# 第七章　矩阵函数与矩阵值函数

矩阵函数与矩阵值函数是矩阵理论的重要内容，它们在力学、控制理论、信号处理等学科中具有重要应用。本章介绍矩阵函数与矩阵值函数的概念，讨论它们的有关性质以及矩阵值函数的微分和积分，并研究它们在微分方程组中的应用。

主要内容包括：

- **7.1 矩阵函数**
  - 矩阵函数的幂级数表示
  - 矩阵函数的计算
- **7.2 函数矩阵与矩阵值函数**
  - 函数矩阵
  - 矩阵值函数
- **7.3 矩阵值函数在微分方程组中的应用**

## 7.1　矩阵函数

矩阵函数的概念与通常的函数概念类似，不同在于这里的自变量和因变量都是$n$阶矩阵。本节首先以定理6.3.7和矩阵幂级数的和为依据，给出矩阵函数的幂级数表示，并讨论矩阵指数函数矩阵和矩阵三角函数的性质。其次以Hermite多项式插值为基础，给出矩阵函数的多项式表示。

**7.1.1 矩阵函数的幂级数表示**

- 定义7.1.1　设$A \in C^{n\times n}$，一元函数$f(z)$能够展开为$z$的幂级数

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

并且该幂级数的收敛半径为$R$.当矩阵 $A$ 的谱半径$\rho(A) < R$时，则将收敛矩阵幂级数$\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$的和定义为**矩阵函数**，记为$f(A)$，即

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$$

当$|z| < +\infty$时，有

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + ... + \frac{1}{n!}z^n + ...$$

$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^3 - ... + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1} + ...$$

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - ... + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}z^{2n} + ...$$

则由推论6.3.2可知，对任意$A \in C^{n \times n}$，矩阵幂级数

$$I + A + \frac{1}{2!}A^2 + ... + \frac{1}{n!}A^n + ...$$

$$A - \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{5!}A^3 - ... + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}A^{2n+1} + ...$$

$$I - \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{4!}A^4 - ... + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}A^{2n} + ...$$

都是收敛的，它们的和分别记为$e^A$,$\sin A$,$\cos A$.
通常称$e^A$为矩阵指数函数，$\sin A$和$\cos A$为矩阵三角函数。

由以上式子，可推得下面一组等式

$$\begin{cases} e^{iA} = \cos A + i\sin A \\ \cos A = \frac{1}{2}(e^{iA} + e^{-iA}) \\ \sin A = \frac{1}{2i}(e^{iA} - e^{-iA}) \\ \cos(-A) = \cos A \\ \sin(-A) = -\sin A \end{cases}$$

其中$i = \sqrt{-1}$。

- 如果把矩阵函数$f(A)$的变元方阵$A$换为$At$，$t$为参数，则得到

$$f(At) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (At)^k$$

- 指数函数的运算规则$e^ae^b=e^be^a=e^{a+b}$对矩阵指数函数一般不再成立。
- **例** 令

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

则$A=A^2=A^3=...$,$B=B^2=B^3=...$，并且

$$A+B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, (A+B)^k=2^{k-1}(A+B), k\geq 1$$

于是

$$e^A=I+(e-1)A=\begin{pmatrix}e & 1-e\\ 0 & 1\end{pmatrix}, e^B=I+(e-1)B=\begin{pmatrix}e & e-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

因此

$$e^Ae^B=\begin{pmatrix}e^2 & (e-1)^2\\ 0 & 1\end{pmatrix}, e^Be^A=\begin{pmatrix}e^2 & -(e-1)^2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$e^{A+B}=I+\frac{1}{2}(e^2-1)(A+B)=\begin{pmatrix}e^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

可见$e^Ae^B$,$e^Be^A$,$e^{A+B}$互不相等。

- **定理7.1.1** 设$A, B \in C^{n\times n}$，如果$AB = BA$，则

$$e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$$

- **证明** 因为矩阵的加法满足交换律，所以只需证明$e^A e^B = e^{A+B}$即可.

$$\begin{aligned} e^A e^B &= (I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + ...)(I + B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + ...) \\ &= I + (A+B) + \frac{1}{2!}(A^2 + AB + BA + B^2) + \frac{1}{3!}(A^3 + 3A^2B + 3AB^3 + B^3) + ... \\ &= I + (A+B) + \frac{1}{2!}(A+B)^2 + \frac{1}{3!}(A+B)^3 + ... = e^{A+B} \end{aligned}$$

- **推论7.1.1** 设$A \in C^{n\times n}$，则

(1) $e^A e^{-A} = e^{-A} e^A = I$

(2) 设$m$为整数，则$(e^A)^m = e^{mA}$.

