

1-ая неделя

4.09.2023

Теорема 1 (Необходимое условие дифференцируемости). Если $f : \mathbb{R}^n \supseteq O \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке a , то $\forall u \in \mathbb{R}^n \exists \frac{\partial f}{\partial u}(a)$ (далее показано, что это эквивалентно для частных производных только по x_i).

Теорема 2 (Дифференциал композиции (билет 1)). Пусть $g : X \rightarrow Y$, $f : Y \rightarrow Z$. Тогда если g дифференцируема в точке a и f дифференцируема в точке $g(a)$, то $f \circ g$ дифференцируема в точке a и $d_a(f \circ g) = d_{g(a)}f \cdot d_ag$.

Или, если рассматривать матрицу Якоби, $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$

Теорема 3 (Дифференцирование результата арифметических действий). Пусть $O \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in O$; $f, g : O \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\lambda : O \rightarrow \mathbb{R}$; f, g, λ дифференцируемы в точке a ; $A, B \in \mathbb{R}$.

Тогда

1. $Af + Bg$ дифференцируемо в точке a и $d_a(Af + Bg) = Ad_af + Bd_ag$

2. λf дифференцируемо в точке a и $d_a(\lambda f) = f(a) \cdot d_a\lambda + \lambda(a) \cdot d_af$

Или на языке матриц: $(\lambda f)' = f(a) \cdot \lambda'(a) + \lambda(a) \cdot f'(a)$

3. $\langle f, g \rangle$ дифференцируемо в точке a и $d_a\langle f, g \rangle = (g(a))^T d_af + (f(a))^T d_ag$
 $(\langle f, g \rangle)' = (g(a))^T \cdot f'(a) + (f(a))^T \cdot g'(a)$

4. Если $m = 1$ и $g(a) \neq 0$, то f/g дифференцируемо в точке a и $d_a(f/g) = \frac{g(a)d_af - f(a)d_ag}{g^2(a)}$

если g дифференцируема в точке a и f дифференцируема в точке $g(a)$, то $f \circ g$ дифференцируема в точке a и $d_a(f \circ g) = d_{g(a)}f \cdot d_ag$.

Или, если рассматривать матрицу Якоби, $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$

Теорема 4 (Теорема Лагранжа для отображений (билет 2)). Пусть $f : \mathbb{R}^n \supseteq O(\text{открытое}) \rightarrow \mathbb{R}^m$, f дифференцируемо в O ; $a, b \in O$, $\forall t \in (0, 1) \ a + t(b - a) \in O$.

Тогда $\exists \theta \in (0, 1) : \|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(a + \theta(b - a))\| \cdot \|b - a\|$

Следствие 1 (билет 2). Если $\forall \theta \in (0, 1) \|f'(a + \theta(b - a))\| \leq M \in \mathbb{R}$, то $\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\|$

Следствие 2 (билет 2). Если $m = 1$ и $\forall u \in O \ \forall i = 1..n \ \|\frac{\partial f}{\partial x_i}(u)\| \leq M$, то $\|f(b) - f(a)\| \leq M\sqrt{n}\|b - a\|$

Теорема 5 (Достаточное условие дифференцируемости (билет 3)). Пусть $f : \mathbb{R}^n \supseteq O(\text{открытое}) \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in O$; $\frac{\partial f}{\partial x_i} \ \forall i = 1..n$ 1) определен в некоторой окрестности точки a 2) непрерывен в точке a

Тогда f дифференцируема в точке a .

Замечание. f дифференцируема в точке $a \Leftrightarrow f(a + h) - f(a) - f'(a) \cdot h = o(h)$ при $h \rightarrow 0$

Определение 1. Пусть $f : \mathbb{R}^n \supseteq O(\text{открытое}) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(u) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(u)$ для некоторого i определена в точке a и $\exists \frac{\partial g}{\partial x_j}(a)$ для некоторого j .

