

Cours de Physique

J.M MERCIER
Mise en forme : R.Portalez

12 décembre 2005

Table des matières

1	Préliminaires	7
1.1	Grandeurs extensives.	7
1.1.1	Grandeur extensive reçue par un système.	8
1.1.2	Grandeur extensive produite.	9
1.1.3	Bilan d'une grandeur extensive.	9
1.2	Physique statistique.	11
1.2.1	Etude statistique du gaz parfait.	11
1.2.2	Constante diélectrique d'un gaz :	13
2	Electromagnétisme	15
2.1	Electrostatique.	15
2.1.1	Théorème fondamental.	15
2.1.2	Champ et potentiel.	16
2.1.3	Conducteur en équilibre.	17
2.1.4	Condensateur.	19
2.1.5	Dipôle électrique.	22
2.2	Magnétostatique	23
2.2.1	Théorème fondamental.	23
2.2.2	Champ et potentiel vecteur.	24
2.2.3	Circuits filiformes.	25
2.2.4	Inductance propre.	25
2.2.5	Considérations énergétiques en magnétostatique.	26
2.2.6	Dipôle magnétique.	28
2.3	Equations de Maxwell	29
2.3.1	Principe fondamental de l'électromagnétisme.	29
2.3.2	Le potentiel électromagnétique.	30
2.3.3	Equations de D'Alembert.	30
2.3.4	L'ARQS	31
2.3.5	Conditions aux limites du champ e-m.	31
2.3.6	Energie électromagnétique.	33
2.3.7	Notation complexe en électromagnétisme.	33
2.4	Induction électromagnétique.	34
2.4.1	Généralités.	34
2.4.2	Champ électromoteur d'induction.	35
2.4.3	Phénomène d'induction dans un circuit filiforme.	35
2.4.4	Induction dans un conducteur de forme quelconque.	38
2.5	Ondes électromagnétiques	40
2.5.1	Ondes électromagnétiques dans le vide.	40

2.5.2	Ondes électromagnétiques dans un milieu optique.	42
2.5.3	Réflexion d'une OPPM sur un conducteur parfait plan. . .	45
2.5.4	Propagation guidée, guide d'onde rectangulaire.	47
2.5.5	Propagation libre, rayonnement dipolaire.	48
3	Thermodynamique	51
3.1	Principes :	51
3.1.1	Principe relatif à l'énergie :	51
3.1.2	Principe relatif à l'entropie :	53
3.1.3	Principe reliant U et S :	53
3.2	Applications :	58
3.2.1	Méthode de résolution d'un problème :	58
3.2.2	Exemples :	58
3.2.3	Machines thermiques :	60
3.3	Transferts thermiques :	61
3.3.1	Etude théorique :	61
3.3.2	Exemples et applications :	61
3.4	Transferts radiatifs :	65
3.4.1	Equilibre thermodynamique d'un gaz de photons :	65
3.4.2	Bilan d'énergie en l'absence de rayonnement :	68
4	Thermodynamique chimique	71
4.1	Mélanges monophasés.	71
4.1.1	Caractéristiques d'un mélange monophasé.	71
4.1.2	Phase idéale.	73
4.1.3	Phase réelle.	76
4.2	Diagrammes binaires liquide gaz	76
4.2.1	Introduction.	76
4.2.2	Diagrammes isotherme idéal.	77
4.2.3	Diagrammes expérimentaux.	78
4.3	Caractéristiques d'une réaction chimique	80
4.3.1	Avancement d'une réaction.	80
4.3.2	Grandeurs standard d'une réaction.	84
4.4	Equilibre d'un système chimique	86
4.4.1	Condition d'équilibre chimique.	86
4.4.2	Variance.	87
4.4.3	Perturbation d'équilibre.	87
4.5	Diagrammes d'Ellingham	88
4.5.1	Généralités.	88
4.5.2	Diagramme d'Ellingham du zinc.	89
4.5.3	Superposition de deux diagrammes.	90
4.6	Diagrammes $E - pH$	91
4.6.1	Potentiel rédox d'une solution.	91
4.6.2	Diagramme $E - pH$ du fer.	92
4.6.3	Superposition de deux diagrammes.	93
4.7	Systèmes électrochimiques	94
4.7.1	Etude thermodynamique.	95
4.7.2	Etude cinétique.	96

5	Mécanique	99
5.1	Référentiels	99
5.1.1	Définitions.	99
5.1.2	Changement de référentiel.	99
5.1.3	Classification des mouvements de référentiels	100
5.1.4	Référentiel du centre de masse.	101
5.2	Théorèmes généraux de la mécanique	101
5.2.1	Notion de torseur.	101
5.2.2	Torseur cinétique.	103
5.2.3	Torseur dynamique.	104
5.2.4	Torseur force.	104
5.2.5	Principe fondamental et théorèmes généraux.	105
5.2.6	Energie mécanique.	107
5.3	Mécanique du solide.	110
5.3.1	Etude cinématique.	110
5.3.2	Eléments cinétiques.	111
5.3.3	Etude dynamique.	113
5.3.4	Etude énergétique.	114
6	Ondes	117
6.1	Ondes dans un milieu non-dispersif	117
6.1.1	Equation d'onde.	117
6.1.2	Exemples d'ondes.	117
6.1.3	Onde plane.	120
6.1.4	Ondes sphériques.	121
6.1.5	Ondes stationnaires.	121
6.1.6	Onde stationnaire quelconque.	122
6.1.7	Onde plane progressive monochromatique.	123
6.2	Ondes dans un milieu dispersif	124
6.2.1	Définition.	124
6.2.2	Interprétation.	125
6.2.3	Description dans un milieu optique.	125
7	Optique	127
7.1	Diffraction :	127
7.1.1	Introduction :	127
7.1.2	Principe d'Huygens-Fresnel :	127
7.1.3	Diffraction à l'infini :	128
7.1.4	Exemples de diffraction à l'infini :	130
7.2	Interférences :	134
7.2.1	Définition et réalisation :	134
7.2.2	Source ponctuelle monochromatique :	134
7.2.3	Source ponctuelle non-monochromatique :	135
7.2.4	Source monochromatique, mais étendue :	138
8	Etude quantique de l'atome d'hydrogène	139
8.1	Principes de la mécanique quantique.	139
8.1.1	Enoncé.	139
8.1.2	Commentaires.	139
8.2	Application à l'atome d'hydrogène.	141

8.2.1	Résolution de l'équation de Schrödinger.	141
8.2.2	Récapitulation.	143

Chapitre 1

Préliminaires

On part du principe qu'en abordant ce cours on connaît déjà bien toutes les mathématiques nécessaires à sa compréhension, à savoir l'analyse vectorielle, les fonctions de plusieurs variables, les espaces euclidiens, les courbes du plan et de l'espace, les surfaces dans \mathbb{R}^3 . Ainsi il est vain de l'aborder en fin de sup : il ne s'agit que d'un résumé de cours destiné aux révisions pour l'oral, c'est-à-dire qu'on doit déjà avoir une vue d'ensemble du programme pour tout bien saisir. De plus, ce cours va parfois au delà du programme par exemple avec la physique statistique ou les grandeurs extensives.

Volontairement, je n'y ai pas fait figurer l'électrocinétique et l'optique géométrique ainsi qu'un certain nombre d'autres notions qui sont soit faciles, soit dépendant directement du cours de sup.

Pour chaque résultat ou théorème, la démonstration n'est pas intégralement rédigée dans un but de concision. Toutefois afin d'assurer la rigueur du travail effectué, l'idée et les étapes de la démonstration sont rappelées à chaque fois. De plus, les raisonnements les plus difficiles comme la démonstration du théorème de Faraday en induction sont très détaillés car il est difficile passé un certain temps de s'en rappeler.

Il y a dans ce cours un certain nombre d'exercices. La plupart sont difficiles car l'énoncé est volontairement vague. Ils nécessitent une parfaite connaissance du cours pour les réussir.

1.1 Grandeurs extensives.

La notion de grandeur extensive peut être comparée à la population d'un pays, dont la variation peut être calculée à partir de deux termes, l'un correspondant à l'immigration et l'émigration, l'autre correspondant aux naissances et aux décès au sein du pays.

Définition d'une grandeur extensive.

Une grandeur physique est *extensive* dès qu'on peut lui attribuer une densité volumique, notée x_v ou de manière équivalente, une densité massique, x telle que $\rho x = x_v$, où ρ est la masse volumique. Une telle définition montre que le volume, la masse totale, la charge totale, l'énergie cinétique sont des grandeurs extensives. Ainsi la quantité d'une grandeur X présente dans un volume τ est donnée par l'intégrale :

$$X = \int_{\tau} x_v d\tau$$

Système.

Un système physique par définition est l'intérieur d'une surface fermée. Celle-ci évolue éventuellement dans le temps.

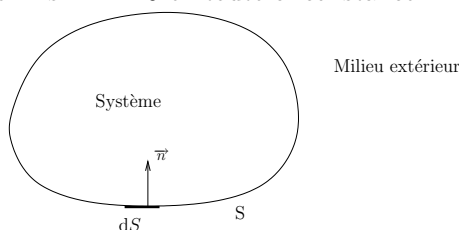
Ainsi il n'est pas nécessairement fermé puisque de la matière ou d'autres grandeurs peuvent traverser la paroi. Par exemple, quand on mélange deux gaz, on ne peut pas prendre comme système l'un des deux gaz puisque dans l'état final on ne peut pas définir de frontière.

Par une relation de Chasles, si X_1 et X_2 désigne la quantité de X au sein de deux systèmes disjoints, la quantité de X dans leur réunion est $X_1 + X_2$. Une telle définition est très utile mais ne constitue pas une définition, comme on peut le voir dans certains ouvrages.

1.1.1 Grandeur extensive reçue par un système.

Définitions.

Une grandeur extensive peut généralement traverser la frontière d'un système. Un tel transfert est caractérisée par la quantité X^r appelée grandeur reçue par le système, comptée dans le sens de la normale rentrante. Un système est dit isolé vis-à-vis de X si $X^r = 0$ en toute circonstance :



Courant d'une grandeur extensive.

Le transfert d'une grandeur extensive X est décrit localement par un vecteur courant \vec{J}_X tel que $dt \vec{J}_X \cdot \vec{n} dS$ est la quantité de X qui traverse dS fixe dans le sens de la normale \vec{n} pendant dt . Ainsi la quantité de X reçue à travers S pendant dt est :

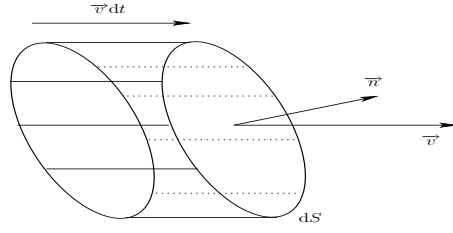
$$\boxed{\delta X^r = dt \int_S \vec{J}_X \cdot \vec{n} dS}$$

Courant non-convectif.

On appelle convectif tout transfert de X par déplacement de la matière et non-convectif tout autre transfert pouvant exister dans un référentiel où la matière est immobile.

Si la frontière du système épouse le mouvement de la matière, elle est qualifiée de convective.

La matière qui traverse dS pendant dt dans le sens de \vec{n} est celle qui se trouve dans ce cylindre, qui peut être défini car la vitesse \vec{v} est localement uniforme.



Remarque : Le mouvement de la matière dépend en fait du constituant et on fait alors ce raisonnement pour un seul constituant. Ensuite on somme pour tous les constituants pour obtenir le résultat en définissant :

$$\rho = \sum_i \rho_i \text{ et } \vec{v} = \frac{\sum_i \rho_i \vec{v}_i}{\sum_i \rho_i}$$

C'est la vitesse barycentrique des divers constituants.

Le volume de ce cylindre vaut $\delta V = \vec{v} dt \cdot \vec{n} dS$ et il contient $x_v \delta V$ de X . On en déduit la contribution convective $x_v \vec{v}$ au courant total. Le courant non-convectif s'écrit alors :

$$\boxed{\vec{J}_X^* = \vec{J}_X - x_v \vec{v}}$$

On obtient alors avec $\vec{J} = \rho \vec{v}$ que le transfert de masse est purement convectif.

1.1.2 Grandeur extensive produite.

Définition.

Une grandeur extensive peut aussi être produite au sein de la frontière du système, de même qu'il y a des naissances et décès dans les frontières d'un pays. Cette production est donnée par une quantité algébrique X^p .

Source d'une grandeur extensive.

La production de X dans un élément de volume $d\tau$ entre t et $t + dt$ est donnée par $\sigma_X d\tau dt$, de sorte que la production (algébrique) globale s'écrit :

$$\boxed{dt \int_{\tau} \sigma_X d\tau}$$

Conservation.

Une grandeur est dite *conservative* si quoi qu'il arrive sa source est nulle.

Il en est ainsi de l'énergie totale (cf : thermodynamique) ou plus simplement du volume. Il faut faire attention avec ce terme "conservative" car il est souvent galvaudé. Dans la suite, on l'emploiera toujours dans ce sens bien précis.

1.1.3 Bilan d'une grandeur extensive.

Bilan global.

On écrit simplement qu'entre deux instants t_1 et t_2 , la variation de X au sein du système est la somme de ce qui est produit et de ce qui est reçu :

$$X_2 - X_1 = X^r + X^p$$

Entre deux instants voisins le bilan s'écrit :

$$dX = \delta X^r + \delta X^p$$

Pour tout système on connaît l'expression de la production par contre ce qui est reçu dépend du système considéré selon qu'il est à frontière fixe ou convective.

— Frontière fixe : On a directement le bilan :

$$dX = dt \int_S \vec{J}_X \cdot \vec{n} dS + dt \int_\tau \sigma_X d\tau$$

— Frontière convective : Cette fois la quantité de X traversant dS dans le sens de \vec{n} pendant dt est donnée par le courant non-convectif :

$$dX = dt \int_S \vec{J}_X^* \cdot \vec{n} dS + dt \int_\tau \sigma_X d\tau$$

Bilan local.

— Frontière fixe : Une simple application du théorème d'Ostrogradsky fournit l'expression du bilan global entre t et $t + dt$:

$$\int_\tau (\operatorname{div} \vec{J}_X + \frac{\partial x_v}{\partial t} - \sigma_X) d\tau = 0$$

Et comme cette expression est valable quelle que soit la taille du système, on en déduit l'équation locale du premier type :

$$\operatorname{div} \vec{J}_X + \frac{\partial x_v}{\partial t} = \sigma_X$$

— Frontière convective : De manière analogue on obtient l'équation locale du second type :

$$\operatorname{div} \vec{J}_X^* + \rho \frac{dx}{dt} = \sigma_X$$

Où $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$ est l'opérateur "dérivée particulaire", et x est la densité massique de X tandis que ρ est la masse volumique locale du système.

Exercice 1

En faisant le bilan entre t et $t + dt$ de la grandeur X contenue dans un système à frontière fixe, démontrer l'équation locale du premier type puis, après avoir fait de même avec un système à frontière convective et l'équation du second type, démontrer l'équivalence entre ces deux équations.

Exercice 2

En partant de l'équation locale traduisant la conservation de la masse : $\operatorname{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ (qu'on redémontrera), démontrer la relation $\operatorname{div}(-\vec{v}) + \rho \frac{dw}{dt} = 0$ où w est le volume massique, puis en considérant une particule de fluide de masse constante, démontrer la relation : $d(\delta V) = \operatorname{div} \vec{v} \delta V dt$ et en déduire à quelle condition un fluide est incompressible.

Exercice 3

En appliquant le théorème de la résultante cinétique à une particule de fluide de masse constante démontrer l'équation d'Euler : $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{f}$, où $\vec{f} = \vec{f}' - \vec{\nabla} e_p$ désigne la densité massique des forces de champ subies par le fluide, décomposée en un terme dérivant d'une énergie potentielle est un autre terme.

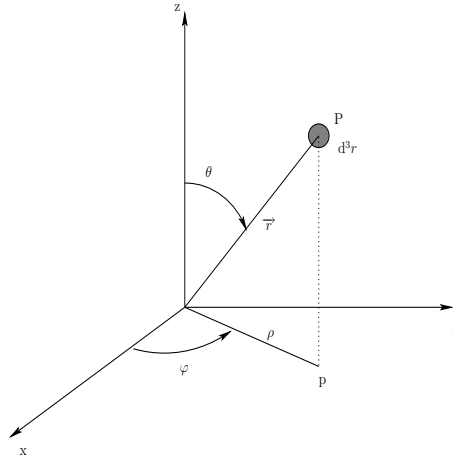
En faisant le produit scalaire par \vec{v} de cette équation, en déduire l'équation du second type traduisant le bilan local d'énergie mécanique.

1.2 Physique statistique.

1.2.1 Etude statistique du gaz parfait.

Rappels.

On étudie une particule de gaz parfait. On introduit pour cela les coordonnées sphériques :



Il est connu que l'élément de volume vaut $d^3r = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$. Afin d'étudier les vitesses, on fait de même avec les vitesses et on rappelle l'élément d'angle solide : $\delta\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$.

Loi de Boltzmann.

Dans un gaz en équilibre, la probabilité pour une particule de se trouver en $(\vec{r}, \vec{v}, \dots)$ à (d^3r, d^3v, \dots) près vaut :

$$P(\vec{r}, \vec{v}, \dots) = C \exp \left[-\frac{e_m(\vec{r}, \vec{v}, \dots)}{kT} \right] d^3r d^3v \dots$$

Où k est la constante de Boltzmann. *Remarque* : Cette probabilité a donc une densité. On verra que dans le cas le plus simple du gaz parfait, c'est une densité gaussienne. La position d'une particule dans l'espace des vitesses est donc une variable aléatoire gaussienne centrée. Cela justifie en partie la prédominance de cette loi de probabilité en physique comme en mathématiques. *Remarque* : Puisque le gaz est en équilibre, la température est uniforme (cf : thermodynamique).

C est une constante servant à normaliser l'intégrale, dont l'expression dépend du gaz considéré.

Probabilité pour la localisation, dans un gaz parfait :

Calculons la probabilité pour une molécule de gaz parfait d'être à \vec{r} à d^3r près. Dans un gaz parfait, on n'a pas d'interaction mutuelle entre les particules, et si l'on suppose négligeables les actions extérieures, on a : $e_m = e_c = \frac{1}{2}mv^2$. En sommant alors l'expression de la probabilité sur tout l'espace des vitesses, on a :

$$P(\vec{r}) = C \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}} dv_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} dv_z \right]$$

On en déduit immédiatement que la probabilité pour une particule de se trouver dans un volume δV au sein d'une enceinte de volume V vaut

$$P = \frac{\delta V}{V}$$

Et la répartition des particules est uniforme au sein de l'enceinte.

Probabilité pour la vitesse, dans un gaz parfait :

Cette fois on intègre sur tout l'espace ordinaire et en notant $a = \frac{m}{2kT}$, on trouve :

$$P(\vec{v}) = A e^{-av^2} d^3v$$

La constante A peut être calculée en sommant sur l'espace des vitesses et on obtient au final :

$$P(\vec{v}) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-av^2} d^3v$$

On en déduit que cette probabilité ne dépend pas de φ, θ : on parle d'isotropie dans l'espace des vitesses.

Vitesse, vitesse quadratique moyenne :

$\langle v \rangle = \int_{E_v} v P(v) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} v^3 e^{-av^2} dv \sin \theta d\theta d\varphi$ Après calculs, on trouve alors :

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{m\pi}}$$

De même, on obtient la vitesse quadratique moyenne :

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

D'un point de vue ordre de grandeurs, on remarque que la vitesse moyenne des particules est de l'ordre de la vitesse du son dans le gaz.

Energie interne :

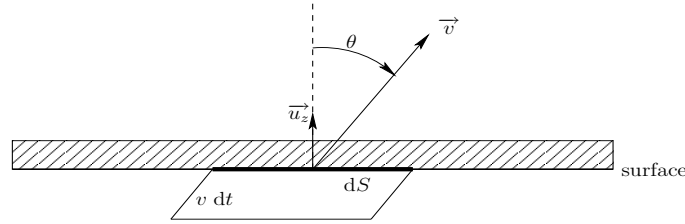
Par définition, $U = e_{c,i} + e_{p,i}$. Si le nombre N de particules est suffisamment grand, on peut écrire :

$$e_{c,i} = N \langle e_c \rangle = \frac{N}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} N k T$$

Et comme il n'y a pas d'interactions, $e_{p,i} = 0$ soit :

$$U = \frac{3}{2} n R T$$

Force de pression :



Calculons la force moyenne exercée par les δN particules arrivant sur dS pendant δt et montrons qu'elle a pour expression :

$$\vec{F} = \frac{1}{\delta t} \sum_{i=1}^{\delta N} \vec{p}_i - \vec{p}'_i$$

où \vec{p}_i est la quantité de mouvement de la particule i avant son interaction avec la paroi et \vec{p}'_i celle après interaction. En effet $\vec{f}_i = \int_{t_i}^{t'_i} d\vec{f}_i$ Or le TRC nous dit que : $\frac{d\vec{p}_i}{dt} = d\vec{f}_i$, l'intervalle de temps étant infinitésimal, on a le résultat.

Puis en utilisant l'isotropie dans l'espace des vitesses : $F_y = F_x = 0$ et $F_z = \frac{2m}{\delta t} \sum_i v_{i,z}$.

Puis, en notant ν la densité particulaire (uniforme), la contribution à cette somme de la part des particules ayant une vitesse \vec{v} (schéma) vaut :

$$\underbrace{v \cos \theta}_{\text{contribution}} \underbrace{\nu \cdot v dt \cos \theta dS}_{\text{nombre de particules}} \underbrace{P(\vec{v}) d^3v}_{\text{Proba d'avoir cette vitesse}}$$

En intégrant sur v de 0 à ∞ , sur φ de 0 à 2π et sur θ de 0 à $\frac{\pi}{2}$, on trouve le résultat suivant :

$$\vec{F} = P dS \vec{u}_z \text{ avec } P = \nu kT$$

Equation d'état :

Un calcul fournit alors l'équation d'état du gaz parfait :

$$PV = nRT$$

1.2.2 Constante diélectrique d'un gaz :

Un gaz est constitué de particules quasi-ponctuelles dont on néglige les interactions mutuelles. Chacune de ces particules possède un moment électrique \vec{p} de norme constante. On plonge le gaz dans un champ électrique constant et on suppose le gaz à l'équilibre.

Exercice 4

Calculer la probabilité pour une particule d'avoir un moment électrique \vec{p} , la valeur moyenne $\langle \vec{p} \rangle$ du moment dipolaire puis le vecteur polarisation \vec{P} du gaz.

Chapitre 2

Electromagnétisme

2.1 Electrostatique.

2.1.1 Théorème fondamental.

Enoncé.

Toute distribution stationnaire de charge engendre un champ vectoriel \vec{E} appelé champ électrostatique tel que la force subie par une charge ponctuelle q de la part de cette distribution ait pour expression :

$$\vec{f} = q\vec{E}$$

Le champ électrostatique satisfait aux équations locales :

$$\begin{array}{l} \text{rot}\vec{E} = \vec{0} \\ \text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{array}$$

Conséquences immédiates.

- Potentiel scalaire :

$\text{rot}\vec{E} = \vec{0}$: le champ électromagnétique est à circulation conservative. Il dérive donc d'un potentiel scalaire V appelé potentiel électrostatique :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

A cette équation locale correspond l'équation intégrale :

$$\int_L \vec{E} \cdot \vec{t} dL = V(A) - V(B)$$

Remarque : Le choix de $-\vec{\nabla}V$ se justifie par le fait que la plupart des formules de physique en sont simplifiées, par exemple dans les expressions du potentiel.

Le potentiel électrostatique n'est défini qu'à une constante additive près, il n'est pas mesurable.

- Théorème de Gauss :

On sait que : $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$: à cette équation locale correspond l'équation intégrale :

$$\boxed{\iint_S \vec{E} \cdot \vec{t} dS = \frac{q_S}{\varepsilon_0}}$$

C'est le théorème de Gauss.

- Equation de Poisson :

Des deux équations locales : $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ et $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, on tire l'équation locale :

$$\boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

C'est l'équation de Poisson-scalaire. Dans le cas où $\rho = 0$, c'est l'équation de Laplace.

2.1.2 Champ et potentiel.

Distributions volumiques.

On admet le théorème suivant valable dans le cas d'une distribution volumique bornée telle que $V(\infty) = 0$, l'équation de Poisson scalaire admet pour solution unique :

$$\boxed{V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(M)}{r} d\tau}$$

En exprimant ensuite le champ comme le gradient du potentiel, on trouve :

$$\boxed{\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \rho(M) \frac{\vec{u}}{r^2} d\tau}$$

Où r désigne la distance entre le point P d'observation et le point M source qui varie dans l'intégrale. On montre facilement que le champ et le potentiel électrostatique créés par une distribution volumique de charge sont continus en tout point de l'espace.

Distribution surfacique.

Ce sont les mêmes formules en changeant ρ en σ et V en S . Par contre il y a un problème avec le champ \vec{E} qui n'est pas défini sur la distribution en question. Sa discontinuité est donnée par la relation :

$$\boxed{\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma(M)}{\varepsilon_0} n_{12}}$$

\vec{E}_2 désignant le champ au voisinage du point M de la surface du côté 2, \vec{E}_1 désignant le champ au voisinage de ce point du côté 1, et n_{12} la normale à la surface au point M dans le sens 1 vers 2.

Distribution linéique.

Ce sont les mêmes formules en changeant ρ en λ et V en L . Par contre ni le champ \vec{E} ni le potentiel V ne sont définis sur la distribution en question.

Distribution discrète.

Ce sont les mêmes formules en changeant les intégrales par des sommes et les $\rho d\tau$ par des q_i . Ni le potentiel ni le champ ne sont définis sur chacune des charges q_i .

Comportement face à une symétrie.

On suppose que la distribution de charge possède une symétrie plane. Alors, le potentiel possède la même symétrie de même que la composante parallèle au plan du champ \vec{E} . La composante perpendiculaire du champ est elle antisymétrique par rapport au plan. Pour un plan d'antisymétrie, c'est le contraire.

2.1.3 Conducteur en équilibre.**Équilibre électrique d'un conducteur.**

- Conditions d'équilibre :

Le conducteur est assimilé à un milieu ohmique solide pour lequel u et s satisfont à $du = Tds$. (cf : thermodynamique). Le bilan local d'énergie interne permet d'obtenir celui d'entropie (en appliquant la loi de Fourier et le premier principe) :

$$\operatorname{div}\left(\frac{\vec{J}_{th}}{T}\right) + \rho \frac{ds}{dt} = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{T}\right) \cdot \vec{J}_{th} + \frac{\vec{j} \cdot \vec{E}}{T}$$

On en déduit les flux et forces thermodynamiques dans le conducteur :

Flux	\vec{J}_{th}	\vec{j}
Forces	$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{T}\right)$	$\frac{\vec{E}}{T}$

Ce qui donne les conditions d'équilibre du conducteur :

$T \text{ uniforme ; } \vec{E} = \vec{0}$

- Conséquences immédiates.

Le potentiel est uniforme au sein du conducteur.

On notera désormais V la valeur de ce potentiel uniforme en adoptant la convention : $V(\infty) = 0$.

Un conducteur en équilibre ne peut être chargé qu'en surface.

Le champ régnant dans le vide au voisinage du conducteur à l'équilibre satisfait à la relation :

$$\vec{E}(P) = \frac{\sigma(M)}{\varepsilon_0} \vec{n}$$

Ce théorème (de Coulomb) découle immédiatement de la condition aux limites déjà établie. On en déduit que les lignes de champ sont orthogonales à la surface du conducteur.

Conducteur seul dans l'espace.

- Théorème d'unicité :

La donnée soit du potentiel V soit de la charge q suffit à déterminer de manière unique l'état d'équilibre d'un conducteur seul dans l'espace.

La démonstration n'est pas facile et est faite en exercice. Ce résultat est très puissant et très utile dans tous les exercices sur les conducteurs.

En particulier le potentiel électrostatique solution de l'équation de Laplace dans le vide et qui satisfait aux deux conditions aux limites $V(P) = V$ sur une surface fermée S et $V(\infty) = 0$ est unique.

- Relation charge-potentiel :

Le conducteur étant en équilibre, on note $\alpha(P)$ le potentiel qui règne dans le vide lorsqu'il est au potentiel unité. Le théorème d'unicité permet d'affirmer que le potentiel qui règne dans le vide lorsque le conducteur est porté au potentiel V est $V\alpha(P)$. On peut alors calculer la charge du conducteur :

$$q = \int_S \sigma(M) dS = \int_{S'} -\varepsilon_0 \vec{\nabla}(V) \cdot \vec{n} dS$$

où S' est une surface infiniment voisine de S où le champ \vec{E} satisfait au théorème de Coulomb. On a alors :

$$\boxed{q = CV}$$

A condition de poser $C = -\varepsilon_0 \int_{S'} \vec{\nabla}(\alpha) \cdot \vec{n} dS$ la capacité du conducteur.

- Propriétés de la capacité :

La capacité d'un conducteur en équilibre seul dans l'espace ne dépend que de la géométrie du conducteur (de même que α) et est toujours positive (se démontre avec des considérations énergétiques).

- Capacité d'un conducteur sphérique :

On utilise que le potentiel est uniforme et sa valeur peut être calculée facilement au centre de la boule conductrice. On obtient :

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 R}$$

En ordre de grandeur on trouve $C = 10^{-12} F$ et cette formule permet de retenir l'unité de $4\pi\varepsilon_0$.

- Capacité d'un conducteur ellipsoïdal :

On se donne un conducteur ellipsoïdal de paramètres a, b, c ¹ seul dans l'espace. Pour calculer sa capacité il faudrait connaître l'expression du Laplacien en coordonnées elliptiques, ce qui est complètement H-P. On utilise la méthode des images électriques. En effet si l'ellipsoïde est porté à un potentiel V , il crée dans le vide le même potentiel qu'un segment uniformément chargé $\lambda = \frac{4\pi\varepsilon_0 V}{\ln(\frac{a+c}{a-c})}$ (grâce au théorème d'unicité et à l'expression du potentiel créé par un segment) On trouve alors $q = 2c\lambda$, ce qui fournit la capacité :

$$\boxed{C = \frac{8\pi c\varepsilon_0}{\ln(\frac{a+c}{a-c})}}$$

Remarque : Si $c \rightarrow 0$ à l'aide d'un DL on retrouve la capacité du conducteur sphérique.

Si $\frac{a}{b} \rightarrow \infty$, l'ellipsoïde s'allonge pour ressembler à une pointe. On constate alors (après un calcul) que le champ à la pointe est très grand devant celui à l'extrémité aplatie. C'est ce qu'on appelle "l'effet de pointe". Cet effet justifie des phénomènes comme le vent électrostatique.

- Conducteur creux :

Un conducteur creux seul dans l'espace et dont la cavité ne contient aucune charge est électriquement équivalent au conducteur plein de même géométrie et porté au même potentiel.

1. Tels que : $a^2 = b^2 + c^2$

Conducteur en présence de charges à l'extérieur.

- Phénomène d'influence :

La charge à la surface du conducteur dépend de ces distributions extérieures.

- Effet d'écran :

Un conducteur creux en équilibre dont le potentiel est maintenu constant sépare l'espace en deux régions électrostatiquement indépendantes. On dit de ce conducteur qu'il constitue un écran. Cette propriété a de nombreuses applications.

Forces subies par un conducteur.

- Pression électrostatique :

Ce résultat est démontré dans le cours. Sa démonstration n'est pas très difficile une fois qu'on la voit une fois. Par contre il est très utile en pratique :

Un élément de surface δS du conducteur subit une force $\delta \vec{F}$ telle que :

$$\delta \vec{F} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \vec{n} dS$$

2.1.4 Condensateur.**Système de deux conducteurs en influence totale.**

Les deux conducteurs sont en équilibre : le champ \vec{E} est nul en leur intérieur. De plus on dit qu'ils sont en influence totale lorsqu'aucune ligne de champ ne va à l'infini et que de plus le potentiel est nul à l'infini. Dans ce cas, en notant $\alpha(P)$ le potentiel créé dans le vide quand le conducteur 1 est porté au potentiel unité et le 2 au potentiel nul. Le théorème d'unicité donne alors l'expression du potentiel en fonction de α :

$$V = (V_1 - V_2)\alpha(P) + V_2$$

On en déduit que les lignes de champ coïncident avec celles de $\vec{\nabla}\alpha$. Elles ne dépendent donc que de la géométrie des conducteurs.

Définition d'un condensateur.

Etant donné deux conducteurs en influence totale, on appelle condensateur le système formé d'un tube de champ Σ et des deux surfaces S_1 et S_2 qui lui correspondent sur chacun des conducteurs. S_1 et S_2 sont dites correspondantes et portent des charges opposées. On notera désormais $q = q_1 = -q_2$, $V = V_1 - V_2$ la charge et la ddp du condensateur.

Capacité d'un condensateur.

La charge d'un condensateur est proportionnelle à la ddp interarmatures. En effet :

$$q = \int_{S_1} \sigma(M) dS = \int_{S_1} \varepsilon_0 \vec{E}(P) \cdot \vec{n} dS = \varepsilon_0 (v_1 - v_2) \int_{S_1} \vec{\nabla}(\alpha) \cdot \vec{n} dS. \text{ Soit :}$$

$$q = Cv$$

C ne dépend que de la géométrie du condensateur (de même que α). De plus elle est toujours positive.

- Calcul de capacité :

On formule certaines hypothèses sur le potentiel interconducteur à partir de la géométrie du système considéré. En effet les surfaces des deux conducteurs sont deux équipotentielles et à partir de leur forme on peut conjecturer la forme de

toutes les équipotentielles. On résout alors l'équation de Laplace dans le vide avec les conditions aux limites. Cette solution est alors **la** solution grâce au théorème d'unicité. On peut alors en déduire le champ, la charge surfacique, définir proprement le condensateur et calculer sa capacité.

Exemples de condensateurs.

- Condensateur plan :

On formule l'hypothèse que les équipotentielles sont des plans parallèles aux plans des armatures. On en déduit que V ne dépend que de la distance à la première armature.

Le potentiel s'écrit donc :

$$V(z) = \begin{cases} V_1 & \text{si } z \leq 0 \\ (V_2 - V_1)\frac{z}{e} + V_1 & \text{si } 0 \leq z \leq e \\ V_2 & \text{sinon} \end{cases}$$

On en déduit le champ par un calcul de gradient (ici trivial) et le théorème de Coulomb permet alors le calcul de la charge surfacique d'une armature :

$$\sigma(M) = \varepsilon_0 \frac{V_1 - V_2}{e}$$

On en déduit la capacité :

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{e}$$

- Condensateur cylindrique :

La méthode est la même, quoiqu'ici elle soit plus difficile au point de vue calculatoire. En notant r_1 et r_2 les rayons des conducteurs cylindriques, on trouve pour la capacité linéique :

$$C_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(\frac{r_2}{r_1})}$$

Cette capacité intervient dans l'étude d'un coaxial.

- Condensateur sphérique :

Totalement inutile en pratique ce condensateur sert à faire des calculs en sphériques. La méthode est encore la même. On suppose que le potentiel ne dépend que de r et on le vérifie après calculs grâce au théorème d'unicité :

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

On a encore fait un tas d'autres condensateurs comme le diédrique, l'ellipsoïdal, le cône etc.

Energie d'un condensateur.

- Définition :

C'est l'énergie électromagnétique contenue dans le condensateur (cf : 3.6). Comme on se situe dans le cadre de l'électrostatique, elle a pour expression :

$$E_{em} = \int_{\tau} \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 d\tau$$

- Autres expressions :

Un calcul astucieux permet d'obtenir les expressions équivalentes suivantes :

$$E_{em} = \frac{1}{2}qv = \frac{1}{2}Cv^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

On peut également interpréter cette énergie comme l'énergie que reçoit le condensateur lorsqu'on le charge de manière réversible.

Relation entre capacité et résistance.

• Résistance électrique :

On considère un milieu de conductivité électrique γ compris entre deux électrodes. Le potentiel y satisfait à l'équation de d'Alembert : $\square V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$. En régime stationnaire et dans un milieu électriquement neutre cette équation se ramène à celle de Laplace dans le vide : $\Delta V = 0$ avec les conditions aux limites V uniforme sur les électrodes. On en déduit, comme pour le condensateur : $V(P) = (V_1 - V_2)\alpha(P) + V_2$ en introduisant le même α .

Or le courant de charge satisfait à $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ (milieu immobile. cf : cours de thermodynamique) ou encore $\vec{j} = -\gamma\vec{\nabla}V$ en régime stationnaire. Soit $\vec{j} = -\gamma(V_1 - V_2)\vec{\nabla}(\alpha)$. Les lignes de courant ne dépendent donc que de la géométrie des électrodes et cela permet de définir le système compris entre un tube de champ (ou de courant) Σ et les deux surfaces S_1, S_2 qui lui correspondent sur les électrodes.

Le courant de charge étant à flux conservatif, son flux à travers une surface délimitée par Σ , ne dépend pas de cette surface. C'est l'intensité qui traverse le résistor. Pour la calculer on choisit pour surface S'_1 , infiniment voisine de S_1 .

On en déduit la loi d'Ohm globale :

$$v = RI$$

En posant $\frac{1}{R} = -\gamma \int_{S'_1} \vec{\nabla}(\alpha) \cdot \vec{n} dS$.

On reconnaît presque la capacité du condensateur à vide de même géométrie, et on en déduit l'expression :

$$RC = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$$

• Résistance thermique :

On considère un milieu de conductivité thermique λ uniforme compris entre deux thermostats de température T_1, T_2 . Dans l'espace interthermostats, la température satisfait à l'équation de diffusion : $\Delta T = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}$. En régime stationnaire, cela donne : $\Delta T = 0$. Avec les mêmes méthodes que ci-dessus, on en déduit : $T = (T_1 - T_2)\alpha + T_2$. Puis comme le courant thermique satisfait à la loi de Fourier : $\vec{j}_{th} = -\lambda\vec{\nabla}(T)$, on en déduit que les lignes de courant thermique ne dépendent que de la géométrie des thermostats. En plus le vecteur courant thermique est à flux conservatif (bilan local d'énergie interne). On peut donc tout faire comme ci-dessus et on en déduit :

$$P_{th} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}$$

En posant $\frac{1}{R_{th}} = -\lambda \int_{S'_1} \vec{\nabla}(\alpha) \cdot \vec{n} dS$. On reconnaît encore la capacité du condensateur à vide de même géométrie et on en déduit la relation :

$$R_{th}C = \frac{\epsilon_0}{\lambda}$$

2.1.5 Dipôle électrique.

Définition.

Un dipôle électrique est une distribution de charge de charge totale nulle et de moment électrique non-nul dont les dimensions sont faibles devant la distance séparant en moyenne le dipôle des points d'observation et devant la longueur caractérisant les variations spatiales du champ extérieur agissant sur le dipôle.

Potentiel et champ.

- Potentiel :

La distribution de charge sera supposée discrète pour les calculs. La loi de Coulomb permet d'exprimer le potentiel crée par cette distribution en un point d'observation "éloigné" : $V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{M_i P}$. Si on choisit O un point référence voisin du dipôle et qu'on note $r = OP$ on peut faire un développement limité à l'ordre 1 selon OM_i/r . on fait alors apparaître un vecteur indépendant de O :

$$\vec{p} = \sum_i q_i O\vec{M}_i$$

Ce vecteur est le "moment électrique", non-nul par hypothèse et tel que :

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \cdot \frac{\vec{u}}{r^2}$$

Remarque : Le moment électrique peut être mis sous la forme $\vec{p} = q_+ B_- \vec{B}_+$ où B_- et B_+ désignent les barycentres des charges positives et négatives et q_+ la somme des charges positives. *Remarque :* Dans le cas où le moment dipolaire est nul il faudrait poursuivre le DL, ce qui n'est pas difficile mais vite pénible. On parle ensuite de quadrupôle, d'octupôle et de 2^n -pôle.

- Champ :

En prenant le gradient et en notant \vec{u} le vecteur unitaire qui joint le dipôle au point d'observation, on trouve l'expression suivante pour le champ :

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3(\vec{p} \cdot \vec{u})\vec{u} - \vec{p})$$

- Lignes de champ :

On peut exprimer le champ en coordonnées sphériques à partir de l'expression ci-dessus :

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3} \\ E_\theta &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3} \end{aligned}$$

Les lignes de champ sont donc situées dans des plans $\varphi = cste$. Dans un tel plan elles ont pour équation :

$$r = r_0 \sin^2 \theta$$

Force subie par un dipôle.

- Résultante :

On plonge un dipôle dans un champ créé par une distribution de charge extérieure, il subit de la part de ce champ une force : $\vec{F} = \sum_i q_i \vec{E}(M_i)$ en notant \vec{E} le champ créé par la distribution extérieure. On peut alors faire un DL puisqu'on a supposé que la taille du dipôle était faible devant la longueur caractérisant les variations spatiales du champ extérieur agissant sur le dipôle. On trouve à l'ordre 1 :

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$$

- Moment :

Cette fois on fait un DL à l'ordre 0 qui est suffisant :

$$\vec{M}_P = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

Remarque : Lorsque le champ est uniforme, la résultante est nulle et les forces subies constituent un couple.

