование результата арифметических действий). *Пусть $O \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in O$; $f, g : O \to \mathbb{R}^m$, $\lambda : O \to R$; f, g, λ дифференцируемы в точке a; $A, B \in \mathbb{R}$.*

Тогда

1. *$Af + Bg$ дифференцируемо в точке a и $d_a(Af + Bg) = Ad_a f + Bd_a g$*
2. *λf дифференцируемо в точке a и $d_a(\lambda f) = f(a) \cdot d_a \lambda + \lambda(a) \cdot d_a f$*
   Или на языке матриц: $(\lambda f)' = f(a) \cdot \lambda'(a) + \lambda(a) \cdot f'(a)$
3. *$\langle f, g\rangle$ дифференцируемо в точке a и $d_a\langle f, g\rangle = (g(a))^T d_a f + (f(a))^T d_a g$*
   $(\langle f, g\rangle)' = (g(a))^T \cdot f'(a) + (f(a))^T \cdot g'(a)$
4. *Если $m = 1$ и $g(a) \neq 0$, то f/g дифференцируемо в точке a и $d_a(f/g) = \frac{g(a)d_a f - f(a)d_a g}{g^2(a)}$*

если g дифференцируема в точке a и f дифференцируема в точке $g(a)$, то $f \circ g$ дифференцируема в точке a и $d_a(f \circ g) = d_{g(a)}f \cdot d_a g$.

Или, если рассматривать матрицу Якоби, $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$

Теорема 4 (Теорема Лагранжа для отображений). *Пусть $f : \mathbb{R}^n \supseteq O$(открытое) $\to \mathbb{R}^m$, f дифференцируемо в O; $a, b \in O$, $\forall t \in (0, 1)$ $a + t(b - a) \in O$.*

Тогда $\exists \theta \in (0, 1) : ||f(b) - f(a)|| \leq ||f'(a + \theta(b - a))|| \cdot ||b - a||$

Следствие 1. *Если $\forall \theta \in (0, 1)$ $||f'(a + \theta(b - a))|| \leq M \in \mathbb{R}$, то $||f(b) - f(a)|| \leq M||(b - a)||$*

Следствие 2. *Если $m = 1$ и $\forall u \in O$ $\forall i = 1..n$ $||\frac{\partial f}{\partial x_i}(u)|| \leq M$, то $||f(b) - f(a)|| \leq M\sqrt{n}||(b - a)||$*

Теорема 5 (Достаточное условие дифференцируемости). *Пусть $f : \mathbb{R}^n \supseteq O$(открытое) $\to \mathbb{R}^m$, $a \in O$; $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $\forall i \in 1..n$ 1) определен в некоторой окрестности точки a 2) непрерывен в точке a*

Тогда f дифференцируема в точке a.

Замечание. *f дифференцируема в точке $a \Leftrightarrow f(a + h) - f(a) - f'(a) \cdot h = o(h)$ при $h \to 0$*

Определение 1. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \supseteq O$(открытое) $\to \mathbb{R}$, $g(u) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(u)$ для некоторого i определена в точке a и $\exists \frac{\partial g}{\partial x_j}(a)$ для некоторого j.*

Тогда $f_{x_i x_j} \coloneqq \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \coloneqq \frac{\partial g}{\partial x_i}(a)$

Определение 2. *$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \coloneqq \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ - чистая частная производная.*

Определение 3. *$f_{x_i x_j}$, где $i \neq j$, - смешанная производная.*

Теорема 6. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \supseteq O$(открытое) $\to \mathbb{R}$, $i \neq j$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ определены и непрерывны в окрестности точка a.*

Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$

Определение 4. *Если $f : \mathbb{R}^n \supseteq O \to \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^n$, то $d_a^2 f(h) \coloneqq d(d_a f(h))(h)$*

2-ая неделя

11.09.2023

Определение 1. $r \in \mathbb{Z}_+$, O – *открытое в* $\mathbb{R}^n$
Тогда $C^r(O) \coloneqq \{f\colon O \to R : \forall i_1 \dots i_r \ \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r} \dots \partial x_{i_1}} \in C(O)\}$

Определение 2. $C^\infty(O) \coloneqq \bigcap\limits_{r \in \mathbb{Z}_+} C^r(O)$

Теорема 1 (О линейном пространстве $C^r(O)$)**.** $C^r(O)$ - *линейное пространство. Замкнуто относительно произведения:* $f, g \in C^r : f \cdot g \in C^r$

Определение 3. $C^r(O \to \mathbb{R}^m) \coloneqq \{f : f_1, \dots f_m \in C^r(O)\}$

Теорема 2 (Композиция $C^r(O)$)**.** *Пусть* $\varphi \in C^r(O \to \tilde{O})$, $f \in C^r(\tilde{O})$.
Тогда $f \circ \varphi \in C^r(O)$

Теорема 3 (О равенстве смешанных производных в классе C^r)**.** *Если* $f \in C^r(O)$, O – *открытое в* $\mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{Z}_+$; $(i_1, i_2, \dots i_l) \in 2^{\{1,\dots,r\}}$, $l \le r$, $(j_1, \dots, j_l)$ – *перестановка*$(i_1, \dots i_l)$
Тогда $\frac{\partial^l f}{\partial x_{i_l} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^l f}{\partial x_{j_l} \dots \partial x_{j_1}}$

