5-ая неделя

2.10.2023

Билет 15 (Теорема о дифференцируемости обратного отображения). *Пусть* $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in IntE$, $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$, $\Phi(a) = b \in Int\Phi(E)$, Φ *дифференцируема в* a, $\Phi'(a)$ *обратима* ($\det \Phi'(a) \neq 0$).

Тогда Φ^{-1} *дифференцируема в* b *и* $(\Phi^{-1})'(b) = (\Phi'(a))^{-1}$

Билет 16 (Теорема о гладкости обратного отображения (достаточное условие диффеоморфности)). $O, \tilde{O}$ *открытые,* $\Phi : O \to \tilde{O}$ *- диффеоморфизм на* $C^r \overset{def}{\Longrightarrow} \Phi$ *обратима и* $\Phi \in C^r(O \to \tilde{O})$, $\Phi^{-1} \in C^r(\tilde{O} \to O)$.

Если O *- открытое,* $O \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Phi \in C^r(O \to \mathbb{R}^n)$, Φ *обратимо (как отображение на свой образ) и* $\det \Phi'(x) \neq 0$ *всюду в* O.

Тогда $\Phi^{-1} \in C^r(\Phi(O) \to O)$ ($\forall x \in O (\Phi^{-1})(\Phi(x)) = (\Phi'(x))^{-1}$)

Билет 17 (Теорема о локальной обратимости регулярного отображения). $\Phi : \mathbb{R}^n \supseteq O \to \mathbb{R}^n$, O *открытое;* Φ *регулярное* $\overset{def}{\Longrightarrow} \Phi \in C^1(O \to \mathbb{R}^n)$, $rank\Phi'(x)$ *максимальной в каждой точке* O.

Пусть $\mathbb{R}^n \supseteq O$ *открытое,* $\Phi \in C^r(O \to \mathbb{R}^n)$, Φ *регулярно в* O.

Тогда $\forall a \in O$ $\exists$*окрестность* $U_a : \Phi|_{U_a}$ *- диффеоморфизм класса* C^r, *в частности обратимо.*

Билет 18 (Теорема о неявном отображении). *Пусть* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^{n+m} \supseteq O$ *открытое,* $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $y^0 \in \mathbb{R}^m$, $F \in C^r(O \to \mathbb{R}^m)$ *и* F' *обратима.*

Тогда $\exists$*окрестности* U_{x^0}, U_{y^0} *и* $f : U_{x^0} \to U_{y^0}$ *такие, что:*

1. $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$ *в* $U_{x^0} \times U_{y^0}$
2. $f \in C^r(U_{x^0} \to U_{y^0})$
3. $f'(x) = -(F'_y(x, f(x)))^{-1} \cdot F'_x(x, f(x))$

Билет 27 ((с леммой) (версия по лекции)). $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *равномерно сходится на* E, $\varphi(x)$ *ограничен на* $E \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(x) f_k(x)$ *равномерно сходится на* E

Билет 28 (~~Примеры исследования рядов на равномерную сходимость~~).

Теорема (Признак Лейбница равномерной сходимости). *Skipped*

Теорема (Признак равномерной сходимости для монотонных последовательностей). *Skipped*

Билет 29 (Перестановка пределов для последовательностей). *Пусть* $E \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in E$, $f_n : E \to \mathbb{C}$, $f_n(x)$ *равномерно сходится на* E, $\forall k \in N$ $\exists \lim_{x \to x_0} f_k(x) \in \mathbb{R}$.

Тогда $\lim_{x \to x_0} \lim_{k \to \infty} f_k(x) = \lim_{k \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_k(x)$, *оба предела существуют в* $\mathbb{R}$.

Следствие 1. *Skipped*