Пусть $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ ...

$$\boxed{(f\circ g)'(a) = f'(g(a))\cdot g'(a).}$$

$$X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$$

$x=(x_1,\dots,x_n)$ $\quad (y_1,\dots,y_m)$ $\quad z=(z_1,\dots,z_k)$.

Примеры: 1). $n=1$, $k=1$ $\qquad f(y_1,\dots,y_m)$, $y_i = g_i(x)$.

$$\frac{d(f\circ g)}{dx}$$

$$(f\circ g)' = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial y_m}\right)\cdot\begin{pmatrix} g_1' \\ \vdots \\ g_m' \end{pmatrix}$$

$$(f\circ g)'(x) = \sum_{i=1} \frac{\partial f}{\partial y_i}\cdot\frac{dg_i}{dx}$$

$$z'_x = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial z}{\partial y_i}\cdot\frac{dy_i}{dx}$$

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $f(x,y) = x^y$

$t \in (0, \pi/2)$

1) $f(\gamma(t)) = (\cos t)^{\sin t}$

$$(f(\gamma(t)))' = \left(e^{\sin t \ln \cos t}\right)' = (\cos t)^{\sin t}\left(\cos t\cdot \ln\cos t - \frac{\sin^2 t}{\cos t}\right)$$

$$f' = (y x^{y-1},\ x^y \ln x)$$

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$[f(\gamma(t))]' = (y x^{y-1},\ x^y \ln x)\Big|_{\substack{y=\sin t\\ x=\cos t}} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$= \left(\sin t\cdot \cos t^{\sin t - 1},\ \cos t^{\sin t}\ln\cos t\right)\cdot\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} =$$

$$= -\sin^2 t\, \cos t^{\sin t - 1} + \cos t^{\sin t + 1}\cdot \ln\cos t = \cos t^{\sin t}\left(-\frac{\sin^2 t}{\cos t} + \cos t \ln\cos t\right)$$

Пример 2).

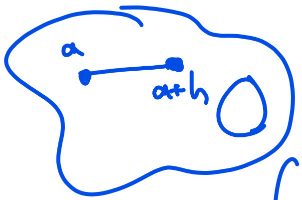
$f(x)$; $h(t)=f(a+th)$, $\exists$ f дифф. в O, $\Rightarrow h$ дифф. $t\in[0,1]$

$x=(x_1,\dots,x_n)$ $\quad a\in O$,

$f: O\to\mathbb{R}$ $\quad h\in\mathbb{R}^n$

$\subseteq\mathbb{R}^n$ $\quad t\in[0,1]$

$\forall t \quad a+th\in O$



$h'(t)=f'(a+th)(a+th)'$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a+th),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a+th)\right)\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th)\cdot h_i=$$

$$=\langle \nabla_{a+th} f, h^T\rangle = d_{(a+th)} f(h)$$

Дифференцир. результата арифмет. действий.

$\exists$ $O\subseteq\mathbb{R}^n$ (откр.), $a\in O$; $f,g: O\to\mathbb{R}^m$, $\lambda: O\to\mathbb{R}$

f,g,λ дифф. в т. a. $\exists$ $A,B\in\mathbb{R}$.

Тогда (1). $Af+Bg$ дифф. в т. a и $d_a(Af+Bg)=A\,d_a f+B\,d_a g$

(2). $\lambda\cdot f$ дифф. в т. a. $\quad d_a(\lambda\cdot f)=f(a)\cdot d_a\lambda+\lambda(a)\cdot d_a f$ см.

т.е. $\forall h\in\mathbb{R}^n \quad d_a(\lambda f)(h)=f(a)\cdot d_a\lambda(h)+\lambda(a)\cdot d_a f(h)$

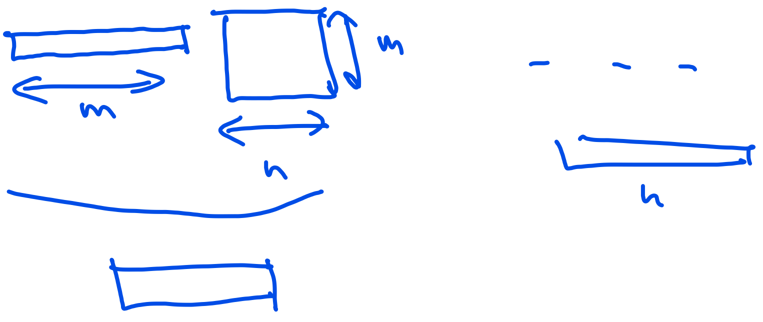
ск. вект.

