2-ая неделя

11.09.2023

Определение 1. *$r \in \mathbb{Z}_+$, O – открытое в $\mathbb{R}^n$*
Тогда $C^r(O) \coloneqq \{f\colon O \to R : \forall i_1 \dots i_r \ \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r} \dots \partial x_{i_1}} \in C(O)\}$

Определение 2. $C^\infty(O) \coloneqq \bigcap\limits_{r \in \mathbb{Z}_+} C^r(O)$

Теорема 1 (О линейном пространстве $C^r(O)$). *$C^r(O)$ - линейное пространство. Замкнуто относительно произведения: $f, g \in C^r : f \cdot g \in C^r$*

Определение 3. $C^r(O \to \mathbb{R}^m) \coloneqq \{f : f_1, \dots f_m \in C^r(O)\}$

Теорема 2 (Композиция $C^r(O)$). *Пусть $\varphi \in C^r(O \to \tilde{O})$, $f \in C^r(\tilde{O})$.*
Тогда $f \circ \varphi \in C^r(O)$

Теорема 3 (О равенстве смешанных производных в классе C^r). *Если $f \in C^r(O)$, O – открытое в $\mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{Z}_+$; $(i_1, i_2, \dots i_l) \in 2^{\{1,\dots,r\}}$, $l \le r$, $(j_1, \dots, j_l)$ – перестановка$(i_1, \dots i_l)$*
Тогда $\frac{\partial^l f}{\partial x_{i_l} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^l f}{\partial x_{j_l} \dots \partial x_{j_1}}$

Определение 4. *Мультииндекс - элемент ${\mathbb{Z}_+}^n$*
$|j| = j_1 + j_2 + \dots + j_n$
$j! = j_1! \cdot j_2! \cdot \dots \cdot j_n!$
$h \in \mathbb{R}^n, h^j = h_1^{j_1} \cdot \dots \cdot h_n^{j_n}$
$f^(j)(a) = \frac{\partial^{|j|} f}{\partial x_n^{j_n} \dots \partial x_1^{j_1}}(a)$

Лемма 1. *Пусть $f \in C^r(O)$, O – открытое в $\mathbb{R}^n$, $[a, a+h] \subset O$, $g(t) = f(a+th)$.*
Тогда $\forall l = 0, \dots, r : g^{(l)}(t) = \sum_{j \in {\mathbb{Z}_+}^n, |j| = l} \frac{l!}{j!} f^{(j)}(a+th) \cdot h^j$

Теорема 4 (Глобальная формула Тейлора(-Лагранжа) для функции нескольких переменных). *Если $f \in C^{r+1}(O)$, O – открытое в $\mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{Z}_+$; $[a, a+h] \subset O$.*
Тогда $\exists \theta \in (0,1) : f(a+h) = \sum_{j \in {\mathbb{Z}_+}^n, |j| \le r} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + \sum_{j \in {\mathbb{Z}_+}^n, |j| = r+1} \frac{f^{(j)}(a+\theta h)}{j!} h^j$

Следствие 1 (Формула Тейлора-Пеано, локальный вариант формулы Тейлора). *Пусть $f \in C^r(O)$, O – открытое в $\mathbb{R}^n$, $a \in O$.*
Тогда $f(a+h) = \sum_{j \in {\mathbb{Z}_+}^n, |j| \le r} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + o(||h||^j)$ при $h \to 0$

Следствие 2 (Теорема Лагранжа о среднем для скалярно-значных отображений). *Пусть $f \in C^1(O)$, O – открытое в $\mathbb{R}^n$; $a, h : a+th \in O \forall t \in [0,1]$.*
Тогда $f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\theta h) \cdot h_i = \langle \nabla_{a+\theta h} f, h \rangle$ (частный случай Тейлора для $r = 0$).

