

第一章 第一节 线性空间

主要内容:

- 1 线性空间的定义及其性质
- 2 向量组的线性相关性

概述

- 数学空间是指一个赋予了“某种结构”的集合。
- 线性空间是 n 维向量空间 R^n 的推广, 是矩阵理论的基础。
- 线性空间是一类具有“线性结构”的元素集合, 这种线性结构是通过两种线性运算“加法”、“数乘”在一定公理体系下给出的。

定义 设 V 是一个非空集合， F 是一个数域（如实数域 R 或复数域 C ），如果在 V 上规定了下列两种运算，则称 V 是数域 F 上的一个线性空间

[1]加法运算 对 V 的任意两个元素 x 、 y ，都有 V 的唯一的“和” $x+y \in V$ ，且满足

- (1) 交换律 $x+y=y+x$;
- (2) 结合律 $x+(y+z)=(x+y)+z$;
- (3) 存在0元 $x+0=x$;
- (4) 存在负元 $-x$ $x+(-x)=0$.

[2]数乘运算 对 V 的任一元 x ，及 F 的任一数 k ，都存在唯一的“积” $kx \in V$ ，且满足

- (5) 分配律 $k(x+y)=kx+k y$
- (6) 分配律 $(k+l)x=kx+lx$
- (7) 结合律 $k(lx)=(k l)x$
- (8) $1x=x$

线性空间的元素也称为向量，它比 n 维向量有更广泛的含义。

注意：上述定义所规定的加法运算与数乘运算也称为 V 的线性运算，满足“封闭性”，即对 V 的任意两个元素及 F 的任一数 k ，所定义的“和”与“积”仍属于 V 。

当 F 是实数域时， V 称为实线性空间；

当 F 是复数域时， V 称为复线性空间。

可以验证：

n 维实向量空间是线性空间，仍记作 R^n ；

n 维复向量空间是线性空间，仍记作 C^n 。

线性空间实例

•例1 所有 $m \times n$ 型矩阵在矩阵加法和数乘运算下构成一个线性空间, 记为 $\mathbf{R}^{m \times n}$ 或 $\mathbf{C}^{m \times n}$

•例2 所有次数不超过n的多项式在多项式加法和数乘运算下构成一个线性空间,记为

$$P[x]_n = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mid a_i \in C, i = 0, 1, 2, \cdots, n\}$$

•例3 二阶齐次线性微分方程的解集合对于函数加法与数与函数的乘法构成一个线性空间。

•例4 闭区间[a,b]上所有连续函数的集合在函数加法和数乘运算下构成一个线性空间,记为 $C[a, b]$

非线性空间举例

所有 n 阶可逆矩阵在矩阵加法和数乘运算下不构成线性空间（ 0 矩阵不可逆）。

- 所有次数等于 n 的多项式在多项式加法和数乘运算下不构成线性空间。

- 非齐次线性非齐次方程组 $Ax = B$ 解的全体按 C^n 中的运算不构成线性空间

实例5 设 R^+ 为所有正实数组成的集合，其上的加法与乘法分别定义为

$$a \oplus b = ab, \quad k \otimes a = a^k$$

试证 R^+ 是 R 上的线性空间。

证明 设 $a, b \in R^+, k \in R$ 则 $a \oplus b = ab \in R^+, k \otimes a = a^k \in R^+$
即对所定义的加法“ \oplus ”与乘法“ \otimes ”是封闭的。且
满足

$$(1) (a \oplus b) \oplus c = (ab) \oplus c = abc = a \oplus (bc) = a \oplus (b \oplus c)$$

$$(2) a \oplus b = ab = ba = b \oplus a$$

$$(3) 1 \text{ 是零元, 因为 } a \oplus 1 = a \times 1 = a$$

$$(4) a \text{ 的负元是 } 1/a, \text{ 因为 } a \oplus \frac{1}{a} = a \times \frac{1}{a} = 1$$

$$(5) k \otimes (a \oplus b) = k \otimes (ab) = (ab)^k = a^k b^k = (k \otimes a) \oplus (k \otimes b)$$

