

1-ая неделя

4.09.2023

Теорема 1 (Необходимое условие дифференцируемости). *Если $f : \mathbb{R}^n \supseteq O \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке a , то $\forall u \in \mathbb{R}^n \exists \frac{\partial f}{\partial u}(a)$ (далее показано, что это эквивалентно для частных производных только по x_i).*

Теорема 2 (Дифференциал композиции). *Пусть $g : X \rightarrow Y$, $f : Y \rightarrow Z$. Тогда если g дифференцируема в точке a и f дифференцируема в точке $g(a)$, то $f \circ g$ дифференцируема в точке a и $d_a(f \circ g) = d_{g(a)}f \cdot d_ag$.*

Или, если рассматривать матрицу Якоби, $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$

Теорема 3 (Дифференцирование результата арифметических действий). *Пусть $O \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in O$; $f, g : O \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\lambda : O \rightarrow \mathbb{R}$; f, g, λ дифференцируемы в точке a ; $A, B \in \mathbb{R}$.*

Тогда

1. *$Af + Bg$ дифференцируемо в точке a и $d_a(Af + Bg) = Ad_af + Bd_ag$*

2. *λf дифференцируемо в точке a и $d_a(\lambda f) = f(a) \cdot d_a\lambda + \lambda(a) \cdot d_af$*

Или на языке матриц: $(\lambda f)' = f(a) \cdot \lambda'(a) + \lambda(a) \cdot f'(a)$

3. *$\langle f, g \rangle$ дифференцируемо в точке a и $d_a\langle f, g \rangle = (g(a))^T d_af + (f(a))^T d_ag$
 $(\langle f, g \rangle)' = (g(a))^T \cdot f'(a) + (f(a))^T \cdot g'(a)$*

4. *Если $m = 1$ и $g(a) \neq 0$, то f/g дифференцируемо в точке a и $d_a(f/g) = \frac{g(a)d_af - f(a)d_ag}{g^2(a)}$*

если g дифференцируема в точке a и f дифференцируема в точке $g(a)$, то $f \circ g$ дифференцируема в точке a и $d_a(f \circ g) = d_{g(a)}f \cdot d_ag$.

Или, если рассматривать матрицу Якоби, $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$

Теорема 4 (Теорема Лагранжа для отображений). *Пусть $f : \mathbb{R}^n \supseteq O$ (открытое) $\rightarrow \mathbb{R}^m$, f дифференцируемо в O ; $a, b \in O$, $\forall t \in (0, 1)$ $a + t(b - a) \in O$.*

Тогда $\exists \theta \in (0, 1) : \|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(a + \theta(b - a))\| \cdot \|b - a\|$

Следствие 1. *Если $\forall \theta \in (0, 1) \|f'(a + \theta(b - a))\| \leq M \in \mathbb{R}$, то $\|f(b) - f(a)\| \leq M\|(b - a)\|$*

Следствие 2. *Если $m = 1$ и $\forall u \in O \forall i = 1..n \|\frac{\partial f}{\partial x_i}(u)\| \leq M$, то $\|f(b) - f(a)\| \leq M\sqrt{n}\|(b - a)\|$*

Теорема 5 (Достаточное условие дифференцируемости). *Пусть $f : \mathbb{R}^n \supseteq O$ (открытое) $\rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in O$; $\frac{\partial f}{\partial x_i} \forall i \in 1..n$ 1) определен в некоторой окрестности точки a 2) непрерывен в точке a*

Тогда f дифференцируема в точке a .

Замечание. *f дифференцируема в точке $a \Leftrightarrow f(a + h) - f(a) - f'(a) \cdot h = o(h)$ при $h \rightarrow 0$*

Определение 1. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \supseteq O$ (открытое) $\rightarrow \mathbb{R}$, $g(u) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(u)$ для некоторого i определена в точке a и $\exists \frac{\partial g}{\partial x_j}(a)$ для некоторого j .*

Тогда $f_{x_i x_j} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) := \frac{\partial g}{\partial x_i}(a)$

Определение 2. *$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ - чистая частная производная.*

Определение 3. *$f_{x_i x_j}$, где $i \neq j$, - смешанная производная.*

Теорема 6. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \supseteq O$ (открытое) $\rightarrow \mathbb{R}$, $i \neq j$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ определены и непрерывны в окрестности точки a .*

Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$

Определение 4. *Если $f : \mathbb{R}^n \supseteq O \rightarrow \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^n$, то $d_a^2 f(h) := d(d_a f(h))(h)$*

$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$



$$x = (x_1, \dots, x_m) \quad (y_1, \dots, y_m)$$

$$z = (z_1, \dots, z_n).$$

Primer: 1). $n=1, k=1$

$$f(y_1, \dots, y_m),$$

$$y_i = g_i(x).$$

$$(f \circ g)' = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_m} \right) \cdot \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}$$

$$\frac{d(f \circ g)}{dx}$$

$$(f \circ g)'(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x}$$

$$z'_x = \sum_{i=1}^m \frac{\partial z}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x}$$

$$r(t) = (\text{cost}, \text{sunt}), \quad f(x, y) = x^y$$

$$f' = (y x^{y-1}, x^y \ln x)$$

$$r'(t) = \begin{pmatrix} -\text{sunt} \\ \text{cost} \end{pmatrix}$$

$$f(r(t)) = (\text{cost})^{\text{sunt}}$$

$$\begin{aligned} & \left(f(r(t)) \right)' / \left(e^{\text{sunt} \cdot \text{ln cost}} \right)' = \\ & = (\text{cost})^{\text{sunt}} \left(\text{cost} \cdot \text{ln cost} - \frac{\text{sunt} \cdot \text{cost}}{\text{cost}} \right) \end{aligned}$$

$$\left[f(r(t)) \right]' = (y x^{y-1}, x^y \ln x) \cdot \begin{pmatrix} -\text{sunt} \\ \text{cost} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\text{sunt} \cdot \text{cost}^{\text{sunt}-1}, \text{cost}^{\text{sunt}} \ln \text{cost} \right) \cdot \begin{pmatrix} -\text{sunt} \\ \text{cost} \end{pmatrix} =$$

$$= -\text{sunt}^2 \text{cost}^{\text{sunt}-1} + \text{cost}^{\text{sunt}+1} \ln \text{cost} = \text{cost}^{\text{sunt}} \left(\frac{-\text{sunt}}{\text{cost}} + \text{cost} \ln \text{cost} \right)$$

Numer 2).

$$f(x) ; h(t) = f(a+th), \exists t \text{ such that } t \in [0, 1] \Rightarrow h \text{ graph.}$$

the $[0, 1]$

$x = (x_1, \dots, x_n)$ $a \in \mathbb{O}$,
 $f: \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{R}$ $h \in \mathbb{R}^n$
 $\subseteq \mathbb{R}^n$ $t \in [0, 1]$

$\forall t \quad a+th \in \mathbb{O}$

Дифференцируемая
функция. производная.