- Energie potentielle :

Les forces électriques subies par une distribution discrète de charge plongée dans un champ \vec{E} extérieur dérivent d'une e-p : $E_p = \sum_i q_i V(M_i)$. Dans le cas du dipôle on peut faire un DL à l'ordre 1 :

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

2.2 Magnétostatique

2.2.1 Théorème fondamental.

Enoncé.

Toute distribution stationnaire de courant engendre un champ vectoriel \vec{B} appelé champ magnétostatique tel que la force subie par une charge ponctuelle q de la part de cette distribution ait pour expression :

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{B} &= 0 \\ \text{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

Conséquences immédiates.

- $\text{div} \vec{B} = 0$:

le champ magnétique est à flux conservatif, il dérive donc d'un potentiel vecteur :

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

Remarque : Ce potentiel n'est défini qu'à un gradient près.

- Théorème d'Ampère :

$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$: à cette équation locale correspond l'équation intégrale :

$$\int_L \vec{B} \cdot \vec{t} dL = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS$$

De plus \vec{j} est à flux conservatif d'après le bilan local de charge total. On obtient l'équation intégrale :

$$\int_L \vec{B} \cdot \vec{t} dL = \mu_0 I_L$$

C'est le théorème d'Ampère.

• Equation de Poisson :

Les équations locales précédentes : $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ et $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ permettent d'obtenir une nouvelle équation : $\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} + \vec{\nabla}(\text{div} \vec{A})$. Et en choisissant judicieusement \vec{A} (de sorte que sa divergence soit nulle, ce qui est possible en prenant un bon gradient) :

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

C'est l'équation de Poisson vectorielle.

2.2.2 Champ et potentiel vecteur.

Distribution volumique.

L'équation de Poisson vectorielle à laquelle on adjoint la condition $\vec{A}(\infty) = \vec{0}$ et dans le cas d'une distribution bornée, admet pour solution unique :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(M)}{r} d\tau$$

On déduit de cela la loi de Biot-et-Savart :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{j}(M) \wedge \frac{\vec{u}}{r^2} d\tau$$

Les champs \vec{A} et \vec{B} sont définis et continus en tout point de l'espace. *Remarque :* On peut démontrer ces résultats en utilisant la résolution de l'équation de Poisson-scalaire.

Distribution surfacique.

On garde tout sauf que \vec{j} devient \vec{k} et V devient S .

Le potentiel vecteur est continu partout par contre le champ magnétostatique connaît une discontinuité au voisinage de la distribution considérée :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{k}(M) \wedge \vec{n}_{12}$$

Distribution linéique.

C'est pareil mais comme \vec{j} est à flux conservatif, I a même valeur en tout point et donc :

$$\begin{aligned} \vec{A}(P) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_L \frac{\vec{t}}{r} dL \\ \vec{B}(P) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_L \vec{t} \wedge \frac{\vec{u}}{r^2} dL \end{aligned}$$

De plus ni le champ ni le potentiel vecteur ne sont définis sur la distribution considérée.

Comportement face à une symétrie.

Le potentiel vecteur \vec{A} se comporte comme le champ électrostatique, à l'inverse du champ \vec{B} .

2.2.3 Circuits filiformes.

Définition.

Un circuit filiforme est une distribution volumique de courant dont le vecteur \vec{j} est quasi uniforme sur toute section droite du fil. *Remarque* : Le courant circule le long du fil. Le vecteur \vec{j} est donc tangent à la surface du fil. Comme il est quasi-uniforme, il l'est donc sur toute section droite du fil et on peut dire qu'en tout point : $\vec{j} = \frac{I}{s}\vec{t}$ (Si on se place en magnétostatique ou dans l'ARQS, $\text{div}\vec{j} = 0$). D'où : $\vec{j}d\tau = I\vec{t}dl$. Cette relation permet de transformer toute intégrale volumique en une intégrale curviligne. *Remarque* : Toute distribution de courant peut être décomposée en circuits filiformes, d'où cette étude. Cependant il importe de ne pas confondre circuit filiforme et distribution linéique de courant pour laquelle le champ n'est pas continu.

Flux d'un champ magnétique à travers un circuit filiforme.

On notera \vec{B}, \vec{A} le champ magnétique et un potentiel vecteur créés par une distribution quelconque, L une courbe qui épouse la forme d'un tel circuit et S une surface qui s'appuie sur L . Dans ces conditions :

$$\Phi = \int_L \vec{A} \cdot \vec{t} dL = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$

et Φ est appelé flux de \vec{B} à travers le circuit filiforme.

2.2.4 Inductance propre.

• Définition :

Le flux du champ \vec{B} créé par un circuit filiforme à travers lui-même est appelé "flux propre" du circuit. On montre avec un calcul que :

$$\Phi = LI$$

En posant $\Phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \int_{L'} \frac{\vec{t} \cdot \vec{t}'}{r} dL dL'$. Où L' est une courbe qui s'appuie sur le circuit filiforme et qui sert à exprimer le potentiel vecteur. C'est l'inductance propre du circuit filiforme.

• Propriétés :

L ne dépend que des caractéristiques géométriques du circuit elle est toujours positive (on le montrera avec des considérations énergétiques), et s'exprime en Henry. Typiquement elle vaut $10mH$.

• Bobine torique :

On prend une bobine torique à section rectangulaire comprenant N spires jointives, parcourue par un courant d'intensité I . On note a la distance du côté intérieur de la bobine à l'axe et b la distance du côté extérieur à l'axe ainsi que h la hauteur du rectangle. Etant donné que le potentiel vecteur \vec{A} est continu sur une boucle compacte qui enveloppe le circuit, il y est uniformément continu. On peut donc dire que pour le calcul du flux, tout se passe comme si chaque spire était indépendante (elles sont supposées voisines les unes des autres). Or on connaît le champ créé : $\vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \vec{u}_\theta$. On peut donc calculer le flux du champ à travers chaque spire : $\varphi = \frac{\mu_0 NI h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$. Il reste à sommer sur toutes les spires :

$$L = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} h \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

- Bobine cylindrique :

On suppose que les spires ont une densité linéique n uniforme et que la bobine est de longueur l . Le circuit n'est pas fermé mais on peut généraliser et définir le flux comme la somme des flux sur toutes les spires. En supposant la bobine infinie ou en négligeant les effets de bord on trouve que le flux est proportionnel à I . On parle encore d'inductance propre et sa valeur est :

$$L = \mu_0 n^2 l \pi R^2$$

- Ligne bifilaire :

Deux circuits fils cylindriques parallèles sont parcourus par des courants I et $-I$. Si on calcule le flux de \vec{B} à travers une surface rectangulaire s'appuyant les axes des fils et de hauteur h , on trouve qu'il est proportionnel à I et on parle encore d'inductance propre :

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \ln \left(\frac{a}{R} \right) \right)$$

En notant a la distance entre les axes et R le rayon des fils.

Matrice inductance.

- Définition :

Pour un système de circuits filiformes, chacun étant parcouru par une intensité I_j , un calcul pénible permet d'affirmer qu'il existe des coefficients L_{ij} tels que : $\Phi_i = \sum_j L_{ij} I_j$. Les coefficients L_{ij} forment une matrice carrée symétrique dont les coefficients diagonaux sont les inductances propres des circuits. Les coefficients non-diagonaux peuvent être négatifs. Ils se calculent en annulant certaines intensités dans le circuit, en calculant le champ et son flux.

2.2.5 Considérations énergétiques en magnétostatique.

Energie magnétique d'une distribution stationnaire de courants.

- Définition :

L'énergie électromagnétique est une grandeur extensive de densité volumique $\frac{1}{2\mu_0} B^2$ (dans le cadre de la magnétostatique). On définit l'énergie magnétique d'une distribution de courant délimitée par un volume τ comme :

$$E_{em} = \int_{\tau} \frac{1}{2} \vec{j} \cdot \vec{A} d\tau = \int_{\mathcal{E}} \frac{1}{2\mu_0} B^2 d\tau$$

On montre facilement que ces deux expressions sont équivalentes.

- Cas du circuit filiforme :

Un simple calcul donne :

$$E_{em} = \frac{1}{2} L I^2$$

On en déduit que L est toujours positive. De plus cette expression permet de définir l'inductance propre de circuits non filiformes comme un câble coaxial.

Travail des forces magnétiques.

- Loi de Laplace :

On considère une particule de matière, plongée dans un champ magnétostatique extérieur quasi-uniforme sur le volume $\delta\tau$ de la particule. Alors le calcul de la force subie par la particule se fait en séparant les constituants dans la force de Lorentz et en reconnaissant le courant de charge total dans l'expression obtenue :

$$\delta\vec{F} = \vec{j} \wedge \vec{B} \delta\tau$$

Cette expression pouvant être étendue au cas de distributions surfaciques ou linéiques. *Remarque :* Les forces ci dessus sont appelées forces de Laplace.

Dans le cadre du système S-I, l'ampère est l'intensité d'un courant qui, maintenu stationnaire dans deux fils rectilignes parallèles infiniment longs, placés à une distance de un mètre, engendre entre ces deux fils des forces de résultante $2 \cdot 10^{-7} \text{N}$.

- Travail des forces subies par un circuit filiforme :

On considère un circuit filiforme fermé se déplaçant dans un champ \vec{B} extérieur stationnaire. Si on note l et l' les positions occupées par le circuit à deux instants voisins t et t' , on peut calculer le travail des forces magnétiques lors de ce déplacement en commençant par calculer le travail subi par une portion de circuit située entre M et N points voisins. Par intégration le long le long du circuit, on en déduit :

$$\delta\mathcal{T} = I \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$

Où Σ est la surface décrite par le circuit lors de son déplacement. On peut calculer cette intégrale en exprimant la nullité du flux du champ à travers une grande surface fermée s'appuyant sur l et l' et contenant Σ . En notant alors ϕ le flux du champ à travers le circuit :

$$\int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} dS + \phi - \phi' = 0 \text{ soit :}$$

$$\delta\mathcal{T} = I d\phi$$

■ Exercice 5 ■

Deux solénoïdes cylindriques coaxiaux tels que $R_2 < R_1$, parcourus par un courant stationnaire. Déterminer la résultante des forces subies par le petit solénoïde, puis en déduire qu'il n'existe qu'une seule position d'équilibre stable.

Indication : Considérer plusieurs cas et faire un raisonnement de type Joule-Thomson : on trouve que la seule position se trouve au milieu du grand solénoïde ($x = 0$). *Remarque :* Le calcul à partir de la force de Laplace en négligeant les effets de bord conduit à une résultante uniformément nulle Ceci montre que la force est due aux effets de bord.

- Cas d'un courant stationnaire :

Dans ce cas $\delta\mathcal{T} = dI\phi$. On en déduit que les forces magnétiques dérivent d'une e-p de la forme :

$$E_p = -I\phi$$

- Moment magnétique d'un circuit filiforme :

Dans le cas où le courant parcourant le circuit est uniforme et le champ extérieur est uniforme au voisinage du circuit, les forces magnétiques dérivent de l'e-p :

$$E_p = -I\phi = -(I \int_S \vec{n} dS) \cdot \vec{B} \text{ Soit :}$$

$$E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

où \vec{m} désigne le moment magnétique. *Remarque :* Un calcul simple permet de montrer que

$$\vec{m} = I \int_S \vec{n} dS = \frac{I}{2} \int_L \vec{r} \wedge \vec{t} dl$$

Ce qui montre que le moment magnétique ne dépend que du circuit filiforme et pas de la surface S .

Exercice 6

Calculer le moment d'un circuit filiforme contenu dans un plan. En déduire le moment d'un solénoïde comprenant N spires jointives.

2.2.6 Dipôle magnétique.

Définition.

Un dipôle magnétique est une distribution de courant de moment magnétique non-nul dont les dimensions sont faibles devant la distance séparant en moyenne le dipôle des points d'observation et devant la longueur caractérisant les variations spatiales du champ extérieur agissant sur le dipôle. *Remarque :* A l'échelle microscopique on définit le moment magnétique (orbital ou de spin) de l'entité. A l'échelle macroscopique on définit le moment par unité de volume, appelé \vec{M} "vecteur aimantation". Si ce vecteur est non-nul le milieu est dit aimanté.

Champ d'un dipôle.

- Potentiel vecteur magnétique :

Comme toute distribution de courant peut être décomposée en circuits filiformes, on se restreint aux circuits filiformes. Pour un tel circuit le potentiel vecteur peut être calculé directement grâce à la relation : $\vec{A}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{\vec{t}}{MP} dl$.

En notant O un point au voisinage du dipôle OM est très petit devant OP . La méthode naturelle consiste à faire un DL comme on l'avait fait pour le dipôle électrique. Cette méthode est laborieuse et inélégante. On introduit un champ vectoriel uniforme \vec{a} intermédiaire de calcul : $\vec{a} \cdot \vec{A}$ se calcule simplement grâce au théorème de Stokes. Puis, en effectuant un DL à l'ordre 0 on obtient le résultat :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \wedge \frac{\vec{u}}{r^2}$$

En notant $r = OP$ et \vec{u} le vecteur \vec{OP} normalisé.

- Champ magnétique :

On prend le rotationnel du potentiel ci-dessus et, via un petit calcul on obtient :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3(\vec{m} \cdot \vec{u})\vec{u} - \vec{m})$$

Remarque : Les lignes de champ sont donc les mêmes que celles du dipôle électrique.

• Actions subies par un dipôle :

On peut calculer le torseur des forces subies directement mais c'est pénible. On préfère utiliser une méthode plus originale. On imagine un déplacement infinitésimal du dipôle au cours duquel celui-ci est supposé indéformable est parcouru par un courant stationnaire. Le travail de ces forces peut être calculé de deux manières.

D'un part $\delta\mathcal{T} = dt\mathcal{FV} = dt(\vec{F} \cdot \vec{v}_P + \vec{M}_P \cdot \vec{\omega})$. (cf : mécanique du solide).

D'autre part $\delta\mathcal{T} = -dE_p$ avec $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ car \vec{B} est uniforme au voisinage du dipôle.

— Résultante : On choisit pour déplacement une translation de vecteur

$dx\vec{u}_x$. On obtient dans ce cas $F_x = \vec{m} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x}$. C'est-à-dire $(\vec{m} \cdot \vec{\nabla})B_x$

dans le cas où il n'y a pas de courant au voisinage du dipôle ($\text{rot}\vec{B} = \vec{0}$).

Puis :

$$\boxed{\vec{F} = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}}$$

— Moment en P : Cette fois on choisit une rotation autour de P et obtient facilement :

$$\boxed{\vec{M}_P = \vec{m} \wedge \vec{B}}$$

2.3 Equations de Maxwell

2.3.1 Principe fondamental de l'électromagnétisme.

Enoncé.

Toute distribution de charge et de courant engendre un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) tel que la force exercée par cette distribution sur une charge ponctuelle q ait pour expression :

$$\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})}$$

Ce champ e-m satisfait aux équations de Maxwell :

$$\begin{array}{ll} (1) \quad \text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (2) \quad \text{div}\vec{B} = 0 \\ (3) \quad \text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} & (4) \quad \text{rot}\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \end{array}$$

Propriétés.

Les deux premières équations sont celles dites de structure. Elles sont indépendantes du milieu considéré. D'un point de vue théorique elles traduisent les caractéristiques (masse nulle et spin unité) du photon, particule associée au champ e-m.

Les deux dernières ne sont valables que dans les milieux non-polarisés non-aimantés. Les équations générales sont présentées après, mais ne sont pas au programme de MP. Les équations de Maxwell admettent comme cas particulier celles des deux chapitres précédents.

Dans le cas général il n'est plus possible de séparer l'étude des champs \vec{E} et \vec{B} car ils sont couplés.

Ces équations portent des noms particuliers. Ainsi (2) est l'équation de Maxwell-Faraday, (3) celle de Maxwell-Gauss et (4) celle de Maxwell-Ampère. Elles montrent que la grandeur extensive "charge totale" est conservative. En prenant la divergence de Maxwell-Ampère on tire :

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Les équations de Maxwell sont linéaires, ce qui justifie le théorème de superposition et la notation complexe.

2.3.2 Le potentiel électromagnétique.

Définition.

Etant donné que $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, \vec{B} dérive d'un potentiel vecteur noté \vec{A} . Ensuite en prenant le rotationnel de $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ on trouve qu'il dérive d'un potentiel scalaire. Il existe donc un couple (V, \vec{A}) tel que :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \operatorname{rot} \vec{A} \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

Non-unicité.

Si (V_0, \vec{A}_0) est un potentiel dont dérive le champ e-m, alors $(V_0 - \frac{\partial f}{\partial t}, \vec{A}_0 + \vec{\nabla} f)$ en est un aussi. Cette non-unicité est mise à profit pour simplifier les équations de D'Alembert sur le potentiel e-m.

2.3.3 Equations de D'Alembert.

En choisissant un bon potentiel qui satisfait à la jauge de Lorentz : $\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ on peut arriver aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta V - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \Delta \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

Et si on utilise l'opérateur d'Alembertien défini par : $\square = \Delta - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, on peut récrire ces équations sous la forme plus jolie :

$$\begin{aligned} \square V &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \square \vec{A} &= -\mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

Dans le vide l'équation de d'Alembert relative au potentiel électrique est une équation d'onde.

$$\Delta V = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \text{ dont la célérité est } c = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}.$$

2.3.4 L'ARQS

Potentiel retardé.

On généralise la résolution de l'équation de Poisson et on montre que le potentiel électromagnétique est de la forme :

$$\begin{aligned} V(P, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(M, t - \frac{r}{c})}{r} d\tau \\ \vec{A}(P, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(M, t - \frac{r}{c})}{r} d\tau \end{aligned}$$

On interprète cette expression du potentiel comme le fait que l'information e-m se propage à la vitesse de la lumière et le retard $\frac{r}{c}$ correspond au temps mis par la charge ou le courant en M pour agir en P.

Définition de l'ARQS.

L'ARQS revient à se placer dans le cadre de la mécanique classique dans laquelle l'information se propage instantanément, ce qui veut dire qu'on considère que c est infini.

On suppose donc que le temps mis par la distribution pour subir des variations notables est très supérieur au temps r/c . D'où l'appellation "quasi-stationnaire".

Conséquences.

On va donc négliger tous les termes qui contiennent des $\frac{1}{c}$ et les remplacer par 0, ce qui va simplifier toutes les équations de l'électromagnétisme. Ainsi les nouvelles équations de Maxwell sont :

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{div} \vec{B} &= 0 \\ \text{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

On a toujours le théorème de Gauss et on a en prime le théorème d'Ampère sur la circulation de \vec{B} . En prenant la divergence de la nouvelle équation de Maxwell-Ampère, on trouve que le vecteur courant de charge \vec{j} est à flux conservatif. Cette propriété permet de justifier la loi des noeuds. *Remarque* : On ne peut pas faire l'étude du condensateur plan dans le cadre de l'ARQS.

Les potentiels retardés se simplifient trop simple en les lois de Coulomb et Biot-et-Savart pour les potentiels, de même le champ magnétique satisfait à la loi de Biot-et-Savart mais pas le champ électrique. Les équations de d'Alembert retombent sur les équations de Poisson et la jauge de Lorentz retombe sur la jauge de Coulomb : $\text{div} \vec{A} = 0$. En conclusion :

Tous les résultats de la magnétostatique restent valables et la plupart de ceux de l'électrostatique (excepté la loi de Coulomb et la relation $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$).

Domaine de validité de l'ARQS.

La transformation de Fourier intégrale permet de ramener l'étude de n'importe quelle fonction "régulière" à celle d'une fonction périodique de période T pour laquelle l'ARQS revient à supposer que $\frac{r}{c} \ll T$.

2.3.5 Conditions aux limites du champ e-m.

Soit une interface entre deux milieux (ex : vide / métal). Dans le cas limite du modèle surfacique, le champ (\vec{E}, \vec{B}) n'est pas défini sur l'interface et présente

une discontinuité à sa traversée. On va montrer que la discontinuité du champ est donnée par la relation :

$$\begin{aligned} \vec{E}(P_2, t) - \vec{E}(P_1, t) &= \frac{\sigma(M, t)}{\varepsilon_0} \vec{n}_{12} \\ \vec{B}(P_2, t) - \vec{B}(P_1, t) &= \mu_0 \vec{K}(M, t) \wedge \vec{n}_{12} \end{aligned}$$

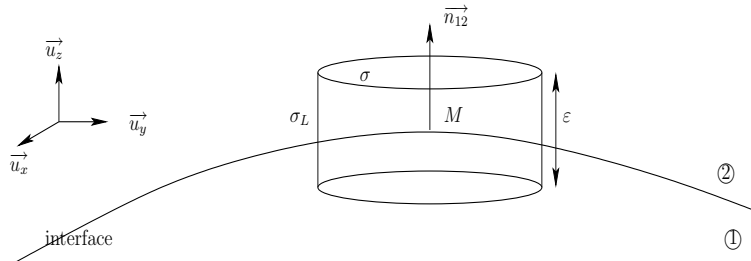
Forme intégrale des équations de Maxwell :

A chacune des équations de Maxwell locales on fait correspondre une équation intégrale :

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \longrightarrow & \int_L \vec{E} \cdot \vec{t} dL = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS \\ \text{div} \vec{B} &= 0 & \longrightarrow & \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0 \\ \text{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \longrightarrow & \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{q_S}{\varepsilon_0} \\ \text{rot} \vec{B} &= \mu_0 (\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) & \longrightarrow & \int_L \vec{B} \cdot \vec{t} dL = \mu_0 I_S + \varepsilon_0 \mu_0 \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS \end{aligned}$$

Etablissement des conditions aux limites.

On commence par choisir une surface comme figurée ci-dessous, de sorte que σ_l soit négligeable par rapport à σ . C'est à dire que $\varepsilon \partial \sigma \ll \sigma$, en notant $\partial \sigma$ le périmètre de la surface σ , elle même infinitésimale, de sorte que les densités surfaciques de charge et de courant y soient uniformes.



En intégrant sur cette surface les deux équations centrales ci-dessus, on trouve deux conditions aux limites. Pour trouver les deux autres, on intègre le long de cadres qui sont parallèles aux axes de coordonnées \vec{u}_x, \vec{u}_y et possèdent les

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \longrightarrow & \vec{E}_{2//} = \vec{E}_{1//} \\ \text{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \longrightarrow & \vec{E}_{2\perp} - \vec{E}_{1\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{12} \\ \text{div} \vec{B} &= 0 & \longrightarrow & \vec{B}_{2\perp} = \vec{B}_{1\perp} \\ \text{rot} \vec{B} &= \mu_0 (\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) & \longrightarrow & \vec{B}_{2//} - \vec{B}_{1//} = \mu_0 \vec{K} \wedge \vec{n}_{12} \end{aligned}$$

En regroupant ces informations et en utilisant que le courant surfacique est tangent à l'interface, on obtient les conditions aux limites annoncées au début du paragraphe.

Equations de Maxwell générales.

On généralise les équations de Maxwell dans le cas des milieux polarisés et aimantés en introduisant les vecteurs moment dipolaire électrique \vec{P} et moment dipolaire magnétique \vec{M} . Ainsi que les vecteurs excitation électrique $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} +$

\vec{P} et excitation magnétique $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$. Dans ces conditions, les équations de Maxwell deviennent :

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{div} \vec{D} &= \rho \\ \text{div} \vec{B} &= 0 & \text{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

Et en faisant la même méthode que ci-dessus on retrouve des conditions aux limites (plus simples que les précédentes) :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{2//} - \vec{E}_{1//} &= \vec{0} & \vec{B}_{2\perp} - \vec{B}_{1\perp} &= \vec{0} \\ \vec{D}_{2\perp} - \vec{D}_{1\perp} &= \sigma n_{12} & \vec{H}_{2//} - \vec{H}_{1//} &= \vec{K} \wedge n_{12} \end{aligned}$$

2.3.6 Energie électromagnétique.

Définition.

En calculant la divergence ci-dessous et en utilisant les équations de Maxwell on démontre la relation :

$$\text{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

Une telle équation traduit le bilan d'une grandeur extensive : l'Energie électromagnétique. $\vec{J}_{em} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ est le courant volumique d'énergie e-m, on l'appelle le vecteur de Poynting.

Puissance électromagnétique.

Dans le cas général, il suffit de calculer le flux du vecteur de Poynting : $P_{em}^r = \iint_S \vec{J}_{em} \cdot \vec{n} dS$

Dans le cas particulier du régime stationnaire, on écrit $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ et on simplifie le vecteur de Poynting. puis on recalcule le flux et on trouve :

$$P_{em}^r = \iint_S V \vec{j} \cdot \vec{n} dS$$

Remarque : Tout ceci n'est valable que dans la cas d'une frontière fixe.

On peut alors facilement calculer la puissance électromagnétique reçue par un dipôle électrocinétique parcouru par un courant d'intensité i et soumis à une ddp de v :

$$P_{em}^r = vi$$

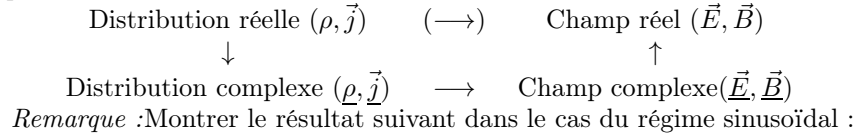
2.3.7 Notation complexe en électromagnétisme.

Théorème.

Si le couple $(\underline{\vec{E}}, \underline{\vec{B}})$ est solution des équations de Maxwell pour la distribution $(\rho, \underline{\vec{j}})$, alors le couple (\vec{E}, \vec{B}) est solution des équations de Maxwell pour la distribution (ρ, \vec{j}) .

Intérêt de la notation complexe.

Le calcul direct du champ réel est souvent plus difficile que le calcul en trois étapes suivants :



$$\boxed{< \vec{J}_{em} > = \frac{\underline{\mathfrak{E}} \wedge \underline{\mathfrak{B}}^*}{2\mu_0}}$$

Ce résultat n'en a pas l'air mais il est utile dans le cours sur les ondes électromagnétiques.

2.4 Induction électromagnétique.

2.4.1 Généralités.

Définition.

Un conducteur est le siège d'un phénomène d'induction dès qu'apparaissent des courants induits par la mobilité du conducteur ou par la non-stationnarité du champ magnétique qui y règne.

- Cas de Lorentz :

Le conducteur est mobile dans un champ stationnaire.

- Cas de Neumann :

Le conducteur est immobile dans un champ stationnaire.

Mise en évidence expérimentale.

- Cas de Lorentz :

— rail : La translation d'une tige conductrice dans un champ uniforme stationnaire, engendre un courant induit non-nul dès que la vitesse de la tige est non-nulle.

— Roue de Barlow : La rotation d'une roue conductrice dans un champ uniforme engendre un courant non-nul dès que la vitesse angulaire de la roue est non-nulle.

- Cas de Neumann :

— Bobine et aimant : Un aimant se déplace entre les spires d'une bobine et y engendre un courant électrique.

— Transformateur : Le montage est constitué de deux parties, circuit primaire et secondaire, chacun constitué d'un enroulement de fils et traversés sans contact par un barreau conducteur. Le circuit primaire est alimenté par une tension sinusoïdale. On constate l'apparition d'un courant dans le circuit secondaire.

Freinage par induction.

On considère un pendule conducteur qui passe dans une zone où règne un champ magnétique au cours de ses balancements. On constate alors le ralentissement du pendule. De même avec une roue subissant un champ. Cet effet peut être utilisé pour le freinage par induction des poids lourds.

Chauffage par induction.

Le courant induit dans un conducteur engendre un effet joule qui permet de chauffer. Par exemple de la soudure à l'étain ou des tripoux sur des plaques à induction.

2.4.2 Champ électromoteur d'induction.

Dans un conducteur métallique, la charge est nulle et donc $\vec{j} = \vec{j}^*$. Le courant total de charge satisfait donc à la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

où \vec{v} désigne la vitesse macroscopique du métal au point considéré. On définit alors le champ électromoteur d'induction comme la quantité vectorielle :

$$\vec{E}_{em} = \vec{v} \wedge \vec{B} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\vec{j}}{\gamma} + \vec{\nabla} V$$

Ce champ est homogène à un champ électrique et est nul en l'absence de phénomène d'induction, d'où son nom.

2.4.3 Phénomène d'induction dans un circuit filiforme.

Force électromotrice d'induction.

- Définition :

Etant donné un circuit filiforme quelconque, on définit la f.e.m comme :

$$e = \int_l \vec{E}_m \cdot \vec{t} dl$$

Remarque : Cette valeur dépend de la convention choisie pour le sens de circulation.

- Expression de la d.d.p :

Le calcul de la f.e.m se fait facilement, et sachant que $R = \int_l \frac{dl}{\gamma s}$ désigne la résistance électrique du circuit (mise en série de tubes conducteurs élémentaires, de résistance $\delta R = \frac{dl}{\gamma s}$) on trouve l'expression suivante :

$$e = Ri + V_B - V_A$$

où A et B désignent les deux extrémités du circuit, éventuellement confondues.

Cette expression est valable que le circuit soit ouvert ou fermé. Dans le cas où il est ouvert, l'ARQS donne $i = 0$ et $V_A - V_B = -e$. Dans le cas où il est fermé, $e = Ri$.

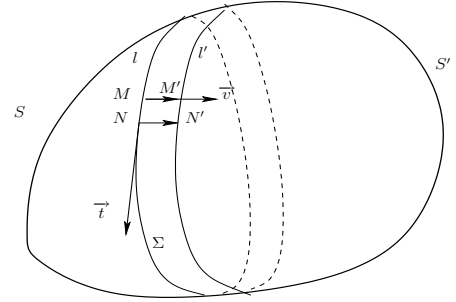
Loi de Faraday

On considère un circuit filiforme fermé et on note ϕ le flux du champ magnétique total à travers ce circuit. Calculons sa variation entre t et $t + dt$, en notant S et S' des surfaces fermées s'appuyant sur le circuit, l'une à l'instant t , l'autre à l'instant $t + dt$. On note également \vec{B} et \vec{B}' le champ magnétique à ces deux instants.

$$d\phi = \int_{S'} \vec{B}' \cdot \vec{n} dS - \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS + \int_{S'} \vec{B} \cdot \vec{n} dS - \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$

On scinde alors sur les deux différences d'intégrales. On note la première $\delta\phi_N$ et l'autre $\delta\phi_L$ car elles correspondent respectivement à un cas de Neumann ou de Lorentz.

$$\begin{aligned}
\delta\varphi_L &= \int_{S'} \vec{B} \cdot \vec{n} dS - \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS \\
&= \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} dS \\
&= \int_l \vec{B} \cdot [(\vec{v} dt) \wedge \vec{t} dl] \\
&= dt \int_l \vec{B} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{t}) dl \\
&= -dt \int_l (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{t} dl
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\delta\varphi_N &= \int_{S'} \vec{B}' \cdot \vec{n} dS - \int_{S'} \vec{B} \cdot \vec{n} dS \\
&= dt \int_{S'} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS \\
&= dt \int_{S'} \text{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS \\
&= dt \int_{l'} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{t} dl \\
&= dt \int_l \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{t} dl
\end{aligned}$$

En regroupant ces deux termes, on obtient la loi de Faraday, qui n'est valable que pour un circuit fermé :

$$\frac{d\phi}{dt} = -e$$

La loi de Faraday permet de calculer le courant induit circulant dans un circuit filiforme **fermé**, en utilisant : $e = Ri$.

Exemples et applications.

• Bobine d'induction :

On considère une bobine parcourue par un courant d'intensité i . La bobine est un circuit ouvert mais la forme curviligne du flux permet de définir le flux $\phi = \int_l \vec{A} \cdot \vec{n} dl$. Un calcul trivial montre alors que la relation de Faraday reste valable (ce qui n'était pas prévisible puisque le circuit est ouvert). En utilisant la formule $\phi = Li$ définie en magnétostatique, on obtient les relations électrocinétiques de la bobine :

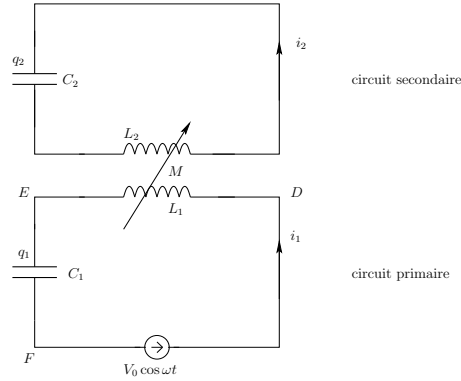
$$v = Ri + L \frac{di}{dt}$$

Exercice 7

Couplage par inductance mutuelle de deux circuits : transformateur.

On considère deux circuits L, C dont l'un contient une source de tension sinusoïdale et l'autre pas, couplés par induction : le flux ϕ à travers l'une ou

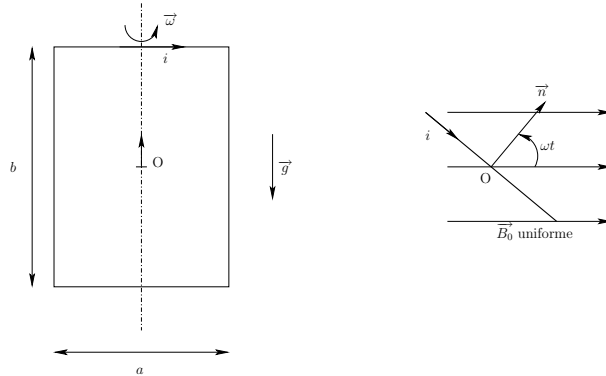
l'autre bobine fait intervenir le coefficient d'inductance mutuelle. (cf : matrice inductance) :



Montrer alors que le circuit privé secondaire est parcouru par un courant, d'intensité non-nulle dès que le coefficient d'inductance mutuelle est non-nul.

• Alternateur :

C'est un système produisant du courant à partir d'un mouvement de rotation : on considère N spires rectangulaires de côtés a et b , de centre O et tournant autour de l'axe Oz à la vitesse stationnaire ω , placée dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme stationnaire \vec{B}_0 , normal à l'axe de rotation :



- Equation électromagnétique : On note L et R l'inductance et la résistance du circuit. Le circuit étant une bobine, on peut appliquer la loi de Faraday. On décompose ensuite le flux en flux propre qui s'exprime avec l'inductance et en flux extérieur, donné par un calcul direct. On aboutit à l'équation :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = \omega \phi_0 \sin(\omega t)$$

En notant $\phi_0 = NB_0ab$ une quantité homogène à un flux, qui apparaît dans les calculs. La résolution de cette ED se fait sans problème en complexe, en négligeant le régime transitoire :

$$i = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

- Equation mécanique : On applique au cadre supposé indéformable le théorème du moment cinétique selon l'axe \vec{u}_z , fixe (cf : mécanique). Le moment d'inertie étant stationnaire ainsi que ω , le moment des forces

extérieures est nul. Or celles ci se réduisent au moment des forces exercées par un moteur pour entretenir la rotation (M_{op}) et au forces magnétiques de l'aimant (on néglige la viscosité de l'air, on suppose l'axe vertical et la liaison pivot parfaite). Or le moment des forces magnétiques s'exprime grâce qu moment magnétique du circuit : $M_{aim} = (\vec{m} \wedge \vec{B}_0) \cdot \vec{u}_z$. On trouve alors :

$$M_{op} = i\phi_0 \sin(\omega t)$$

- Travail de l'opérateur durant une période : Entre t et $t + dt$: $\delta\mathcal{T}_{op} = M_{op}\omega dt$. Soit :
 $Ri^2 + Lidi$ grâce aux formules établies précédemment. Par intégration :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}TRI_0^2 = \frac{\pi R\omega\phi_0^2}{R^2 + L^2\omega^2}$$

■ Exercice 8 ■

Vérifier que les forces magnétiques subies par un circuit filiforme de moment magnétique \vec{m} , plongé dans un champ uniforme, constitue un couple de moment $\vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{B}$.

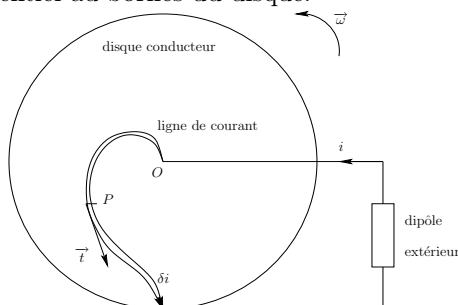
Indication : La méthode est la même que pour un dipôle, on imagine un déplacement élémentaire et on applique un théorème énergétique.

2.4.4 Induction dans un conducteur de forme quelconque.

L'étude d'un conducteur malsain d'un point de vue forme peut être ramenée à celle du circuit filiforme en décomposant le long des lignes de courant. Dans d'autres cas il vaut mieux revenir aux équations de Maxwell.

Roue de Barlow.

On considère un disque conducteur de rayon a en rotation autour de son centre placé dans un champ magnétique uniforme normal au plan du disque. Ce disque est parcouru par un courant : il est alimenté en son centre par un fil parcouru d'une intensité i et ce courant ressort par un fil placé en bas du disque, le contact étant mobile. On suppose que la liaison pivot est parfaite. On note $\vec{B} = B\vec{u}_z$ le champ uniforme et stationnaire dans lequel est plongé le disque, \vec{u}_z étant le vecteur unitaire et de même sens que $\vec{\omega}$. On note également $v = V_O - V_A$ la différence de potentiel au bornes du disque.



• Equation électromagnétique :

L'idée est de décomposer le disque en un réseau de circuits filiformes d'extrémités O et A , suivant les lignes de courant au sein du disque, et parcourus par un courant δi . On note alors δG l'inductance infinitésimale du circuit. Alors $v = \frac{\delta i}{\delta G} - e$. Or $E_{em} = \vec{v} \wedge \vec{B} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \sim \vec{v} \wedge \vec{B}_0$. En négligeant le champ créé par

le fil devant celui de l'aimant. Au final $\vec{E}_{em} \sim B_0 r \omega \vec{u}_r$. Puis par intégration le long le long de la ligne de courant, en utilisant que $\vec{t} dl = d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$, on trouve :

$$e = \frac{1}{2} B_0 a^2 \omega$$

Soit en regroupant les informations précédentes et en sommant tous les circuits filiformes élémentaires :

$$Ri = v + \frac{1}{2} B_0 a^2 \omega$$

- Equation mécanique :

On applique le TMC autour de Oz fixe dans le référentiel du labo galiléen. On introduit un frottement visqueux de moment $-f\omega$ et en reprenant la décomposition en circuits filiformes on trouve :

$$M_{op} = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\omega} + f\omega + \frac{1}{2} B_0 a^2 i$$

Remarque : Dans le cas où M_{op} est nul, on peut déterminer le mouvement de la roue en trouvant une équation différentielle du premier ordre sur ω . En exprimant le temps caractérisant l'arrêt, on remarque le champ magnétique introduit une contribution analogue au frottement fluide. En outre la rotation de la roue est la cause du phénomène d'induction. C'est un cas particulier de la Loi de Lenz :

Les effets de l'induction s'opposent à leur cause.

Four à induction.

- Principe :

On considère un solénoïde infiniment long de rayon a parcouru par un courant sinusoïdal. L'intérieur est rempli par un conducteur ohmique immobile. Le champ magnétique n'étant pas stationnaire, des courants induits appelés "courants de Foucault" apparaissent dans le conducteur et provoquent par effet joule un échauffement du métal. On veut déterminer le champ de température au sein du métal.

- Equations de Maxwell :

Dans un métal immobile : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$. La valeur de γ dans un métal usuel est de l'ordre de $10^8 \Omega^{-1} m^{-1}$. En se plaçant dans le cas sinusoïdal (quitte à s'y ramener par analyse de Fourier) et aux fréquences usuelles de l'électrocinétique ($N \leq 100 MHz$), le courant de déplacement $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est négligeable devant le courant de charge $\vec{j} = \gamma \vec{E}$. Dans ces conditions : $\vec{\text{rot}} \vec{B} \sim \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \gamma \vec{E}$, ce qui montre que $\text{div} \vec{E} = 0$ et donc que la charge vérifie $\rho = 0$. Dans un métal et aux fréquences usuelles les équations de Maxwell s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= 0 & \text{div} \vec{B} &= 0 \\ \vec{\text{rot}} \vec{B} &= \mu_0 \gamma \vec{E} & \vec{\text{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

- Equation magnétique :

Un calcul classique à partir des équations ci-dessus fournit l'équation de diffusion :

$$\Delta \vec{B} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

- Température dans le métal :

Elle peut être déduite du bilan local d'énergie interne :

$$\text{div} \vec{J}_{th} + \rho \frac{du}{dt} = \sigma_u$$

En appliquant successivement la loi de Fourier, le premier principe, la loi d'ohm et la relation $du = cdT$ valable pour une phase condensée, on ramène l'équation à une équation de diffusion avec second membre :

$$-\lambda \Delta T + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{j^2}{\gamma}$$

Ces deux équations de diffusion peuvent se résoudre (difficile) pour obtenir le champ de température en tout point à tout instant.

2.5 Ondes électromagnétiques

2.5.1 Ondes électromagnétiques dans le vide.

Equations d'onde.