$$(6)(k + l) \otimes a = a^{k+l} = a^k a^l = (k \otimes a) \oplus (l \otimes a)$$

$$(7)k \otimes (l \otimes a) = k \otimes a^l = (a^l)^k = a^{lk} = a^{kl} = (kl) \otimes a$$

$$(8)1 \otimes a = a^1 = a \quad \text{故} R^+ \text{是} R \text{上的线性空间。}$$

定理 设 V 是数域 F 上的一个线性空间，则

(1) V 的零元是唯一的；

(2) V 中任意元的负元是唯一的；

(3) $0 \bullet \alpha = 0, \quad k \bullet 0 = 0, \quad (-1)\alpha = -\alpha, \quad \alpha \in V, k \in F$

(4) 如果 $k \bullet \alpha = 0$ ， 则 $k=0$ 或 $\alpha=0$ 。

线性表示

设 V 是一个线性空间, x_1, x_2, \dots, x_p, x 是 V 的向量组。

如果存在一组数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ 使得

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p$$

则称 x 可由 x_1, x_2, \dots, x_p 线性表示, 称 x 是 x_1, x_2, \dots, x_p 的线性组合。

例 1 在二维空间 R^2 中, 任意一个二维向量 α 都可由标准单位向量 e_1, e_2 线性表示。

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

例2、在线性空间

$$P[x]_n = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mid a_i \in C, i = 0, 1, 2, \cdots, n\}$$

中，

任一向量（元素）可由 $1, x, x^2, \cdots, x^n$ 线性表示。

例3 在三维空间 \mathbf{R}^3 中, 求 k_1, k_2, k_3 ,使得

$$\alpha = k_1 X_1 + k_2 X_2 + k_3 X_3$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

求解

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 1 \\ k_2 + k_3 = 2 \\ k_3 = 3 \end{cases} \quad k_1 = -1, k_2 = -1, k_3 = 3$$

注：讨论向量组的线性表示可化为讨论线性方程组的求解问题。

给定线性空间 V 的两个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$ ，如果 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$ 中的每一个向量都可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ 线性表示，则称向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$ 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ 线性表示；

如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$ 可以相互表示，则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$ 是等价的。

等价向量组具有：自反性、对称性、传递性

线性相关

设 x_1, x_2, \dots, x_p 是线性空间 V 的向量组。
如果存在一组不全为 0 的数 k_1, k_2, \dots, k_p
使得

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_p x_p = 0$$

则称向量组 x_1, x_2, \dots, x_p 是线性相关的；
否则，就称向量组 x_1, x_2, \dots, x_p 是线性无关的。

等价命题

命题一 向量组 x_1, x_2, \dots, x_p 是线性无关的充要条件是仅当 $k_1 = k_2 = \dots = k_p = 0$ 时成立

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_p x_p = 0$$

命题二 向量组 x_1, x_2, \dots, x_p 是线性相关的充要条件是其中的一个向量可由其余的向量线性表示。

可以证明:

1、在线性空间 $R^{m \times n}$ 或 $C^{m \times n}$ 中,

E_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 线性无关。

其中 E_{ij} 表示第*i*行元素第*j*列元素1, 其它元素为0的矩阵。

2、在线性空间

$P[x]_n = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \mid a_i \in C, i = 0, 1, 2, \dots, n\}$

中, $1, x, x^2, \dots, x^n$ 线性无关。

例4 在四维空间 R^4 中，讨论下列向量组的线性相关性。

$$(1) \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解 仅讨论 (1) 。设存在一组数 x_1, x_2, x_3, x_4 ,

使得 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = 0$

即
$$x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

改写成线性方程组为
$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \\ -x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

求解线性方程组得唯一解 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关

定义 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ 是线性空间 V 的向量组, 如果

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是线性无关组,

(2) 任一向量 α_i 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示;

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是向量组 α_p 的极大无关组

并称 r 为向量组的秩, 记为

$$\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = r$$

说明: 一般地, 向量组的极大无关组不是唯一的, 但向量组的每一个极大无关组都与向量组自身是等价的, 并且向量组的每一个极大无关组中所含有的向量的个数都等于向量组的秩。

