

2-ая неделя

11.09.2023

Определение 1 (билет 4). $r \in \mathbb{Z}_+$, O — открытое в \mathbb{R}^n
Тогда $C^r(O) := \{f: O \rightarrow \mathbb{R} : \forall i_1 \dots i_r \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r} \dots \partial x_{i_1}} \in C(O)\}$

Определение 2. $C^\infty(O) := \bigcap_{r \in \mathbb{Z}_+} C^r(O)$

Теорема 1 (О линейном пространстве $C^r(O)$). $C^r(O)$ — линейное пространство. Замкнуто относительно произведения: $f, g \in C^r : f \cdot g \in C^r$

Определение 3. $C^r(O \rightarrow \mathbb{R}^m) := \{f : f_1, \dots, f_m \in C^r(O)\}$

Теорема 2 (Композиция $C^r(O)$). Пусть $\varphi \in C^r(O \rightarrow \tilde{O})$, $f \in C^r(\tilde{O})$.
Тогда $f \circ \varphi \in C^r(O)$

Теорема 3 (О равенстве смешанных производных в классе C^r (билет 4)). Если $f \in C^r(O)$, O — открытое в \mathbb{R}^n , $r \in \mathbb{Z}_+$; $(i_1, i_2, \dots, i_l) \in 2^{\{1, \dots, r\}}$, $l \leq r$, (j_1, \dots, j_l) — перестановка (i_1, \dots, i_l)

$$\text{Тогда } \frac{\partial^l f}{\partial x_{i_l} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^l f}{\partial x_{j_l} \dots \partial x_{j_1}}$$

Определение 4 (билет 5). Мультииндекс — элемент \mathbb{Z}_+^n

$$|j| = j_1 + j_2 + \dots + j_n$$

$$j! = j_1! \cdot j_2! \cdot \dots \cdot j_n!$$

$$h \in \mathbb{R}^n, h^j = h_1^{j_1} \cdot \dots \cdot h_n^{j_n}$$

$$f^{(j)}(a) = \frac{\partial^{|j|} f}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}}(a)$$

Лемма 1. Пусть $f \in C^r(O)$, O — открытое в \mathbb{R}^n , $[a, a+h] \subset O$, $g(t) = f(a+th)$.

$$\text{Тогда } \forall l = 0, \dots, r : g^{(l)}(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n, |j|=l} \frac{l!}{j!} f^{(j)}(a+th) \cdot h^j$$

Теорема 4 (Глобальная формула Тейлора(-Лагранжа) для функции нескольких переменных (билет 6)).
Если $f \in C^{r+1}(O)$, O — открытое в \mathbb{R}^n , $r \in \mathbb{Z}_+$; $[a, a+h] \subset O$.

$$\text{Тогда } \exists \theta \in (0, 1) : f(a+h) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n, |j| \leq r} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n, |j|=r+1} \frac{f^{(j)}(a+\theta h)}{j!} h^j$$

Следствие 1 (Формула Тейлора-Пеано, локальный вариант формулы Тейлора (билет 7)). Пусть $f \in C^r(O)$, O — открытое в \mathbb{R}^n , $a \in O$.

$$\text{Тогда } f(a+h) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n, |j| \leq r} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + o(|h|^r) \text{ при } h \rightarrow 0$$

Следствие 2 (Теорема Лагранжа о среднем для скалярно-значных отображений (билет 7)). Пусть $f \in C^1(O)$, O — открытое в \mathbb{R}^n ; $a, h : a+th \in O \forall t \in [0, 1]$.

$$\text{Тогда } f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\theta h) \cdot h_i = \langle \nabla_{a+\theta h} f, h \rangle \text{ (частный случай Тейлора для } r=0 \text{)}.$$

Следствие 3 (Полиномиальная формула (билет 7)). $(x_1 + \dots + x_n)^r = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n, |j|=r} \frac{r!}{j!} (x_1, \dots, x_n)^j$, при $r \in \mathbb{Z}_+$

Замечание. $d_a^0 f = f(a)$

$$d_a^1 f = d_a f$$

$$d_a^1 f(h) = d_a f(h)$$

$$d_a^{l+1} f(h) = d_a(d_a^l f(h))(h)$$

Лемма 2. Пусть $f \in C^r(O)$, O — открытое в \mathbb{R}^n ; $a, h : a+th \in O \forall t \in [0, 1]$.

$$\text{Тогда } \forall l = 0, \dots, r : d_{a+th}^l f(h) = g^{(l)}(t), \text{ где } g(t) = f(a+th)$$

Теорема 5 (Формула Тейлора в дифференциалах в условиях теоремы Тейлора-Лагранжа (билет 8)). $f(a+h) = \sum_{l=0}^r \frac{1}{l!} d_a^l f(h) + \frac{d_{a+\theta h}^{l+1} f}{(l+1)!}(h)$

Определение 5. $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in E$.

a называется точкой максимума для f , если существует окрестность $U(a) : f(x) \leq f(a) \ \forall x \in U(a) \cap E$

Теорема 6 (Необходимое условие экстремума (билет 9)). $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{Int}E$, a - точка экстремума f , f дифференцируема в точке $a \Rightarrow d_a f = 0 \Leftrightarrow \nabla_a f = 0 \Leftrightarrow \forall i \in 1, \dots, n : \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$

Теорема 7. a - точка максимума f , φ непрерывна в точке α , $\varphi(\alpha) = a$.

Тогда α - точка максимума $f \circ \varphi$

Замечание. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} h_i h_j$ - квадратичная форма.

$d_a^2 f(h)$ - квадратичная форма переменных h_1, \dots, h_n .

$d_a^l f(h)$ - однородная функция степени l : $d_a^l f(Ch) = C^l d_a^l f(h)$.

Форма $Q(h)$ бывает положительно определенной, отрицательно определенной, неопределенной (бывает и положительной, и отрицательной).

Теорема 8 (Достаточное условие экстремума). $f : \mathbb{R}^n \supseteq E \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{Int}E$, в точке a выполняется необходимое условие экстремума и $\exists d_a^2 f$.

$Q(h) := d_a^2 f(h)$. Тогда, если $Q > 0$, то a - точка минимума, если $Q < 0$, то a - точка максимума, если Q неопределенная, то a - не точка экстремума.