Следствие 3 (Полиномиальная формула). *$(x_1 + \dots + x_n)^r = \sum_{j \in {\mathbb{Z}_+}^n, |j| = r} \frac{r!}{j!} (x_1, \dots, x_n)^j$, при $r \in \mathbb{Z}_+$*

Замечание. $d_a^0 f = f(a)$
$d_a^1 f = d_a f$
$d_a^1 f(h) = d_a f(h)$
$d_a^{l+1} f(h) = d_a(d_a^l f(h))(h)$

Лемма 2. *Пусть $f \in C^r(O)$, O – открытое в $\mathbb{R}^n$; $a, h : a+th \in O \ \forall t \in [0,1]$.*
Тогда $\forall l = 0, \dots, r : d_{a+th}^l f(h) = g^{(l)}(t)$, где $g(t) = f(a+th)$

Теорема 5 (Формула Тейлора в дифференциалах в условиях теоремы Тейлора-Лагранжа). *$f(a+h) = \sum_{l=0}^r \frac{1}{l!} d_a^l f(h) + \frac{d_{a+\theta h}^{l+1} f}{(l+1)!}(h)$*

Определение 5. $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in E$.

a называется точкой максимума для f, если существует окрестность $U(a) : f(x) \le f(a)\ \forall x \in U(a) \cap E$

Теорема 6 (Необходимое условие экстремума)**.** *$f : E \to \mathbb{R}$, $a \in IntE$, a - точка экстремума f, f дифференцируема в точке $a \Rightarrow d_a f = 0 \Leftrightarrow \nabla_a f = 0 \Leftrightarrow \forall i \in 1, \dots, n : \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$*

Теорема 7. *a - точка максимума f, φ непрерывна в точке α, $\varphi(\alpha) = a$.*

Тогда α - точка максимума $f \circ \varphi$

Замечание. *$\sum_{1 \le i,j \le n} a_{i,j} h_i h_j$ - квадратичная форма.*
$d_a^2 f(h)$ - квадратичная форма переменных $h_1, \dots, h_n$.
$d_a^l f(h)$ - однородная функция степени l: $d_a^l f(Ch) = C^l d_a^l f(h)$.
Форма $Q(h)$ бывает положительно определенной, отрицательно определенной, неопределенной (бывает и положительной, и отрицательной).

Теорема 8 (Достаточное условие экстремума)**.** *$f : \mathbb{R}^n \supseteq E \to \mathbb{R}$, $a \in IntE$, в точке a выполняется необходимое условие экстремума и $\exists d_a^2 f$.*

$Q(h) \coloneqq d_a^2 f(h)$. Тогда, если $Q > 0$, то a - точка минимума, если $Q < 0$, то a - точка максимума, если Q неопределенная, то a - не точка экстремума.

Исправление доказательства достаточного условия дифф-ти.

Пусть $f: E \to \mathbb{R}^m$; $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{Int} E$,

1). $\exists$ окр. $U(a)$: $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ определены в $U(a)$

2). $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ непр. в т. a.

Тогда f дифф. в т. a.

Док-во. НУО $m=1$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}, \dots$$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

если $f_1, \dots, f_m$ дифф, то f дифф.

$$df(h) = \begin{pmatrix} df_1(h) \\ \vdots \\ df_m(h) \end{pmatrix}.$$

Разберем случай $n=2$, $a=0$

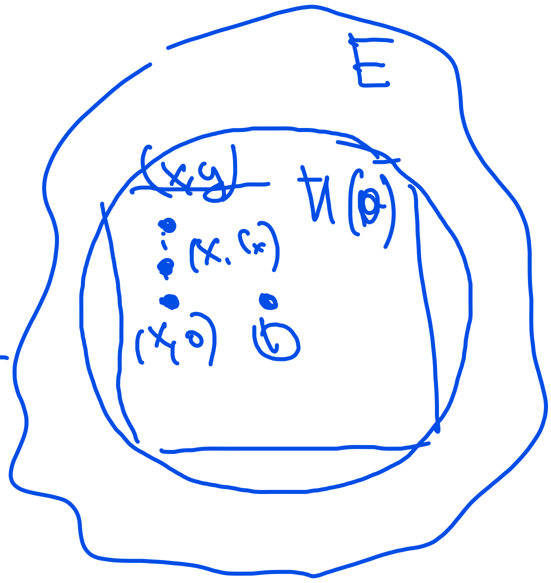
$$\underbrace{f(x,y) - f(0,0) - \langle \nabla_{(0,0)} f, (x,y) \rangle}_{= \Delta} = o(\|h\|) \iff f \text{ дифф. в т. } (0,0).$$