Tout potentiel électromagnétique satisfaisant à la jauge de Lorentz : $\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ satisfait aussi aux équations de d'Alembert qui s'écrivent dans le vide ($\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$) :

$$\Delta V = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad \Delta \vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

Les équations de Maxwell dans le vide conduisent rapidement aux équations d'onde :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Le champ électromagnétique est donc une onde de célérité c telle que $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$.

Structure d'une OPPM électromagnétique dans le vide.

On écrit, conformément à la définition d'une OPPM, le champ électromagnétique en notation complexe sous la forme :

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{B}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Or, pour une OPPM, on a des expressions simples des opérateurs usuels, à savoir :

$$\text{div} \underline{\vec{E}} = i\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}}, \quad \text{rot} \underline{\vec{E}} = i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}, \quad \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = -i\omega \underline{\vec{E}}$$

Ce qui fournit facilement les relations entre les champs $\underline{\vec{E}}$ et $\underline{\vec{B}}$, qui s'étendent aux vecteurs réels car \vec{k} est un vecteur réel et ω est un réel :

$$\vec{E} = -c^2 \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{B} \quad \vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$$

Par une simple substitution, on trouve la relation de dispersion du vide pour les OPPM électromagnétiques : $\omega = kc$. Cette relation étant linéaire, on en déduit que le vide est un milieu non-dispersif pour les ondes électromagnétiques. On peut introduire le vecteur $\vec{u} = \vec{k}/k$ indiquant le sens et la direction de propagation de l'OPPM qui permet de simplifier les écritures des équations ci-dessus. L'OPPM est dite transversale vu que le vecteur d'onde est normal au vecteur amplitude (immédiat vu les relations ci-dessus). On retiendra les deux relations suivantes, qui donnent la structure de l'OPPM dans le vide :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \vec{k} & = & \frac{\omega}{c} \vec{u} \\ \vec{E} & = & -c \vec{u} \wedge \vec{B} \end{array}}$$

Polarisation d'une OPPM e-m.

Cette notion n'a de sens que pour des ondes vectorielles avec une composante transversale.

- **Définition :**

Etant donné les relations ci-dessus, on ne s'intéresse qu'au champ, \vec{E} . En partant de l'expression du champ complexe, on va calculer les composantes du champ réel. On pose $u_z = \vec{u}$ et on complète en une base orthonormée directe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. On peut alors écrire : $\vec{E}_0 = E_{0x} e^{i\alpha} \vec{u}_x + E_{0y} e^{i\beta} \vec{u}_y$ et on note $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = e^{i\varphi}$ de sorte que :

$\vec{E} = E_{0x} \cos(\varphi + \alpha) \vec{u}_x + E_{0y} \cos(\varphi + \beta) \vec{u}_y$ et en posant en plus :

$\varphi' = kz - \omega t + \alpha$ et $\phi = \alpha - \beta$ on a l'expression :

$$\boxed{E_{0x} \cos(\varphi') \vec{u}_x + E_{0y} \cos(\varphi' - \phi) \vec{u}_y}$$

Si ϕ est quelconque, le vecteur \vec{E} décrit une ellipse, on dit que l'onde est polarisée elliptiquement. Si ϕ est nul, \vec{E} décrit un segment de longueur $2E_0$, on dit que l'onde est polarisée rectilignement.

Si $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$ et $E_{0x} = E_{0y}$ alors le vecteur \vec{E} décrit un cercle de rayon E_0 . On dit que l'OPPM est polarisée circulairement. Si ϕ est positif on parle de circulaire droite, de gauche dans le cas contraire.

- **Théorèmes :**

Une OPPM de polarisation quelconque peut toujours être considérée comme la superposition de deux OPPM polarisées rectilignement et de directions orthogonales.

Une OPPM polarisée rectilignement peut toujours être considérée comme la superposition de deux OPPM polarisées circulairement dans des sens opposés.

La démonstration de ces théorèmes est triviale.

Intensité d'une OPPM e-m dans le vide.

Calculons la valeur moyenne du vecteur de Poynting pour une OPPM électromagnétique en notation réelle :

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{E} \right) = \frac{1}{\mu_0} \left(-c \vec{u} \wedge \vec{B} \right) \wedge \vec{B} \\ &= \varepsilon_0 c E^2 \vec{u} = c \frac{1}{\mu_0} B^2 \vec{u} \end{aligned}$$

On obtient, en prenant la valeur moyenne temporelle que la valeur moyenne du vecteur de Poynting est proportionnelle à \vec{u} . On définit l'intensité de l'OPPM comme cette constante de proportionnalité et on la note I :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = I \vec{u}$$

On retiendra de ces calculs les diverses expressions de cette intensité :

$$\boxed{\begin{aligned} c\varepsilon_0 \langle E^2 \rangle &= \frac{c}{\mu_0} \langle B^2 \rangle \\ \frac{c\varepsilon_0}{2} \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^* &= \frac{c}{2\mu_0} \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^* \end{aligned}}$$

D'un point de vue interprétation physique, l'intensité d'une OPPM se propageant dans la direction et le sens de \vec{u} est la valeur moyenne temporelle de la puissance e-m qui tranverse une surface unité orthogonale à \vec{u} dans le sens de \vec{u} .

Exercice 9

Définir et calculer la puissance d'un laser émettant une lumière monochromatique polarisée circulairement à l'intérieur d'un cylindre de section droite s_0 .

2.5.2 Ondes électromagnétiques dans un milieu optique.

Notion de milieu optique.

Un milieu optique est un milieu polarisé non-aimanté. Il n'est ni chargé, ni parcouru par un courant. Les équations de Maxwell générales (cf : 2.3.5) s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{div} \vec{D} &= 0 \\ \text{div} \vec{B} &= 0 & \text{rot} \vec{B} &= \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

En optique linéaire, le vecteur \vec{D} est lié au champ électrique \vec{E} par la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

En se plaçant dans une base de vecteurs propres de la matrice (On admet qu'elle est diagonalisable). Un milieu optique est dit homogène si cette matrice est uniforme, isotrope si elle est scalaire.

Milieu optique homogène isotrope.

La relation matricielle précédente s'écrit alors $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$. ε est une constante que l'on peut mettre sous les formes :

$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ où ε_r est la constante diélectrique du milieu, sans dimension.

$\varepsilon = \varepsilon_0 n^2$ en notant $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ l'indice optique du milieu. Les équations de Maxwell s'écrivent alors comme celles du vide à condition d'effectuer les substitutions :

$$\boxed{c \longrightarrow \frac{c}{n} \quad \varepsilon \longrightarrow \varepsilon_0 n^2}$$

La structure de l'OPPM est donc la même que dans le vide, à une constante multiplicative près. L'intensité de l'OPPM a pour expression : $I = \frac{c\varepsilon_0 n}{2} \vec{E} \cdot \vec{E}^*$

Milieu homogène anisotrope.

On se contente d'étudier le cas d'une lame polaroïd de normale \vec{u}_z qui se comporte comme un milieu optique transparent pour une OPPM polarisée rectilignement dans le sens de \vec{u}_x et comme un miroir pour une OPPM polarisée selon l'axe vy . L'axe \vec{u}_x est nommé l'axe du polaroïd. Une OPPM polarisée de

façon quelconque qui rencontre ce milieu est partiellement transmise. Le champ électrique \vec{E}_τ transmis est polarisé selon \vec{u}_x .

■ Exercice 10 ■

Loi de Malus. On fait arriver une OPPM polarisée rectilignement dans une direction \vec{u} formant un angle θ avec l'axe du polaroïd. Calculer l'intensité de l'OPPM transmise connaissant celle de l'onde incidente. On trouve :

$$I_\tau = I \cos^2 \theta$$

Milieu optique isotrope mais inhomogène.

On réécrit les équations de Maxwell générales en prenant garde que l'indice n'est plus uniforme :

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{div}(n^2 \vec{E}) &= 0 \\ \text{div} \vec{E} &= 0 & \text{rot} \vec{B} &= \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

- Recherche d'une solution particulière des équations de Maxwell :

Une simple OPPM ne convient plus, il faut chercher une solution sous la forme :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) e^{i(k_0 R(\vec{r}) - \omega t)}$$

avec $k_0 = \omega/c$. En substituant dans Maxwell-ampère et Maxwell-Faraday on trouve les relations :

$$\begin{aligned} \vec{E}_0 \wedge \vec{\nabla} R + c \vec{B}_0 &= -\frac{i}{k_0} \text{rot} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \wedge \vec{\nabla} R - \frac{n^2}{c} \vec{E}_0 &= -\frac{i}{k_0} \text{rot} \vec{B}_0 \end{aligned}$$

- Approximation de l'optique géométrique :

Elle consiste à supposer $\text{rot} \vec{E}_0 \ll k_0 c \vec{B}_0$ et $c \text{rot} \vec{B}_0 \ll k_0 n^2 \vec{E}_0$. Auquel cas les relations ci-dessus s'écrivent :

$$\begin{aligned} \vec{E}_0 \wedge \vec{\nabla} R + c \vec{B}_0 &= \vec{0} & (1) \\ \vec{B}_0 \wedge \vec{\nabla} R - \frac{n^2}{c} \vec{E}_0 &= \vec{0} & (2) \end{aligned}$$

On montre alors que les deux autres équations de Maxwell sont satisfaites. Puis, en reportant (1) dans (2) on obtient la relation importante :

$[(\vec{\nabla} R)^2 - n^2] \vec{E}_0 = \vec{0}$ ce qui fournit l'existence d'un vecteur \vec{u} unitaire tel que $\vec{\nabla} R = n \vec{u}$ et on peut réécrire les équations de structure :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{c}{n} \vec{u} \wedge \vec{B} \\ \vec{B} &= n \frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{E} \end{aligned}$$

Ce qui rappelle celles du vide sauf que cette fois \vec{u} n'est pas uniforme ! On dit que le champ e-m a localement la structure d'une OPPM se propageant dans la direction et le sens de \vec{u} .

- Définition d'un rayon lumineux :

C'est une ligne de courant d'énergie électromagnétique. Comme $\vec{\Pi}$ le vecteur de Poynting est de colinéaire et de même sens que le vecteur \vec{u} on en déduit que \vec{u} est tangent au rayon lumineux et que son sens indique le sens de propagation de la lumière.

- Equation curviligne d'un rayon :

On se place le long d'un rayon lumineux et on y choisit deux points voisins M et M' . On effectue ensuite la différentielle de la relation $\vec{\nabla}R = n\vec{u}$. Un calcul astucieux permet ensuite d'affirmer que :

$$\boxed{\frac{dn\vec{u}}{ds} = \vec{\nabla}R}$$

Dans le cas particulier où n est uniforme on retrouve que le rayon lumineux est une droite.

- Théorème de Fermat :

Avec ce qu'on a fait ci dessus on peut démontrer le théorème de Fermat, habituellement érigé en principe : étant donnée une courbe L voisine d'un rayon lumineux L_0 , l'intégrale $\int_L n dL$ est égale à l'ordre 1 au chemin optique le long de L_0 .

$$\boxed{(M_1 M_2) = \int_L n dL}$$

- Surface d'onde, théorème de Malus :

On appelle surface d'onde, ou surface équiphasse toute surface sur laquelle la phase est uniforme. Une surface d'onde est donc caractérisée par une valeur uniforme de R .

Etant donné que $\vec{\nabla}R$ est normal à une telle surface et que $n\vec{u} = \vec{\nabla}R$, les rayons lumineux sont orthogonaux aux surfaces d'onde (de même que les lignes de champ étaient orthogonales aux surfaces équipotentielles en électrostatique).

- Identification de R à un chemin optique :

En introduisant le rayon lumineux passant par M , qui coupe la surface d'onde correspondant à $R = 0$ en M_0 , et en utilisant le théorème ci-dessus on trouve :

$$\boxed{R(M) = (M_0 M)}$$

On peut identifier le champ scalaire R au chemin optique ainsi défini.

- Domaine de validité de l'approximation :

Si on analyse précisément l'approximation effectuée pour faire tout cela, on constate que l'approximation de l'optique géométrique revient à supposer que les variations de l'amplitude du champ varie peu en valeur relative à l'échelle de la longueur d'onde.

Dans le cas contraire, les lois de l'optique géométrique doivent être remplacées par celles de la diffraction.

Approximation scalaire de l'optique géométrique.

Elle consiste à remplacer l'onde électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) se propageant dans un milieu optique d'indice n par une onde scalaire s .

On se place dans une région de l'espace où les lois de l'optique géométrique sont valables, dans laquelle on choisit deux points M_1 M_2 situés sur un même rayon alors l'onde scalaire s vérifie la relation :

$$\boxed{\frac{s(M_2, t)}{s(M_1, t)} = a_{12} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (M_1 M_2)}}$$

On démontre cette relation dans tous les cas usuels de l'optique géométrique : faisceau cylindrique dans un milieu homogène, faisceau conique et milieu inhomogène.

2.5.3 Réflexion d'une OPPM sur un conducteur parfait plan.

Onde incidente, Onde réfléchie.

Une source émet une OPPM électromagnétique qui se propage avant d'arriver sur un plan conducteur parfait situé à droite du plan $z = 0$. on désire déterminer le champ en tout point de l'espace.

- Dans le conducteur parfait :

Le champ en y est nul en régime sinusoïdal et le conducteur ne peut être chargé ou parcouru par un courant que sur l'interface $z = 0$.

En effet dans un conducteur parfait, $\gamma \rightarrow \infty$ et la loi d'ohm pour un conducteur immobile assure $\vec{E} \rightarrow \vec{0}$. En régime sinusoïdal l'équation de Maxwell Faraday permet d'affirmer $\vec{B} = \vec{0}$. Puis Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère donnent $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$ en l'intérieur du conducteur. De plus l'OPPM engendre nécessairement une distribution de charge ou de courant à la surface du conducteur. En effet dans le cas contraire le champ à l'intérieur du conducteur serait réduit de l'OPPM, non-nul.

- Dans le vide :

Il suffit de superposer à l'OPPM incidente une OPPM réfléchie, engendrée par la distribution de charge et de courant à la surface du conducteur, notée (\vec{K}, σ) .

Les conditions aux limites à l'interface vide conducteur s'écrivent :

$$\begin{aligned} -\vec{E}(x, y, 0^-, t) &= \frac{\sigma(x, y, t)}{\epsilon_0} \vec{u}_z \\ -\vec{B}(x, y, 0^-, t) &= \mu_0 \vec{K}(x, y, t) \wedge \vec{u}_z \end{aligned}$$

On note alors \vec{E}_0, \vec{B}_0 les amplitudes de l'OPPM incidente (\vec{E}_i, \vec{B}_i) et \vec{E}'_0, \vec{B}'_0 celles de l'OPPM réfléchie (\vec{E}_r, \vec{B}_r) , ainsi que $\vec{k}, \vec{k}', \omega, \omega'$ leurs vecteurs d'onde et pulsations respectifs. *Remarque :* Comme l'OPPM incidente vérifie les équations de Maxwell et que le champ total superposition de l'incidente et de la réfléchie les vérifie aussi par principe, par linéarité, le champ réfléchi les vérifie aussi.

Les conditions aux limites s'écrivent alors de façon plus pénible mais en faisant intervenir les deux champs précédents.

Lois de Descartes relatives à la réflexion.

Les conditions aux limites imposent :

$$\vec{E}_{0//} e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} + \vec{E}'_{0//} e^{i(k'_x x + k'_y y - \omega' t)} = \vec{0}$$

Cette condition doit être vérifiée pour tout x, y, t ce qui impose $\omega = \omega'$, $k' = k$ et $\vec{k}_{//} = \vec{k}'_{//}$. Les deux seules solutions sont alors que $\vec{k} = \vec{k}'$ ce qui est impossible (le vérifier) et \vec{k}' symétrique de \vec{k} par rapport au plan de réflexion. Cela implique les lois de Descartes relatives à la réflexion, c'est-à-dire que les plans d'incidence et de réflexion sont confondus et que les angles d'incidence et de réflexion sont égaux.

Détermination de l'OPPM réfléchie.

Les conditions aux limites et les relations sur les amplitudes permettent de déterminer les quatre amplitudes inconnues avec un calcul simple dans le cas d'une OPPM polarisée rectilignement selon \vec{u}_y puis selon \vec{u}_z , le cas général s'en déduisant par superposition.

Cas d'une incidence normale.

On suppose $\vec{u} = \vec{u}_z$. Alors après quelques calculs on trouve :

$$\begin{cases} \vec{E}(M, t) = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kz) \vec{u}_x \\ \vec{B}(M, t) = \frac{2E_0}{c} \cos(kz) \cos(\omega t) \vec{u}_y \end{cases}$$

On constate que le champ a une structure d'onde stationnaire.

Pression électromagnétique.

Les lois de De broglie affirment qu'à chaque OPPM correspond une particule et réciproquement. Cette dualité se traduit par les relations :

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \hbar \vec{k} \\ E &= \hbar \omega \end{aligned}$$

En particulier à toute OPPM électromagnétique est associé un photon de quantité de mouvement $\vec{p} = \frac{h\nu}{c} \vec{u}$ et d'énergie $E = h\nu$.

Les photons arrivant sur le plan $z = 0$ y exercent une force $\delta \vec{F}$ par élément de surface δS . On note $\delta^2 N$ le nombre de photons arrivant sur δS pendant δt (grand devant la période du photon de l'ordre de 10^{-15}). Alors en notant \vec{p}_n et \vec{p}'_n la quantité de mouvement du photon n avant interaction et après interaction, la physique statistique (fait en td) nous apprend que la force a pour

expression : $\delta \vec{F} = \frac{1}{\delta t} \sum_{n=1}^{\delta^2 N} \vec{p}_n - \vec{p}'_n$, ce qui donne $2 \frac{h\nu}{c} \cos(i_0) \vec{u}_z$, ce qui montre

que : $\delta \vec{F} = 2 \frac{\delta^2 N}{\delta t} \frac{h\nu}{c} \cos i_0 \vec{u}_z$. Or $h\nu \delta^2 N$ est l'énergie e-m reçue par δS dans l'intervalle $[t_1; t_2]$ de longueur δt . Or cette énergie peut être calculée grâce au vecteur de Poynting :

$h\nu \delta^2 N = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\Pi} \cdot \vec{u}_z \delta S dt$. Or on a supposé que δt était grand devant la période de l'OPPM, c'est-à-dire que l'on peut assimiler Π à sa valeur moyenne temporelle, ce qui permet de calculer l'intégrale simplement. Après un bref calcul on obtient :

$$\delta \vec{F} = \frac{2I}{c} \cos^2 i_0 \delta S \vec{u}_z$$

En faisant intervenir l'intensité I de l'OPPM, définie précédemment. Cette force est proportionnelle à δS et est analogue à la force de pression, soit $\delta \vec{F} = p \delta S \vec{u}_z$ avec :

$$p = 2 \frac{I}{c} \cos^2 i_0$$

Cette pression e-m est à l'origine de nombreux phénomènes, comme la courbure de la queue des comètes, la lévitation d'une bille conductrice dans un faisceau laser ou le déplacement d'une voile solaire.

Exercice 11

Calculer la pression e-m subie par une bille conductrice, plongée dans un faisceau laser cylindrique et stationnaire.

2.5.4 Propagation guidée, guide d'onde rectangulaire.

Description.

Le guide d'onde est un tuyau métallique creux dont la section est un rectangle de côtés $a > b$. Le matériau composant le guide est assimilé à un conducteur parfait alors que l'air remplissant le tuyau est considéré comme du vide. On montre qu'un tel guide permet la transmission d'un signal dont les longueurs d'ondes sont de l'ordre des dimensions transversales du guide.

Recherche d'une solution.

On ne fait ici que rappeler les étapes de la résolution du problème, les calculs restant à faire.

On recherche un signal de la forme $f(Kz - \omega t)$ dans le vide inter-conducteurs, susceptible de traduire une propagation. La recherche d'une simple OPPM est vouée à l'échec du fait des conditions aux limites au voisinage des parois. Au final on recherche une onde de la forme :

$$\vec{E} = f(x, y)e^{i(Kz - \omega t)}\vec{u}_y$$

Remarque : On a choisi de chercher une onde transversale électrique polarisée selon \vec{u}_y car le guide n'est pas carré et on verra qu'une onde selon \vec{u}_x n'était pas à privilégier.

Détermination de la solution.

Les équations de Maxwell dans le vide fournissent directement les équations :

$$\text{div} \vec{E} = 0 \quad \square \vec{E} = \vec{0}$$

En substituant dans ces équations le champ électrique, on obtient des conditions sur f :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - K^2 \right) f(x) &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui montre que f ne dépend pas de y (le domaine de définition de f est un ouvert convexe) et qu'on a forcément $\frac{\omega^2}{c^2} - K^2 > 0$ pour avoir des solutions bornées. Les conditions aux limites sur les parois permettent alors d'obtenir la charge et le courant surfacique ainsi que la condition $\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - K^2} \in \frac{\pi}{a}\mathbb{Z}$. C'est-à-dire qu'on a des modes propres et que :

L'onde T-E cherchée est une superposition de solutions particulières, appelées modes propres qui s'écrivent :

$$\vec{E}_n = A_n e^{i(n\frac{\pi}{a}x + K_n z - \omega t)}\vec{u}_y - (-1)^n A_n e^{-i(n\frac{\pi}{a}x + K_n z - \omega t)}\vec{u}_y$$

Avec $K_n^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - n^2 \frac{\pi^2}{a^2}$.

Interprétation.

Ce mode peut être interprété comme la superposition de deux OPPM de polarisation électrique rectiligne selon \vec{u}_y , se propageant dans le vide à la célérité c dont les vecteurs d'onde évoquent des réflexions successives sur les parois conductrices.

Mode fondamental.

Ces réflexions sont suivies d'une atténuation du signal du fait des pertes d'énergie e-m au sein du conducteur qui en pratique n'est pas rigoureusement parfait. L'atténuation globale est d'autant plus faible que l'angle entre la paroi et la direction de propagation de l'OPPM est faible. Le mode $n = 1$ est donc prédominant après quelques réflexions. Pour cette raison, on supposera qu'il est seul à se propager dans le guide. On trouve donc un champ électrique réel de la forme :

$$\vec{E} = E_1 \cos(\pi \frac{x}{a}) \cos(K_1 z - \omega t) \vec{u}_z$$

Et le champ magnétique s'en déduit avec les équations de Maxwell.

Fréquence de coupure.

Il n'y a propagation que si $K_1 > 0$, ce qui se traduit par :

$$\lambda < \lambda_c \quad \text{avec} \quad \lambda_c = 2a$$

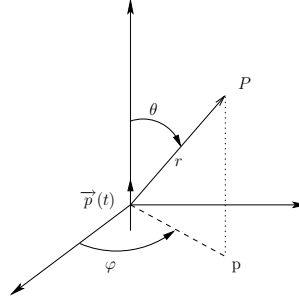
Vitesse de propagation.

On peut trouver le résultat avec différentes méthodes et interprétations (optique ou énergétique). La plus simple consiste à calculer $c \cos \theta_1$ ce qui donne la vitesse de propagation de l'information :

$$v_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2}$$

2.5.5 Propagation libre, rayonnement dipolaire.

On considère un dipôle électrique oscillant selon une loi sinusoïdale :



où $\vec{p}(t) = p_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$.

Détermination des champs et potentiels.• Potentiel vecteur :

On admet par analogie avec les potentiels retardés que le potentiel vecteur engendré au point P par le dipôle oscillant est de la forme :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{j}(M, t - \frac{r}{c})}{r} dV$$

En notant r la distance entre le point source M et le point d'observation P . Comme on se place dans le cadre de l'approximation dipolaire, on peut faire un DL et assimiler r à la distance entre le point source et l'origine. Ici, le potentiel vecteur peut se mettre sous la forme :

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega}{r} \sin(\omega(t - \frac{r}{c})) p_0 \vec{u}_z$$

Ce qui, en notation complexe implicite donne :

$$\vec{A} = -i \frac{\alpha}{r} e^{i(kr - \omega t)} \vec{u}_z$$

en notant $\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \omega$ et $k = \frac{\omega}{c}$.

- Potentiel scalaire :

On cherche un potentiel vecteur qui satisfasse à la jauge de Lorentz :

$\text{div} \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$. Cette relation donne en complexe que $V = -i \frac{c^2}{\omega} \text{div} \vec{A}$. Un calcul de divergence en complexe fournit alors le potentiel scalaire électrique :

$$V = \frac{\alpha c^2}{\omega r^2} (i k r - 1) e^{i(kr - \omega t)} \cos \theta$$

- Champ à grande distance ($r \gg \lambda$) :

Si on suppose qu'on est à grande distance du dipôle, le potentiel scalaire se simplifie en :

$$-i \frac{\alpha}{r} c e^{i(kr - \omega t)} \cos \theta$$

On peut alors en déduire le champ électromagnétique à partir des relations :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \text{ et } \vec{B} = \text{rot} \vec{A}.$$

Un calcul assez sanglant (1 page) donne le résultat en notation réelle :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \omega^2 \cos(kr - \omega t) \frac{\sin \theta}{r} \vec{u}_\theta \\ \vec{B} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p_0 \omega^2}{c} \cos(kr - \omega t) \frac{\sin \theta}{r} \vec{u}_\varphi \end{aligned}$$

On constate qu'à grande distance :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\vec{u}_r}{c} \wedge \vec{E} \\ \vec{E} &= -c \vec{u}_r \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

Ce qui montre que le champ a localement la structure d'une OPPM.

Puissance rayonnée par le dipôle.

La valeur moyenne du bilan local d'énergie électromagnétique montre que la puissance rayonnée à travers une surface Σ , à savoir :

$$P = \int_{\Sigma} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{n} dS$$

ne dépend pas du choix de la surface fermée considérée. On peut calculer cette puissance en calculant l'intensité de l'OPPM locale :

$$I(r, \theta) = \frac{\alpha^2 \omega^2}{2\mu_0 c} \frac{\sin^2 \theta}{r^2}$$

On constate que cette intensité dépende de θ , d'où le caractère anisotrope du rayonnement dipolaire. Ensuite pour calculer P on prend une sphère de rayon R et on trouve :

$$P = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p_0^2 \omega^4}{3c}$$

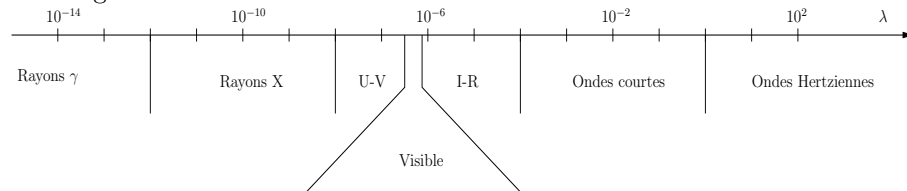
Remarque : La partie difficile est la structure d'OPPM locale. Pour retrouver rapidement le résultat, on peut se contenter de l'admettre, auquel cas c'est beaucoup plus rapide.

- Propagation guidée-propagation libre :

Grâce à la propagation guidée, on n'a pas de perte d'intensité avec la distance mais cela nécessite une grande infrastructure matérielle, contrairement à la propagation libre.

Vue d'ensemble des ondes électromagnétiques.

Un petit schéma permet de visualiser la classification des ondes em selon leur longueur d'onde :



Chapitre 3

Thermodynamique

3.1 Principes :

3.1.1 Principe relatif à l'énergie :

Energie interne :

On décompose un système en un grand nombre de particules d'échelle intermédiaire entre micro et macroscopique. Chacune d'entre elles de volume δV , de masse δm , contient un grand nombre de particules microscopiques dont on note $\vec{v} = \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}}{\sum_{\alpha} m_{\alpha}}$ la vitesse du centre de masse. En décomposant cette somme sur tous les constituants de la matière, notés C_i on montre que cette vitesse n'est autre que la vitesse $\vec{v}(M, t)$ définie dans le cours sur les grandeurs extensives :

$$\vec{v} = \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}}{\sum_{\alpha} m_{\alpha}} = \frac{\sum_i \rho_i \vec{v}_i}{\sum_i \rho_i}$$

Ainsi la vitesse $\vec{v}(M, t)$ est la vitesse du centre de masse de la particule alors que la dérivée particulaire $\frac{d\vec{v}}{dt}$ représente l'accélération.

Notons R le référentiel du laboratoire et R_M^* celui barycentrique de la particule centrée en M . Le théorème de Koenig relatif à l'énergie cinétique des particules microscopiques contenues dans la particule s'écrit :

$$\delta e_c = \delta e_c^* + \frac{1}{2} \delta m v^2$$

En intégrant sur l'ensemble du système on trouve :

$$e_c = e_{c,i} + E_c$$

avec :

$$\begin{cases} e_c &= \text{énergie cinétique dans } R \text{ des particules microscopiques.} \\ e_{c,i} &= \text{énergie indépendante de } R \text{ appelée énergie cinétique interne.} \\ E_c &= \int_{\tau} \frac{1}{2} \rho v^2 d\tau : \text{énergie cinétique macroscopique du système.} \end{cases}$$

$e_{c,i}$ est alors défini comme la différence $e_c - E_c$ où e_c est l'énergie cinétique microscopique définie ci-dessus et E_c l'énergie cinétique macroscopique définie par l'intégrale ci-dessus.

Il se trouve que les forces d'interaction mutuelles entre les particules du système dérivent d'une énergie potentielle $e_{p,i}$ qui ne dépend que de la position relative des particules : elle est invariante par changement de référentiel (cf : mécanique)

On définit alors l'énergie interne d'un système comme la somme des énergies cinétique et potentielle internes, soit :

$$U = e_{c,i} + e_{p,i}$$

U est invariante par changement de référentiel : elle ne dépend que du système considéré. Elle peut être calculée dans le cadre de la physique statistique dans le modèle de Boltzmann (cf : TD).

Energie totale :

L'énergie totale d'un système macroscopique est la somme de son énergie interne, de son énergie mécanique et de son énergie électromagnétique (cf : électromagnétisme) soit :

$$E = U + E_m + E_{em}$$

Premier principe :

$$\boxed{\text{L'énergie totale est une grandeur extensive conservative.}}$$

L'énergie totale étant extensive, on peut définir sa densité volumique e_v , son courant total \vec{J}_E , son courant non-convectif \vec{J}_E^* et par principe son terme de source est nul.

L'énergie totale étant conservative, elle ne peut être ni créée ni détruite.

Comme $U = E - E_m - E_{em}$, U est une grandeur extensive. On peut définir son courant non-convectif \vec{J}_U^* , noté encore \vec{J}_{th} . Sa source est généralement non-nulle, U est donc non-conservative.

Bilan d'énergie totale d'un système fermé :

Lors d'une évolution infinitésimale d'un système quelconque, le bilan d'énergie totale s'écrit :

$$dE = \delta E^r + \delta E^p = \delta E^r = \delta U^r + \delta E_m^r + \delta E_{em}^r$$

• δU^r :

On peut écrire : $\delta U^r = dt \int_{\Sigma} \vec{J}_{th}^* \cdot \vec{n} d\Sigma$. (par définition de \vec{J}_{th}^*)

L'énergie interne reçue par un système fermé est identifiable à l'énergie thermique qu'il reçoit de l'extérieur :

$$\boxed{\delta U^r = \delta Q}$$

• δE_m^r :

Le travail des forces de contact exercées par le milieu extérieur. La somme de l'énergie mécanique et e-m reçue par le système est notée δW et on a alors :

$$\boxed{dE = \delta Q + \delta W}$$

En intégrant :

$$\boxed{E_2 - E_1 = Q + W}$$

3.1.2 Principe relatif à l'entropie :

Réversibilité d'une évolution :

L'évolution inverse d'une évolution observée est celle obtenue en renversant le cours du temps, c'est-à-dire en changeant dt en $-dt$. On peut imaginer qu'on projette le film de l'évolution à l'envers et à la même vitesse.

Une évolution est réversible lorsque son évolution inverse est possible.

Lorsque l'évolution inverse est possible, elle satisfait aux mêmes lois que l'évolution directe. Ainsi une évolution réversible est décrite par des lois invariantes par renversement du temps.

Énoncé du deuxième principe :

Il existe une unique grandeur extensive S appelée entropie qui ne peut pas être détruite.

On a toujours : $S^p \geq 0$. L'entropie est la seule grandeur extensive qui permet d'affirmer ou non si une évolution est réversible. Dans le cas d'un système isolé thermiquement, l'entropie reçue est nulle. Dans ces conditions, l'entropie du système ne peut qu'augmenter.

Critère entropique de réversibilité :

L'évolution est réversible $\Leftrightarrow S^p = 0$

3.1.3 Principe reliant U et S :

Il existe une relation entre S et U ainsi que les autres grandeurs extensives dont la valeur dépend du système étudié. En notant u, s, \dots, x_i, \dots les densités massiques de ces grandeurs, la relation peut être mise sous la forme :

$$du = Tds + \sum_i Y_i dx_i$$

En notant : $Y_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ et $T = \frac{\partial u}{\partial s}$.

La température T est définie comme cela : c'est la grandeur intensive conjuguée de l'entropie.

- Exemples

- Corps pur fluide : $du = Tds - Pdw$ (attention les grandeurs sont massiques !)

- Mélange fluide : $du = Tds - Pdw + \sum_i \mu_i dx_i$

Où x_i est la fraction massique du constituant C_i et μ_i le potentiel chimique du constituant C_i .

Rappelons les grandeurs extensives et intensives conjuguées :

Extensive	S	V	x_i
Intensive	T	$-P$	μ_i

Remarque : Dans le cas d'un système fermé dont les grandeurs sont uniformes on peut repasser au global et trouver le "bien" connu :

$$dU = TdS - PdV$$

Définitions relatives à l'état d'un système :• Système :

C'est le contenu d'une surface fermée marquant la frontière entre le système et le milieu extérieur.

• Etat d'un système :

L'état d'un système est l'ensemble des informations qui permettent son étude. Ces informations sont des variables d'état. Dans le cas général elles sont des grandeurs locales.

• Evolution d'un système :

L'évolution d'un système entre t_1 et t_2 est la succession des états du système entre ces deux instants. Elle est notée $(E_1 \rightarrow E_2)$ et ne doit pas être confondue avec la transformation (E_1, E_2) constituée uniquement de E_1 et E_2 .

• Etats stationnaires :

L'état d'un système est dit stationnaire lorsque les variables d'état sont aussi stationnaires.

• Etat d'équilibre :

Un état d'équilibre est un état stationnaire dans lequel toutes les forces thermodynamiques sont nulles. (cf : e)

• Equation d'état :

Une équation d'état est une relation entre les variables d'état et de toute autre grandeur relative au système étudié.

Bilan local d'entropie :

Le bilan local d'entropie : $\text{div}(\vec{J}_s^*) + \rho \frac{ds}{dt} = \sigma_s$ peut être déduit de la relation locale :

$$du = Tds - Pdw + \sum_i \mu_i dx_i$$

et des bilans locaux des grandeurs extensives y figurant :

- Energie interne : $\text{div}(\vec{J}_{th}) + \rho \frac{du}{dt} = \sigma_u (= -\sigma_m - \sigma_{em})$
- Volume : $\text{div}(-\vec{v}) + \rho \frac{dw}{dt} = 0$
- Masse de C_i : $\text{div}(\vec{J}_i^*) + \rho \frac{dx_i}{dt} = \sigma_i (= \mu_i \sum_r \nu_{ir} v_r)$

Par identification on obtient le courant non convectif et la source d'entropie (calcul pénible) :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{J}_s^* &= \frac{\vec{J}_{th}}{T} - \sum_i \frac{\mu_i}{T} \vec{J}_i^* \\ \sigma_s &= \vec{J}_{th} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{T} \right) + \sum_i \vec{J}_i^* \left[-\vec{\nabla} \left(\frac{\mu_i}{T} \right) + \frac{z'_i}{T} \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \right] + \sum_r v_r \frac{A_r}{T} \end{aligned}}$$

où on a adopté les notations suivantes :

- \vec{J}_{th} : Courant thermique.
- \vec{J}_i^* : Courant de diffusion du constituant i .
- $z'_i = \frac{q_i}{m_i}$: Charge massique de C_i .
- v_r : Vitesse de la réaction r .
- $A_r = -\sum_i \nu_{ir} M_i \mu_i$: Affinité de la réaction r .

Bilan d'entropie d'un système fermé :

Calculons l'entropie reçue par un système fermé entre t et $t + dt$:

$$\delta S^r = dt \int_{\Sigma} \frac{\vec{J}_{th}}{T} \cdot \vec{n} d\Sigma$$

Car par définition un système fermé ne permet le passage d'aucun constituant de la matière. On a alors des cas particuliers :

- Si la frontière est adiabatique : elle ne permet pas d'échange thermique donc :

$$\delta S^r = 0$$

- Si la frontière est thermostatée : elle est maintenue à une température uniforme alors :

$$\delta S^r = \frac{\delta Q}{T_0}$$

En fin un théorème important dont la démonstration est facile mais passée ici sous silence :

$$\text{Evolution réversible d'un système fermé} \Leftrightarrow dS = \frac{\delta Q}{T}$$

Remarque : En pratique on ne calculera pas l'entropie produite mais on la déduira du bilan.

Equilibre d'un système :

La source d'entropie est somme de trois termes, chacun révélant une source d'irréversibilité. Chacun de ces termes peut être mis sous la forme du produit d'un "flux" et d'une "force" thermodynamique.

"Flux" Thermodynamique	"Force" Thermodynamique
Courant thermique : \vec{J}_{th}^*	$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{T} \right)$
Courant de diffusion : \vec{J}_i^*	$-\vec{\nabla} \left(\frac{\mu_i}{T} \right) + \frac{z'_i}{T} (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$
Vitesse de réaction : v_r	$\frac{A_r}{T}$

Remarque : Un flux est toujours défini par unité de temps, pas une force. On peut alors définir proprement un état d'équilibre :

Un système est à l'équilibre si son état est stationnaire et toutes les forces y sont nulles.

Ainsi, un système chimique est à l'équilibre ssi sa température est uniforme, tous les potentiels chimiques sont nuls et toutes les affinités sont nulles. Au voisinage d'un état d'équilibre chaque flux est fonction linéaire des forces thermodynamiques de même nature tensorielle. En appliquant ce principe dû à Onsager aux tenseurs de nature vectorielle on obtient les relations :

$$\begin{aligned} \vec{J}_{th} &= L_{11} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{T} \right) + \sum_{i \geq 2} L_{1i} \left[-\vec{\nabla} \left(\frac{\mu_i}{T} \right) + \frac{z'_i}{T} (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \right] \\ \vec{J}_i^* &= L_{i1} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{T} \right) + \sum_{j \geq 2} L_{ij} \left[-\vec{\nabla} \left(\frac{\mu_j}{T} \right) + \frac{z'_j}{T} (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \right] \end{aligned}$$

Remarque : Le principe d'Onsager stipule également que la matrice des L_{ij} est symétrique et que tous ses coefficients sont positifs.

On va maintenant négliger les coefficients non diagonaux de cette matrice et on retombe sur les lois de Fourier, Ohm et Fick relatives aux transferts thermiques, à la conductivité et à la diffusion :

$$\vec{J}_{th} = -\lambda \vec{\nabla} T$$

Où $\lambda = \frac{L_{11}}{T_0^2}$ est la conductivité thermique du milieu.

Remarque : On est au voisinage d'un état d'équilibre, T est quasi-uniforme : $T \sim T_0$.

Puis, si on annule le champ e-m, on trouve la loi de Fick :

$$\vec{J}_i^* = -D_i \vec{\nabla} x_i$$

Où D_i est le coefficient de diffusion.

Et enfin, en considérant que T uniforme et $\vec{\nabla} \mu_i = 0$, on tombe sur la loi d'Ohm :

$$\vec{j}^* = \gamma (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Evolution réversible :

Lors de l'évolution d'un système où il n'y a ni diffusion ni réaction chimiques et au sein duquel les forces thermodynamiques sont des IP1, la création d'entropie est un IP2 donc nulle à l'ordre 1. On peut qualifier une telle évolution de "réversible". On considère qu'un mélange fluide qui possède une température, une pression et des μ_i quasi uniformes évolue de manière réversible et satisfait à la relation :

$$dU = TdS - PdV + \sum_i \mu_i dn_i$$

On introduit alors les grandeurs suivantes :

Grandeur	Définition	Relations différentielles	Variables
Energie interne		$dU = TdS - PdV$	(S, V)
Enthalpie	$H = U + PV$	$dH = TdS + VdP$	(P, S)
Energie libre	$F = U - TS$	$dF = -SdT - PdV$	(T, V)
Enthalpie libre	$G = U + PV - TS$	$dG = -SdT + VdP$	(T, P)

Coefficients calorimétriques :

Lors d'une évolution infinitésimale réversible d'un système fermé dont l'état est décrit à l'aide du jeu de variables (A_i) , la chaleur reçue par le système peut être mise sous la forme : $\delta Q = TdS$. Or S dépend des A_i d'où : $\delta Q = T \sum_i \frac{\partial S}{\partial A_i} dA_i$. On pose alors :

$$C_i = T \frac{\partial S}{\partial A_i}$$

C'est le coefficient calorimétrique associé à A_i . A partir de maintenant, on ne s'intéresse qu'au corps pur fluide :

- Variables (T, V) :

$$\delta Q = C_V dT + l_V dV$$

D'où la première loi de Clapeyron et, dans le cas du GP celle de Joule :

$$l_V = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \quad dU = C_V dT$$

- Variables (T, P) :

$$\delta Q = C_P dT + l_P dP$$

D'où les secondes lois du même nom (et dans les mêmes conditions) :

$$l_P = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \quad dH = C_P dT$$

- Exercices

On a fait dans le cours certains exos dont la démonstration est longue, on ne donne que le résultat :

$$\text{GP au sens } PV = nRT \Leftrightarrow \begin{cases} dU = C_V dT \\ dH = C_P dT \end{cases}$$

Pour un gaz parfait, la relation de Mayer, obtenue en différenciant la relation : $H = U + PV = U + nRT$:

$$C_P - C_V = nR$$

D'où en posant $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$, on trouve :

$$C_V = \frac{nR}{\gamma - 1} \quad C_P = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}$$

Loi de Laplace pour une évolution adiabatique réversible d'un gaz parfait, démontrée à partir de la relation $0 = \frac{C_V}{T} dT + \frac{P}{T} dV$ et de l'expression du coefficient c_V :

$$PV^\gamma = \text{cte}$$

On définit les coefficients de compressibilité suivants :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad \text{et} \quad \chi_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S$$

Et on trouve la relation suivante, dont on se servira dans le cours sur les ondes :

Relation de Reech :

$$\chi_S = \frac{\chi_T}{\gamma}$$

3.2 Applications :

3.2.1 Méthode de résolution d'un problème :

- Système :

On choisit un système fermé en précisant les caractéristiques géométriques et thermodynamiques de la frontière qui le sépare du milieu extérieur.

