1-ая неделя

4.09.2023

Теорема 1 (Необходимое условие дифференцируемости). *Если $f : \mathbb{R}^n \supseteq O \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке a, то $\forall u \in \mathbb{R}^n \, \exists \frac{\partial f}{\partial u}(a)$ (далее показано, что это эквивалентно для частных производных только по x_i).*

Теорема 2 (Дифференциал композиции). *Пусть $g : X \to Y$, $f : Y \to Z$. Тогда если g дифференцируема в точке a и f дифференцируема в точке $g(a)$, то $f \circ g$ дифференцируема в точке a и $d_a(f \circ g) = d_{g(a)}f \cdot d_a g$.*

Или, если рассматривать матрицу Якоби, $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$

Теорема 3 (Дифференцирование результата арифметических действий). *Пусть $O \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in O$; $f, g : O \to \mathbb{R}^m$, $\lambda : O \to R$; f, g, λ дифференцируемы в точке a; $A, B \in \mathbb{R}$.*

Тогда

1. *$Af + Bg$ дифференцируемо в точке a и $d_a(Af + Bg) = Ad_a f + Bd_a g$*
2. *λf дифференцируемо в точке a и $d_a(\lambda f) = f(a) \cdot d_a \lambda + \lambda(a) \cdot d_a f$*
   Или на языке матриц: $(\lambda f)' = f(a) \cdot \lambda'(a) + \lambda(a) \cdot f'(a)$
3. *$\langle f, g\rangle$ дифференцируемо в точке a и $d_a\langle f, g\rangle = (g(a))^T d_a f + (f(a))^T d_a g$*
   $(\langle f, g\rangle)' = (g(a))^T \cdot f'(a) + (f(a))^T \cdot g'(a)$
4. *Если $m = 1$ и $g(a) \neq 0$, то f/g дифференцируемо в точке a и $d_a(f/g) = \frac{g(a)d_a f - f(a)d_a g}{g^2(a)}$*

если g дифференцируема в точке a и f дифференцируема в точке $g(a)$, то $f \circ g$ дифференцируема в точке a и $d_a(f \circ g) = d_{g(a)}f \cdot d_a g$.

Или, если рассматривать матрицу Якоби, $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$

Теорема 4 (Теорема Лагранжа для отображений). *Пусть $f : \mathbb{R}^n \supseteq O$(открытое) $\to \mathbb{R}^m$, f дифференцируемо в O; $a, b \in O$, $\forall t \in (0, 1)$ $a + t(b - a) \in O$.*

Тогда $\exists \theta \in (0, 1) : ||f(b) - f(a)|| \leq ||f'(a + \theta(b - a))|| \cdot ||b - a||$

Следствие 1. *Если $\forall \theta \in (0, 1)$ $||f'(a + \theta(b - a))|| \leq M \in \mathbb{R}$, то $||f(b) - f(a)|| \leq M||(b - a)||$*

Следствие 2. *Если $m = 1$ и $\forall u \in O$ $\forall i = 1..n$ $||\frac{\partial f}{\partial x_i}(u)|| \leq M$, то $||f(b) - f(a)|| \leq M\sqrt{n}||(b - a)||$*

Теорема 5 (Достаточное условие дифференцируемости). *Пусть $f : \mathbb{R}^n \supseteq O$(открытое) $\to \mathbb{R}^m$, $a \in O$; $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $\forall i \in 1..n$ 1) определен в некоторой окрестности точки a 2) непрерывен в точке a*

Тогда f дифференцируема в точке a.

