矩阵论

[1] 戴华，《矩阵论》，科学出版社，2001

[2] 程云鹏等，《矩阵论》，西北工业大学出版社，2000

[3] 徐仲等，《矩阵论简明教程》，科学出版社，2000

[4] 课件下载站点 ftp://10.13.21.66/

第二章　线性映射与线性变换

2.1 线性映射及其矩阵表示

- **定义 2.1.1** 设 V_1,V_2 是数域 $\mathbb{P}$（实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$）的两个线性空间，$\mathcal{A}$ 是 V_1 到 V_2 的一个映射，如果对 V_1 中任意两个向量 α，β 和任意数 $k \in \mathbb{P}$，都有

$$\mathcal{A}(\alpha+\beta)=\mathcal{A}(\alpha)+\mathcal{A}(\beta)$$

$$\mathcal{A}(k\alpha)=k\mathcal{A}(\alpha)$$

  则称 $\mathcal{A}$ 是 V_1 到 V_2 的线性映射或线性算子。

- **零映射** $\mathcal{O}(\alpha)=0,\ \forall\, \alpha \in V_1$

- **恒等映射** $\mathcal{I}_V(\alpha)=\alpha,\ \forall\, \alpha \in V_1$

- **数乘映射** $\mathcal{K}(\alpha)=k\alpha,\ \forall\, \alpha \in V_1$

- **例** $y=x^2$不是线性映射
- **例** $y=x+1$不是线性映射
- **例** 线性映射 $\mathcal{A}:\mathbb{P}^2\to\mathbb{P}^3, y=\mathcal{A}(x), y=\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3 \end{bmatrix}, x=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} y_1&=2x_1+3x_2\\ y_2&=4x_1+6x_2\\ y_3&=2x_1+3x_2 \end{aligned},$$

可以用矩阵等价表示为$\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2&3\\ 4&6\\ 2&3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2 \end{bmatrix}$

$$y=\boldsymbol{A}x$$

- 设 V_1 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 维线性空间，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$ 是 V_1 的一组基， V_2 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 m 维线性空间，$\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_m$ 为 V_2 的一组基，$\mathcal{A}$ 是 V_1 到 V_2 的一个线性映射。再设

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\varepsilon_1) = a_{11}\eta_1 + a_{21}\eta_2 + \cdots + a_{m1}\eta_m \\ \mathcal{A}(\varepsilon_2) = a_{12}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + \cdots + a_{m2}\eta_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathcal{A}(\varepsilon_n) = a_{1n}\eta_1 + a_{2n}\eta_2 + \cdots + a_{mn}\eta_m \end{cases}$$

称

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

为线性映射 $\mathcal{A}$ 在 V_1 的基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$ 和 V_2 的基 $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_m$ 下的**矩阵**。

- **定理：** 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可表示线性映射 $\mathcal{A}$。对任意 $\alpha \in V_1$，若 $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i$，$\mathcal{A}(\alpha) = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i\eta_i$，则 $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

- **矩阵运算的数学意义：**
  $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 表示线性映射的和 $\mathcal{A}(\alpha)+\mathcal{B}(\alpha)$
  $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 表示线性映射的差 $\mathcal{A}(\alpha)-\mathcal{B}(\alpha)$
  $\boldsymbol{AB}$表示线性映射的复合 $\mathcal{A}(\mathcal{B}(\alpha))$
- 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$ 与$\varepsilon_1^{'},\varepsilon_2^{'},\cdots\varepsilon_n^{'}$ 是 n 维线性空间的两组基，它们之间有如下关系

$$\begin{cases} \varepsilon_1^{'}=t_{11}\varepsilon_1+t_{21}\varepsilon_2+\cdots+t_{n1}\varepsilon_n \\ \varepsilon_2^{'}=t_{12}\varepsilon_1+t_{22}\varepsilon_2+\cdots+t_{n2}\varepsilon_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_n^{'}=t_{1n}\varepsilon_1+t_{2n}\varepsilon_2+\cdots+t_{nn}\varepsilon_n \end{cases}$$