- **定理7.1.2** 设$A, B \in C^{n\times n}$，则

(1) $\sin^2 A + \cos^2 A = I$;

(2) 如果$AB = BA$，则

$$\begin{cases} \sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B \\ \sin 2A = 2\sin A\cos A \\ \cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B \\ \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A \end{cases}$$

- **证明** 这里仅证明（2）中的第一个等式。

$$\begin{aligned} \sin(A+B) &= \frac{1}{2i}(e^{i(A+B)} - e^{-i(A+B)}) = \frac{1}{2i}(e^{iA}e^{iB} - e^{-iA}e^{-iB}) \\ &= \frac{1}{2i}(e^{iA} - e^{-iA})\frac{1}{2}(e^{iB} + e^{-iB}) + \frac{1}{2}(e^{iA} + e^{-iA})\frac{1}{2i}(e^{iB} - e^{-iB}) \\ &= \sin A\cos B + \cos A\sin B \end{aligned}$$

- **例7.1.1** 设$A \in C^{n\times n}$且$\rho(A) < 1$，对函数$f(z) = \ln(1+z)(|z| < 1)$，求矩阵函数$f(A)$.
- **解** 因为当$|z| < 1$时有

$$\ln(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - ... + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}z^n + ...$$

而$\rho(A) < 1$，则由定理6.3.7可得

$$f(A) = \ln(I+A) = A - \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 - ... + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}A^n + ...$$

- 对矩阵$A \in C^{n\times n}$和函数$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$，下面讨论如何计算矩阵函数$f(A)$.我们约定所计算的矩阵幂级数收敛。
- 利用相似对角化
- 设$A$相似于对角阵$D$，即存在可逆矩阵$P$，使

$$P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = D$$

$$\begin{aligned} f(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (PDP^{-1})^k = P\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k\right) P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

- 同理，

$$f(At) = Pdiag(f(\lambda_1 t), f(\lambda_2 t), \cdots, f(\lambda_n t))P^{-1}$$

- **例** 设$A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$，求$e^{At}$，$\cos A$。
- **解** $\det(\lambda I-A)=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$，所以$\lambda_1=-2$,$\lambda_2=\lambda_3=1$，求得对应的特征向量：

$$\lambda_1=-2; x_1=(-1,1,1)^T$$

$$\lambda_2=\lambda_3=1; x_2=(-2,1,0)^T; x_3=(0,0,1)^T$$

于是可取$P=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，因此

$$e^{At}=P\begin{pmatrix}e^{-2t}&&\\&e^t&\\&&e^t\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}2e^t-e^{-2t}&2e^t-2e^{-2t}&0\\e^{-2t}-e^t&2e^{-2t}-e^t&0\\e^{-2t}-e^t&2e^{-2t}-2e^t&e^t\end{pmatrix}$$

$$\cos A=P\begin{pmatrix}\cos(-2)&&\\&\cos 1&\\&&\cos 1\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}2\cos 1-\cos 2&2\cos 1-2\cos 2&0\\\cos 2-\cos 1&2\cos 2-\cos 1&0\\\cos 2-\cos 1&2\cos 2-2\cos 1&\cos 1\end{pmatrix}$$

- Jordan 标准型法
- 如果矩阵$A$有 Jordan 标准型$J$，即存在可逆矩阵$P$使得

$$P^{-1}AP = J = diag(J_1, ...J_s)$$

其中

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_i & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{n_i \times n_i}$$

则

$$\begin{aligned} f(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k = P(\sum_{k=0}^{\infty} c_k J^k)P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} c_k J_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^{\infty} c_k J_s^k \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} f(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(J_s) \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

