$\cup\ f: X \to Y,\ g: Y \to Z$

$$\boxed{(f\circ g)'(a) = f'(g(a))\cdot g'(a).}$$

$$X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$$

$x=(x_1,\dots,x_n)$ $\qquad (y_1,\dots,y_m)$ $\qquad z=(z_1,\dots,z_k).$

Примеры: 1). $n=1,\ k=1$ $\qquad f(y_1,\dots,y_m),\ y_i=g_i(x).$

$$\frac{d(f\circ g)}{dx}$$

$$(f\circ g)' = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial y_m}\right)\cdot\begin{pmatrix} g_1' \\ \vdots \\ g_m' \end{pmatrix}$$

$$(f\circ g)'(x) = \sum_{i=1} \frac{\partial f}{\partial y_i}\cdot\frac{g_i}{dx}$$

$$z_x' = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial z}{\partial y_i}\cdot\frac{dy_i}{dx}$$

$\gamma(t)=(\cos t,\ \sin t),\quad f(x,y)=x^y$

$t\in \cancel{\mathbb{R}}\ (0,\pi/2)$

$f' = (y x^{y-1},\ x^y\ln x),$

$$\gamma'(t)=\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$$

1) $f(\gamma(t)) = (\cos t)^{\sin t}$

$$(f(\gamma(t)))' = \left(e^{\sin t\ln\cos t}\right)' =$$

$$= (\cos t)^{\sin t}\left(\cos t\cdot\ln\cos t - \frac{\sin^2 t}{\cos t}\right)$$

$$[f(\gamma(t))]' = (y x^{y-1},\ x^y\ln x)\Big|_{\substack{y=\sin t\\ x=\cos t}}\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$$

$$= \left(\sin t\cdot\cos t^{\sin t-1},\ \cos t^{\sin t}\ln\cos t\right)\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} =$$

$$= -\sin^2 t\,\cos t^{\sin t-1} + \cos t^{\sin t+1}\cdot\ln\cos t = \cos t^{\sin t}\left(-\frac{\sin^2 t}{\cos t}+\cos t\ln\cos t\right)$$

Пример 2).

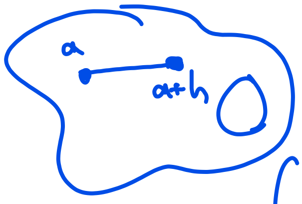
$f(x)$; $\quad h(t) = f(a+th)$, $\exists\, f$ дифф. в O, $\Rightarrow h$ дифф. $t\in[0,1]$

$x=(x_1,\dots,x_n)$ $\quad a\in O$,

$f: O\to\mathbb{R}$ $\quad h\in\mathbb{R}^n$

$\subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad t\in[0,1]$

$\forall t \quad a+th\in O$



$$h'(t) = f'(a+th)(a+th)' = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a+th),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a+th)\right)\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th)\cdot h_i = \langle \nabla_{a+th} f, h^T\rangle = d_{(a+th)} f(h)$$

Дифференцир. результата арифмет. действий.

$\exists$ $O\subseteq\mathbb{R}^n$, открыт., $a\in O$; $\quad f,g: O\to\mathbb{R}^m$, $\lambda: O\to\mathbb{R}$

f,g,λ дифф. в т.a. $\exists\, A,B\in\mathbb{R}$.

Тогда (1). $Af+Bg$ дифф. в т. a и $d_a(Af+Bg)=A\,d_a f+B\,d_a g$

(2). $\lambda\cdot f$ дифф. в т. a. $\quad d_a(\lambda\cdot f)=f(a)\cdot d_a\lambda+\lambda(a)\cdot d_a f$ ск.,

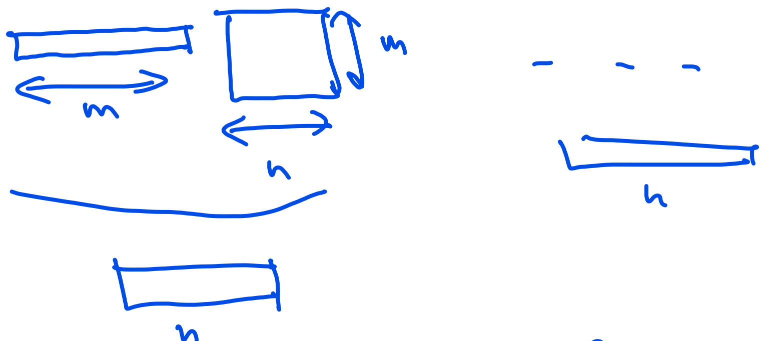
т.е. $\forall\, h\in\mathbb{R}^n \quad d_a(\lambda f)(h)=\underbrace{f(a)\cdot d_a\lambda(h)}+\underbrace{\lambda(a)}_{\text{ск.}}\cdot\underbrace{d_a f(h)}_{\text{вект.}}$