Определение 4. *Мультииндекс - элемент* ${\mathbb{Z}_+}^n$
$|j| = j_1 + j_2 + \dots + j_n$
$j! = j_1! \cdot j_2! \cdot \dots \cdot j_n!$
$h \in \mathbb{R}^n, h^j = h_1^{j_1} \cdot \dots \cdot h_n^{j_n}$
$f^(j)(a) = \frac{\partial^{|j|} f}{\partial x_n^{j_n} \dots \partial x_1^{j_1}}(a)$

Лемма 1. *Пусть* $f \in C^r(O)$, O – *открытое в* $\mathbb{R}^n$, $[a, a+h] \subset O$, $g(t) = f(a + th)$.
Тогда $\forall l = 0, \dots, r : g^{(l)}(t) = \sum_{j \in {\mathbb{Z}_+}^n, |j| = l} \frac{l!}{j!} f^{(j)}(a + th) \cdot h^j$

Теорема 4 (Глобальная формула Тейлора(-Лагранжа) для функции нескольких переменных)**.** *Если* $f \in C^{r+1}(O)$, O – *открытое в* $\mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{Z}_+$; $[a, a+h] \subset O$.
Тогда $\exists \theta \in (0,1) : f(a+h) = \sum_{j \in {\mathbb{Z}_+}^n, |j| \le r} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + \sum_{j \in {\mathbb{Z}_+}^n, |j| = r+1} \frac{f^{(j)}(a + \theta h)}{j!} h^j$

Следствие 1 (Формула Тейлора-Пеано, локальный вариант формулы Тейлора)**.** *Пусть* $f \in C^r(O)$, O – *открытое в* $\mathbb{R}^n$, $a \in O$.
Тогда $f(a+h) = \sum_{j \in {\mathbb{Z}_+}^n, |j| \le r} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + o(||h||^j)$ *при* $h \to 0$

Следствие 2 (Теорема Лагранжа о среднем для скалярно-значных отображений)**.** *Пусть* $f \in C^1(O)$, O – *открытое в* $\mathbb{R}^n$; $a, h : a + th \in O \forall t \in [0,1]$.
Тогда $f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \theta h) \cdot h_i = \langle \nabla_{a+\theta h} f, h \rangle$ *(частный случай Тейлора для* $r = 0$*).*

Следствие 3 (Полиномиальная формула)**.** $(x_1 + \dots + x_n)^r = \sum_{j \in {\mathbb{Z}_+}^n, |j| = r} \frac{r!}{j!} (x_1, \dots, x_n)^j$, *при* $r \in \mathbb{Z}_+$

Замечание. $d_a^0 f = f(a)$
$d_a^1 f = d_a f$
$d_a^1 f(h) = d_a f(h)$
$d_a^{l+1} f(h) = d_a(d_a^l f(h))(h)$

Лемма 2. *Пусть* $f \in C^r(O)$, O – *открытое в* $\mathbb{R}^n$; $a, h : a + th \in O \ \forall t \in [0,1]$.
Тогда $\forall l = 0, \dots, r : d_{a+th}^l f(h) = g^{(l)}(t)$, *где* $g(t) = f(a + th)$

Теорема 5 (Формула Тейлора в дифференциалах в условиях теоремы Тейлора-Лагранжа)**.** $f(a+h) = \sum_{l=0}^r \frac{1}{l!} d_a^l f(h) + \frac{d_{a+\theta h}^{l+1} f}{(l+1)!}(h)$

Определение 5. $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in E$.

a называется точкой максимума для f, если существует окрестность $U(a) : f(x) \leq f(a)\ \forall x \in U(a) \cap E$

Теорема 6 (Необходимое условие экстремума). *$f : E \to \mathbb{R}$, $a \in IntE$, a - точка экстремума f, f дифференцируема в точке $a \Rightarrow d_a f = 0 \Leftrightarrow \nabla_a f = 0 \Leftrightarrow \forall i \in 1, \ldots, n : \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$*

Теорема 7. *a - точка максимума f, φ непрерывна в точке α, $\varphi(\alpha) = a$.*

Тогда α - точка максимума $f \circ \varphi$

Замечание. *$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} h_i h_j$ - квадратичная форма.*
$d_a^2 f(h)$ - квадратичная форма переменных $h_1, \ldots, h_n$.
$d_a^l f(h)$ - однородная функция степени l: $d_a^l f(Ch) = C^l d_a^l f(h)$.
Форма $Q(h)$ бывает положительно определенной, отрицательно определенной, неопределенной (бывает и положительной, и отрицательной).

Теорема 8 (Достаточное условие экстремума). *$f : \mathbb{R}^n \supseteq E \to \mathbb{R}$, $a \in IntE$, в точке a выполняется необходимое условие экстремума и $\exists d_a^2 f$.*

$Q(h) \coloneqq d_a^2 f(h)$. Тогда, если $Q > 0$, то a - точка минимума, если $Q < 0$, то a - точка максимума, если Q неопределенная, то a - не точка экстремума.