$\exists O \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in O$; $f, g: O \rightarrow \mathbb{R}^m$,
онд.

f, g граф. $b \neq a$. $\exists A, B \in \mathbb{R}$,

$$\text{так что (1). } Af + Bg \text{ граф. } b \neq a \text{ и } d_a(Af + Bg) = A d_a f + B d_a g$$

$$(2). \lambda \cdot f \text{ граф. } b \neq a. \quad d_a(\lambda \cdot f) = f(a) \cdot d_a \lambda + \lambda(a) \cdot d_a f \text{ см.}$$

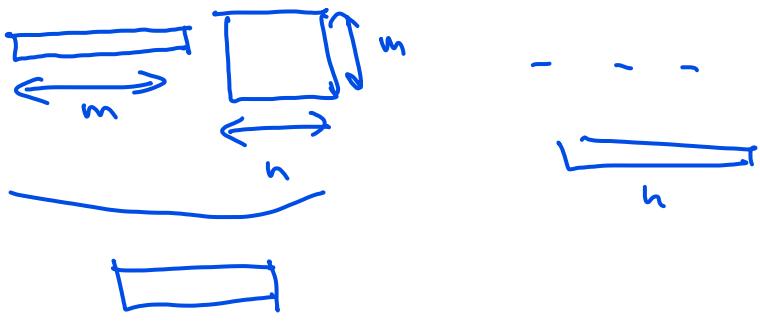
$$\left\{ \begin{array}{l} \forall h \in \mathbb{R}^n \quad d_a(\lambda f)(h) = \underline{f(a) \cdot d_a \lambda(h)} + \\ \qquad \qquad \qquad + \lambda(a) \cdot \underline{d_a f(h)} \end{array} \right. \text{ см. баланс.}$$

$$(\lambda f)' = f(a) \cdot \lambda'(a) + \lambda(a) \cdot f'(a)$$

$$(3) \langle f, g \rangle \text{ граф. } b \neq a \text{ и}$$

$$d_a \langle f, g \rangle = (g(a))^T d_a f + (f(a))^T d_a g$$

$$(\langle f, g \rangle)' = (g(a))^T \cdot f'(a) + f(a)^T \cdot g'(a)$$



(4). Если $m=1$ и $g(a) \neq 0$, то

$$d_a(f/g) = \frac{g(a) d_a f - f(a) d_a g}{g^2(a)},$$

f/g граф. $b \neq a$ и

(1) \Leftrightarrow определение графа и.

(2) Сначала $\forall m=1$.

$$\boxed{(\lambda \cdot f)(a+th) - (\lambda \cdot f)(a)} = (\lambda(a+th)f(a+th) - \lambda(a)f(a+th)) \rightarrow (\lambda(a)f(a+th) - \lambda(a)f(a)) =$$

$$= f(a+th) (\underbrace{\lambda'(a+th)}_{(f(a)+o(1))} + o(h)) + \lambda(a) (d_a f(h) + o(h)) =$$

$$(f(a)+o(1)) \Leftrightarrow f \text{ непр. } b \neq a.$$

$$\underbrace{\left(f(a) \frac{d}{da} \lambda(h) + \lambda(a) \frac{d}{dh} f(h) \right)}_{\text{no norm}} + \underbrace{\left[o(1) \left(\frac{d}{da} \lambda(h) + o(1) \cdot o(h) + \lambda(a) \cdot o(h) \right) \right]}_{o(h) \text{ when } h \rightarrow 0}$$

Woraus: $\lambda \cdot f$ gruoff. B \cap a. $\leq o(1) \cdot \left\| \frac{d}{da} \lambda(h) \right\| \cdot \left\| h \right\|$ before (2)

Eben $m > 1$ $\lambda f = \lambda \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda f_1 \\ \vdots \\ \lambda f_m \end{pmatrix}$ - gruoff.

$$(\lambda f)'(a) = \begin{pmatrix} \lambda(a) \nabla_a f_1 + f_1(a) \nabla_a \lambda \\ \vdots \\ \lambda(a) \nabla_a f_m + f_m(a) \nabla_a \lambda \end{pmatrix} = \lambda(a) \cdot f'(a) + \begin{pmatrix} f_1(a) \nabla_a \lambda \\ \vdots \\ f_m(a) \nabla_a \lambda \end{pmatrix}$$
 $\lambda'(a)$ $\nabla_a \lambda$ cramley

(3). f, g gruoff B \cap a. $\Rightarrow \forall i=1, \dots, m \quad f_i \cdot g_i$ gruoff. no (2).

$$(f_i \cdot g_i)' = g_i(a) \nabla_a f_i + f_i(a) \nabla_a g_i$$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^m f_i \cdot g_i$$
 gruoff:

$$\langle f, g \rangle' = \sum_{i=1}^m (f_i, g_i)' =$$

$$= \sum_{i=1}^m \left(g_i(a) \nabla_a f_i + f_i(a) \nabla_a g_i \right)$$

$$g^T(a) \cdot f'(a) = (g_1(a), \dots, g_m(a)) \begin{pmatrix} \nabla_a f_1 \\ \vdots \\ \nabla_a f_m \end{pmatrix} \quad \parallel$$

$$g^T(a) f'(a) + f^T(a) \cdot g'(a)$$

4). $f/g = f \cdot \frac{1}{g}$

$$\frac{1}{g} = \varphi \circ g \quad d\left(\frac{1}{g}\right) = d\varphi \circ dg = \varphi'(g(t)) \cdot dg = -\frac{1}{g^2(t)} dg$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{t}$$

$$d\left(\frac{1}{g}\right) = \frac{1}{g} df + f d\left(\frac{1}{g}\right) = \frac{1}{g} df + f \left(-\frac{1}{g^2(t)} dg\right)$$

Teor. Наряду с теоремой о непрерывности.

$\exists O \subseteq \mathbb{R}^n$; $f: O \rightarrow \mathbb{R}^m$, f гладк. в O , $a, b \in O$, $\forall t \in (0, 1)$ $a + t(b-a) \in O$

доп. $\exists \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$: $\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(a + t(b-a))\| \cdot \|b - a\|$

Зам. $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T$
 $t \in [0, 2\pi]$, $a = 0$, $b = 2\pi$
 $\gamma(0) = \gamma(b)$

Более того, т.е. для $n=1$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T$
 $t \in [0, 2\pi]$, $a = 0$, $b = 2\pi$
 $\|f(b) - f(a)\| = \|f'(a + t(b-a))\| \cdot \|b - a\|$

Доказ.

$$\varphi(x) = \langle f(x) - f(a), f(b) - f(a) \rangle$$

$$\varphi: O \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi(a) = 0, \quad \varphi(b) = \|f(b) - f(a)\|^2$$

$$\varphi(t) = \varphi(a + t(b-a)) - \text{гладк. } \varphi \text{ на } [0, 1], \quad \varphi(0) = \varphi(a) = 0$$

$$\varphi(1) = \varphi(b) = \|f(b) - f(a)\|^2$$

Но классическая теор. Наряду (не для общих функций неявно)

$$\exists \theta \in (0, 1): \quad \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t)(1-0) = \varphi'(t)$$

$$\|f(b) - f(a)\|^2 = \varphi'(a + \theta(b-a)) \cdot (b-a)$$

$$\varphi'(x) = \langle f(x) - f(a), f(b) - f(a) \rangle_x = \langle f(x) - f(a), f(a)^T \cdot (f(b) - f(a)) \rangle = f'(x)$$

$$\|\varphi'(a + \theta(b-a))\| \leq \|f(b) - f(a)\| \cdot \|f'(a + \theta(b-a))\|$$

$$\|f(b) - f(a)\|^2 \leq \|f(b) - f(a)\| \cdot \|f'(a + \theta(b-a))\| \cdot \|b - a\|$$

Однозначно: 1) $\forall x \in O$ $\exists \theta \in (0, 1)$ $\|f'(a + \theta(b-a))\| \leq M$

$$\Rightarrow \|f(b) - f(a)\| \leq M \|b - a\|,$$

т.е. f локально ограничена в O $\|f'(x)\| \leq M$, т.е. f непрерывна в O .

2) локально ограничен: $\exists M \in \mathbb{R}: \forall x_i \in O \quad \forall i=1..n$

$$\|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\| \leq M, \quad m=1, \quad \Rightarrow \|f(b) - f(a)\| \leq M \sum_{i=1}^n \|b_i - a_i\|$$

Teor. (ограниченность гладких функций).

