5-ая неделя

2.10.2023

Билет 15 (Теорема о дифференцируемости обратного отображения)**.** *Пусть* $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in IntE$, $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$, $\Phi(a) = b \in Int\Phi(E)$, Φ *дифференцируема в* a, $\Phi'(a)$ *обратима* ($det\Phi'(a) \neq 0$)*.*

Тогда Φ^{-1} *дифференцируема в* b *и* $(\Phi^{-1})'(b) = (\Phi'(a))^{-1}$

Билет 16 (Теорема о гладкости обратного отображения (достаточное условие диффеоморфности))**.** $O, \tilde{O}$ *открытые,* $\Phi : O \to \tilde{O}$ *- диффеоморфизм на* $C^r \overset{def}{\Longrightarrow} \Phi$ *обратима и* $\Phi \in C^r(O \to \tilde{O})$, $\Phi^{-1} \in C^r(\tilde{O} \to O)$*.*

Если O *- открытое,* $O \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Phi \in C^r(O \to \mathbb{R}^n)$, Φ *обратимо (как отображение на свой образ) и* $det\Phi'(x) \neq 0$ *всюду в* O*.*

Тогда $\Phi^{-1} \in C^r(\Phi(O) \to O)$ $(\forall x \in O (\Phi^{-1})(\Phi(x)) = (\Phi'(x))^{-1})$

Билет 17 (Теорема о локальной обратимости регулярного отображения)**.** $\Phi : \mathbb{R}^n \supseteq O \to \mathbb{R}^n$, O *открытое;* Φ *регулярное* $\overset{def}{\Longrightarrow} \Phi \in C^1(O \to \mathbb{R}^n)$, $rank\Phi'(x)$ *максимальной в каждой точке* O*.*

Пусть $\mathbb{R}^n \supseteq O$ *открытое,* $\Phi \in C^r(O \to \mathbb{R}^n)$, Φ *регулярно в* O*.*

Тогда $\forall a \in O$ $\exists$*окрестность* $U_a : \Phi|_{U_a}$ *- диффеоморфизм класса* C^r*, в частности обратимо.*

Билет 18 (Теорема о неявном отображении)**.** *Пусть* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^{n+m} \supseteq O$ *открытое,* $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $y^0 \in \mathbb{R}^m$, $F \in C^r(O \to \mathbb{R}^m)$ *и* F' *обратима.*

Тогда $\exists$*окрестности* U_{x^0}, U_{y^0} *и* $f : U_{x^0} \to U_{y^0}$ *такие, что:*

1. $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$ *в* $U_{x^0} \times U_{y^0}$
2. $f \in C^r(U_{x^0} \to U_{y^0})$
3. $f'(x) = -(F'_y(x, f(x)))^{-1} \cdot F'_x(x, f(x))$

Билет 19 (Теорема об открытом отображении в общем случае)**.** *Пусть* $\Phi : \mathbb{R}^n \supseteq O \to \mathbb{R}^m$, $m \leq n$, $rang\Phi'$ *максимален всюду в* O $(= m)$*.*

Тогда Φ *- открытое отображение.*

Теорема о неявном отображении

$m,n\in\mathbb{N}$, $\underset{\text{откр.}}{O} \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$; $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_m)$, $r\in\mathbb{N}$

$\exists$ $F\in C^r(O\to\mathbb{R}^m)$; $\exists$ $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$, $y^0=(y_1^0,\dots,y_m^0)$:

i). $F(x^0,y^0)=0$

ii) $F'_y(x^0,y^0)\neq 0$, $\left(F'_y = \frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} F'_{1y_1} & \dots & F'_{1y_m} \\ - & - & - \\ F'_{my_1} & \dots & F'_{my_m} \end{pmatrix}\right)$

Тогда $\exists$ окр-ти $U(x^0)$, $U(y^0)$ и $f: U(x^0)\to U(y^0)$:

1). $F(x,y)=0 \iff y=f(x)$ в $U(x^0)\times U(y^0)$

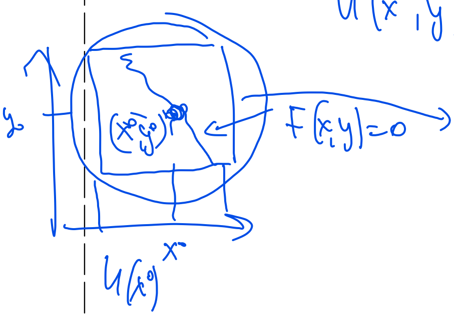
2). $f\in C^r(U(x^0)\to U(y^0))$

3). $f'(x) = -\left(F'_y(x,f(x))\right)^{-1}\circ F'_x(x,f(x))$

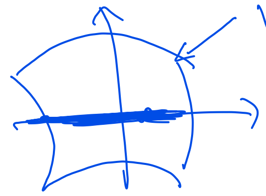
$F' = \Big(\underbrace{F'_x}_{n} \;\Big|\; \underbrace{F'_y}_{m} \Big) \updownarrow m$ $\qquad \Phi(x,y) = (\underbrace{x}_{n\text{-вектор}}, \underbrace{F(x,y)}_{m\text{ вектор}}) : \underset{\subseteq \mathbb{R}^{n+m}}{O} \to \mathbb{R}^{n+m}$

$\Phi' = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ F'_x & F'_y \end{pmatrix}$, $E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ & & \ddots \end{pmatrix}$ $\qquad \det\Phi' = \underbrace{\det E_n}_{1} \cdot \underbrace{\det F'_y}_{\neq 0} \neq 0$ вблизи в O.

По [illegible] теор., в окрестности $U(x^0,y^0)$ точки (x^0,y^0) Φ обратимо, $\exists$ окр. $U(x^0)$, $U(y^0)$: $U(x^0)\times U(y^0) \subseteq U(x^0,y^0)$, ($\Phi|_{U(x^0)\times U(y^0)}$ — обратимо)



Φ



$V = \Phi(U(x^0)\times U(y^0))$

$\forall\ x\in U(x^0))$