1-ая неделя

4.09.2023

Теорема 1 (Необходимое условие дифференцируемости). *Если $f : \mathbb{R}^n \supseteq O \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке a, то $\forall u \in \mathbb{R}^n\, \exists \frac{\partial f}{\partial u}(a)$ (далее показано, что это эквивалентно для частных производных только по x_i).*

Теорема 2 (Дифференциал композиции). *Пусть $g : X \to Y$, $f : Y \to Z$. Тогда если g дифференцируема в точке a и f дифференцируема в точке $g(a)$, то $f \circ g$ дифференцируема в точке a и $d_a(f \circ g) = d_{g(a)}f \cdot d_a g$.*

Или, если рассматривать матрицу Якоби, $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$

Теорема 3 (Дифференцирование результата арифметических действий). *Пусть $O \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in O$; $f, g : O \to \mathbb{R}^m$, $\lambda : O \to R$; f, g, λ дифференцируемы в точке a; $A, B \in \mathbb{R}$.*

Тогда

1. *$Af + Bg$ дифференцируемо в точке a и $d_a(Af + Bg) = Ad_a f + Bd_a g$*
2. *λf дифференцируемо в точке a и $d_a(\lambda f) = f(a) \cdot d_a\lambda + \lambda(a) \cdot d_a f$*
   Или на языке матриц: $(\lambda f)' = f(a) \cdot \lambda'(a) + \lambda(a) \cdot f'(a)$
3. *$\langle f, g\rangle$ дифференцируемо в точке a и $d_a\langle f, g\rangle = (g(a))^T d_a f + (f(a))^T d_a g$*
   $(\langle f, g\rangle)' = (g(a))^T \cdot f'(a) + (f(a))^T \cdot g'(a)$
4. *Если $m = 1$ и $g(a) \neq 0$, то f/g дифференцируемо в точке a и $d_a(f/g) = \frac{g(a)d_a f - f(a)d_a g}{g^2(a)}$*

если g дифференцируема в точке a и f дифференцируема в точке $g(a)$, то $f \circ g$ дифференцируема в точке a и $d_a(f \circ g) = d_{g(a)}f \cdot d_a g$.

Или, если рассматривать матрицу Якоби, $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$

Теорема 4 (Теорема Лагранжа для отображений). *Пусть $f : \mathbb{R}^n \supseteq O$(открытое) $\to \mathbb{R}^m$, f дифференцируемо в O; $a, b \in O$, $\forall t \in (0, 1)$ $a + t(b - a) \in O$.*

Тогда $\exists \theta \in (0, 1) : ||f(b) - f(a)|| \leq ||f'(a + \theta(b - a))|| \cdot ||b - a||$

Следствие 1. *Если $\forall \theta \in (0, 1)$ $||f'(a + \theta(b - a))|| \leq M \in \mathbb{R}$, то $||f(b) - f(a)|| \leq M||(b - a)||$*

Следствие 2. *Если $m = 1$ и $\forall u \in O$ $\forall i = 1..n$ $||\frac{\partial f}{\partial x_i}(u)|| \leq M$, то $||f(b) - f(a)|| \leq M\sqrt{n}||(b - a)||$*

Теорема 5 (Достаточное условие дифференцируемости). *Пусть $f : \mathbb{R}^n \supseteq O$(открытое) $\to \mathbb{R}^m$, $a \in O$; $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $\forall i \in 1..n$ 1) определен в некоторой окрестности точки a 2) непрерывен в точке a*

Тогда f дифференцируема в точке a.

Замечание. *f дифференцируема в точке $a \Leftrightarrow f(a + h) - f(a) - f'(a) \cdot h = o(h)$ при $h \to 0$*

Определение 1. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \supseteq O$(открытое) $\to \mathbb{R}$, $g(u) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(u)$ для некоторого i определена в точке a и $\exists \frac{\partial g}{\partial x_j}(a)$ для некоторого j.*

Тогда $f_{x_i x_j} \coloneqq \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \coloneqq \frac{\partial g}{\partial x_i}(a)$

Определение 2. *$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \coloneqq \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ - чистая частная производная.*

Определение 3. *$f_{x_i x_j}$, где $i \neq j$, - смешанная производная.*

Теорема 6. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \supseteq O$(открытое) $\to \mathbb{R}$, $i \neq j$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ определены и непрерывны в окрестности точка a.*

Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$

Определение 4. *Если $f : \mathbb{R}^n \supseteq O \to \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^n$, то $d_a^2 f(h) \coloneqq d(d_a f(h))(h)$*

$\cup$ $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ ...

$$\boxed{(f\circ g)'(a) = f'(g(a))\cdot g'(a).}$$

?

$$X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$$

$x=(x_1,\dots,x_n)$ $\quad$ $(y_1,\dots,y_m)$ $\quad$ $z=(z_1,\dots,z_k)$.

Примеры: 1). $n=1$, $k=1$ $\quad$ $f(y_1,\dots,y_m)$, $y_i = g_i(x)$.

$$\frac{d(f\circ g)}{dx}$$

$$(f\circ g)' = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial y_m}\right)\cdot\begin{pmatrix} g_1' \\ \vdots \\ g_m' \end{pmatrix}$$

$$(f\circ g)'(x) = \sum_{i=1} \frac{\partial f}{\partial y_i}\cdot\frac{g_i}{dx}$$

$$z_x' = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial z}{\partial y_i}\cdot\frac{dy_i}{dx}$$

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $\quad f(x,y) = x^y$

$t \in \cancel{\mathbb{R}}\ (0, \pi/2)$

$f' = (y x^{y-1}, \ x^y \ln x)$,

$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

2) $f(\gamma(t)) = (\cos t)^{\sin t}$

$(f(\gamma(t)))' = \left(e^{\sin t \ln \cos t}\right)' =$

$= (\cos t)^{\sin t}\left(\cos t\cdot\ln\cos t - \frac{\sin^2 t}{\cos t}\right)$

$$[f(\gamma(t))]' = (y x^{y-1}, \ x^y \ln x)\Big|_{\substack{y=\sin t\\ x=\cos t}} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$= \left(\sin t\cdot\cos t^{\sin t - 1}, \ \cos t^{\sin t}\ln\cos t\right)\cdot\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} =$$

$$= -\sin^2 t \cos t^{\sin t - 1} + \cos t^{\sin t + 1}\cdot\ln\cos t = \cos t^{\sin t}\left(-\frac{\sin^2 t}{\cos t} + \cos t \ln\cos t\right)$$

Пример 2).