- Evolution :

On décrit qualitativement l'évolution du système en précisant les états final et initial ainsi que son caractère réversible ou non.

- Bilans :

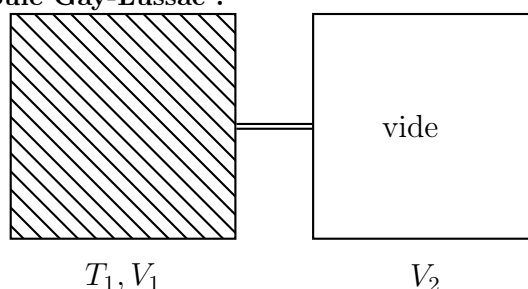
Si l'évolution est irréversible on fait un bilan d'énergie totale, sinon un bilan d'entropie.

- Conclusion :

On commente le résultat obtenu et on discute éventuellement les hypothèses.

3.2.2 Exemples :

Détente de Joule Gay-Lussac :



- Système :

Les n moles de gaz.

- Evolution :

A $t = 0$ on ouvre le robinet qui sépare les deux enceintes. On aboutit à un état final où le gaz a rempli toute l'enceinte. On a donc une évolution $e_1 \rightarrow e_2$ telle que e_1 et e_2 soient des états d'équilibre. Elle est clairement irréversible (on le vérifiera par le calcul) et on remarque que l'état final est atteint grâce à la viscosité du gaz.

- Bilan d'énergie totale :

Vu que c'est irréversible on fait un bilan d'énergie totale entre e_1 et e_2 :

$$\boxed{E_2 - E_1 = Q + W}$$

$$\diamond E_2 - E_1 = U_2 - U_1 + (E_{m2} - E_{m1}) + (E_{em2} - E_{em1}) = U_2 - U_1$$

En effet il n'y a pas de phénomène électromagnétique et comme les états e_1 et e_2 sont des états d'équilibre l'énergie cinétique est nulle et on néglige la variation d'énergie potentielle.

$$\diamond Q \sim 0 \text{ car le temps de la détente est trop faible pour permettre les échanges thermiques.}$$

$$\diamond W = E_m^r \text{ donc } W = 0. \text{ En effet il est égal au travail des forces de contact extérieures qui est nul puisque les parois sont immobiles.}$$

En conclusion :

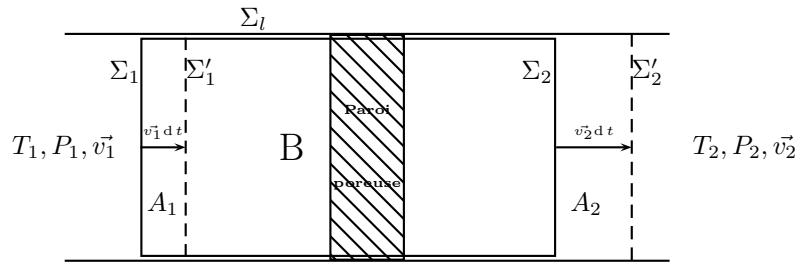
$$U_1 = U_2$$

- Bilan d'entropie :
On trouve facilement :

$$S^p = nR \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

Détente de Joule Thomson :

- Description :
Amont \longrightarrow Aval



L'écoulement du gaz est stationnaire.

Les parois du tuyau sont calorifugées.

- Choix du système :
On prend le système délimité à l'instant t par les surfaces Σ_1 , Σ_2 et Σ_l , suffisamment éloignées de la perturbation pour qu'on puisse y considérer P_i, T_i et \vec{v}_i comme uniformes. A $t + dt$ le système est délimité par les surfaces : Σ'_1 , Σ'_2 et Σ'_l .

- Bilan de masse :

$$dm = \delta m_{A_2} - \delta m_{A_1} \text{ (stationnarité de } m_B \text{)}$$

Puis $\delta m^r = \delta m^p = 0$ car la masse totale est conservative et le système est fermé.

Donc :

$$dm = 0 \Rightarrow \delta m_{A_2} = \delta m_{A_1} = \delta m = D dt$$

où D est le débit massique de l'écoulement.

- Bilan d'énergie totale :

On fait le même raisonnement que pour la détente de Joule Gay-lussac et on obtient :

$$\diamond e_2 - e_1 = u_2 - u_1 + \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2)$$

$$\diamond \delta W = \delta E_m^r = (p_1 v_1 - p_2 v_2) \delta m$$

$$\diamond \delta Q = 0$$

Au final le bilan fournit la relation :

$$\left[h + \frac{v^2}{2} \right]_{12} = 0$$

Dans le cas où la vitesse est faible devant l'enthalpie (détente lente) on peut dire que la détente est isenthalpique dans le sens où l'enthalpie massique du gaz a même valeur en amont et en aval (loin de la paroi poreuse).

- Bilan d'entropie :
On trouve :

$$P_S = \frac{RD}{M} \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right)$$

3.2.3 Machines thermiques :

Caractéristiques générales :

Les machines thermiques ont pour fonction de transformer une énergie “onéreuse” fournie par l'utilisateur en une énergie utile, fournie au milieu extérieur. Par exemple, un moteur à combustion interne ou un réfrigérateur sont des machines thermiques.

On définit le coefficient de performance de la machine par :

$$\eta = \left| \frac{\text{énergie utile}}{\text{énergie onéreuse}} \right|$$

Il est qualifié de rendement lorsqu'il est inférieur à 1.

Exemple du réfrigérateur à compression :

Le système choisi est le fluide qui circule en circuit fermé et permet les transferts d'énergie voulus. On suppose que le fluide est dans un état stationnaire, où il est mis en contact avec l'atmosphère (T_2), avec le milieu à réfrigérer (T_1) et avec le compresseur. On néglige tout autre transfert énergétique.

- Bilan d'énergie entre t et $t + dt$:
 - ◇ $dE = 0$ car l'état est stationnaire.
 - ◇ $\delta Q = P_1 dt + P_2 dt$, en notant P_1 la puissance thermique reçue de l'enceinte à refroidir et P_2 celle reçue du milieu extérieur.
 - ◇ $\delta W = \delta E_m^r = P_m dt$, en notant P_m la puissance mécanique fournie par le compresseur au fluide.

Soit une première équation :

$$P_1 + P_2 + P_m = 0$$

- Bilan d'entropie entre t et $t + dt$:
 - ◇ $dS = 0$ car l'état est stationnaire.
 - ◇ $\delta S^r = dt \int_{\Sigma} \frac{\vec{J}_{th}}{T} \cdot \vec{n} d\Sigma$ car le système est fermé. En découpant Σ en trois parties où T est uniforme sur deux d'entre elles et où l'intégrale est nulle sur la troisième, on trouve $dt \frac{P_1}{T_1} + dt \frac{P_2}{T_2}$.
 - ◇ $\delta S^p = P_S dt$, en notant P_S la production d'entropie par unité de temps dans le fluide.

On a donc une deuxième équation :

$$P_S + \frac{P_1}{T_1} + \frac{P_2}{T_2}$$

Des ces deux équations, on déduit par élimination de P_2 la valeur de P_m . Comme on suppose $P_1 > 0$ (réfrigération) et $T_2 > T_1$ on en déduit que $P_m > 0$.

Le rendement s'écrit alors $\eta = \left| \frac{P_1}{P_m} \right|$ et se calcule bien avec les expressions ci-dessus.

3.3 Transferts thermiques :

3.3.1 Etude théorique :

Bilan d'énergie d'un système fermé :

Par définition la frontière d'un système fermé ne permet pas de transfert de matière. Par contre elle permet le transfert d'énergie :

$$E_2 - E_1 = Q + W$$

Q est un transfert d'énergie interne appelé transfert thermique.

W est la somme de deux termes : E_m^r et E_{em}^r .

Vecteur courant thermique :

On définit le courant thermique comme le courant non-convectif d'énergie interne :

$$\vec{J}_{th} = \vec{J}_U^*$$

Ainsi $\vec{J}_{th} \cdot \vec{n}$ représente la puissance thermique surfacique reçue dans le sens de \vec{n} .

Dans un milieu continu le vecteur courant thermique satisfait à la loi de Fourier :

$$\vec{J}_{th} = -\lambda \vec{\nabla} T$$

λ est la conductivité thermique du milieu et varie usuellement entre 10^{-2} et $10^2 W m^{-1} K^{-1}$.

Condition aux limites à l'interface entre deux milieux :

En faisant un bilan d'énergie totale d'un système le long de l'interface (suffisamment régulière) on obtient la condition aux limites suivante :

$$\vec{J}_{th1} \cdot \vec{n}_{12} = \vec{J}_{th2} \cdot \vec{n}_{12}$$

Ce qui était assez logique. Si les deux milieux sont immobiles de conductivité λ_1, λ_2 on trouve :

$$T_1 = T_2$$

en plus de la condition précédente. Entre un solide et un fluide en mouvement, le gradient de température est trop grand pour qu'on dispose de la loi de Fourier et elle est remplacée par la loi empirique de Newton :

$$\vec{J}_{th} = h(T_1 - T_2) \vec{n}_{12}$$

Le coefficient h est qualifié de conducto-convectif.

3.3.2 Exemples et applications :

Equation de diffusion thermique :

En faisant un bilan local d'énergie interne dans un milieu immobile condensé et en l'absence d'électromagnétisme, on trouve :

$$\Delta T = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}$$

dans laquelle c est la capacité thermique massique du milieu considéré et λ la conductivité thermique, supposée uniforme.

Résistance thermique :

Le matériau est un solide immobile dans un état stationnaire placé entre deux thermostats de température T_1 et T_2 . Dans ces conditions la puissance thermique transférée de 1 \rightarrow 2 peut être mise sous la forme :

$$P_{12} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}$$

(cf : 1.1.4) Cette résistance peut être calculée directement à partir de l'équation de diffusion thermique, en utilisant les symétries pour mener à bien les calculs.

• Mur homogène :

On se donne un mur d'épaisseur e de conductivité thermique λ uniforme. Si on note x la profondeur, les symétries nous indiquent que T ne dépend que de x . Le calcul de Laplacien est alors trivial et comme on se place en régime stationnaire, il s'intègre tout aussi bien. On en déduit la température en fonction de la profondeur :

$$\begin{cases} T = T_1 & \text{si } x < 0 \\ T = (T_2 - T_1)\frac{x}{e} + T_1 & \text{si } 0 \leq x \leq e \\ T = T_2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le calcul de la puissance thermique transférée est alors trivial et on trouve :

$$R_{th} = \frac{e}{\lambda \Sigma}$$

Remarque : Cette étude est à comparer avec celle du condensateur plan, effectuée dans le cours d'électromagnétisme.

• Le matériau est compris entre deux sphères :

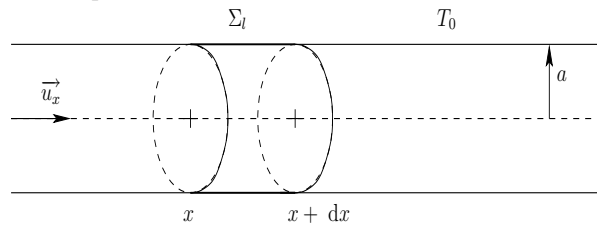
On peut reprendre toute cette étude mais le calcul est un peu plus fatigant car il faut connaître une expression "factorisée" du laplacien en sphériques d'un champ scalaire ne dépendant que de r . Au final on trouve :

$$R_{th} = \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2 4\pi \lambda}$$

Tige plongée dans un bain thermostaté :

Une tige cylindrique de rayon a et de masse volumique ρ , de capacité thermique c , de conductivité thermique λ est plongée dans un bain thermostaté à la température T_0 . On note h le coefficient surfacique de transfert thermique conducto-convectif à l'interface tige-bain.

On suppose la section suffisamment faible et λ suffisamment grand pour que la température soit quasi-uniforme sur toute section droite de la tige.



• Equation aux dérivées partielles :

Effectuons un bilan d'énergie totale entre t et $t + dt$ pour la tranche de tige située entre x et $x + dx$:

$$dE = dU + dE_m + dE_{em}$$

Le dernier de ces trois termes est ici sans objet, le second est nul car la tige est immobile. Le premier vaut :

$$\diamond dU = c\pi a^2 dx dT = c\pi a^2 \frac{\partial T}{\partial t} dx dt, \text{ pour une phase condensée.}$$

$$\diamond \delta Q = dt \int_S \vec{J}_{th} \cdot \vec{n} dS. \text{ En appliquant la loi de Fourier sur les surfaces } \Sigma_x \text{ et } \Sigma_{x+dx} \text{ et en exprimant l'autre terme avec le coefficient } h \text{ (découle directement des définitions) puis en utilisant que la température ne dépend que de } x, \text{ on en déduit :}$$

$$\delta Q = \lambda \pi a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dt + h(T_0 - T) 2\pi a dx dt$$

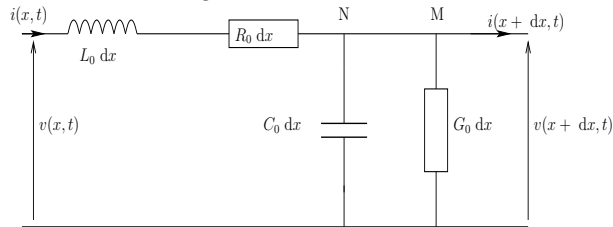
$$\diamond \delta W = 0 \text{ car la tige est immobile.}$$

En simplifiant, on obtient l'équation différentielle cherchée :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{2h}{\lambda a} \theta}$$

- Analogie électrique :

Rappelons le schéma d'une ligne de transmission entre x et $x + dx$:



En utilisant les lois usuelles de l'électrocinétique (on est dans le cadre de l'ARQS vu les faibles dimensions du circuit considéré), on obtient les équations différentielles satisfaites par le potentiel $v(x, t)$ et l'intensité $i(x, t)$:

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (L_0 G_0 + R_0 C_0) \frac{\partial v}{\partial t} + R_0 G_0 v}$$

Remarque : Dans le cas d'une ligne de transmission sans perte ($R_0 = G_0 = 0$), on retrouve l'équation d'onde.

Dans le cas où $L_0 = 0$ les deux équations précédentes sont formellement identiques et on peut préciser l'analogie thermoélectrique :

	Electrocinétique	Thermodynamique
Régime stationnaire	Loi d'Ohm : $\vec{j} = -\gamma \vec{\nabla} V$ $V_2 - V_1 = Ri$	Loi de Fourier : $\vec{J}_{th} = -\lambda \vec{\nabla} T$ $T_2 - T_1 = R_{th} P_{th}$
Régime quelconque	$R_0 = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{\pi a^2}$ C_0 G_0 $R_0 C_0$	$R_{th} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\pi a^2}$ $C_{th} = c \rho \pi a^2$ $G_{th} = 2 \pi a h$ $R_{th} C_{th} = \frac{\rho c}{\lambda}$

Remarque : Toutes ces grandeurs sont bien entendu linéiques, et l'analogie se fait entre différence de température θ et différence de potentiel.

Analyse dimensionnelle de l'équation de diffusion :

- On se place désormais dans un cadre unidimensionnel, en admettant que ça marche en général.

L'équation de diffusion s'écrit : $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, en posant $D = \frac{\lambda}{\rho c}$, on en déduit que la quantité $y = \frac{x}{\sqrt{Dt}}$ est sans dimension.

- Solution particulière :

Cherchons une solution particulière de l'équation de diffusion sous la forme $T(x, t) = f(y)$, où f est une fonction de classe \mathcal{C}^2 .

En dérivant deux fois cette composée par rapport à la variable x et une fois par rapport à t et en reportant dans l'équation de diffusion, on aboutit à l'équation différentielle :

$$f''(y) + \frac{1}{2} y f'(y) = 0$$

Ce qui se résout sans problème : on aboutit à une fonction de type erf c'est-à-dire :

$$f(y) = C_1 \int_0^y e^{-\frac{\alpha^2}{4}} d\alpha + C_2 \text{ Soit après changement de variable :}$$

$$f(y) = 2C_1 \int_0^{\frac{y}{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} d\alpha + C_2 \text{ ce qui fournit la température :}$$

$$T(x, t) = a + b \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-u^2} du$$

Notons qu'on a normalisé la solution particulière de sorte que $T(0, t) = a$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} T(x, t) = a + b$.

La forme de cette solution suggère son utilisation dans le cadre des milieux "semi-infinis".

Sensation de température :

On veut expliquer pourquoi l'acier et le bois ne donnent pas la même impression de température.

- Modélisation :

Avant contact, le bloc est à la température uniforme $\theta_1 = 20^\circ C$. On suppose l'expérimentateur en pleine forme de sorte que son doigt soit à la température uniforme $\theta_2 = 37^\circ C$. L'interface est supposée plane, d'équation $x = 0$. Les symétries montrent alors que la température ne dépend que de x, t et on la note $T(x, t)$, en supposant que le doigt est la partie d'espace $x > 0$ et le bloc $x < 0$.

- Equations de diffusion thermique :

Dans chaque milieu on a l'équation de diffusion bien connue. Les deux milieux étant semi-infinis, on recherche des solutions de la forme ci-dessus, de sorte que :

$$\begin{cases} T(x, t) = a_1 + b_1 f(x, t) & \text{si } x < 0 \\ T(x, t) = a_2 + b_2 f(x, t) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

en notant $f(x, t)$ la fonction intégrale trouvée au paragraphe précédent, normalisée.

- Conditions aux limites :

— $T(0^-, t) = T(0^+, t) = T_c$ C'est cette température de contact qui fournit la sensation de chaud-froid.

— $\lim_{x \rightarrow -\infty} T(x, t) = T_1$ Soit $a_1 - b_1 = T_1$

— $\lim_{x \rightarrow +\infty} T(x, t) = T_2$ Soit $a_2 + b_2 = T_2$

— $-\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x}(0^-, t) \vec{u}_x = -\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x}(0^+, t) \vec{u}_x$ C'est la condition correspondant à la puissance thermique surfacique. Après calcul, on en déduit : $\frac{\lambda_1}{\sqrt{D_1}} b_1 = \frac{\lambda_2}{\sqrt{D_2}} b_2$.

Ces relations permettent le calcul de T_c :

$$T_c = \frac{E_1 T_1 + E_2 T_2}{E_1 + E_2}$$

en notant $E = \frac{\lambda}{\sqrt{D}}$ l'effusivité du matériau.

- Application numérique :

Des données numériques permettent d'arriver à $\theta_c = 22^\circ C$ dans le cas de l'acier et à $34^\circ C$ dans le cas du bois, ce qui explique cette différence.

3.4 Transferts radiatifs :

3.4.1 Equilibre thermodynamique d'un gaz de photons :

Statistique de Bose-Einstein :

Le champ électromagnétique régnant dans une cavité vide de matière est une superposition d'OPPM dont les pulsations ω et les vecteurs d'onde \vec{k} ne peuvent prendre que certaines valeurs appartenant à un ensemble discret imposé par les conditions aux limites sur les parois conductrices de la cavité et appelées "mode propres" (cf : guide d'onde). A chaque OPPM sont associés des photons de quantité de mouvement \vec{p} et d'énergie E tels que :

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \hbar \vec{k} = \frac{h\nu}{c} \vec{u} \\ E &= \hbar \omega = h\nu \end{aligned}$$

conformément aux lois de De Broglie. D'après les deux premières équations de Maxwell dites de structure, le photon est une particule de masse nulle et de spin unité (résultat admis car très difficile).

Ainsi les photons sont des particules sans interaction mutuelle et de type boson (spin entier) qui suivent le statistique de Bose-Einstein.

En supposant que le gaz de photons est en équilibre thermodynamique, que les parois opaques sont portées à la température uniforme T , il vérifie les propriétés suivantes :

- La répartition des photons est uniforme dans l'espace de la cavité.
- Les photons sont répartis de manière isotrope dans l'espace des vitesses sur une sphère de rayon c .
- Le nombre de photons situé dans δV ayant une fréquence ν à $d\nu$ près est de la forme :

$$\frac{8\pi}{c^3} \frac{\nu^2}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \delta V d\nu$$

Le coefficient est la densité volumique fréquentielle des photons dans la cavité et d'un point de vue constantes, h est la constante de Planck ($6.62 \cdot 10^{-34} J \cdot s$) et k la constante de Boltzmann ($1.38 \cdot 10^{-23}$).

En multipliant par $h\nu$ on obtient la densité volumique fréquentielle d'énergie électromagnétique :

$$e_{v,\nu} = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Remarque : En prenant les cas limites $h\nu \ll kT$ ou l'inverse on obtient dans le premier cas l'approximation classique de Rayleigh : $e_{v,\nu} = \frac{8\pi kT}{c^3} \nu^2$, et dans le second l'approximation de Wien : $e_{v,\nu} = \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}}$. *Remarque :* La relation de dispersion $\lambda = \frac{c}{\nu}$ permet de faire la même chose avec λ plutôt que ν . On parle alors de densité spectrale.

Lois de Planck :

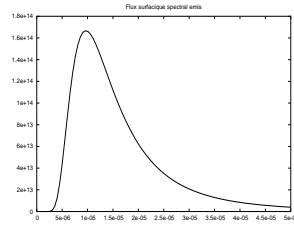
En arrivant sur la paroi de la cavité, les photons sont successivement absorbés et réémis par excitation et désexcitation des atomes la composant. A l'équilibre l'état est stationnaire, il y a donc autant de photons émis que de photons absorbés par unité de temps. Le nombre de photons de fréquence ν à $d\nu$ près, possédant une quantité de mouvement de direction θ, φ à $d\theta, d\varphi$ près, absorbés par un élément $\delta\Sigma$ de la paroi durant un intervalle de temps de longueur δt , se calcule par des méthodes de physique statistique en utilisant l'isotropie dans l'espace des vitesses. Ce nombre vaut : $n_\nu c \delta t \delta\Sigma \cos\theta d\nu \frac{\sin\theta d\theta d\varphi}{4\pi}$. Par intégration et multiplication par $h\nu$ on en déduit l'énergie absorbée pendant δt par $\delta\Sigma$ correspondant aux photons de fréquence ν : $e_\nu = \varphi_\nu d\nu \delta t \delta\Sigma$ avec :

$$\varphi_\nu = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Et φ_ν est la puissance surfacique fréquentielle absorbée par la paroi. *Remarque :* On peut utiliser la relation de dispersion pour obtenir les relations correspondantes au point de vue spectral.

Loi de Wien

On peut vérifier que l'allure du flux spectral émis est de cette forme :



Il présente donc un maximum pour une valeur qu'on peut calculer numériquement en fonction de la température :

$$\lambda_m T = 2898 \mu m K$$

On vérifie alors qu'à la température ambiante, λ_m est de l'ordre de $10 \mu m$, ce qui veut dire l'émission par une paroi opaque a lieu dans l'infra rouge lointain alors qu'à la température de surface du soleil, λ_m vaut un demi micron, ce qui montre que le soleil émet principalement dans le visible (on s'en doutait quand même un peu)

On peut vérifier que 98% de la puissance émise l'est pour $0.5\lambda_m \leq \lambda \leq 8\lambda_m$, ce qui permet d'affirmer que le soleil émet un peu dans les U-V et dans l'I-R, alors qu'à température ambiante, tout reste dans l'I-R. *Remarque* : Cela justifie au passage le fait qu'une barre de métal émet progressivement dans le rouge, puis dans le blanc au fur et à mesure qu'on l'échauffe avec une forge ou un chalumeau.

Lois de Stefan :

- Densité volumique d'énergie e-m :

Elle est calculée par intégration sur ν de $e_{\nu,\nu}$. Après calculs, on trouve :

$$e_v = aT^4$$

Où $a \sim 7.565 \cdot 10^{-16} JK^{-4}$ est une constante dont l'expression littérale n'est pas importante.

- Flux surfacique émis :

De même par intégration sur ν on obtient la seconde loi de Stefan relative au flux surfacique émis, noté φ :

$$\varphi = \sigma T^4$$

Où $\sigma \sim 5.67 \cdot 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$ est une constante.

Etude thermodynamique du gaz de photons :

- Equation d'état :

On a montré en physique statistique que la force moyenne subie par un élément $\delta\Sigma$ de surface de la part des photons incidents est de la forme :

$$\delta F_{abs}^{\vec{}} = \frac{1}{\delta t} \sum_{n=1}^{\delta N} \vec{p}_n$$

En tenant alors compte de l'isotropie de la répartition des photons dans l'espace des vitesses et en calculant la contribution à cette force des photons de fréquence ν et de vitesse de direction (θ, φ) , puis en faisant de même avec les photons émis (calcul long), on trouve :

$$\delta \vec{F} = \frac{1}{3} e_v \vec{u}_z \delta \Sigma$$

Ce qui est l'analogie d'une force de pression fluide puisque de la forme $P \vec{u}_z \delta \Sigma$. On en déduit l'équation d'état du gaz de photons :

$$P = \frac{a}{3} T^4$$

à partir des lois de Stefan.

- Energie :

Dans le vide $E = E_{em}$ et par intégration sur le volume de la cavité, on obtient la relation :

$$E = a T^4 V$$

Remarque : A volume constant : $dE = C_v dT$ où $C_v = 4aT^3V$ est la capacité thermique isochore du gaz de photons.

- Entropie :

Pour un fluide, $dE = T dS - P dV$. On définit l'entropie de gaz de photons par analogie, à partir de la relation : $dS = \frac{1}{T} dE + \frac{P}{T} dV$. Un calcul simple montre alors que :

$$S = \frac{4}{3} a T^3 V$$

Remarque : On choisit la constante d'intégration nulle du fait de $S \rightarrow 0$ lorsque $V \rightarrow 0$.

3.4.2 Bilan d'énergie en l'absence de rayonnement :

Bilan d'énergie totale :

Dans le cas particulier d'un milieu immobile, dans un état stationnaire, le bilan d'énergie totale s'écrit :

$$P_{th} + P_{em}^r = 0$$

Si on suppose en outre les transferts thermiques négligeables, le bilan d'énergie devient :

$$P_{em}^r = 0$$

Bilan d'énergie électromagnétique :

Les fréquences rencontrées pour un rayonnement sont telles que l'ARQS n'est plus valable et que les instruments de mesure ne peuvent mesurer que des valeurs moyennes temporelles. Le bilan d'énergie em en moyenne temporelle pour un régime sinusoïdal s'écrit : $\text{div} \langle \vec{J}_{em} \rangle = \langle \sigma_{em} \rangle$, soit, pour toute surface fermée fixe, $P_{em}^r = - \int_V \langle \sigma_{em} \rangle dV = - \langle P_{em}^p \rangle$, ou encore :

$$\langle P_{em}^r \rangle + \langle P_{em}^p \rangle = 0$$

Equilibre radiatif :

Dans le cas particulier où les atomes du système n'absorbent ni n'émettent de photons ou alors lorsqu'ils en émettent dans une fréquence donnée autant qu'ils en avaient absorbés auparavant, la puissance en produite est nulle. On parle "d'équilibre radiatif".

Exercice 12

Une OPPM se propage dans un milieu diffuseur. Montrer que son intensité varie selon la loi $I_0 e^{-\alpha x}$, en notant \vec{u}_x la direction et le sens de l'OPPM.

Indication : faire un bilan de photons sur un bon système.

Bilan d'énergie à l'interface entre deux milieux :

- Interface entre un milieu transparent et un conducteur métallique :

Un bilan d'énergie sur un système comprenant l'interface, d'épaisseur négligeable, donne :

$$\varphi^i = \varphi^r$$

en notant $\varphi^i = \langle J_{em}^i \rangle \cdot \vec{u}_z$ et $\varphi^r = \langle J_{em}^r \rangle \cdot (-\vec{u}_z)$.

- Interface entre deux milieux transparents :

De même mais cette fois il y a un flux transmis :

$$\varphi^i = \varphi^r + \varphi^t$$

- Corps noir :

Par définition un corps noir est un milieu opaque qui émet un rayonnement identique à celui d'une paroi de même température à l'équilibre.

Exercice 13

Montrer que la puissance em émise par $\delta\Sigma$ d'un corps noir dans une direction \vec{u} à un angle solide $\delta\Omega$ près satisfait à la loi de Lambert :

$$\frac{\varphi}{\pi} \delta\Sigma \delta\Omega \vec{u} \cdot \vec{n}$$

où $\varphi = \sigma T^4$ désigne le flux émis dans toutes les directions.

Indication : Revenir à la base et compter des photons.

Chapitre 4

Thermodynamique chimique

4.1 Mélanges monophasés.

4.1.1 Caractéristiques d'un mélange monophasé.

Définition.

- Phase :

Une phase est un milieu de température, pression et composition chimique uniformes.

- Mélange :

La mise en contact de plusieurs corps purs peut permettre d'obtenir un milieu continu appelé mélange et dont les constituants ne sont pas toujours les corps purs de départ.

La composition chimique d'un mélange est décrite localement par les fractions molaires $x_i = \frac{\delta n_i}{\delta n}$. On constate que $\sum x_i = 1$ et que $0 \leq x_i \leq 1$. Un mélange fluide est alors caractérisé par la relation :

$du = Tds - Pd v + \sum_i \mu_i dx_i$. Dans laquelle μ_i est le potentiel chimique molaire de C_i au sein du mélange (cf : thermodynamique). Cette relation avec l'énergie interne fait intervenir le jeu de variables S, V qui n'est généralement pas adapté au contexte industriel (on ne peut pas mesurer d'entropie!). On préfère se ramener au jeu de variables T, P . En introduisant l'enthalpie libre molaire $g = h - Ts$, on obtient : $dg = -sdT + vdP + \sum_i \mu_i dx_i$ qui donne l'expression suivante de μ_i :

$$\mu_i = \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_{T, P, x_j}$$

- Mélange monophasés :

C'est un mélange de température, pression et composition chimique uniforme.

On en déduit que μ_i est uniforme. Les conditions d'équilibre physique (thermique, mécanique et diffusion) sont vérifiées. Cependant l'équilibre chimique n'est pas forcément atteint comme on le verra avec la notion d'affinité. La relation précédente conduit par intégration sur la phase :

$$dG = -SdT + VdP + \sum_i \mu_i dn_i$$

On peut alors exprimer le potentiel chimique sous la forme d'une dérivée partielle de G .

Grandeurs molaires partielles.

Toutes les grandeurs extensives usuelles relatives à une phase peuvent se mettre sous la forme :

$$X = \sum_i n_i \bar{x}_i$$

Où \bar{x}_i est la grandeur molaire partielle du constituant C_i dans la phase.

• Enthalpie libre :

En exprimant l'extensivité de G sous la forme :

$G(T, P, \dots, n_i, \dots) = nG(T, P, \dots, x_i, \dots)$ et en dérivant partiellement par rapport à n on trouve :

$$\bar{g}_i = \mu_i$$

Remarque : Dans le cas où les constituants sont isolables à l'état pur, on peut faire tendre x_i vers 1, ce qui permet de définir le potentiel chimique d'un corps pur monophasé comme son enthalpie libre molaire.

• Entropie :

Comme $dG = -SdT + VdP + \sum_i \mu_i dn_i$, on peut exprimer S sous la forme

$S = -\frac{\partial G}{\partial T}$ ce qui donne, en remplaçant G par $\sum_i \mu_i n_i$:

$$\bar{s}_i = -\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial T}\right)_{P, n_j}$$

• Volume :

De même que pour l'entropie, on trouve :

$$\bar{v}_i = \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial P}\right)_{T, n_j}$$

• Enthalpie :

En exprimant : $H = G + TS$:

$$\bar{h}_i = \mu_i - T\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial T}\right)_{P, n_j}$$

• Energie interne :

De même, comme $U = H - PV$

$$\bar{u}_i = \bar{h}_i - P\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial P}\right)_{T, n_j}$$

On constate que toutes ces grandeurs extensives peuvent être exprimées uniquement à partir des quantités n_i et des potentiels chimiques.

Relation de Gibbs-Duhem.

Pour une évolution infinitésimale d'un mélange monophasé, la variation d'enthalpie libre peut se mettre sous les deux formes :

$dG = -SdT + VdP + \sum_i \mu_i dn_i = \sum_i n_i d\mu_i + \sum_i \mu_i dn_i$. On en déduit la relation :

$$\sum_i n_i d\mu_i = -SdT + VdP$$

4.1.2 Phase idéale.

Approche microscopique.

Pour un mélange des deux gaz parfaits placé dans une enceinte à T, P , dont toutes les interactions moléculaires sont négligées et dont toutes les molécules sont supposées ponctuelles, chacun des gaz se comporte comme un gaz parfait à la pression $P_i = \frac{n_i RT}{V}$. Or pour un corps pur : $\mu_1 = g_1(T, P_1) = g_1(T, P) + RT \ln(\frac{P_1}{P})$ (en plus c'est un gaz parfait donc $Pv = RT$). Le mélange se comporte intuitivement comme un G-P, ce qui revient à dire : $PV = nRT$, soit $\frac{P_1}{P} = x_1$.

Cela donne des potentiels chimiques de la forme : $\begin{cases} \mu_1 = g_1(T, P) + RT \ln(x_1) \\ \mu_2 = g_2(T, P) + RT \ln(x_2) \end{cases}$

Approche macroscopique.

Une phase est dite idéale lorsque ses potentiels chimiques peuvent se mettre sous la forme

$$\mu_i = f_i(T, P) + RT \ln(x_i)$$

où f_i est une fonction qui ne dépend que de la nature chimique de la phase.

Remarque : Dans le cas où les constituants existent à l'état pur, en passant à la limite sur x_i , on a : $f_i = g_i$, dans le cas contraire, l'enthalpie libre du constituant est une grandeur vide de sens, d'où l'introduction d'une fonction f_i .

Exercice 14

Un système constitué de corps purs subit une évolution monobare. Dans l'état initial les constituants sont séparés à T, P . Dans l'état final, ils forment une phase idéale à T, P . Montrer que l'évolution ne s'accompagne d'aucune variation de son volume ni d'échange thermique avec l'extérieur.

Pour le volume on exprime le volume initial comme $V_1 = \sum_i n_i v_i(T, P)$ par extensivité du volume et le volume final comme $V_2 = \sum_i n_i \bar{v}_i$ car la phase est idéale. En exprimant \bar{v}_i pour un corps pur on trouve v_i soit $V_1 = V_2$.

Pour la chaleur reçue, on l'exprime comme la variation d'enthalpie du système (un bilan d'énergie totale donne ce résultat pour une évolution monobare). Ensuite on fait de même que pour le volume.

Cas d'une phase gazeuse idéale.

• Définition :

Une phase gazeuse idéale est un mélange de gaz parfaits dont les potentiels chimiques sont de la forme $\mu_i = g_i(T, P) + RT \ln(x_i)$.

On définit également la pression partielle comme $P_i = Px_i$.

• Diverses expressions du potentiel chimique :

$$\mu_i = g_i(T, P) + RT \ln(x_i) = g_i(T, P_i) = g_i(T, P^\circ) + RT \ln\left(\frac{P_i}{P^\circ}\right)$$

Où P° est une pression "standard" égale par convention à 1 bar.

• Grandeurs extensives d'une phase gazeuse idéale :

Les relations sur les grandeurs molaires partielles se simplifient, et vu les expressions des potentiels chimiques :

— Enthalpie libre :

— Entropie :

$$\bar{g}_i = g_i(T, P_i)$$

— Volume :

$$\bar{s}_i = s_i(T, P_i)$$

$$\bar{v}_i = v_i(T, P) = \frac{RT}{P}$$

Ce qui montre au passage qu'une phase gazeuse idéale satisfait à l'équation d'état des gaz parfaits.

— Enthalpie :

$$\bar{h}_i = h_i(T)$$

Car un G-P satisfait à la deuxième loi de Joule.

— Energie interne :

$$\bar{u}_i = u_i(T)$$

Pour les mêmes raisons.

Exercice 15

On place n_1 moles d'un G-P dans une première enceinte et n_2 d'un autre dans une autre enceinte. On ouvre un robinet entre les deux enceintes supposées adiabatiques. Déterminer l'état d'équilibre final, en supposant le mélange obtenu idéal. Calculer la température finale du mélange. Montrer que l'entropie produite est strictement positive. Que peut-on dire si les gaz sont identiques ?

Cas d'une solution aqueuse idéale.

Une solution est une phase formée en mélangeant un corps pur appelé solvant avec d'autres corps purs qui réagissent avec le solvant pour donner des solutés.

En thermochimie, la concentration du solvant est supposée grande devant celle des solutés (hypothèse de dilution). En pratique, même à de fortes concentrations (1 mole par litre), cette hypothèse est relativement bien vérifiée et la plupart des phases aqueuses étudiées dans le cadre du programme sont idéales.

• Potentiel chimique de l'eau solvant :

Comme l'eau existe à l'état pur et qu'aux pressions usuelles elle est quasi incompressible, on peut écrire : $\mu_{H_2O} = g_{H_2O}(T, P^\circ) + RT \ln(x_{H_2O})$. Or dans une solution diluée, $x_{H_2O} \sim 1$ et en développant le logarithme à l'ordre 0 :

$$\mu_{H_2O} = g_{H_2O}(T, P^\circ)$$

Remarque : Si la solution n'est pas diluée, il faut continuer le DL au moins à l'ordre 1.

• Potentiel chimique d'un soluté :

Cette fois on ne peut pas identifier f_i et g_i . Cependant, pour une phase condensée au voisinage de P° , on peut dire : $f_i(T, P) = f_i(T, P^\circ)$. Puis en considérant négligeables les concentrations et volumes des solutés devant celles de l'eau, on peut écrire :

$x_i = \frac{c_i}{c^\circ} c^\circ v_{H_2O}$. Alors on peut dire :

$$\mu_i = \mu_i^\circ(T) + RT \ln\left(\frac{c_i}{c^\circ}\right)$$

où c° est une concentration standard choisie à 1 mole par litre.

• Phase liquide idéale :

On suppose que la phase est constituée de corps existant à l'état pur. Alors

$$\mu_i = g_i(T, P^\circ) + RT \ln(x_i)$$

Potentiel chimique standard et activité.

En regroupant les résultats précédents, on constate qu'on peut toujours écrire :

$$\mu_i = \mu_i^\circ(T) + RT \ln(a_i)$$

On peut regrouper tout dans un tableau :

Constituant	Phase	μ_i°	a_i
G-P	mélange gazeux	$g_i(T, P^\circ)$	$\frac{P_i}{P^\circ}$
solvant	solution	$g_s(T, P^\circ)$	1
soluté	solution	-	$\frac{c_i}{c^\circ}$
liquide	phase liquide	$g_i(T, P^\circ)$	x_i
Corps pur condensé	corps pur	$g(T, P^\circ)$	1

Remarque : Le potentiel chimique standard est la valeur du potentiel chimique pour une activité égale à 1.

Grandeurs molaires standard.

- Analogie avec le corps pur monophasé :

Pour un tel corps :

$$\begin{aligned} g &= \mu & h &= g + Ts \\ s &= - \left(\frac{\partial g}{\partial T} \right)_P & c_p &= T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_P \\ c_p &= \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P \end{aligned}$$

On définit par analogie les grandeurs suivantes :

— Enthalpie libre molaire standard :

$$g_i^\circ(T) = \mu_i^\circ(T)$$

— Entropie molaire standard :

$$s_i^\circ(T) = - \frac{dg_i^\circ}{dT}$$

— Enthalpie molaire standard :

$$h_i^\circ(T) = g_i^\circ + T s_i^\circ$$

— Capacité thermique isobare molaire standard :

$$c_{p,i}^\circ = T \frac{ds_i^\circ}{dT} = \frac{dh_i^\circ}{dT}$$

- Cas d'un constituant existant à l'état pur :

Dans ce cas (cf : tableau), $\mu_i^\circ = g_i(T, P^\circ)$, et on peut simplifier toutes les grandeurs standard et on trouve que ses grandeurs molaires standard sont confondues avec les grandeurs molaires du constituant pur évaluées à P° et à la température de la phase. On peut alors définir par extension l'énergie interne standard et le volume molaire standard. *Remarque :* Dans le cas général, on ne peut pas définir ces deux grandeurs. En effet, on a $u = h - Pv$ qui ne peut pas être exprimé uniquement en fonction de l'enthalpie libre g . Cela correspond au fait qu'on a privilégié dès le début le jeu de variables T, P au lieu de S, V et que l'énergie interne n'est pas adaptée à ce premier jeu de variables.

