$$f(a+h) = g(1) = \underbrace{\sum_{l=0}^{r} \frac{g^{(l)}(0)}{l!} \cancel{(1-0)^l}}_{\sum\limits_{l=0}^{r} \sum\limits_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+^n \\ |j|=l}} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j} + \frac{g^{(l+1)}(\theta)}{(l+1)!} \cancel{(1-\theta)^{l+1}}$$

$$g = \underbrace{f}_{\in C^{r+1}}(\underbrace{a+th}_{C^\infty})$$

$$+ \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+^n \\ |j|=l+1}} \frac{f^{(j)}(a+\theta h)}{j!} h^j$$

Теор. (формула Тейлора–Пеано, локальный вариант ф-лы Тейлора).

Пусть O-откр, $O \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in C^r(O)$, $a \in O$

Тогда

$$f(a+h) = \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+^n \\ |j|\le r}} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + o(\|h\|^{j}) \quad \text{при } h \to 0$$

α зад. в окр. т. a

$$\frac{|\alpha|}{\|h\|^j} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Док-во

По теор. Тейлора – Лагранжа

$$f(a+h) = \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+^n \\ |j|\le r-1}} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+ \\ |j|=r}} \frac{f^{(j)}(a+\theta h)}{j!} h^j =$$

$\theta \in (0,1)$.

$$= \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+ \\ |j|\le r}} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+ \\ |j|=r}} \underbrace{\left(\frac{f^{(j)}(a+\theta h)}{j!} h^j - \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j \right)}_{\underbrace{\left(f^{(j)}(a+\theta h) - f^{(j)}(a)\right)}_{\to 0 \text{ при } h\to 0} \underbrace{\frac{h^j}{j!}}_{O(\|h\|^r)}}$$

уе

$$|h^j| = |h_1|^{j_1} \cdot \ldots \cdot |h_n|^{j_n} \le \|h\|^{j_1+\ldots+j_n} = \underbrace{\|h\|^r}_{o(\|h\|^r)}.$$

Следств. Теор. Лагранжа о среднем для скалярно-значных отобр.

$f \in C^1(O)$, O-откр.; a, h: $a + th \in O$ $\forall t \in [0,1]$, тогда

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\theta h) \cdot h_i = \langle \nabla f_{a+\theta h}, h \rangle$$

(частный случай ф-лы Тейлора для $r=0$).

Следств. 3 Полиномиальная формула.

$$(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)^r = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+^n \\ |j| = r}} \frac{r!}{j!} \underbrace{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^j}_{a_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{j_n}}$$

$r \in \mathbb{Z}_+$

Док-во. $f(x) = (x_1 + \ldots + x_n)^r$

$f'_{r\,x_i}(x) = r(x_1 + \ldots + x_n)^{r-1} = r \cdot f_{r-1}$

$f''_{x_i x_j} = r \cdot (r-1) f_{r-2}$; $j \in \mathbb{Z}_+$ $|j| \le r$

$$f^{(j)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } |j| < r \\ r!, & |j| = r \end{cases}; \quad f^{(j)}(x) = 0 \quad |j| > r$$

По ф-ле Тейлора – Лагранжа

$$f_r(x) = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+^n \\ |j| \le r}} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} h^j + \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+^n \\ |j| = r+1}} \underbrace{\frac{f^{(j)}(\theta x)}{j!} h^j}_{=0} = \quad \theta \in (0,1)$$

$$= \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+^n \\ |j|=r}} \frac{r!}{j!} h^j \qquad h = x - a$$

Член старший многочлена Тейлора для $n=2$

$$\Rightarrow T_n f(h) = \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+^2 \\ |j|\le r}} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j = \sum_{l=0}^{n} \sum_{|j|=l} \dots =$$

$j=(j_1, j_2)$, $|j|=l$, $(i, l-i)$

$$= \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!} \sum_{i=1}^{l} \underbrace{\frac{l!}{i!(l-i)!}}_{= C_l^i} \frac{\partial^l f}{\partial x_2^{l-i} \partial x_1^i}(a)\, h_1^i h_2^{l-i}$$

$d_a^0 f = f(a)$; $\quad d_a^1 f = d_a f$,

$d_a^1 f(h) = d_a f(h)$

$d_a^{l+1} f(h) = d_a F(h)$, где $F(a) = d_a^l f(h)$ $\Big\}$ $d_a(d_a^l f(h))(h)$

Лемма 2. $f \in C^r(O)$, a, h: $a+th \in O$ $\forall t\in[0,1]$.

$\forall\, l = 0, \dots, r$

$d^l_{a+th} f(h) = g^{(l)}(t)$, где $g(t) = f(a+th)$

Док-во по индукции по l.