Замечание. *f дифференцируема в точке $a \Leftrightarrow f(a + h) - f(a) - f'(a) \cdot h = o(h)$ при $h \to 0$*

Определение 1. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \supseteq O$(открытое) $\to \mathbb{R}$, $g(u) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(u)$ для некоторого i определена в точке a и $\exists \frac{\partial g}{\partial x_j}(a)$ для некоторого j.*

Тогда $f_{x_i x_j} \coloneqq \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \coloneqq \frac{\partial g}{\partial x_i}(a)$

Определение 2. *$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \coloneqq \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ - чистая частная производная.*

Определение 3. *$f_{x_i x_j}$, где $i \neq j$, - смешанная производная.*

Теорема 6. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \supseteq O$(открытое) $\to \mathbb{R}$, $i \neq j$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ определены и непрерывны в окрестности точка a.*

Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$

Определение 4. *Если $f : \mathbb{R}^n \supseteq O \to \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^n$, то $d_a^2 f(h) \coloneqq d(d_a f(h))(h)$*

2-ая неделя

11.09.2023

Определение 1. *$r \in \mathbb{Z}_+$, O – открытое в $\mathbb{R}^n$*
Тогда $C^r(O) \coloneqq \{f \colon O \to R : \forall i_1 \dots i_r \ \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r} \dots \partial x_{i_1}} \in C(O)\}$

Определение 2. $C^\infty(O) \coloneqq \bigcap\limits_{r \in \mathbb{Z}_+} C^r(O)$

Теорема 1 (О линейном пространстве $C^r(O)$). *$C^r(O)$ - линейное пространство. Замкнуто относительно произведения: $f, g \in C^r : f \cdot g \in C^r$*

Определение 3. $C^r(O \to \mathbb{R}^m) \coloneqq \{f : f_1, \dots f_m \in C^r(O)\}$

Теорема 2 (Композиция $C^r(O)$). *Пусть $\varphi \in C^r(O \to \tilde{O})$, $f \in C^r(\tilde{O})$.*
Тогда $f \circ \varphi \in C^r(O)$

Теорема 3 (О равенстве смешанных производных в классе C^r). *Если $f \in C^r(O)$, O – открытое в $\mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{Z}_+$; $(i_1, i_2, \dots i_l) \in 2^{\{1,\dots,r\}}$, $l \le r$, $(j_1, \dots, j_l)$ – перестановка$(i_1, \dots i_l)$*
Тогда $\frac{\partial^l f}{\partial x_{i_l} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^l f}{\partial x_{j_l} \dots \partial x_{j_1}}$

Определение 4. *Мультииндекс - элемент ${\mathbb{Z}_+}^n$*
$|j| = j_1 + j_2 + \dots + j_n$
$j! = j_1! \cdot j_2! \cdot \dots \cdot j_n!$
$h \in \mathbb{R}^n, h^j = h_1^{j_1} \cdot \dots \cdot h_n^{j_n}$
$f^(j)(a) = \frac{\partial^{|j|} f}{\partial x_n^{j_n} \dots \partial x_1^{j_1}}(a)$

Лемма 1. *Пусть $f \in C^r(O)$, O – открытое в $\mathbb{R}^n$, $[a, a+h] \subset O$, $g(t) = f(a+th)$.*
Тогда $\forall l = 0, \dots, r : g^{(l)}(t) = \sum_{j \in {\mathbb{Z}_+}^n, |j| = l} \frac{l!}{j!} f^{(j)}(a+th) \cdot h^j$

Теорема 4 (Глобальная формула Тейлора(-Лагранжа) для функции нескольких переменных). *Если $f \in C^{r+1}(O)$, O – открытое в $\mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{Z}_+$; $[a, a+h] \subset O$.*
Тогда $\exists \theta \in (0,1) : f(a+h) = \sum_{j \in {\mathbb{Z}_+}^n, |j| \le r} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + \sum_{j \in {\mathbb{Z}_+}^n, |j| = r+1} \frac{f^{(j)}(a+\theta h)}{j!} h^j$

Следствие 1 (Формула Тейлора-Пеано, локальный вариант формулы Тейлора). *Пусть $f \in C^r(O)$, O – открытое в $\mathbb{R}^n$, $a \in O$.*
Тогда $f(a+h) = \sum_{j \in {\mathbb{Z}_+}^n, |j| \le r} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + o(||h||^j)$ при $h \to 0$

Следствие 2 (Теорема Лагранжа о среднем для скалярно-значных отображений). *Пусть $f \in C^1(O)$, O – открытое в $\mathbb{R}^n$; $a, h : a+th \in O \forall t \in [0,1]$.*
Тогда $f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\theta h) \cdot h_i = \langle \nabla_{a+\theta h} f, h \rangle$ (частный случай Тейлора для $r = 0$).