称

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

为由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$ 到基$\varepsilon_1^{'},\varepsilon_2^{'},\cdots\varepsilon_n^{'}$ 的过渡矩阵。

- **定理2.1.8** 设 $\mathcal{A}$ 是 n 维线性空间 V_1 到 m 维线性空间 V_2 的线性映射，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$ 与 $\varepsilon_1^{'}, \varepsilon_2^{'}, \cdots \varepsilon_n^{'}$ 是 V_1 的两组基，由 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$ 到 $\varepsilon_1^{'}, \varepsilon_2^{'}, \cdots \varepsilon_n^{'}$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{Q}$，$\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_m$ 与 $\eta_1^{'}, \eta_2^{'}, \cdots \eta_m^{'}$ 是 V_2 的两组基，由 $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_m$ 到 $\eta_1^{'}, \eta_2^{'}, \cdots \eta_m^{'}$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$，$\mathcal{A}$在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$ 与基 $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_m$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$，而在基$\varepsilon_1^{'}, \varepsilon_2^{'}, \cdots \varepsilon_n^{'}$ 与$\eta_1^{'}, \eta_2^{'}, \cdots \eta_m^{'}$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$$

- **定义2.1.2** 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{P}^{m\times n}$，如果存在数域 $\mathbb{P}$ 上的 m 阶非奇异矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶非奇异矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得
$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PAQ}$$
则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相抵(等价)。
- **定理2.1.9** 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{P}^{m\times n}$，如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相抵，则它们可作为 n 维线性空间 V_1 到 m 维线性空间 V_2 的同一线性映射在两对基下所对应的矩阵。
- **定理2.1.10** 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{P}^{m\times n}$ 且 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=r\geq 1$，则存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得
$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}$$
- **定理2.1.11** 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{P}^{m\times n}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相抵的充分必要条件是它们有相同的秩

2.2 线性映射（或矩阵）的值域与核

- **定义 2.2.1** $R(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{A}(\alpha) | \alpha \in V_1\}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**值域**
  $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}) = N(\boldsymbol{A}) = \{\alpha \in V_1 | \boldsymbol{A}(\alpha) = 0\}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**核或零空间**。

- **定义** 数域 $\mathbb{P}$ 上线性空间 V 的非空子集 W 是 V 的一个线性子空间（简称子空间），当且仅当 W 对于 V 的两种运算封闭，即
  (1) 如果 $\alpha, \beta \in W$，则 $\alpha + \beta \in W$；
  (2) 如果 $k \in \mathbb{P}, \alpha \in W$，则 $k\alpha \in W$。

- **定理2.2.1** 设 $\boldsymbol{A}$ 是线性空间 V_1 到线性空间 V_2 的线性映射的矩阵表示，则
  （1） $R(\boldsymbol{A})$ 是 V_2 的一个子空间；
  （2） $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A})$ 是 V_1 的一个子空间。
- **定理 2.2.2** 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V_1 的基，$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ 是 V_2 的基，从 V_1 到 V_2 的线性映射在上述基下由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示，则
  $(1) R(\boldsymbol{A}) = \mathrm{span}(\boldsymbol{A}(\varepsilon_1), \cdots, \boldsymbol{A}(\varepsilon_n))$
  $= \{k_1\boldsymbol{A}(\varepsilon_1) + \cdots + k_n\boldsymbol{A}(\varepsilon_n) | k_i \in \mathbb{P}, i = 1, \cdots, n\}$
  $(2) \dim(R(\boldsymbol{A})) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$
  $(3) \dim(R(\boldsymbol{A})) + \dim(\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A})) = n, \dim(\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}))$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的零度。