Тогда $f_{x_i x_j} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) := \frac{\partial g}{\partial x_j}(a)$

Определение 2. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ - чистая частная производная.

Определение 3. $f_{x_i x_j}$, где $i \neq j$, - смешанная производная.

Теорема 6. Пусть $f : \mathbb{R}^n \supseteq O(\text{открытое}) \rightarrow \mathbb{R}$, $i \neq j$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ определены и непрерывны в окрестности точки a .

Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$

Определение 4. Если $f : \mathbb{R}^n \supseteq O \rightarrow \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^n$, то $d_a^2 f(h) := d(d_af(h))(h)$

2-ая неделя

11.09.2023

Определение 1 (билет 4). $r \in \mathbb{Z}_+$, O — открытое в \mathbb{R}^n
Тогда $C^r(O) := \{f: O \rightarrow \mathbb{R} : \forall i_1 \dots i_r \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r} \dots \partial x_{i_1}} \in C(O)\}$

Определение 2. $C^\infty(O) := \bigcap_{r \in \mathbb{Z}_+} C^r(O)$

Теорема 1 (О линейном пространстве $C^r(O)$). $C^r(O)$ — линейное пространство. Замкнуто относительно произведения: $f, g \in C^r : f \cdot g \in C^r$

Определение 3. $C^r(O \rightarrow \mathbb{R}^m) := \{f : f_1, \dots, f_m \in C^r(O)\}$

Теорема 2 (Композиция $C^r(O)$). Пусть $\varphi \in C^r(O \rightarrow \tilde{O})$, $f \in C^r(\tilde{O})$.
Тогда $f \circ \varphi \in C^r(O)$

Теорема 3 (О равенстве смешанных производных в классе C^r (билет 4)). Если $f \in C^r(O)$, O — открытое в \mathbb{R}^n , $r \in \mathbb{Z}_+$; $(i_1, i_2, \dots, i_l) \in 2^{\{1, \dots, r\}}$, $l \leq r$, (j_1, \dots, j_l) — перестановка (i_1, \dots, i_l)

$$\text{Тогда } \frac{\partial^l f}{\partial x_{i_l} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^l f}{\partial x_{j_l} \dots \partial x_{j_1}}$$

Определение 4 (билет 5). Мультииндекс — элемент \mathbb{Z}_+^n

$$|j| = j_1 + j_2 + \dots + j_n$$

$$j! = j_1! \cdot j_2! \cdot \dots \cdot j_n!$$

$$h \in \mathbb{R}^n, h^j = h_1^{j_1} \cdot \dots \cdot h_n^{j_n}$$

$$f^{(j)}(a) = \frac{\partial^{|j|} f}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}}(a)$$

Лемма 1. Пусть $f \in C^r(O)$, O — открытое в \mathbb{R}^n , $[a, a+h] \subset O$, $g(t) = f(a+th)$.

$$\text{Тогда } \forall l = 0, \dots, r : g^{(l)}(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n, |j|=l} \frac{l!}{j!} f^{(j)}(a+th) \cdot h^j$$

Теорема 4 (Глобальная формула Тейлора(-Лагранжа) для функции нескольких переменных (билет 6)).
Если $f \in C^{r+1}(O)$, O — открытое в \mathbb{R}^n , $r \in \mathbb{Z}_+$; $[a, a+h] \subset O$.

$$\text{Тогда } \exists \theta \in (0, 1) : f(a+h) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n, |j| \leq r} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n, |j|=r+1} \frac{f^{(j)}(a+\theta h)}{j!} h^j$$

Следствие 1 (Формула Тейлора-Пеано, локальный вариант формулы Тейлора (билет 7)). Пусть $f \in C^r(O)$, O — открытое в \mathbb{R}^n , $a \in O$.

$$\text{Тогда } f(a+h) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n, |j| \leq r} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + o(|h|^r) \text{ при } h \rightarrow 0$$