$h=(x,y)$ при $h \to 0$

$\Updownarrow$

$$\frac{\Delta}{\|h\|} \to 0 \text{ при } h \to 0$$

$\exists\ \delta > 0$: $(-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta) \subset U(0)$



$$\Delta = \big(f(x,y) - f(x,0)\big) + \big(f(x,0) - f(0,0)\big) -$$
$$- \langle \nabla f, (x,y) \rangle =$$

$=$

фиксир. x $\varphi(y) = f(x,y)$

$f(x,y) - f(x,0) = \varphi(y) - \varphi(0)$; $\varphi'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ по определению

φ дифф. на $(-\delta, \delta)$

по классич. теор. Лагранжа $\exists\ c_x$: между $0, y$

$$\varphi(y)-\varphi(0)=\varphi'(c_x)(y-0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,c_x)\cdot y$$

$\psi(x)=f(x,0)$, $\quad \psi'(x)=\frac{\partial}{\partial x}f(x,0)$ — опр. на $(-\delta,\delta)$

$\Rightarrow \exists\ c_y$, леж. между $0, x$:

Теор. Лагр. $\underbrace{\psi(x)-\psi(0)}_{f(x,0)-f(0,0)}=\psi'(c_y)\cdot x$

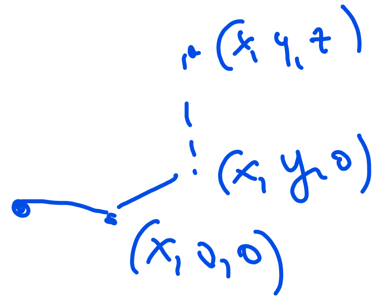
$$\frac{\Delta(x,y)}{\|(x,y)\|}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,c_x)y+\frac{\partial f}{\partial x}(c_y,0)x-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y\right)$$

$$=\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(c_y,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right)}_{\to 0}\underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\text{огр.}}+\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,c_x)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)}_{\to 0}\underbrace{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\text{огр.}}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ непр. в т. 0

т.е. — беск. малая

Случай $n>2$ и $a\in E$ — аналогично.



Если $f(x,y): O \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ в окр. т. a $\exists\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ и непр. в т. a, то

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a).$$

$f(x_1,\dots,x_n)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i} \Longleftarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i} \text{ непр. в т. } a.$$

$r\in\mathbb{Z}_+$, O — откр. в $\mathbb{R}^n$

$$C^r(O)=\left\{f:O\to\mathbb{R}:\ \forall\, i_1,\dots,i_r\in\{1,\dots,n\}\quad \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r}\dots\partial x_{i_1}}\in C(O)\right\}$$

$$C^\infty(O)=\bigcap_{r\in\mathbb{Z}_+} C^r(O)$$

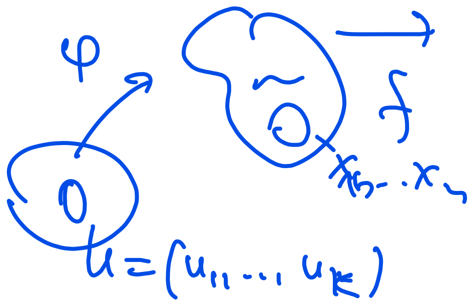
$C^r(O)$ — лин. простр-во; $f,g\in C^r(O)$, то $\lambda f+\mu g\in C^r(O)$