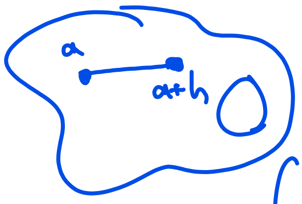
$f(x)$; $h(t)=f(a+th)$, $\exists$ f дифф. в O, $\Rightarrow$ h дифф. $t\in[0,1]$

$x=(x_1,\dots,x_n)$ $\quad a\in O$,

$f: O\to\mathbb{R}$ $\quad h\in\mathbb{R}^n$

$\subseteq\mathbb{R}^n$ $\quad t\in[0,1]$

$\forall t \quad a+th\in O$



$h'(t)=f'(a+th)(a+th)'=$

$=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a+th),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a+th)\right)\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix}$

$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th)\cdot h_i=$

$=\langle\nabla_{a+th} f, h^T\rangle = d_{(a+th)}f(h)$

Дифференцир. результата арифметич. действий.

$\exists$ $O\subseteq\mathbb{R}^n$ (откр.), $a\in O$; $f,g: O\to\mathbb{R}^m$, $\lambda: O\to\mathbb{R}$

f,g,λ дифф. в т.a. $\exists$ $A,B\in\mathbb{R}$.

Тогда (1). $Af+Bg$ дифф. в т. a и $d_a(Af+Bg)=A\,d_a f+B\,d_a g$

(2). $\lambda\cdot f$ дифф. в т. a. $\quad d_a(\lambda\cdot f)=f(a)\cdot d_a\lambda+\lambda(a)\cdot d_a f$ ск.

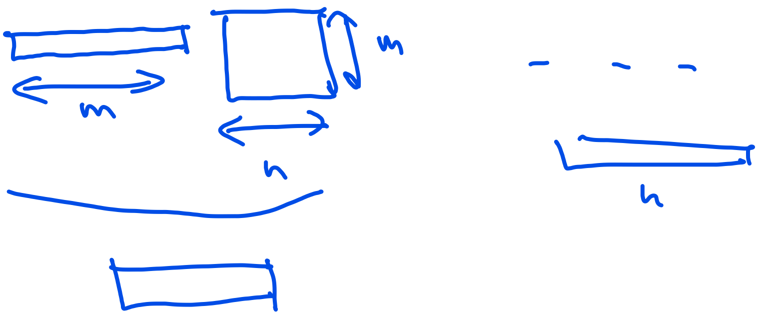
$\{\forall h\in\mathbb{R}^n \quad d_a(\lambda f)(h)=\underbrace{f(a)\cdot d_a\lambda(h)}+\underbrace{\lambda(a)}_{\text{ск.}}\cdot\underbrace{d_a f(h)}_{\text{вект.}}$

$$(\lambda f)'=f(a)\cdot\lambda'(a)+\lambda(a)\cdot f'(a)$$

(3) $\langle f,g\rangle$ дифф. в т.a и

$$d_a\langle f,g\rangle=(g(a))^T d_a f+(f(a))^T d_a g$$

$$(\langle f,g\rangle)'=(g(a))^T\cdot f'(a)+f^T(a)\cdot g'(a)$$



(4). Если $m=1$ и $g(a)\neq 0$, то f/g дифф. в т.a и

$$d_a(f/g)=\frac{g(a)\,d_a f-f(a)\,d_a g}{g^2(a)},$$

(1) $\Leftarrow$ опред. дифф. ф.

(2) Сначала Δ $m=1$.

$\boxed{(\lambda\cdot f)(a+h)-(\lambda f)(a)}=\big(\lambda(a+h)f(a+h)-\lambda(a)f(a+h)\big)+\big(\lambda(a)f(a+h)-\lambda(a)f(a)\big)=$

$=\underbrace{f(a+h)}_{(f(a)+o(1))}\big(d_a\lambda(h)+o(h)\big)+\lambda(a)\big(d_a f(h)+o(h)\big)=$

$(f(a)+o(1))\Leftarrow f$ непр. в т.a.

$$f(a)\, d_a\lambda(h) + \lambda(a)\, d_a f(h)\Big) + \Big[\underbrace{o(1)\boxed{d_a\lambda(h)} + o(1)\cdot o(h) + \lambda(a)\cdot o(h)}\Big]$$

$\|L(h)\| \le \|L\|\cdot\|h\|$

по норме $\le o(1)\cdot\|d_a\lambda\|\cdot\|h\|$ и $o(h)$ при $h\to 0$

Итак: $\lambda\cdot f$ дифф. в т. a и верно (2)

Если $m>1$ $\lambda f = \lambda \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda f_1 \\ \vdots \\ \lambda f_m \end{pmatrix}$ — дифф.

$$(\lambda f)'(a) = \begin{pmatrix} \lambda(a)\nabla_a f_1 + f_1(a)\nabla_a\lambda \\ - \ - \ - \ - \\ \lambda(a)\nabla_a f_m + f_m(a)\nabla_a\lambda \end{pmatrix} = \lambda(a)\cdot f'(a) + f(a)\cdot\nabla_a\lambda$$

$\lambda'(a)$. столбец строка

(3). f, g дифф в т. a. $\Rightarrow$ $\forall i = 1,\dots,m$ $f_i\cdot g_i$ дифф. по (2).

$$(f_i g_i)' = g_i(a)\nabla_a f_i + f_i(a)\nabla_a g_i$$

$\langle f, g\rangle = \underbrace{\sum_{i=1}^m f_i g_i}_{\text{дифф};}$ $\qquad \langle f, g\rangle' = \sum_{i=1}^n (f_i, g_i)' =$

$$= \sum_{i=1}^n \left(g_i(a)\nabla_a f_i + f_i(a)\nabla_a g\right)$$

$(g_1(a), \dots, g_m(a))$.

$$g^T(a)\cdot f'(a) = (g_1(a), \dots, g_m(a)) \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix}$$

$\| \quad g^T(a)\, f'(a) + f^T(a)\cdot g'(a)$

4). $f/g = f\cdot \frac{1}{g}$

$\frac{1}{g} = \varphi\circ g$ $\qquad d\left(\frac{1}{g}\right) = d\varphi\circ dg = \varphi'(g(t))\cdot dg = -\frac{1}{g^2(t)}dg$

$\varphi(t) = \frac{1}{t}$

$$d(f/g) = \frac{1}{g}df + f\,d\left(\frac{1}{g}\right) = \frac{1}{g}df + f\left(-\frac{1}{g^2(t)}dg\right)$$

Теор. Лагранжа для отображений.