Следствие 2 (Теорема Лагранжа о среднем для скалярно-значных отображений (билет 7)). Пусть $f \in C^1(O)$, O — открытое в \mathbb{R}^n ; $a, h : a+th \in O \forall t \in [0, 1]$.

$$\text{Тогда } f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\theta h) \cdot h_i = \langle \nabla_{a+\theta h} f, h \rangle \text{ (частный случай Тейлора для } r=0 \text{)}.$$

Следствие 3 (Полиномиальная формула (билет 7)). $(x_1 + \dots + x_n)^r = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n, |j|=r} \frac{r!}{j!} (x_1, \dots, x_n)^j$, при $r \in \mathbb{Z}_+$

Замечание. $d_a^0 f = f(a)$

$$d_a^1 f = d_a f$$

$$d_a^1 f(h) = d_a f(h)$$

$$d_a^{l+1} f(h) = d_a(d_a^l f(h))(h)$$

Лемма 2. Пусть $f \in C^r(O)$, O — открытое в \mathbb{R}^n ; $a, h : a+th \in O \forall t \in [0, 1]$.

$$\text{Тогда } \forall l = 0, \dots, r : d_{a+th}^l f(h) = g^{(l)}(t), \text{ где } g(t) = f(a+th)$$

Теорема 5 (Формула Тейлора в дифференциалах в условиях теоремы Тейлора-Лагранжа (билет 8)). $f(a+h) = \sum_{l=0}^r \frac{1}{l!} d_a^l f(h) + \frac{d_{a+\theta h}^{l+1} f}{(l+1)!}(h)$

Определение 5. $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in E$.

a называется точкой максимума для f , если существует окрестность $U(a) : f(x) \leq f(a) \ \forall x \in U(a) \cap E$

Теорема 6 (Необходимое условие экстремума (билет 9)). $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{Int}E$, a - точка экстремума f , f дифференцируема в точке $a \Rightarrow d_a f = 0 \Leftrightarrow \nabla_a f = 0 \Leftrightarrow \forall i \in 1, \dots, n : \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$

Теорема 7. a - точка максимума f , φ непрерывна в точке α , $\varphi(\alpha) = a$.

Тогда α - точка максимума $f \circ \varphi$

Замечание. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} h_i h_j$ - квадратичная форма.

$d_a^2 f(h)$ - квадратичная форма переменных h_1, \dots, h_n .

$d_a^l f(h)$ - однородная функция степени l : $d_a^l f(Ch) = C^l d_a^l f(h)$.

Форма $Q(h)$ бывает положительно определенной, отрицательно определенной, неопределенной (бывает и положительной, и отрицательной).

Теорема 8 (Достаточное условие экстремума). $f : \mathbb{R}^n \supseteq E \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{Int}E$, в точке a выполняется необходимое условие экстремума и $\exists d_a^2 f$.

$Q(h) := d_a^2 f(h)$. Тогда, если $Q > 0$, то a - точка минимума, если $Q < 0$, то a - точка максимума, если Q неопределенная, то a - не точка экстремума.

4-ая неделя

25.09.2023

Билет 11 (Теорема о непрерывности функции, заданной неявно). Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $X \times I \subseteq O$; $F : O \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно и $\forall x \in X : F(x, a) \cdot F(x, b) < 0$, $F(x, y) = \varphi_x(y)$ строго монотонна на $[a, b]$.

Тогда $\exists ! f : x \mapsto y, f : X \rightarrow I$ такая, что

1. $\forall x \in X : F(x, f(x)) = 0$
2. в $X \times I$ $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$
3. $f \in C(X)$

Билет 12 (Теорема о гладкости функции, заданной неявно). Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $X \times I \subseteq O$; $F : O \rightarrow \mathbb{R}$, $F \in C^1(O)$; (x^*, y^*) – решение $F(x, y) = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial y}(x^*, y^*) \neq 0$.