■ Exercice 16 ■

Montrer que l'enthalpie d'une phase idéale a pour expression $H = \sum_i n_i h_i^\circ(T)$ en exprimant simplement h_i .

4.1.3 Phase réelle.

Coefficients d'activité.

L'expérience montre qu'une phase ne peut être considérée comme idéale que pour de faibles pressions et de faibles concentrations. Le potentiel chimique diffère alors du cas idéal et se met sous la forme :

$$\mu_i = f_i(T, P) + RT \ln(\gamma_i x_i)$$

Remarque : γ_i dépend de T, P, \dots

Exemples.

Dans le modèle de Debye-Hückel dans le cas dilué, le coefficient d'activité d'un constituant C_i de charge $z_i e$ et de concentration c_i peut se mettre sous la forme :

$$\ln(\gamma_i) = -\alpha z_i^2 \sqrt{I}$$

où α est une constante positive et $I = \frac{1}{2} \sum_i z_i^2 c_i$. On remarque que si c_i tend vers 0 (dilution), la phase devient idéale puisque γ_i tend vers 1.

4.2 Diagrammes binaires liquide gaz

4.2.1 Introduction.

Le système étudié est obtenu en mélangeant deux corps purs C_1 et C_2 , non-réactifs ; selon les conditions expérimentales, on peut observer à l'équilibre :

- une seule phase gazeuse
- une seule phase liquide
- une phase gazeuse et une phase liquide simultanément.

L'observation d'une seule phase liquide suppose implicitement que les deux corps purs sont totalement miscibles en phase liquide ; dans le cas contraire, on peut observer simultanément deux phases liquides distinctes.

Notations.

Lorsque le mélange binaire C_1 - C_2 comprend simultanément une phase gazeuse et une phase liquide, on adopte les notations suivantes :

- n_g ou n_l : quantité de matière dans la phase gazeuse ou liquide
- n_{1g} ou n_{1l} : quantité de C_1 dans la phase gazeuse ou liquide
- $x_{1g} = \frac{n_{1g}}{n_g}$ ou $x_{1l} = \frac{n_{1l}}{n_l}$: fraction molaire de C_1 dans la phase gazeuse ou liquide
- $n = n_g + n_l$: quantité de matière dans le système
- $n_1 = n_{1g} + n_{1l}$: quantité de C_1 dans le système
- $x_1 = \frac{n_1}{n}$: proportion de C_1 dans le système.

On en déduit les deux relations : $n_g + n_l = n$ et $x_{1g} n_g + x_{1l} n_l = x_1 n$, d'où les deux autres : $n_g = \frac{x_1 - x_{1l}}{x_{1g} - x_{1l}} n$ et $n_l = \frac{x_{1g} - x_1}{x_{1g} - x_{1l}} n$, dont le rapport

$\frac{n_g}{n_l} = \frac{x_1 - x_{1l}}{x_{1g} - x_1}$ conduit au théorème des moments :

$$\frac{n_g}{n_l} = \frac{x_1 - x_{1l}}{x_{1g} - x_1}$$

Diagrammes isothermes et isobares.

Le système étudié étant dans un état d'équilibre, sa température T est uniforme (condition d'équilibre thermique), ainsi que sa pression P (condition d'équilibre mécanique). En outre, lorsque la phase gazeuse et la phase liquide coexistent, les conditions d'équilibre de diffusion des deux constituants entre les deux phases : $\mu_{1g}(T, P, x_{1g}, x_{2g}) = \mu_{1l}(T, P, x_{1l}, x_{2l})$ et

$\mu_{2g}(T, P, x_{1g}, x_{2g}) = \mu_{2l}(T, P, x_{1l}, x_{2l})$ montrent, compte-tenu des relations $x_{2g} = 1 - x_{1g}$ et $x_{2l} = 1 - x_{1l}$, que les fractions molaires x_{1g} et x_{1l} sont des fonctions implicites de T et P .

Un tel résultat peut être retrouvé simplement en calculant la variance du système à l'équilibre : $v = 2 - 0 - 0 + 2 - 2$ (on rappelle que les deux constituants C_1 et C_2 ne réagissent pas), soit $v = 2$.

On adopte alors les deux définitions suivantes :

- A température T fixée, les graphes x_{1g} et x_{1l} fonctions de P constituent le diagramme *isotherme* du mélange binaire
- A pression P fixée, les graphes x_{1g} et x_{1l} fonctions de T constituent le diagramme *isobare* du mélange binaire.

4.2.2 Diagrammes isotherme idéal.

Un tel diagramme est établi en supposant que la phase gazeuse est *idéale*, ainsi que la phase liquide ; cette dernière hypothèse, contrairement à la première, n'est pas très réaliste, d'où la possibilité d'écarts considérables entre les résultats expérimentaux et les résultats théoriques établis ci-dessous.

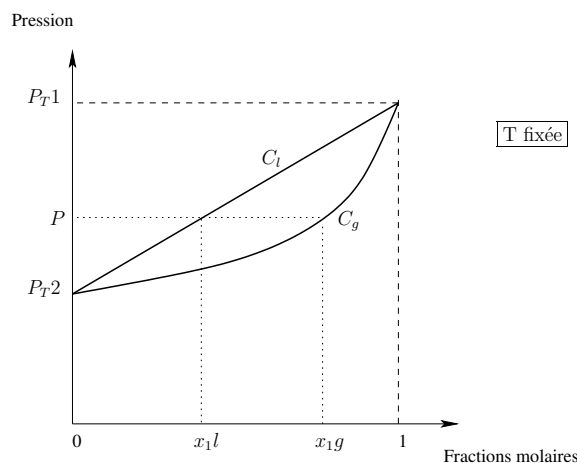
Loi de Raoult.

En exprimant la condition d'équilibre de diffusion du constituant C_1 entre les deux phases et en tenant compte des hypothèses, et en introduisant la pression P_{1T} de transition liquide-gaz, on obtient la loi de Raoult :

$$P_1 = P_{1T} x_{1l} \quad P_2 = P_{2T} x_{2l}$$

Tracé du diagramme isotherme.

La loi de Raoult conduit directement à l'expression de la pression en fonction de la fraction molaire ; et on trouve qu'elle s'écrit comme une fonction affine de x_{1l} et comme une fonction homographe de x_{1g} soit :



Lecture du diagramme.

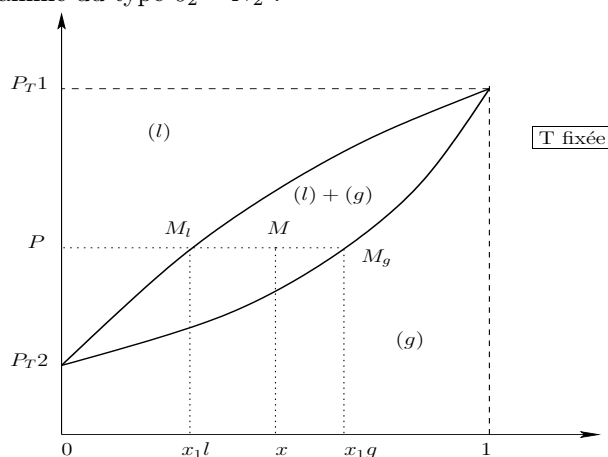
A température T fixée, on peut contrôler expérimentalement la pression P , ainsi que la proportion x_1 du constituant C_1 (choisie lors de la préparation du mélange binaire) ; au couple (x_1, P) correspond un point M du diagramme, dont la position par rapport aux deux courbes C_l et C_g détermine l'état du système. Le théorème des moments permet de conclure quant aux phases se trouvant dans chacune des trois parties du diagramme. Dans la partie haute, le système comprend *une seule phase liquide*, dans la partie basse, il comprend *une seule phase gazeuse*¹ et dans la partie entre les courbes il y a deux phases. La courbe du haut est donc logiquement appelée “courbe d'ébullition” tandis que celle d'en bas est une courbe de “rosée”.

4.2.3 Diagrammes expérimentaux.

Diagrammes isothermes.

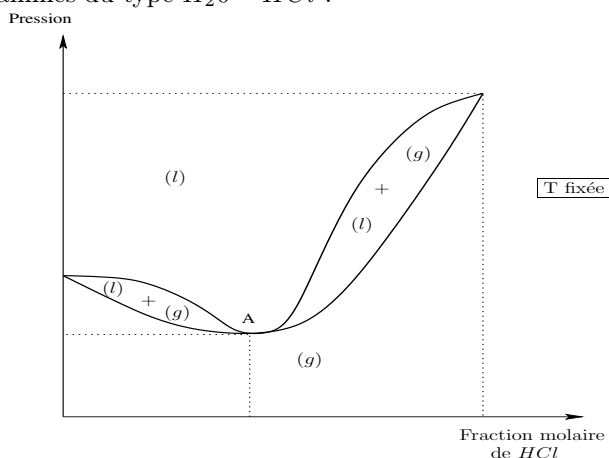
On obtient expérimentalement trois types de diagrammes :

1. Diagramme du type $O_2 - N_2$:

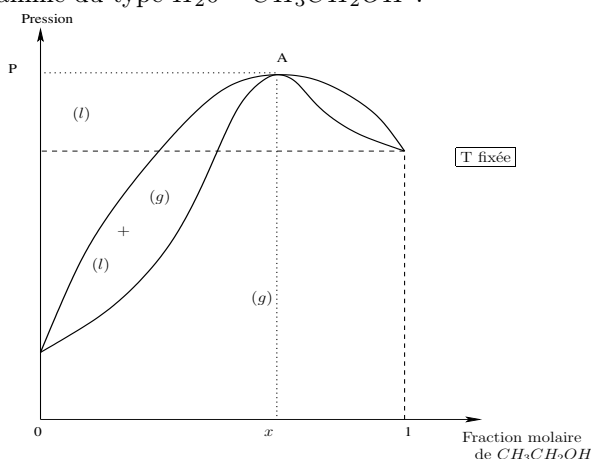


Le diagramme expérimental est proche du diagramme idéal, ce qui montre que l'hypothèse d'idéalité de la phase aqueuse est acceptable.

1. du fait de la miscibilité totale

2. Diagrammes du type $H_2O - HCl$:

Le diagramme est complètement différent de l'idéal. on remarque le point A, qualifié de point d'azéotropie pour lequel le mélange se comporte comme un corps pur d'un point de vue transition de phase.

3. Diagramme du type $H_2O - CH_3CH_2OH$:

Le diagramme est du même type que le précédent mais on a un maximum au lieu d'un minimum (le mélange est plus facile à vaporiser).

Diagrammes isobares.

Cette fois c'est la pression qui est fixée (plus facile d'un point de vue expérimental). On obtient le même genre de diagrammes

Cas d'une miscibilité non-totale.

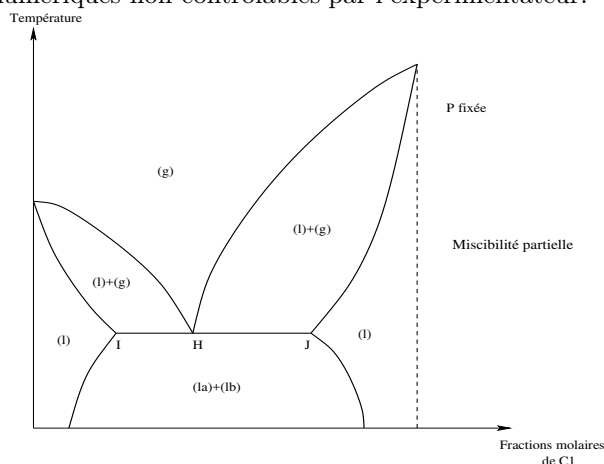
On a supposé jusqu'ici que les deux corps purs C_1 et C_2 étaient miscibles, en toutes proportions, dans la phase liquide (c'est le cas, par exemple, du mélange eau-éthanol) ; néanmoins, il existe des cas où les deux corps purs ne sont que *partiellement* miscibles (exemple du mélange eau-phénol) ou même totalement *non-miscibles* (exemple du mélange eau-benzène).

• Miscibilité partielle :

On peut alors obtenir deux phases liquides distinctes (l_A) et (l_B) à l'équilibre, (l_B) étant plus riche que (l_A) en constituant C_1 ($x_{1B} > x_{1A}$).

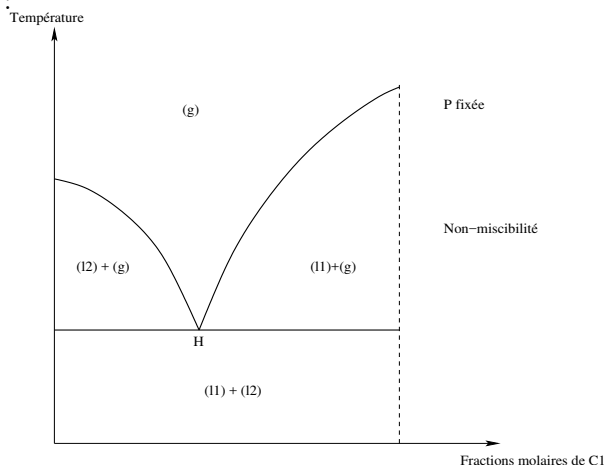
On notera la présence d'un point d'hétéroazéotropie H , en lequel les trois

phases (g) , (l_A) et (l_B) coexistent ; la variance du système vaut alors $v = 2 - 0 - 0 + 2 - 3$, soit $v = 1$, ce qui explique, dans un diagramme isobare où la pression P est fixée, que la température T_H et les fractions molaires x_{1H} (pour la phase gazeuse), x_{1I} (pour la phase liquide A) et x_{1J} (pour la phase liquide B) aient des valeurs numériques non-contrôlables par l'expérimentateur.



- Non-miscibilité :

Contrairement à ci-dessus, on ne peut plus avoir de phase liquide avec les deux constituants :



4.3 Caractéristiques d'une réaction chimique

4.3.1 Avancement d'une réaction.

Coefficients stœchiométriques arithmétiques.

On écrit une réaction sous la forme : $\sum_i \alpha_i r_i = \sum_i \beta_i p_i$ (1) où r_i et p_i sont les espèces chimiques intervenant dans la réaction. Alors $(\alpha_i, \beta_i)_i$ est un jeu de coefficients stœchiométriques s'ils sont tous positifs et si l'équation (1) traduit le bilan de matière au cours de la réaction. Ces coefficients sont donc définis à une constante multiplicative près. *Remarque :* Les lois de conservation de la masse totale et de la charge totale doivent être vérifiées lors de l'écriture

de (1). Certaines équations traduisent également un bilan microscopique. Elles sont qualifiées d'élémentaires. Par exemple : $CH_4 + Br\cdot \longrightarrow \cdot CH_3 + HBr$. Dans ce cas il n'existe d'un seul jeu de coefficients stœchiométriques arithmétiques. *Remarque* : Certaines réactions sont totales, la plupart à double sens (notées \rightleftharpoons). On ne parle pas de réaction "réversibles" qui prête à confusion avec la thermodynamique physique.

Coefficients stœchiométriques algébriques.

On choisit conventionnellement un sens d'écriture de (1), guidé par un contexte industriel. Les constituants à gauche du signe = sont alors nommés "réactifs", les autres "produits". On définit alors les coefficients stœchiométriques algébriques comme égaux aux arithmétiques en valeur absolue, positifs pour les réactifs et négatifs pour les produits. On écrit alors la réaction sous la forme symbolique :

$$\sum \nu_i C_i = 0$$

Avancement.

La relation précédente traduit le fait que toutes les quantités $\frac{n_i - n_{i,0}}{\nu_i}$ ont même valeur. Cette valeur commune est appelée "avancement" de la réaction tel que :

$$n_i = n_{i,0} + \nu_i \xi$$

La relation précédente est utilisée en pratique sous la forme d'un tableau appelé "tableau d'avancement". Par exemple pour la réaction $Fe_3O_4(s) + 4CO(g) = 3Fe(s) + 4CO_2(g)$:

Constituant	$Fe_3O_4(s)$	$CO(g)$	$Fe(s)$	$CO_2(g)$
quantité initiale (en mol)	2	5	1	3
quantité à l'instant t	$2 - \xi$	$5 - 4\xi$	$1 + 3\xi$	$3 + 4\xi$

Degré d'avancement.

Une quantité de constituant étant positive ou nulle l'avancement est borné par des valeurs ξ_{max}, ξ_{min} qui correspondent respectivement à une réaction totale dans le sens \rightarrow et à une réaction totale dans le sens \leftarrow . On définit alors le degré d'avancement comme la quantité :

$$\eta = \frac{\xi - \xi_{min}}{\xi_{max} - \xi_{min}}$$

Remarque : Selon le type de réaction, η peut aussi être dénommé "degré de dissociation", "taux de conversion" ou "rendement" pour une synthèse.

Intérêt de l'avancement.

• Caractère universel :

Il définit l'évolution d'une réaction quelconque au sein d'un système quelconque. Il permet aussi bien l'étude d'un équilibre chimique que celle d'un mécanisme réactionnel.

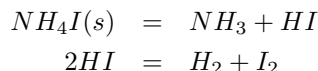
• Etude de réactions simultanées :

Un système chimique est souvent le siège de plusieurs réactions simultanées faisant intervenir les mêmes constituants. En notant ξ_r l'avancement de la réaction r , la variation de la quantité de C_i peut se mettre sous la forme :

$$n_i = n_{i,0} + \sum_r \nu_{i,r} \xi_r$$

En pratique on exprime toutes ces relations dans un tableau appelé tableau des avancements.

Par exemple, pour la dissociation de l'iodure d'ammonium :



on obtient le tableau suivant :

Constituant	$\text{NH}_4\text{I}(g)$	NH_3	HI	H_2	I_2
Quantité initiale	a	0	0	0	0
Quantité à t	$a - \xi_1$	ξ_1	$\xi_1 - 2\xi_2$	ξ_2	ξ_2

Etude d'un mécanisme réactionnel.

On considère un système chimique de volume V constant. Pour chaque réaction, on peut définir la vitesse de réaction :

$$v_r = \frac{dx_r}{dt} = \frac{1}{V} \frac{d\xi_r}{dt}$$

En notant x_r l'avancement volumique de la réaction r . La variation de la concentration de C_i est alors de la forme :

$$\frac{d[i]}{dt} = \sum_r \nu_{i,r} v_r$$

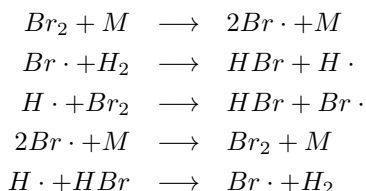
Cette relation permet l'étude cinétique du mécanisme réactionnel.

• réaction en chaîne :

Il s'agit d'une réaction qui comporte plusieurs étapes chacune d'entre elles composée d'une ou plusieurs réactions élémentaires :

- Initiation : Permet de créer un intermédiaire réactionnel très réactif.
- Propagation : L'intermédiaire réactionnel est successivement détruit et régénéré un grand nombre de fois.
- Terminaison : Tous les intermédiaires sont détruits sans être régénérés.

Exemple : Synthèse thermique du bromure d'hydrogène : Le mécanisme adopté comporte cinq étapes élémentaires.



L'initiation correspond à (1) au cours de laquelle le radical $\text{Br}\cdot$ est créé. La propagation correspond à (2) et (3) puisqu'on a alors destruction et régénération des intermédiaires $\text{H}\cdot$ et $\text{Br}\cdot$ et se répètent un grand nombre de fois. La terminaison a lieu avec (4) et (5).

• Hypothèse de Bodenstein :

Lors de l'évolution d'un système chimique dans laquelle une réaction en chaîne a lieu, il existe des constituants appelés "intermédiaires réactionnels", qui n'apparaissent pas dans le bilan global mais seulement dans les réactions intermédiaires. Ils sont créés au cours de la phase d'initiation et détruits au cours de la phase de terminaison. Alors la concentration de ces intermédiaires réactionnels est quasi-stationnaire en cours de réaction.

Une telle hypothèse permet la résolution des équations différentielles sur les concentrations. En effet on dispose de la :

- Loi de Van't Hoff :

Pour un acte élémentaire $\sum_i \alpha_i r_i = \sum_i \beta_i p_i$ il existe k tel que la vitesse de la réaction soit égale à :

$$v = k \prod [r_i]^{\alpha_i}$$

Qualitativement on dira que le bilan d'un acte élémentaire traduit un acte microscopique et donc que la vitesse est d'autant plus importante que la probabilité de choc ou la concentration des réactifs est importante.

Par exemple dans le cas ci-dessus, en appliquant l'hypothèse de Bodenstein on obtient $\frac{d[Br\cdot]}{dt} = 2v_1 - v_2 + v_3 - 2v_4 + v_5 \sim 0$ ainsi que $\frac{d[H\cdot]}{dt} = v_2 - v_3 - v_5 \sim 0$. C'est-à-dire $v_4 = v_1$ et $v_2 = v_3 + v_5$. Puis la loi de Van't Hoff donne $v_1 = k_1[Br_2][M] = v_4 = k_4[Br\cdot]^2[M]$ et de même pour l'autre relation. On en déduit la vitesse de la réaction globale $H_2 + Br_2 = 2HBr$ qui vaut en fait $v_3 = k \frac{[H_2][Br_2]^{1/2}}{1 + k' \frac{[HBr]}{[Br_2]}}$ avec $k = k_2 \sqrt{\frac{k_1}{k_4}}$ et $k' = \frac{k_5}{k_3}$. On ne peut en particulier par définir l'ordre d'une telle réaction. Néanmoins en début de réaction, en négligeant le terme au dénominateur, la réaction possède un ordre global de $3/2$, ce qui montre qu'un ordre n'est pas nécessairement entier.

Réaction prépondérante.

- Définition :

Une réaction est dite prépondérante lorsque son avancement est très grand devant ceux des autres réactions.

La recherche d'une telle réaction n'a d'intérêt que si les diverses réactions ont un commun des réactifs ou des produits.

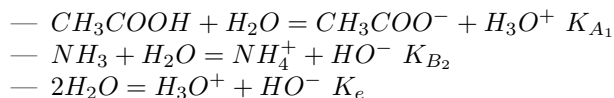
- Méthode de la réaction prépondérante :

Elle a pour but la détermination de l'état d'équilibre d'un système chimique en s'appuyant sur la recherche d'une réaction prépondérante.

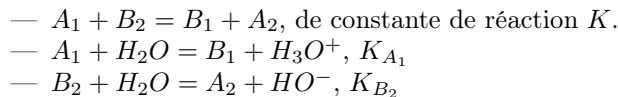
- On détermine toutes les réactions chimiques ayant lieu dans le système.
- On détermine une base de réactions en éliminant celles qui se déduisent des autres par combinaison linéaire et en gardant celle qui a une tête de prépondérante.
- On dresse le tableau des avancements.
- On suppose qu'une réaction est prépondérante selon certains critères (comparaison des constantes d'équilibre).
- On teste l'hypothèse retenue et éventuellement on recommence avec une autre équation.

- Exemple : pH d'un mélange acide faible A_1 -base faible B_2 non-conjuguées.

Prenons un mélange CH_3COOH à 10^{-1} mol par litre et NH_3 à $5 \cdot 10^{-2}$ mol par litre. Les réactions éventuelles sont au nombre de 3, à savoir :



C'est la base de réactions naturelle mais les deux premières réactions ne sont pas comparables. On la remplace donc par la base suivante :



En plus $K = K_{A_1}K_{B_2}/K_e \gg K_{A_1}$ et K_{B_2} ce qui justifie l'hypothèse que la première réaction est prépondérante. On fait alors le tableau des avancements molaires :

Constituants	A_1	B_2	B_1	A_2	H_3O^+	HO^-
Quantités initiales	C_1	C_2	0	0	0	0
Quantités à l'éq.	$C_1 - (x_1 + x)$	$C_2 - (x + x_2)$	$x + x_1$	$x + x_2$	x_1	x_2
Approximation	$C_1 - x$	$C_2 - x$	x	x	x_1	x_2

En exprimant alors les trois conditions d'équilibre :

$$K = \frac{x^2}{(C_1 - x)(C_2 - x)} \quad K_{A_1} = \frac{xx_1}{C - x} \quad K_{B_2} = \frac{xx_2}{C_2 - x}$$

on peut alors résoudre ces équations et tester numériquement l'hypothèse.

En utilisant que A_1 et B_2 sont faibles, on peut encore simplifier car on aura $x \ll C_1, C_2$. On en déduit alors le pH .

4.3.2 Grandeurs standard d'une réaction.

Définition.

Etant donné un système de température uniforme siège d'une réaction :

$\sum_i \nu_i C_i = 0$, on définit les grandeurs standard :

$$\begin{aligned}
\Delta_r G^\circ(T) &= \sum \nu_i g_i^\circ(T) \\
\Delta_r S^\circ(T) &= \sum \nu_i s_i^\circ(T) \\
\Delta_r H^\circ(T) &= \sum \nu_i h_i^\circ(T) \\
\Delta_r C_p^\circ(T) &= \sum \nu_i c_{p,i}^\circ(T)
\end{aligned}$$

Relations de Kirchoff.

Les relations entre les grandeurs standard des constituants C_i permettent d'obtenir les relations de Kirchoff par combinaisons linéaires :

$$\begin{aligned}
\Delta_r G^\circ &= \Delta_r H^\circ - T \Delta_r S^\circ \\
\frac{d \Delta_r G^\circ}{dT} &= - \Delta_r S^\circ \\
\frac{d \Delta_r H^\circ}{dT} &= \Delta_r C_p^\circ \\
\frac{d \Delta_r S^\circ}{dT} &= \frac{\Delta_r C_p^\circ}{T}
\end{aligned}$$

■ Exercice 17 ■

Montrer que $\Delta_r G^\circ$ est une fonction affine de la température ssi $\Delta_r C_p^\circ = 0$.

Remarque : Dans les diagrammes d'Ellingham, on est dans ce cas là.

Détermination expérimentale.

- Mesure à partir de la constante d'équilibre :

Par définition, la constante d'équilibre d'une réaction vaut :

$$K(T) = e^{-\frac{\Delta_r G^\circ}{RT}}$$

(cf : condition d'équilibre chimique). On remarque une forme de Boltzmann.

La mesure de K permet celle de $\Delta_r G^\circ$ et celle de $\Delta_r S^\circ$ ainsi que $\Delta_r H^\circ$ car on démontre sans peine la loi de Van't Hoff :

$$\frac{d \ln(K)}{dT} = \frac{\Delta_r H^\circ}{RT^2}$$

- Mesure à partir de la chaleur de réaction monobare :

On suppose que la réaction étudiée est prépondérante. On fait subir au système une évolution monobare telle que T soit la même avant et après. Alors un bilan d'énergie totale sous la forme $Q = H_2 - H_1$ fournit rapidement la relation :

$$\Delta_r H^\circ = \frac{Q_p}{\xi}$$

- Mesure à partir de la chaleur de réaction isochore :

On suppose que les constituants existent à l'état pur. Alors en posant $\Delta_r \nu_g = \sum_i \nu_{i,g}$ la variation de la quantité de gaz au cours de la réaction, énergie interne standard et enthalpie standard sont liées par la relation :

$$\Delta_r H^\circ = \Delta_r U^\circ + RT \Delta_r \nu_g$$

De plus un bilan d'énergie sur le gaz pour une évolution isochore donne la relation :

$$\Delta_r U^\circ = \frac{Q_v}{\xi}$$

- Mesure à partir des grandeurs de formation :

X désignant une grandeur extensive usuelle, on note $\Delta_f X_i$ la grandeur standard de la réaction de formation d'une mole du constituant C_i à partir des corps purs simples le composant, ceux-ci étant pris dans l'état le plus stable à la température considérée. De plus on a la relation de Hess, qui permet d'exprimer les grandeurs standard à partir des grandeurs standard de formation :

$$\Delta_r X^\circ = \sum_i \nu_i \Delta_f X_i$$

Cette relation se démontrant facilement par combinaison linéaire.

4.4 Equilibre d'un système chimique

4.4.1 Condition d'équilibre chimique.

Relation de De Donder.

On considère un système chimique fermé dont l'état initial, supposé stationnaire, satisfait aux conditions d'équilibre physique T, P, μ_i uniformes. On provoque une évolution infinitésimale de ce système, au cours de laquelle $d\xi$ est non-nul. Les grandeurs intensives T, P, μ_i étant uniformes au début, on a la relation : $dU = TdS - PdV + \sum_i \mu_i dn_i$. En effectuant des bilans d'entropie, d'énergie totale et de quantité de C_i , on trouve la relation ci-dessous :

$$\delta S^p = \frac{A}{T} d\xi \quad \text{où } A = - \sum_i \nu_i \mu_i$$

Condition d'équilibre chimique.

La relation ci-dessus permet de donner un critère d'équilibre chimique :

$$A = - \sum_i \nu_i \mu_i = 0$$

En effet dans un état d'équilibre, la source d'entropie est nulle et donc l'entropie produite aussi. Inversement $A \neq 0$, correspond à un état stationnaire hors d'équilibre dû à un blocage cinétique de la réaction. *Remarque* : S'il y a plusieurs réactions distinctes, la relation de De Donder s'écrit : $\delta S^p = \sum_r \frac{A_r}{T} d\xi_r$ et la condition d'équilibre devient la nullité de toutes les affinités. *Remarque* : Lors d'une évolution infinitésimale réversible, $dG = -SdT + VdP - Ad\xi$. D'où une expression simplifiée de l'affinité : $A = - \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \right)_{T,P}$.

Constante d'équilibre.

Le calcul de l'affinité pour une phase idéale peut être effectué en utilisant l'expression du potentiel chimique. On trouve alors que la condition $A = 0$ correspond à la condition :

$$\prod a_i^{\nu_i} = K(T) \quad \text{où } K = e^{-\frac{\Delta_r G^\circ}{RT}}$$

Cette relation est la loi de Guldberg et Waage ou loi d'action des masses. K est appelée "constante" d'équilibre et dépend de la température. Elle varie selon la loi de Van't Hoff.

Cas particuliers.

- Phase gazeuse idéale et corps purs condensés :

L'activité vaut $\frac{P_i}{P^\circ}$ pour les gaz et 1 pour les condensés, soit :

$$K(T) = \prod_{gaz} p_i^{\nu_i}$$

Où $p_i = \frac{P_i}{P^\circ}$ est la pression réduite de C_i .

- Cas d'une phase aqueuse idéale diluée avec des précipités :

La constante d'équilibre s'écrit :

$$K(T) = \prod [i]^{\nu_i}$$

où $[i] = \frac{c_i}{c^\circ}$ est la concentration réduite du soluté C_i .

4.4.2 Variance.

Définition.

La variance d'un système chimique est le nombre de grandeurs intensives qu'il faut connaître pour déterminer toutes les grandeurs intensives liées à ce système.

Théorème de Gibbs.

La variance d'un système chimique en équilibre est donnée par la relation :

$$v = c - r - s + 2 - \varphi$$

où :

- c : nombre de constituants.
- r : nombre de réaction indépendantes.
- s : nombre de relation supplémentaire, conditions initiales...
- φ : nombre de phases.

Ce théorème est un peu long à démontrer aussi la démonstration n'est pas présente.

Signification expérimentale.

La variance est le nombre maximal de variables intensives contrôlables par l'expérimentateur sans rompre l'équilibre.

4.4.3 Perturbation d'équilibre.

Un système est perturbé par une modification de la température, de la pression, du volume ou des n_i . On désire prévoir le sens de la réaction engendrée. Pour cela on calcule A après perturbation mais avant le début de la réaction. Comme l'affinité initiale est nulle (équilibre) elle a alors une valeur infinitésimale dont le signe indique le sens de réaction.

Selon la variance dans l'état initial, l'état est déplacé (auquel cas le nouvel état d'équilibre atteint est voisin de l'état initial) ou rompu (l'état final en est très différent).

Tout d'abord on s'intéressera à un système dont les constituants sont gazeux ou condensés purs. Dans ce cas l'affinité de la réaction a pour expression : (après calculs)

$$dA = \Delta_r H^\circ \frac{dT}{T} - RT \sum_{i \in g} \nu_i \frac{dP_i}{P_i}$$

Le calcul se fait en exprimant les potentiels chimiques avec des activités puis en différenciant et on simplifie le résultat obtenu avec les relations de Kirchoff.

Influence de la température.

- Variation de T à P constante :

Un bilan de matière de C_i et l'expression $P_i = x_i P$ avec $x_i = n_i/n_g$ permettent d'obtenir :

$$dA = \Delta_r H^\circ \frac{dT}{T}$$

Une augmentation de température déplace ou rompt l'équilibre chimique dans le sens endothermique dans au sens $\Delta_r H^\circ > 0$.

- Variation de T à V constanté :

Le même genre de raisonnement donne cette fois :

$$dA = \Delta_r U^\circ \frac{dT}{T}$$

Une augmentation de température déplace ou rompt l'équilibre chimique dans le sens endothermique dans au sens $\Delta_r U^\circ > 0$.

En pratique $\Delta_r U^\circ$ et $\Delta_r H^\circ$ sont tous deux de même signe.

Influence de la pression.

Si seule la pression varie :

$$dA = -RT \Delta_r \nu_g \frac{dP}{P}$$

Une augmentation de pression à T constante déplace ou rompt l'équilibre dans le sens d'une diminution de la quantité de gaz.

Influence du volume.

Si V varie à T constante :

$$dA = +RT \Delta_r \nu_g \frac{dV}{V}$$

Remarque : On ne peut pas rompre ainsi l'équilibre car V est extensive et n'intervient pas dans la variance.

Influence de l'ajout de n_i .

- T, P constants :

Dans ce cas malsain aucune règle générale ne peut être énoncée. Cependant si C_i est condensé, on ne modifie pas l'équilibre.

- T, V constants :

$$dA = -RT \frac{\nu_j}{n_j} \delta n$$

Ce qui veut dire que dA a le signe de $-\nu_j$.

Cas d'une solution aqueuse.

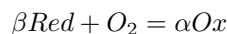
L'étude est la même que ci-dessus et on démontre des lois similaires.

4.5 Diagrammes d'Ellingham

4.5.1 Généralités.

Diagrammes d'Ellingham.

Ils sont introduits dans l'étude des réactions rédox du type :



Dans laquelle Ox et Red sont gazeux ou condensés dans une phase appelée "phase sèche", par opposition aux solutions aqueuses étudiées avec les diagrammes $E - Ph$. On écrit conventionnellement l'équation bilan avec une mole de O_2 . On prend pour abscisse T du milieu (supposée uniforme) et pour ordonnée la quantité $RT \ln(p_{O_2})$.

Approximation d'Ellingham.

On suppose $\Delta_r C_p^\circ = 0$ ou de manière équivalente que $\Delta_r G^\circ$ est une fonction affine de T :

$$\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T \Delta_r S^\circ$$

Remarque : L'ordonnée à l'origine est toujours négative car la réaction est une combustion donc exothermique. *Remarque* : La pente est de signe variable selon le $\Delta_r \nu_g$.

Droite d'Ellingham.

La condition d'équilibre chimique s'écrit après un peu de réflexion :

$$RT \ln(p_{O_2}) = \Delta_r G^\circ(T) + RT \ln \left(\frac{a_{Ox}^\alpha}{a_{Red}^\beta} \right)$$

On définit alors la droite d'Ellingham comme $RT \ln(p_{O_2}) = \Delta_r G^\circ(T)$. Les points au-dessus correspondent à la prédominance de l'oxydant les autres à celle du réducteur.

4.5.2 Diagramme d'Ellingham du zinc.

Données :

Constituants	$Zn(s)$	$ZnO(s)$	O_2
$\Delta_f H^\circ (kJ \cdot mol^{-1})$	0	-351	0
$s^\circ (J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1})$	41.6	43.6	205

On donne aussi :

- Température de fusion : $T_F = 693K$.
- Chaleur latente de fusion : $L_F = 6.7 kJ \cdot mol^{-1}$
- température d'ébullition : $T_E = 1180K$
- Chaleur latente d'ébullition : $L_E = 115$

Domaine $T < T_F$.

Un calcul simple à partir des données montre que :

$$\Delta_r G_1^\circ(T) = -702 + 0.201T$$

La variance du système vaut 1. La température étant déjà fixée, l'équilibre ne peut exister que sur la droite d'Ellingham

Domaine $T_F < T < T_E$.

De même on trouve :

$$\Delta_r G_2^\circ(T) = -715 + 0.220T$$

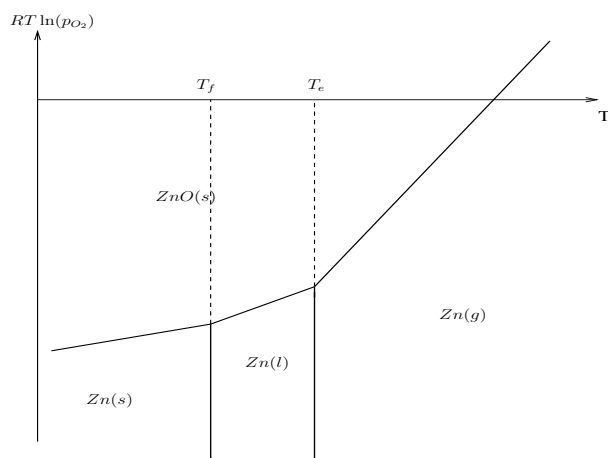
Remarque : La réaction a changé puisque le zinc s'est liquéfié.

Domaine $T > T_E$.

Cette fois on est en phase gazeuse et on trouve :

$$\Delta_r G_3^\circ(T) = -944 + 0.415T$$

En définitive :



4.5.3 Superposition de deux diagrammes.

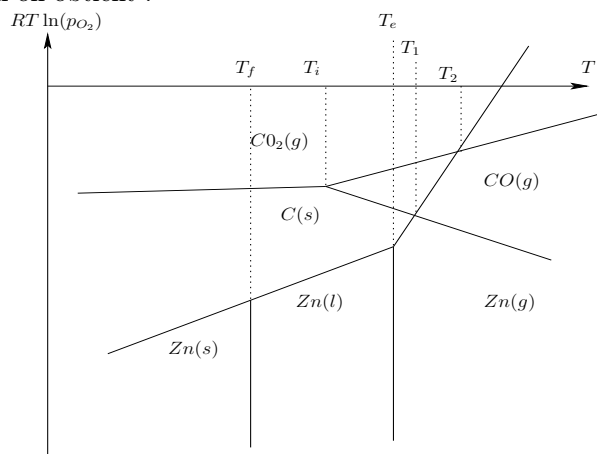
Théorème d'Ellingham.

Si l'on a deux réactions du type étudié : $(Ox_1|Red_1)$, $(Ox_2|Red_2)$ avec l'oxygène, dont les constituants sont gazeux ou condensés, la superposition des diagrammes conduit à deux droites sécantes. Si on suppose que la partie haute du diagramme est occupée par Ox_1 et que dans un domaine de température l'écart d'enthalpie libre standard varie d'au moins $10RT$ alors l'oxydant Ox_1 réagit avec le réducteur Red_2 selon la réaction obtenue par combinaison des deux premières en faisant disparaître l'oxygène.

La démonstration est facile, en effet la constante d'équilibre de la réaction fait apparaître la différence des enthalpies standard et avec l'hypothèse formulée, on trouve que la réaction est totale.

Diagramme Zn, C .

Une étude similaire à celle du zinc fournit le diagramme du carbone et par superposition on obtient :



L'étude de ce diagramme pousse à étudier trois zones distinctes pour y appliquer le théorème d'Ellingham :

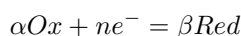
- $T < T_1$ CO_2 et Zn réagissent.
- $T_1 < T < T_2$ ZnO et C réagissent : production de Zn .

— $T > T_2$ Il y a deux réactions possibles.

Une telle étude permet de prédire les réactions se produisant entre les divers constituants présents dans le milieu et donc d'élaborer des protocoles de raffinage. En effet les réactions ci-dessus traduisent la synthèse du Zn métallique à partir de ses oxydes. Une telle méthode est très coûteuse en énergie et n'est utilisée que pour les métaux à forte valeur ajoutée (pyrométallurgie du Zinc).

4.6 Diagrammes $E - pH$

Ils sont introduits lors de l'étude de réactions rédox dont les équations sont obtenues par couplage de demi-équations électroniques du type :



l'oxydant et le réducteur pouvant occuper n'importe quelle phase.

Dans un tel diagramme on met en abscisse le pH et en ordonnée le potentiel rédox, défini ci-dessous :

4.6.1 Potentiel rédox d'une solution.

Potentiel d'un couple rédox.