2). $f\cdot g\in C^r$ $\qquad \frac{\partial}{\partial x_i}(fg)=g\frac{\partial f}{\partial x_i}+f\frac{\partial g}{\partial x_i}$

3). $C^r(O\to\mathbb{R}^n)=\{f:\ f_1,\dots,f_n\in C^r(O)\}$

$\varphi\in C^r(O)$, $\varphi(O)\subset\tilde O$, $\forall f\in C^r(\tilde O)$

$f\circ\varphi\in C^r(\tilde O)$



$$\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial u_j}=\sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(u))}_{\in C^{r-1}}\underbrace{\frac{\partial\varphi_i}{\partial u_j}}_{C^{r-1}}$$

В частности, $\underset{(x)}{f}\in C^r$, $\quad g(t)=f(a+th)$

a,h — фиксир.

$g=f\circ\varphi$, $\varphi: t\to a+th$ $\in C^\infty(\mathbb{R})$

$g\in C^r$(Откр. O).

Теорема о равенстве смешанных производных в кл. C^r.

Если $f\in C^r(O)$, $O\subset\mathbb{R}^n$ откр.; $r\in\mathbb{Z}_+$

$i_1,i_2,\dots,i_\ell\in\{1,\dots,n\}$, $\ell\le r$, $(j_1,\dots,j_\ell)$ получена из $(i_1,\dots,i_\ell)$

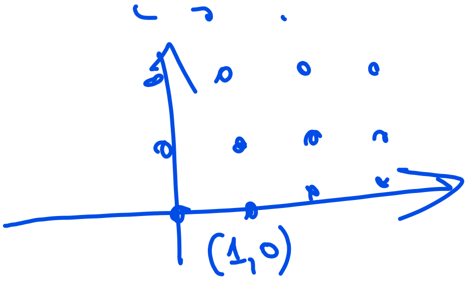
Тогда $\frac{\partial^\ell f}{\partial x_{i_\ell}\dots\partial x_1}(a)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_{j_\ell}\dots\partial x_{j_1}}(a)$

$\forall a\in O$.

Мультииндексом.
Мультииндексом называем элемент $\mathbb{Z}_+^n$

$j \in \mathbb{Z}_+^n \iff j=(j_1,\dots,j_n),\ j_1,\dots,j_n \in \mathbb{Z}_+$.

$n=2$



$n=2$

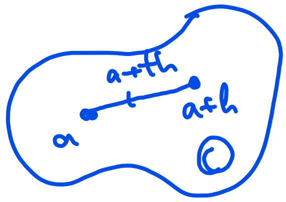
$|j| = j_1+j_2+\dots+j_n$

$j! = j_1!\cdot\ldots\cdot j_n!$

$h\in\mathbb{R}^n$, $h = (h_1,\dots,h_n)$, $h^j = h_1^{j_1}\cdot\ldots\cdot h_n^{j_n}$

$$f^{(j)}(a) = \frac{\partial^{|j|} f}{\partial x_n^{j_n}\cdot\ldots\cdot\partial x_1^{j_1}}(a).$$

Лемма. $f: O\to\mathbb{R}$, $O\subseteq\mathbb{R}^n$, $[a,a+h]\subset O$



$f\in C^r(O)$. $g(t)=f(a+th)$

Тогда $\forall\, l=0,\dots,r$

$$g^{(l)}(t) = \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+^n\\ |j|=l}} \frac{l!}{j!} f^{(j)}(a+th)\cdot h^j$$

Док-во. По индукции по l.

$l=0$. л.ч. $g^{(0)}(t) = g(t) = f(a+th)$

$|j|=0 \Rightarrow j\in\mathbb{Z}_+,\ j=0$ пр.ч. $f^{(0)}(a+th)=f(a+th)$

(база есть).