Следствие 3 (Полиномиальная формула). *$(x_1 + \dots + x_n)^r = \sum_{j \in {\mathbb{Z}_+}^n, |j| = r} \frac{r!}{j!}(x_1, \dots, x_n)^j$, при $r \in \mathbb{Z}_+$*

Замечание. $d_a^0 f = f(a)$
$d_a^1 f = d_a f$
$d_a^1 f(h) = d_a f(h)$
$d_a^{l+1} f(h) = d_a(d_a^l f(h))(h)$

Лемма 2. *Пусть $f \in C^r(O)$, O – открытое в $\mathbb{R}^n$; $a, h : a+th \in O \ \forall t \in [0,1]$.*
Тогда $\forall l = 0, \dots, r : d_{a+th}^l f(h) = g^{(l)}(t)$, где $g(t) = f(a+th)$

Теорема 5 (Формула Тейлора в дифференциалах в условиях теоремы Тейлора-Лагранжа). *$f(a+h) = \sum_{l=0}^r \frac{1}{l!} d_a^l f(h) + \frac{d_{a+\theta h}^{l+1} f}{(l+1)!}(h)$*

Определение 5. $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in E$.

a называется точкой максимума для f, если существует окрестность $U(a) : f(x) \leq f(a)\ \forall x \in U(a) \cap E$

Теорема 6 (Необходимое условие экстремума)**.** *$f : E \to \mathbb{R}$, $a \in IntE$, a - точка экстремума f, f дифференцируема в точке $a \Rightarrow d_a f = 0 \Leftrightarrow \nabla_a f = 0 \Leftrightarrow \forall i \in 1, \dots, n : \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$*

Теорема 7. *a - точка максимума f, φ непрерывна в точке α, $\varphi(\alpha) = a$.*

Тогда α - точка максимума $f \circ \varphi$

Замечание. *$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} h_i h_j$ - квадратичная форма.*
$d_a^2 f(h)$ - квадратичная форма переменных $h_1, \dots, h_n$.
$d_a^l f(h)$ - однородная функция степени l: $d_a^l f(Ch) = C^l d_a^l f(h)$.
Форма $Q(h)$ бывает положительно определенной, отрицательно определенной, неопределенной (бывает и положительной, и отрицательной).

Теорема 8 (Достаточное условие экстремума)**.** *$f : \mathbb{R}^n \supseteq E \to \mathbb{R}$, $a \in IntE$, в точке a выполняется необходимое условие экстремума и $\exists d_a^2 f$.*

$Q(h) \coloneqq d_a^2 f(h)$. Тогда, если $Q > 0$, то a - точка минимума, если $Q < 0$, то a - точка максимума, если Q неопределенная, то a - не точка экстремума.

4-ая неделя

25.09.2023

Билет 11 (Теорема о непрерывности функции, заданной неявно). *Пусть* $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $I = [a,b] \subseteq R$, $X \times I \subseteq O$; $F : O \to R$ *непрерывно и* $\forall x \in X : F(x,a) \cdot F(x,b) < 0$, $F(x,y) = \varphi_x(y)$ *строго монотонна на* $[a,b]$.

Тогда $\exists! f : x \mapsto y, f : X \to I$ *такая, что*

1. $\forall x \in X : F(x, f(x)) = 0$
2. *в* $X \times I$ $F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$
3. $f \in C(X)$

Билет 12 (Теорема о гладкости функции, заданной неявно). *Пусть* $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $I = [a,b] \subseteq R$, $X \times I \subseteq O$; $F : O \to R$, $F \in C^1(O)$; $(x*, y*)$ *– решение* $F(x,y) = 0$ *и* $\frac{\partial F}{\partial y}(x*, y*) \neq 0$.

