Series de Fourier

1) Sea $f(t)$ continua por tramos en el intervalo $-T/2 \leq t \leq T/2$ y sea $f(t+T) = f(t)$. Demostrar que la serie de Fourier se puede integrar termino a termino y obtener: (Resultado del enunciado)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \right)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \right) dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{a_0}{2}\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{t_1}^{t_2} \left(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \right) dt \right]$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = \frac{a_0}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{t_1}^{t_2} \cos(n\omega_0 t)\,dt + b_n \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\,dt \right]$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = \frac{a_0}{2} t \Big|_{t_1}^{t_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)}{\omega_0 n} \Big|_{t_1}^{t_2} - \frac{b_n \cos(n\omega_0 t)}{\omega_0 n} \Big|_{t_1}^{t_2} \right]$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = \frac{a_0}{2}(t_2 - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t_2)}{\omega_0 n} - \frac{a_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t_1)}{\omega_0 n} - \frac{b_n \cos(n\omega_0 t_2)}{\omega_0 n} + \frac{b_n \cos(n\omega_0 t_1)}{\omega_0 n} \right]$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = \frac{a_0}{2}(t_2 - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_0 n} \left[-b_n \left(\cos(n\omega_0 t_2) - \cos(n\omega_0 t_1) \right) + a_n \left(\operatorname{sen}(n\omega_0 t_2) - \operatorname{sen}(n\omega_0 t_1) \right) \right]$$

Coincide con el resultado esperado.

Día____ Mes____ Año:____

Presentación de Funciones

Encontrar (analíticamente) la serie de Fourier de la Función $f(t)=t$ para el intervalo $(-\pi,\pi)$.

Recuerde que la serie de Fourier para $f(x)$ viene dada por

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t)+b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)$$

- Donde

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \;;\quad a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \;;\quad b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

- Para este caso $L=\pi$

$$\rightarrow a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,dt=\frac{1}{\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{2}\right]=0$$

$$\rightarrow a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos\left(\frac{n\pi t}{\pi}\right)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos(nt)dt$$ Por partes $u=t$, $du=1$; $v=\frac{1}{n}\operatorname{sen}(nt)$, $dv=\cos(nt)$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{t}{n}\operatorname{sen}(nt)-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}\operatorname{sen}(nt)\,dt\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{t}{n}\operatorname{sen}(nt)\right]_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\left(\frac{\cos(nt)}{n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{t}{n}\cancelto{0}{\operatorname{sen}(\pi n)}-\frac{t}{n}\cancelto{0}{\operatorname{sen}(-\pi n)}+\frac{1}{n^2}\left(\cos(n\pi)-\cos(-n\pi)\right)\right]$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\left(\cos(\pi n)-\cos(\pi n)\right)\right]=0$$

$$\rightarrow b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{\pi}\right)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\operatorname{sen}(nt)\,dt$$ Por partes $u=t$, $du=1$; $dv=\operatorname{sen}(nt)$, $v=-\frac{\cos(nt)}{n}$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\left[\frac{-t\cos(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(nt)}{n}dt\right]=\frac{1}{\pi}\left[\left[\frac{-\pi\cos(n\pi)-\pi\cos(-n\pi)}{n}\right]+\frac{1}{n^2}\cancelto{0}{\left[\operatorname{sen}(nt)\right]_{-\pi}^{\pi}}\right]$$

Día: Mes: Año

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-2\pi \cos(n\pi)}{n}\right]$$ Recordar que $\cos(n\pi) = (-1)^n$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{-2\pi(-1)^n}{n}\right) = \frac{+2}{n}(-1)^{n+1}$$

Sustituyendo los coeficientes

$$f(x) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot \cos(n\omega_0 t) + \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \operatorname{sen}(n\omega_0 t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \operatorname{sen}(nt)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nt) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nt)$$

Día: ____ Mes: ____ Año: ____

Series de Fourier

1.b) Si $F(t)$ es continua cuando $t \in [-T/2, T/2]$ dado que $F(-T/2) = F(T/2)$, y si la derivada $F'(t)$ es continua por tramos y diferenciable, entonces la serie de Fourier se puede diferenciar término a término.

Sea $F_n(t)$ una secuencia de funciones:

$$F_n(t) = a_n \cos(n W_0 t) + b_n \sin(n W_0 t)$$

Se ve que esta es diferenciable, pues $\cos(at)$ y $\sin(at)$ lo son y también, se tiene:

$$\frac{\partial F_n(t)}{\partial t} = n W_0 b_n \cos(n W_0 t) - n W_0 a_n \sin(n W_0 t)$$

Gracias a esto, la secuencia de funciones es continua y converge uniformemente a una función $F(t)$ pues al ser $F'_n(t)$ derivable esto asegura convergencia uniforme en F'_n, lo cual consecuentemente asegura convergencia puntual y por tanto, convergencia uniforme de F_n. (Véase Principios del análisis matemático, Rudin, 3ra ed)

Gracias a esto, y por el teorema de convergencia dominada, podemos permutar la suma y la derivada (volviéndola parcial). Con esto

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n(t)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial F_n(t)}{\partial t}$$

Derivando:

$$\frac{dF(t)}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial F_n(t)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} n W_0 \left[-a_n \sin(n W_0 t) + b_n \cos(n W_0 t)\right]$$

Escaneado con CamScanner

Función $\zeta(s)$ de Riemann

Debido a que no se solicita calcular la serie analíticamente, sino evaluar la integral analíticamente, se calculó la serie en un programa numérico:

En el intervalo $[-\pi, \pi]$ la serie de Fourier para $f(t) = t^2$ viene por

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n \pi^2 \cos\left(\frac{\pi n t}{\pi}\right)}{\pi^2 n^2} = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n \cos(nt)}{n^2}$$

$$\int f(t) = \int \frac{\pi^2}{3} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{4(-1)^n \cos(nt)}{n^2} dt = \frac{\pi^2}{3} \int dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)}{n^2} \int \cos(nt) dt$$

$$\boxed{\int f(t) = \frac{\pi^2}{3} t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^3} \frac{\operatorname{Sen}(nt)}{n}}$$

Si se quisiese por intereses conocer el valor de la integral en el intervalo en el que se definió la serie de Fourier se obtiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) = \frac{\pi^2}{3} t \Big|_{-\pi}^{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^3} \frac{\operatorname{Sen}(nt)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3}$$

Como $f(t) = t^2$:

$$\frac{t^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}t + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin(nt)$$

$$\Rightarrow \frac{t(t^2-\pi^2)}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin(nt) \quad (1)$$

Usando la identidad de Parseval sobre $[-2\pi, 2\pi]$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\,dt = \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

De (1), se ve que $a_n = 0$. Por tanto:

$$\left\{ \frac{\cancel{2}1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{t^2(t^2-\pi^2)^2}{12^2}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} \right\}$$

//