$$(\lambda f)'=f(a)\cdot\lambda'(a)+\lambda(a)\cdot f'(a)$$

(3) $\langle f,g\rangle$ дифф. в т. a и

$$d_a\langle f,g\rangle=(g(a))^T d_a f+(f(a))^T d_a g$$

$$(\langle f,g\rangle)'=(g(a))^T\cdot f'(a)+f^T(a)\cdot g'(a)$$



(4). Если $m=1$ и $g(a)\neq 0$, то f/g дифф. в т. a и

$$d_a(f/g)=\frac{g(a)\,d_a f-f(a)\,d_a g}{g^2(a)},$$

(1) $\Leftarrow$ опред. дифф. ф.

(2). Сначала Δ $m=1$.

$$\boxed{(\lambda\cdot f)(a+h)-(\lambda f)(a)}=\big(\lambda(a+h)f(a+h)-\lambda(a)f(a+h)\big)+\big(\lambda(a)f(a+h)-\lambda(a)f(a)\big)=$$

$$=\underbrace{f(a+h)}_{(f(a)+o(1))}\big(d_a\lambda(h)+o(h)\big)+\lambda(a)\big(d_a f(h)+o(h)\big)=$$

$(f(a)+o(1))\Leftarrow f$ непр. в т. a.

$$f(a)\,d_a\lambda(h) + \lambda(a)\,d_a f(h) + \Big[\underbrace{o(1)\,\boxed{d_a\lambda(h)}}_{\substack{\text{по норме} \\ \le o(1)\cdot\|d_a\lambda\|\cdot\|h\|}} + \underbrace{o(1)\cdot o(h) + \lambda(a)\cdot o(h)}_{o(h) \text{ при } h\to 0}\Big]$$

$$\big(\|L(h)\| \le \|L\|\cdot\|h\|$$

Итак: $\lambda\cdot f$ дифф. в т. a и верно (2)

Если $m>1$ $\quad \lambda f = \lambda \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda f_1 \\ \vdots \\ \lambda f_m \end{pmatrix}$ — дифф.

$$(\lambda f)'(a) = \begin{pmatrix} \lambda(a)\nabla_a f_1 + f_1(a)\nabla_a\lambda \\ - \;\; - \;\; - \;\; - \\ \lambda(a)\nabla_a f_m + f_m(a)\nabla_a\lambda \end{pmatrix} = \lambda(a)\cdot f'(a) + \underbrace{f(a)}_{\text{столбец}}\cdot\underbrace{\nabla_a\lambda}_{\text{строка}}$$

$\lambda'(a)$.

---

3). f, g дифф в т. a. $\Rightarrow$ $\forall i=1,\dots,m$ $\quad f_i\cdot g_i$ дифф. по (2).

$$(f_i g_i)' = g_i(a)\nabla_a f_i + f_i(a)\nabla_a g_i$$

$\langle f, g\rangle = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} f_i g_i}_{\text{дифф}}$; $\qquad \langle f, g\rangle' = \sum_{i=1}^{n} (f_i, g_i)' =$

$$= \sum_{i=1}^{n}\big(g_i(a)\nabla_a f_i + f_i(a)\nabla_a g_i\big)$$

$(g_1(a), \dots, g_m(a))$. $\qquad \|$

$$g^T(a)\cdot f'(a) = (g_1(a), \dots, g_m(a)) \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix}$$

$g^T(a)\,f'(a) + f^T(a)\cdot g'(a)$

4). $f/g = f\cdot\frac{1}{g}$

$\frac{1}{g} = \varphi\circ g \qquad d\left(\frac{1}{g}\right) = d\varphi\circ dg = \varphi'(g(t))\cdot dg = -\frac{1}{g^2(t)}\,dg$

$\varphi(t) = \frac{1}{t}$

$$d(f/g) = \frac{1}{g}\,df + f\,d\left(\frac{1}{g}\right) = \frac{1}{g}\,df + f\left(-\frac{1}{g^2(t)}\,dg\right)$$

Теор. Лагранжа для отображений.