- Définition :

Le potentiel rédox d'un couple de demi-équation : $\alpha Ox + ne^- = \beta Red$ est :

$$E = \frac{1}{n\mathcal{F}}(\alpha\mu_{Ox} - \beta\mu_{Red})$$

- Formule de Nernst :

L'écriture du potentiel chimique sous la forme : $\mu^\circ + RT \ln(a)$ permet de mettre le potentiel rédox sous une forme simplifiée :

$$E = E^\circ + \frac{0.06}{n} \log\left(\frac{a_{Ox}^\alpha}{a_{Red}^\beta}\right)$$

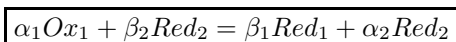
Dans laquelle E° désigne le potentiel rédox standard et ne dépend que de la température.

- Exemples :

- Couple $(H^+|H_2)$: Par convention $E^\circ = 0$, d'où $E = -0.03 \log(p_{H_2}) - 0.06pH$. On peut alors prendre des conventions sur la pression d'hydrogène pour obtenir un potentiel rédox apparent de $-0.06pH$.
- Couple $(O_2|H_2O)$: En prenant des conventions du même acabit, on a : $E = 1.23 - 0.06pH$.

Affinité d'une réaction rédox en solution aqueuse.

On suppose ici que la réaction est obtenue par mise en contact directe des réactifs, ce qui n'est pas le cas dans les systèmes électrochimiques. Les électrons n'étant pas stables en solution aqueuse, on les fait disparaître par différence car la réaction réelle est directe et s'écrit :



- Expression de l'affinité :

Un calcul direct à partir de la définition de l'affinité donne :

$$A = n\mathcal{F}(E_1 - E_2)$$

- Equilibre :

La condition d'équilibre provenant de la relation de De Donder s'écrit alors :

$$E_1 = E_2$$

On pourrait généraliser au cas de plusieurs couples rédox et la condition serait l'égalité de **tous** les potentiels rédox.

- Non-équilibre :

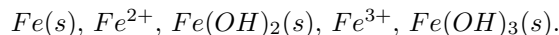
Le signe de l'affinité donnant le sens de déroulement de la réaction, il suffit maintenant de comparer les potentiels rédox (toujours de Donder). On retiendra que si $E_1 > E_2$ alors la réaction se produit dans le sens direct. *Remarque* : En pratique on se contente de comparer les potentiels standard : si leur différence est suffisante, on peut sans trop se tromper étendre aux potentiels tout court.

4.6.2 Diagramme $E - pH$ du fer.

Tracé.

- Position du problème :

Les constituants du fer auxquels on s'intéresse sont les suivants :

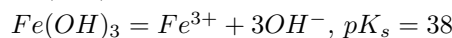
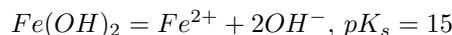


- Prévision qualitative :

On classe les constituants selon leur nombre d'oxydation, puis selon leur caractère acide. On en déduit l'allure qualitative du diagramme, puis on prélève dans une table les données numériques nécessaires, soit ici 4 données à température usuelle (298K), deux potentiels standard :

$$E_{Fe^{3+}|Fe}^\circ = -0.44V, E_{Fe^{3+}|Fe^{2+}}^\circ = 0.77V$$

et deux constantes de dissociation :

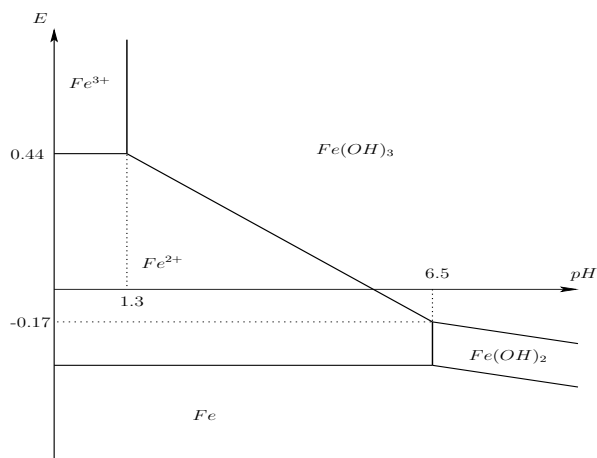


- Construction du diagramme :

On précise des conventions, que $[Fe^{2+}] = [Fe^{3+}] = 1$ aux frontières et on finit le diagramme frontière par frontière :

- Frontière $(Fe^{2+}|Fe)$: $Fe^{2+} + 2e^- = Fe$ d'où $E = -0.44V$ compte tenu des conventions adoptées.
- $Fe^{2+}|Fe(OH)_2$: $Fe(OH)_2 = Fe^{2+} + 2OH^-$ l'écriture de la condition d'équilibre donne directement : $pH = 6.5$.
- $Fe(OH)_2|Fe$: $E = E^\circ - 0.06pH$. Le calcul du potentiel standard est possible mais il est plus rapide d'exprimer le fait que les frontières 2, 1, 3 se coupent en un point.

On continue alors sur les trois autres frontières puis on trace le diagramme en indiquant les zones de prédominance :

**Lecture.**

Considérons une solution aqueuse contenant des constituants du Fer utilisés ci-dessus. En ajoutant des tampons acido-basique ou des tampons rédox, on peut imposer le pH ou le potentiel de la solution. La lecture du diagramme permet alors de dire sous quelle forme prépondérante se trouve le Fer dans la solution.

Exercice 18

Tracer le diagramme $E - pH$ du chlore pour les solutés suivants :



compte-tenu des données suivantes :

$E^\circ_{Cl_2|Cl^-} = 1.39V$, $E^\circ_{HClO|Cl_2} = 1.60V$, $pK_{a_{HClO|ClO^-}} = 7.5$ et des conventions :

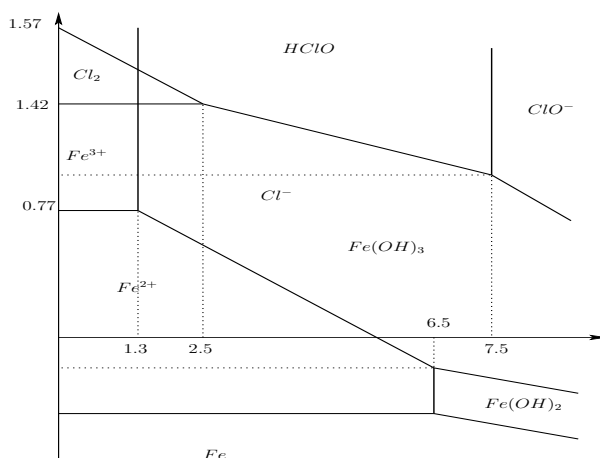
Concentration totale en élément chlore égale à 10^{-1} et sur chaque frontière, la concentration en solutés de Chlore 1 est égale à celle en chlore 2. (par exemple : $2[Cl_2] = [Cl^-]$)

4.6.3 Superposition de deux diagrammes.

Comme pour les diagrammes d'Ellingham c'est là le grand intérêt des diagrammes $E - pH$.

Superposition de ceux du Fer et du chlore.

La superposition de ces deux diagrammes donne :



La superposition de ces deux diagrammes permet de prévoir les réactions obtenues en mélangeant de l'eau de Chlore avec une solution aqueuse de sulfate de Fer. Si le pH du mélange est imposé par un tampon, on a plusieurs cas de figure :

- $pH = 0$: Le dichlore réagit directement avec le Fe^{2+} .
- $pH = 4$: Le dichlore se dismute en $HClO$ et Cl^- puis $HClO$ réagit avec Fe^{2+}
- $pH = 9$: Le dichlore se dismute en ClO^- et Cl^- et on continue le processus pour trouver toutes les réactions.

4.7 Systèmes électrochimiques

Définition d'un système électrochimique.

C'est un dipôle d'un point de vue électrique et un ensemble de deux électrodes d'un point de vue chimique. Chaque électrode est constituée d'un conducteur métallique et d'un couple rédox. A l'anode se produit une oxydation et une réduction à la cathode. (définition)

Relations entre intensité et vitesse de réaction.

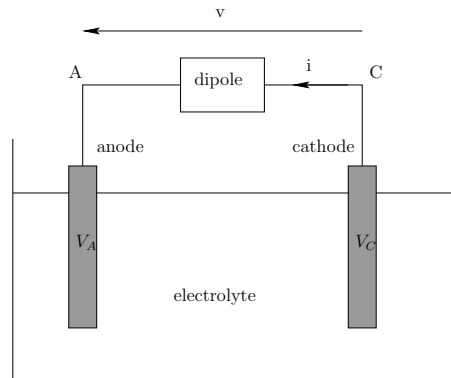
Deux bilans de matière à chaque électrode fournissent cette relation :

$$i = n\mathcal{F}\frac{d\xi}{dt}$$

où i est l'intensité du courant traversant le système et ξ l'avancement.

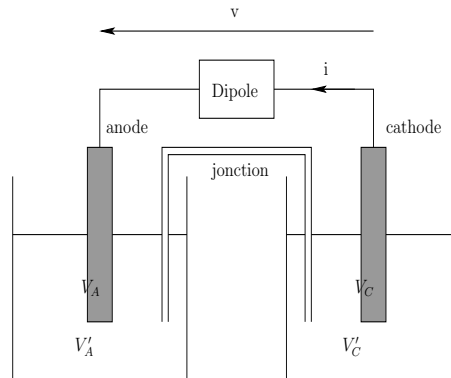
Exemples de tels systèmes.

- Electrolyseur :



Un électrolyseur reçoit de l'énergie électro-magnétique de la part du dipôle extérieur. Comme $P_{em}^r = vi$ et que v est positive, v l'est aussi. Ainsi dans un électrolyseur l'anode est le pôle +.

- Pile :



Une pile fournit de l'énergie em au dipôle extérieur, ce qui montre avec la même relation que dans une pile l'anode coïncide avec le pôle –.

Divers types d'électrodes.

Rapidement, on rappelle qu'outre les électrodes classiques comme l'argent et le platine (...), il existe d'autres électrodes plus rapides et précises : une électrode utilisée en métrologie est celle à hydrogène qui utilise une lame de platine et le couple $(H^+|H_2(g))$, l'électrode précise utilisée couramment est celle qu'"calomel" qui utilise la platine et le couple $(Hg_2Cl_2(s)|Hg(l))$.

4.7.1 Etude thermodynamique.

Relation de De Donder électrochimique.

On suppose que le système qui ne comprend ni le dipôle extérieur ni la jonction éventuelle, est dans un état de température, pression et potentiels chimiques uniformes. On note alors $d\xi$ l'avancement de la réaction rédox lors d'une évolution infinitésimal quelconque du système.

- Relation entre U et S :

On part de la relation $dU = TdS - PdV - Ad\xi$.

- Bilan d'énergie :

◇ $dE : dE = dU$ en négligeant la variation d'énergie potentielle (due au mouvement des ions dans la solution) et en négligeant l'énergie em emmagasinée dans le système.

◇ $\delta Q : ?$

◇ $\delta W : \delta E_m^r = -PdV$ (pression uniforme) et $\delta E_{em}^r = dt \int_{\Sigma} V \vec{j} \cdot \vec{n} dS$.

Ensuite on distingue deux cas :

$\delta W = -PdV + n\mathcal{F}(V_A - V_C)d\xi$ pour un électrolyseur

$\delta W = -PdV + n\mathcal{F}(V_A - V_C + V_C' - V_A')d\xi$ pour une pile. On supposera ensuite que la ddp de jonction est négligeable devant la ddp du dipôle, auquel cas on trouve le bilan sous la forme :

$$dU = \delta Q - PdV + n\mathcal{F}vd\xi$$

• Bilan d'entropie :

La température étant uniforme, on trouve rapidement le bilan d'entropie :

$$dS = \frac{\delta Q}{T} + \delta S^p$$

Au final on obtient la relation de De Donder électrochimique :

$$\delta S^p = \frac{A_e}{T} d\xi$$

où A_e est l'affinité électrochimique définie par : $A_e = A + n\mathcal{F}v$.

Condition d'équilibre électrochimique.

Lorsque le système est initialement dans un état d'équilibre ou qu'il évolue réversiblement alors l'entropie produite est nulle on a la relation :

$$V_A - V_C = E_A - E_C$$

Remarque : Cette relation est obtenue directement à partir de De Donder.

4.7.2 Etude cinétique.

L'étude thermodynamique a permis d'établir la relation :

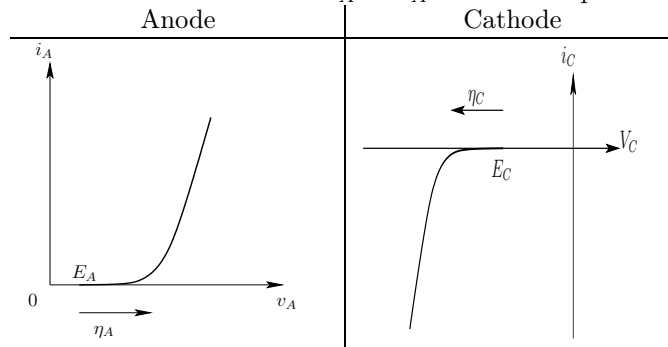
$$V_A - V_C = E_A - E_C + \frac{T}{n\mathcal{F}} \frac{\delta S^p}{d\xi}$$

reliant la ddp électrique, la ddp chimique et la création d'entropie molaire. Par contre, aucune information sur la vitesse de réaction n'est donnée.

Courbe intensité potentiel.

• Courbe intensité potentiel d'électrode :

A l'aide d'un dispositif expérimental faisant intervenir une électrode à hydrogène, on peut tracer la courbe reliant i_A et V_A et de même pour la cathode :



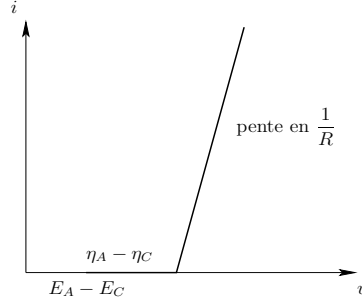
$V_A = E_A$ correspond à l'équilibre.

$E_A < v_A < v_A + \eta_A$ correspond à un état quasi-stationnaire hors d'équilibre.

η_A est la surtension anodique, elle est de l'ordre du volt et dépend de l'électrode utilisée tant du point de vue du métal conducteur que du point de vue du couple rédox et même du point de vue de l'état de surface du métal.

Courbe intensité potentiel pour un électrolyseur.

Etant donné que $i = i_A = -i_C$, par superposition de ces deux courbes et par une petite transformation, on obtient la caractéristique $i(v)$. Celle-ci est nulle pour i inférieur à une certaine tension seuil au-dessous de laquelle l'électrolyseur ne fonctionne pas. Cette tension seuil vaut $E_A - E_C + \eta_A - \eta_C$:



On en déduit le lien entre la surtension et la création d'entropie molaire :

$$\eta_A - \eta_C = \frac{T}{n\mathcal{F}} \frac{\delta S^p}{d\xi}$$

Au delà de cette valeur seuil la caractéristique est affine avec une pente en $1/R$.

Le bilan énergétique peut alors se mettre sous les deux formes :

$$P_{em}^r = (E_A - E_C)i + TP_S$$

Où le premier terme indique la puissance minimale utile dans un cas idéal et le deuxième est un terme correctif dû à l'irréversibilité.

$$TP_S = (\eta_A - \eta_C)i + Ri^2$$

De même le premier terme pointe l'irréversibilité chimique (surtension) et le second l'irréversibilité électrique (effet Joule).

Courbe intensité potentiel pour une pile.

L'étude est la même mais la courbe est symétrique par rapport à un axe vertical. On constate que la force électromotrice diminue avec l'intensité délivrée par la pile à tel point qu'on a une tension seuil au delà de laquelle la pile ne fournit plus de courant. Le bilan énergétique s'écrit :

$$-P_{em}^r = (E_C - E_A)i - TP_S$$

On constate que la production d'énergie em dans le cas idéal est amputée par la destruction d'entropie.

Chapitre 5

Mécanique

5.1 Référentiels

5.1.1 Définitions.

Référentiels.

On appelle référentiel un ensemble d'au moins trois points immobiles les uns par rapport aux autres.

Cela nécessite l'introduction d'un repère d'espace. En mécanique classique le temps est invariant par changement de référentiel. Un repère d'espace suffit à définir un référentiel d'où la notation : $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Remarque : Si un référentiel est défini à partir d'un repère d'espace, le contraire est faux.

Référentiel d'observation.

C'est le référentiel dans lequel sont définies les grandeurs cinématiques, cinétiques et dynamiques du système étudié.

5.1.2 Changement de référentiel.

Vecteur rotation de \mathcal{R} par rapport à \mathcal{R}' .

Le mouvement de $\mathcal{R}'(\vec{\Gamma}'_S, \vec{\Gamma}'_I, \vec{\Gamma}'_F)$ par rapport au référentiel d'observation \mathcal{R} peut être décrit par :

- Le mouvement de l'origine $O' / \mathcal{R} : v_{\vec{O}'}$
- Le mouvement de la base $(\vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z) / \mathcal{R} : \omega_{\mathcal{R}' / \mathcal{R}}$.

En effet on a la relation matricielle :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{u}'_x \\ \vec{u}'_y \\ \vec{u}'_z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \vec{u}'_x \\ \vec{u}'_y \\ \vec{u}'_z \end{pmatrix} \text{ La dérivée étant prise dans le référentiel } \mathcal{R}. \text{ En ex-}$$

primant que les vecteurs $\vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z$ forment une base orthonormée de l'espace on trouve que A est une matrice antisymétrique. Ce qui permet d'affirmer qu'il existe un vecteur $\vec{\omega}$ tel que :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{u}'_x \\ \vec{u}'_y \\ \vec{u}'_z \end{pmatrix} = \vec{\omega} \wedge \begin{pmatrix} \vec{u}'_x \\ \vec{u}'_y \\ \vec{u}'_z \end{pmatrix}$$

En plus on montre facilement que $\vec{\omega}$ ne dépend pas du repère d'espace choisi pour définir l'un et l'autre référentiel. C'est pourquoi on le note :

$$\vec{\omega} = \omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \vec{e}_z$$

Théorème relatif au changement de référentiel

Soient deux référentiels quelconques \mathcal{R} et \mathcal{R}' ainsi qu'un vecteur \vec{V} de l'espace. On a l'identité :

$\vec{V} = V_x \vec{u}_x + V_y \vec{u}_y + V_z \vec{u}_z = V'_x \vec{u}'_x + V'_y \vec{u}'_y + V'_z \vec{u}'_z$ qu'on peut dériver dans le référentiel \mathcal{R} . En utilisant alors la propriété fondamentale du vecteur $\vec{\omega}$ on a la relation :

$$\left(\frac{d\vec{V}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{V}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \vec{V}$$

Théorèmes annexes.

- Trois référentiels :

$$\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}''} + \omega_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}}$$

- Transformation de vitesses :

Etant donnés deux points A et B d'un même référentiel \mathcal{R}' , leurs vitesses \vec{v}_A, \vec{v}_B dans un autre référentiel \mathcal{R} satisfont à la relation :

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{AB}$$

La démonstration est très simple, par contre ce corollaire à une très grande importance pratique dans le cours de mécanique de solide.

- Lois de composition des vitesses et accélérations :

$$\begin{aligned} \vec{v}_P &= \vec{v}_P' + \vec{v}_{P_c} \\ \vec{a}_P &= \vec{a}_P' + \vec{a}_{P_c} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_P' \end{aligned}$$

Où on a fait les notations suivantes : $\vec{v}_P = \left(\frac{d\vec{OP}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$, $\vec{v}_P' = \left(\frac{d\vec{O'P}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'}$, $\vec{a}_P = \left(\frac{d\vec{v}_P}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$, $\vec{a}_P' = \left(\frac{d\vec{v}_P'}{dt} \right)_{\mathcal{R}'}$ et $\vec{\omega} = \omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$

Et on définit le point P_c comme le point de \mathcal{R}' coïncidant avec le point P à l'instant t .

Pour démontrer ce théorème, on fait le calcul en introduisant une origine et on applique le théorème ci-dessus. On obtient une identité qu'on sait être vraie pour P_c , ce qui permet de simplifier l'expression obtenue. *Remarque :* Les termes supplémentaires qui apparaissent dans ces lois de composition portent des noms : \vec{v}_{P_c} et \vec{a}_{P_c} sont qualifiés de vitesse et accélération d'entraînement alors que le terme : $2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_P'$ se nomme accélération de Coriolis.

5.1.3 Classification des mouvements de référentiels

Etant donnés deux référentiels, le mouvement de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} peut être classé selon le nombre de points communs à ces référentiels :

$|\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'| = 0$ et $\vec{\omega} \neq \vec{0}$: Mouvement le plus général.

$|\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'| = 0$ et $\vec{\omega} = \vec{0}$: Mouvement de translation.

$|\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'| = 1$: Mouvement de rotation par rapport à un point fixe.

$|\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'| = 2$: Mouvement de rotation par rapport à un axe fixe.

$|\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'| = 3$: Les deux référentiels sont confondus.

Translation.

Il découle immédiatement de la définition que tous les points de \mathcal{R}' ont même vitesse dans \mathcal{R} . En effet il suffit d'appliquer le second corollaire ci dessus.

Rotation autour d'un axe fixe.

On note O et A deux points communs à \mathcal{R}' et à \mathcal{R} . En appliquant le second corollaire on obtient immédiatement que $\vec{\omega} \wedge \vec{OA} = \vec{0}$. C'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $\vec{\omega} = k\vec{OA}$. Si on note (O, \vec{u}_z) cet axe (OA) et (r, θ, z) les coordonnées cylindriques dans \mathcal{R} d'un point quelconque P de \mathcal{R}' :

$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{OP} = r\omega\vec{u}_\theta$. Et comme de plus $\vec{v}_P = r\dot{\theta}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$. D'où les relations :

$$\boxed{r = cste; \quad \dot{\theta} = \omega; \quad z = cste}$$

Cela traduit que \mathcal{R}' est en rotation autour de (Oz) .

Remarque : On retiendra que θ désigne un angle entre une direction $(0x)$ fixe dans \mathcal{R} et une direction (Op) fixe dans \mathcal{R}' dont la valeur algébrique est définie en conformité avec le sens de (Oz) . (Cette remarque n'en a pas l'air comme ça mais elle est très importante!).

Rotation autour d'un point fixe.

On note O le seul point fixe commun aux deux référentiels. La même méthode fournit la relation :

$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{OP}}$$

■ Exercice 19 ■

Calculer le vecteur rotation du référentiel $\mathcal{R}'(0, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ et retrouver à l'aide de la loi de transformation des vitesses l'expression de la vitesse d'un point en coordonnées sphériques. On pourra introduire des référentiels intermédiaires en rotation autour d'axe fixes.

Référentiels confondus.

Dans le cas où \mathcal{R} et \mathcal{R}' ont trois points communs(ou plus), les référentiels sont égaux.

5.1.4 Référentiel du centre de masse.

Etant donné un système matériel et un référentiel d'observation \mathcal{R} , on appelle référentiel du centre de masse et note \mathcal{R}^* le référentiel en translation à la vitesse \vec{v}_G du centre de masse du système matériel.

Avec ce référentiel, les lois de composition s'écrivent :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v}_P &= \vec{v}_P^* + \vec{v}_G \\ \vec{a}_P &= \vec{a}_P^* + \vec{a}_G \end{aligned}}$$

5.2 Théorèmes généraux de la mécanique

5.2.1 Notion de torseur.

Définition.

Un champ vectoriel est une application de \mathbb{R}^3 dans lui même. On s'intéresse ici à des champs vectoriels affines. C'est-à-dire que si on note \vec{M}_A la valeur du champ au point A , il existe un application linéaire u ou encore une matrice \mathcal{M} telle que : $\vec{M}_B - \vec{M}_A = \mathcal{M}\vec{AB}$. On qualifie le champ vectoriel d'antisymétrique lorsque la matrice \mathcal{M} est antisymétrique. On sait alors qu'il existe un vecteur \vec{V} appelé "vecteur caractéristique du champ" tel que :

$$\boxed{\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{V} \wedge \vec{AB}}$$

On définit alors le torseur associé au champ vectoriel comme le couple (\vec{M}_A, \vec{V}) qu'on note :

$$\boxed{\mathcal{T} = \begin{vmatrix} \vec{M}_A \\ \vec{V} \end{vmatrix}}$$

Le moment est entièrement déterminé par son valeur en un point A . C'est pourquoi on ne distingue pas deux torseurs dont la seule différence est le point où est pris le moment. Pour les définir intrinsèquement on pourrait passer à des classes d'équivalence mais ça n'a pas d'intérêt pratique. On ne s'attache pas non plus à l'ordre entre moment et vecteur caractéristique, du moment qu'on sait de quoi on parle. Ainsi parfois le moment sera en bas et d'autres fois en haut.

"Algèbre" torsorielle.

- Egalité de deux torseurs :

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}' \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \vec{V} = \vec{V}' \\ \exists A \mid \vec{M}_A = \vec{M}'_A \end{vmatrix}$$

- Somme de deux torseurs :

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \\ \vec{M}_A = \vec{M}_{1A} + \vec{M}_{2A} \end{vmatrix}$$

- Produit par un scalaire :

$$\mathcal{T} = \lambda \mathcal{T}' \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \vec{V} = \lambda \vec{V}' \\ \vec{M}_A = \lambda \vec{M}'_A \end{vmatrix}$$

- Produit de deux torseurs :

C'est là que ça ne marche pas pour avoir une vraie algèbre en effet ce produit ne définit pas une loi interne :

$$\mathcal{T}\mathcal{T}' = \vec{V} \cdot \vec{M}'_A + \vec{V}' \cdot \vec{M}_A$$

Et cette définition ne dépend pas du point A choisi.

- Projection d'un torseur sur un axe :

Etant donné un axe (O, \vec{u}) et un torseur $\mathcal{T} = \begin{vmatrix} \vec{M}_O \\ \vec{V} \end{vmatrix}$ on appelle projection du torseur sur l'axe la quantité :

$$M_\Delta = \vec{u} \cdot \vec{M}_O$$

Et ça ne dépend pas du point O choisi sur l'axe.

Torseur associé à une collection de pointeurs.• Définition :

Etant donné une collection de pointeurs (A_i, \vec{V}_i) , le champ vectoriel $\vec{M}_A = \sum_i A\vec{A}_i \wedge \vec{V}_i$ est antisymétrique. Son vecteur caractéristique est le vecteur $\vec{V} = \sum_i V_i$.

On peut alors définir le torseur associé à la collection de pointeurs :

$$\mathcal{T} = \left| \begin{array}{ll} \sum_i \vec{V}_i & \text{Résultante} \\ \sum_i A\vec{A}_i \wedge \vec{V}_i & \text{moment au point A} \end{array} \right|$$

• Equivalence torsorielle de deux collections de pointeurs :

On dit que deux collections de pointeurs sont torsoriellement équivalents lorsque leurs torseurs associés sont égaux.

Par exemple une collection de pointeurs parallèles $(A_i, \vec{V}_i = V_i \vec{u})$ est torsoriellement équivalente à un pointeur unique $(B, \sum_i \vec{V}_i)$, où B désigne le barycentre des points A_i affectés des coefficients V_i .

Il en est ainsi des forces de pesanteur :

Les forces de pesanteur qui s'exercent sur un système de masse totale M sont torsoriellement équivalentes à une force unique $M\vec{g}$ qui s'exerce au centre de masse G du système.

(Encore une remarque qui n'en a pas l'air mais qui est très importante!).

5.2.2 Torseur cinétique.**Définition.**

Etant donné un système matériel et un référentiel d'observation, le torseur cinétique de ce système dans \mathcal{R} est celui associé à la collection de pointeurs (A_i, \vec{p}_i) où \vec{p}_i désigne la quantité de mouvement du point matériel A_i . On note ce torseur :

$$\mathcal{C} = \left| \begin{array}{ll} \vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i & \text{Résultante cinétique} \\ \vec{L}_A = \sum_i A\vec{A}_i \wedge \vec{p}_i & \text{Moment cinétique au point A} \end{array} \right|$$

Le moment cinétique est un champ vectoriel antisymétrique, d'où la relation :

$$\boxed{\vec{L}_B = \vec{L}_A + \vec{P} \wedge \vec{AB}}$$

La projection du torseur cinétique sur un axe est appelée moment cinétique par rapport à cet axe.

Autre expression de la résultante cinétique.

Par définition : $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i$. En supposant le système fermé de masse stationnaire et en appliquant la définition du centre de masse on a la relation :

$$\boxed{\vec{P} = M \vec{v}_G}$$

En particulier dans le référentiel du centre de masse, vu que $\vec{v}_G^* = \vec{0}$, on a :

$$\boxed{\vec{P}^* = \vec{0}}$$

Remarque : De ce fait le moment cinétique d'un système exprimé dans son référentiel du centre de masse a même valeur en tout point. (encore une remarque importante).

Théorème de Kœnig relatif au moment cinétique.

$$\vec{L}_G = \vec{L}_G^*$$

Extensivité du tenseur cinétique.

Le tenseur cinétique est une grandeur extensive. En effet on peut définir une densité volumique de résultante cinétique $(\rho \vec{v})$ et une densité volumique de moment cinétique $(\rho \vec{r} \wedge \vec{v})$. (encore un truc important...)

5.2.3 Tenseur dynamique.

Définition.

Le tenseur dynamique d'un système matériel dans un référentiel est celui associé à la collection de pointeurs $(A_i, \frac{d\vec{p}_i}{dt})$ où $\frac{d\vec{p}_i}{dt}$ désigne la quantité d'accélération du point A_i dans \mathcal{R} :

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{ll} \vec{P} = \sum_i m_i \vec{a}_i & \text{Résultante dynamique} \\ \vec{L}_A = \sum_i A \vec{A}_i \wedge \frac{d\vec{p}_i}{dt} & \text{Moment dynamique au point A} \end{array} \right.$$

Relation entre \mathcal{C} et \mathcal{D} .

En général, on a la relation suivante :

$$\text{Moment dynamique au point } A = \frac{d\vec{L}_A}{dt} + M \vec{v}_A \wedge \vec{v}_G$$

Ce qui est bien dommage, du coup on se limite à deux cas particuliers : A est un point commun aux deux référentiels ou $A = G$. Pour ces deux points on a la relation bien plus pratique :

$$\mathcal{D} = \frac{d\mathcal{C}}{dt}$$

5.2.4 Tenseur force.

Définition.

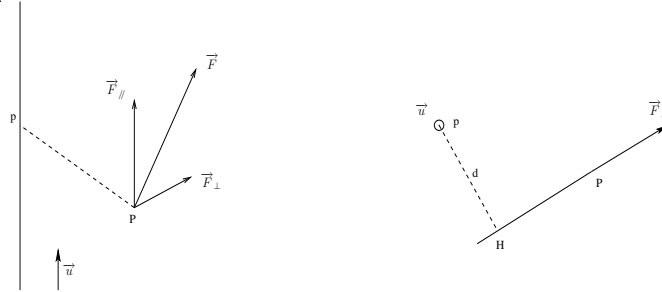
Le tenseur force d'un système matériel est celui associé à la collection de pointeurs (A_i, \vec{f}_i) , où \vec{f}_i désigne une force d'un type donné subie par le point matériel A_i .

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{array}{ll} \vec{F} = \sum_i \vec{f}_i & \text{Résultante} \\ \vec{M}_A = \sum_i A \vec{A}_i \wedge \vec{f}_i & \text{Moment au point A} \end{array} \right.$$

Le moment des forces est un champ vectoriel antisymétrique :

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{F} \wedge A \vec{B}$$

Remarque : Le moment par rapport à un axe Δ d'une force \vec{F} appliquée au point P se calcule facilement :



$$M_{\Delta} = \vec{u} \cdot \vec{M}_P = \vec{u} \cdot (p\vec{P} \wedge \vec{F}) = \vec{u} \cdot (p\vec{H} \wedge \vec{F}_{\perp}). \text{ On en déduit :}$$

$$\boxed{M_{\Delta} = \pm dF_{\perp}}$$

on choisit + ou - selon que la force a tendance à faire tourner le bras de levier dans le sens positif ou négatif.

Cas particulier où $F = 0$.

Un ensemble de forces dont la résultante est nulle est appelée un “couple”. Son moment a même valeur en tout point.

- Exemple

Les forces électriques subies par un dipôle de moment \vec{p} plongé dans un champ électrostatique uniforme constitue un couple de moment $\vec{p} \wedge \vec{E}$.

Cas particulier où $M_A = 0$.

Un ensemble de forces dont le moment en un point A est nul est torsoriellement équivalent à une force unique appliquée en A et égale à la résultante de ces forces.

5.2.5 Principe fondamental et théorèmes généraux.

Principe fondamental.

- Le torseur dynamique d'un système fermé quelconque dont le mouvement est observé par rapport à un référentiel quelconque, est la somme du torseur des forces extérieures et du torseur des forces d'inertie :

$$\mathcal{D} = \mathcal{F}_{ext} + \mathcal{F}_{inert}$$

- Il existe des référentiels dits galiléens, dans lesquels les forces d'inertie sont nulles.

- Commentaires

On notera que le système est fermé, donc de masse stationnaire. On notera ensuite que les forces intérieures n'interviennent pas alors qu'elles interviendront dans les théorèmes énergétiques.

Enfin, l'utilisation de ce principe nécessite des définitions précises du système, du référentiel...

Théorèmes généraux.

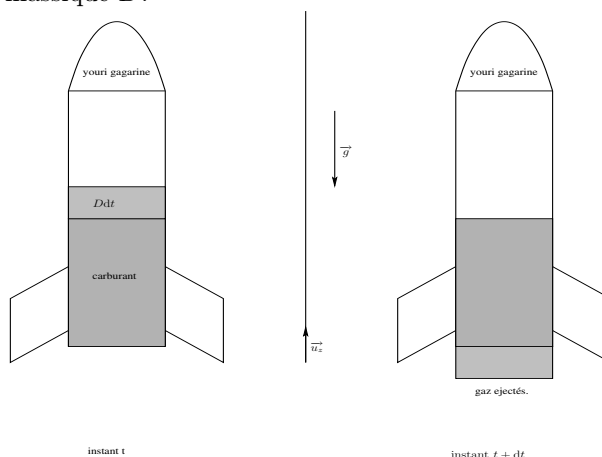
- Théorème de la résultante cinétique :

L'égalité torsorielle implique l'égalité des résultantes.

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{inert}}$$

■ Exercice 20 ■

Calculer la force de poussée d'une fusée connaissant la vitesse d'éjection des gaz et leur débit massique D .



On choisit pour système l'ensemble carcasse+équipement+carburant contenu dans le réservoir à l'instant t + youri gagarine. On note $M(t)$ la masse de ce système à l'instant t , $D(t)$ le débit massique et $u(t) > 0$ la vitesse des gaz à la sortie par rapport au référentiel de la carcasse. Appliquer alors le théorème de la résultante cinétique au système dans le référentiel terrestre supposé galiléen. En notant $v(t)$ la vitesse de la carcasse par rapport au sol, exprimer la résultante cinétique en fonction des forces extérieures et d'un terme complémentaire Du .

• Théorème du moment cinétique :

La même égalité torsielle implique aussi l'égalité des moments en un point quelconque. En pratique on choisit un point O du référentiel d'observation ou le centre de masse G . Par exemple pour le point O :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = M_{O,ext} + M_{O,inert}$$

Et de même pour le centre de masse. On peut projeter cette relation sur un axe fixe passant par le point O :

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = M_{\Delta,ext} + M_{\Delta,inert}$$

Et de même pour un axe mobile mais de direction stationnaire passant par G .

Remarque : On appelle "point matériel" tout système dont l'étude mécanique peut être assurée par le seul théorème de la résultante cinétique.

• Théorème d'interaction :

Par principe les forces intérieures d'un système quelconque sont invariantes par changement de référentiel. Pour démontrer une de leurs propriétés on peut donc choisir un référentiel galiléen. On commence par effectuer une partition du système $\mathcal{S} = \bigcup \mathcal{S}_i$. Le tenseur dynamique étant une grandeur extensive on a :

$$\mathcal{D} = \sum_{i \in I} \mathcal{D}_i = \sum_{i \in I} \mathcal{F}_{ext,i} + \sum_{\substack{(i,j) \in I^2 \\ i \neq j}} \mathcal{F}_{j/i}. \text{ Et comme } \mathcal{D} = \mathcal{F}_{ext} \text{ on fait}$$

apparaître que $\sum_{\substack{(i,j) \in I^2 \\ i \neq j}} \mathcal{F}_{j/i} = 0$ d'où le théorème d'interaction :

Le torseur des forces intérieures d'un système matériel est nul

■ Exercice 21 ■

Montrer que l'étude mécanique (cinématique, cinétique et dynamique) d'un système isolé de deux point matériels A_1 et A_2 de masses m_1 et m_2 peut être ramenée à celle de deux points matériels fictifs $G(M = m_1 + m_2)$ et $A(\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2})$ tel que G soit le centre de masse du système et $\vec{OA} = A_1 A_2$. (On se place dans un référentiel galiléen).

Torseur des forces d'inertie.

L'utilisation du principe fondamental de la dynamique n'est possible que si on connaît le torseur des forces d'inertie.

• Détermination dans le cas général :

On introduit un référentiel galiléen intermédiaire (par principe il en existe) dans lequel le PFD s'écrit : $\mathcal{F}_{ext} = \mathcal{D}^{(g)}$. En effet les forces extérieures ne dépendent pas du référentiel. On a alors : $\mathcal{F}_{inert} = \mathcal{D} - \mathcal{D}^{(g)}$ ce qui montre que \mathcal{F}_{inert} est le torseur associé à la collection de pointeurs $(A_i, m_i(\vec{a}_i - \vec{a}_i^{(g)}))$ et la loi de composition des accélérations permet ce calcul. En conclusion :

$$\mathcal{F}_{inert} = \left| \begin{array}{ll} \sum_i m_i(a_{i,ent} + a_{i,cor}) & \text{Résultante} \\ \sum_i m_i A \vec{A}_i \wedge (a_{i,ent} + a_{i,cor}) & \text{Moment au point A} \end{array} \right|$$

• Cas particulier de \mathcal{R} en translation $/\mathcal{R}^{(g)}$:

Dans ce cas tout se simplifie puisque $a_{i,ent} = \vec{a}$ et $a_{i,cor} = \vec{0}$. En prenant le moment au centre de masse on trouve :

$$\mathcal{F}_{inert} \left| \begin{array}{l} -M\vec{a} \\ \vec{0} \end{array} \right|$$

5.2.6 Energie mécanique.

Puissance d'un ensemble de forces.

• Définitions :

Etant donné un système matériel soumis à une distribution de forces (A_i, \vec{f}_i) , on appelle puissance de ces forces dans un référentiel \mathcal{R} la quantité :

$$P = \sum_i \vec{f}_i \cdot \vec{v}_i$$

où \vec{v}_i désigne la vitesse dans \mathcal{R} du point A_i . On introduit également le travail élémentaire des ces forces :

$$\delta\mathcal{T} = P dt = \sum_i \vec{f}_i \cdot \vec{v}_i dt$$

• Puissances des forces intérieures :

La puissance des forces intérieures est invariante par changement de référentiel.

En effet, si on considère deux référentiels, $P_{int} - P'_{int}$ se calcule grâce à la loi de transformation des vitesses en introduisant A_{i_c} le point de \mathcal{R}' qui coïncide avec A_i à l'instant t : $P_{int} - P'_{int} = - \sum_i \vec{v}_{i_c} \cdot \vec{f}_i$ et comme A_{i_c} et O' sont deux points du même référentiel : $\vec{v}_{i_c} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge O\vec{A}_{i_c}$. On fait alors apparaître résultante et moment des forces intérieures qui sont nuls d'après le théorème d'interaction.

- Puissance des forces de Coriolis :

La puissance des forces de Coriolis est nulle.

Energie Cinétique.

- Définition :

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

L'énergie cinétique ne dépend que du mouvement du système matériel.

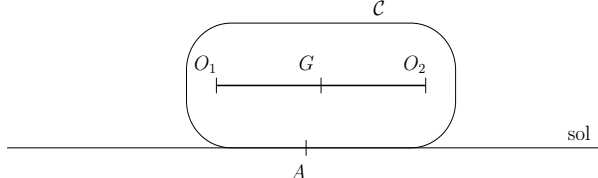
- Théorème de Kœnig :

$$E_c = \frac{1}{2} M v_G^2 + E_c^*$$

Où E_c^* désigne l'énergie cinétique du système dans le référentiel du centre de masse.

Exercice 22

Déterminer l'énergie cinétique d'un chenille de dameuse qui roule sans glisser en fonction de la vitesse \vec{v} de son centre de masse G .



- Théorème de l'énergie cinétique :

$$dE_c = E_c(t + dt) - E_c(t) = \delta\mathcal{T}$$

Où $\delta\mathcal{T}$ désigne le travail élémentaire de toutes les forces qui agissent sur le système matériel.

En effet $dE_c = d\left(\sum_i \frac{m_i}{2} v_i^2\right) = \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \vec{a}_i dt$ Or le théorème de la résultante cinétique appliqué au point A_i nous assure que $m_i \vec{a}_i = \vec{f}_i$. Où \vec{f}_i désigne la résultante de toutes les forces qui s'exercent sur le point A_i . On déduit le théorème.