при $l=0$ л.ч. $= f(a+th) =:$ пр.ч.

Переход от l к $l+1$

$$d^{l+1}_{a+th} f(h) = d_{a+th} F(h) = d_{a+th}\, g^{(l)}(t)\,(h) =$$

$$F(a+th) = d^{l}_{a+th} f(h) = \underbrace{g^{(l)}(t)}_{\substack{\text{индукц.}\\ \text{пр.}}} = \mu(t)$$

$$= d_{a+th}\, \mu(t$$

$l=1$ $\Big\{$ н.ч. $d^1_{a+th} f(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th)\cdot h_i$

пр. ч. $= g'(t) = (f(a+th))'_t =$

$$d_{a+th} f(h) = f(a+th)'_t$$

$$d^{l+1}_{a+th} f(h) = d^1_{\underset{=x}{a+th}}\Big(\underbrace{d^l_{a+th} f(h)}_{x}\Big)(h) = \big(\nu(a+th)\big)'_t = $$

$$= \nu(x) = g^{(l)}(t)$$

$$= \left(g^{(l)}(t)\right)'_t = g^{(l+1)}(t).$$

$$d^l_{a+th} f(h) = \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+\\ |j|=l}} \frac{l!}{j!} f^{(j)}(a+th)\cdot h^j$$

ф-ла Тейлора в дифференциалах в условиях теор. Тейлора – Лагранжа

$$f(a+h) = \sum_{l=0}^{r} \frac{1}{l!} d^l_a f(h) + \frac{d^{(r+1)}_{a+\theta h} f}{(r+1)!}(h)$$

ф-ла выглядит так же как для функции одной переменной.

Экстремумы функций нескольких переменных.

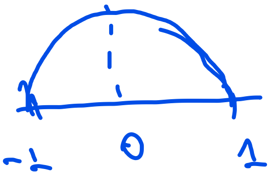
Опр. Пусть $f: E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Пусть $a \in E$. a наз. точкой строгого макс. для f, если $\exists$ окр. $U(a)$:

$f(x) \le f(a)$
$\forall x \in U(a)\cap E$

$f(x) < f(a)$
$\forall x \in \dot U(a)\cap E$

Примеры: $f(x)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ исследовать на экстр.

$f(x)=\sqrt{1-r^2(x,y)}$ $\qquad g(r)=\sqrt{1-r^2}$

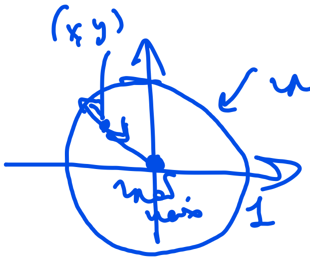


$r(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

лок. max $f \iff r=0 \iff (x,y)=(0,0)$ лок. max,

(x,y) : $x^2+y^2=1$ − т. лок. min.

других точек экстр нет.



Необходимое условие экстремума

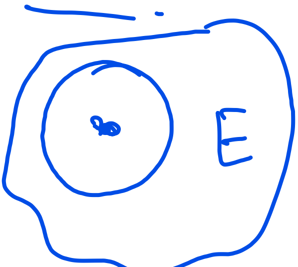
т. экстр.
$\Updownarrow$
т. max. или т. min.

Пусть $f: E\to\mathbb{R}$; $a\in \mathrm{Int}\, E$, a − т. экстр. для f, f дифф. в т a. $\Rightarrow$ $d_a f = 0 \iff \nabla_a f = 0$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)=0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)=0 \end{cases}$$

Д-во. $a\in \mathrm{Int}\, E \Rightarrow \exists\, \delta>0$: $B_\delta(a)\subset E$ $\quad \forall h: \|h\|<\delta$



$g(t)=f(a+th)$

Пусть a − т. min. $\Rightarrow$ для g т. 0. т. min.

Но g дифф. в 0

$\Rightarrow g'(0)=0=\langle \nabla_a f, h\rangle=0$

$\Rightarrow \nabla_a f=0$.

$f\circ\varphi_{(x)} = h(x)$, Пусть a − т. min (max) для f, φ непр. в т. α, $\varphi(\alpha)=a$ $\Rightarrow$ α − т. max. для $f\circ\varphi$

Т.к. a − т. min для f $\exists$ окр $U(a)$: $\forall x\in U\cap E$ $f(x)\ge f(a)$, φ непр. в т. α $\exists$ окр. V т. α: $\varphi(V)\subset U$ $f\circ\varphi(x)\ge f(a)=f\circ\varphi(\alpha)$ $x\in V$