7-ая неделя

16.10.2023

Билет 34 ((с леммой о верхнем пределе произведения)). *$x_n, y_n \in \mathbb{R}$, $x_n \to x$, $x > 0$.*
Тогда $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n y_n = x \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$.

Следствие 1 (Сумма степенного ряда непрерывна в круге сходимости). *skipped*

Билет 35 (Теорема Абеля). *R - радиус сходимости $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $R > 0$.*
Тогда

1. *Если ряд сходится в точке R, то он сходится равномерно на $[0, R]$*
2. *Если ряд сходится в точке $-R$, то он сходится равномерно на $[-R, 0]$*

Билет 35 (Интегрирование степенных рядов). *$[\alpha, \beta] \subset (a-r, a+r)$, r - радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$.*
Тогда $\int_\alpha^\beta \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_\alpha^\beta (x-a)^n dx$, то есть ряд допускает почленное интегрирование.

Билет 35 (Дифференцирование степенных рядов). *Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \in C^\infty(B_r(a))$, где r - радиус сходимости.*
Этот ряд допускает m-кратное дифференцирование почленно $\forall m \in \mathbb{Z}_+$ и $(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n)^{(m)} = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1) c_n (z-a)^{n-m}$, $z \in B_r(a)$

Следствие 1. *Пусть $[\alpha, \beta] \subset (a-r, a+r)$, где $r = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$*
Тогда $\int_\alpha^\beta \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_\alpha^\beta (x-a)^n dx$, то есть ряд допускает почленное дифференцирование на $[\alpha, \beta]$.
Если ряд сходится в точке $a + r$ (или $a - r$), то утверждение верно и для $[\alpha, \beta] \subseteq (a-r, a+r]$ (или $[\alpha, \beta] \subseteq [a-r, a+r)$)

Определение 1 (Комплексная дифференцируемость). $f : \mathbb{C} \supseteq O \to \mathbb{C}$, $a \in O$
$f'(a) = \lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ *- производная f в точке a (если предел существует).*

Теорема. *Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \in C^\infty(B_r(a))$, где r - радиус сходимости.*
Этот ряд допускает m-кратное дифференцирование почленно $\forall m \in \mathbb{Z}_+$ и $(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n)^{(m)} = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1) c_n (z-a)^{n-m}$, $z \in B_r(a)$

Билет 21 (Необходимое условие условного экстремума (геометрическая формулировка)). *$m, N \in \mathbb{N}$, $m < N$, $\mathbb{R}^n \supseteq O$ открытое, $F_1, \dots, F_m, f \in C^1(O)$ и $F = (F_1, \dots, F_m)$, F регулярно в O; $a \in O$, a - точка условного экстремума f при условие $F(x) = 0$.*
Тогда $\nabla_a f$ есть линейная комбинация $\nabla_a F_1, \dots, \nabla_a F_m$, то есть $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m : \nabla_a f = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot \nabla_a F_k$.

Билет 21 (Необходимое условие условного экстремума (формулировка, использующая функцию Лагранжа)). *$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k F_k(x_1, \dots, x_n)$ - функция Лагранжа, отвечающая функции f и системе связи $F_i(x) = 0$.*
Пусть выполнено условие формулировки выше.
Тогда $\exists \lambda \in \mathbb{R}^m : d_{(a,\lambda)} \mathcal{L} = 0$.

Билет 20 (Линейное касательное пространство к k-мерной поверхности — определение ~~и свойства~~). *$\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in \mathcal{M}$, $\tau \in \mathbb{R}^N$, τ называется касательным вектором к $\mathcal{M}$ в точке p ($p \in T_p\mathcal{M}$), если $\exists$ гладкое отображение $\gamma : (a, b) \to \mathcal{M}$ и $\exists c \in (a, b) : \gamma(c) = p, \gamma'(c) = \tau$.*

Билет 20 (Канонические базисы линейного касательного пространства). *$\mathcal{M}$ допускает (в окрестности точки p) гладкую параметризацию $\Phi : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^N$, $\Phi(U) = \mathcal{M}$; $a \in U$, $\Phi(a) = p$.*

Тогда $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}(a)$ называются каноническими касательными векторами. Если Φ регулярно в точке a, они линейно независимы.

Билет 20 (и его ортогонального дополнения). *По теореме о способах задания гладких многообразий $\exists F : \mathbb{R}^n \supseteq O$ (открытое) $\to \mathbb{R}^m$, $m + n = N$, $\mathcal{M} \cap O = \{x : F(x) = 0\}$.*

Тогда $\forall \tau \in T_p\mathcal{M}$ $\forall j = 1, \ldots, m$ $\tau \perp \nabla_p F_j$ и $\{\nabla_p F_j\}_{j=1}^m$ является каноническим базисом ортогонального дополнения линейного касательного пространства: $T_p\mathcal{M} = (span(\nabla_p F_1, \ldots, \nabla_p F_m))^{\perp}$.