

Список вопросов по МАТАНАЛИЗУ
3-й СЕМЕСТР, осень 2023-2024, КТ

1. Правило дифференцирования композиции для дифференциалов, матриц Якоби и частных производных.
2. Теорема Лагранжа для отображений, следствия.
3. Достаточное условие дифференцируемости.
4. Производные и дифференциалы высших порядков. Независимость частных производных второго порядка от очередности дифференцирования. Классы C^r . Независимость частных производных высших порядков от очередности дифференцирования.
5. Мультииндексы. Примеры вычисления дифференциалов и производных высших порядков. Лемма о высших производных "пересадки" функции на отрезок.
6. Многомерная формула Тейлора-Лагранжа.
7. Следствия многомерной формулы Тейлора-Лагранжа: теорема Лагранжа для функций, полиномиальная формула и многомерная формула Тейлора-Пеано.
8. Дифференциалы высших порядков — определение и лемма о вычислении. Формула Тейлора в дифференциалах. Двумерная формула Тейлора в координатах.
9. Необходимое условие экстремума. Использование замены переменной при исследовании функции на экстремум.
10. Достаточное условие экстремума (с леммой об оценке квадратичной формы). Примеры исследования функций нескольких переменных на экстремум.
11. Теорема о непрерывности функции заданной неявно.
12. Теорема о гладкости функции заданной неявно.
13. Лемма об оценке снизу приращения отображения с обратимым дифференциалом. Теорема об открытом отображении в случае равенства размерностей образов и прообразов.
14. Теорема об открытом отображении в общем случае.
15. Теорема о дифференцируемости обратного отображения.
16. Теорема о гладкости обратного отображения (достаточное условие диффеоморфности).
17. Теорема о локальной обратимости регулярного отображения.
18. Теорема о неявном отображении.
19. Параметризации поверхностей, гладкие поверхности уровня, гладкие обобщенные графики. Теорема о способах задания k -мерной поверхности.
20. Линейное касательное пространство к k -мерной поверхности — определение и свойства. Канонические базисы линейного касательного пространства и его ортогонального дополнения. Задание касательного пространства системой уравнений.
21. Необходимое условие условного экстремума (геометрическая формулировка и формулировка, использующая функцию Лагранжа).
22. Достаточное условие условного экстремума в кратком и подробном варианте. Примеры использования достаточного условия условного экстремума.

23. Приемы вычисления \sup и \inf функции нескольких переменных на различных множествах. Примеры.
 24. Решение задач 1) об экстремальных значениях квадратичной формы на сфере и 2) об исследовании на экстремум квадратичной формы на сфере. Следствие о норме линейного оператора.
 25. Поточечная и равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Элементарные свойства равномерной сходимости. Характеристика равномерной сходимости посредством чебышевской нормы. Критерий Коши равномерной сходимости (для последовательностей и для рядов). Необходимое условие равномерной сходимости.
 26. Равномерная сходимость при действиях над множествами. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда.
 27. Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости рядов (с леммой).
 28. Примеры исследования рядов на равномерную сходимость.
 29. Перестановка пределов (для последовательностей и для рядов).
 30. Следствия теоремы о перестановке пределов, связанные с непрерывностью.
 31. Теорема Дини (для последовательностей и для рядов). Критерий непрерывности суммы положительного ряда.
 32. Предельный переход под знаком интеграла (для последовательностей и для рядов).
 33. Предельный переход под знаком производной (для последовательностей и для рядов).
 34. Теорема о круге сходимости степенного ряда (с леммой о верхнем пределе произведения). Формулы для радиуса сходимости.
 35. Теорема Абеля. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов. Примеры. Единственность разложения в степенной ряд и формула для коэффициентов степенного ряда.
 36. Достаточное условие разложимости в ряд Тейлора. Нетождественность аналитичности и вещественной бесконечной дифференцируемости. Разложения в ряд Маклорена пяти основных элементарных функций.
 37. Элементарные свойства экспоненты комплексной переменной.
 38. Элементарные свойства тригонометрических и гиперболических функций комплексного переменного.
 39. Элементарные свойства логарифма и степенной функции комплексного переменного. Разложения арктангенса и арксинуса.
 40. Формула Стирлинга.
-
41. Теорема о действиях в полукольце. Произведение полуколец.
 42. Теорема о свойствах σ -алгебр.
 43. Примеры и простейшие свойства объемов и мер.
 44. Непрерывность меры.
 45. Внешняя мера. Теорема Каратеодори о стандартном продолжении меры (без доказательства). Полнота продолжения меры.

