1-ая неделя

4.09.2023

Теорема 1 (Необходимое условие дифференцируемости). *Если $f : \mathbb{R}^n \supseteq O \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке a, то $\forall u \in \mathbb{R}^n \, \exists \frac{\partial f}{\partial u}(a)$ (далее показано, что это эквивалентно для частных производных только по x_i).*

Теорема 2 (Дифференциал композиции). *Пусть $g : X \to Y$, $f : Y \to Z$. Тогда если g дифференцируема в точке a и f дифференцируема в точке $g(a)$, то $f \circ g$ дифференцируема в точке a и $d_a(f \circ g) = d_{g(a)} f \cdot d_a g$.*

Или, если рассматривать матрицу Якоби, $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$

Теорема 3 (Дифференцирование результата арифметических действий). *Пусть $O \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in O$; $f, g : O \to \mathbb{R}^m$, $\lambda : O \to R$; f, g, λ дифференцируемы в точке a; $A, B \in \mathbb{R}$.*

Тогда

1. *$Af + Bg$ дифференцируемо в точке a и $d_a(Af + Bg) = Ad_a f + Bd_a g$*
2. *λf дифференцируемо в точке a и $d_a(\lambda f) = f(a) \cdot d_a \lambda + \lambda(a) \cdot d_a f$*
   Или на языке матриц: $(\lambda f)' = f(a) \cdot \lambda'(a) + \lambda(a) \cdot f'(a)$
3. *$\langle f, g \rangle$ дифференцируемо в точке a и $d_a \langle f, g \rangle = (g(a))^T d_a f + (f(a))^T d_a g$*
   $(\langle f, g \rangle)' = (g(a))^T \cdot f'(a) + (f(a))^T \cdot g'(a)$
4. *Если $m = 1$ и $g(a) \neq 0$, то f/g дифференцируемо в точке a и $d_a(f/g) = \frac{g(a)d_a f - f(a) d_a g}{g^2(a)}$*

если g дифференцируема в точке a и f дифференцируема в точке $g(a)$, то $f \circ g$ дифференцируема в точке a и $d_a(f \circ g) = d_{g(a)} f \cdot d_a g$.

Или, если рассматривать матрицу Якоби, $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$

Теорема 4 (Теорема Лагранжа для отображений). *Пусть $f : \mathbb{R}^n \supseteq O$(открытое)$\to \mathbb{R}^m$, f дифференцируемо в O; $a, b \in O$, $\forall t \in (0, 1)$ $a + t(b - a) \in O$.*

Тогда $\exists \theta \in (0, 1) : ||f(b) - f(a)|| \leq ||f'(a + \theta(b - a))|| \cdot ||b - a||$

Следствие 1. *Если $\forall \theta \in (0, 1)$ $||f'(a + \theta(b - a))|| \leq M \in \mathbb{R}$, то $||f(b) - f(a)|| \leq M||(b - a)||$*

Следствие 2. *Если $m = 1$ и $\forall u \in O$ $\forall i = 1..n$ $||\frac{\partial f}{\partial x_i}(u)|| \leq M$, то $||f(b) - f(a)|| \leq M\sqrt{n}||(b - a)||$*

Теорема 5 (Достаточное условие дифференцируемости). *Пусть $f : \mathbb{R}^n \supseteq O$(открытое)$\to \mathbb{R}^m$, $a \in O$; $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $\forall i \in 1..n$ 1) определен в некоторой окрестности точки a 2) непрерывен в точке a*

Тогда f дифференцируема в точке a.

Замечание. *f дифференцируема в точке $a \Leftrightarrow f(a + h) - f(a) - f'(a) \cdot h = o(h)$ при $h \to 0$*

Определение 1. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \supseteq O$(открытое)$\to \mathbb{R}$, $g(u) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(u)$ для некоторого i определена в точке a и $\exists \frac{\partial g}{\partial x_j}(a)$ для некоторого j.*

Тогда $f_{x_i x_j} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) := \frac{\partial g}{\partial x_i}(a)$

Определение 2. *$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ - чистая частная производная.*

Определение 3. *$f_{x_i x_j}$, где $i \neq j$, - смешанная производная.*

Теорема 6. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \supseteq O$(открытое)$\to \mathbb{R}$, $i \neq j$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ определены и непрерывны в окрестности точка a.*

Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$

Определение 4. *Если $f : \mathbb{R}^n \supseteq O \to \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^n$, то $d_a^2 f(h) := d(d_a f(h))(h)$*