$\exists O \subseteq \mathbb{R}^n$; $f: O \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in O$; $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ определены в некоторой окр. a .

1) $\exists M \in \mathbb{R}: \forall x \in O \quad \|f(x)\| \leq M$.
 2) $\exists M \in \mathbb{R}: \forall x \in O \quad \|f(x) - f(a)\| \leq M \|x - a\|$.

Dok-Bo. \exists $a \in \mathbb{R}$ $f'(a)$ omeigena

$$f\text{-graf. } b \approx a \iff f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h = o(h) \text{ upm } h \rightarrow 0$$
$$\frac{1}{|h|} (f(a+h) - f(a) - f'(a)h) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0$$

$$\nabla g(\theta) = f(a+h) - f'(a) \cdot h - \text{graff.-b ome. } 0$$

$$c = g(h) - g(0) \Rightarrow \|g(h) - g(0)\| \leq \|g'(0h)\| \cdot \|h\|$$

$$f(a+h) - f(a) - f'(a)h \quad g'(h) = f'(a+h) - f'(a) \quad \text{upm } h \rightarrow 0$$
$$g'(0h) = f'(a+0h) - f'(a) \quad \text{upm } h \rightarrow 0$$

$$f'(x) = \begin{array}{c} f'_{x_1}, \dots, f'_{x_n} \\ \vdots \\ f'_{x_1}, \dots, f'_{x_n} \end{array}$$

Производные в частных производных
 $O \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: O \rightarrow \mathbb{R}$.

$$g(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ опр. бояр. Т.а} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \quad \text{т.о. } \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

и аналогично для производных порядка выше 2.
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ - чисто числ. производ.

если $i \neq j$, то $f''_{x_i x_j}$ - смешанное производное

$$1). \quad f(x,y) = x^y \\ x > 0, y > 0$$

$$\begin{aligned} f'_x &= y x^{y-1}, & f'_y &= x^y \ln x, \\ f''_{xx} &= y(y-1)x^{y-2}; & f''_{xy} &= x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \ln x; \\ f''_{yx} &= yx^{y-1} \ln x + x^y \cdot \frac{1}{x}; & f''_{yy} &= x^y \ln^2 x \end{aligned}$$

$$2). \quad f(x,y) = xy \underbrace{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}_{\text{д.н.}}; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow 0} f(x,y) = 0, \quad f(0,0) = 0.$$

опр. 1

$$f'_x(0,0) = 0 \Rightarrow f'_y = 0.$$

$$(x,y) \neq (0,0) \quad \Rightarrow f'_x = y \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + x \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right)' \right)$$

$$= \frac{y}{(x^2+y^2)^2} \left((x^2-y^2)(x^2+y^2) + 4x^2y^2 \right) = \frac{y}{(x^2+y^2)^2} \cdot (x^4-y^4+4x^2y^2)$$

$$f'_y = -\frac{x}{(x^2+y^2)^2} (y^4-x^4+4x^2y^2)$$

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{y}{(x^2+y^2)^2} \cdot (-y^4+0)}{y} = -1$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'_y(x,0) - f'_y(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\frac{x}{(x^2+y^2)^2} (-x^4)}{x} = 1$$

3) $O \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: O \rightarrow \mathbb{R}$, $ij \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$.

4) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ опр. и тврд. в окрестности Т.а.

$$1 \quad \text{Т.о. } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

Док-во 1). Н.Ч.О. $n=2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$

$\forall \epsilon \in B(0)$: $f''_{xy}, f''_{yx} \in C(B(0))$.

$$\Delta(x,y) = f(x,y) - f(x_0) - \underbrace{(f(x_0,y) - f(0,y))}_{\text{Функ. } g} = f(x) - f(0)$$

$$\forall \epsilon \in B(0): f(x) = f(x,y) - f(x_0)$$

по теор. Нарожка но f в x_0 :

$$f(x) - f(0) = f'(x_0) \cdot x = \left(f'_x(x_0) - f'_x(x_0) \right) \cdot x$$

$$\varphi(y) = f'_x(x_0, y)$$

непр. в x_0

$$f(y) - f(0)$$

$$f'_y(y_0) \cdot y = -f''_{xy}(x_0, y)$$

$\forall \epsilon$ непр. в y_0

$$\Delta = f''_{xy}(x_0, y_0) \cdot xy$$

$$\frac{\Delta}{xy} \xrightarrow[(x,y) \rightarrow 0]{} f''_{xy}(0,0) \cdot \frac{xy}{xy}$$

Поменяв группировку в Δ и Δ оконч.

$$\frac{\Delta}{xy} \rightarrow f''_{xy}(0,0)$$

$$d_a^2 f(l) = d(d_a f(l))(l)$$

$l \in R^n$

$$f: O \rightarrow R$$

Реко же функц. с
одной переменной,
сопоставленной
координатам

$$f(x,y) = x^2 - y^2 + 4xy$$

$$df = d(x^2) - dy^2 + 4d(xy) = 2x dx - 2y dy + 4(y dx + x dy)$$

$$d^2 f = d(2x dx - 2y dy + 4(y dx + x dy)) =$$

$$= 2 dx dx - 2 dy dy + 4(dy dx + dx dy) = 2(bx^2 - 2by^2) + 8(dx dy) =$$

$$df \left(\begin{matrix} h_1 \\ h_2 \end{matrix} \right) = 2x h_1 - 2y h_2 + 4(y h_1 + x h_2)$$

$$= 2 f(dx, dy)$$

2-ая неделя

11.09.2023

Определение 1. $r \in \mathbb{Z}_+$, O – открытое в \mathbb{R}^n

Тогда $C^r(O) := \{f: O \rightarrow R : \forall i_1 \dots i_r \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r} \dots \partial x_{i_1}} \in C(O)\}$

Определение 2. $C^\infty(O) := \bigcap_{r \in \mathbb{Z}_+} C^r(O)$

Теорема 1 (О линейном пространстве $C^r(O)$). $C^r(O)$ – линейное пространство. Замкнуто относительно произведения: $f, g \in C^r : f \cdot g \in C^r$

Определение 3. $C^r(O \rightarrow \mathbb{R}^m) := \{f : f_1, \dots, f_m \in C^r(O)\}$

Теорема 2 (Композиция $C^r(O)$). Пусть $\varphi \in C^r(O \rightarrow \tilde{O})$, $f \in C^r(\tilde{O})$.

Тогда $f \circ \varphi \in C^r(O)$

Теорема 3 (О равенстве смешанных производных в классе C^r). Если $f \in C^r(O)$, O – открытое в \mathbb{R}^n , $r \in \mathbb{Z}_+$; $(i_1, i_2, \dots, i_l) \in 2^{\{1, \dots, r\}}$, $l \leq r$, (j_1, \dots, j_l) – перестановка (i_1, \dots, i_l)

Тогда $\frac{\partial^l f}{\partial x_{i_l} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^l f}{\partial x_{j_l} \dots \partial x_{j_1}}$

Определение 4. Мультииндекс – элемент \mathbb{Z}_+^n

$|j| = j_1 + j_2 + \dots + j_n$

$j! = j_1! \cdot j_2! \cdot \dots \cdot j_n!$

$h \in \mathbb{R}^n$, $h^j = h_1^{j_1} \cdot \dots \cdot h_n^{j_n}$

$f(j)(a) = \frac{\partial^{|j|} f}{\partial x_n^{j_n} \dots \partial x_1^{j_1}}(a)$

Лемма 1. Пусть $f \in C^r(O)$, O – открытое в \mathbb{R}^n , $[a, a+h] \subset O$, $g(t) = f(a+th)$.