Тогда \exists окрестность $U_{x^*} \subseteq \mathbb{R}^n$, окрестность V_{y^*} и $f : U_{x^*} \rightarrow V_{y^*}(x \mapsto y)$ такие что:

1. в $U_{x^*} \times V_{y^*}$ $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$
2. $f \in C^1(U_{x^*})$
3. $f'_{x_i}(x) = -\frac{F'_{x_i}}{F'_{y_j}}(x, y)$

Билет 13 (Теорема об открытом отображении в случае равенства размерностей образов и прообразов). Пусть $\Phi : \mathbb{R}^n \supseteq O \rightarrow \mathbb{R}^n$, Φ' обратима всюду в O .

Тогда Φ – открытое отображение (то есть $\forall U$ открытого в O $\Phi(O)$ открыто).

Билет 13 (Лемма об оценке снизу приращения отображения с обратимым дифференциалом). Пусть $F : \mathbb{R}^n \supseteq O \rightarrow \mathbb{R}^n$, F дифференцируема в a и $F'(a)$ обратима.

Тогда $\exists \delta > 0, c > 0 : \forall x \in U_\delta(a) \ ||F(x) - F(a)|| \geq c||x - a||$.

Билет 14 (Теорема об открытом отображении в общем случае). Пусть $\Phi : \mathbb{R}^n \supseteq O \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \leq n$, $\text{rang} \Phi'$ максимален всюду в O ($= m$).

Тогда Φ – открытое отображение.

Билет 25. ~~Поточечная и равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Элементарные свойства равномерной сходимости~~

Билет 25 (Характеристика равномерной сходимости посредством чебышевской нормы). $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ (или \mathbb{C}), $||f|| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Если f ограничена на X , то $||f|| < +\infty$. При $t \geq 0$ $||tf|| = \sup_{x \in X} |t| |f(x)|$. $\forall x \in X |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq ||f|| + ||g|| \Rightarrow ||f + g|| = \sup_{x \in X} |f(x) + g(x)| \leq ||f|| + ||g||$.

Таким образом, $|| \cdot ||$ является нормой на совокупности функций на X .

Пусть $f_k, f : E \rightarrow \mathbb{C}$. Тогда $f_k \rightrightarrows f \Leftrightarrow ||f_k - f|| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$.

Билет 25 (Критерий Коши равномерной сходимости для последовательностей). Пусть $f_k, f : E \rightarrow \mathbb{C}$.

Тогда $f_k \rightrightarrows f$ на $E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N \forall x \in E |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Билет 25 (Критерий Коши равномерной сходимости для рядов). Пусть $f_k : E \rightarrow \mathbb{C}$.

Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на $E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{Z}_+ \forall x \in E |\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x)| < \varepsilon$.

Билет 25 (Необходимое условие равномерной сходимости). Следствие из критерия.

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на $E \Rightarrow f_k(x) \rightrightarrows 0$ на E .

Билет 26 ~~(Равномерная сходимость при действиях над множествами. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда).~~ Пусть $f_n : E \rightarrow \mathbb{C}$.

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_q$ сходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на E .

Билет 27 (Признак Дирихле равномерной сходимости рядов). Пусть $f_n : E \rightarrow \mathbb{C}$, $g_n : E \rightarrow \mathbb{R}$.
Если

1. $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ относительно $x \in E$ равномерно ограничен на E ($\exists C : \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in E \left| \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| \leq C$)
2. $\forall x \in E$ $g_n(x)$ монотонная
3. $g_n \Rightarrow 0$ на E

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ сходится равномерно на E .

Билет 27 (Признак Абеля равномерной сходимости рядов). Пусть $f_n : E \rightarrow \mathbb{C}$, $g_n : E \rightarrow \mathbb{R}$.
Если

1. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на E
2. $\forall x \in E$ $g_n(x)$ монотонная
3. $g_n(x)$ равномерно по x ограничено на E .

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ сходится равномерно на E .

