第一章 第四节　线性映射与线性变换

主要内容:

一 线性变换

二 线性变换的运算

三 线性变换的值域与核

一、线性映射（变换）的定义及性质

设V, W是数域F上的两个线性空间，T是从V到W的一个映射，如果对于

$$\forall x_1, x_2 \in V, \lambda, \mu \in F, \text{成立}$$

$$T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda T x_1 + \mu T x_2$$

则称T是从V到W的一个线性映射或线性算子。

当 V=W时，T也称为V上的一个线性变换。

线性变换举例：

例1　恒等变换

$$T:\quad V \longrightarrow V$$

$$x \longrightarrow x$$

$$Tx = x$$

例2　0-变换

$$T:\quad V \longrightarrow V$$

$$x \longrightarrow 0$$

$$Tx = 0$$

例3　求导运算是多项式空间 $C_n[x]$ 上的线性变换。

$$C_n[x]=\{p(x) \mid p(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, a_i \in C\}$$

$$T=\tfrac{d}{dx}: \quad C_n[x] \to C_n[x]$$

$$p(x) \to p'(x)$$

例4　定义在闭区间[a, b]上的所有连续函数的集合C[a, b]是一个线性空间，则C[a, b]的积分运算是线性变换。

$$T(f(x))=\int_a^x f(x)dx, \qquad f(x) \in C[a,b]$$

线性映射（变换）$T:V\to W$ 有以下性质：

(1) $T(\theta_V)=\theta_W$；

(2) $T(-\alpha)=-T(\alpha)$；

（3）T将V中的线性相关向量组映射为W中的线性相关向量组，但把线性无关向量组不一定映射为W中的线性无关向量组；

（4）设 $V_1\subseteq V$，则 $T(V_1)\subseteq W$，并且

$$\dim T(V_1)\le \dim V_1.$$

二、线性变换的运算

设 T_1, T_2 都是线性空间V的线性变换，定义线性变换的加法，

$$(T_1+T_2)(\alpha)=T_1(\alpha)+T_2(\alpha), \qquad \forall \alpha \in V$$

设T是线性空间V的一个线性变换，k是数域F上的一个数，定义线性变换的数乘，

$$(kT)(\alpha)=k(T(\alpha)), \qquad \alpha \in V$$

可以验证，线性空间V的线性变换经加法与数乘运算后仍为线性变换，并且满足下列基本性质

（1） 交换律 $T_1+T_2=T_2+T_1$

（2） 结合律 $(T_1+T_2)+T_3=T_1+(T_2+T_3)$

（3） 存在零变换o， $T+o=T$

（4） 存在负变换-T， $T+(-T)=o$

（5） 第一分配律 $k(T_1+T_2)=kT_1+kT_2$

（6） 第二分配律 $(k+l)T=kT+lT$

（7） 结合律 $(kl)T=k(lT)$

（8） $1T=T$

令 $End(V)$ 表示n维线性空间V的所有线性变换的集合，则

$End(V)$ 在线性变换的加法与数乘运算下构成数域F上的一个 $n\times n$ 维线性空间。

设 T_1, T_2 都是线性空间V的线性变换，定义线性变换的积，$(T_1T_2)(\alpha)=T_1(T_2(\alpha)), \quad \forall\alpha\in V$

容易验证线性空间V上线性变换的积也是一个线性变换，并且满足下述性质

（1） 结合律 $(T_1T_2)T_3=T_1(T_2T_3)$

（2） 分配律 $T(T_1+T_2)=TT_1+TT_2$

$$(T_1+T_2)T=T_1T+T_2T$$

需要注意的是，线性变换的积一般不满足交换律，即 $T_1T_2\neq T_2T_1$

例：在R^2 中定义线性变换：$T_1[(x,y)]=(y,x),\ T_2[(x,y)]=(x,0),$

由于 $T_1T_2[(x,y)]=T_1[(x,0)]=(0,x),$

$T_2T_1[(x,y)]=T_2[(y,x)]=(y,0),$ 则 $T_1T_2\neq T_2T_1$

线性变换的积满足交换律，即 $T_1T_2 = T_2T_1$，则称 T_2是T_1 的逆变换， 此时也称 T_1 是可逆线性变换。

当T是可逆变换时，定义 $T^{-m} = \left(T^m\right)^{-1}$

设T是线性空间V的一个线性变换，

$$f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_m\lambda^m$$

是一个多项式，则T的多项式为

$$f(T) = a_0 I + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots + a_m T^m$$