Пусть $O \subseteq \mathbb{R}^n$ откр.; $f: O \to \mathbb{R}^m$, f дифф. в O, $a, b \in O$, $\forall t \in (0,1)$ $a+t(b-a) \in O$

Тогда $\exists\, \theta \in (0,1)$: $\boxed{\underbrace{\|f(b)-f(a)\|}_{\text{в } \mathbb{R}^m} \le \underbrace{\|f'(a+\theta(b-a))\|}_{\mathbb{R}^{mn}} \cdot \underbrace{\|b-a\|}_{\mathbb{R}^n}}$

Зам. Равенство, вообще говоря, невозможно

$n=1$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T$, $t \in [0, 2\pi]$, $a=0$, $b=2\pi$

$\gamma(a) = \gamma(b)$

$\|\gamma(b)-\gamma(a)\| = 0$ $\quad \|b-a\| = 2\pi$ ($= |b-a|$)

$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \ne 0$

Д-во:

$\varphi(x) = \langle f(x)-f(a), f(b)-f(a) \rangle$

$\varphi: O \to \mathbb{R}$

$\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = \|f(b)-f(a)\|^2$

$\psi(t) = \varphi(a+t(b-a))$ — дифф для $[0,1]$, $\psi(0) = \varphi(a) = 0$

$\psi(1) = \varphi(b) = \|f(b)-f(a)\|^2$

По классической теор. Лагранжа (для функций одной перем.)

$\exists\, \theta \in (0,1)$: $\psi(1)-\psi(0) = \psi'(\theta)(1-0) = \psi'(\theta)$

$$\|f(b)-f(a)\|^2 = \varphi'(a+\theta(b-a)) \cdot \underbrace{(b-a)}_{\text{вектор}}$$

$$\varphi'(x) = \langle f(x)-f(a), f(b)-f(a) \rangle'_x = (f(b)-f(a))^T \cdot \underbrace{(f(x)-f(a))'}_{= f'(x)}$$

$$\|\varphi'(a+\theta(b-a))\| \le \|f(b)-f(a)\| \cdot \|f'(a+\theta(b-a))\|$$

$$\|f(b)-f(a)\|^{\cancel{2}} \le \cancel{\|f(b)-f(a)\|} \cdot \|f'(a+\theta(b-a))\| \cdot \|b-a\|$$

Очевидное следствие: 1) Если $\exists M \in \mathbb{R}$: $\forall \theta \in (0,1)$ $\|f'(a+\theta(b-a))\| \le M$,

то $\|f(b)-f(a)\| \le M\|b-a\|$,

Если всюду в O $\|f'(x)\| \le M$, то f — липш. с конст. M

2) Частный случай 2: если $\exists M_0 \in \mathbb{R}$: $\forall x \in O$ $\forall i = 1 \ldots n$

$\left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right\| \le M$, $m=1$, $\Rightarrow$ $\|f(b)-f(a)\| \le M_0\sqrt{n}\,\|b-a\|$

Теор (достаточное условие дифф-ти).

Пусть $O \subseteq \mathbb{R}^n$ откр.; $f: O \to \mathbb{R}^m$. $a \in O$; $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ 1) определены в некот. окр. т. a, 2) непр. в т. a. Тогда f дифф-ма в т. a.

Док-во. $\exists f'_{ij}$ удоб-но $f'(a)$ определена

f — дифф. в т. a $\Longleftrightarrow$ $f(a+h)-f(a)-f'(a)\cdot h = o(h)$ при $h\to 0$?

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{\|h\|}\underbrace{\left(f(a+h)-f(a)-f'(a)h\right)}_{=c} \longrightarrow 0 \quad \text{при } h\to 0$$

$\forall\ g(h) = f(a+h) - f'(a)\cdot h$ — дифф. в окр. 0

$c = g(h) - g(0) \Rightarrow \|g(h)-g(0)\| \leqslant \|g'(\theta h)\|\cdot\|h\| \longrightarrow 0$ при $h\to 0$

$g'(h) = f'(a+h) - f'(a)$

$f(a+h) - f(a) - f'(a)h \qquad g'(\theta h) = f'(a+\theta h) - f'(a)$

$$f'(x) = \begin{pmatrix} f'_{1x_1} & \dots & f'_{1x_n} \\ - & - & - \\ f'_{nx_1} & \dots & f'_{nx_n} \end{pmatrix}$$