$l\to l+1$ переход. $g^{(l+1)}(t) = \left(g^{(l)}(t)\right)'_t \overset{\text{индукц. предп.}}{=}$

$$\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+^n\\ |j|=l}} \frac{l!}{j!}\left(f^{(j)}(a+th)\,h^j\right)'_t = \sum_{|j|=l}\frac{l!}{j!}\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f^{(j)}}{\partial x_i}(a+th)\cdot h_i\right)h^j =$$

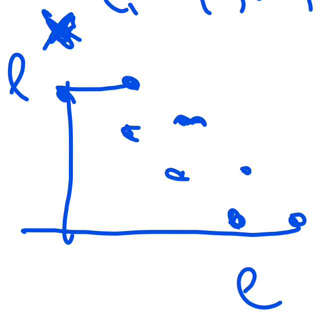
$\mu(x) = f^{(j)}(x)$

$(\mu(a+th))'_t = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mu}{\partial x_i}\cdot h_i$

$$= \sum_{i=1}^{n} l! \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+^n\\ |j|=l}} f^{(j+e_i)}(a+th)\, h^{(j+e_i)}\, p_i$$

$e_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$;

$j+e_i = p \in \mathbb{Z}_+^n$



$$\sum_{i=1}^{n} \frac{l!}{p!}\left(\sum_{\substack{p\in\mathbb{Z}_+^n\\ |p|=l+1\\ \cancel{p_i\neq 0}}} f^{(p)}(a+th)\, h^{p}\cdot p_i\right) =$$

$p! = j!\cdot p_i$

$(p_i = j_i+1)$

$$= \sum_{\substack{p\in\mathbb{Z}_+^n\\ |p|=l+1}} \underbrace{\frac{l!}{p!}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)}_{|p|=l+1}}_{\frac{(l+1)!}{p!}} \cdot f^{(p)}(a+th)\cdot h^{p}$$

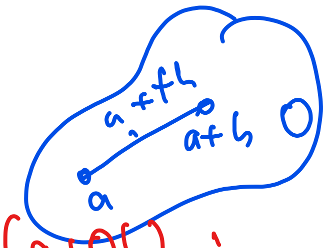
Теор (многомерная формула Тейлора (Лагранжа) для функции многих переменных)

$O \subseteq \mathbb{R}^n$; $f\in C^{r+1}(O)$

откр.: $r\in\mathbb{Z}_+$

$\exists\ a,h:\ \forall t\in[0,1]\quad a+th\in O$

Тогда $\exists\ \theta\in(0,1)$:



$$f(a+h) = \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+^n\\ |j|\le r}} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^{j} + \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+^n\\ |j|=r+1}} \frac{f^{(j)}(a+\theta h)}{j!} h^{j}$$

$$f(a+h) = g(1) = \sum_{l=0}^{r} \frac{g^{(l)}(0)}{l!}\cancel{(1-0)^l} + \frac{g^{(l+1)}(\theta)}{(l+1)!}\cancel{(1-\theta)^{l+1}}$$

$g = \underbrace{f}_{\in C^{r+1}}\underbrace{(a+th)}_{C^\infty}$

$$\sum_{l=0}^{r} \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+^n \\ |j|=l}} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}h^j + \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+^n \\ |j|=l+1}} \frac{f^{(j)}(a+\theta h)}{j!}h^j$$

Теор. (формула Тейлора–Пеано, локальный вариант ф-лы Тейлора). Пусть O-откр, $O \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in C^r(O)$, $a \in O$. Тогда

$$\boxed{f(a+h) = \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+^n \\ |j|\le r}} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}h^j + o(\|h\|^j) \text{ при } h \to 0}$$

α зд. в окр. т. a

$$\frac{|\alpha|}{\|h\|^j} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Док-во

По теор. Тейлора–Лагранже

$$f(a+h) = \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+^n \\ |j|\le r-1}} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}h^j + \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+ \\ |j|=r}} \frac{f^{(j)}(a+\theta h)}{j!}h^j =,$$

$\theta \in (0,1)$.