$$(\lambda f)'=f(a)\cdot\lambda'(a)+\lambda(a)\cdot f'(a)$$

(3) $\langle f,g\rangle$ дифф. в т.a и

$$d_a\langle f,g\rangle=(g(a))^T d_a f+(f(a))^T d_a g$$

$$(\langle f,g\rangle)'=(g(a))^T\cdot f'(a)+f^T(a)\cdot g'(a)$$



(4). Если $m=1$ и $g(a)\neq 0$, то f/g дифф. в т.a и

$$d_a(f/g)=\frac{g(a)\,d_a f-f(a)\,d_a g}{g^2(a)},$$

(1) $\Leftarrow$ опред. дифф. ф.

(2). Сначала Δ $m=1$.

$$\boxed{(\lambda\cdot f)(a+h)-(\lambda f)(a)}=\big(\lambda(a+h)f(a+h)-\lambda(a)f(a+h)\big)+\big(\lambda(a)f(a+h)-\lambda(a)f(a)\big)=$$

$$=\underbrace{f(a+h)}_{(f(a)+o(1))}\big(d_a\lambda(h)+o(h)\big)+\lambda(a)\big(d_a f(h)+o(h)\big)=$$

$(f(a)+o(1)) \Leftarrow f$ непр. в т.a.

$$\left(f(a)\, d_a\lambda(h) + \lambda(a)\, d_a f(h)\right) + \underbrace{\left[o(1)\cdot \boxed{d_a\lambda(h)} + o(1)\cdot o(h) + \lambda(a)\cdot o(h)\right]}_{o(h) \text{ при } h\to 0}$$

$$\|L(h)\| \le \|L\|\cdot\|h\|$$

по норме $\le o(1)\cdot \|d_a\lambda\|\cdot\|h\|$

Итого: $\lambda\cdot f$ дифф. в т. a и верно (2)

Если $m>1$ $\quad \lambda f = \lambda \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda f_1 \\ \vdots \\ \lambda f_m \end{pmatrix}$ — дифф.

$$(\lambda f)'(a) = \begin{pmatrix} \lambda(a)\nabla_a f_1 + f_1(a)\nabla_a\lambda \\ - \quad - \quad - \quad - \\ \lambda(a)\nabla_a f_m + f_m(a)\nabla_a\lambda \end{pmatrix} = \lambda(a)\cdot f'(a) + \underbrace{f(a)}_{\text{столбец}}\cdot\underbrace{\nabla_a\lambda}_{\text{строка}}$$

$\lambda'(a)$.

(3). f, g дифф в т a. $\Rightarrow$ $\forall i=1,\dots,m$ $\quad f_i\cdot g_i$ дифф. по (2).

$$(f_i g_i)' = g_i(a)\nabla_a f_i + f_i(a)\nabla_a g_i$$

$$\langle f, g\rangle = \underbrace{\sum_{i=1}^m f_i g_i}_{\text{дифф;}} \qquad \langle f, g\rangle' = \sum_{i=1}^n (f_i, g_i)' =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(g_i(a)\nabla_a f_i + f_i(a)\nabla_a g\right)$$

$$(g_1(a), \dots, g_m(a)) \cdot$$

$$g^T(a)\cdot f'(a) = (g_1(a),\dots,g_m(a)) \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix} \qquad \| \qquad g^T(a)\, f'(a) + f^T(a)\cdot g'(a)$$

4). $f/g = f\cdot \frac{1}{g}$

$$\frac{1}{g} = \varphi\circ g \qquad d\left(\frac{1}{g}\right) = d\varphi\circ dg = \varphi'(g(t))\cdot dg = -\frac{1}{g^2(t)}dg$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{t}$$

$$d(f/g) = \frac{1}{g}df + f\, d\left(\frac{1}{g}\right) = \frac{1}{g}df + f\left(-\frac{1}{g^2(t)}dg\right)$$

Теор. Лагранжа для отображений.