- **例** $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&3\\4&6\\2&3\end{bmatrix}, V_1=\mathbb{P}^2, V_2=\mathbb{P}^3$,则

$$R(\boldsymbol{A})=\left\{\ y=k\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\ \middle|\ k\in\mathbb{P}\right\}$$

$$\operatorname{Ker}(\boldsymbol{A})=\left\{\ x=k\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}\ \middle|\ k\in\mathbb{P}\right\}$$

$$\dim(R(\boldsymbol{A}))=1=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}), \dim(\operatorname{Ker}(\boldsymbol{A}))=1$$

$$\dim(R(\boldsymbol{A}))+\dim(\operatorname{Ker}(\boldsymbol{A}))=2=n$$

2.3 线性变换

- **定义 2.3.1** 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间，V 到自身的线性映射称为 V 上的线性变换。

- 线性变换 $\mathcal{A}$ 可用方阵 $\boldsymbol{A}$ 表示

- 数乘变换

- 恒等变换

- 零变换

- 如果存在变换（矩阵）$\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，并称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆变换（矩阵），记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$。$\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是线性变换。

- 设多项式$f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$，令

$$f(\boldsymbol{A})=a_m\boldsymbol{A}^m+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{I}$$

则 $f(\boldsymbol{A})$ 是一个线性变换（矩阵），称为线性变换（矩阵）$\boldsymbol{A}$ 的多项式。

- **例** $f(x)=x^2+2x+3$，则 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I}$，

当 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 时，$f(\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{bmatrix}$

当 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2\\3&3\end{bmatrix}$ 时，$f(\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}0&-12\\18&12\end{bmatrix}$

- **定理2.3.2** 设 n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$ 和$\varepsilon_1^{'}, \varepsilon_2^{'}, \cdots \varepsilon_n^{'}$ 下的矩阵分别为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$ 到$\varepsilon_1^{'}, \varepsilon_2^{'}, \cdots \varepsilon_n^{'}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{P}$，则

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$

- **定义 2.3.2** 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{P}^{n\times n}$，如果存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P} \in \mathbb{P}^{n\times n}$ 使得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似。

2.4　特征值和特征向量

- **定义 2.4.1**　设 $\mathcal{A}$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上线性空间V的一个线性变换，如果存在 $\lambda \in \mathbb{P}$ 以及非零向量 $\alpha \in V$ 使得 $\mathcal{A}(\alpha) = \lambda\alpha$，则称 λ 为 $\mathcal{A}$ 的特征值，并称 α 为 $\mathcal{A}$ 的属于(或对应于)特征值 λ 的**特征向量**。

- 因为 $\alpha \neq 0$，所以 $(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\alpha = 0$ 有非零解。该方程有非零解的充分必要条件是系数矩阵行列式为零，即
$$|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$$
求解上式可得特征值 λ，再将得到的 λ 代入 $(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\alpha = 0$ 可解得特征向量 α

- **例** $$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

首先，解方程 $|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix}\lambda-1 & 2\\ -2 & \lambda-1\end{vmatrix} = \lambda^2-2\lambda+5 = 0$，得到两个特征值 $\lambda_1=1+2\mathrm{i},\lambda_2=1-2\mathrm{i}$。对于 λ_1，解方程

$$(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})x=\begin{bmatrix}1+2\mathrm{i}-1 & 2\\ -2 & 1+2\mathrm{i}-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\mathrm{i}x_1+2x_2\\ -2x_1+2\mathrm{i}x_2\end{bmatrix}=0$$

得其通解 $\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{bmatrix},k\in\mathbb{C}$。则属于 λ_1 的特征向量为 $k\begin{bmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{bmatrix},k\in\mathbb{C}$。
对于 λ_2，解方程

$$(\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})x=\begin{bmatrix}1-2\mathrm{i}-1 & 2\\ -2 & 1-2\mathrm{i}-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\mathrm{i}x_1+2x_2\\ -2x_1-2\mathrm{i}x_2\end{bmatrix}=0$$

得其通解 $\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{bmatrix},k\in\mathbb{C}$。则属于 λ_2 的特征向量为 $k\begin{bmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{bmatrix},k\in\mathbb{C}$。