46. Критерий измеримости множества в терминах приближения измеримыми; признак множества меры нуль.
 47. Конечная аддитивность классического объема.
 48. Счетная аддитивность классического объема.
 49. Теорема о представлении открытого множества в виде объединения ячеек и ее следствия.
 50. Теорема о мере Лебега прямоугольного параллелепипеда и ее следствия.
 51. Теорема о приближении множеств открытыми. Следствия о приближении измеримых множеств открытыми; замкнутыми; компактными.
 52. Теорема о приближении измеримых множеств борелевскими и ее следствие.
 53. Измеримость множеств при гладком отображении.
 54. Лемма о мере пропорциональной лебеговой мере на ячейках со следствием.
 55. Лебегова мера под действием сдвигов, диагональных преобразований, гомотетий и ортогональных преобразований.
 56. Лемма о представлении линейного невырожденного оператора в виде произведения ортогональных и диагонального. Теорема о преобразовании меры при линейном преобразовании и ее следствия.
 57. Критерий измеримости функции. Элементарные свойства измеримых функций. Измеримость верхних и нижних граней а также пределов измеримых функций.
 58. Совместное допустимое разбиение для пары ступенчатых функций; элементарные свойства ступенчатых.
-
59. Определение, примеры и простейшие свойства интеграла вдоль пути от вещественных и комплексных дифференциальных форм. Криволинейный интеграл второго рода.
 60. Определение, примеры и простейшие свойства криволинейного интеграла первого рода.
 61. Предельный переход под знаком интеграла в случае криволинейного интеграла.
 62. Связность и линейная связность, связь между ними в общем случае; компоненты связности, компоненты линейной связности. Связность отрезка.
 63. Точные дифференциальные формы, их специфика для дифференциальных форм вида $f(z)dz$. Формула Ньютона-Лейбница для дифференциальных форм.
 64. Критерий точности дифференциальной формы в произвольной области пространства \mathbb{R}^n .
 65. Критерий точности дифференциальной формы в круге.

Дифференцируемость, дифференциал, матрица Якоби отображения; градиент; поверхность уровня;

Производная по вектору; частные производные; производные высших порядков, чистые частные производные, смешанные частные производные; классы C^r

Матрица Якоби композиции, частные производные композиции

Дифференциал и матрица Якоби обратного отображения

Мультииндексы и элементарные операции над мультииндексами

Формула дифференциалов второго порядка для функций двух переменных

Формула дифференциалов второго порядка для функций n переменных

Многомерная формула Тейлора–Пеано; формула Тейлора в дифференциалах; формула Тейлора–Лагранжа

Полиномиальная формула

Экстремум, стационарные точки

Положительно определенные, отрицательно определенные, неопределенные квадратичные формы

Гомеоморфизм; диффеоморфизм; условие Липшица

Отображение, заданное неявно; матрица Якоби и частные производные функции, заданной неявно;

Условный экстремум

Метод Лагранжа; множители Лагранжа; функция Лагранжа

k -мерная поверхность (k -мерное подмногообразие пространства \mathbb{R}^n), параметризация поверхности, k -мерный обобщенный график, k -мерное множество уровня;

Касательный вектор, касательное линейное пространство, канонический касательный вектор

Равномерная и поточечная сходимость (функциональной последовательностей и функциональных рядов), пространство $C(K)$

Степенной ряд; центр, коэффициенты, радиус сходимости и круг сходимости степенного ряда

Формула Коши–Адамара; формула, выражающая коэффициенты степенного ряда через значения производных;

Разложения в ряд Маклорена пяти основных элементарных функций;

Формула Стирлинга.

Полукольцо, полукольца ячеек; σ -алгебра множеств, борелевская оболочка, борелевская σ -алгебра, борелевские множества, F_σ - и G_δ -множества;

Объем, мера; классический объем; счетная аддитивность, полуаддитивность; конечная, σ -конечная, вероятностная мера;

Измеримые множества; полная мера;

Мера Лебега; измеримые по Лебегу множества; регулярные меры;

Пространство с мерой; лебеговы множества функции;

Измеримые функции; ступенчатые функции; допустимое разбиение для ступенчатой функции;

Утверждения верные почти везде; эквивалентные (относительно меры) функции;

Интеграл по мере (варианты определения для трех случаев); суммируемая функция;

Интегралы вдоль пути первого и второго рода, криволинейные интегралы первого и второго рода;

Связность, линейная связность, компоненты связности, компоненты линейной связности;

Точные дифференциальные формы; формула Ньютона–Лейбница для дифференциальных форм; независимость интеграла от пути.