第二节 线性空间的基与坐标

主要内容:

一、线性空间的基与向量在基下的坐标

二、坐标变换与过渡矩阵

一、线性空间的基与向量在基下的坐标

设 x_1, x_2, \dots, x_n 是线性空间 V 的向量组, 如果

(1) x_1, x_2, \dots, x_n 是 V 的线性无关组,

(2) V 的任一向量 x 可由 x_1, x_2, \dots, x_n 线性表示;

则称 x_1, x_2, \dots, x_n 是线性空间 V 的一组基。

称 n 是线性空间 V 的维数, 记作 $\dim V$ 。

或称线性空间 V 是 n 维线性空间

即: 线性空间的维数是其基中所含向量的个数。

若在 V 中可以找到任意多个线性无关的向量, 则称 V 是无限维线性空间

说明：线性空间的基不唯一

例1、 证明：在三维向量空间 R^3 中 x_1 , x_2 , x_3 与 y_1 , y_2 , y_3 都是线性空间 R^3 的一组基

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

这是因为：

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

从而它们各自都线性无关， 而对于任意向量

$x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \in R^3$ ， 分别有：

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3$$

$$x = (\xi_1 - \xi_2) y_1 + (\xi_2 - \xi_3) x_2 + \xi_3 x_3$$

例2、 $P[x]_n$ 表示所有次数不超过 n 的多项式所构成的一个线性空间, 则:

$P[x]_n$ 是 $n+1$ 维线性空间

可以验证: $1, x, x^2, \dots, x^n$ 是线性空间 $P[x]_n$ 的一组基, $P[x]_n$ 的维数是 $n+1$ 。

$P[x]$ 表示实系数多项式所构成的一个线性空间, 则:

$P[x]$ 是无限维线性空间

因为对于任何整数 N , 多有 N 个线性无关的向量 $1, x, x^2, \dots, x^N$ 。

例3、 $C^{m \times n}$ 表示所有 $m \times n$ 矩阵构成一个线性空间，

则 $C^{m \times n}$ 是 $m \times n$ 维线性空间

令 E_{ij} 为第 (i, j) 元为1，其余元为0的 $m \times n$ 矩阵，

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{第} i \text{行} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

第 j 列

则 $\{E_{ij} : i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n\}$ 是线性空间

$C^{m \times n}$ 的一组基, $C^{m \times n}$ 的维数是 $m \times n$ 。

引理1

设 x_1, x_2, \dots, x_n 是线性空间 V 的一组基, 则对于 V 的任一元 x , x 可由 x_1, x_2, \dots, x_n 唯一线性表示。

证明 设 x 可由 x_1, x_2, \dots, x_n 有两种线性表示:

$$\begin{aligned}x &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n \\&= \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \cdots + \mu_n x_n\end{aligned}$$

$$(\lambda_1 - \mu_1)x_1 + (\lambda_2 - \mu_2)x_2 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)x_n = 0$$

x_1, x_2, \dots, x_n 是线性空间 V 的一组基, 它们线性无关,

$$\therefore \lambda_i - \mu_i = 0 \quad \lambda_i = \mu_i, i = 1, 2, \dots, n$$

坐标

设 x_1, x_2, \dots, x_n 是线性空间 V 的一组基，
则称 x 由 x_1, x_2, \dots, x_n 唯一线性表示的系数为向量 x 在基 x_1, x_2, \dots, x_n 下的坐标，记为 X 。

即设
$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$$

$$= (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

则
$$X = (\lambda_1 \ \lambda_2 \ \cdots \ \lambda_n)^T$$

引入坐标的意义就在于将抽象的向量与具体的数组向量联系起来了。

说明：在不同的坐标系（或基）中，同一向量的坐标一般是不同的。例如：

例4、在 R^3 中， x_1, x_2, x_3 是与 y_1, y_2, y_3 都是线性空间 R^3 的一组基

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

向量 $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \in R^3$ 在这两组基下的坐标分别为

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T, \quad (\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_3)^T$$