其中

$$
\begin{aligned}
f(J_i) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k J_i^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} c_k\lambda_i^k & \frac{1}{1!}\sum_{k=0}^{\infty} c_k C_k^1 \lambda_i^{k-1} & \cdots & \frac{1}{(n_i-1)!}\sum_{(n_i-1)!}^{\infty} c_k C_k^{n_i-1}\lambda_i^{k-n_i+1} \\ & \sum_{k=0}^{\infty} c_k\lambda_i^k & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{1}{1!}\sum_{k=0}^{\infty} c_k C_k^1 \lambda_i^{k-1} \\ & & & \sum_{k=0}^{\infty} c_k\lambda_i^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(n_i-1)!}f^{(n_i-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) \\ & & & f(\lambda_i) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- **例7.1.2** 设$A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix}$, 求$e^A$,$e^{At}$和$\sin A$.

- **解** 由于存在可逆矩阵$P=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$使得$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,

当$f(x)=e^x$时，$f(1)=e$,$f'(1)=\frac{\mathrm{d}e^x}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=1}=e$,则

$$e^A=P\begin{pmatrix}e & 0 & 0\\ 0 & e & e\\ 0 & 0 & e\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}-e & -2e & 6e\\ -e & 0 & 3e\\ -e & -e & 4e\end{pmatrix}$$

当$f(x)=e^{xt}$时，$f(1)=e^t$，$f'(1)=\frac{\mathrm{d}e^{xt}}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=1}=te^t$，则

$$e^{At}=P\begin{pmatrix}e^t & 0 & 0\\ 0 & e^t & te^t\\ 0 & 0 & e^t\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}(1-2t)e^t & -2te^t & 6te^t\\ -te^t & (1-t)e^t & 3te^t\\ -te^t & -te^t & (1+3t)e^t\end{pmatrix}$$

当$f(x)=\sin x$时，$f(1)=\sin 1$，$f'(1)=\frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=1}=\cos 1$，则

$$e^{At}=P\begin{pmatrix}\sin 1 & 0 & 0\\ 0 & \sin 1 & \cos 1\\ 0 & 0 & \sin 1\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}\sin 1-2\cos 1 & -2\cos 1 & 6\cos 1\\ -\cos 1 & \sin 1-\cos 1 & 3\cos 1\\ -\cos 1 & -\cos 1 & \sin 1+3\cos 1\end{pmatrix}$$

- 数项级数求和法
- 对每个方阵$A$，总存在次数小于等于$A$的阶数的首项系数为1的多项式

$$\Psi(\lambda) = \lambda^m + b_1\lambda^{m-1} + \cdots + b_{m-1}\lambda + b_m, 1 \le m \le n$$

满足$\Psi(A) = 0$，即

$$A^m + b_1A^{m-1} + \cdots + b_{m-1}A + b_mI = 0$$

或者

$$A^m = k_0I + k_1A + \cdots + k_{m-1}A^{m-1}, k_i = -b_{m-i}$$

由此可求出

$$\begin{cases} A^{m+1} = k_0^{(1)}I + k_1^{(1)}A + \cdots + k_{m-1}^{(1)}A^{m-1} \\ \vdots \\ A^{m+l} = k_0^{(l)}I + k_1^{(l)}A + \cdots + k_{m-1}^{(l)}A^{m-1} \\ \vdots \end{cases}$$

- 于是，

$$
\begin{aligned}
f(A)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kA^k &= (c_0I+c_1A+\cdots+c_{m-1}A^{m-1})+c_m(k_0I+k_1A+\cdots+k_{m-1}A^{m-1}) \\
&\quad +\cdots+c_{m+l}(k_0^{(l)}I+k_1^{(l)}A+\cdots+k_{m-1}^{(l)}A^{m-1})+\cdots \\
&= (c_0+\sum_{l=0}^{\infty}c_{m+l}k_0^{(l)})I+(c_1+\sum_{l=0}^{\infty}c_{m+l}k_1^{(l)})A+\cdots+(c_{m-1}+\sum_{l=0}^{\infty}c_{m+l}k_{m-1}^{(l)})A^{m-1}
\end{aligned}
$$