Тогда $\forall l = 0, \dots, r : g^{(l)}(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n, |j|=l} \frac{l!}{j!} f^{(j)}(a+th) \cdot h^j$

Теорема 4 (Глобальная формула Тейлора(-Лагранжа) для функции нескольких переменных). Если $f \in C^{r+1}(O)$, O – открытое в \mathbb{R}^n , $r \in \mathbb{Z}_+$; $[a, a+h] \subset O$.

Тогда $\exists \theta \in (0, 1) : f(a+h) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n, |j| \leq r} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n, |j|=r+1} \frac{f^{(j)}(a+\theta h)}{j!} h^j$

Следствие 1 (Формула Тейлора-Пеано, локальный вариант формулы Тейлора). Пусть $f \in C^r(O)$, O – открытое в \mathbb{R}^n , $a \in O$.

Тогда $f(a+h) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n, |j| \leq r} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + o(|h|^r)$ при $h \rightarrow 0$

Следствие 2 (Теорема Лагранжа о среднем для скалярно-значных отображений). Пусть $f \in C^1(O)$, O – открытое в \mathbb{R}^n ; $a, h : a+th \in O \forall t \in [0, 1]$.

Тогда $f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\theta h) \cdot h_i = \langle \nabla_{a+\theta h} f, h \rangle$ (частный случай Тейлора для $r=0$).

Следствие 3 (Полиномиальная формула). $(x_1 + \dots + x_n)^r = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n, |j|=r} \frac{r!}{j!} (x_1, \dots, x_n)^j$, при $r \in \mathbb{Z}_+$

Замечание. $d_a^0 f = f(a)$

$d_a^1 f = d_a f$

$d_a^1 f(h) = d_a f(h)$

$d_a^{l+1} f(h) = d_a(d_a^l f(h))(h)$

Лемма 2. Пусть $f \in C^r(O)$, O – открытое в \mathbb{R}^n ; $a, h : a+th \in O \forall t \in [0, 1]$.

Тогда $\forall l = 0, \dots, r : d_{a+th}^l f(h) = g^{(l)}(t)$, где $g(t) = f(a+th)$

Теорема 5 (Формула Тейлора в дифференциалах в условиях теоремы Тейлора-Лагранжа). $f(a+h) = \sum_{l=0}^r \frac{1}{l!} d_a^l f(h) + \frac{d_{a+\theta h}^{l+1} f(h)}{(l+1)!}$

Определение 5. $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in E$.

a называется точкой максимума для f , если существует окрестность $U(a) : f(x) \leq f(a) \forall x \in U(a) \cap E$

Теорема 6 (Необходимое условие экстремума). $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{Int } E$, a - точка экстремума f , f дифференцируема в точке $a \Rightarrow d_a f = 0 \Leftrightarrow \nabla_a f = 0 \Leftrightarrow \forall i \in 1, \dots, n : \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$

Теорема 7. a - точка максимума f , φ непрерывна в точке α , $\varphi(\alpha) = a$.

Тогда α - точка максимума $f \circ \varphi$

Замечание. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} h_i h_j$ - квадратичная форма.

$d_a^2 f(h)$ - квадратичная форма переменных h_1, \dots, h_n .

$d_a^l f(h)$ - однородная функция степени l : $d_a^l f(Ch) = C^l d_a^l f(h)$.

Форма $Q(h)$ бывает положительно определенной, отрицательно определенной, неопределенной (бывает и положительной, и отрицательной).

Теорема 8 (Достаточное условие экстремума). $f : \mathbb{R}^n \supseteq E \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{Int } E$, в точке a выполняется необходимое условие экстремума и $\exists d_a^2 f$.

$Q(h) := d_a^2 f(h)$. Тогда, если $Q > 0$, то a - точка минимума, если $Q < 0$, то a - точка максимума, если Q неопределенная, то a - не точка экстремума.

Исправление: усажетелеси
гостя воров члены групп.

$f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$; $E \subseteq \mathbb{R}^n$ а $\in \text{Int } E$,
1) оп. $U(a)$: $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ определены в $U(a)$
2) $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ непр. в a .

Также f гладк. в a .

док-во. Т.к. $m=1$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \end{pmatrix}, \dots$$

$$df(h) = \begin{pmatrix} df_1(h) \\ \vdots \\ df_m(h) \end{pmatrix} \quad \text{если } f_1, \dots, f_m \text{ гладк., т.о. } f \text{ гладк.}$$

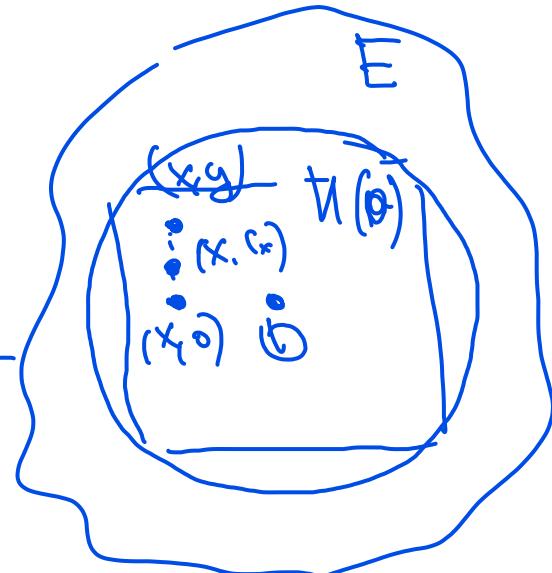
Равнодел сущест $n=2$, $a=0$
 $f(x,y) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (x,y) \rangle = o(\|h\|)$ \Leftrightarrow f гладк.
 $h=(x,y)$ при $h \rightarrow 0$ в $b \in (0,0)$.

$\Delta \Downarrow$

$$\frac{\Delta}{\|h\|} \rightarrow 0$$

$\exists \delta > 0$: $(-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta) \subset U(0)$

$$\Delta = (f(x,y) - f(x,0)) + (f(x,0) - f(0,0)) - \langle \nabla f(0,0), (x,y) \rangle =$$



Фиксир. x $\varphi(y) = f(x,y)$

$$f(x,y) - f(x,0) = \varphi(y) - \varphi(0)$$

φ гладк. на $(-\delta, \delta)$

$$\varphi'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

но определен не

no krásen. Teor. Lávapamza \Leftrightarrow ex. meny o, y

$$\varphi(y) - \varphi(0) = \varphi'(c_x)(y-0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, c_x) \cdot y$$

$\varphi(x) = f(x, 0)$, $\varphi'(x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, 0)$ - ouphy. re $(-\delta, \delta)$

$\Rightarrow \exists c_y$, new. meny o, x :

$$\text{Teor. Lávap. } \varphi(x) - \varphi(0) = \varphi'(c_y) \cdot x$$

$$f(x, 0) - f(0, 0)$$

$$\frac{\Delta(x, y)}{\|(x, y)\|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, c_x) y + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) x - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \cdot x - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \cdot y \right)$$

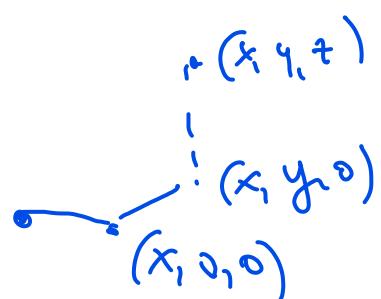
$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(c_y, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right) x + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, c_x) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) y$$

\downarrow exp. $\quad \downarrow$ exp.

$\frac{\partial f}{\partial x}$ kap. bř. p. \quad 0 \quad 0

T. z. - Secu. novel

Cvycan $n > 2$ u $a \in E$ - ananomum.



Ecmu $f(x, y) : O \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 b exp. r. a $\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$
 u tresp. $b \neq a$, TO
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial y_j \partial x_i} \text{ tresp.}$$

b \neq a.