引理2 n 维线性空间 V 的任意 n 个线性无关的向量 x_1, x_2, \dots, x_n 都可构成线性空间 V 的一组基。

证明 设 x_1, x_2, \dots, x_n 是 n 维线性空间 V 的任意一组线性无关的向量, x 是 V 的任一向量, 只要证明:

x 可由 x_1, x_2, \dots, x_n 是线性表示即可

设存在一组不全为0的数 k, l_1, l_2, \dots, l_n 使

$$kx + l_1x_1 + l_2x_2 + \dots + l_nx_n = 0$$

由于 x_1, x_2, \dots, x_n 是线性无关的, 故 $k \neq 0$

进而
$$x = \frac{l_1}{k} x_1 + \frac{l_2}{k} x_2 + \dots + \frac{l_n}{k} x_n$$

所以 x 可由 x_1, x_2, \dots, x_n 是线性表示。

因此 x_1, x_2, \dots, x_n 可构成 V 的一组基

推论1 在 n 维线性空间中，任意 m ($m > n$) 个向量必是线性相关的

推论2 在 n 维线性空间中，任意两组基中所含的向量的数目相同。

下面，讨论当线性空间的基改变时，向量的坐标如何变化，为此，首先介绍过渡矩阵的概念。

二、基变换与过渡矩阵

x_1, x_2, \dots, x_n 与 y_1, y_2, \dots, y_n 是 n 维线性空间 V 的两组不同基。则由基的定义, 有

[illegible]

记作: $(y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n) = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)P$

其中 $P = (p_{ij})_{n \times n}$

称P是由基 x_1, x_2, \dots, x_n 到基 y_1, y_2, \dots, y_n 的过渡矩阵。

过渡矩阵结论

- (1) 过渡矩阵 P 是可逆矩阵;
- (2) 设 P 是由基 x_1, x_2, \dots, x_n 到基 y_1, y_2, \dots, y_n 的过渡矩阵, 则 P^{-1} 是由基 y_1, y_2, \dots, y_n 到基 x_1, x_2, \dots, x_n 的过渡矩阵。

同一向量在不同基下的坐标是不同的。设

$$\begin{aligned}x &= (x_1, x_2, \dots, x_n)X \\&= (y_1, y_2, \dots, y_n)Y \\&= (x_1, x_2, \dots, x_n)PY\end{aligned}$$

由于基向量线性无关, 则 $X = PY$,

得坐标变换公式 $Y = P^{-1}X$

例5、求向量 α 在基 x_1, x_2, x_3 下的坐标

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解法1：由向量坐标的定义，可设：

$$\alpha = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3$$

得方程组
$$\begin{cases} 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ 2 = \lambda_2 + \lambda_3 \\ 1 = \lambda_3 \end{cases}$$

解方程组即可 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$

解法2: 由自然基到基 x_1 , x_2 , x_3 的过渡矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{求得} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

利用坐标变换公式, 则基 x_1 , x_2 , x_3 的坐标为

$$Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

第三节 线性子空间

主要内容：

一、子空间与生成子空间

二、子空间的运算

三、子空间的直和

一、子空间与生成子空间

1、定义：设 V 是一个线性空间， S 是 V 的一个子集，如果 S 关于 V 的加法及数乘也构成一个线性空间，则称 S 是 V 的一个子空间。记为 $S \subseteq V$

定理：线性空间 V 的一个子集 S 是 V 的一个子空间当且仅当 S 关于 V 的加法及数乘是封闭的，即

$$\forall x, y \in S, \lambda, \mu \in F$$

$$\lambda x + \mu y \in S$$

说明：每个非零线性空间至少有两个子空间，一个是它自身，另一个是仅由零向量所构成的子集合，称为零子空间。

2、生成子空间

设 x_1, x_2, \dots, x_k 是线性空间 V 的任意一组向量，
则称所有 x_1, x_2, \dots, x_k 线性表示的集合构成的子空间
(可以验证其为 V 的子空间) 为生成子空间，记

$$\begin{aligned} L &= \{x \in V : x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k\} \\ &= L(x_1, x_2, \dots, x_k) \end{aligned}$$