三、线性变换的值域与核

设T是n维线性空间V的一个线性变换，定义T的值域R(T)与核N（T)分别为

$R(T)=\{y=Tx,x\in V\}$ --T的全体象组成的集合

$N(T)=\{x\in V:Tx=0\}$ --被T变成零向量的向量组成的集合

设A是n阶矩阵，A的值域R(A)与核N（A)分别为

$$R(A)=\{y=Ax,x\in R^n\}$$

$$N(A)=\{x\in R^n:Ax=0\}$$

实例

求导运算T在多项式空间$C_n[x]$上的值空间R(T)与核空间N（T)分别为

$$R(T)=L\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$$

$$N(T)=\{1\}$$

注： $C_n[x] \neq R(T)+N(T)$

定理：设T是n维线性空间V的一个线性变换，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是n维线性空间V的基，

则 （1） T的值域R(T)与核N（T)都是V的子空间；分别称为象子空间，核子空间；

$$(2)R(T)=L(T\alpha_1,T\alpha_2,\cdots,T\alpha_n)$$

（3）dim(R(T))+dim(N(T))=n.

象子空间的维数dim R(T) 称为T的秩，核子空间的维数称为T的零度（或亏）

证（3）（3）dim(R(T))+dim(N(T))=n.

设$\dim N(T)=r$，令 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 $N(T)$ 的一组基，把它扩充为V的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$，则有

$$R(T)=L(T\alpha_1,T\alpha_2,\cdots,T\alpha_n)=L(T\alpha_{r+1},\cdots,T\alpha_n)$$

要证$\dim R(T)=n-r$，只要证明 $T\alpha_{r+1},\cdots,T\alpha_n$，线性无关。

设 $k_{r+1}T\alpha_{r+1}+\cdots+k_nT\alpha_n=0$ 则有 $T(k_{r+1}\alpha_{r+1}+\cdots+k_n\alpha_n)=0$

即 $k_{r+1}\alpha_{r+1}+\cdots+k_n\alpha_n\in N(T)$

所以 $k_{r+1}\alpha_{r+1}+\cdots+k_n\alpha_n=k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r$

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$ 是V的一组基，则 $k_i=0$

$T\alpha_{r+1},\cdots,T\alpha_n$，线性无关。

例 在 R^3 中定义**T**：$T(x_1,x_2,x_3)^T=(x_1,x_1+x_2,x_2+x_3)^T$，求**T**的值域与核，并确定其秩与零度。

解：容易验证**T**为 R^3 上的线性变换，设

$$\alpha=(x_1,x_2,x_3)^T\in N(T)$$

则由 $T(\alpha)=(x_1,x_1+x_2,x_2+x_3)^T=(0,0,0)^T$，

解得 $x_1=x_2=x_3=0,$ 从而 $N(T)=\{\theta\},$

T的零度为**0**； **T**的秩为**3**；

又因为 $R(T)\subseteq R^3,$ 所以 $R(T)=R^3.$

第五节　线性变换的矩阵表示

主要内容：

一、线性变换的矩阵表示

二、相似矩阵

三、线性变换的特征值与特征向量

四、不变子空间（自学）

一、线性变换的矩阵表示

设T是n维线性空间V的一个线性变换， $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是n维线性空间V的基,基向量的象可以被基线性表出，即

$$\begin{cases} T\alpha_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{n1}\alpha_n \\ T\alpha_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{n2}\alpha_n \\ \quad\cdots\cdots\cdots \\ T\alpha_n = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n \end{cases}$$