$\exists\ O \subseteq \mathbb{R}^n$ откр.; $f: O \to \mathbb{R}^m$, f дифф. в O, $a, b \in O$, $\forall t \in (0,1)$ $a + t(b-a) \in O$

Тогда $\exists\ \theta \in (0,1)$: $\|f(b) - f(a)\| \le \|f'(a + \theta(b-a))\| \cdot \|b - a\|$

$\mathbb{R}^m$ $\qquad \mathbb{R}^{mn}$ $\qquad \mathbb{R}^n$

Зам. Равенство, невозможно вообще говоря

$n = 1$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T$, $t \in [0, 2\pi]$, $a = 0$, $b = 2\pi$

$\gamma(a) = \gamma(b)$

$\|\gamma(b) - \gamma(a)\| = 0$ $\qquad \|b - a\| = 2\pi$, $\|b-a\| = |b-a|$

$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \ne 0$

Д-во:

$\varphi(x) = \langle f(x) - f(a), f(b) - f(a) \rangle$

$\varphi: O \to \mathbb{R}$

$\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = \|f(b) - f(a)\|^2$

$\psi(t) = \varphi(a + t(b-a))$ – дифф для $[0,1]$, $\psi(0) = \varphi(a) = 0$

$\psi(1) = \varphi(b) = \|f(b) - f(a)\|^2$

По классической теор. Лагранжа (для функ. одной перем)-й

$\exists\ \theta \in (0,1)$: $\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\theta)(1 - 0) = \psi'(\theta)$

$$\|f(b) - f(a)\|^2 = \varphi'(a + \theta(b-a)) \cdot \underbrace{(b-a)}_{\text{вектор-у}}$$

$$\varphi'(x) = \langle f(x) - f(a), f(b) - f(a) \rangle'_x = (f(b) - f(a))^T \cdot \underbrace{(f(x) - f(a))'}_{= f'(x)}$$

$$\|\varphi'(a + \theta(b-a))\| \le \|f(b) - f(a)\| \cdot \|f'(a + \theta(b-a))\|$$

$$\|f(b) - f(a)\|^{\cancel{2}} \le \cancel{\|f(b) - f(a)\|} \cdot \|f'(a + \theta(b-a))\| \cdot \|b - a\|$$

Очевидное следствие: 1) Если $\forall\ \theta \in (0,1)$ $\|f'(a + \theta(b-a))\| \le M$, $M \in \mathbb{R}$:

то $\|f(b) - f(a)\| \le M \|b - a\|$,

Если всюду в O $\|f'(x)\| \le M$, то f – липшиц. с конст. M

2) Частный случай 2: если $M_0 \in \mathbb{R}$: $\forall x \in O$ $\forall i = 1..n$

$\left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right\| \le M$, $m = 1$, $\Rightarrow$ $\|f(b) - f(a)\| \le M_0 \sqrt{n} \|b - a\|$

Теор (достаточное условие дифф-ти).

$\exists\ O \subseteq \mathbb{R}^n$ откр.; $f: O \to \mathbb{R}^m$, $a \in O$; $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ 1) определены в некот. окр. т. a, 2) непр. в т. a. Тогда f дифф-ма в т. a.

Док-во. $\exists\, f'$ удобно $f'(a)$ определена

f — дифф. в т. a $\iff$ $f(a+h) - f(a) - f'(a)\cdot h = o(h)$ при $h \to 0$?

$\Updownarrow$

$$\frac{1}{\|h\|}\underbrace{\left(f(a+h) - f(a) - f'(a)h\right)}_{=c} \to 0 \quad \text{при } h \to 0$$

Δ $g(h) = f(a+h) - f'(a)\cdot h$ — дифф. в окр. 0

$c = g(h) - g(0) \Rightarrow \|g(h) - g(0)\| \leq \|g'(\theta h)\| \cdot \|h\| \to 0$ при $h \to 0$

$g'(h) = f'(a+h) - f'(a)$

$f(a+h) - f(a) - f'(a)h$ $\quad g'(\theta h) = f'(a+\theta h) - f'(a)$

$$f'(x) = \begin{pmatrix} f'_{1x_1} & \dots & f'_{1x_n} \\ - & - & - \\ f'_{nx_1} & \dots & f'_{nx_n} \end{pmatrix}$$

Производные и дифференциалы высших порядков

$O \subseteq \mathbb{R}^n$; $f: O \to \mathbb{R}$.

$g(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ опр. в окр. т. a и $\exists\ \frac{\partial g}{\partial x_j}(a)$, то $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial g}{\partial x_j}(a)$ $\quad f''_{x_i x_j}$

И аналогично для производных порядка более 2.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ — чистые част. произв.

если $i \neq j$, то $f''_{x_i x_j}$ — смешанные производные

---

1). $f(x,y) = x^y$, $x>0, y>0$

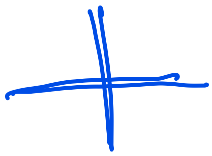
$f'_x = y x^{y-1}$, $f'_y = x^y \ln x$.

$f''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}$; $\quad f''_{xy} = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \ln x$;

$f''_{yx} = y x^{y-1} \cdot \ln x + x^y \cdot \frac{1}{x}$; $\quad f''_{yy} = x^y \ln^2 x$

---

2). $f(x,y) = \underbrace{xy}_{\text{б.м.}} \underbrace{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}_{\text{огр. 1}}$; $\quad \lim\limits_{(x,y)\to 0} f(x,y) = 0$, $\quad f(0,0) = 0$.