- 定义　设矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{P}^{n\times n}$, λ 是一个文字，矩阵 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征矩阵, 其行列式 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式，方程 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程，它的根称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征根(或特征值).以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 代入 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})x=0$ 所得的非零解 x 称为 $\boldsymbol{A}$ 对应于 λ 的特征向量.
- 矩阵(或线性变换) $\boldsymbol{A}$ 的特征值的全体称为 $\boldsymbol{A}$ 的谱，记为 $\lambda(\boldsymbol{A})$
  矩阵(或线性变换) $\boldsymbol{A}$ 的特征值的最大模称为 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径，记为 $\rho(\boldsymbol{A})$

- 定理2.4.2　设$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}, \lambda_1,\cdots,\lambda_n$是$\boldsymbol{A}$的特征值，则

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$$

$$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|\boldsymbol{A}|$$

- 定理2.4.3　如果n阶矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，则

  1）$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$有相同的特征多项式

  2）$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$有相同的特征值

  3）$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$

  4）$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$

- 命题　设$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n},\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{n\times m}$, 则

  （1）m阶方阵$\boldsymbol{AB}$与n阶方阵$\boldsymbol{BA}$具有相同的非零特征值

  （2）$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$

- 定理2.4.4　设$\lambda_1,\cdots,\lambda_r$是$\boldsymbol{A}$的$r$个互不相同的特征值，$\alpha_i(i=1,\cdots,r)$是属于特征值$\lambda_i$的特征向量，则$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性无关

  采用数学归纳法证明

- 定理2.4.5　设$\lambda_1,\cdots,\lambda_r$是$\boldsymbol{A}$的$r$个互不相同的特征值，$\alpha_1^{(i)},\cdots,\alpha_{k_i}^{(i)}$是属于特征值$\lambda_i$的$k_i$个线性无关特征向量$(i=1,\cdots,r)$，则

$$\alpha_1^{(1)},\cdots,\alpha_{k_1}^{(1)},\alpha_1^{(2)},\cdots,\alpha_{k_2}^{(2)},\cdots,\alpha_1^{(r)},\cdots,\alpha_{k_r}^{(r)}$$

  线性无关

  类似定理2.4.4的证明

- 对矩阵(或线性变换) $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ， λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，记

$$V_\lambda = \{x|\boldsymbol{A}x = \lambda x, x \in \mathbb{C}^n\} = \{\alpha|\mathcal{A}(\alpha) = \lambda\alpha, \alpha \in V\}$$

  则 V_λ 是 V (或 $\mathbb{C}^n$)的一个子空间，称 V_λ 为 $\mathcal{A}$ (或 $\boldsymbol{A}$)的属于 λ 的特征子空间。显然 $\dim(V_\lambda)$ 就是属于 λ 的线性无关特征向量的最大数目，称 $\dim(V_\lambda)$ 为特征值 λ 的几何重数。
- 设 $\lambda_1(m_{\lambda_1}$ 重 $)$, $\lambda_2(m_{\lambda_2}$ 重 $)$, $\cdots$, $\lambda_r(m_{\lambda_r}$ 重 $)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 r 个互不相同的特征值，且 $m_{\lambda_1} + m_{\lambda_2} + \cdots + m_{\lambda_n} = n$,称 m_{λ_i} 为 λ 的代数重数。
- 定理2.4.6 $\dim(V_{\lambda_i}) \leq m_{\lambda_i}, \qquad i = 1, \cdots, r$

- 例　$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&1\\0&0&-2\end{bmatrix}$,则 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda+2)^2(\lambda-1)$,所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=-2$

(二重)和 $\lambda_2=1$.

对于 $\lambda_1=-2$,方程

$$(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})x=\begin{bmatrix}-3&0&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$$

的基础解系为 $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$,故 $V_{\lambda_1}=\left\{k\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\middle|k\in\mathbb{C}\right\}$.