例 在三维向量空间 R^3 中， e_1, e_2, e_3 是自然基。

则 e_1, e_2 的生成子空间是 x_1-x_2 平面；

e_2, e_3 的生成子空间是 x_2-x_3 平面；

e_1, e_3 的生成子空间是 x_1-x_3 平面；

例1、 n 元齐次方程组 $Ax = \theta$ 的解的集合构成线性空间，称为解空间，记为 $N(A)$ ，即 $N(A) = \{x \mid Ax = \theta\}$ ，

$N(A) \subseteq R^n$.若设 $\text{rank}(A) = r$ ，则 $\dim N(A) = n - r$.

称 $N(A)$ 为 A 的核空间， A 的核空间的维数称为 A 的零度。

例2、矩阵 $A^{m \times n}$ 的列空间：设矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ，则 $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \subseteq R^m$.

$\forall y \in L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ，有 $y = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = Ax$ ，

矩阵 A 的列空间又称为 A 的值域，记为

$$R(A) = \{y \mid y = Ax, A \in R^{m \times n}, x \in R^n\} .$$

生成子空间的维数

x_1, x_2, \dots, x_k 的任一极大无关组构成生成子空间 $L(x_1, x_2, \dots, x_k)$ 的基。

记 $\dim L(x_1, x_2, \dots, x_k) = r$

r 为向量组 x_1, x_2, \dots, x_k 的秩.

从而有: $\dim R(A) = \text{rank} A$;

$$\dim R(A) + \dim N(A) = n$$

基的扩充定理 n 维线性空间 V 的任意一组线性无关的向量 x_1, x_2, \dots, x_r 都可扩充为线性空间 V 的一组基。(可用归纳法证明)

二、子空间的运算

设 S_1, S_2 是线性空间 V 的两个子空间，定义子空间的交空间与和空间（仍为 V 的子空间）：

$$S_1 \cap S_2 = \{x \in V \mid x \in S_1, x \in S_2\}$$

$$S_1 + S_2 = \{x \in V \mid x = x_1 + x_2, x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$$

例如，在线性空间 \mathbf{R}^3 中， v_1 表示过原点的直线 L_1 上所有向量形成的子空间， v_2 表示另一条过原点的直线 L_2 上所有向量形成的子空间，则

$V_1 \cap V_2$ 是由原点（ L_1 与 L_2 的交点）构成的零子空间；

$V_1 + V_2$ 是由 L_1 与 L_2 所决定的平面上全体向量构成的子空间。

子空间的维数公式

设 S_1, S_2 是线性空间 V 的两个子空间, 则

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2)$$

证明 记 $\dim(S_1) = r, \dim(S_2) = s, \dim(S_1 \cap S_2) = t$

要证明 $\dim(S_1 + S_2) = r + s - t$

事实上, 取 $S_1 \cap S_2$ 的一组基 x_1, x_2, \dots, x_t ,

将它分别扩充为 S_1, S_2 的基 $x_1, x_2, \dots, x_t, y_1, y_2,$

\dots, y_{r-t} 与 $x_1, x_2, \dots, x_t, z_1, z_2, \dots, z_{s-t}$

只需证明 $S_1 + S_2$ 的基恰好是

$x_1, x_2, \dots, x_t, y_1, y_2, \dots, y_{r-t}, z_1, z_2, \dots, z_{s-t}$

设 $k_1x_1 + \cdots + k_tx_t + p_1y_1 + \cdots + p_{r-t}y_{r-t} + q_1z_1 + \cdots + q_{s-t}z_{s-t} = 0$

记 $x = k_1x_1 + \cdots + k_tx_t + p_1y_1 + \cdots + p_{r-t}y_{r-t} = -(q_1z_1 + \cdots + q_{s-t}z_{s-t})$