$f'_x(0,0) = 0 \Rightarrow f'_y = 0$.

$(x,y) \neq (0,0)$ $\quad f'_x = y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + x \underbrace{\left(\frac{x^2+y^2-2y^2}{x^2+y^2}\right)'_x}_{\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}}\right)$

$= \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\left(\underbrace{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}_{x^4-y^4} + 4x^2y^2\right) = \frac{y}{(x^2+y^2)^2} \cdot (x^4 - y^4 + 4x^2y^2)$

$f'_y = -\frac{x}{(x^2+y^2)^2}(y^4 - x^4 + 4x^2y^2)$

$f''_{xy}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f'_x(0,y) - \cancel{f'_x(0,0)}}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{\frac{y}{y^4}\cdot(-y^4+0)}{y} = -1$

$\neq$

$f''_{yx}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f'_y(x,0) - \cancel{f'_y(0,0)}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{x}{x^4}(-x^4)}{x} = 1$

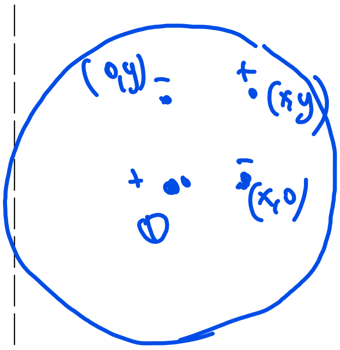
Пусть $O \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: O \to \mathbb{R}$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$, $i \neq j$.

$\exists\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ опр. и непр. в окрестности т. a.

Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$

Док-во 1). Н.у.о. $n=2$; н.у.о. $a=0$

Δ $B_R(0)$! $f''_{xy}, f''_{yx} \in C(B_R(0))$.



$$\Delta(x,y) = f(x,y) - f(x,0) - (f(0,y) - f(0,0)) = \psi(x) - \psi(0)$$

фиксир. y

Δ $\psi(x) = f(x,y) - f(x,0)$

По теор. Лагранжа по ψ $\exists$ x_y :

$$\psi(x) - \psi(0) = \psi'(x_y)\cdot x = (f'_x(x_y,y) - f'_x(x_y,0))\cdot x$$

фикс. x_y

$\varphi(y) = f'_x(x_y,y)$ между 0 и x

$$\varphi(y) - \varphi(0)$$

$$\varphi'_y(y_*)\cdot y = f''_{xy}(x_y,y_*)$$

$\exists$ y_* между 0 и y

$$\Delta = f''_{xy}(\overset{\to 0}{x_y}, y_*)\cdot xy$$

$$\frac{\Delta}{xy} \xrightarrow[(x,y)\to 0]{} f''_{xy}(0,0)\frac{\cancel{xy}}{\cancel{xy}}$$

Поменяв группировку слагаемых в Δ аналогично

$$\frac{\Delta}{xy} \to f''_{yx}(0,0).$$

$$\boxed{d_a^2 f(h) = d(d_a f(h))(h)}$$

$h \in \mathbb{R}^n$

$f: O \to \mathbb{R}$, $O \subseteq \mathbb{R}^n$

Так же для функции одной переменной, сохранение и для нескольких перем.

$$f(x,y) = x^2 - y^2 + 4xy$$

$$df = d(x^2) - dy^2 + 4d(xy) = 2x\,dx - 2y\,dy + 4(y\,dx + x\,dy)$$

$$d^2f = d(2x\,dx - 2y\,dy + 4(y\,dx + x\,dy)) =$$

$$= 2\,dx\,dx - 2\,dy\,dy + 4(dy\,dx + dx\,dy) = 2(dx)^2 - 2(dy)^2 + 8(dx\,dy) = 2f(dx,dy)$$

$$df(\underbrace{h_1,h_2}_{=h}) = 2xh_1 - 2yh_2 + 4(yh_1 + xh_2)$$

2-ая неделя

11.09.2023

Определение 1. *$r \in \mathbb{Z}_+$, O – открытое в $\mathbb{R}^n$*
Тогда $C^r(O) \coloneqq \{f \colon O \to R : \forall i_1 \dots i_r \ \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r} \dots \partial x_{i_1}} \in C(O)\}$

Определение 2. $C^\infty(O) \coloneqq \bigcap\limits_{r \in \mathbb{Z}_+} C^r(O)$

Теорема 1 (О линейном пространстве $C^r(O)$)**.** *$C^r(O)$ - линейное пространство. Замкнуто относительно произведения: $f, g \in C^r : f \cdot g \in C^r$*

Определение 3. $C^r(O \to \mathbb{R}^m) \coloneqq \{f : f_1, \dots f_m \in C^r(O)\}$

Теорема 2 (Композиция $C^r(O)$)**.** *Пусть $\varphi \in C^r(O \to \tilde{O})$, $f \in C^r(\tilde{O})$.*
Тогда $f \circ \varphi \in C^r(O)$

Теорема 3 (О равенстве смешанных производных в классе C^r)**.** *Если $f \in C^r(O)$, O – открытое в $\mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{Z}_+$; $(i_1, i_2, \dots i_l) \in 2^{\{1,\dots,r\}}$, $l \le r$, $(j_1, \dots, j_l)$ – перестановка$(i_1, \dots i_l)$*
Тогда $\frac{\partial^l f}{\partial x_{i_l} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^l f}{\partial x_{j_l} \dots \partial x_{j_1}}$

Определение 4. *Мультииндекс - элемент ${\mathbb{Z}_+}^n$*
$|j| = j_1 + j_2 + \dots + j_n$
$j! = j_1! \cdot j_2! \cdot \dots \cdot j_n!$
$h \in \mathbb{R}^n, h^j = h_1^{j_1} \cdot \dots \cdot h_n^{j_n}$
$f^(j)(a) = \frac{\partial^{|j|} f}{\partial x_n^{j_n} \dots \partial x_1^{j_1}}(a)$

Лемма 1. *Пусть $f \in C^r(O)$, O – открытое в $\mathbb{R}^n$, $[a, a+h] \subset O$, $g(t) = f(a+th)$.*
Тогда $\forall l = 0, \dots, r : g^{(l)}(t) = \sum_{j \in {\mathbb{Z}_+}^n, |j| = l} \frac{l!}{j!} f^{(j)}(a+th) \cdot h^j$