- 可见，矩阵幂级数的求和问题可以转化为$m$个数项级数的求和问题。

- 例 设$A=\begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求$\sin A$.
- 解 令$\Phi(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\lambda^4-\pi^2\lambda^2$。由于$\varphi(A)=0$，所以$A^4=\pi^2A^2$,$A^5=\pi^2A^3$,$A^7=\pi^4A^3$，于是

$$\begin{aligned}
\sin A &= A-\frac{1}{3!}A^3+\frac{1}{5!}A^5-\frac{1}{7!}A^7+\frac{1}{9!}A^9-\cdots \\
&= A-\frac{1}{3!}A^3+\frac{1}{5!}\pi^2A^3-\frac{1}{7!}\pi^4A^3+\frac{1}{9}\pi^6A^3-\cdots \\
&= A+\left(-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}\pi^2-\frac{1}{7!}\pi^4+\frac{1}{9!}\pi^6-\cdots\right)A^3 \\
&= A+\frac{\sin\pi-\pi}{\pi^3}A^3=A-\pi^{-2}A^3 \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

## 7.2 函数矩阵与矩阵值函数

- 7.2.1 函数矩阵的定义

- 定义7.2.1 设$a_{ij}(x)(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$都是定义在区间$(a,b)$上的实函数，则$m\times n$矩阵

$$A(x)=\begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(x) & a_{m2}(x) & \cdots & a_{mn}(x) \end{bmatrix}_{m\times n}$$

称为定义在区间$(a,b)$上的**函数矩阵**。

- 特别地，当$n=1$时，我们得到**函数向量**，通常用$\alpha(x)$等形式表示。

- 因为函数可以作加法、减法和乘法等运算，而矩阵的加法、减法、乘法和数量运算的定义仅用到其元素的加法、减法、乘法，所以我们同样可以定义函数矩阵的加法、减法、乘法、数量运算和转置运算，并且函数矩阵的这些运算与常数矩阵的相应运算具有相同的运算规律。

- 因为矩阵行列式的定义仅涉及其元素的加法与乘法，所以同样可以定义一个$n$阶函数矩阵的行列式、子式和代数余子式。

- **7.2.2 分析运算**
  - 函数矩阵的微分积分
  - 矩阵值函数对矩阵变量的导数
- 函数矩阵的微分积分
- **定义7.2.5** 设$A(x) = (a_{ij}(x))$是区间$(a, b)$上的$m \times n$函数矩阵。如果$A(x)$的所有元素$a_{ij}(x)(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$在区间$[a, b]$ 上是连续、可微（可导）、可积的，则称$A(x)$在在区间$[a, b]$上是连续、可微、可积的。当$A(x)$可微时，规定其导数为

$$A'(x) = (a'_{ij}(x))_{m\times n}$$

或

$$\frac{d}{dx}A(x) = \left(\frac{d}{dx}a_{ij}(x)\right)_{m\times n}$$

当$A(x)$在$[a, b]$上可积时，规定$A(x)$在$[a, b]$上的积分为

$$\int_a^b A(x)dx = \left(\int_a^b a_{ij}(x)dx\right)_{m\times n}$$

由定义7.2.5不难推出，函数矩阵的导数运算具有下列性质：

- 设函数$k(x)$，$m \times n$函数矩阵$A(x)$，$B(x)$和$n \times q$函数矩阵$C(x)$在区间$(a, b)$上均可导，则

  (1) $A(x)$是常数矩阵的充分必要条件是

$$\frac{dA(x)}{dx} = 0$$

  (2)

$$\frac{d}{dx}(A(x) + B(x)) = \frac{dA(x)}{dx} + \frac{dB(x)}{dx}$$

  (3)

$$\frac{d}{dx}(k(x)A(x)) = \frac{dk(x)}{x}A(x) + k(x)\frac{dA(x)}{dx}$$

  (4)

$$\frac{d}{dx}(A(x)C(x)) = \frac{dA(x)}{x}C(x) + A(x)\frac{dC(x)}{dx}$$

  (5) 如果$x = f(t)$是$t$的可微函数，则

$$\frac{d}{dt}A(x) = \frac{dA(x)}{dx}f'(t) = f'(t)\frac{dA(x)}{dx}$$

- **定理7.2.2** 如果$n$阶函数矩阵$A(x)$在$(a,b)$上可逆且可导，则

$$\frac{dA^{-1}(x)}{dx} = -A^{-1}(x)\frac{dA(x)}{dx}A^{-1}(x)$$

- **证明**：因为$A^{-1}(x)A(x) = I$，所以

$$\frac{d}{dx}\left[A^{-1}(x)A(x)\right] = \frac{dA^{-1}(x)}{dx}A(x) + A^{-1}(x)\frac{dA(x)}{dx} = 0$$