Energie potentielle.

- Définition :

On dit qu'un ensemble de forces relatives à un système matériel dérive d'une énergie potentielle lorsque le travail de ces forces peut être mis sous la forme :

$$\delta\mathcal{T} = -dE_p$$

Où E_p est une quantité qui ne dépend que de la position du système matériel.

■ Exercice 23 ■

Définir et calculer l'énergie potentielle d'un système de deux points matériels élastiquement liés.

- Cas des forces de pesanteur :

Les forces de pesanteur subies par un système matériel dérivent d'une énergie potentielle :

$$E_p = -M\vec{g} \cdot \vec{OG} = Mgz_G$$

en notant z_G l'altitude du centre de masse.

- Cas des forces d'inertie :

On suppose le référentiel d'observation en rotation stationnaire autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen. Les forces d'inertie dérivent alors d'une énergie potentielle :

$$E_p = -\frac{1}{2}I\omega^2$$

Où $I = \sum_i m_i r_i^2$ désigne le moment d'inertie du système matériel par rapport à l'axe.

- Cas des forces de frottements :

Les forces de frottements de glissement entre deux solides ne dérivent pas d'une énergie potentielle comme le montrent les lois de Coulomb (III).

Energie potentielle d'un système matériel.

On définit l'énergie potentielle d'un système matériel comme la somme de toutes les énergies potentielles dont dérivent un ensemble de forces qui s'exercent sur le système.

Energie mécanique.

- Définition :

On définit l'énergie mécanique d'un système matériel comme la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle.

- Théorème de l'énergie mécanique :

C'est un corollaire du théorème de l'énergie cinétique :

$$dE_m = \delta\mathcal{T}'$$

Où $\delta\mathcal{T}'$ désigne le travail de toutes les forces s'exerçant sur le système matériel qui ne dérivent pas d'une énergie potentielle.

■ Exercice 24 ■

Une corde parfaitement souple glisse sans frottement sur une table horizontale car son extrémité pend sur le rebord. Déterminer son mouvement en supposant qu'elle est lâchée sans vitesse initiale. L'absence de frottement et l'unique degré de liberté conduisent à utiliser un théorème énergétique.

5.3 Mécanique du solide.

5.3.1 Etude cinématique.

Mouvement d'un solide par rapport à un référentiel quelconque.

En mécanique, un solide est système matériel constitué de points matériels immobiles les uns par rapport aux autres. Il définit donc un référentiel, appelé référentiel du solide.

L'étude cinématique d'un solide se résume donc à celles de son référentiel associé qu'on notera dorénavant : (S) . Le calcul des vitesses se fait grâce à la relation torsielle :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AB}$$

On note que A n'est pas forcément un point matériel.

Mouvement relatif de deux solides en contact ponctuel.

- Définition :

Etant donnés deux solides en contact ponctuel on note : I le point de contact, (I_1) le point de S_1 coïncidant avec I à l'instant t et I_2 le même dans S_2 . On note Π le plan tangent aux deux solides, qui existe toujours en pratique. On définit alors la vitesse de glissement de (1) par rapport à (2) comme la vitesse de I_1 par rapport à S_2 . On a le théorème suivant :

$$v_{I_1/S_2} = \vec{v}_{I_1} - \vec{v}_{I_2}$$

On définit des vitesses de pivotement et de roulement comme les composantes parallèles et orthogonales du vecteur rotation de (1) par rapport à (2).

- Condition cinématique de non-glissement :

On dit qu'il y a non-glissement lorsque la vitesse de glissement est nulle soit :

$$\vec{v}_{I_1} = \vec{v}_{I_2}$$

Et cette condition peut être généralisée dans des cas où le contact n'est plus ponctuel. On montre ensuite que : $v_{12} = -v_{21}$ et que s'il n'y a pas glissement la distance parcourue par I sur chaque solide est la même.

Exemples.

- Disque roulant sur une règle :

Un disque de rayon R roule sur une règle horizontale rectiligne. Déterminer la condition cinématique de non glissement.

- Disque roulant dans un cylindre en rotation :

Un disque de rayon a roule à l'intérieur d'un cylindre de rayon b . Le mouvement se fait dans le plan (O, x, y) . Déterminer les vecteurs rotation de chaque solide par rapport au référentiel d'observation, puis les vitesses \vec{v}_{I_1} et \vec{v}_{I_2} ainsi que \vec{v}_I (à définir). En déduire la vitesse de glissement, de roulement, de pivotement.

- Disque roulant sans glisser sur une table :

Un disque de rayon b roule sans glisser sur une table horizontale immobile dans le référentiel d'observation repérée par les vecteurs \vec{u}_x, \vec{u}_y . Il est retenu par un arbre horizontal qui lie son centre C à un point C' de l'axe (O, \vec{u}_z) . On note I le point de contact entre le disque et la table et θ l'angle (\vec{u}_x, \vec{OI}) tel que $\dot{\theta} = cste$. Déterminer l'accélération d'un point du disque qui coïncide avec J diamétralement opposé au point I .

5.3.2 Éléments cinétiques.

Centre de masse.

- Définition :

Le centre de masse d'un système matériel est le barycentre des points (A_i, m_i)

- Propriétés :

Le centre de masse est situé sur tout élément de symétrie (plan, droite, point).

La quantité $MO\vec{G}$ est une grandeur extensive (très utile!!).

- Exemples :

Déterminer les centres de masses des solides suivants :

demi-boule homogène, cône homogène, cône surmonté d'une demi-boule de même rayon.

- Théorème de Guldin :

On se donne une courbe homogène de longueur L et un axe Δ ne coupant pas cette courbe. La rotation de 2π de la courbe autour de l'axe engendre une surface de surface S telle que si r_G désigne la distance du centre de masse de la courbe à l'axe :

$$2\pi L r_G = S$$

On en déduit le centre de masse d'un demi-cercle homogène en considérant Δ le diamètre du demi-cercle car on connaît la surface S . De même en appliquant le théorème dans l'autre sens on en déduit la surface d'un tore.

- Théorème de Guldin n°2 :

Cette fois on considère une plaque homogène de surface S et un axe Δ . Si le volume engendré par rotation de la plaque autour de l'axe est V on a la relation :

$$2\pi S r_G = V$$

On en déduit le centre de masse d'un demi-disque ou le volume d'un tore.

Moment d'inertie.

- Définition :

On définit le moment d'inertie d'un solide par rapport à un ensemble de points comme la quantité :

$$I_A = \sum_i m_i r_i^2$$

Où r_i désigne la distance du point A_i à l'ensemble A . On prend toujours pour A un point, une droite ou un plan.

- Relations entre moments d'inertie :

Dans un repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ la relation de pythagore fournit les relations :

$$I_O = I_{xOy} + I_{yOz} + I_{zOx} = \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy} + I_{zz})$$

Le moment d'inertie est une grandeur extensive (très important!).

- Théorème d'Huygens :

Etant donné un système matériel de masse M et une droite Δ quelconque :

$$I_\Delta = I_{\Delta_G} + Md^2$$

Où Δ_G est la droite parallèle à Δ qui passe par G le centre de masse du système matériel. d désigne la distance de G à Δ .

- Exemples :

Calculer le moment d'inertie par rapport à un diamètre d'un boule homogène, d'un disque homogène, d'une tige homogène par rapport à son centre, par rapport à une extrémité, d'un cône homogène plein par rapport à son axe, d'un cône surmonté d'une demi-boule de même rayon par rapport à l'axe du cône...

Moment cinétique d'un solide.

- Moment cinétique en un point commun à \mathcal{S} et \mathcal{R} :

Le moment cinétique par rapport à ce point O vaut :

$$\vec{L}_O = \sum_i m_i O\vec{A}_i \wedge \vec{v}_i = \sum_i m_i O\vec{A}_i \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{v}_i) = \sum_i m_i (OA_i^2 \vec{\omega} - (O\vec{A}_i \cdot \vec{\omega}) O\vec{A}_i)$$

Et ensuite un calcul de composantes sur une base orthonormée directe fait apparaître des moments d'inertie ainsi que des termes nouveaux baptisés "produits d'inertie" :

$I_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2)$, $I_{xy} = - \sum_i m_i x_i y_i$. On obtient au final une relation matricielle :

$$\boxed{\vec{L}_O = I \vec{\omega}}$$

Où I est la matrice d'inertie remplie des moments d'inertie et des produits d'inertie. Cette matrice d'inertie est évidemment symétrique.

- Axes principaux :

Un axe est principal lorsque c'est une vecteur propre de la matrice d'inertie. On voit que tout axe de symétrie est principal et que tout axe orthogonal à un plan de symétrie est principal lors du calcul du moment cinétique au point d'intersection de l'axe et du plan.

- Exemples :

Matrice d'inertie d'une boule homogène, d'un cylindre homogène.

- Moment cinétique d'un solide en son centre de masse :

Etant donné que le centre de masse est un point commun entre le référentiel du solide et le référentiel du centre de masse, on peut appliquer les relations précédentes en faisant les substitutions qui s'imposent :

$O \rightarrow G, \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^*$. En effet le théorème de Koenig permet d'identifier les vecteurs \vec{L}_G et \vec{L}_G^* et les vecteurs $\vec{\omega}$ et $\vec{\omega}^*$ sont égaux puisque le référentiel du centre de masse est en translation.

- Moment d'inertie d'un solide en rotation autour d'un axe fixe :

Dans tous les cas, on a la relation suivante :

$$\boxed{L_\Delta = I_\Delta \omega}$$

et si de plus Δ est un axe principal alors on égalité des vecteurs.

Energie cinétique d'un solide.

- Expression générale :

Un petit calcul montre l'égalité :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} \mathcal{C} \cdot \mathcal{V}}$$

Où \mathcal{C} et \mathcal{V} désignent les torseurs cinétiques et torseurs vitesses du solide. Dans le référentiel du centre de masse on retrouve vite le théorème de Koenig.

- Expression dans les cas d'une rotation autour d'un axe fixe :

Si on note : $\Delta = (O, \vec{u}_z)$ l'axe de rotation, on trouve la relation :

$$E_c = \frac{1}{2} I_{\Delta} \omega^2$$

• Exemples :

-Calculer le moment cinétique d'une barre homogène glissant le long de deux parois orthogonales. Calculer ensuite son énergie cinétique par le théorème précédent puis par le théorème de Kœnig.

-Une boule homogène roule sans glisser dans une cornière fixe assimilée à un dièdre de demi-angle au sommet α . Calculer son énergie cinétique en fonction de α , M et de v_G . Que peut on en déduire quant à la définition d'un point matériel ?

-Une plaque rectangulaire homogène est en rotation autour d'une de ses diagonales. Calculer son moment cinétique au centre de la plaque, en déduire son E_c .

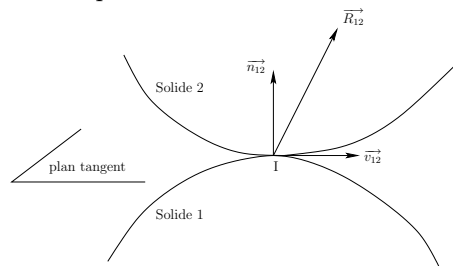
5.3.3 Etude dynamique.

Interaction de contact entre deux solides.

• Notations :

Le contact étant ponctuel on note :

- \vec{v}_{12} la vitesse de glissement de 1/2 qui est parallèle au plan tangent ou nulle.
- \vec{R}_{12} la force exercée par 1 sur 2.



• Lois de Coulomb :

Les lois énoncées ici sont relatives au mouvement de glissement mais il existe des lois analogues pour les mouvements de roulement et de pivotement. Elles fournissent des informations sur \vec{R}_{12} . Elles sont dites empiriques au sens où elles ne reposent pas sur une démonstration mais sur l'expérience qui montre qu'elles sont valables avec une excellente précision. Elles s'énoncent en deux parties, l'une porte sur $\vec{R}_{12,\parallel}$ l'autre sur $\vec{R}_{12,\perp}$:

$\vec{R}_{12,\perp}$ est colinéaire et de même sens que \vec{n}_{12} .
Le contact entre les deux solides a lieu ssi $\vec{R}_{12,\perp} \neq 0$

Glissement	$\vec{R}_{12,\parallel}$ est colinéaire et de même sens que $\vec{v}_{12,\parallel}$ Sa norme vaut : $R_{12,\parallel} = f R_{12,\perp}$
Non-glissement	$\vec{R}_{12,\parallel}$ est de direction et sens inconnus. Sa norme vérifie : $R_{12,\parallel} < f R_{12,\perp}$

f est appelé coefficient de frottement statique ou dynamique selon qu'il y a glissement ou non. Dans tous les cas (glissement ou non) on dispose d'un nombre

suffisant d'informations pour l'étude mécanique du système composé des deux solides. Les cas limites f tendant vers zéro ou vers l'infini sont approchés avec certaines surfaces de contact mais en pratique $f \sim 1$ et le non-glissement n'a lieu que si f est supérieur à une certaine valeur qui dépend des conditions.

Exemples.

- Une brique poreuse est déposée sans vitesse initiale sur un plan incliné. Déterminer les conditions de non-basculement et de non-glissement. Justifier l'hypothèse de porosité de la brique.

- Une boule de billard homogène, de rayon a glisse sur une table horizontale. On note $\vec{v}_{G_0}, \vec{\omega}_0$ la vitesse du centre de masse et le vecteur rotation initiaux de la boule. Déterminer le mouvement du centre de masse (sans tenir compte des frottements de pivotement et de roulement).

- Un cylindre homogène, à base circulaire, de rayon b , roule sur un plateau horizontal qui est en mouvement de translation horizontale selon la loi : $\vec{AO} = X_0 \sin(\omega_0 t) \vec{u}_x$. Où A désigne un point du référentiel d'observation et O un point du plateau. Déterminer la valeur minimale du coefficient de frottement pour que le roulement ait lieu sans glissement.

5.3.4 Etude énergétique.

Puissance des forces subies par un solide.

Un petit calcul du même acabit que celui de l'énergie cinétique montre que la puissance dans le référentiel d'observation d'un ensemble quelconque de forces subies par un solide a pour puissance :

$$P = \mathcal{F} \cdot \mathcal{V}$$

En notant \mathcal{F}, \mathcal{V} les torseurs forces et vitesses du solide. Dans le cas particulier d'un mouvement de translation ça donne $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ et pour une rotation autour d'un axe fixe : $P = \omega M_{\Delta}$.

Forces intérieures.

La puissance des forces intérieures est nulle.

Puissance des forces de contact ponctuel entre deux solides.

Pour ces forces là tout dépend du système choisi, selon qu'il contient l'un ou les deux solides :

- Le système comprend les deux solides :

Les forces de contact sont intérieures et leur puissance a même valeur dans tout référentiel. Par exemple on peut calculer dans le référentiel d'observation et on trouve :

$$P_{12} = \vec{R}_{12} \cdot \vec{v}_{12} = -\vec{R}_{12//} \cdot \vec{v}_{12}$$

On en déduit que cette puissance est négative s'il y a simultanément glissement et frottement et nulle dans tous les autres cas. En pratique on prendra de préférence ce système là, cependant on peut faire le calcul avec un autre système :

- Le système étudié comprend uniquement un solide (1) :

On trouve $P_1 = \vec{R}_{12} \cdot \vec{v}_{I_1} \neq P_{12}$

Puissance des forces de liaison.

On appelle liaison tout dispositif matériel qui permet de diminuer le nombre de degrés de liberté. Dans la suite on s'intéressera surtout à deux types de liaison : pivot et rotule. La première impose une rotation autour d'un axe, la seconde autour d'un point. Une liaison est dite parfaite lorsque la puissance des forces intérieures de liaison est nulle.

Dans le cas d'une liaison pivot parfaite, cette condition se traduit par l'égalité : $M_{\Delta} = 0$.

Si un solide est soumis à une liaison pivot parfaite,
le moment par rapport à l'axe des forces de liaison est nul.

De même pour la liaison rotule.

Chapitre 6

Ondes

6.1 Ondes dans un milieu non-dispersif

6.1.1 Equation d'onde.

Définition.

On appelle onde toute fonction d'espace et de temps $s(M, t)$ qui vérifie l'équation d'onde :

$$\Delta s = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

dite équation d'onde dans laquelle la constante c homogène à une vitesse est appelée célérité de l'onde dans le milieu.

Une telle définition n'est valable que dans un milieu non-dispersif pour une fonction scalaire. Le cas des ondes vectorielles peut s'y ramener simplement par projection sur une base cartésienne.

Linéarité.

L'équation d'onde est linéaire. On en déduit immédiatement les théorèmes suivants :

- Théorème de superposition.

Etant donné deux ondes s_1, s_2 de même célérité, la fonction $s = \lambda s_1 + \mu s_2$ est également une onde de même célérité.

- Notation complexe :

Etant donné une fonction complexe \underline{s} qui satisfait à l'équation d'onde de célérité c , la fonction $s = \underline{s}$ est une onde de célérité c .

6.1.2 Exemples d'ondes.

Onde électromagnétique dans le vide.

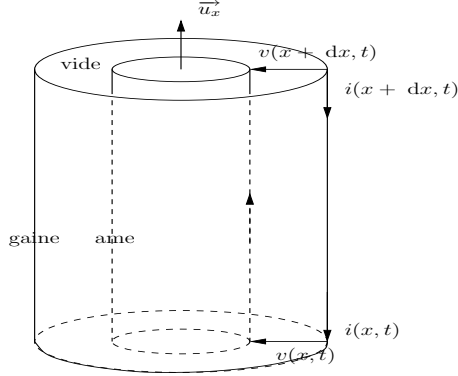
En partant des équations de Maxwell dans le vide (cf : électromagnétisme), on montre facilement que les champs \vec{E} et \vec{B} satisfont à l'équation d'onde :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

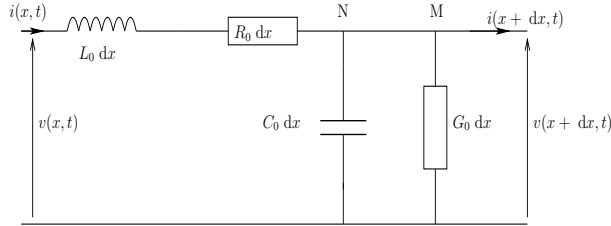
de célérité c telle que $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$.

Onde électromagnétique dans un coaxial.

Un coaxial est constitué de deux parties conductrices parcourues par des intensités opposées. On note $v(x, t)$ la différence de potentiel entre l'âme et la gaine :



On suppose que les conducteurs sont parfaits et que l'espace interconducteurs est vide. on note alors C_0 et L_0 les capacités et inductance linéique du coaxial. On a montré dans le cours d'électromagnétisme que : $C_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}$ et $L_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(\frac{R_2}{R_1})$. D'un point de vue électrocinétique, le coaxial est équivalent au circuit traditionnel avec une bobine et un condensateur.



Où $v(x, t)$ désigne la différence de potentiel entre l'âme et la gaine dans un plan d'abscisse x normal à l'axe du coaxial (dirigé par \vec{u}_x) et $i(x, t)$ l'intensité parcourant l'âme ou la gaine. (dans des sens opposés). A partir de ce schéma équivalent on trouve rapidement les équations vérifiées par v et i : ce sont les mêmes :

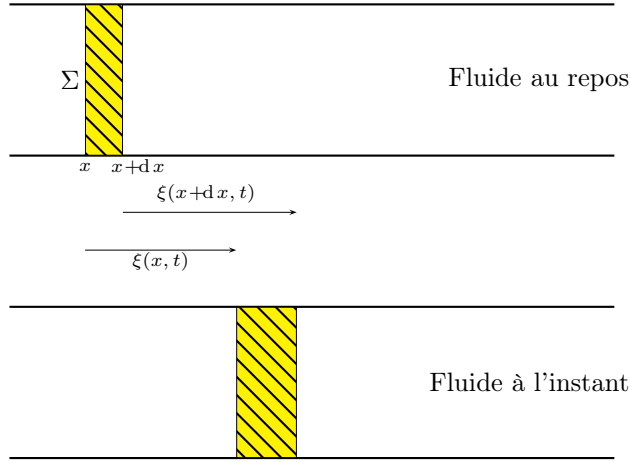
$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = C_0 L_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

C'est une équation d'onde, de célérité $c = \frac{1}{\sqrt{C_0 L_0}}$. En remplaçant les capacités et inductance par leur valeurs, on trouve la célérité de la lumière dans le vide.

Remarquons que l'étude de la ligne bifilaire est formellement analogue. Ces deux systèmes sont des lignes de transmission de l'information.

Ondes sonores dans un tuyau.

On considère un tuyau vide de section Σ uniforme, suffisamment faible pour qu'on puisse dans la suite considérer le système comme unidimensionnel. On néglige tout effet de pesanteur, de sorte que la pression du fluide au repos est une fonction constante P_0 .



On pose alors $P_1(x, t) = P(x, t) - P_0$ la surpression. On rajoute l'hypothèse que ξ et P_1 sont des IP₁. On applique alors le théorème de la résultante cinétique à la trache de fluide située au repos entre x et $x + dx$, en projection sur \vec{u}_x et en notant ρ_0 la masse volumique du fluide au repos. En négligeant la viscosité du fluide dans le tuyau, on trouve l'EDP :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial P_1}{\partial x}$$

En supposant alors l'évolution adiabatique réversible (ce qui se justifie car le terme de source de l'entropie est d'ordre 2), on peut introduire le coefficient de compressibilité isentropique :

$\chi_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dP} \right)_S$ à entropie constante. En effet $\frac{d\delta\tau}{\delta\tau} = -\chi_S dP$. Or $\delta\tau = \Sigma dx$ et $d\delta\tau = \Sigma(dx + \xi(x+dx, t) - \xi(x, t)) - \Sigma dx = \Sigma dx \frac{\partial \xi}{\partial x}$. Donc $\frac{d\delta\tau}{\delta\tau} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$. De plus, $dP = P(x, t) - P_0 = P_1$. On en déduit la deuxième EDP :

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\chi_{S,0} P_1$$

En effet comme P_1 est d'ordre 1 il suffit d'avoir χ_S à l'ordre 0. On en déduit une équation d'onde satisfaite par ξ et P_1 :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \rho_0 \chi_{S,0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}$$

En traduisant la conservation de la masse de l'élément de fluide considéré, on trouve une relation sur la masse volumique du fluide et la pression. Si on note $\rho_1 = \rho - \rho_0$ l'excédent de masse volumique, on a :

$$\rho_1 = \frac{P_1}{c^2}$$

Si on connaît l'équation d'état du fluide, en utilisant la relation de Reech (cf : thermodynamique) : $\chi_S = \frac{\chi_T}{\gamma}$, on peut calculer χ_S et donc la célérité du son dans le fluide. Pour un gaz parfait, étant donné que l'évolution est adiabatique réversible, on peut utiliser les relations de Laplace $PV^\gamma = cste$.

Cette relation permet le calcul de $\chi_{S,0} = \frac{1}{\gamma P_0}$ et donc la célérité du son dans le gaz parfait :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}$$

Et d'un point de vue numérique, on trouve à peu près 340 ms^{-1} .

Onde de vibration transversale dans une corde.

- Corde au repos :

On suppose les forces de champ négligeables devant les forces de tension du fil. Si on exprime alors le TRC à un élément de corde MM' , en notant T la tension au point M et \vec{u} le vecteur unitaire tangent à la corde au point M , $\vec{0} = -T\vec{u} + T'\vec{u}'$. On en déduit que \vec{u} est uniforme et donc que la corde est rectiligne. On notera T_0 la valeur également uniforme de la tension et on choisit un repère d'espace cartésien de sorte que l'axe (Ox) coïncide avec l'axe de la corde au repos.

- Corde en vibration :

On étudie les vibrations transversales telles que le déplacement d'un point M_0 de la corde au repos soit de la forme $\vec{M_0M} = y(x, t)\vec{u}_y$. On suppose les vibrations de faible amplitude de sorte que y et toutes ses dérivées soient des IP1. On pose α l'angle tel que $\tan \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$. On applique alors le TRC à un élément de corde situé entre x et $x + dx$ et on trouve après un petit calcul $\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T \vec{u}}{\partial x}$. Ce qui donne, en projection sur \vec{u}_y et en remarquant que $T\vec{u} \cdot \vec{u}_y = T \sin \alpha = T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$ à l'ordre 1. D'où l'équation d'onde satisfaite par y :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T_0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

6.1.3 Onde plane.

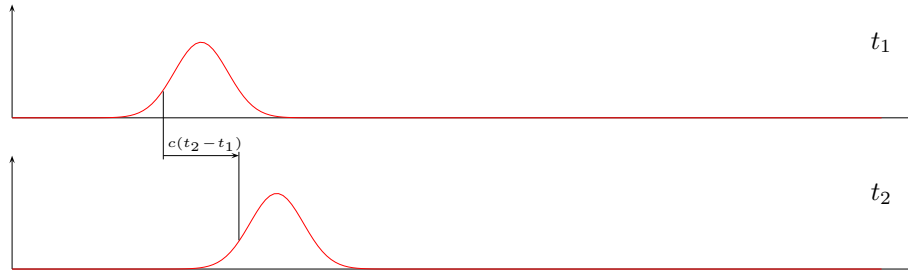
Résolution de l'équation d'onde.

On s'intéresse au cas particulier unidimensionnel. Pour résoudre l'équation $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$ on fait le changement de variables $a = t - x/c, b = t + x/c$ qui conduit après calculs à une nouvelle EDP : $\frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} = 0$ où $S(a, b) = s(x, t)$. Si on suppose que l'on se place sur un domaine convenable (comme c'est toujours le cas en physique), on en déduit que S s'écrit $S(a, b) = f(a) + g(b)$ où f et g sont des fonctions de classe \mathcal{C}^2 . Ce qui fournit la solution générale de l'équation d'onde unidimensionnelle :

$$s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

Interprétation physique.

Cas particulier $s(x, t) = f(t - \frac{x}{c})$: On remarque que $s(x, t_2) = s(x - c(t_2 - t_1), t_1)$. Ce qui permet de tracer de tels graphes :



L'onde plane étudiée est progressive, elle se propage à la célérité c dans le sens des x croissants. L'autre cas particulier fournit une onde progressive qui se propage dans le sens des x décroissants.

Dans le cas général, une onde plane est la superposition de deux ondes progressives, l'une dans le sens des x croissants l'autre dans le sens des x décroissants.

6.1.4 Ondes sphériques.

Résolution de l'équation d'onde.

On suppose $s(r, t)$ de sorte que l'équation d'onde s'écrive en coordonnées sphériques :

$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 r s}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$. On en déduit que la fonction rs est une onde plane et s'écrit comme ci-dessus. On trouve donc :

$$s(r, t) = \frac{1}{r} \left[f\left(r - \frac{t}{c}\right) + g\left(r + \frac{t}{c}\right) \right]$$

Interprétation physique.

Une onde sphérique peut toujours être considérée comme la superposition de deux ondes progressives de même célérité c . *Remarque* : On note la présence du $1/r$ qui, on le verra, traduit la conservation de l'énergie associée à l'onde.

Exercice 25

Étant donnée une distribution de charge de volume fini seule dans l'espace, résoudre l'équation de d'Alembert $\square V = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}$ et en déduire l'équation du potentiel retardé. (cf : électromagnétisme)

6.1.5 Ondes stationnaires.

Définition.

De manière générale, on appelle onde stationnaire toute onde qui en notation réelle est le produit d'une fonction d'espace et d'une fonction périodique du temps.

Ainsi une onde plane qui est la superposition de deux ondes progressives sinusoïdale se propageant en sens inverse, via une transformation trigonométrique élémentaire, est une onde stationnaire.

6.1.6 Onde stationnaire quelconque.

Toute onde satisfait dans un milieu non-dispersif à l'équation des ondes introduite en début de chapitre. Dans le cas d'une onde stationnaire : $s(M, t) = F(M)G(t)$ et G est une fonction périodique. En remplaçant dans l'équation des ondes et en séparant les variables M et t indépendantes, on arrive aux équations : $\frac{c^2}{F} \Delta F = \frac{1}{G} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \text{cte}$. Si la constante est positive cette équation conduit à G non-périodique, ce cas est à rejeter. Si la constante est négative, on la note $-\omega^2$ par souci d'homogénéité et on obtient $G(t) = G_0 \sin(\omega t + \alpha)$ et la fonction F satisfait à l'équation de Helmholtz : $\Delta F + k^2 F = 0$ en posant $k = \omega/c$.

En conclusion une onde stationnaire quelconque dans un milieu non-dispersif s'écrit :

$$s(M, t) = F(M) \sin(\omega t + \alpha)$$

Avec F une fonction d'espace qui vérifie l'équation de Helmholtz :

$$\Delta F + k^2 F = 0$$

Onde stationnaire plane.

- Equation générale :

Dans le cas d'une onde plane stationnaire, l'équation de Helmholtz se simplifie : $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + k^2 F = 0$. on en déduit immédiatement : $F(x) = F_0 \sin(kx + \beta)$. Une onde stationnaire plane s'écrit donc :

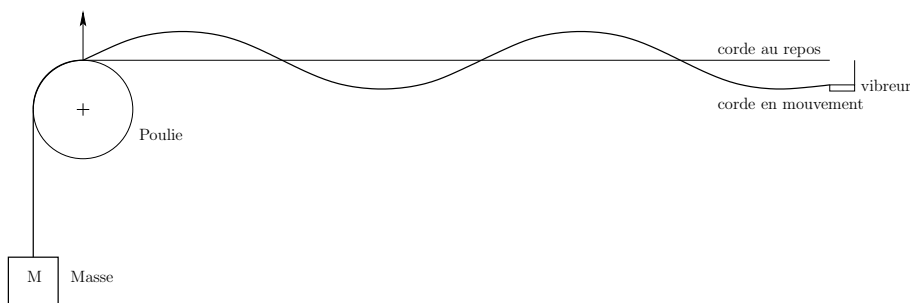
$$s(x, t) = s_0 \sin(kx + \beta) \sin(\omega t + \alpha)$$

La fonction d'espace est donc périodique, de période :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = c \frac{2\pi}{\omega} = cT$$

Remarque : Une onde stationnaire ne se propage pas ! Cependant une onde plane stationnaire peut être considérée comme la superposition de deux ondes planes progressives.

- Exemple de la corde de Melde :



Si M est un point de la corde, on note M_0 le point correspondant lorsque la corde est au repos. On suppose que ces points sont à la verticale l'un de l'autre (vibrations transversales). On note alors $y(x, t)$ la variation d'altitude à l'instant t du point de la corde situé à l'abscisse x . On impose au vibreur une vibration

de la forme $y(l, t) = a \sin(\omega t)$ (en notant l la longueur supposée stationnaire de la corde). On montre que la tension de la corde au repos est uniforme de valeur $T_0 = mg$. D'après l'étude faite au 1.2.4 on sait que le déplacement transversal satisfait à l'équation d'onde de célérité $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} = \sqrt{\frac{mg}{\mu}}$. De plus on a les

conditions aux limites :

$$\begin{cases} y(0, t) = 0 \\ y(l, t) = a \sin(\omega t) \end{cases}$$
 à tout instant. En cherchant des solutions stationnaires on obtient facilement une solution :

$$y(x, t) = \frac{a}{\sin(kl)} \sin(kx) \sin(\omega t)$$

Remarque : L'amplitude des vibrations est censée devenir infinie lorsque $\sin(kl)$ est nul. En fait dans ces cas toute l'étude ne s'applique plus puisque on perd l'hypothèse que α est un IP1, il apparaît des phénomènes irréversibles... En pratique cette amplitude devient grande devant celle du vibreur. La corde prend alors l'aspect de fuseaux avec des noeuds immobiles.

- Exemple de la corde de guitare :

Cette fois la corde est immobile aux deux extrémités. Se référer au problème sur la corde du guitare.

6.1.7 Onde plane progressive monochromatique.

Transformée de Fourier :

On va faire un peu de maths sans rien démontrer car ce qui suit n'est au programme ni en maths ni en physique.

On notera ici \mathfrak{L}^1 le \mathbb{C} -espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} continues par morceaux et intégrables sur \mathbb{R} . Pour une telle fonction on note $\mathfrak{F}f$ la transformée de Fourier de la fonction f définie par :

$$\mathfrak{F}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt$$

\mathfrak{F} est une application linéaire de \mathfrak{L}^1 dans l'ensemble des applications continues bornées. De plus on a quelques propriétés algébriques intéressantes :

- Parité :

Si f est réelle et paire alors $\mathfrak{F}f$ est réelle et paire. Si f est réelle et impaire, $\mathfrak{F}f$ est imaginaire pure et impaire.

- Translatée

$$\mathfrak{F}f(t-a)(x) = e^{-ixa} \mathfrak{F}f(x)$$

- Lemme de Lebesgue version intégrale :

$$\mathfrak{F}f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0 \text{ mais } \mathfrak{F}f \text{ n'est pas forcément } \mathfrak{L}^1.$$

- Dérivation :

Si $tf(t)$ et f sont \mathfrak{L}^1 alors $\mathfrak{F}f$ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et $(\mathfrak{F}f)'(x) = -i\mathfrak{F}(tf(t))(x)$.

- Convolution :

Si f est \mathfrak{L}^1 et g continue par morceaux et bornée alors le produit de convolution de f et g défini par $f * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$ est \mathfrak{L}^1 et sa transformée de Fourier vérifie : $\mathfrak{F}(f * g) = (\mathfrak{F}f)(\mathfrak{F}g)$.

- Réciprocité :

On a pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1$ telle que $\mathfrak{F}f$ soit encore \mathcal{L}^1 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}f(u) e^{ixu} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}(x)$$

Où \tilde{f} désigne la régularisée de f telle qu'elle est définie dans le cours de maths.

Seulement en physique on est malsains donc on retiendra le résultat suivant :

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{i\omega t} dt \right] e^{-i\omega t} d\omega$$

L'étude peut être étendue au cas de fonctions de plusieurs variables, en particulier pour une fonction d'espace et de temps :

$$s(\vec{r}, t) = \int S(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} d^3k d\omega$$

Définition d'une OPPM.

On appelle OPPM une fonction complexe d'espace et de temps de la forme $s_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$. \vec{k} appelé vecteur d'onde et ω la pulsation, sont liés par une relation $\omega(\vec{k})$ appelée relation de dispersion. s_0 est l'amplitude complexe de l'OPPM. $\varphi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$ est la phase de l'OPPM. On qualifie une OPPM de longitudinale lorsque $\vec{s}_0 \wedge \vec{k} = \vec{0}$ et de transversale lorsque $\vec{s}_0 \cdot \vec{k} = 0$.

- Exemple :

On considère une OPPM électromagnétique se propageant dans le vide. En prenant sa divergence montrer que l'onde est transversale. De même on considère une OPPM sonore se déplaçant dans un fluide non-visqueux. En admettant que le rotationnel de cette OPPM est nul (cf : problème sur les ondes sonores), montrer que le champ de vitesse est longitudinal.

Propriétés d'une OPPM dans un milieu quelconque.

* Dans un repère cartésien tel que \vec{u}_x soit parallèle et de même sens que \vec{k} l'OPPM s'écrit : $e^{i(kx - \omega t)}$. La phase a même valeur à un instant donné en tout point d'un plan $x = cste$. L'onde est dite "plane".

* En posant $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$, l'onde est une fonction $f(t - x/v_\varphi)$. C'est pourquoi elle est qualifiée de "progressive" : elle se propage dans le sens des x croissants.

* L'onde ne possède qu'une seule pulsation. C'est pourquoi elle est "monochromatique".

Structure dans un milieu non-dispersif.

Dans un tel milieu l'OPPM satisfait à l'équation d'onde. Un calcul élémentaire montre alors qu'on a la relation de dispersion linéaire suivante :

$$\omega = ck \text{ ou } \lambda = cT$$

Où λ et T désignent les périodes spatiales et temporelles.

6.2 Ondes dans un milieu dispersif

6.2.1 Définition.

Ondes.

De manière générale on appelle "onde" toute superposition d'OPPM :

$$s(\vec{r}, t) = \int S(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} d^3k$$

Dans laquelle ω est une fonction du vecteur d'onde.

Milieux non-dispersif.

Un milieu est dit non-dispersif lorsque la relation de dispersion est linéaire i-e : $\omega = ck$ où $c > 0$ est la célérité de l'onde. Dans un tel milieu, moyennant certaines propriétés de sommabilité des fonctions, on peut dériver sous le signe intégral et on peut retrouver l'équation des ondes introduite au I.

Milieux dispersifs.

Dans un tels cas on définit :

$$\begin{array}{ll} v_\varphi &= \frac{\omega}{k} \quad \text{vitesse de phase} \\ v_g &= \frac{d\omega}{dk} \quad \text{vitesse de groupe} \end{array}$$

Un calcul simple montre l'équivalence :

$$v_\varphi = v_g \Leftrightarrow \text{milieu non-dispersif.}$$

Remarque : Dans le cas du milieu dispersif, le vecteur d'onde peut être complexe, ce qui autorise des ondes amorties ou évanescences.

6.2.2 Interprétation.

- Vitesse de phase :

Un calcul simple montre que la vitesse de phase est comme son nom l'indique, la vitesse de propagation de la phase d'une OPPM.

- Vitesse de groupe :

L'appellation "vitesse de groupe" provient de l'étude d'une onde particulière appelée "paquet d'ondes", qui est une superposition d'OPPM de vecteur d'onde voisins. Ainsi, un paquet d'onde plane est de la forme : $\int \underline{S}(k) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} dk$, dans laquelle la fonction \underline{S} est nulle en dehors d'un voisinage de la valeur k_0 .

En supposant le diamètre de ce voisinage très faible devant l'amplitude moyenne de l'onde, on peut faire un DL selon les puissances de $k - k_0$. On fait alors apparaître l'égalité suivante :

$$\underline{s}(x, t) = e^{-i\omega_0 t \left(1 - \frac{v_g}{v_\varphi}\right)} \underline{s}(x - v_g t, 0)$$

Si le milieu est non-dispersif, $v_\varphi = v_g$ et le paquet d'onde se propage à la célérité c . Si le milieu est dispersif, le paquet d'onde subit une déformation au cours du temps. Cependant cette fois c'est l'amplitude du paquet d'onde qui se propage à la vitesse v_g . En sachant que l'énergie associée à l'onde est nulle en dehors du voisinage considéré, la vitesse de groupe est aussi la vitesse de propagation de l'énergie associée à un paquet d'onde.

6.2.3 Description dans un milieu optique.

Mise en évidence expérimentale.

Dans le cas d'un milieu optique, la relation de dispersion s'écrit localement :

$$k = n \frac{\omega}{c}$$

(cf : optique) un milieu optique est dit dispersif lorsque l'indice n varie selon la longueur d'onde λ . Ainsi le caractère dispersif d'un verre est mis en évidence par l'expérience historique de Newton et de son prisme.

Mesure des vitesses de phase et de groupe.

Elles peuvent être obtenues à partir du graphe $n = f(\lambda)$.

Chapitre 7

Optique

7.1 Diffraction :

7.1.1 Introduction :

Définition :

On appelle diffraction tout phénomène optique qui ne suit pas les lois de l'optique géométrique.

Mises en évidence expérimentale :

- Diffraction par une fente ou par un trou :

Lorsqu'on envoie un faisceau cylindrique sur une fente, l'éclairement observé ne suit pas les lois de l'optique géométrique. En effet celles-ci prévoient un éclairement sous la forme d'une seule tache située en face de la fente alors qu'en réalité on observe plusieurs taches.

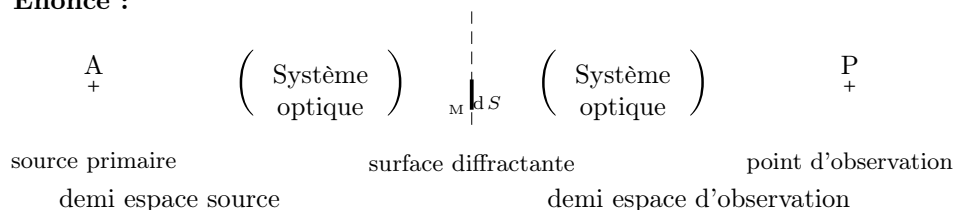
De même lorsqu'on envoie un faisceau cylindrique sur un bord mince (lame de rasoir gilette par exemple), on n'observe pas la discontinuité de l'éclairement prédite par l'optique géométrique mais des taches caractéristiques. De manière générale, on observe un tel phénomène dès que les lois de l'optique géométrique prédisent une discontinuité de l'éclairement.

Interprétation théorique :

Les lois de l'optique géométrique ne sont valables que dans le cadre de l'approximation faite dans le cours sur les ondes électromagnétiques. Or, si elles prévoient une discontinuité du champ, c'est que celui-ci varie brutalement à l'échelle de la longueur d'onde. C'est une contradiction. Pour la résoudre, il faudrait résoudre les équations de Maxwell, ce qui n'est fait que dans quelques cas particuliers. Il faut donc introduire un nouveau principe.

7.1.2 Principe d'Huygens-Fresnel :

Enoncé :



Dans ce montage général, la surface diffractante est une fente, un réseau, un trou... on suppose que la lumière émise par les sources primaires est cohérente et monochromatique.