Теорема 4 (Глобальная формула Тейлора(-Лагранжа) для функции нескольких переменных)**.** *Если $f \in C^{r+1}(O)$, O – открытое в $\mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{Z}_+$; $[a, a+h] \subset O$.*
Тогда $\exists \theta \in (0,1) : f(a+h) = \sum_{j \in {\mathbb{Z}_+}^n, |j| \le r} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + \sum_{j \in {\mathbb{Z}_+}^n, |j| = r+1} \frac{f^{(j)}(a+\theta h)}{j!} h^j$

Следствие 1 (Формула Тейлора-Пеано, локальный вариант формулы Тейлора)**.** *Пусть $f \in C^r(O)$, O – открытое в $\mathbb{R}^n$, $a \in O$.*
Тогда $f(a+h) = \sum_{j \in {\mathbb{Z}_+}^n, |j| \le r} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + o(||h||^j)$ при $h \to 0$

Следствие 2 (Теорема Лагранжа о среднем для скалярно-значных отображений)**.** *Пусть $f \in C^1(O)$, O – открытое в $\mathbb{R}^n$; $a, h : a + th \in O \forall t \in [0,1]$.*
Тогда $f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\theta h) \cdot h_i = \langle \nabla_{a+\theta h} f, h \rangle$ (частный случай Тейлора для $r = 0$).

Следствие 3 (Полиномиальная формула)**.** $(x_1 + \dots + x_n)^r = \sum_{j \in {\mathbb{Z}_+}^n, |j| = r} \frac{r!}{j!}(x_1, \dots, x_n)^j$*, при $r \in \mathbb{Z}_+$*

Замечание. $d_a^0 f = f(a)$
$d_a^1 f = d_a f$
$d_a^1 f(h) = d_a f(h)$
$d_a^{l+1} f(h) = d_a(d_a^l f(h))(h)$

Лемма 2. *Пусть $f \in C^r(O)$, O – открытое в $\mathbb{R}^n$; $a, h : a + th \in O \ \forall t \in [0,1]$.*
Тогда $\forall l = 0, \dots, r : d_{a+th}^l f(h) = g^{(l)}(t)$, где $g(t) = f(a+th)$

Теорема 5 (Формула Тейлора в дифференциалах в условиях теоремы Тейлора-Лагранжа)**.** $f(a+h) = \sum_{l=0}^r \frac{1}{l!} d_a^l f(h) + \frac{d_{a+\theta h}^{l+1} f}{(l+1)!}(h)$

Определение 5. $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in E$.

a называется точкой максимума для f, если существует окрестность $U(a) : f(x) \leq f(a)\ \forall x \in U(a) \cap E$

Теорема 6 (Необходимое условие экстремума)**.** $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in IntE$, *a - точка экстремума f, f дифференцируема в точке* $a \Rightarrow d_a f = 0 \Leftrightarrow \nabla_a f = 0 \Leftrightarrow \forall i \in 1, \ldots, n : \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$

Теорема 7. *a - точка максимума f,* φ *непрерывна в точке* α, $\varphi(\alpha) = a$.

Тогда α *- точка максимума* $f \circ \varphi$

Замечание. $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} h_i h_j$ *- квадратичная форма.*
$d_a^2 f(h)$ *- квадратичная форма переменных* $h_1, \ldots, h_n$.
$d_a^l f(h)$ *- однородная функция степени l:* $d_a^l f(Ch) = C^l d_a^l f(h)$.
Форма $Q(h)$ *бывает положительно определенной, отрицательно определенной, неопределенной (бывает и положительной, и отрицательной).*

Теорема 8 (Достаточное условие экстремума)**.** $f : \mathbb{R}^n \supseteq E \to \mathbb{R}$, $a \in IntE$, *в точке a выполняется необходимое условие экстремума и* $\exists d_a^2 f$.

$Q(h) \coloneqq d_a^2 f(h)$. *Тогда, если* $Q > 0$, *то a - точка минимума, если* $Q < 0$, *то a - точка максимума, если* Q *неопределенная, то a - не точка экстремума.*

Исправление доказательства достаточного условия дифф-ти.

Пусть $f: E \to \mathbb{R}^m$; $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{Int} E$,

1). $\exists$ окр. $U(a)$: $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ определены в $U(a)$

2). $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ непр. в т. a.

Тогда f дифф. в т. a.

Док-во. НУО, $m=1$. $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}, \dots$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

если $f_1, \dots, f_m$ дифф, то f дифф.

$$df(h) = \begin{pmatrix} df_1(h) \\ \vdots \\ df_m(h) \end{pmatrix}.$$

Разберем случай $n=2$, $a=0$

$$\underbrace{f(x,y) - f(0,0) - \langle \nabla f_{(0,0)}, (x,y) \rangle}_{=\Delta} = o(\|h\|) \iff f \text{ дифф. в т. } (0,0).$$

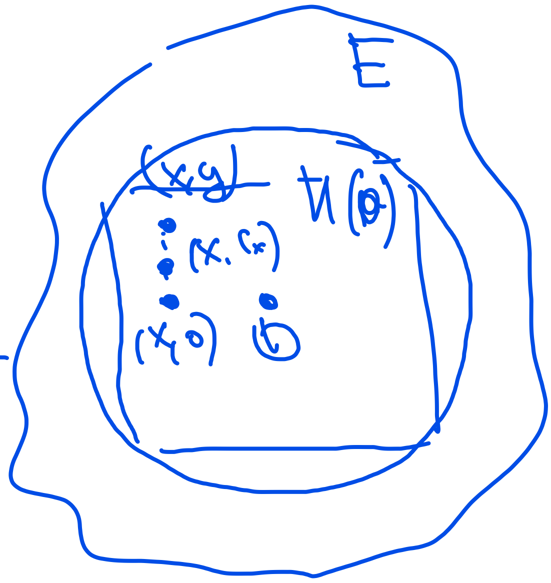
при $h=(x,y)$, $h \to 0$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\Delta}{\|h\|} \longrightarrow 0$$