Билет 27 ((с леммой) (взято у Кости Баца)). Если $b_k(x)$ монотонно зависит от k при любом x , то
 $\left| \sum_{k=n}^m a_k(x)b_k(x) \right| \leq 4 \cdot \max_{k=n:m} |A_k(x)| \cdot \max\{|b_n(x)|, |b_m(x)|\}.$

5-ая неделя

2.10.2023

Билет 15 (Теорема о дифференцируемости обратного отображения). Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \text{Int}E$, $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Phi(a) = b \in \text{Int}\Phi(E)$, Φ дифференцируема в a , $\Phi'(a)$ обратима ($\det \Phi'(a) \neq 0$).

Тогда Φ^{-1} дифференцируема в b и $(\Phi^{-1})'(b) = (\Phi'(a))^{-1}$

Билет 16 (Теорема о гладкости обратного отображения (достаточное условие диффеоморфности)). O, \tilde{O} открытые, $\Phi : O \rightarrow \tilde{O}$ - диффеоморфизм на $C^r \xrightarrow{\text{def}} \Phi$ обратима и $\Phi \in C^r(O \rightarrow \tilde{O})$, $\Phi^{-1} \in C^r(\tilde{O} \rightarrow O)$.

Если O - открытое, $O \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Phi \in C^r(O \rightarrow \mathbb{R}^n)$, Φ обратимо (как отображение на свой образ) и $\det \Phi'(x) \neq 0$ всюду в O .

Тогда $\Phi^{-1} \in C^r(\Phi(O) \rightarrow O)$ ($\forall x \in O(\Phi^{-1})(\Phi(x)) = (\Phi'(x))^{-1}$)

Билет 17 (Теорема о локальной обратимости регулярного отображения). $\Phi : \mathbb{R}^n \supseteq O \rightarrow \mathbb{R}^n$, O открытое; Φ регулярное $\xrightarrow{\text{def}} \Phi \in C^1(O \rightarrow \mathbb{R}^n)$, $\text{rank} \Phi'(x)$ максимальной в каждой точке O .

Пусть $\mathbb{R}^n \supseteq O$ открытое, $\Phi \in C^r(O \rightarrow \mathbb{R}^n)$, Φ регулярно в O .

Тогда $\forall a \in O$ \exists окрестность $U_a : \Phi|_{U_a}$ - диффеоморфизм класса C^r , в частности обратимо.

Билет 18 (Теорема о неявном отображении). Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^{n+m} \supseteq O$ открытое, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $y^0 \in \mathbb{R}^m$, $F \in C^r(O \rightarrow \mathbb{R}^m)$ и F' обратима.

Тогда \exists окрестности U_{x^0}, U_{y^0} и $f : U_{x^0} \rightarrow U_{y^0}$ такие, что:

1. $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$ в $U_{x^0} \times U_{y^0}$
2. $f \in C^r(U_{x^0} \rightarrow U_{y^0})$
3. $f'(x) = -(F'_y(x, f(x)))^{-1} \cdot F'_x(x, f(x))$

Билет 27 ((с леммой) (версия по лекции)). $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ равномерно сходится на E , $\varphi(x)$ ограничен на $E \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(x) f_k(x)$ равномерно сходится на E

Билет 28 (Примеры исследования рядов на равномерную сходимость).

Теорема (Признак Лейбница равномерной сходимости). *Skipped*

Теорема (Признак равномерной сходимости для монотонных последовательностей). *Skipped*

Билет 29 (Перестановка пределов для последовательностей). Пусть $E \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in E$, $f_n : E \rightarrow \mathbb{C}$, $f_n(x)$ равномерно сходится на E , $\forall k \in \mathbb{N} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) \in \mathbb{R}$.

Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x)$, оба предела существуют в \mathbb{R} .

Следствие 1. *Skipped*

6-ая неделя

9.10.2023

Билет 29 (Перестановка пределов для рядов). Пусть $f_n : E \rightarrow \mathbb{C}$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на E и $\forall k \in \mathbb{N} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x)$.