于是

$$\frac{dA^{-1}(x)}{dx} = -A^{-1}(x)\frac{dA(x)}{dx}A^{-1}(x)$$

- 函数矩阵的导数还是一个函数矩阵，可以再进行求导运算。可以定义函数矩阵的高阶导数

$$\frac{d^kA(x)}{dx^k} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{k-1}A(x)}{dx^{k-1}}\right), k > 1$$

- 由定义，容易证明函数矩阵的积分具有如下性质:

(1)

$$\int_a^b [A(x)+B(x)]\,dx=\int_a^b A(x)dx+\int_a^b B(x)dx$$

(2)对常数$k\in R$，有

$$\int_a^b kA(x)dx=k\int_a^b A(x)dx$$

(3)对常数矩阵$A$和$C$，有

$$\int_a^b [AB(x)C]\,dx=A\left[\int_a^b B(x)dx\right]C$$

(4)如果函数矩阵$A(x)$在区间$[a,b]$上连续，则

$$\frac{d}{dx}\int_a^x A(t)dt=A(x)$$

(5)如果函数矩阵$A'(x)$在区间$[a,b]$上连续，则

$$\int_a^b A'(x)dx=A(b)-A(a)$$

- **矩阵值函数对矩阵变量的导数**
- **定义** 称自变量$X \in \mathbb{R}^{m\times n}$（或$\mathbb{C}^{m\times n}$）且值域为$\mathbb{R}^{r\times s}$（或$\mathbb{C}^{r\times s}$）的映射$F(X)$为矩阵值函数。
- 函数矩阵是一类矩阵值函数。
- **定义** 设$X=(x_{ij})_{m\times n}$，矩阵值函数$F(X)=(f_{ij}(X))_{r\times s}$对矩阵$X$的导数为

$$\frac{dF}{dX}=\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_{m1}} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_{mn}} \end{pmatrix}$$

其中

$$\frac{\partial F}{\partial x_{ij}}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_{11}}{\partial x_{ij}} & \cdots & \frac{\partial f_{1s}}{\partial x_{ij}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{r1}}{\partial x_{ij}} & \cdots & \frac{\partial f_{rs}}{\partial x_{ij}} \end{pmatrix}$$

- **例** 设$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，$n$元函数$f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，求

$$\frac{d}{dx^T}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

- **解**

$$\frac{df}{dx}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T$$

于是由定义有

$$\frac{d}{dx^T}\left(\frac{df}{dx}\right)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

- 例 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$n$元函数$f_j(x)=f_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)(j=1,2,\cdots,n)$，令

$$F(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))^T$$

求

$$\frac{dF}{dx}$$

- 解

$$\frac{dF}{dx}=\left(\frac{\partial F}{\partial x_1},\frac{\partial F}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \vdots & & & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

该矩阵被称作函数$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$的Jacobi矩阵，它在求解非线性方程组的Newton方法中有重要作用。

- 例　设$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$为给定的向量，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$是向量变量，且

$$f(x)=a^Tx=x^Ta$$

求

$$\frac{df}{dx}$$

- 解　由$f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i$得

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=a_i, i=1,2,\cdots,n$$

所以

$$\frac{df}{dx}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T=a$$

- 例　设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为给定的矩阵，$x=(x_1,\cdots,x_n)^T$是向量变量，$f(x)=x^TAx$，求

$$\frac{df}{dx}$$

- 解　由$f(x)=x^TAx=\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}x_s a_{sk}x_k$，

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}=\sum_{s=1}^{n}a_{sj}x_s+\sum_{k=1}^{n}a_{jk}x_k$$

所以

$$\frac{\partial f}{\partial x}=A^Tx+Ax=(A^T+A)x$$

- 特别的，当$A$是对称矩阵时，有

$$\frac{df}{dx}=2Ax$$

## 7.3 矩阵值函数在微分方程组中的应用

- 我们经常要求一阶线性微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1(1) + a_{12}(t)x_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1(1) + a_{22}(t)x_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + f_2(t) \\ \cdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1(1) + a_{n2}(t)x_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t) \end{cases}$$