при $h \to 0$

$\exists\, \delta > 0$: $(-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta) \subset U(0)$



$$\Delta = (f(x,y) - f(x,0)) + (f(x,0) - f(0,0)) - \langle \nabla f, (x,y) \rangle =$$

$=$

фиксир. x $\varphi(y) = f(x,y)$

$f(x,y) - f(x,0) = \varphi(y) - \varphi(0)$; $\varphi'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ по определению

φ дифф. на $(-\delta, \delta)$

по классич. теор. Лагранжа $\exists\ c_x$: между $0, y$

$$\varphi(y)-\varphi(0)=\varphi'(c_x)(y-0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,c_x)\cdot y$$

$$\psi(x)=f(x,0),\qquad \psi'(x)=\frac{\partial}{\partial x}f(x,0)$$ — опред. на $(-\delta,\delta)$

$\Rightarrow \exists\ c_y$, леж. между $0, x$:

теор. Лагр. $$\underbrace{\psi(x)-\psi(0)}_{f(x,0)-f(0,0)}=\psi'(c_y)\cdot x$$

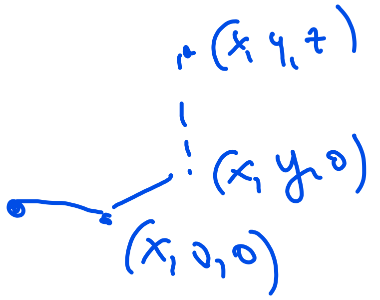
$$\frac{\Delta(x,y)}{\|(x,y)\|}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,c_x)y+\frac{\partial f}{\partial x}(c_y,0)x-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y\right)$$

$$=\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(c_y,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right)}_{\to 0}\underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\text{огр.}}+\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,c_x)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)}_{\to 0}\underbrace{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\text{огр.}}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ непр. в т. 0

т.е. — беск. малая

Случай $n>2$ и $a\in E$ — аналогично.



Если $f(x,y): O_\delta\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ в окр. т. a $\exists$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ и непр. в т. a, то

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a).$$

$f(x_1,\dots,x_n)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}\Longleftarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$$ непр. в т. a.

$r \in \mathbb{Z}_+$, O – откр в $\mathbb{R}^n$

$$C^r(O) = \Big\{ f : O \to \mathbb{R} : \ \forall\, i_1,\dots,i_r \in \{1,\dots,n\} \quad \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r}\dots\partial x_{i_1}} \in C(O) \Big\}$$

$$C^\infty(O) = \bigcap_{r\in\mathbb{Z}_+} C^r(O)$$

$C^r(O)$ – лин. простр-во; $f, g \in C^r(O)$, то $\lambda f + \mu g \in C^r(O)$

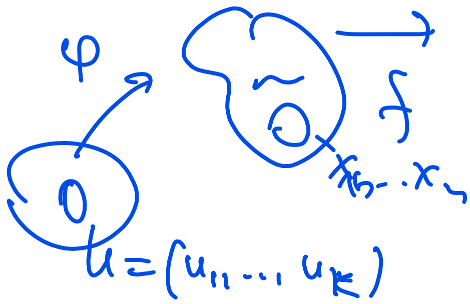
2). $f\cdot g \in C^r$ $\qquad \frac{\partial}{\partial x_i}(fg) = g\frac{\partial f}{\partial x_i} + f\frac{\partial g}{\partial x_i}$

3). φ $\quad C^r(O\to\mathbb{R}^n) = \{ f : f_1,\dots,f_n \in C^r(O)\}$

$\varphi \in C^r(O)$, $\varphi(O) \subset \tilde{O}$, $\forall f \in C^r(\tilde{O})$

$f\circ\varphi \in C^r(\tilde{O})$

$$\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(u))}_{\in C^{r-1}} \underbrace{\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}}_{C^{r-1}}$$



В частности, $\underset{(x)}{f} \in C^r$, $\quad g(t) = f(a+th)$

a, h – фиксир.

$g = f\circ\varphi$, $\varphi : t \to a+th$ $\in C^\infty(\mathbb{R})$

$g \in C^r$(Откр. O).

Теорема о равенстве смешанных производных в кл. C^r.

Если $f \in C^r(O)$, $O \subset \mathbb{R}^n$ откр.; $r \in \mathbb{Z}_+$

$i_1, i_2, \dots, i_\ell$, $\ell \le r$, $(j_1,\dots,j_\ell)$ получены из $(i_1,\dots,i_\ell)$
$\in \{1,\dots,n\}$

Тогда $\dfrac{\partial^\ell f}{\partial x_{i_\ell}\dots\partial x_{1}}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_{j_\ell}\dots\partial x_{j_1}}(a)$

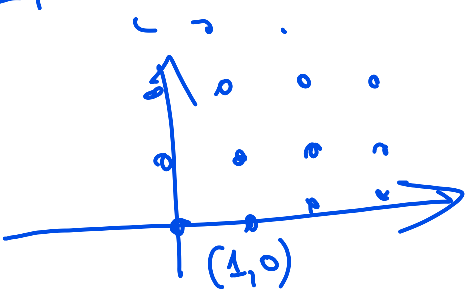
$\forall a \in O$.

Мультииндексы.

Мультииндексом называем элемент $\mathbb{Z}_+^n$

$\hat{j}\in\mathbb{Z}_+^n \iff \hat{j}=(\hat{j}_1,\dots,\hat{j}_n)$, $\hat{j}_1,\dots,\hat{j}_n\in\mathbb{Z}_+$.

$n=2$



$n=2$

$|\hat{j}|=\hat{j}_1+\hat{j}_2+\dots+\hat{j}_n$

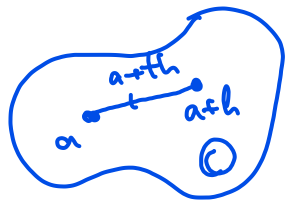
$\hat{j}!=\hat{j}_1!\cdot\ldots\cdot\hat{j}_n!$

$h\in\mathbb{R}^n$, $h^{\hat{j}}=h_1^{j_1}\cdot\ldots\cdot h_n^{j_n}$

$h=(h_1,\dots,h_n)$

$$f^{(j)}(a)=\frac{\partial^{|j|}f}{\partial x_n^{j_n}\cdot\ldots\cdot\partial x_1^{j_1}}(a).$$

Лемма. $f: O\to\mathbb{R}$, $O\subseteq\mathbb{R}^n$, $[a,a+h]\subset O$



$f\in C^r(O)$, $g(t)=f(a+th)$

Тогда $\forall\, l=0,\dots,r$

$$g^{(l)}(t)=\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+^n\\ |j|=l}}\frac{l!}{j!}f^{(j)}(a+th)\cdot h^j$$

Док-во. По индукции по l.

