Производные и дифференциалы высших порядков

$O \subseteq \mathbb{R}^n$; $f : O \to \mathbb{R}$.

$g(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ опр. в окр. т. a и $\exists\ \frac{\partial g}{\partial x_j}(a)$, то $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)} = \frac{\partial g}{\partial x_j}(a)$

$f''_{x_i x_j}$

И аналогично для производных порядка выше 2.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ — чистые част. производ.

если $i \neq j$, то $f''_{x_i x_j}$ — смешанные производные

---

1). $f(x,y) = x^y$, $x>0, y>0$

$f'_x = y x^{y-1}$, $f'_y = x^y \ln x$.

$f''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}$; $f''_{xy} = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \ln x$;

$f''_{yx} = y x^{y-1} \cdot \ln x + x^y \cdot \frac{1}{x}$; $f''_{yy} = x^y \ln^2 x$

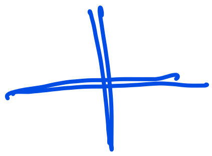
---

2). $f(x,y) = xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; $\lim\limits_{(x,y)\to 0} f(x,y) = 0$, $f(0,0) = 0$.

д. м.

огр. 1

$f'_x(0,0) = 0 = f'_y = 0$.



$(x,y) \neq (0,0)$ $f'_x = y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + x\underbrace{\left(\frac{\cancel{x^2+y^2}-2y^2}{x^2+y^2}\right)'_x}_{\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}}\right)$

$= \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\left(\underbrace{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}_{x^4-y^4} + 4x^2y^2\right) = \frac{y}{(x^2+y^2)^2} \cdot \left(x^4 - y^4 + 4x^2y^2\right)$

$f'_y = -\frac{x}{(x^2+y^2)^2}\left(y^4 - x^4 + 4x^2y^2\right)$

$f''_{xy}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f'_x(0,y) - \cancel{f'_x(0,0)}}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{\frac{y}{y^4}\cdot\left(-y^4+0\right)}{y} = -1$

$\neq$

$f''_{yx}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f'_y(x,0) - \cancel{f'_y(0,0)}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{x}{x^4}\left(-x^4\right)}{x} = 1$

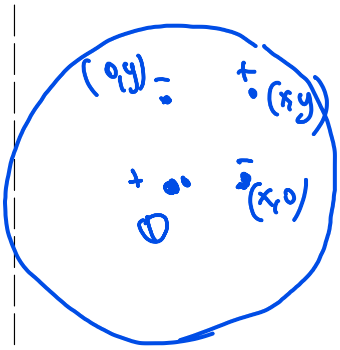
Пусть $O \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : O \to \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$.

Пусть $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ опр. и непр. в окрестности т. a.

Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$

Док-во 1). Н.у.о. $n=2$; н.у.о. $a=0$

Δ $B_R(0)$! $f''_{xy}, f''_{yx} \in C(B_R(0))$.



$$\Delta(x,y) = \underbrace{f(x,y)}_{\text{фиксир. } y} - f(x,0) - \big(f(0,y) - f(0,0)\big) = \psi(x) - \psi(0)$$

Δ $\psi(x) = f(x,y) - f(x,0)$

По теор. Лагранжа по ψ $\exists$ x_y :

$$\psi(x)-\psi(0) = \psi'(x_y)\cdot x = \big(f'_x(x_y,y) - f'_x(x_y,0)\big)\cdot x$$

фикс. x_y

$\varphi(y) = f'_x(x_y,y)$ между 0 и x

$$\varphi(y) - \varphi(0) = \varphi'_y(y_*)\cdot y = f''_{xy}(x_y,y_*)$$

$\exists$ y_* между 0 и y

$$\Delta = f''_{xy}(\overset{\to 0}{x_y, y_*})\cdot xy$$

$$\frac{\Delta}{xy} \xrightarrow[(x,y)\to 0]{} f''_{xy}(0,0)\cdot\frac{\cancel{xy}}{\cancel{xy}}$$

Поменяв группировку слагаемых в Δ аналогично

$$\frac{\Delta}{xy} \to f''_{yx}(0,0).$$

$$d^2_a f(h) = d\big(d_a f(h)\big)(h)$$

$h \in \mathbb{R}^n$

$f: O \to \mathbb{R}$, $O \subseteq \mathbb{R}^n$

Было для функции одной переменной, сохраняется и для нескольких перем.

$f(x,y) = x^2 - y^2 + 4xy$

$df = d(x^2) - dy^2 + 4d(xy) = 2x\,dx - 2y\,dy + 4(y\,dx + x\,dy)$

$d^2 f = d\big(2x\,dx - 2y\,dy + 4(y\,dx + x\,dy)\big) =$

$= 2\,dx\,dx - 2\,dy\,dy + 4(dy\,dx + dx\,dy) = 2(dx)^2 - 2(dy)^2 + 8(dx\,dy) = 2f(dx,dy)$

$$df(\underbrace{h_1,h_2}_{h}) = 2x h_1 - 2y h_2 + 4(y h_1 + x h_2)$$