Производные и дифференциалы высших порядков

$O \subseteq \mathbb{R}^n$; $f: O \to \mathbb{R}$.

$g(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ опр. в окр. т. a и $\exists\ \frac{\partial g}{\partial x_j}(a)$, то $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial g}{\partial x_j}(a)$

$f''_{x_i x_j}$

И аналогично для производных порядка выше 2.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ — чистые част. произв.

если $i \neq j$, то $f''_{x_i x_j}$ — смешанные производные

---

1). $f(x,y) = x^y$, $x>0, y>0$

$f'_x = y x^{y-1}$, $f'_y = x^y \ln x$.

$f''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}$; $f''_{xy} = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \ln x$;

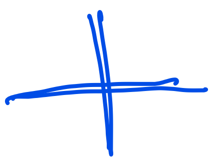
$f''_{yx} = y x^{y-1} \cdot \ln x + x^y \cdot \frac{1}{x}$; $f''_{yy} = x^y \ln^2 x$

---

2). $f(x,y) = \underbrace{xy}_{\text{б.м.}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; $\lim\limits_{(x,y)\to 0} f(x,y) = 0$, $f(0,0) = 0$.

огр. 1

$f'_x(0,0) = 0 = f'_y = 0$.



$(x,y) \neq (0,0)$ $f'_x = y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + x\underbrace{\left(\frac{x^2+y^2-2y^2}{x^2+y^2}\right)'_x}_{\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}}\right)$

$$= \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\Big(\underbrace{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}_{x^4-y^4} + 4x^2y^2\Big) = \frac{y}{(x^2+y^2)^2} \cdot (x^4 - y^4 + 4x^2y^2)$$

$$f'_y = -\frac{x}{(x^2+y^2)^2}(y^4 - x^4 + 4x^2y^2)$$

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f'_x(0,y) - \cancel{f'_x(0,0)}}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{\frac{y}{y^4}\cdot(-y^4+0)}{y} = -1$$

$\neq$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'_y(x,0) - \cancel{f'_y(0,0)}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x}{x^4}(-x^4)}{x} = 1$$

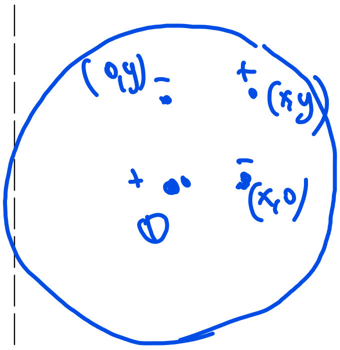
Пусть $O \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: O \to \mathbb{R}$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$, $i \neq j$.

Пусть $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ опр. и непр. в окрестности т. a.

Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$

Док-во 1). Н.У.О. $n=2$; Н.У.О. $a=0$

Δ $B_R(0)$! $\quad f''_{xy}, f''_{yx} \in C(B_R(0))$.



$$\Delta(x,y) = \underbrace{f(x,y)}_{\text{фиксир. } y} - f(x,0) - \left(f(0,y) - f(0,0)\right) = \psi(x) - \psi(0)$$

Δ $\psi(x) = f(x,y) - f(x,0)$

По теор. Лагранжа по ψ $\exists\, x_y$:

$$\psi(x)-\psi(0) = \psi'(x_y)\cdot x = \left(f'_x(x_y,y) - f'_x(x_y,0)\right)\cdot x$$

фикс. x_y

$\varphi(y) = f'_x(x_y,y)$ между 0 и x

$$\varphi(y)-\varphi(0) = \varphi'_y(y_*)\cdot y = f''_{xy}(x_y,y_*)$$

$\exists\, y_*$ между 0 и y

$$\Delta = f''_{xy}(x_y,y_*)\cdot xy$$

$$\frac{\Delta}{xy} \xrightarrow[(x,y)\to 0]{} f''_{xy}(0,0)\cdot\frac{\cancel{xy}}{\cancel{xy}}$$

Поменяв группировку слагаемых в Δ аналогично

$$\frac{\Delta}{xy} \to f''_{yx}(0,0).$$

$$d^2_a f(h) = d\left(d_a f(h)\right)(h)$$

$h \in \mathbb{R}^n$

$f : O \to \mathbb{R}$, $O \subseteq \mathbb{R}^n$

Было для функции одной переменной, сохраняется и для нескольких перем.

$$f(x,y) = x^2 - y^2 + 4xy$$

$$df = d(x^2) - dy^2 + 4\,d(xy) = 2x\,dx - 2y\,dy + 4(y\,dx + x\,dy)$$

$$d^2 f = d\left(2x\,dx - 2y\,dy + 4(y\,dx + x\,dy)\right) =$$

$$= 2\,dx\,dx - 2\,dy\,dy + 4(dy\,dx + dx\,dy) = 2(dx)^2 - 2(dy)^2 + 8(dx\,dy) = 2f(dx,dy)$$

$$df(\underbrace{h_1,h_2}_{h}) = 2x\,h_1 - 2y\,h_2 + 4(y\,h_1 + x\,h_2)$$