$l=0$. л.ч. $g^{(0)}(t)=g(t)=f(a+th)$ $\qquad f^{(0)}(a+th)=f(a+th)$

$|j|=0\Rightarrow j\in\mathbb{Z}_+$, $j=0$ пр.ч.

(база есть).

$l\to l+1$ переход. $g^{(l+1)}(t)=\left(g^{(l)}(t)\right)'_t \overset{\text{индукц. предп.}}{=}$

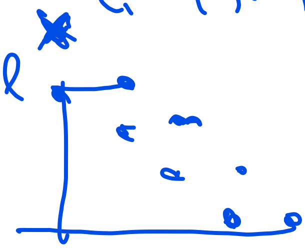
$$\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+^n\\ |j|=l}}\frac{l!}{j!}\left(f^{(j)}(a+th)\,h^j\right)'_t=\sum_{|j|=l}\frac{l!}{j!}\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial f^{(j)}}{\partial x_i}(a+th)\cdot h_i\right)h^j=$$

$\mu(x)=f^{(j)}(x)$

$$\left(\mu(a+th)\right)'_t=\sum_{i=1}^n\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\cdot h_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \ell! \sum_{\substack{j:\ |j|=\ell}} f^{(j+e_i)}(a+th)\, h^{(j+e_i)}\, p_i$$

$e_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$; $\quad j+e_i = p \in \mathbb{Z}_+^n$



$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\ell!}{p!}\left(\sum_{\substack{p\in\mathbb{Z}_+^n\\ |p|=\ell+1\\ \cancel{p_i\neq 0}}} f^{(p)}(a+th)\, h^{p}\cdot p_i\right) =$$

$p! = j!\cdot p_i$ $\quad (p_i = j_i+1)$

$$= \sum_{\substack{p\in\mathbb{Z}_+^n\\ |p|=\ell+1}} \underbrace{\frac{\ell!}{p!}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)}_{|p|=\ell+1}}_{\frac{(\ell+1)!}{p!}} \cdot f^{(p)}(a+th)\cdot h^{p}$$

Теор (многомерная формула Тейлора с [остатком в форме] Лагранжа для функции нескольких переменных)

$O \subseteq \mathbb{R}^n$; $\quad f\in C^{r+1}(O)$

опр: $\quad r\in\mathbb{Z}_+$

$\exists\ a,h:\ \forall t\in[0,1]\quad a+th\in O$

Тогда $\exists\ \theta\in(0,1)$:

$$f(a+h) = \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+^n\\ |j|\le r}} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}h^{j} + \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+^n\\ |j|=r+1}} \frac{f^{(j)}(a+\theta h)}{j!}h^{j}$$

$$f(a+h) = g(1) = \underbrace{\sum_{l=0}^{r} \frac{g^{(l)}(0)}{l!} \cancel{(1-0)^l}}_{\sum_{l=0}^{r} \sum_{j\in\mathbb{Z}_+^n,\ |j|=l} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j} + \frac{g^{(l+1)}(\theta)}{(l+1)!} \cancel{(1-\theta)^{l+1}}$$

$$\underbrace{g = f}_{\in C^{r+1}}(\underbrace{a+th}_{C^\infty})$$

$$+ \sum_{j\in\mathbb{Z}_+^n,\ |j|=l+1} \frac{f^{(j)}(a+\theta h)}{j!} h^j$$

Теор. (формула Тейлора-Пеано, локальный вариант ф-лы Тейлора).

Пусть O-откр, $O \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in C^r(O)$, $a \in O$

Тогда

$$f(a+h) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+^n,\ |j|\le r} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + o(\|h\|^j) \text{ при } h\to 0$$

α зад. в окр. т. a

$$\frac{|\alpha|}{\|h\|^j} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Док.-во

По теор. Тейлора - Лагранже

$$f(a+h) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+^n,\ |j|\le r-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + \sum_{j\in\mathbb{Z}_+,\ |j|=r} \frac{f^{(j)}(a+\theta h)}{j!} h^j =$$

$\theta \in (0,1)$.

$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}_+,\ |j|\le r} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + \sum_{j\in\mathbb{Z}_+,\ |j|=r} \underbrace{\left(\frac{f^{(j)}(a+\theta h)}{j!} h^j - \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j\right)}_{\underbrace{\left(f^{(j)}(a+\theta h) - f^{(j)}(a)\right)}_{\to 0 \text{ при } h\to 0} \underbrace{\frac{h^j}{j}}_{O(\|h\|^r)}}$$

$|h^j| = |h_1|^{j_1} \cdot \ldots \cdot |h_n|^{j_n} \le \|h\|^{j_1+\ldots+j_n} = \underbrace{\|h\|^r}_{o(\|h\|^r)}$.

Следств. Теор. Лагранжа о среднем для скалярно-значных отобр.

$f \in C^1(O)$, O-откр.; a, h: $a + th \in O$ $\forall t \in [0,1]$, тогда

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\theta h) \cdot h_i = \langle \nabla f_{a+\theta h}, h \rangle$$

(частный случай ф-лы Тейлора для $r=0$).