则 $x \in S_1 \cap S_2$

从而可设 $x = l_1x_1 + \cdots + l_tx_t$

由 $x = l_1x_1 + \cdots + l_tx_t = -(q_1z_1 + \cdots + q_{s-t}z_{s-t})$

得 $l_1x_1 + \cdots + l_tx_t + (q_1z_1 + \cdots + q_{s-t}z_{s-t}) = 0$

由 $x_1, x_2, \dots, x_t, z_1, z_2, \dots, z_{s-t}$ 为 S_2 的基知

$$l_1 = \cdots = l_t = q_1 = \cdots = q_{s-t} = 0$$

进而得 $x=0$, 及 $k_1x_1 + \cdots + k_tx_t + p_1y_1 + \cdots + p_{r-t}y_{r-t} = 0$

$$k_1 = \cdots = k_t = p_1 = \cdots = p_{r-t} = 0$$

故向量组 $x_1, x_2, \dots, x_t, y_1, y_2, \dots, y_{r-t}, z_1, z_2, \dots, z_{s-t}$ 线性无关, 并构成 $S_1 + S_2$ 的基。

例3、求 $L_1 = L(\alpha_1, \alpha_2), L_2 = L(\beta_1, \beta_2)$ 的交空间与和空间的维数与基

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

解 由于 $L = L_1 + L_2 = L(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ 并且 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 的极大线性无关组, 故 $\dim(L_1 + L_2) = 3$
 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ 是和空间L的一组基。

由维数公式得交空间的维数是1, 现在要求交空间的一组基。

设 $\alpha \in L_1 \cap L_2$, 则 $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = l_1\beta_1 + l_2\beta_2$

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 - l_1\beta_1 - l_2\beta_2 = 0$$

解齐次线性方程组

$$\begin{cases} k_1 & -k_2 & -2l_1 & -l_2 & = 0 \\ 2k_1 & +k_2 & +l_1 & +l_2 & = 0 \\ k_1 & +k_2 & & -3l_2 & = 0 \\ & k_2 & -l_1 & -7l_2 & = 0 \end{cases}$$

得出基础解系 $(1, -4, 3, -1)^T$

则 $\alpha = \alpha_1 - 4\alpha_2 = 3\beta_1 - \beta_2 = (5, -2, -3, -4)^T$

是交空间的一组基。

例4、设 $R^{2 \times 2}$ 的两个子空间为

$$V_1 = \left\{ A \left| A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right. \right\}$$

$$V_2 = \text{span}(B_1, B_2) \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

试将 $V_1 + V_2$ 表示为生成子空间

提示：首先将 V_1 表示为生成子空间：

方程 $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$ 的基础解系为

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

它们对应着 V_1 的一组基:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

即 $V_1 = \text{span}(A_1, A_2, A_3)$ 从而

$$V_1 + V_2 = \text{span}(A_1, A_2, A_3, B_1, B_2)$$

求得5个矩阵对应的5个向量的一个极大无关组即可。

三、子空间的直和

设 S_1, S_2 是线性空间 V 的两个子空间, 如果交空间 $=\{0\}$, 则称和空间为直和, 记做 $S_1 \oplus S_2$

定理: 设 S_1, S_2 是线性空间 V 的两个子空间, 则下列命题等价

(1) 和空间 $S_1 + S_2$ 为直和;

(2) 和空间 $S_1 + S_2$ 的任意元 α 可唯一表示成

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \in S_1, \alpha_2 \in S_2$$

(3) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是 S_1 的基, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 是 S_2 的基,

则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 是 $S_1 + S_2$ 的基。

(4) $\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2)$

命题 设 S 是 n 维线性空间 V 的一个子空间, 则存在子空间 T , 使得

$$V = S \oplus T \text{ 并称 } T \text{ 是 } S \text{ 的补空间。}$$

证明: 设 x_1, x_2, \dots, x_k 是 S 的一组基, 则它可扩充为 V 的一组基 $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n$,

$$\text{令 } T = \text{span}(x_{k+1}, \dots, x_n),$$

$$\text{则 } \dim V = \dim(S) + \dim(T)$$

$$\text{从而 } V = S \oplus T$$

说明: 线性空间可做直和分解, 但直和分解不是惟一的。