Пусть $O \subseteq \mathbb{R}^n$ откр.; $f: O \to \mathbb{R}^m$, f дифф. в O, $a, b \in O$, $\forall t \in (0,1)$ $a + t(b-a) \in O$

Тогда $\exists\, \theta \in (0,1)$: $\|f(b) - f(a)\| \le \|f'(a + \theta(b-a))\| \cdot \|b - a\|$

$\mathbb{R}^m$ $\qquad$ $\mathbb{R}^{mn}$ $\qquad$ $\mathbb{R}^n$

Зам. Равенство, вообще говоря, невозможно

$n=1$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T$, $t \in [0, 2\pi]$, $a=0$, $b=2\pi$

$\gamma(a) = \gamma(b)$

$\|\gamma(b) - \gamma(a)\| = 0$ $\qquad$ $\|b-a\| = 2\pi$, $\|b-a\| = |b-a|$

$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \ne 0$

Д-во:

$\varphi(x) = \langle f(x) - f(a), f(b) - f(a) \rangle$

$\varphi: O \to \mathbb{R}$

$\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = \|f(b) - f(a)\|^2$

$\psi(t) = \varphi(a + t(b-a))$ – дифф для $[0,1]$, $\psi(0) = \varphi(a) = 0$

$\psi(1) = \varphi(b) = \|f(b) - f(a)\|^2$

По классической теор. Лагранжа (для функций одной перем.)

$\exists\, \theta \in (0,1)$: $\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\theta)(1-0) = \psi'(\theta)$

$$\|f(b) - f(a)\|^2 = \varphi'(a + \theta(b-a)) \cdot \underbrace{(b-a)}_{\text{вектор-у}}$$

$$\varphi'(x) = \langle f(x) - f(a), f(b) - f(a) \rangle'_x = (f(b) - f(a))^T \cdot \underbrace{(f(x) - f(a))'}_{= f'(x)}$$

$$\|\varphi'(a + \theta(b-a))\| \le \|f(b) - f(a)\| \cdot \|f'(a + \theta(b-a))\|$$

$$\|f(b) - f(a)\|^{\cancel{2}} \le \cancel{\|f(b) - f(a)\|} \cdot \|f'(a + \theta(b-a))\| \cdot \|b - a\|$$

Очевидное следствие: 1) Если $\exists M \in \mathbb{R}$: $\forall \theta \in (0,1)$ $\|f'(a + \theta(b-a))\| \le M$

то $\|f(b) - f(a)\| \le M \|b - a\|$,

Если всюду в O $\|f'(x)\| \le M$, то f – липш. с конст. M

2) Частный случай 2: если $\exists M \in \mathbb{R}$: $\forall x \in O$ $\forall i = 1 \ldots n$

$\left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right\| \le M$, $m=1$, $\Rightarrow$ $\|f(b) - f(a)\| \le M\sqrt{n}\, \|b - a\|$

Теор (достаточное условие дифф-ти).

Пусть $O \subseteq \mathbb{R}^n$ откр.; $f: O \to \mathbb{R}^m$, $a \in O$; $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ 1) определены в некот. окр. т. a, 2) непр. в т. a. Тогда f дифф-ма в т. a.

Док-во. Пусть частн. производные $f'(a)$ определена

f - дифф. в т. a $\Longleftrightarrow$ $f(a+h)-f(a)-f'(a)\cdot h = o(h)$ при $h\to 0$?

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{\|h\|}\underbrace{\left(f(a+h)-f(a)-f'(a)h\right)}_{=c} \longrightarrow 0 \quad \text{при } h\to 0$$

$\Delta\ g(h) = f(a+h) - f'(a)\cdot h$ - дифф. в окр. 0

$c = g(h)-g(0) \Rightarrow \|g(h)-g(0)\| \leq \|g'(\theta h)\|\cdot\|h\| \longrightarrow 0$ при $h\to 0$

$g'(h) = f'(a+h) - f'(a)$

$f(a+h)-f(a)-f'(a)h$ $\quad g'(\theta h) = f'(a+\theta h) - f'(a)$

$$f'(x) = \begin{pmatrix} f_{1x_1}' & \dots & f_{1x_n}' \\ - & - & - \\ f_{nx_1}' & \dots & f_{nx_n}' \end{pmatrix}$$

Производные и дифференциалы высших порядков

$O \subseteq \mathbb{R}^n$; $f: O \to \mathbb{R}$.

$g(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ опр. в окр. т. a и $\exists\ \frac{\partial g}{\partial x_j}(a)$, то $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial g}{\partial x_j}(a)$

$f''_{x_i x_j}$

И аналогично для производных порядка выше 2.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ — чистые част. произв.

если $i \neq j$, то $f''_{x_i x_j}$ — смешанные производные

1). $f(x,y) = x^y$, $x>0, y>0$

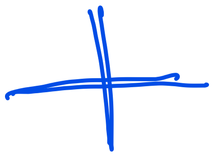
$f'_x = y x^{y-1}$, $f'_y = x^y \ln x$.