$r \in \mathbb{Z}_+$, O -откр в \mathbb{R}^n

$$C^r(O) = \left\{ f: O \rightarrow \mathbb{R} : \forall i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\} \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r} \cdots \partial x_{i_1}} \in C(O) \right\}$$

$$C^\infty(O) = \bigcap_{r \in \mathbb{Z}_+} C^r(O)$$

$C^r(O)$ -нен-липс-б.;
 $f, g \in C^r(O)$, $\text{тогда } fg \in C^r(O)$

2). $f, g \in C^r$

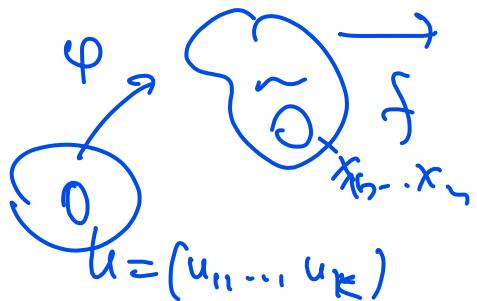
$$\frac{\partial}{\partial x_i} (fg) = g \frac{\partial f}{\partial x_i} + f \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

3). $C^r(O \rightarrow \mathbb{R}^n) = \{f: f_1, \dots, f_n \in C^r(O)\}$

$\varphi \in C^r(O)$, $\varphi(O) \subseteq \tilde{O}$, $\forall f \in C^r(\tilde{O})$

$f \circ \varphi \in C^r(\tilde{O})$

$$\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \in C^{r_u} C^{r_\varphi}$$



В частности, $f \in C^r_{(x)}$, $g(t) = f(a+th)$

a, h -фикср.

$$g = f \circ \varphi, \quad \varphi: t \rightarrow a+th \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$g \in C^r(\text{Окреm. } O)$.

Теорема о гладкости вида C^r .
 Доказательство вида

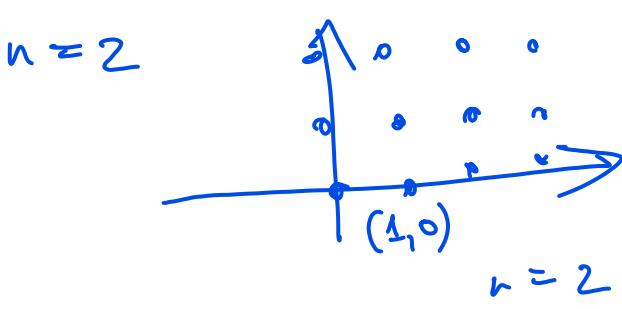
Если $f \in C^r(O)$, $O \subseteq \mathbb{R}^n$; $r \in \mathbb{Z}_+$
 отм.

$i_1, i_2, \dots, i_r, \quad r \leq r, \quad (j_1, \dots, j_r)$ нумерации
 $\in \{1, \dots, n\}$ вида (i_1, \dots, i_r)

$\forall a \in O$,

$$\text{так } \frac{\partial^r f(a)}{\partial x_{i_r} \cdots \partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_{j_r} \cdots \partial x_{j_1}}(a)$$

Megjelöljük az \mathbb{Z}_+^n minden tagját a $j = (j_1, \dots, j_n)$ formában, ahol $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{Z}_+$.



$$|j| = j_1 + j_2 + \dots + j_n$$

$$j! = j_1! \cdot \dots \cdot j_n!$$

$$h \in \mathbb{R}^n, \quad h^j = h_1^{j_1} \cdot \dots \cdot h_n^{j_n}$$

$$(h_1, \dots, h_n)$$

$$f^{(j)}(a) = \frac{\partial^{|j|} f}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_n}}(a).$$

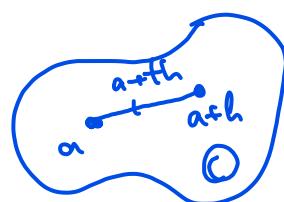
Tétel: $f: O \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, a+th] \subset O$

$$f \in C^r(O) \quad g(t) = f(a+th)$$

Tegyük fel, hogy

$$g^{(l)}(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{l!}{j!} f^{(j)}(a+th) \cdot h^j$$

$$|j|=l$$



Ha $l=0$, akkor $g^{(0)}(t) = g(t) = f(a+th)$.

$$l=1, \quad \text{n.m.} \quad g^{(1)}(t) = g'(t) = f'(a+th) \quad \text{n.m.} \quad f^{(1)}(a+th) = f'(a+th)$$

(Számos esetben,

$$l \rightarrow l+1 \quad \text{meggyez.} \quad g^{(l+1)}(t) = (g^{(l)}(t))' \quad \text{meggyez.}$$

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{l!}{j!} \binom{f^{(j)}(a+th) \cdot h^j}{t} = \sum_{|j|=l} \frac{l!}{j!} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f^{(j)}}{\partial x_i}(a+th) \cdot h_i \right)$$

$$m(x) = f^{(j)}(x) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial m}{\partial x_i} \cdot h_i$$

$$(m(a+th))' = \sum_{i=1}^n \frac{\partial m}{\partial x_i} \cdot h_i$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{e_i!}{\prod_{j=1}^{l+1} e_j!} \sum_{P \in \mathbb{Z}_+^n} f^{(P)}(a+th) h^{(j+e_i)} P_i$$

$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$; $\parallel j+e_i = p \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\sum_{e \in \mathbb{Z}_+^n} \sum_{i=1}^n \frac{e_i!}{P_i!} \left(\sum_{P \in \mathbb{Z}_+^n} f^{(P)}(a+th) h^P \cdot P_i \right) =$$

$|P| = l+1$
 ~~$P_i \neq 0$~~

$P_i = j! \cdot p_i$
 $(p_i = j_1 + 1)$

$$= \sum_{\substack{P \in \mathbb{Z}_+^n \\ |P|=l+1}} \frac{e!}{P!} \left(\sum_{i=1}^n p_i \right) \cdot f^{(P)}(a+th) \cdot h^P$$

$|P| = l+1$

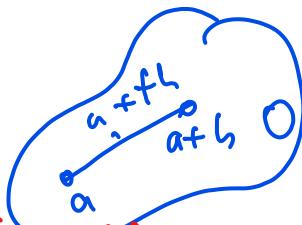
$$\frac{(l+1)!}{P!}$$

Teor (недостаточная
доказательства Тейоретик
согласно Фундаментальному
теореме неизвестных
 $O \subseteq \mathbb{R}^n$; $f \in C^{l+1}(O)$
они:

$$r \in \mathbb{Z}_+$$

$$\exists a, h : \forall t \in [0, 1] \quad a+th \in O$$

$$\text{Так} \rightarrow \theta \in (0, 1):$$

$$f(a+h) = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+^n \\ |j| \leq r}} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+^n \\ |j| = r+1}} \frac{f^{(j)}(a+\theta h)}{j!} h^j$$


$$f(a+h) = g(1) = \sum_{l=0}^r \frac{g^{(l)}(0)}{l!} (1-0)^l + \frac{g^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!} (1-0)^{r+1}$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{g=f(a+h)}$

$\in C^\infty$

$$\sum_{l=0}^r \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+ \\ |j|=l}} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+ \\ |j|=l+1}} \frac{f^{(j)}(a+\theta h)}{j!} h^j$$

Теор. (формула Тейлора-Пeano, доказательство варинт ф-ии).

\exists 0-окр, $O \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in C^r(O)$, $a \in O$ Тейлор.

Так

$$f(a+h) = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+ \\ |j| \leq r}} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + o(||h||^r)$$

↑
нпр
 $h \rightarrow 0$

$\frac{d}{dh} \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j \Big|_{h=0} = 0$

Доказ.