记$A = (a_{ij})_{n\times n}$

$$T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) = (T\alpha_1,\cdots,T\alpha_n) = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$$

称A为T在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵。

说明（1）矩阵A的第i列恰是 $T\alpha_i$ 的坐标；

（2）给定n维线性空间V的基后，V上的线性变换与n阶矩阵之间存在一一对应关系。

（3）设T_1，T_2是n维线性空间V的两个线性变换，

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是n维线性空间V的基，T_1，T_2在该基下的矩阵为 A,B，则T_1+T_2，kT_1, T_1T_2，T^{-1}在该基下矩阵分别为 $A+B,kA,AB,A^{-1}$

（4）设n维线性空间V的一个线性变换T在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的矩阵为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,且向量α 在该基下的坐标为 $(x_1,x_2,\cdots x_n)^T$，则 $T\alpha$ 在该基下的坐标为

$$A(x_1,x_2,\cdots x_n)^T.$$

（5）设$f(t)=a_0t^m+a_1t^{m-1}+\cdots+a_{m-1}t+a_m$ 是纯量多项式，T 为V中的线性变换，且对V的基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 有

$$T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(T\alpha_1,\cdots,T\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$$

则V的线性变换f(T)在该基下的矩阵为：

$$f(A)=a_0A^m+a_1A^{m-1}+\cdots+a_{m-1}A+a_mI,$$

其中f(A)称为矩阵A的多项式。

例1、试确定在多项式空间$P_n[x]$上的求导运算T分别在下列两组基下的表示矩阵

① $e_1=1, e_2=x, e_3=x^2, \cdots, \ e_{n+1}=x^n$,

② $\alpha_1=1, \alpha_2=x, \alpha_3=\dfrac{x^2}{2!}, \cdots, \ \alpha_{n+1}=\dfrac{x^n}{n!}$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

说明：同一线性变换在不同基下的表示矩阵一般是不同的，它们之间的关系是相似矩阵。

例2、在R^3中线性变换T将基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 变为基 β_1,β_2,β_3

其中 $\alpha_1=(1,1,-1)^T,\alpha_2=(0,2,-1)^T,\alpha_3=(1,0,-1)^T$

$$\beta_1=(1,1,0)^T,\beta_2=(0,1,-1)^T,\beta_3=(0,3,-2)^T$$

（1）求T在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的表示矩阵；

（2）求向量$\xi=(1,2,3)^T$及 $T(\xi)$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标

解（1）依题意 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$

则 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

（2）设 $\xi=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

则 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}\xi$ $\quad\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

二、相似矩阵

定理：T在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为A，在基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的矩阵为B，

从基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵为P，则$B=P^{-1}AP$

证明 $\because(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$

$$T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$$

$$\therefore T(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)PB$$

$$T(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=T[(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P]$$

$$=[T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)]P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)AP$$

$$\therefore(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)PB=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)AP$$

再由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关可得： $PB=AP$,

从而有 $B=P^{-1}AP$

设 $A, B \in C^{n\times n}$ 如果存在可逆矩阵P，使得 $B = P^{-1}AP$

则称矩阵A与B是相似的，记为A $\sim$B

矩阵的相似关系是一个等价关系，可以利用这一关系将n阶矩阵划分为若干等价类. 进而得出

[1] n维线性空间V的同一线性变换在不同基下的矩阵是相似的。

[2] n维线性空间V的一个线性变换与n阶矩阵的一个等价类一一对应。

- 已知A与B相似，则

$$(1) A^m \sim B^m;$$

$$(2) A^{-1} \sim B^{-1}, A^* \sim B^*, \text{当} A^{-1} \text{存在时}.$$

$$(3) f(\lambda) \text{ 为纯量多项式 则 } f(B) = P^{-1}f(A)P$$

例3、设T是 $R^{2\times 2}$ 的线性变换，$\forall M \in R^{2\times 2}$，有 $T(M)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}M$，