对于 $\lambda_2=1$,方程

$$(\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})x=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$$

的基础解系为 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$,故 $V_{\lambda_2}=\left\{k\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\middle|k\in\mathbb{C}\right\}$,

显然 $m_{\lambda_1}=2,m_{\lambda_2}=1,\dim(V_{\lambda_1})=1,\dim(V_{\lambda_2})=1.$

2.5 矩阵的相似对角形

- 定义　如果 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n\end{bmatrix}\equiv \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2\cdots,\lambda_n)$$

  则称 $\boldsymbol{A}$ 是可对角化的.

- 定理2.5.2　$\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.
  证明：(充分条件)设 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量 $x_1,\cdots,x_n$,即有特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 使得 $[\boldsymbol{A}x_1,\cdots,\boldsymbol{A}x_n]=[\lambda_1x_1,\cdots,\lambda_nx_n]$. 令 $\boldsymbol{P}=[x_1,\cdots,x_n],\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, 则 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}\Lambda$.于是有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\Lambda$.逆向可证必要条件

- 定理2.5.3　如果 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 是可对角化的.
- 定义1.4.2　设 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个子空间，则集合

$$\{\alpha_1 + \alpha_2 | \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2\}$$

  也是 V 的子空间，称为 V_1 与 V_2 的和,记为 $V_1 + V_2$.
- 定义1.4.3　设 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个子空间，如果和 $V_1 + V_2$ 中每个向量 α 可唯一的表示成

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$$

  则称和 $V_1 + V_2$ 为直和，记为 $V_1 \oplus V_2$.
- 定理1.4.8　设m维的 V_1 和n维的 V_2 是线性空间 V 的两个子空间，$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$是的$V_1$基,$\eta_1, \cdots, \eta_n$是$V_2$的基, 则下面的叙述是等价的.
  (1)和 $V_1 + V_2$ 是直和
  (2) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$
  (3) $\dim(V_1 + V_2) = m + n$
  (4) $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m, \eta_1, \cdots, \eta_n$是$V_1 + V_2$的基

- 例　线性空间 $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R} \right\} \oplus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} \middle| x_2 \in \mathbb{R} \right\}$
- 定理2.5.4　设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 r 个互不相同的特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是
$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}$$
- 定理2.5.5　$\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是它的每一个特征值的几何重数等于代数重数.

2.6 不变子空间

- 定义2.6.1　设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间 V 的线性变换， W 是 V 的子空间，如果对任意 $\alpha \in W$,都有 $\boldsymbol{A}(\alpha) \in W$, 则称 W 是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间
- 线性空间 V 的任何一个子空间都是数乘变换的不变子空间.
- 整个线性空间 V 和零子空间0，对于每个线性变换 $\boldsymbol{A}$ 而言都是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间.
- 线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的值域 $R(\boldsymbol{A})$ 和核 $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A})$ 以及 $\boldsymbol{A}$ 的特征子空间都是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间.
- 定理2.6.1　线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间的和与交都是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间.

- 定理2.6.2　设线性空间 V 的子空间 $W=\mathrm{span}(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$,则 W 是线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间的充分必要条件是

$$\boldsymbol{A}(\alpha_i)\in W \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

- 定理2.6.3　设 $\boldsymbol{A}$ 是线性空间 V 上的线性变换，如果 W 是 $\boldsymbol{A}$ 的一维不变子空间，则 W 中任何一个非零向量都是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量；反之，若 α 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量，则 $\mathrm{span}(\alpha)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一维不变子空间.
- 定理2.6.4　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换，则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是 V 可分解成 $\boldsymbol{A}$ 的一维不变子空间的直和.