по теор. Тейлора - 1 аргумент

$$f(a+h) = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+ \\ |j| \leq r-1}} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+ \\ |j|=r}} \frac{f^{(j)}(a+\theta h)}{j!} h^j,$$

$\theta \in (0, 1)$.

$$= \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+ \\ |j| \leq r}} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+ \\ |j|=r}} \left(\frac{f^{(j)}(a+\theta h)}{j!} h^j - \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j \right)$$

$\sqrt{\sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{f^{(j)}(a+\theta h)}{j!} h^j - \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j \right)^2} = O(||h||^r)$

$$\|h\| = \|h_1\| \cdots \|h_n\|^{\eta} \leq \|h\|^{\eta_1 + \dots + \eta_n} = \|h\|^{\eta}$$

$\mathcal{O}(Nh^{\eta})$

Czynst. Teor. Nanfanga o cęgach sie
ciągiem - graniczącym skup.

$f \in C^1(\Omega)$, Ω -skup; ciąg w Ω na $\theta \in [0, 1]$, tzn

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\theta h) \cdot h_i = \langle \nabla f_a, h \rangle$$

(zawiera dowód granicy dla Teoremu dla $r=0$).

Czynst. 3. Normowane rozwijanie.

$$(x_1 + \dots + x_m)^r = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+^n \\ |j|=r}} \frac{r!}{j!} (x_1^{j_1} \cdots x_m^{j_m})$$

$x_1^{j_1} \cdots x_m^{j_m}$

Dowód. $f(x) = (x_1 + \dots + x_m)^r$

$$f'_{x_i}(x) = r (x_1 + \dots + x_m)^{r-1} = r \cdot f_{r-1}$$

$$f''_{x_i x_j} = r(r-1) f_{r-2}; \quad j \in \mathbb{Z}_+ \quad |j| \leq r$$

$$f^{(j)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{dla } |j| < r \\ r!, & |j|=r \\ 0, & |j| > r \end{cases}; \quad f^{(j)}(x) = 0$$

Na fine Teorema - Nanfanga

$$f_r(x) = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+^n \\ |j| \leq r}} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j +$$

$$\sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+^n \\ |j|=r+1}} \frac{f^{(j)}(\theta x)}{j!} x^j =$$

$\theta \in (0, 1)$

$$= \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+ \\ |j|=r}} \frac{\frac{1}{j!} f^{(j)}(a)}{l^j} l^j \quad h = x - a$$

Hier zeigen wir nun eine Teilung für $n=2$

$$\begin{aligned} T_n f(l) &= \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+ \\ |j| \leq r}} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} l^j = \sum_{i=0}^n \sum_{\substack{j_1, j_2 \\ j=(j_1, j_2) \\ |j|=i}} l^j = \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \sum_{\substack{j_1, j_2 \\ j=(j_1, j_2) \\ |j|=i}} \frac{e!}{j_1! (i-j_1)!} \frac{\partial^i f}{\partial x_2^{i-j_1} \partial x_1^{j_1}}(a) l_1^{j_1} l_2^{i-j_1} \\ &\quad \text{C}_i \end{aligned}$$

$$d_a^0 f = f(a); \quad d_a^1 f = d_a f,$$

$$d_a^1 f(l) = d_a f(l)$$

$$d_a^{l+1} f(l) = d_a F(l), \quad \left. \right\} d_a (d_a^l f(l))|_l$$

$$\text{ye } F(a) = d_a^l f(l)$$

Lemma 2. $f \in C^r(O)$, $a, h: a+th \in O$.
 $\forall t \in [0, 1]$

$$\text{If } l=0, \dots, r$$

$$d_{a+th}^l f(l) = g^{(l)}(t), \quad \text{ye } g(t) = f(a+th)$$

Dann ist f unstetig, no l.
 npr $l=0$ $\wedge \forall i = f(a+th) \neq a+q$.

Neprolog or $l < l+1$

$$d_{a+th}^{l+1} f(l) = d_{a+th}^l F(l) = d_{a+th} g^{(l)}(t)(l) =$$

$$F(a+th) \leftarrow d_{a+th}^l f(l) = \underbrace{g^{(l)}(t)}_{\substack{\text{Unter} \\ \text{upr}}} = u(t)$$

$$= d_{a+th} u(t)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{u.a. } d_{a+th}^2 f(l) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th) \cdot l_i : \\ \text{u.p. } u' = g'(t) = (f(a+th))'_t \end{array} \right.$$

$$d_{a+th} f(l) = f(a+th)_t'$$

$$d_{a+th}^{l+1} f(l) = d_{a+th}^l \left(d_{a+th}^l f(l) \right)(l) = (J(a+th))_t' =$$

$$= (g^{(l)}(t))'_t = g^{(l+1)}(t).$$

$$d_{a+th}^l f(l) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \frac{l!}{j!} f^{(j)}(a+th) \cdot l^j$$

$|j| = l$

die Teilweise der größte Teilweise
genau rezip. Teilweise - Ausprägung

$$f(a+th) = \sum_{l=0}^r \frac{1}{l!} d_a^l f(l) + \frac{d_{a+th}^{(l+1)} f}{(l+1)!}(l)$$

die Teilweise die die die die
größte Teilweise die die die die

Freeze Freeze Freeze Freeze Freeze
Freeze Freeze Freeze Freeze Freeze

Ouf. If: $E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $\exists a \in E$. a ist ein out. u(a):

$$f(x) \leq f(a)$$

$$\forall x \in U(a) \wedge x \neq a \Rightarrow f(x) < f(a)$$

$$f(x) > f(a)$$

$$\forall x \in U(a) \wedge x \neq a \Rightarrow f(x) > f(a)$$

Приимер: $f(x) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ исследовать

на экст.

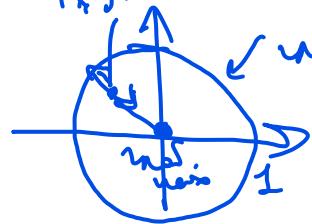
$$f(x) = \sqrt{1 - r^2(x,y)}$$

$$r(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

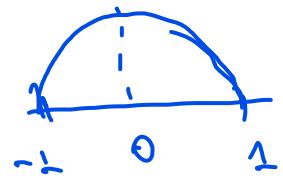
$$\text{нек. макс. } f \Leftrightarrow r=0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

$$(x,y) : x^2 + y^2 = 1 - r \cdot \text{нек. мин.}$$

граница трех зон экст.



Неко
нек. макс.
нек. мин.



$$g(r) = \sqrt{1 - r^2}$$

$\exists f: E \rightarrow \mathbb{R}; a \in \text{Int } E, a - \text{т. экст. функ. } f$
 $f \text{ гладк. в } a. \Rightarrow \nabla_a f = 0 \Leftrightarrow \nabla f = 0$

т. экст.
 \int
 $\tau \text{ макс. мин.}$

д-бо $a \in \text{Int } E \Rightarrow \exists \delta > 0:$
 $\exists (a) \subset E \quad \forall h: \|h\| < \delta$
 $g(t) = f(a+th)$
 $\Rightarrow a - \text{т. мин.} \Rightarrow$

если g т. д. т. мин.

