4-ая неделя

25.09.2023

Билет 11 (Теорема о непрерывности функции, заданной неявно). *Пусть* $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $I = [a,b] \subseteq R$, $X \times I \subseteq O$; $F : O \to R$ *непрерывно и* $\forall x \in X : F(x,a) \cdot F(x,b) < 0,\ F(x,y) = \varphi_x(y)$ *строго монотонна на* $[a,b]$.
Тогда $\exists! f : x \mapsto y, f : X \to I$ *такая, что*

1. $\forall x \in X : F(x, f(x)) = 0$
2. *в* $X \times I$ $F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$
3. $f \in C(X)$

Билет 12 (Теорема о гладкости функции, заданной неявно). *Пусть* $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $I = [a,b] \subseteq R$, $X \times I \subseteq O$; $F : O \to R$, $F \in C^1(O)$; $(x*, y*)$ *– решение* $F(x,y) = 0$ *и* $\frac{\partial F}{\partial y}(x*, y*) \neq 0$.
Тогда $\exists$ *окрестность* $U_{x*} \subseteq \mathbb{R}^n$, *окрестность* V_{y*} *и* $f : U_{x*} \to V_{y*} (x \mapsto y)$ *такие что:*

1. *в* $U_{x*} \times V_{y*}$ $F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$
2. $f \in C^1(U_{x*})$
3. $f'_{x_i}(x) = -\frac{F'_{x_i}}{F'_y}(x,y)$

Билет 13 (Теорема об открытом отображении в случае равенства размерностей образов и прообразов). *Пусть* $\Phi : \mathbb{R}^n \supseteq O \to \mathbb{R}^n$, Φ' *обратима всюду в* O.
Тогда Φ *- открытое отображение (то есть* $\forall U$ *открытого в* O $\Phi(O)$ *открыто).*

Билет 13 (Лемма об оценке снизу приращения отображения с обратимым дифференциалом). *Пусть* $F : \mathbb{R}^n \supseteq O \to \mathbb{R}^n$, F *дифференцируема в* a *и* $F'(a)$ *обратима.*
Тогда $\exists \delta > 0, c > 0 : \forall x \in U_\delta(a)\ ||F(x) - F(a)|| \geq c||x - a||$
(или чуть проще: $\exists$*окрестность* $U_a, c > 0 : \forall x \in U_a\ ||F(x) - F(a)|| \geq c||x - a||$*).*

Билет 14 (Теорема об открытом отображении в общем случае). *Пусть* $\Phi : \mathbb{R}^n \supseteq O \to \mathbb{R}^m$, $m \leq n$, $rang\Phi'$ *максимален всюду в* O $(= m)$.
Тогда Φ *- открытое отображение.*

Билет 25. ~~*Поточечная и равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Элементарные свойства равномерной сходимости*~~

Билет 25 (Характеристика равномерной сходимости посредством чебышевской нормы). $f : X \to \mathbb{R}$ *(или* $\mathbb{C}$*),* $||f|| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. *Если* f *ограничена на* X, *то* $||f|| < +\infty$. *При* $t \geq 0$ $||tf|| = \sup_{x \in X} |t||f(x)|$. $\forall x \in X |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq ||f|| + ||g|| \Rightarrow ||f + g|| = \sup_{x \in X} |f(x) + g(x)| \leq ||f|| + ||g||$.
Таким образом, $|| \cdot ||$ *является нормой на совокупности функций на* X.
Пусть $f_k, f : E \to \mathbb{C}$. *Тогда* $f_k \rightrightarrows f \Leftrightarrow ||f_k - f|| \to 0$ *при* $k \to +\infty$.

Билет 25 (Критерий Коши равномерной сходимости для последовательностей). *Пусть* $f_k, f : E \to \mathbb{C}$.
Тогда $f_k \rightrightarrows f$ *на* $E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N\ \forall x \in E\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Билет 25 (Критерий Коши равномерной сходимости для рядов). *Пусть* $f_k : E \to \mathbb{C}$.
Тогда $\Sigma_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится равномерно на* $E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geq N\ \forall p \in \mathbb{Z}_+\ \forall x \in E\ |\Sigma_{k=n}^{n+p} f_k(x)| < \varepsilon$.

Билет 25 (Необходимое условие равномерной сходимости). *Следствие из критерия.*
$\Sigma_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится равномерно на* $E \Rightarrow f_k(x) \rightrightarrows 0$ *на* E.

Билет 26 (~~Равномерная сходимость при действиях над множествами.~~ Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда). *Пусть* $f_n : E \to \mathbb{C}$.

Тогда $\Sigma_{n=1}^{\infty}||f_n||_ч$ *сходится* $\Rightarrow \Sigma_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на* E.

Билет 27 (Признак Дирихле равномерной сходимости рядов). *Пусть* $f_n : E \to \mathbb{C}$, $g_n : E \to \mathbb{R}$.

Если

1. $\Sigma_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *относительно* $x \in E$ *равномерно ограничен на* E *(*$\exists C : \forall n \in N\ \forall x \in E\ |\Sigma_{k=1}^{\infty} f_k(x)| \leq C$*)*
2. $\forall x \in E\ g_n(x)$ *монотонная*
3. $g_n \rightrightarrows 0$ *на* E

Тогда $\Sigma_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$ *сходится равномерно на* E.

Билет 27 (Признак Абеля равномерной сходимости рядов). *Пусть* $f_n : E \to \mathbb{C}$, $g_n : E \to \mathbb{R}$.

Если

1. $\Sigma_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на* E
2. $\forall x \in E\ g_n(x)$ *монотонная*
3. $g_n(x)$ *равномерно по* x *ограничено на* E.

Тогда $\Sigma_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$ *сходится равномерно на* E.

Билет 27 ((с леммой) (взято у Кости Баца)). *Если* $b_k(x)$ *монотонно зависит от* k *при любом* x, *то* $|\sum_{k=n}^{m} a_k(x) b_k(x)| \leqslant 4 \cdot \max\limits_{k=n:m} |A_k(x)| \cdot \max\{|b_n(x)|, |b_m(x)|\}$.