求T在基 $A_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $A_2=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $A_3=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $A_4=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

下的表示矩阵。

解法一：直接法（同例1）

解法二：利用同一线性变换在不同基下的表示矩阵是相似矩阵这一结论。

选取一组简单基：$E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$，

基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 到基的过渡矩阵为 $P=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 在T下的象为：

$$T(E_{11})=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}E_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\qquad T(E_{12})=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},$$

$$T(E_{21})=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}E_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\-1&0\end{bmatrix},\qquad T(E_{22})=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}E_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&-1\end{bmatrix},$$

T在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ **下的表示矩阵为：**

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$$

则T在基 A_1, A_2, A_3, A_4 **下的表示矩阵为：**

$$B=P^{-1}AP$$

三、线性变换的特征值与特征向量

定义 设T是n维线性空间V的一个线性变换，对于数 $\lambda \in F$ ，如果存在非零向量 $\alpha \in V$ ，使得，

$$T\alpha = \lambda\alpha$$

则称 λ 是T的特征值， α 是T的属于 λ 的特征向量，简称特征向量。

性质（1）若 α 是对应于特征值 λ 的特征向量，则 $k\alpha$ 也是对应于特征值 λ 的特征向量；

（2）特征值 λ 的全体特征向量及零向量组成的集合是一线性空间，记为

$$V_\lambda = \{\alpha \in V \mid T\alpha = \lambda\alpha\}$$ 称为V的特征子空间

下面讨论确定线性变换特征值与特征向量的方法

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是n维线性空间V的一组基，线性变换T在这组基下的矩阵为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$

令 λ 是T的特征值，α 是T的属于 λ 的特征向量。

设 α 关于基的坐标为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，则 $T\alpha,\lambda\alpha$ 关于基的坐标分别为 $A(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，$\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$

由 $T\alpha=\lambda\alpha$ 知

$$A(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T = \lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$$

从而有 $(\lambda I-A)(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T=0$ 又 $\alpha\neq 0$

因此 λ 满足 $|\lambda I-A|=0$

矩阵的特征值

设A是n阶矩阵，$\lambda \in C$,对于$X \in C^n$,如果 $AX = \lambda X$

- 则称 λ 是A的特征值，X是A属于λ 的特征向量。
- 定义矩阵A的特征多项式为

$$f_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

给定一个n阶矩阵A $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

称 $A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{pmatrix}$ 为A的特征矩阵。

称 $\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}=0$ 为矩阵A的特征方程。

例　　计算A的特征值与特征向量。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

计算过程

矩阵A的特征多项式为

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda=1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$$

A的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=5$

对于 $\lambda_1=-1,$ 解方程组(-I-A)X=0,得特征向量

$x_1=(1,0,-1)^T$, $X_2=(0,1,-1)^T$

对于 $\lambda_2=5$ 解方程组(5I-A)X=0,得特征向量

$x_3=(1,1,\ 1)^T$

A的特征向量 $k_1X_1+k_2X_2$,或,kX_3

从以上的讨论可知：欲求线性变换T的特征值和特征向量，只要求出T的矩阵A的特征值和特征向量。

T的特征值就是A的特征值，而T的特征向量在线性空间V的基下的坐标与A的特征向量一致。

例：设线性变换T在线性空间V中的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

求T的特征值和特征向量

计算过程

矩阵A的特征多项式为

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda=1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$$

T的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=5$

对于 $\lambda_1=-1,$ 解方程组(-I-A)X=0,得基础解系:

$x_1=(1,0,-1)^T, X_2=(0,1,-1)^T$

T的属于λ_1 的两个线性无关的特征向量为

$$y_1=\alpha_1-\alpha_3, y_2=\alpha_2-\alpha_3$$

对于 $\lambda_2=5$ 解方程组(5I-A)X=0,得基础解系$x_3=(1,1,\ 1)^T$

T的属于λ_2的特征向量 $y_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

T的全体特征向量为 $k_1y_1+k_2y_2$或ky_3

相似矩阵的性质

(1)　　特征值相同。

(2)　　行列式相等，迹相等

(3)　　秩相等

(4)　　特征多项式相等，即

$$\left|\lambda E - A\right| = \left|\lambda E - B\right|$$

例　设A与B相似，求参数a及b

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&1&a\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&&\\&b&\\&&1\end{pmatrix}$$

解　依相似矩阵的性质

$$\begin{cases}|A|=|B|\\ \sum a_{ii}=\sum b_{ii}\end{cases}$$

可得方程组：

$$\begin{cases}2a-1=b\\3+a=2+b\end{cases}\Rightarrow a=2,b=3$$

特征值性质

- 设矩阵A=(a $_{ij}$)的特征多项式为

$$f_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

则

$$(1)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=tr(A)$$

$$(2)\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=\left|A\right|=\det(A)$$

矩阵的谱

设A是n阶矩阵，A的相异特征值的集合

$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s\}$ 称为矩阵A的谱.

设矩阵A的特征多项式为

$$f_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{m_s}$$

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_s = n$$

称m_i是特征值 λ_i 的代数重复度。

A的特征子空间

设A是n阶矩阵, 定义A的相应于特征值 λ_i 的特征子空间为

$$W_{\lambda_i} = \{X \in C^n \mid AX = \lambda_i X\},$$

$$n_i = \dim W_{\lambda_i} = n - rank(\lambda_i I - A)$$

- 称n_i 为 λ_i 的几何重复度。

定理　n阶矩阵A的任一特征值的几何重复度不大于代数重复度。

定理　n阶矩阵A的任一特征值的几何重复度不大于代数重复度。

证明　　设A是线性空间C^n的线性变换T在某组基下的表示矩阵，m_i，n_i是特征值λ_i的代数重复度与几何重复度，对于特征子空间W,存在补空间V,使得 $C^n = V \oplus W$

取W与V的一组基，不妨记做 $X_1, \cdots, X_{n_i}, Y_{n_i+1}, \cdots, Y_n$

则T在此基下的表示矩阵为 $B = \begin{pmatrix} \lambda_i I_{n_i} & B_1 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$

因为A与B相似，故

$$f_A(\lambda) = f_B(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{n_i} \left| \lambda I - B_2 \right|$$

所以,λ_i 的代数重复度不小于n_i

定义 设V,W是数域F上的两个线性空间，T是从V到W的一个线性映射，如果T是1-1映射，则称T是从V到W的一个同构映射；并称线性空间V,W是同构的。

例 R上的任意n维线性空间V与n维向量空间 R^n 是同构的；n维线性空间V的所有线性变换形成的 $n\times n$ 维线性空间 $End(T,T)$ 与 $n\times n$ 阶矩阵形成的线性空间同构。

定理 设T是从V到W的一个同构变换，则

(1) $T0=0, T(-\alpha)=-T\alpha, \qquad \alpha\in V$

(2) T将V的线性无关组变换为W的线性无关组；

(3) T将V的基变换为W的基；

(4) $\dim V=\dim W$

线性空间V,W是同构的意义在于它们有相同的代数性质

四、不变子空间

- 设T是n维线性空间V的一个线性变换，S是V的一个子空间，称S是V的一个关于T的不变子空间，如果

$$TS \subseteq S,$$

即$T\alpha \in S, \forall \alpha \in S$

例　　设T是n维线性空间V的一个线性变换，

（1）T的值空间R(T)与核空间N（T)都是T的不变子空间。

（2）T的特征子空间是T的不变子空间。

$$W_\lambda = \{\alpha \in V \mid T\alpha = \lambda\alpha\}, \lambda \in C$$