но g гладк. в 0,

$$\Rightarrow g'(0) = 0 = \langle \nabla_a f, h \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \nabla_a f = 0.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0 \end{array} \right.$$

$f \circ \varphi = h(x), \exists a -$
 $\text{т. мин. (макс.) } f$
 $\varphi \text{ гладк. в } a \Rightarrow \varphi'(a) = 1$
 $\Rightarrow a - \text{т. макс. } f \circ \varphi$

$\tau. u. a - \text{т. мин. } f$
 $\exists \text{ окр. } U(a): \forall x \in U \cap E$
 $f(x) > f(a), \varphi \text{ гладк. в } U \cap E$
 $\exists \text{ окр. } V \subset U$
 $\varphi(V) \subset U$
 $f \circ \varphi(v) > f(a) = f \circ \varphi(a)$
 $v \in V$

4-ая неделя

25.09.2023

Билет 11 (Теорема о непрерывности функции, заданной неявно). Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $I = [a, b] \subseteq R$, $X \times I \subseteq O$; $F : O \rightarrow R$ непрерывно и $\forall x \in X : F(x, a) \cdot F(x, b) < 0$, $F(x, y) = \varphi_x(y)$ строго монотонна на $[a, b]$.

Тогда $\exists! f : x \mapsto y, f : X \rightarrow I$ такая, что

1. $\forall x \in X : F(x, f(x)) = 0$
2. $\forall X \times I : F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$
3. $f \in C(X)$

Билет 12 (Теорема о гладкости функции, заданной неявно). Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $I = [a, b] \subseteq R$, $X \times I \subseteq O$; $F : O \rightarrow R$, $F \in C^1(O)$; (x^*, y^*) – решение $F(x, y) = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial y}(x^*, y^*) \neq 0$.

Тогда \exists окрестность $U_{x^*} \subseteq \mathbb{R}^n$, окрестность V_{y^*} и $f : U_{x^*} \rightarrow V_{y^*}$ ($x \mapsto y$) такие что:

1. $\forall U_{x^*} \times V_{y^*} : F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$
2. $f \in C^1(U_{x^*})$
3. $f'_{x_i}(x) = -\frac{F'_{x_i}}{F'_y}(x, y)$

Билет 13 (Теорема об открытом отображении в случае равенства размерностей образов и прообразов). Пусть $\Phi : \mathbb{R}^n \supseteq O \rightarrow \mathbb{R}^m$, Φ' обратима всюду в O .

Тогда Φ – открытое отображение (то есть $\forall U$ открытого в O $\Phi(U)$ открыто).

Билет 13 (Лемма об оценке снизу приращения отображения с обратимым дифференциалом). Пусть $F : \mathbb{R}^n \supseteq O \rightarrow \mathbb{R}^n$, F дифференцируема в a и $F'(a)$ обратима.

Тогда $\exists \delta > 0, c > 0 : \forall x \in U_\delta(a) : \|F(x) - F(a)\| \geq c\|x - a\|$.

Билет 14 (Теорема об открытом отображении в общем случае). Пусть $\Phi : \mathbb{R}^n \supseteq O \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \leq n$, $\text{rang } \Phi'$ максимальен всюду в O ($= m$).

Тогда Φ – открытое отображение.

Билет 25. Понятие и равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Элементарные свойства равномерной сходимости

Билет 25 (Характеристика равномерной сходимости посредством чебышевской нормы). $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ (или \mathbb{C}), $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Если f ограничена на X , то $\|f\| < +\infty$. При $t \geq 0$ $\|tf\| = \sup_{x \in X} |t||f(x)|$. $\forall x \in X : |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\| \Rightarrow \|f + g\| = \sup_{x \in X} |f(x) + g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$.

Таким образом, $\|\cdot\|$ является нормой на совокупности функций на X .

Пусть $f_k, f : E \rightarrow \mathbb{C}$. Тогда $f_k \rightrightarrows f \Leftrightarrow \|f_k - f\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$.

Билет 25 (Критерий Коши равномерной сходимости для последовательностей). Пусть $f_k, f : E \rightarrow \mathbb{C}$.

Тогда $f_k \rightrightarrows f$ на $E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N \ \forall x \in E : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Билет 25 (Критерий Коши равномерной сходимости для рядов). Пусть $f_k : E \rightarrow \mathbb{C}$.

Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на $E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \geq N \ \forall p \in \mathbb{Z}_+ \ \forall x \in E : |\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x)| < \varepsilon$.

Билет 25 (Необходимое условие равномерной сходимости). Следствие из критерия.

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на $E \Rightarrow f_k(x) \rightrightarrows 0$ на E .

Билет 26 (Равномерная сходимость при действиях над множествами. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда). Пусть $f_n : E \rightarrow \mathbb{C}$.

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty}$ сходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на E .

Билет 27 (Признак Дирихле равномерной сходимости рядов). Пусть $f_n : E \rightarrow \mathbb{C}$, $g_n : E \rightarrow \mathbb{R}$.
Если

1. $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ относительно $x \in E$ равномерно ограничен на E ($\exists C : \forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in E \ |\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)| \leq C$)
2. $\forall x \in E \ g_n(x)$ монотонная
3. $g_n \rightharpoonup 0$ на E

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ сходится равномерно на E .

Билет 27 (Признак Абеля равномерной сходимости рядов). Пусть $f_n : E \rightarrow \mathbb{C}$, $g_n : E \rightarrow \mathbb{R}$.
Если

1. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на E
2. $\forall x \in E \ g_n(x)$ монотонная
3. $g_n(x)$ равномерно по x ограничено на E .

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ сходится равномерно на E .

Билет 27 ((с леммой) (взято у Кости Баца)). Если $b_k(x)$ монотонно зависит от k при любом x , то
 $|\sum_{k=n}^m a_k(x)b_k(x)| \leq 4 \cdot \max_{k=n:m} |A_k(x)| \cdot \max\{|b_n(x)|, |b_m(x)|\}$.

5-ая неделя

2.10.2023

Билет 15 (Теорема о дифференцируемости обратного отображения). Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \text{Int}E$, $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Phi(a) = b \in \text{Int}\Phi(E)$, Φ дифференцируема в a , $\Phi'(a)$ обратима ($\det \Phi'(a) \neq 0$).

Тогда Φ^{-1} дифференцируема в b и $(\Phi^{-1})'(b) = (\Phi'(a))^{-1}$

Билет 16 (Теорема о гладкости обратного отображения (достаточное условие диффеоморфности)). O, \tilde{O} открыты, $\Phi : O \rightarrow \tilde{O}$ - диффеоморфизм на $C^r \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} \Phi$ обратима и $\Phi \in C^r(O \rightarrow \tilde{O})$, $\Phi^{-1} \in C^r(\tilde{O} \rightarrow O)$.

Если O - открытое, $O \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Phi \in C^r(O \rightarrow \mathbb{R}^n)$, Φ обратимо (как отображение на свой образ) и $\det \Phi'(x) \neq 0$ всюду в O .

Тогда $\Phi^{-1} \in C^r(\Phi(O) \rightarrow O)$ ($\forall x \in O(\Phi^{-1})(\Phi(x)) = (\Phi'(x))^{-1}$)

Билет 17 (Теорема о локальной обратимости регулярного отображения). $\Phi : \mathbb{R}^n \supseteq O \rightarrow \mathbb{R}^n$, O открытое; Φ регулярное $\stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} \Phi \in C^1(O \rightarrow \mathbb{R}^n)$, $\text{rank } \Phi'(x)$ максимальной в каждой точке O .

Пусть $\mathbb{R}^n \supseteq O$ открытое, $\Phi \in C^r(O \rightarrow \mathbb{R}^n)$, Φ регулярно в O .

Тогда $\forall a \in O \exists$ окрестность $U_a : \Phi|_{U_a}$ - диффеоморфизм класса C^r , в частности обратимо.

Билет 18 (Теорема о неявном отображении). Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^{n+m} \supseteq O$ открытое, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $y^0 \in \mathbb{R}^m$, $F \in C^r(O \rightarrow \mathbb{R}^m)$ и F' обратима.