满足初始条件

$$x_i(t_0) = x_{i0}, i = 1, 2, \cdots, n$$

$$x(t_0) = x_0 = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{n0})^T$$

的解。其中$a_{ij}(t)(i, j = 1, 2, \cdots, n)$,$f_i(t)(i = 1, 2, \cdots, n)$都是$t$的已知函数，$x_i(t)(i = 1, 2, \cdots, n)$是$t$的未知函数。

- 引入矩阵值函数与向量值函数

$$A(t) = (a_{ij}(t))_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))^T$$

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t))^T$$

则上述微分方程组的初值问题可写为

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t) \\ \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

- 设$A$是$n$阶常数矩阵，在方程两端左乘$e^{-At}$，有

$$e^{-At}\frac{dx(t)}{dt} = e^{-At}Ax(t) + e^{-At}f(t)$$
$$e^{-At}\left(\frac{dx(t)}{dt} - Ax(t)\right) = e^{-At}f(t)$$

注意到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(e^{-At}x(t)) &= e^{-At}(-A)x(t) + e^{-At}\frac{dx(t)}{dt} \\ &= e^{-At}\left(\frac{dx(t)}{dt} - Ax(t)\right) = e^{-At}f(t)\end{aligned}$$

然后在$[t_0, t]$上积分得

$$e^{-At}x(t) - e^{-At_0}x(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}f(\tau)d\tau$$

由此可知,问题的解为

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}f(\tau)d\tau$$

- 例 设$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，求微分方程组$\frac{dx}{dt}=Ax(t)$满足初值条件$x(0)=(1,1,1)^T$的解。
- 解

$$e^{At}=\begin{bmatrix} (1-2t)e^t & -2te^t & 6te^t \\ -te^t & (1-t)e^t & 3te^t \\ -te^t & -te^t & (1+3t)e^t \end{bmatrix}$$

所以

$$x(t)=e^{At}x(0)=\begin{bmatrix} (1+2t)e^t \\ (1+t)e^t \\ (1+t)e^t \end{bmatrix}$$

- 例 求解如下初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t) + x_3(t) + 1, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) + 2x_2(t) - 1, \\ \frac{dx_3(t)}{dt} = -4x_1(t) + 3x_3(t) + 2, \\ x_1(0) = 1, x_2(0) = 0, x_3(0) = 1 \end{cases}$$

- 解 记$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$, $f(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

则

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^t - 2te^t & 0 & te^t \\ -e^{2t} + e^t + 2te^t & e^{2t} & e^{2t} - e^t - te^t \\ -4te^t & 0 & 2te^t + e^t \end{bmatrix}$$

$$e^{At}x_0 = \begin{bmatrix} e^t - te^t \\ te^t \\ e^t - 2te^t \end{bmatrix}$$

$$\int_0^t e^{-A\tau} f(\tau) d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-\tau} \\ -e^{-\tau} \\ 2e^{-\tau} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} 1 - e^{-t} \\ -1 + e^{-t} \\ 2 - 2e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} f(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} e^t - 1 \\ -e^t + 1 \\ 2e^t - 2 \end{bmatrix}$$

因此，方程组的解为

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t - te^t \\ te^t \\ e^t - 2te^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^t - 1 \\ -e^t + 1 \\ 2e^t - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2-t)e^t - 1 \\ (t-1)e^t + 1 \\ (3-2t)e^t - 2 \end{bmatrix}$$

- 定义7.3.1 设$A$是$n$阶常数矩阵，如果对任意的$t_0$和$x_0$，初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

的解$x(t)$满足$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$，则称微分方程组$\frac{dx}{dt} = Ax$的解是**渐近稳定**的。

- 定义7.3.2 设$A$是$n$阶矩阵，如果$A$的特征值都具有负实部，则称$A$为稳定矩阵。
- 定理7.3.2 对任意的$t_0$和$x_0$,初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

的解$x(t)$渐近稳定的充分必要条件是矩阵$A$的特征值都具有负实部($A$为稳定矩阵)。

Thank you!

Thank you!