2-ая неделя

11.09.2023

Определение 1. *$r \in \mathbb{Z}_+$, O — открытое в $\mathbb{R}^n$*
Тогда $C^r(O) \coloneqq \{f \colon O \to R : \forall i_1 \dots i_r \ \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r} \dots \partial x_{i_1}} \in C(O)\}$

Определение 2. $C^\infty(O) \coloneqq \bigcap\limits_{r \in \mathbb{Z}_+} C^r(O)$

Теорема 1 (О линейном пространстве $C^r(O)$). *$C^r(O)$ - линейное пространство. Замкнуто относительно произведения: $f, g \in C^r : f \cdot g \in C^r$*

Определение 3. $C^r(O \to \mathbb{R}^m) \coloneqq \{f : f_1, \dots f_m \in C^r(O)\}$

Теорема 2 (Композиция $C^r(O)$). *Пусть $\varphi \in C^r(O \to \tilde{O})$, $f \in C^r(\tilde{O})$.*
Тогда $f \circ \varphi \in C^r(O)$

Теорема 3 (О равенстве смешанных производных в классе C^r). *Если $f \in C^r(O)$, O — открытое в $\mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{Z}_+$; $(i_1, i_2, \dots i_l) \in 2^{\{1,\dots,r\}}$, $l \le r$, $(j_1, \dots, j_l)$ — перестановка$(i_1, \dots i_l)$*
Тогда $\frac{\partial^l f}{\partial x_{i_l} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^l f}{\partial x_{j_l} \dots \partial x_{j_1}}$

Определение 4. *Мультииндекс - элемент ${\mathbb{Z}_+}^n$*
$|j| = j_1 + j_2 + \dots + j_n$
$j! = j_1! \cdot j_2! \cdot \dots \cdot j_n!$
$h \in \mathbb{R}^n, h^j = h_1^{j_1} \cdot \dots \cdot h_n^{j_n}$
$f^(j)(a) = \frac{\partial^{|j|} f}{\partial x_n^{j_n} \dots \partial x_1^{j_1}}(a)$

Лемма 1. *Пусть $f \in C^r(O)$, O — открытое в $\mathbb{R}^n$, $[a, a+h] \subset O$, $g(t) = f(a+th)$.*
Тогда $\forall l = 0, \dots, r : g^{(l)}(t) = \sum_{j \in {\mathbb{Z}_+}^n, |j| = l} \frac{l!}{j!} f^{(j)}(a+th) \cdot h^j$

Теорема 4 (Глобальная формула Тейлора(-Лагранжа) для функции нескольких переменных). *Если $f \in C^{r+1}(O)$, O — открытое в $\mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{Z}_+$; $[a, a+h] \subset O$.*
Тогда $\exists \theta \in (0,1) : f(a+h) = \sum_{j \in {\mathbb{Z}_+}^n, |j| \le r} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + \sum_{j \in {\mathbb{Z}_+}^n, |j| = r+1} \frac{f^{(j)}(a+\theta h)}{j!} h^j$

Следствие 1 (Формула Тейлора-Пеано, локальный вариант формулы Тейлора). *Пусть $f \in C^r(O)$, O — открытое в $\mathbb{R}^n$, $a \in O$.*
Тогда $f(a+h) = \sum_{j \in {\mathbb{Z}_+}^n, |j| \le r} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + o(||h||^j)$ при $h \to 0$

Следствие 2 (Теорема Лагранжа о среднем для скалярно-значных отображений). *Пусть $f \in C^1(O)$, O — открытое в $\mathbb{R}^n$; $a, h : a + th \in O \forall t \in [0,1]$.*
Тогда $f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \theta h) \cdot h_i = \langle \nabla_{a+\theta h} f, h \rangle$ (частный случай Тейлора для $r = 0$).

Следствие 3 (Полиномиальная формула). *$(x_1 + \dots + x_n)^r = \sum_{j \in {\mathbb{Z}_+}^n, |j| = r} \frac{r!}{j!} (x_1, \dots, x_n)^j$, при $r \in \mathbb{Z}_+$*

Замечание. $d_a^0 f = f(a)$
$d_a^1 f = d_a f$
$d_a^1 f(h) = d_a f(h)$
$d_a^{l+1} f(h) = d_a(d_a^l f(h))(h)$

Лемма 2. *Пусть $f \in C^r(O)$, O — открытое в $\mathbb{R}^n$; $a, h : a + th \in O \ \forall t \in [0,1]$.*
Тогда $\forall l = 0, \dots, r : d_{a+th}^l f(h) = g^{(l)}(t)$, где $g(t) = f(a+th)$

Теорема 5 (Формула Тейлора в дифференциалах в условиях теоремы Тейлора-Лагранжа). *$f(a+h) = \sum_{l=0}^r \frac{1}{l!} d_a^l f(h) + \frac{d_{a+\theta h}^{l+1} f}{(l+1)!}(h)$*

Определение 5. $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in E$.

a называется точкой максимума для f, если существует окрестность $U(a) : f(x) \leq f(a)\ \forall x \in U(a) \cap E$

Теорема 6 (Необходимое условие экстремума). $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in IntE$, *a - точка экстремума f, f дифференцируема в точке* $a \Rightarrow d_a f = 0 \Leftrightarrow \nabla_a f = 0 \Leftrightarrow \forall i \in 1, \ldots, n : \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$

Теорема 7. *a - точка максимума f,* φ *непрерывна в точке* α, $\varphi(\alpha) = a$.

Тогда α *- точка максимума* $f \circ \varphi$

Замечание. $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} h_i h_j$ *- квадратичная форма.*
$d_a^2 f(h)$ *- квадратичная форма переменных* $h_1, \ldots, h_n$.
$d_a^l f(h)$ *- однородная функция степени l:* $d_a^l f(Ch) = C^l d_a^l f(h)$.
Форма $Q(h)$ *бывает положительно определенной, отрицательно определенной, неопределенной (бывает и положительной, и отрицательной).*

Теорема 8 (Достаточное условие экстремума). $f : \mathbb{R}^n \supseteq E \to \mathbb{R}$, $a \in IntE$, *в точке a выполняется необходимое условие экстремума и* $\exists d_a^2 f$.

$Q(h) \coloneqq d_a^2 f(h)$. *Тогда, если* $Q > 0$, *то a - точка минимума, если* $Q < 0$, *то a - точка максимума, если Q неопределенная, то a - не точка экстремума.*