$$= \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+ \\ |j|\le r}} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}h^j + \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+ \\ |j|=r}} \underbrace{\left(\frac{f^{(j)}(a+\theta h)}{j!}h^j - \frac{f^{(j)}(a)}{j!}h^j\right)}_{\underbrace{\left(f^{(j)}(a+\theta h) - f^{(j)}(a)\right)}_{\to 0 \text{ при } h\to 0}\underbrace{\frac{h^j}{j!}}_{O(\|h\|^r)}}$$

$$|h^j| = |h_1|^{j_1}\cdot\ldots\cdot|h_n|^{j_n} \le \|h\|^{j_1+\ldots+j_n} = \|h\|^r$$

$$\Rightarrow o(\|h\|^r).$$

Следств. Теор. Лагранжа о среднем для скалярно-значных отобр.

$f\in C^1(\mathcal{O})$, $\mathcal{O}$-откр.; a, h: $a+th\in\mathcal{O}$ $\forall t\in[0,1]$, тогда

$$f(a+h)-f(a) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\theta h)\cdot h_i = \langle \nabla f_{a+\theta h}, h\rangle$$

(частный случай ф-лы Тейлора для $r=0$).

Следств. 3 Полиномиальная формула.

$$(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)^r = \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+^n\\ |j|=r}}\frac{r!}{j!}\underbrace{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)^j}_{a_1^{j_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{j_n}}$$

$r\in\mathbb{Z}_+$

Док-во. $f_r(x) = (x_1+\ldots+x_n)^r$

$$f'_{r\,x_i}(x) = r(x_1+\ldots+x_n)^{r-1} = r\cdot f_{r-1}$$

$$f''_{x_ix_j} = r\cdot(r-1)\,f_{r-2}; \quad j\in\mathbb{Z}_+ \ |j|\le r$$

$$f^{(j)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } |j|<r\\ r!, & |j|=r \end{cases}; \quad f^{(j)}(x)=0, \ |j|>r$$

По ф-ле Тейлора – Лагранжа

$$f_r(x) = \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+^n\\ |j|\le r}}\frac{f^{(j)}(0)}{j!}h^j + \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+^n\\ |j|=r+1}}\underbrace{\frac{f^{(j)}(\theta x)}{j!}h^j}_{=0} = \qquad \theta\in(0,1)$$

$$= \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+^n \\ |j|=r}} \frac{r!}{j!} h^j \qquad h = x - a$$

Члены старшей многочлена Тейлора для $n=2$

$$T_n f(h) = \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+^2 \\ |j|\le r}} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j = \sum_{l=0}^{n} \sum_{|j|=l} \dots =$$

$j=(j_1, j_2)$, $|j|=l$, $(i, l-i)$

$$= \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!} \sum_{i=1}^{l} \boxed{\frac{l!}{i!(l-i)!}} \frac{\partial^l f}{\partial x_2^{l-i}\partial x_1^i}(a)\, h_1^i h_2^{l-i}$$

$$\boxed{\frac{l!}{i!(l-i)!}} = C_l^i$$

$d_a^0 f = f(a)$; $\qquad d_a^1 f = d_a f$,

$$d_a^1 f(h) = d_a f(h)$$

$$d_a^{l+1} f(h) = d_a F(h), \quad \Big\} \; d_a\left(d_a^l f(h)\right)(h)$$

где $F(a) = d_a^l f(h)$

Лемма 2. $f\in C^r(O)$, a, h: $a+th\in O$ $\forall t\in[0,1]$

$\forall\, l=0,\dots,r$

$$d^l_{a+th} f(h) = g^{(l)}(t), \text{ где } g(t) = f(a+th)$$

Док-во по индукции по l.

при $l=0$ л.ч. $= f(a+th) =:$ пр.ч.