Следств. 3 Полиномиальная формула.

$$(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)^r = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+^n \\ |j| = r}} \frac{r!}{j!} \underbrace{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^j}_{a_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{j_n}}$$

$r \in \mathbb{Z}_+$

Док-во. $f(x) = (x_1 + \ldots + x_n)^r$

$f'_{r\,x_i}(x) = r(x_1 + \ldots + x_n)^{r-1} = r \cdot f_{r-1}$

$f''_{x_i x_j} = r \cdot (r-1) f_{r-2}$; $j \in \mathbb{Z}_+$ $|j| \le r$

$$f^{(j)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } |j| < r \\ r!, & |j| = r \end{cases}; \quad f^{(j)}(x) = 0 \quad |j| > r$$

По ф-ле Тейлора – Лагранжа

$$f_r(x) = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+^n \\ |j| \le r}} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} h^j + \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+^n \\ |j| = r+1}} \underbrace{\frac{f^{(j)}(\theta x)}{j!} h^j}_{=0} = \quad \theta \in (0,1)$$

$$= \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+^n \\ |j|=r}} \frac{r!}{j!} h^j \qquad h = x - a$$

Частный случай многочлена Тейлора для $n=2$

$$= T_r f(h) = \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+^2 \\ |j|\le r}} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j = \sum_{l=0}^{n} \sum_{|j|=l} \dots =$$

$j=(j_1, j_2)$, $|j|=l$, $(i, l-i)$

$$= \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!} \sum_{i=1}^{l} \underbrace{\boxed{\frac{l!}{i!(l-i)!}}}_{= C_l^i} \frac{\partial^l f}{\partial x_2^{l-i}\partial x_1^i}(a)\, h_1^i h_2^{l-i}$$

$d_a^0 f = f(a)$; $\quad d_a^1 f = d_a f$,

$d_a^1 f(h) = d_a f(h)$

$$d_a^{l+1} f(h) = d_a F(h), \quad \Big\} \; d_a\left(d_a^l f(h)\right)(h)$$

где $F(a) = d_a^l f(h)$

Лемма 2. $f \in C^r(O)$, a, h: $a+th \in O$ $\forall t\in[0,1]$

$\forall\, l = 0, \dots, r$

$$d^l_{a+th} f(h) = g^{(l)}(t), \text{ где } g(t) = f(a+th)$$

Док-во по индукции по l.

при $l=0$ $\quad$ л.ч. $= f(a+th) \;{:=}$ пр.ч.

Переход от l к $l+1$

$$d^{l+1}_{a+th} f(h) = d_{a+th} F(h) = d_{a+th}\, g^{(l)}(t)\,(h) =$$

$$F(a+th) = d^{l}_{a+th} f(h) = \underbrace{g^{(l)}(t)}_{\text{интерпр. пр.}} = \mu(t)$$

$$= d_{a+th}\, \mu(t$$

$l=1$ $\begin{cases} \text{н.ч.} \quad d^{1}_{a+th} f(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th)\cdot h_i \\ \text{пр. ч.} \quad = g'(t) = \big(f(a+th)\big)'_t = \end{cases}$

$$d_{a+th} f(h) = f(a+th)'_t$$

$$d^{l+1}_{a+th} f(h) = d^{1}_{\underset{=x}{a+th}} \big(\underbrace{d^{l}_{a+th} f(h)}_{x}\big)(h) = \big(\nu(a+th)\big)'_t =$$

$$= \nu(x) = g^{(l)}(t)$$

$$= \big(g^{(l)}(t)\big)'_t = g^{(l+1)}(t).$$

$$d^{l}_{a+th} f(h) = \sum_{\substack{j\in \mathbb{Z}_+ \\ |j| = l}} \frac{l!}{j!} f^{(j)}(a+th)\cdot h^{j}$$

ф-ла Тейлора в дифференциальной условиях теор. Тейлора – Лагранжа

$$\boxed{f(a+h) = \sum_{l=0}^{r} \frac{1}{l!} d^{l}_{a} f(h) + \frac{d^{(l+1)}_{a+\theta h} f}{(l+1)!}(h)}$$

ф-ла выглядит также как для функции одной переменной.

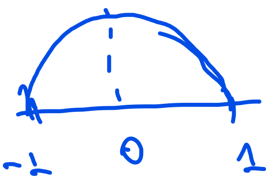
Экстремумы функций нескольких переменных.

Опр. Пусть $f: E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Пусть $a \in E$. a наз. точкой строгого максимума для f, если $\exists$ окр. $U(a)$:

$f(x) \le f(a)$ $\forall x \in U(a) \cap E$ | $f(x) < f(a)$ $\forall x \in \dot{U}(a) \cap E$

Примеры: $f(x)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ исследовать на экстр.

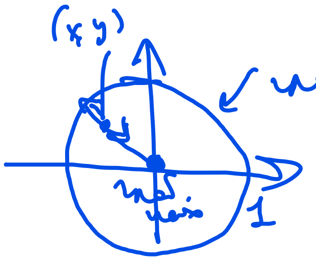
$f(x)=\sqrt{1-r^2(x,y)}$ $\qquad g(r)=\sqrt{1-r^2}$



$r(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

лок. max $f \iff r=0 \iff (x,y)=(0,0)$ лок. max,

(x,y) : $x^2+y^2=1$ – т. лок. min. других точек экстр нет.



Необходимое условие экстремума

т. экстр. $\Rightarrow$ т. max. или т. min.

Пусть $f: E \to \mathbb{R}$; $a \in \operatorname{Int} E$, a – т. экстр. для f, f дифф. в т. a. $\Longrightarrow$ $d_a f = 0 \iff \nabla_a f = 0$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)=0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)=0 \end{cases}$$

Д-во. $a \in \operatorname{Int} E \Rightarrow \exists \delta>0$: $B_\delta(a) \subset E$ $\forall h$: $\|h\|<\delta$

$g(t)=f(a+th)$

Пусть a – т. min. $\Longrightarrow$ для g т. 0 т. min.

Но g дифф. в 0

$\Rightarrow$ $g'(0)=0=\langle \nabla_a f, h\rangle=0$

$\Longrightarrow$ $\nabla_a f=0$.

$f\circ\varphi = h(x)$, Пусть a – т. min (max) для f, φ непр. в т. α, $\varphi(\alpha)=a$ $\Rightarrow$ α – т. max. для $f\circ\varphi$

Т.к. a – т. min для f $\exists$ окр. $U(a)$: $\forall x \in U \cap E$ $f(x) \ge f(a)$, φ непр. в т. α $\exists$ окр. V т. α: $\varphi(V) \subset U$, $f\circ\varphi(x) \ge f(a) = f\circ\varphi(\alpha)$ $x \in V$