Semana 8 - Métodos Computacionales 2

Juan Esteban Sandoval, Andrés Rueda

1. Punto 0.2

Usando la discretización central de la derivada doble como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} \tag{1}$$

Y la discretización central de la derivada sencilla como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x} \tag{2}$$

Entonces, para la ecuación 3:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = w \tag{3}$$

Usando la ecuación 1 en 3 (asumiendo que $h_x = h_y = h$) se tiene que:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = w_{i,j}$$

$$-4u_{i,j} = -u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} + h^2 w_{i,j}$$

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - h^2 w_{i,j}) \tag{4}$$

Ahora, para la ecuación 5:

$$\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \tag{5}$$

Usando las ecuaciones 1 y 2 en 5 (asumiendo que $h_x = h_y = h$) se tiene que:

$$\begin{aligned} \nu \left(\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} + \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{h^2} \right) = &\frac{[u_{i,j+1} - u_{i,j-1}][w_{i+1,j} - w_{i-1,j}]}{4h^2} \\ &- \frac{[u_{i+1,j} - u_{i-1,j}][w_{i,j+1} - w_{i,j-1}]}{4h^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4\nu w_{i,j} = &\frac{[u_{i,j+1} - u_{i,j-1}][w_{i+1,j} - w_{i-1,j}]}{4} - \frac{[u_{i+1,j} - u_{i-1,j}][w_{i,j+1} - w_{i,j-1}]}{4} \\ &-\nu(w_{i+1,j} - w_{i-1,j} - w_{i,j+1} - w_{i,j-1}) \end{aligned}$$

$$w_{i,j} = \frac{R}{16}[u_{i+1,j} - u_{i-1,j}][w_{i,j+1} - w_{i,j-1}] - \frac{R}{16}[u_{i,j+1} - u_{i,j-1}][w_{i+1,j} - w_{i-1,j}] \tag{6}$$

$$+\frac{1}{4}\left(w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1}\right) \tag{7}$$

Donde se usó el número de Reynolds $R = 1/\nu$ para simplificar la ecuación 7.

2. Punto 0.3

Antes de comenzar, se usa la expansión de serie de Taylor para la función $u(x, y+h)$:

$$u(x, y+h) = u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + O(h^3) \tag{8}$$

Usando la ecuación (9) dada en el enunciado:

$$w_z = w = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \to \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{9}$$

Se sabe que, por la viscosidad del fluido, a la derecha su velocidad transversal v_y es igual a 0 (pues en este límite no debería moverse el fluido). Con esto en mente, la ecuación (9) se convierte a:

$$w_z == -\frac{\partial v_x}{\partial y} \to w_z = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Reemplazando el valor de w_z en la frontera derecha en la expansión (8), despreciando los términos con h^3 en adelante y usando la condición de frontera:

$$u(x, y+h) = u(x, y) - \frac{h^2}{2}w_z \to w_z = -2\frac{u(x, y+h) - u(x, y)}{h^2}$$

Lo cual, al ser discretizado, resulta en:

$$w_{i,j(R)} = -2\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h^2} \tag{10}$$

En el caso de tener la barrera a la izquierda, se tiene que la velocidad del fluido en $x, v_x = 0$ (por lo que, al ser barrera, no debería tener movimiento). Con esto, se obtiene un nuevo w_z:

$$w_z == -\frac{\partial v_y}{\partial x} \to w_z = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Haciendo la misma expansión 8 pero sobre $u(x, y-h)$, se tiene que:

$$u(x, y-h) = u(x, y) - \frac{h^2}{2}w_z \to w_z = -2\frac{u(x, y-h) - u(x, y)}{h^2}$$

Al discretizar, se tiene finalmente que:

$$w_{i,j(I)} = -2\frac{u_{i,j-1} - u_{i,j}}{h^2} \tag{11}$$