$f''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}$; $f''_{xy} = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \ln x$;

$f''_{yx} = y x^{y-1} \cdot \ln x + x^y \cdot \frac{1}{x}$; $f''_{yy} = x^y \ln^2 x$

2). $f(x,y) = \underbrace{xy}_{\text{б.м.}} \underbrace{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}_{\text{огр. 1}}$; $\lim\limits_{(x,y)\to 0} f(x,y) = 0$, $f(0,0) = 0$.

$f'_x(0,0) = 0 \Rightarrow f'_y = 0$.



$(x,y) \neq (0,0)$ $f'_x = y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + x \underbrace{\left(\frac{\cancel{x^2+y^2}-2y^2}{x^2+y^2}\right)'_x}_{\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}}\right)$

$= \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\left(\underbrace{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}_{x^4-y^4} + 4x^2y^2\right) = \frac{y}{(x^2+y^2)^2} \cdot \left(x^4 - y^4 + 4x^2y^2\right)$

$f'_y = -\frac{x}{(x^2+y^2)^2}\left(y^4 - x^4 + 4x^2y^2\right)$

$f''_{xy}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f'_x(0,y) - \cancel{f'_x(0,0)}}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{\frac{y}{y^4}\cdot\left(-y^4+0\right)}{y} = -1$

$\neq$

$f''_{yx}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f'_y(x,0) - \cancel{f'_y(0,0)}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{x}{x^4}\left(-x^4\right)}{x} = 1$

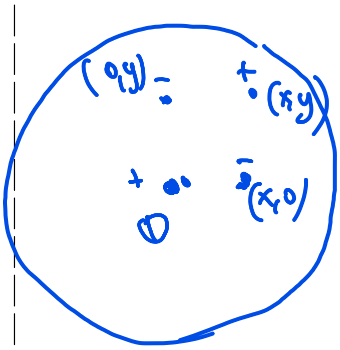
Пусть $O \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: O \to \mathbb{R}$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$, $i \neq j$.

Пусть $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ опр. и непр. в окрестности т. a.

Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$

Док-во 1). Н.у.о. $n=2$; н.у.о. $a=0$

$\forall$ $B_R(0)$! $f''_{xy}, f''_{yx} \in C(B_R(0))$.



$$\Delta(x,y) = \underbrace{f(x,y)}_{\text{фиксир. } y} - f(x,0) - \left(f(0,y) - f(0,0)\right) = \psi(x) - \psi(0)$$

$\forall$ $\psi(x) = f(x,y) - f(x,0)$

По теор. Лагранжа по ψ $\exists$ x_y :

$$\psi(x) - \psi(0) = \psi'(x_y)\cdot x = \left(f'_x(x_y,y) - f'_x(x_y,0)\right)\cdot x$$

фикс. x_y

$\varphi(y) = f'_x(x_y, y)$ между 0 и x

$$\varphi(y) - \varphi(0) = \varphi'_y(y_*)\cdot y = f''_{xy}(x_y,y_*)$$

$\exists$ y_* между 0 и y

$$\Delta = f''_{xy}(x_y, y_*)\cdot xy, \quad (x_y, y_*) \to 0$$

$$\frac{\Delta}{xy} \xrightarrow[(x,y)\to 0]{} f''_{xy}(0,0)\frac{\cancel{xy}}{\cancel{xy}}$$

Поменяв группировку слагаемых в Δ аналогично

$$\frac{\Delta}{xy} \to \boxed{f''_{yx}(0,0).}$$

$$d^2_a f(h) = d\left(d_a f(h)\right)(h)$$

$h \in \mathbb{R}^n$

$f : O \to \mathbb{R}$, $O \subseteq \mathbb{R}^n$

Тоже для функции одной переменной, сохраняется и для нескольких перем.

$f(x,y) = x^2 - y^2 + 4xy$

$df = d(x^2) - dy^2 + 4d(xy) = 2x\,dx - 2y\,dy + 4(y\,dx + x\,dy)$

$d^2 f = d\left(2x\,dx - 2y\,dy + 4(y\,dx + x\,dy)\right) =$

$= 2\,dx\,dx - 2\,dy\,dy + 4(dy\,dx + dx\,dy) = 2(dx)^2 - 2(dy)^2 + 8(dx\,dy) = 2f(dx, dy)$

$df(\underbrace{h_1, h_2}_{h}) = 2x\,h_1 - 2y\,h_2 + 4(y\,h_1 + x\,h_2)$