Тогда \exists окрестности U_{x^0}, U_{y^0} и $f : U_{x^0} \rightarrow U_{y^0}$ такие, что:

1. $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$ в $U_{x^0} \times U_{y^0}$
2. $f \in C^r(U_{x^0} \rightarrow U_{y^0})$
3. $f'(x) = -(F'_y(x, f(x)))^{-1} \cdot F'_x(x, f(x))$

Билет 27 ((с леммой) (версия по лекции)). $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ равномерно сходится на E , $\varphi(x)$ ограничен на $E \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(x) f_k(x)$ равномерно сходится на E

Билет 28 (Примеры исследования рядов на равномерную сходимость).

Теорема (Признак Лейбница равномерной сходимости). *Skipped*

Теорема (Признак равномерной сходимости для монотонных последовательностей). *Skipped*

Билет 29 (Перестановка пределов для последовательностей). Пусть $E \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in E$, $f_n : E \rightarrow \mathbb{C}$, $f_n(x)$ равномерно сходится на E , $\forall k \in \mathbb{N} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) \in \mathbb{R}$.

Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x)$, оба предела существуют в \mathbb{R} .

Следствие 1. *Skipped*

Teofera o reebrou
 $m, n \in \mathbb{N}$, $O \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$; $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $r \in \mathbb{N}$
 $\exists F \in C^r(O \rightarrow \mathbb{R})$ $\exists x^o = (x_1^o, \dots, x_m^o)$, $y^o = (y_1^o, \dots, y_n^o)$:
 i). $F(x^o, y^o) = 0$
 ii). $F'_y(x^o, y^o) \neq 0$, $(F'_y = \frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} F'_{1y_1} & \dots & F'_{1y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F'_{ny_1} & \dots & F'_{ny_m} \end{pmatrix})$
 Tex \exists onp-n $U(x^o), U(y^o)$ u

$f: U(x^o) \rightarrow U(y^o)$:

i). $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$ & $U(x^o) \times U(y^o)$

ii). $f \in C^r(U(x^o) \rightarrow U(y^o))$

iii). $f'(x) = -\left(F'_y(x, f(x))\right)^{-1} \circ F'_x(x, f(x))$

$$F' = \begin{pmatrix} F'_x & | & F'_y \\ \hline \leftrightarrow & & \leftrightarrow \\ n & & m \end{pmatrix} \uparrow m$$

$\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ \hline \underbrace{\quad}_{n-\text{berup.}} & \underbrace{F(x, y)}_{m-\text{berup.}} \end{pmatrix}: O \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix} & | & 0 \\ \hline E_n & & F'_x \quad F'_y \end{pmatrix}$$

$$\det \Phi' = \underbrace{\det E_n}_{n} \cdot \underbrace{\det F'_y}_m \neq 0 \text{ bony } \neq 0.$$

Term

$$(x^o, y^o)$$

No uparyus.

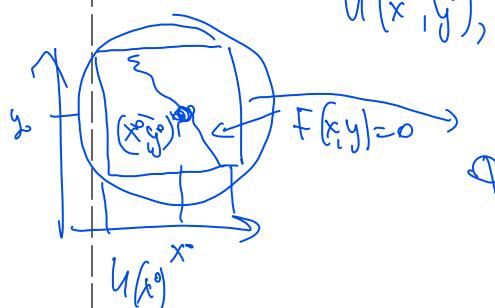
b. opeenam $U(x^o, y^o)$

$$U(x^o, y^o)$$

Φ opeenam, \exists onp. $U(x^o)$, $U(y^o)$: $U(x^o) \times U(y^o) \subseteq$

$U(x^o) \times U(y^o) - \text{opeenam}$)

$$V = \Phi(U(x^o) \times U(y^o)) \quad \forall x \in U(x^o)$$



6-ая неделя

9.10.2023

Билет 29 (Перестановка пределов для рядов). Пусть $f_n : E \rightarrow \mathbb{C}$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на E и $\forall k \in \mathbb{N} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x)$.

Тогда существуют оба и верно $\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$

Билет 30. Следствия теоремы о перестановке пределов, связанные с непрерывностью (взято у Кости Баца, убрано доказательство)

Теорема (Непрерывность в точке для последовательностей). $\square D \subseteq X$ – м.н., $\{f_n\}, f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $f_n \rightrightarrows f$ на D .

Если $\{f_n\}$ непрерывны в точке x_0 , то и f непрерывна в x_0 .

Теорема (Непрерывность в точке для рядов). Пусть X – м.н., $D \subset X$, $x_0 \in D$, $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}$ (или \mathbb{C}) и выполнены следующие условия:

1. ряд $\sum_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится на D к сумме S ;

2. все функции f_k непрерывны в точке x_0 .

Тогда функция S непрерывна в точке x_0 .

Теорема (теорема Стокса-Зейделя). $D \subseteq X$, $f_n, f : D \rightarrow \mathbb{C}$ $f_n \rightrightarrows f$ на D при $n \rightarrow \infty$ и $f_n \in C(D) \Rightarrow f \in C(D)$, то есть равномерный предел последовательности непрерывных функций непрерывен.

Теорема (Аналог теоремы Стокса-Зейделя для рядов). $\square D \subseteq X$ – м.н., $x_0 \in D'$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}, f : D \rightarrow \mathbb{C}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на D .

Если $\forall n f_n(x)$ непрерывна в точке x_0 , то и $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ непрерывно в x_0 .

Билет 32 (Предельный переход под знаком интеграла для последовательностей). Если $f_n \in C[a, b]$, $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$.

Билет 32 (Предельный переход под знаком интеграла для рядов). Если $f_n \in C[a, b]$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится равномерно на $[a, b]$, то $\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$, ряд в правой части сходится.

Билет 33 (Предельный переход под знаком производной для последовательностей). Пусть $f \in C^1([a, b] \rightarrow \mathbb{R})$, $\exists x^0 \in [a, b] : \{f_n(x^0)\}$ сходится при $n \rightarrow \infty$, $\{f'_n(x)\}$ равномерно сходится на $[a, b]$.

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ дифференцируема на $[a, b]$ и $\forall x \in [a, b] (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$.

Билет 33 (Предельный переход под знаком производной для рядов). Пусть $f \in C^1([a, b] \rightarrow \mathbb{R})$, $\exists x^0 \in [a, b] : \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x^0)$ сходится, $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ равномерно сходится на $[a, b]$.

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ дифференцируема на $[a, b]$ и $\forall x \in [a, b] (\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$.

Теорема (Степенные ряды). Skipped

Билет 19 (Параметризации поверхностей, гладкие поверхности уровня, гладкие обобщенные графики).
 $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$, $a \in M$, M допускает параметризацию класса C^r размерности n в окрестности a , если
Эокрестность U_a , гомеоморфизм $\Phi \in C^r(\mathbb{R}^n \supseteq O \rightarrow U_a \cap M)$, Φ регулярное.

$M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$, $a \in M$, M есть множество уровня класса C^r размерности n в окрестности a , если
Эокрестность U_a , $F \in C^r(U_a \rightarrow \mathbb{R}^m)$, F регулярно, $M \cap U_a = \{x \in U_a : F(x) = 0\}$.

$M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$, $a \in M$, M есть обобщенный r -гладкий график размерности n в окрестности a , если
Эокрестность U_a , $f \in C^r(\mathbb{R}^n \supseteq O \rightarrow \mathbb{R}^m) : U_a \cap M = \Gamma_f$ с точностью до перестановки координат.

Билет 19 (Теорема о способах задания k -мерной поверхности). Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$, $a \in M$.

Тогда следующие утверждения равносильны:

1. В окрестности a M - n -мерный C^r -гладкий обобщенный график
2. В окрестности a M - n -мерное C^r -гладкое множество уровня
3. В окрестности a M допускает n -мерную C^r -гладкую параметризацию