

1-ая неделя

4.09.2023

Теорема 1 (Необходимое условие дифференцируемости). Если $f : \mathbb{R}^n \supseteq O \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке a , то $\forall u \in \mathbb{R}^n \exists \frac{\partial f}{\partial u}(a)$ (далее показано, что это эквивалентно для частных производных только по x_i).

Теорема 2 (Дифференциал композиции). Пусть $g : X \rightarrow Y$, $f : Y \rightarrow Z$. Тогда если g дифференцируема в точке a и f дифференцируема в точке $g(a)$, то $f \circ g$ дифференцируема в точке a и $d_a(f \circ g) = d_{g(a)}f \cdot d_ag$.

Или, если рассматривать матрицу Якоби, $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$

Теорема 3 (Дифференцирование результата арифметических действий). Пусть $O \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in O$; $f, g : O \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\lambda : O \rightarrow \mathbb{R}$; f, g, λ дифференцируемы в точке a ; $A, B \in \mathbb{R}$.

Тогда

1. $Af + Bg$ дифференцируемо в точке a и $d_a(Af + Bg) = Ad_af + Bd_ag$

2. λf дифференцируемо в точке a и $d_a(\lambda f) = f(a) \cdot d_a\lambda + \lambda(a) \cdot d_af$

Или на языке матриц: $(\lambda f)' = f(a) \cdot \lambda'(a) + \lambda(a) \cdot f'(a)$

3. $\langle f, g \rangle$ дифференцируемо в точке a и $d_a\langle f, g \rangle = (g(a))^T d_af + (f(a))^T d_ag$

$(\langle f, g \rangle)' = (g(a))^T \cdot f'(a) + (f(a))^T \cdot g'(a)$

4. Если $m = 1$ и $g(a) \neq 0$, то f/g дифференцируемо в точке a и $d_a(f/g) = \frac{g(a)d_af - f(a)d_ag}{g^2(a)}$

если g дифференцируема в точке a и f дифференцируема в точке $g(a)$, то $f \circ g$ дифференцируема в точке a и $d_a(f \circ g) = d_{g(a)}f \cdot d_ag$.

Или, если рассматривать матрицу Якоби, $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$

Теорема 4 (Теорема Лагранжа для отображений). Пусть $f : \mathbb{R}^n \supseteq O(\text{открытое}) \rightarrow \mathbb{R}^m$, f дифференцируемо в O ; $a, b \in O$, $\forall t \in (0, 1) \ a + t(b - a) \in O$.

Тогда $\exists \theta \in (0, 1) : \|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(a + \theta(b - a))\| \cdot \|b - a\|$

Следствие 1. Если $\forall \theta \in (0, 1) \|f'(a + \theta(b - a))\| \leq M \in \mathbb{R}$, то $\|f(b) - f(a)\| \leq M\|(b - a)\|$

Следствие 2. Если $m = 1$ и $\forall u \in O \ \forall i = 1..n \ \|\frac{\partial f}{\partial x_i}(u)\| \leq M$, то $\|f(b) - f(a)\| \leq M\sqrt{n}\|(b - a)\|$

Теорема 5 (Достаточное условие дифференцируемости). Пусть $f : \mathbb{R}^n \supseteq O(\text{открытое}) \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in O$; $\frac{\partial f}{\partial x_i} \ \forall i \in 1..n$ 1) определен в некоторой окрестности точки a 2) непрерывен в точке a

Тогда f дифференцируема в точке a .

Замечание. f дифференцируема в точке $a \Leftrightarrow f(a + h) - f(a) - f'(a) \cdot h = o(h)$ при $h \rightarrow 0$

Определение 1. Пусть $f : \mathbb{R}^n \supseteq O(\text{открытое}) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(u) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(u)$ для некоторого i определена в точке a и $\exists \frac{\partial g}{\partial x_j}(a)$ для некоторого j .

Тогда $f_{x_i x_j} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) := \frac{\partial g}{\partial x_j}(a)$

Определение 2. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ - чистая частная производная.

Определение 3. $f_{x_i x_j}$, где $i \neq j$, - смешанная производная.

Теорема 6. Пусть $f : \mathbb{R}^n \supseteq O(\text{открытое}) \rightarrow \mathbb{R}$, $i \neq j$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ определены и непрерывны в окрестности точки a .

Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$

Определение 4. Если $f : \mathbb{R}^n \supseteq O \rightarrow \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^n$, то $d_a^2 f(h) := d(d_af(h))(h)$

- ▶ !skipped! $X \in X$. !skipped! $X : X \notin X$
- ▶ Пусть $X \notin X$. Тогда X должен !skipped! X