Тогда $\exists$ *окрестность* $U_{x*} \subseteq \mathbb{R}^n$, *окрестность* V_{y*} *и* $f : U_{x*} \to V_{y*} (x \mapsto y)$ *такие что:*

1. *в* $U_{x*} \times V_{y*}$ $F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$
2. $f \in C^1(U_{x*})$
3. $f'_{x_i}(x) = -\frac{F'_{x_i}}{F'_y}(x,y)$

Билет 13 (Теорема об открытом отображении в случае равенства размерностей образов и прообразов). *Пусть* $\Phi : \mathbb{R}^n \supseteq O \to \mathbb{R}^n$, Φ' *обратима всюду в* O.

Тогда Φ *- открытое отображение (то есть* $\forall U$ *открытого в* O $\Phi(O)$ *открыто).*

Билет 13 (Лемма об оценке снизу приращения отображения с обратимым дифференциалом). *Пусть* $F : \mathbb{R}^n \supseteq O \to \mathbb{R}^n$, F *дифференцируема в* a *и* $F'(a)$ *обратима.*

Тогда $\exists \delta > 0, c > 0 : \forall x \in U_\delta(a)$ $||F(x) - F(a)|| \geq c||x - a||$.

Билет 14 (Теорема об открытом отображении в общем случае). *Пусть* $\Phi : \mathbb{R}^n \supseteq O \to \mathbb{R}^m$, $m \leq n$, $rang \Phi'$ *максимален всюду в* O $(= m)$.

Тогда Φ *- открытое отображение.*

Билет 25. ~~*Поточечная и равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Элементарные свойства равномерной сходимости*~~

Билет 25 (Характеристика равномерной сходимости посредством чебышевской нормы). $f : X \to \mathbb{R}$ *(или* $\mathbb{C}$*)*, $||f|| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. *Если* f *ограничена на* X, *то* $||f|| < +\infty$. *При* $t \geq 0$ $||tf|| = \sup_{x \in X} |t||f(x)|$. $\forall x \in X |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq ||f|| + ||g|| \Rightarrow ||f + g|| = \sup_{x \in X} |f(x) + g(x)| \leq ||f|| + ||g||$.

Таким образом, $||\cdot||$ *является нормой на совокупности функций на* X.

Пусть $f_k, f : E \to \mathbb{C}$. *Тогда* $f_k \rightrightarrows f \Leftrightarrow ||f_k - f|| \to 0$ *при* $k \to +\infty$.

Билет 25 (Критерий Коши равномерной сходимости для последовательностей). *Пусть* $f_k, f : E \to \mathbb{C}$.

Тогда $f_k \rightrightarrows f$ *на* $E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N\ \forall x \in E\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Билет 25 (Критерий Коши равномерной сходимости для рядов). *Пусть* $f_k : E \to \mathbb{C}$.

Тогда $\Sigma_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится равномерно на* $E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geq N\ \forall p \in \mathbb{Z}_+\ \forall x \in E\ |\Sigma_{k=n}^{n+p} f_k(x)| < \varepsilon$.

Билет 25 (Необходимое условие равномерной сходимости). *Следствие из критерия.*

$\Sigma_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится равномерно на* $E \Rightarrow f_k(x) \rightrightarrows 0$ *на* E.

Билет 26 (~~Равномерная сходимость при действиях над множествами.~~ Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда). *Пусть* $f_n : E \to \mathbb{C}$.

Тогда $\Sigma_{n=1}^{\infty} ||f_n||_ч$ *сходится* $\Rightarrow \Sigma_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на* E.

Билет 27 (Признак Дирихле равномерной сходимости рядов). *Пусть* $f_n : E \to \mathbb{C}$, $g_n : E \to \mathbb{R}$.
Если

1. $\Sigma_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *относительно* $x \in E$ *равномерно ограничен на* E *(*$\exists C : \forall n \in N\ \forall x \in E\ |\Sigma_{k=1}^{\infty} f_k(x)| \leq C$*)*
2. $\forall x \in E\ g_n(x)$ *монотонная*
3. $g_n \rightrightarrows 0$ *на* E

Тогда $\Sigma_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$ *сходится равномерно на* E.