Переход от l к $l+1$

$$d^{l+1}_{a+th} f(h) = d_{a+th} F(h) = d_{a+th}\, g^{(l)}(t)\,(h) =$$

$$F(a+th) = d^{l}_{a+th} f(h) = \underbrace{g^{(l)}(t)}_{\text{индукц. предп.}} = \mu(t)$$

$$= d_{a+th}\, \mu(t)$$

$l=1$: б.у. $\left\{ d^{1}_{a+th} f(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th)\cdot h_i \right.$

$$d_{a+th} f(h) = f(a+th)'_t$$

пр.ч. $= g'(t) = \left(f(a+th)\right)'_t =$

$$d^{l+1}_{a+th} f(h) = d^{1}_{\underbrace{a+th}_{=x}}\Big(\underbrace{d^{l}_{a+th} f(h)}_{x}\Big)(h) = \left(\nu(a+th)\right)'_t =$$

$$\nu(x) = g^{(l)}(t)$$

$$= \left(g^{(l)}(t)\right)'_t = g^{(l+1)}(t).$$

$$d^{l}_{a+th} f(h) = \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+^n \\ |j|=l}} \frac{l!}{j!} f^{(j)}(a+th)\cdot h^{j}$$

ф-ла Тейлора в дифференциалах в условиях теор. Тейлора – Лагранжа

$$\boxed{f(a+h) = \sum_{l=0}^{r} \frac{1}{l!} d^{l}_{a} f(h) + \frac{d^{(l+1)}_{a+\theta h} f}{(l+1)!}(h)}$$

ф-ла выглядит так же как для функции одной переменной.

Экстремумы функций нескольких переменных.

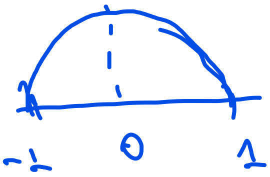
Опр. Пусть $f: E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Пусть $a \in E$. a наз. точкой строгого макс. для f, если $\exists$ окр. $U(a)$:

$f(x) \le f(a)$
$\forall x \in U(a) \cap E$

$f(x) < f(a)$
$\forall x \in \dot{U}(a) \cap E$

Примеры: $f(x)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ исследовать на экстр.

$f(x)=\sqrt{1-r^2(x,y)}$ $\qquad g(r)=\sqrt{1-r^2}$

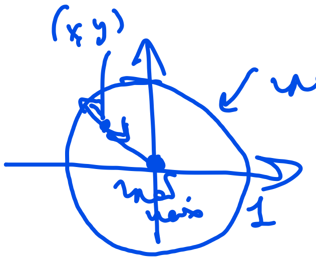


$r(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

лок. max $f \iff r=0 \iff (x,y)=(0,0)$ лок. max,

(x,y) : $x^2+y^2=1$ — т. лок. min.

других точек экстр нет.



Необходимое условие экстремума

т. экстр.
$\Downarrow$
т. max. или т. min.

Пусть $f: E \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{Int} E$, a — т. экстр. для f,
f дифф. в т. a. $\Rightarrow$ $d_a f = 0 \iff \nabla_a f = 0$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)=0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)=0 \end{cases}$$

Д-во. $a \in \operatorname{Int} E \Rightarrow \exists\, \delta>0:$
$B_\delta(a) \subset E$ $\quad \forall h: \|h\| \le \delta$

$g(t)=f(a+th)$
Пусть a — т. min. $\Rightarrow$
для g т. 0 т. min.
Но g дифф. в 0
$\Rightarrow g'(0)=0=\langle \nabla_a f, h \rangle = 0$
$\Rightarrow \nabla_a f = 0.$

$f \circ \varphi_{(x)} = h(x)$, пусть a — т. min (max) для f, φ непр. в т. α, $\varphi(\alpha)=a$
$\Rightarrow \alpha$ — т. max. для $f\circ\varphi$

Т.к. a — т. min для f
$\exists$ окр. $U(a)$: $\forall x \in U \cap E$
$f(x) \ge f(a)$, φ непр. в т. α
$\exists$ окр. V т. α:
$\varphi(V) \subset U$
$f\circ\varphi(x) \ge f(a) = f\circ\varphi(\alpha)$
$x \in V$