Тогда существуют оба и верно $\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$

Билет 30. Следствия теоремы о перестановке пределов, связанные с непрерывностью (взято у Кости Баца, убрано доказательство)

Теорема (Непрерывность в точке для последовательностей). $\square D \subseteq X$ - м.п., $\{f_n\}, f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $f_n \Rightarrow f$ на D .

Если $\{f_n\}$ непрерывны в точке x_0 , то и f непрерывна в x_0 .

Теорема (Непрерывность в точке для рядов). Пусть X - м.п., $D \subset X, x_0 \in D, f_k : D \rightarrow \mathbb{R}$ (или \mathbb{C}) и выполнены следующие условия:

1. ряд $\sum_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится на D к сумме S ;
2. все функции f_k непрерывны в точке x_0 .

Тогда функция S непрерывна в точке x_0 .

Теорема (теорема Стокса-Зейделя). $D \subseteq X$, $f_n, f : D \rightarrow \mathbb{C}$ $f_n \Rightarrow f$ на D при $n \rightarrow \infty$ и $f_n \in C(D) \implies f \in C(D)$, то есть равномерный предел последовательности непрерывных функций **непрерывен**.

Теорема (Аналог теоремы Стокса-Зейделя для рядов). $\square D \subseteq X$ - м.п., $x_0 \in D', \{f_n\}_{n=1}^{\infty}, f : D \rightarrow \mathbb{C}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на D .

Если $\forall n f_n(x)$ непрерывна в точке x_0 , то и $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ непрерывно в x_0 .

Билет 32 (Предельный переход под знаком интеграла для последовательностей). Если $f_n \in C[a, b]$, $f_n \Rightarrow f$ на $[a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$.

Билет 32 (Предельный переход под знаком интеграла для рядов). Если $f_n \in C[a, b]$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится равномерно на $[a, b]$, то $\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)$, ряд в правой части сходится.

Билет 33 (Предельный переход под знаком производной для последовательностей). Пусть $f \in C^1([a, b] \rightarrow \mathbb{R})$, $\exists x^0 \in [a, b] : \{f_n(x^0)\}$ сходится при $n \rightarrow \infty$, $\{f'_n(x)\}$ равномерно сходится на $[a, b]$.

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ дифференцируема на $[a, b]$ и $\forall x \in [a, b] (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$.

Билет 33 (Предельный переход под знаком производной для рядов). Пусть $f \in C^1([a, b] \rightarrow \mathbb{R})$, $\exists x^0 \in [a, b] : \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x^0)$ сходится, $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ равномерно сходится на $[a, b]$.

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ дифференцируема на $[a, b]$ и $\forall x \in [a, b] (\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$.

Теорема (Степенные ряды). *Skipped*

Билет 19 (Параметризации поверхностей, гладкие поверхности уровня, гладкие обобщенные графики).
 $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$, $a \in M$, M допускает параметризацию класса C^r размерности n в окрестности a , если
 \exists окрестность U_a , гомеоморфизм $\Phi \in C^r(\mathbb{R}^n \supseteq O \rightarrow U_a \cap M)$, Φ регулярное.

$M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$, $a \in M$, M есть множество уровня класса C^r размерности n в окрестности a , если
 \exists окрестность U_a , $F \in C^r(U_a \rightarrow \mathbb{R}^m)$, F регулярно, $M \cap U_a = \{x \in U_a : F(x) = 0\}$.

$M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$, $a \in M$, M есть обобщенный r -гладкий график размерности n в окрестности a , если
 \exists окрестность U_a , $f \in C^r(\mathbb{R}^n \supseteq O \rightarrow \mathbb{R}^m) : U_a \cap M = \Gamma_f$ с точностью до перестановки координат.

Билет 19 (Теорема о способах задания k -мерной поверхности). Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$, $a \in M$.

Тогда следующие утверждения равносильны:

1. В окрестности a M - n -мерный C^r -гладкий обобщенный график
2. В окрестности a M - n -мерное C^r -гладкое множество уровня
3. В окрестности a M допускает n -мерную C^r -гладкую параметризацию