Билет 27 (Признак Абеля равномерной сходимости рядов). *Пусть* $f_n : E \to \mathbb{C}$, $g_n : E \to \mathbb{R}$.
Если

1. $\Sigma_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на* E
2. $\forall x \in E\ g_n(x)$ *монотонная*
3. $g_n(x)$ *равномерно по* x *ограничено на* E.

Тогда $\Sigma_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$ *сходится равномерно на* E.

Билет 27 ((с леммой) (взято у Кости Баца)). *Если* $b_k(x)$ *монотонно зависит от* k *при любом* x, *то* $|\sum_{k=n}^{m} a_k(x) b_k(x)| \leqslant 4 \cdot \max\limits_{k=n:m} |A_k(x)| \cdot \max\{|b_n(x)|, |b_m(x)|\}$.

5-ая неделя

2.10.2023

Билет 15 (Теорема о дифференцируемости обратного отображения). *Пусть* $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in IntE$, $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$, $\Phi(a) = b \in Int\Phi(E)$, Φ *дифференцируема в* a, $\Phi'(a)$ *обратима* ($det\Phi'(a) \neq 0$).

Тогда Φ^{-1} *дифференцируема в* b *и* $(\Phi^{-1})'(b) = (\Phi'(a))^{-1}$

Билет 16 (Теорема о гладкости обратного отображения (достаточное условие диффеоморфности)). $O, \tilde{O}$ *открытые*, $\Phi : O \to \tilde{O}$ *- диффеоморфизм на* $C^r \overset{def}{\Longrightarrow} \Phi$ *обратима и* $\Phi \in C^r(O \to \tilde{O})$, $\Phi^{-1} \in C^r(\tilde{O} \to O)$.

Если O *- открытое,* $O \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Phi \in C^r(O \to \mathbb{R}^n)$, Φ *обратимо (как отображение на свой образ) и* $det\Phi'(x) \neq 0$ *всюду в* O.

Тогда $\Phi^{-1} \in C^r(\Phi(O) \to O)$ $(\forall x \in O (\Phi^{-1})(\Phi(x)) = (\Phi'(x))^{-1})$

Билет 17 (Теорема о локальной обратимости регулярного отображения). $\Phi : \mathbb{R}^n \supseteq O \to \mathbb{R}^n$, O *открытое;* Φ *регулярное* $\overset{def}{\Longrightarrow} \Phi \in C^1(O \to \mathbb{R}^n)$, $rank\Phi'(x)$ *максимальной в каждой точке* O.

Пусть $\mathbb{R}^n \supseteq O$ *открытое,* $\Phi \in C^r(O \to \mathbb{R}^n)$, Φ *регулярно в* O.

Тогда $\forall a \in O$ $\exists$*окрестность* $U_a : \Phi|_{U_a}$ *- диффеоморфизм класса* C^r*, в частности обратимо.*

Билет 18 (Теорема о неявном отображении). *Пусть* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^{n+m} \supseteq O$ *открытое,* $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $y^0 \in \mathbb{R}^m$, $F \in C^r(O \to \mathbb{R}^m)$ *и* F' *обратима.*

Тогда $\exists$*окрестности* U_{x^0}, U_{y^0} *и* $f : U_{x^0} \to U_{y^0}$ *такие, что:*

1. $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$ *в* $U_{x^0} \times U_{y^0}$
2. $f \in C^r(U_{x^0} \to U_{y^0})$
3. $f'(x) = -(F'_y(x, f(x)))^{-1} \cdot F'_x(x, f(x))$

Билет 19 (Теорема об открытом отображении в общем случае). *Пусть* $\Phi : \mathbb{R}^n \supseteq O \to \mathbb{R}^m$, $m \leq n$, $rang\Phi'$ *максимален всюду в* O $(= m)$.

Тогда Φ *- открытое отображение.*