- 零子空间 $\{0\}$ 和线性空间 V 都称作平凡子空间， V 的其他子空间称为非平凡子空间.
- 定理2.6.5 设 $\boldsymbol{A}$ 是线性空间 V 的线性变换，则 $\boldsymbol{A}$ 在 V 的一组基下的矩阵形如 $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ 块上三角矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有非平凡不变子空间.
- 定理2.6.5 设 $\boldsymbol{A}$ 是线性空间 V 的线性变换，则 $\boldsymbol{A}$ 相似于块对角矩阵 $\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{bmatrix}$ 的充分必要条件是 V 能分解成 $\boldsymbol{A}$ 的若干个非平凡不变子空间的直和.

2.7 酉(正交)变换与酉(正交)矩阵

- 定义 如果 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 满足
$$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H = \boldsymbol{I}$$
其中 $\boldsymbol{A}^H$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置，则称 $\boldsymbol{A}$ 为酉矩阵. 如果 $\boldsymbol{A}$ 既是酉矩阵又是实矩阵，即
$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{I}$$
其中， $\boldsymbol{A}^T$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的转置,则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.
- 如果 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是酉矩阵，则
(1) $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^H$,且 $\boldsymbol{A}^H$ 也是酉矩阵
(2) $\boldsymbol{A}$ 非奇异，且 $\det(\boldsymbol{A}) = \pm 1$
(3) $\boldsymbol{AB}$ 仍是酉矩阵

- 定义1.6.1　设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间， V 到 $\mathbb{P}$ 的一个代数运算记为 (α,β) . 如果 (α,β) 满足下列条件:
(1) $(\alpha,\beta) = \overline{(\beta,\alpha)}$;
(2) $(\alpha+\beta,\gamma) = (\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$;
(3) $(k\alpha,\beta) = k(\alpha,\beta)$;
(4) $(\alpha,\alpha) \geq 0$,当且仅当 $\alpha = 0$ 时 $(\alpha,\alpha) = 0$
其中 k 是数域 $\mathbb{P}$ 中的任意数， α,β,γ 是 V 中的任意元素，则称 (α,β) 为 α 与 β 的**内积**.定义了内积的线性空间 V 称为**内积空间**.特别地，称实数域 $\mathbb{R}$ 上的内积空间 V 为**Euclid空间**(简称为**欧式空间**);称复数域 $\mathbb{C}$ 上的内积空间 V 为**酉空间**.

- 例1.6.2　在复数域 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间 $\mathbb{C}^n$ 中，对向量 $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, y=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ 定义内积 $(x,y)=y^H x$, 则 $\mathbb{C}^n$ 成为一个酉空间.上式定义的内积称为标准内积.
- 定义1.6.5　设 α,β 是内积空间中两个向量,如果 $(\alpha,\beta)=0$,则称 α 与 β **正交**,记为 $\alpha\perp\beta$.
- 定义1.6.2　设 V 是内积空间, V 中向量 α 的**长度**定义为 $\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$.

- 定义1.6.9　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是内积空间 V 中的非零向量组, 如果它们两两正交,则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是正交向量组.如果正交向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中的每一个向量都是单位向量（长度为1的向量）,则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为标准正交向量组.
- 定义1.6.10　在n维内积空间中，由n个正交向量组成的基称为正交基，由n个标准正交向量组成的基称为标准正交基
- 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 是酉矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量是 $\mathbb{C}^n$ 的标准正交向量组。 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量是 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交实向量组。
- 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 维酉（正交）空间 V 的线性变换,则下列命题等价
  (1) $\boldsymbol{A}$ 是酉（正交）变换
  (2) $(\boldsymbol{A}\alpha,\boldsymbol{A}\beta)=(\alpha,\beta),\forall\alpha,\beta\in V$
  (3) $\|\boldsymbol{A}\alpha\|=\|\alpha\|,\forall\alpha\in V$
  (4)如果 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组标准正交基,则 $\boldsymbol{A}\varepsilon_1,\boldsymbol{A}\varepsilon_2,\cdots,\boldsymbol{A}\varepsilon_n$ 也是 V 的一组标准正交基
  (5) $\boldsymbol{A}$ 在 V 的任何一组标准正交基下的矩阵都是酉（正交）矩阵.