6-ая неделя

9.10.2023

Билет 29 (Перестановка пределов для рядов). *Пусть* $f_n : E \to \mathbb{C}$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на* E *и* $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists \lim_{x\to x_0} f_k(x)$.

Тогда существуют оба и верно $\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x)$

Билет 30. Следствия теоремы о перестановке пределов, связанные с непрерывностью (взято у Кости Баца, убрано доказательство)

Теорема (Непрерывность в точке для последовательностей). $\sqsupset D \subseteq X$ *– м.п.,* $\{f_n\}, f : D \to \mathbb{C}$, $f_n \rightrightarrows f$ *на* D.

Если $\{f_n\}$ *непрерывны в точке* x_0*, то и* f *непрерывна в* x_0.

Теорема (Непрерывность в точке для рядов). *Пусть* X *– м.п.,* $D \subset X, x_0 \in D, f_k : D \to \mathbb{R}$*(или* $\mathbb{C}$*) и выполнены следующие условия:*

1. *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}$ *равномерно сходится на* D *к сумме* S*;*
2. *все функции* f_k *непрерывны в точке* x_0.

Тогда функция S *непрерывна в точке* x_0.

Теорема (теорема Стокса-Зейделя). $D \subseteq X$, $f_n, f : D \to \mathbb{C}$ $f_n \rightrightarrows f$ *на* D *при* $n \to \infty$ *и* $f_n \in C(D) \implies f \in C(D)$*, то есть равномерный предел последовательности непрерывных функций* ***непрерывен***.

Теорема (Аналог теоремы Стокса-Зейделя для рядов). $\sqsupset D \subseteq X$ *– м.п.,* $x_0 \in D', \{f_n\}_{n=1}^{\infty}, f : D \to \mathbb{C}$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на* D.

Если $\forall n\ f_n(x)$ *непрерывна в точке* x_0*, то и* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *непрерывно в* x_0.

Билет 32 (Предельный переход под знаком интеграла для последовательностей). *Если* $f_n \in C[a,b]$, $f_n \rightrightarrows f$ *на* $[a,b]$*, то* $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$.

Билет 32 (Предельный переход под знаком интеграла для рядов). *Если* $f_n \in C[a,b]$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *сходится равномерно на* $[a,b]$*, то* $\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)$*, ряд в правой части сходится.*

Билет 33 (Предельный переход под знаком производной для последовательностей). *Пусть* $f \in C^1([a,b] \to \mathbb{R})$, $\exists x^0 \in [a,b] : \{f_n(x^0)\}$ *сходится при* $n \to \infty$, $\{f_n'(x)\}$ *равномерно сходится на* $[a,b]$.

Тогда $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *дифференцируема на* $[a,b]$ *и* $\forall x \in [a,b]$ $(\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Билет 33 (Предельный переход под знаком производной для рядов). *Пусть* $f \in C^1([a,b] \to \mathbb{R})$, $\exists x^0 \in [a,b] :$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x^0)$ *сходится,* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ *равномерно сходится на* $[a,b]$.

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *дифференцируема на* $[a,b]$ *и* $\forall x \in [a,b]$ $(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$.

Билет 34 (Теорема о круге сходимости степенного ряда). $a, \{c_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{C}$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *называется степенным рядом с коэффициентами* $\{c_n\}$ *и центром* a.

$B_r(a)$ *называется кругом сходимости этого степенного ряда, если* $\forall z \in B_r(a)$ *ряд сходится и* $\forall z \notin \overline{B}_r(a)$ *ряд расходится.* r *называют радиусом сходимости.*

Теорема Коши-Адамара. $r = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$*. Тогда* r *- радиус сходимости для степенного ряда.*

Точнее:

1. *$\forall$компакта $K : K \subseteq B_r(a)$ ряд сходится равномерно на K*

2. *$\forall z \notin \overline{B}_r(a)$ ряд расходится в точке z*

При $r = \frac{1}{0}$ считаем $r = +\infty$, при $r = \frac{1}{+\infty}$, $r = 0$ (то есть круг сходимости содержит только центр).

Билет 34 (Формулы для радиуса сходимости)**.** *Кажется, одна из формул в целом и является предыдущей теоремой. Вот другая формула: $\lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$ (в случае существования).*

Билет 19 (Параметризации поверхностей, гладкие поверхности уровня, гладкие обобщенные графики)**.** *$M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$, $a \in M$, M допускает параметризацию класса C^r размерности n в окрестности a, если $\exists$окрестность U_a, гомеоморфизм $\Phi \in C^r(\mathbb{R}^n \supseteq O \to U_a \cap M)$, Φ регулярное.*

$M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$, $a \in M$, M есть множество уровня класса C^r размерности n в окрестности a, если $\exists$окрестность $U_a, F \in C^r(U_a \to \mathbb{R}^m)$, F регулярно, $M \cap U_a = \{x \in U_a : F(x) = 0\}$.

$M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$, $a \in M$, M есть обобщенный r-гладкий график размерности n в окрестности a, если $\exists$окрестность $U_a, f \in C^r(\mathbb{R}^n \supseteq O \to \mathbb{R}^m) : U_a \cap M = \Gamma_f$ с точностью до перестановки координат.

Билет 19 (Теорема о способах задания k-мерной поверхности)**.** *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$, $a \in M$.*

Тогда следующие утверждения равносильны:

1. *В окрестности a M - n-мерный C^r-гладкий обобщенный график*

2. *В окрестности a M - n-мерное C^r-гладкое множество уровня*

3. *В окрестности a M допускает n-мерную C^r-гладкую параметризацию*