Le principe d'Huygens-Fresnel stipule que chaque élément de surface (M, dS) de la surface diffractante se comporte comme une source ponctuelle qui émet une onde proportionnelle à dS ainsi qu'à l'onde incidente au point M et la constante de proportionnalité ne dépend pas de M ni du temps.

Dans chaque demi-espace hors de la surface de diffraction, on peut appliquer les lois de l'optique géométrique.

Il peut arriver que les deux demis espaces soient confondus (comme dans un réseau à réflexion).

Formulation mathématique :

L'élément de surface dS se comporte comme une source ponctuelle émettant une onde :

$Cs(M, t)dS$. Dans le cadre de l'approximation scalaire de l'optique physique (cours d'électromagnétisme) on sait alors que l'onde reçue au point P a pour expression :

$$a_{MP} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (MP)} Cs(M, t) dS$$

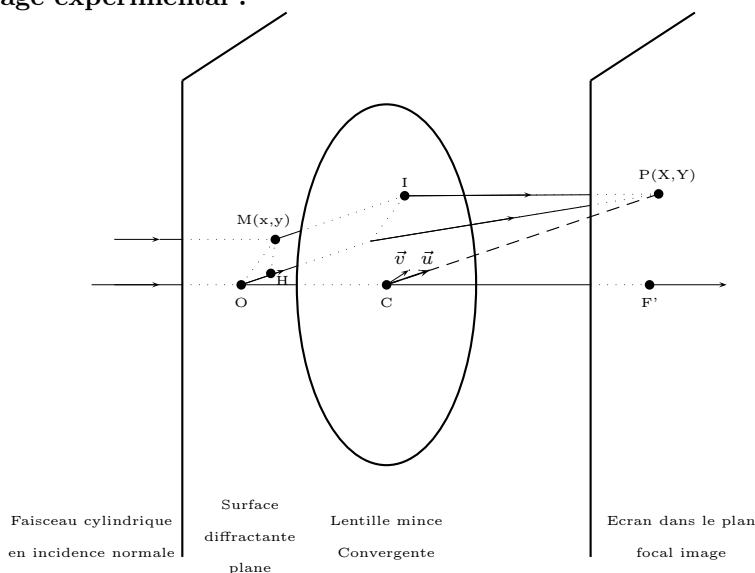
Où $(MP) = \int_L ndL$ désigne le chemin optique de M à P .

De plus dans les montages usuels les coefficients a_{MP} ont quasiment tous la même valeur. Il reste donc à intégrer sur la surface S en regroupant toutes les constantes dans la grande constante de proportionnalité :

$$s(P, t) \propto \int_S s(M, t) e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (MP)} dS$$

7.1.3 Diffraction à l'infini :

Montage expérimental :



La diffraction à l'infini est caractérisée par le montage de Frauhöfer dans lequel la lentille est utilisée dans les conditions de Gauss. D'un point de vue

notations, \vec{v} désigne la projection de \vec{u} dans le plan de la lentille. On note ses coordonnées (α, β) , celles de $M(x, y)$ et celles de $P(X, Y)$. On montre géométriquement que $\vec{v} = \frac{F'P}{f'}$. Ce qui se traduit par l'égalité : $X = \alpha f'$ et $Y = \beta f'$.

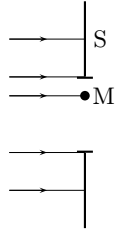
Détermination de l'onde diffractée :

Elle peut être déterminée en connaissant l'onde incidente et le chemin optique (MP).

• Onde incidente, Transmittance :

On distingue plusieurs cas selon la nature de l'objet diffractant.

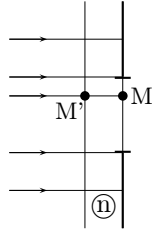
— Cas d'un simple trou :



L'onde incidente en incidence normale a même valeur à un instant donné en tout point de S , qui est une surface d'onde. Elle s'écrit donc :

$$s(M, t) = s_0 e^{-i\omega t}$$

— Cas d'une pellicule de transparence variable : La surface S est une plaque inhomogène d'indice n d'épaisseur e , accolée à un trou comme ci-dessous.



$\frac{s(M, t)}{s(M', t)} = a_{M'M} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(M'M)}$. Or de même que ci-dessus : $s(M', t) = s'_0 e^{-i\omega t}$ et de plus : $(M'M) = en(M)$. Si on pose $\tau(M) = a_{M'M}$ qui est un nombre compris entre 0 et 1 appelé transparence, et $s_0 = s'_0 e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(M'M)}$ on peut simplifier le résultat :

$$s(M, t) = s_0 \tau e^{-i\omega t}$$

— Cas d'une lame transparente d'épaisseur variable : Cette fois la plaque est encochée au niveau du trou et l'encoche, située du côté extérieur, est d'épaisseur a . L'indice du milieu constituant la plaque est n supposé uniforme. Tout se fait comme ci-dessus si ce n'est :

$a_{M'M} = \frac{2}{1+n} \cdot 1 \cdot \frac{2n}{n+1} = \frac{4n}{(n+1)^2} = T$ (cf : pb sur la transmission par des dioptries). Le chemin optique dépend de la position du point M par rapport à l'encoche. Selon les cas il vaut $n(e-a) + a$ ou ne . Si on pose : $s_0 = s'_0 T e^{i\frac{2\pi}{\lambda} ne}$ alors : on retrouve le résultat habituel :

$$s(M, t) = s_0 \tau(M) e^{i\omega t}$$

En posant $\tau = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(1-n)a}$ dans l'encoche et 1 ailleurs.

Ce résultat est généralisable. L'onde arrivant en M peut être mise sous cette forme dans laquelle τ est appelé transmittance.

- Chemin optique :

Le chemin optique (MP) peut être calculé dans le cadre de l'optique géométrique en prenant le rayon issu de O pour référence : $(MP) = (HP) = (OP) - \vec{u} \cdot O\vec{M} = (OP) - \vec{v} \cdot O\vec{M}$.

- Onde diffractée :

Un simple calcul montre que :

$$s(P, t) = s_0 e^{-i\omega t} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(OP)} \int_S \tau(M) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda} \vec{v} \cdot O\vec{M}} dS. \text{ On retiendra que :}$$

L'onde diffractée dans la direction \vec{u} et arrivant au point P tel que $F\vec{v}P = f'\vec{v}$ est proportionnelle à :

$$\int_S \tau(M) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda} \vec{v} \cdot O\vec{M}} dS$$

Remarque : L'intégrale ci dessus n'est autre que la transformée de Fourier de la transmittance.

Figure de diffraction :

On appelle "éclairage" la valeur moyenne temporelle de la puissance électromagnétique reçue par la surface de l'écran et figure de diffraction la répartition de l'éclairage. L'énergie lumineuse diffractée en M et reçue en P a une valeur moyenne temporelle proportionnelle à $|s(P, t)|^2$. En conséquence l'intensité diffractée dans la direction \vec{u} ou l'éclairage en P sont proportionnels à $\left| \int_S \tau(M) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda} \vec{v} \cdot O\vec{M}} dS \right|^2$ ainsi qu'à l'intensité I_0 de l'onde incidente.

Propriétés de la figure de diffraction à l'infini :

- La figure de diffraction n'est pas modifiée lorsque l'on déplace la surface diffractante. Cette propriété montre qu'on peut accoler lentille et surface diffractante.
- Une rotation de la surface diffractante autour de l'axe optique de la lentille engendre une rotation identique la figure de diffraction.
- La figure de diffraction par un trou en incidence quelconque se déduit de celle en incidence normale par une translation de vecteur $F'\vec{A}'$, A' étant l'image géométrique du faisceau incident en l'absence de diffraction.
- Pour une surface diffractante dont la transmittance est invariante par translation le long de l'axe (Oy), la lumière diffractée est concentrée sur l'axe ($F'X$).

7.1.4 Exemples de diffraction à l'infini :

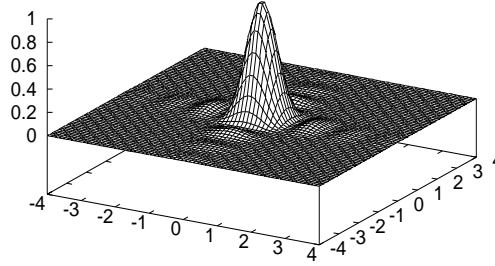
Diffraction par un trou carré :

On suppose le trou carré, de côtés a et b . D'après les propriétés ci-dessus, on peut : confondre le centre du rectangle avec l'axe optique, prendre les axes parallèles aux côtés du rectangle, supposer le faisceau d'incidence normale. Le calcul de l'intégrale donnant $s(P, t)$ à une constante multiplicative près se fait alors sans problème et on trouve que :

$$\mathcal{E}(P, t) = \mathcal{E}_0 \text{sinc}^2(u) \text{sinc}^2(v)$$

en posant $u = \frac{\pi X a}{\lambda f'}$ et $v = \frac{\pi Y b}{\lambda f'}$. Le calcul fait apparaître que l'éclairement est proportionnel au carré de la surface diffractante.

Eclairement relatif de l'écran
pour un trou carré



On remarque que si a et b tendent vers l'infini, l'éclairement est concentré au point F' , ce qui est concordant avec les prévisions de l'optique géométrique. Si b tend vers l'infini ($b \gg a$) la lumière est concentrée sur l'axe ($F'X$). Ce résultat donne la figure de diffraction par une fente mince, ce qui peut être retrouvé en utilisant la quatrième propriété du 1.3.4

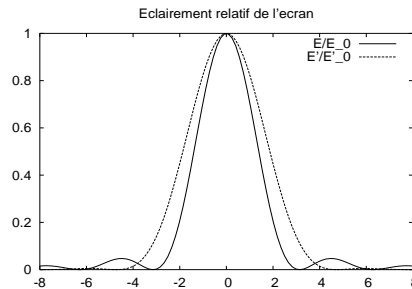
Apodisation :

C'est une technique visant à supprimer les pieds de la figure de diffraction créée par une fente mince, afin d'améliorer la résolution d'instruments optique. Elle peut être réalisée en choisissant une transmittance idoine dans la fente. Si par exemple on prend $\tau(x) = \cos(\pi \frac{x}{a})$, le calcul de l'intégrale donne l'onde diffractée dans la direction $\alpha = X/f'$ (à une constante multiplicative près), ce qui fournit l'éclairement au point P :

$$\frac{\mathcal{E}'}{\mathcal{E}'_0} = \left(\frac{\cos u}{1 - \frac{4}{\pi^2} u^2} \right)^2$$

Où $u = \pi \frac{a}{\lambda} \alpha$.

D'un point de vue graphique :



On note que les pieds ont quasi disparu et qu'on garde la lumière localisée au voisinage de F' .

Fentes d'Young :

Il s'agit de deux fentes minces de même largeur a écartées de a' . Toujours en utilisant la propriété (4), on sait que l'onde diffractée dans la direction α est

proportionnelle à l'intégrale si bien connue. Celle-ci se calcule sans problème et après factorisation, on trouve $2asinc u \cos u'$ en posant $u = \pi \frac{a}{\lambda} \alpha$ et $u' = \pi \frac{a'}{\lambda} \alpha$:

$$2asinc u \cos u'$$

Ce terme est le produit de deux termes, dont l'un (le sinus cardinal) correspond à l'éclairement d'une seule fente et l'autre à un phénomène d'interférence.

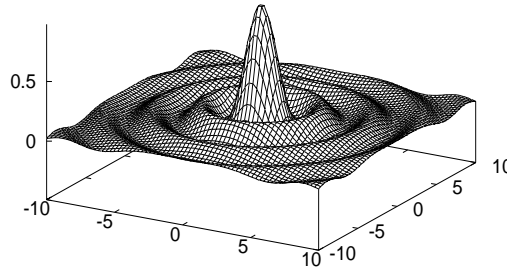
Diffraction par un trou circulaire :

La surface diffractante étant invariante par rotation, il en est de même de la figure de diffraction et il suffit de calculer l'onde diffractée en un point de l'axe ($F'X$). on sait que celle-ci est proportionnelle à l'intégrale :

$\int_S e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} \vec{v} \cdot \vec{OM}} dS$. Or on se place en coordonnées polaires, pour lesquelles $\vec{v} \cdot \vec{OM} = \rho r \cos \theta$. On en déduit que l'onde diffractée est proportionnelle à l'intégrale double :

$\int_0^{2\pi} \left[\int_0^a e^{-i 2\pi \frac{r\rho}{\lambda f} \cos \theta} \rho d\rho \right] d\theta$. On "reconnait" la fonction de Bessel. Puis l'éclairement est proportionnel au carré de cette fonction de Bessel, ce qui donne un éclairement relatif de cette forme :

Eclairement relatif de l'écran
pour un trou circulaire



On constate que la figure de diffraction présente une tache centrale, de rayon $0.61\lambda f'/a$.

Diffraction par N surfaces diffractantes, déduites les unes des autres par translations :

• Cas général :

On se donne une surface diffractante réunion de N surfaces toutes identiques à la surface S_1 , centrées chacune sur un point M_n telle que la surface S_n est déduite de S_1 par une translation de vecteur $\vec{M_1 M_n}$.

On peut choisir M_1 sur l'axe optique de la lentille. L'onde diffractée selon la direction \vec{u} est alors proportionnelle à l'intégrale :

$$\int_S \tau(M) e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} \vec{v} \cdot \vec{OM}} dS = \sum_{n=0}^N \int_{S_n} \tau(M) e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} \vec{v} \cdot \vec{OM}} dS.$$

Or $\vec{OM} = \vec{OM_n} + \vec{M_n M}$ et en remplaçant dans l'intégrale :

$\sum_{n=0}^N e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} \vec{v} \cdot \vec{OM_n}} \int_{S_n} \tau(M) e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} \vec{v} \cdot \vec{M_n M}} dS$. Comme l'intégrale ci-dessus ne dépend pas de l'indice de sommation on peut la sortir de la somme et on trouve

un produit de deux termes. L'éclairement vérifie donc :

$$\mathcal{E}(P) = \mathcal{E}_1(P) \left| \sum_{n=1}^N e^{-i \frac{2\pi}{\lambda f'} \vec{F} \cdot \vec{P} \cdot \vec{O} \vec{M}_n} \right|^2$$

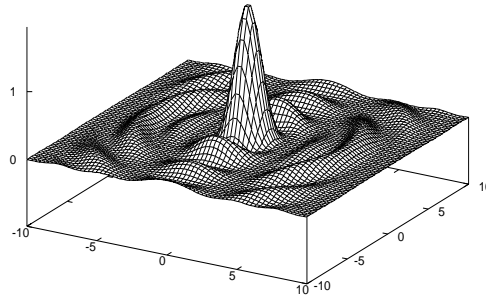
Le premier terme étant l'éclairement obtenu la première surface seule, l'autre terme correspond à un terme d'interférences.

• Trous d'Young :

On considère deux trous circulaires, de même rayon R et espacés de a . Un peu de trigonométrie élémentaire permet de simplifier le terme d'interférences et on trouve :

$$\mathcal{E} = 2\mathcal{E}_1 \left(1 + \cos \frac{2\pi X a}{\lambda f'} \right)$$

On trouve la figure de diffraction d'un trou seul mais parcouru de raies d'interférences, comme le montre ce graphe :



Cas de N surfaces diffractantes réparties régulièrement, notion de réseau :

On considère une surface diffractante répartie régulièrement dans une direction donnée. C'est-à-dire telle que : $M_1 \vec{M}_n = (n-1)a\vec{u}_x$ et qu'en plus N soit très grand devant 1. Alors la somme du terme d'interférences apparaît comme une somme géométrique qui se calcule aisément. On trouve :

$$I(\alpha, \beta) = I_1(\alpha, \beta) \left(\frac{\sin(Nu)}{\sin u} \right)^2. \text{ En posant } u = \frac{\pi \alpha a}{\lambda}. \text{ Lorsqu'on suppose}$$

N très grand devant 1 on obtient des pics d'éclairement, répartis sur tous les multiples entiers de π . On en déduit que la figure de diffraction par un réseau est concentrée dans les directions : $\alpha_p = p \frac{\lambda}{a}$.

Cette formule est caractéristique de l'incidence normale et dans les conditions de Gauss. En affinant les calculs (fait en exercice), on démontre la formule du réseau :

$$\boxed{\sin i_p - \sin i = p \frac{\lambda}{a}}$$

Comme ces angles de diffraction dépendent de λ , le réseau peut-être utilisé en spectrophotométrie.

Cas de surfaces réparties aléatoirement :

On reprend l'expression du terme d'interférences :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^N e^{-i \frac{2\pi}{\lambda f'} \vec{F'} \cdot \vec{O} \vec{M}_n} \right|^2 &= \sum_{1 \leq n, m \leq N} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda f'} (\vec{F'} \cdot \vec{O} \vec{M}_n - \vec{F'} \cdot \vec{O} \vec{M}_m)} \\ \sum_{1 \leq n, m \leq N} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda f'} \vec{F'} \cdot \vec{M}_m \vec{M}_n} &= N + \sum_{1 \leq n \neq m \leq N} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda f'} \vec{F'} \cdot \vec{M}_m \vec{M}_n} \\ &= N + \sum_{1 \leq n \neq m \leq N} e^{i \theta_{mn}} \end{aligned}$$

En posant $\theta_{mn} = \frac{2\pi}{\lambda f'} \vec{F'} \cdot \vec{M}_m \vec{M}_n$.

Le caractère aléatoire de la distribution impose alors que la somme est négligeable devant N sauf en F' et son voisinage où elle vaut N^2 . On obtient donc un éclaircissement de la forme :

$$\boxed{\begin{cases} \mathcal{E}(P) &= N \mathcal{E}_1(P) & \text{si } P \neq F' \\ \mathcal{E}(F') &= N^2 \mathcal{E}_1(F') \end{cases}}$$

7.2 Interférences :**7.2.1 Définition et réalisation :****Définition :**

On dit que deux ondes interfèrent en un point lorsque leur superposition en ce point y donne un éclaircissement différent de la somme des éclaircissements obtenus avec chaque onde séparément. Les deux ondes sont dites alors cohérentes.

Dans le cas contraire, les deux ondes n'interfèrent pas, on dit qu'elles sont incohérentes.

Par exemple dans l'exemple ci-dessus, lorsque les N surfaces sont réparties aléatoirement, elles fournissent N ondes incohérentes.

Réalisation :

D'un point de vue expérimental, il existe deux sortes de montages interférentiels.

• Diviseur d'onde :

Les rayons émergents qui interfèrent sont issus de deux rayons distincts. Dans ce type de montage, les interférences sont visibles dans un grand domaine spatial, mais seulement si la source est de faibles dimensions.

• Diviseur d'amplitude :

Cette fois, ils sont issus du même rayon incident. Celui-ci subit des réflexions transmissions qui le scindent avant d'arriver au point P .

Par exemple une lame à face parallèles donne cet effet : le rayon incident peut être transmis directement ou subir deux réflexions avant de ressortir. Une lentille permettant de réunir les deux au point d'observation.

7.2.2 Source ponctuelle monochromatique :

On suppose que la source est ponctuelle et monochromatique. On se limite à la superposition de deux ondes seulement et à l'approximation scalaire de l'optique physique.

$$s(P, t) = s_1(P, t) + s_2(P, t) = s_0 e^{-i\omega t} a_1 e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (SP)_1} + s_0 e^{-i\omega t} a_2 e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (SP)_2}$$

Soit :

$$s(P, t) = s_0 e^{-i\omega t} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(SP)_1} (a_1 + a_2 e^{i\varphi})$$

En posant $\delta(P) = (SP)_2 - (SP)_1$ la différence de marche entre les deux rayons et $\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$ le déphasage entre les deux rayons. φ dépend de P . Par contre, on supposera par la suite que a_1 et a_2 n'en dépendent pas.

On en déduit l'éclairement :

$$\mathcal{E}(P) = |s_0|^2 (|a_1|^2 + |a_2|^2 + 2|a_1||a_2| \cos(\varphi - \varphi_{12}))$$

En posant $\varphi_{12} = \arg(a_1 a_2^*)$.

Cette expression met en évidence l'existence d'interférences.

On appelle :

- Figure d'interférences : La répartition de l'éclairement.
- Franges d'interférences : Les courbes $\varphi = cte$.
- Franges brillantes : Les courbes $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{max}$.
- Franges sombres : Les courbes $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{min}$.
- Visibilité :

$$V = \frac{\mathcal{E}_{max} - \mathcal{E}_{min}}{\mathcal{E}_{max} + \mathcal{E}_{min}}$$

Dans le cas de ci-dessus, si on pose $\mathcal{E}_i = |s_0 a_i|^2$, l'éclairement s'écrit :

$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \cos(\varphi - \varphi_{12})$. Ce qui fournit la visibilité :

$$V = \frac{2\sqrt{\rho}}{1 + \rho}$$

En posant $\rho = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2}$. On constate que V est maximale lorsque $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$. C'est le cas, en particulier, lorsque $a_1 = \pm a_2$. Dans ce cas $\mathcal{E} = 2\mathcal{E}_1(1 \pm \cos \varphi)$. V est quasi-nulle si les deux éclairements sont très différents.

7.2.3 Source ponctuelle non-monochromatique :

Densité spectrale de la source :

$I(\lambda)$ appelé "densité spectrale de la source", caractéristique une source non-monochromatique telle que $I(\lambda)d\lambda$ désigne l'intensité émise dans l'intervalle $[\lambda; \lambda + d\lambda]$.

• **Finesse :**

Pour une raie, c'est-à-dire une répartition d'intensité au voisinage d'une valeur λ_0 , on définit la finesse de la raie comme $F = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda}$. Ainsi pour la raie intense du mercure, $F \sim 10^{-3}$. pour un LASER, $F \sim 10^{-6}$. Pour une raie monochromatique, la finesse est infinie, ce qui n'existe pas en réalité.

Expression intégrale de l'éclairement :

On se limite aux montages interférentiels tels que $a_1 = a_2$. Dans ce cas, pour une source monochromatique, $\mathcal{E} = \mathcal{I}(1 + \cos \varphi)$. Dans le cas général, on admettra que la source peut être considérée comme la superposition de sources quasi-monochromatiques de λ et $\delta I = I(\lambda)d\lambda$ qui émettent des ondes incohérentes. Alors :

$$\mathcal{E} = \int_0^{+\infty} (1 + \cos(2\pi \frac{\delta}{\lambda})) \mathcal{I}(\lambda) d\lambda$$

Remarque : En utilisant la relation $\lambda = 2\pi \frac{c}{\omega}$, on peut aussi définir la densité spectrale à partir de la pulsation ω . On trouve alors :

$$\mathcal{E} = \int_0^{+\infty} (1 + \cos(\delta \frac{\omega}{c})) \mathcal{I}(\omega) d\omega$$

Exemple : le doublet du sodium :

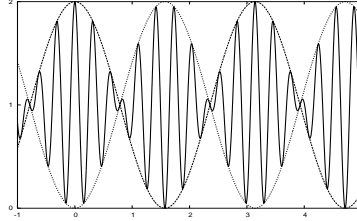
La vapeur de sodium émet dans le jaune des raies λ_1, λ_2 voisines de $\lambda_0 = 589.3 \text{ nm}$: $\lambda_1 = \lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}$, $\lambda_2 = \lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}$. La quantité $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ étant la largeur du doublet. D'un point de vue numérique : $\Delta\lambda = 0.6 \text{ nm}$. On en déduit la finesse : $F = 10^3$. Si on suppose la source ponctuelle, et $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2$ alors l'éclairement s'écrit :

$$\mathcal{E} = \mathcal{I} \left(2 + \cos(2\pi \frac{\delta}{\lambda_1}) + \cos(2\pi \frac{\delta}{\lambda_2}) \right).$$

En factorisant la somme de cosinus et en développant les termes obtenus à l'ordre 1 en $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$: on obtient l'éclairement sous la forme simplifiée :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \left(1 + \cos(\pi \frac{\delta}{L}) \cos(2\pi \frac{\delta}{\lambda_0}) \right)$$

En posant $L = \frac{\lambda_0^2}{\delta\lambda}$. Représentons l'éclairement relatif en fonction de δ :



Etant donné que le rapport des périodes des deux cosinus précédents est un IP1, localement la fonction est “quasi-périodique”. On définit alors la visibilité locale au voisinage d'une valeur de δ comme la première définition, mais en prenant des extrêmes locaux d'éclairement. On trouve ici :

$$V = \left| \cos(\pi \frac{\delta}{L}) \right|$$

V est L -périodique. La mesure de L avec un interféromètre permet celle de F soit $\Delta\lambda$. On constate expérimentalement que la visibilité décroît légèrement avec δ . Cela est dû à la largeur non-nulle de chacune des raies du doublet.

Exemple d'une raie gaussienne :

Cette fois la densité spectrale s'écrit :

$$I(\omega) = I_0 e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\Delta\omega}}$$

de sorte que $F = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \gg 1$. L'éclairement s'exprime avec la formule usuelle. Dans cette intégrale, on effectue le changement de variables $x = \frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}$. En posant alors $L = c \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ et $\lambda_0 = 2\pi \frac{c}{\omega_0}$, on se ramène au calcul de l'intégrale :

$$\int_{-\frac{\omega_0}{\Delta\omega}}^{+\infty} \left[1 + \cos\left(2\pi\frac{\delta}{L}x + 2\pi\frac{\delta}{\lambda_0}\right) \right] e^{-x^2} dx$$

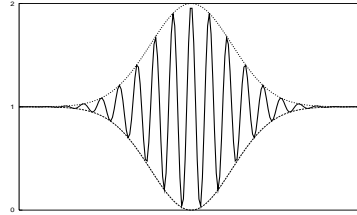
Or on a supposé que la finesse était grande devant 1. Etant donné la forte décroissance de la fonction à intégrer, on peut raisonnablement supposer que l'intégrale part de $-\infty$. En écrivant le cosinus sous forme exponentielle, il reste à calculer deux intégrales du type :

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{iax} dx$. En voyant cela comme une fonction $F(a)$, les théorèmes de Lebesgue de dérivation sous le signe intégrale permettent de trouver une équation différentielle satisfaite par cette fonction (après une IPP). On résout alors cette équation et sachant que $F(0) = \sqrt{\pi}$, on trouve :

$F(a) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{a^2}{4}}$. Il reste à appliquer dans notre cas et on obtient après simplifications :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_0}\right) e^{-\pi^2 \frac{\delta^2}{L^2}} \right)$$

Représentons l'éclairement en fonction de δ :



On peut encore définir la visibilité locale et cette fois on trouve :

$$V = e^{-\pi^2 \frac{\delta^2}{L^2}}$$

Intérférences en lumière blanche :

La lumière blanche est modélisée par une densité nulle en dehors d'un segment et constante sur ce segment. Si on note ω_1 et ω_2 les bornes inférieures et supérieures de ce segment et I_0 la valeur uniforme de la densité spectrale dans l'intervalle $[\omega_1; \omega_2]$ et qu'on pose λ_0 et L comme ci-dessus (ω_0 étant le milieu du segment), on obtient après calculs :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \left(1 + \text{sinc}\left(\pi\frac{\delta}{L}\right) \cos\left(2\pi\frac{\delta}{\lambda_0}\right) \right)$$

En lumière blanche, la visibilité locale n'a aucun sens puisque le rapport des périodes est de l'ordre de 1. De plus l'éclairement s'atténue.

Remarque : On retiendra que L appelé la "longueur de cohérence" vaut $F\lambda_0$ et est telle que la visibilité est de l'ordre de 1 si δ est négligeable devant L et quasi-nulle si c'est le contraire.

De plus L est de l'ordre de $1\mu\text{m}$ pour de la lumière blanche et de 1 m pour une LASER

Interprétation microscopique de la cohérence temporelle :

- Train d'onde et densité spectrale :

La source ponctuelle est constituée d'un grand nombre d'atomes qui émettent de manière aléatoire des signaux périodiques amortis appelés "trains d'onde", de la forme :

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 & \text{si } t < 0 \\ &= ae^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega_0 t) & \text{si } t > 0 \end{aligned}$$

La statistique permet de relier la densité spectrale $I(\omega)$ à la transformée de Fourier de f et au nombre N d'atomes :

$$I(\omega) \propto N |F(\omega)|^2$$

De plus si τ désigne la durée du train d'onde et $\Delta\omega$ la largeur spectrale de la source :

$$\tau\Delta\omega \sim 1$$

• Train d'onde et visibilité :

Chaque train d'onde est reçu en P avec un retard différent selon le rayon suivi. Ainsi, les interférences sont visibles si les trains d'onde se superposent, c'est-à-dire si $\left| \frac{\delta}{c} \right| \ll \tau$.

7.2.4 Source monochromatique, mais étendue :

Flux émis :

Une telle source est caractérisée par une fonction $\varphi_E(M)$ telle que $\varphi_E(M)dS$ représente la valeur moyenne de la puissance électromagnétique émise par l'élément (M, dS) de la source. "L'intensité" totale émise par la source est alors :

$$\int_S \varphi_E(M) dS$$

Expression intégrale de l'éclairement :

On se limitera aux montages interférentiels tels que $a_1 = a_2$ pour lesquels l'éclairement obtenu pour une source ponctuelle est de la forme $(1 + \cos(2\pi\frac{\delta}{\lambda}))\mathcal{I}$ à une constante multiplicative près. En supposant que la source étendue peut être considérée comme un ensemble de sources ponctuelles émettant des ondes incohérentes, l'éclairement pour la source étendue devient :

$$\mathcal{E}(P) = \int_S (1 + \cos(2\pi\frac{\delta}{\lambda})) \varphi_E(M) dS$$

Remarque : La différence de marche δ dépend du point M qui parcourt la source étendue.

Longueur de cohérence spatiale :

Un montage interférentiel est caractérisé par sa "longueur de cohérence spatiale" qui est telle que :

$$\begin{aligned} V &\sim 1 & \text{si } l \ll L \\ V &\sim 0 & \text{si } l \gg L \end{aligned}$$

Où l est la dimension caractérisant celles de la source (largeur, rayon).

Chapitre 8

Etude quantique de l'atome d'hydrogène

8.1 Principes de la mécanique quantique.

La mécanique quantique régit le comportement de la matière à l'échelle microscopique, atomique (~ 1 nm) et nucléaire (1 fm).

Elle repose sur un certain nombre de principes dont on ne retiendra ici que ceux utiles à l'étude de l'atome d'hydrogène.

8.1.1 Enoncé.

- L'état d'un point matériel est décrit par une fonction complexe (à valeurs complexes) : $\Psi(\vec{r}, t)$ d'espace et de temps appelée fonction d'onde telle que $|\Psi(\vec{r}, t)|^2$ représente la densité de probabilité de présence du point matériel au point \vec{r} à l'instant t .
- A toute grandeur A de la mécanique classique correspond un opérateur \hat{A} . Le résultat d'une mesure de A ne peut fournir qu'une valeur propre de l'opérateur \hat{A} .
- La fonction d'onde évolue au cours du temps selon l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi$$

dans laquelle l'opérateur \hat{H} appelé hamiltonien correspond à l'énergie mécanique de la particule.

8.1.2 Commentaires.

- Normalisation.

La probabilité de présence dans tout l'espace est 1. Donc $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+)$ et de plus : $\forall t > 0 : \iiint_{\mathcal{E}} |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV = 1$. On dit que la fonction Ψ est normée.

- Quantification.

Lorsque les valeurs propres d'un opérateur \hat{A} sont discrètes on parle de quantification. Ainsi l'énergie et le moment cinétique de l'atome d'hydrogène sont

quantifiés.

- Règles de correspondance.

Le passage de la mécanique classique à la mécanique quantique s'opère selon les règles de correspondance :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r} \longrightarrow \vec{r} \\ \vec{p} \longrightarrow -i\hbar\vec{\nabla} \end{array} \right.$$

En fait quand on parle d'opérateur \vec{r} , il s'agit de l'opérateur multiplication par \vec{r} . Illustrons ces règles avec l'atome d'hydrogène :

Rappels de mécanique classique.

L'atome d'hydrogène comprend deux points matériels : noyau $A_1(m_p)$ et électron $A_2(m_e)$ en interaction coulombienne. L'atome d'hydrogène étant supposé isolé on sait que son étude peut être ramenée à celle de deux points fictifs G et A avec $G(M = m_p + m_e \sim m_p)$ et $A(\mu = \frac{m_p m_e}{m_p + m_e} \sim m_e)$ et si O est un point fixe du référentiel du laboratoire alors $\vec{OA} = A_1 \vec{A_2}$. On ne s'intéresse ici qu'au mouvement relatif de A par rapport à O , soumis à la force centrale coulombienne $\vec{f} = f_{12} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \vec{u}_r$. Le moment cinétique $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$ et l'énergie mécanique $E_m = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ sont stationnaires.

En mécanique quantique.

On définit alors les opérateurs suivants :

- Moment cinétique.

$\hat{\vec{L}} = -i\hbar\vec{r} \wedge \vec{\nabla}$ soit $\hat{\vec{L}} = i\hbar \left(\frac{\vec{u}_\theta}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} - \vec{u}_\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} \right)$ en coordonnées sphériques. A partir de cet opérateur on définit deux opérateurs essentiels :

$$\begin{aligned} - \hat{L}_z = \vec{u}_z \cdot \hat{\vec{L}} \text{ soit } \hat{L}_z &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ - \hat{L}^2 = \hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{L}} \text{ soit } \hat{L}^2 &= -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right). \end{aligned}$$

- Hamiltonien.

$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ et, connaissant l'expression du laplacien en coordonnées

sphériques on en déduit : $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\hat{L}^2}{2\mu r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$.

Fonction d'onde stationnaire.

On s'intéresse par la suite aux fonctions d'ondes dites stationnaires (au sens donné dans le cours sur les ondes). On applique alors la méthode de séparation des variables dans l'équation de Schrödinger :

On remplace alors $\Psi(\vec{r}, t)$ par $\psi(\vec{r})T(t)$ dans cette équation :

$\frac{\hat{H}\psi}{\psi(\vec{r})} = \frac{i\hbar}{T(t)} \frac{dT}{dt} = cte = E$. On appelle cette constante E car elle est homogène à une énergie. On en déduit :

- Expression de T

$T(t) = e^{\frac{-iE}{\hbar}t}$ à une constante multiplicative près qu'on choisit égale à 1.

- Equation de Schrödinger indépendante du temps.

$\hat{H}\psi = E\psi$. Cette équation appelée équation de Schrödinger indépendante du temps ou encore équation aux valeurs propres. En effet elle signifie que ψ est

une fonction propre de l'opérateur \hat{H} associée à la valeur propre E . La fonction d'onde cherchée s'écrit alors $\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})e^{\frac{-iE}{\hbar}t}$ d'où : $|\Psi(\vec{r}, t)|^2 = |\psi(\vec{r})|^2$. La densité de probabilité de l'électron autour du noyau est donc indépendante du temps, ce qui justifie à posteriori l'appellation "fonction d'onde stationnaire".

8.2 Application à l'atome d'hydrogène.

8.2.1 Résolution de l'équation de Schrödinger.

Résolution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps.

L'équation de Schrödinger indépendante du temps s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) - \frac{1}{\hbar^2 r^2} \hat{L}^2 + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0 \quad (8.1)$$

On applique alors une séparation des variables : $\psi(\vec{r}) = R(r)Y(\theta, \varphi)$. On obtient alors :

$$\frac{r}{R(r)} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rR) + \frac{2\mu r^2}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = \frac{1}{\hbar^2 Y} \hat{L}^2 Y = C. \text{ Où } C \text{ est une constante.}$$

Ce qui fournit les deux équations :

$$\hat{L}^2 Y = \hbar^2 C Y \quad (8.2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (rR) + \left[\frac{2\mu r}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) - \frac{C}{r} \right] R = 0 \quad (8.3)$$

Résolution de (2).

Résoudre (2) revient à rechercher les fonctions propres de l'opérateur \hat{L}^2 . On sépare encore les variables θ et φ en posant : $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$. On obtient alors après substitution dans l'équation (2) :

$$\frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + C \sin^2 \theta = \frac{-1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = C' \text{ Où } C' \text{ est une constante. On}$$

en tire les deux équations :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + C' \Phi(\varphi) = 0 \quad (8.4)$$

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + (C \sin^2 \theta - C') \Theta(\theta) = 0 \quad (8.5)$$

Résolution de (4).

— $C' < 0$ On pose $m = \sqrt{-C'}$:

$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} - m^2 \Phi(\varphi) = 0$, qu'on résout immédiatement : $\Phi(\varphi) = Ae^{m\varphi} + Be^{-m\varphi}$. Or on doit trouver une fonction 2π -périodique puisque l'état de la particule est le même en φ et en $\varphi + 2k\pi$. On exclut donc ce cas.

— $C' > 0$ On pose $m = \sqrt{C'}$:

$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + m^2 \Phi(\varphi) = 0$ D'où : $\Phi(\varphi) = Ae^{im\varphi} + Be^{-im\varphi}$. Φ étant 2π -périodique, m est nécessairement un entier relatif.

On remarquera, dans le cas particulier $A = 1, B = 0$ que : $\hat{L}_z \Phi_m(\varphi) = -i\hbar \frac{d\Phi_m}{d\varphi}$ soit : $\hat{L}_z \Phi_m = \hbar m \Phi_m(\varphi)$. La fonction $\Phi_m = e^{im\varphi}$ est une fonction propre de l'opérateur \hat{L}_z associée à la valeur propre $\hbar m$. C'est la quantification du moment cinétique selon (Oz) . *Remarque* : Pour des raisons données dans le cours sur le dipôle magnétique, le nombre m sera nommé "nombre quantique magnétique".

Résolution de (5).

On reporte $C' = m^2$ dans (5) et on trouve l'équation :

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + (C \sin^2 \theta - m^2) \Theta = 0 \quad (8.6)$$

On admettra que les solutions de cette équation différentielle physiquement acceptables (en particulier celles permettant à Ψ d'être normalisée) sont obtenues uniquement pour $C = \ell(\ell + 1), \ell \in \mathbb{Z} | \ell \geq |m|$, soit $\ell \in \llbracket -m, m \rrbracket$.

En outre en reportant cette expression de C dans (2) on a :

$\hat{L}^2 Y_{\ell, m} = \hbar^2 \ell(\ell + 1) Y_{\ell, m}$. Les fonctions $Y_{\ell, m}$ sont donc des fonctions propres associées à la valeur propre $\hbar^2 \ell(\ell + 1)$. Cela traduit la quantification de la norme du moment cinétique. L'entier ℓ est appelé "nombre quantique azimutal" ou "nombre quantique secondaire". Les fonctions $Y_{\ell, m}$ sont appelées harmoniques sphériques.

Résolution de (3).

En reportant la valeur de $C = \ell(\ell + 1)$ dans (3) on obtient l'E-D :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (rR) + \left[\frac{2\mu r}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) - \frac{\ell(\ell + 1)}{r} \right] R = 0 \quad (8.7)$$

Soit, en posant $f(r) = rR(r)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \left[\frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \right] f = 0 \quad (8.8)$$

Etudions le comportement asymptotique de cette équation différentielle. Quand r tend vers l'infini, on a (formellement) : $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2\mu E}{\hbar^2} f = 0$

— Si $E > 0$ on pose $k = \sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}}$ (homogène à une longueur puissance -1.) Seulement les solutions de cette E-D n'autorisent pas à Ψ d'être normalisable. On exclut donc ce cas. (il correspond à un état non lié).

— si $E < 0$, on pose $k = \sqrt{-\frac{2\mu E}{\hbar^2}}$. On trouve alors $f(r) = Ae^{-kr}$ en imposant à Ψ d'être normalisable.

Cette étude asymptotique amène à introduire la nouvelle fonction $P(r)$ telle que $f(r) = e^{-kr} P(r)$.

On trouve une équation différentielle sur P :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - 2k \frac{dP}{dr} + \left[\frac{2\mu e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 r} - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \right] P(r) = 0$$

L'analyse dimensionnelle de cette E-D montre immédiatement que la quantité

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{\mu e^2}$$

est homogène à une longueur appelée rayon de Bohr ($\sim 0,53$ Angström).

Tout cela nous mène à utiliser la variable réduite $\rho = r/a$. Après substitution dans l'E-D :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} - 2\nu \frac{dP}{d\rho} + \left[\frac{2}{\rho} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \right] P(\rho) = 0 \quad (8.9)$$

En posant $\nu = ka = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar}{e^2} \sqrt{\frac{-2E}{\mu}}$, c'est un nombre sans dimension.

(9) est une équation différentielle linéaire à coefficients non-constants dont on va chercher une solution particulière sous forme de série entière :

$$P(\rho) = \sum_{q=0}^{+\infty} c_q \rho^q \text{ On obtient après calculs la relation de récurrence suivante}$$

pour les coefficients c_q :

$$\begin{cases} \forall q \geq 1, & [q(q+1) - \ell(\ell+1)]c_{q+1} = 2(\nu q - 1)c_q \\ \forall q \leq \ell, & c_q = 0 \end{cases}$$

On est alors amené à distinguer deux cas selon que ν est ou non l'inverse d'un entier.

— Si $\nu \neq \frac{1}{n}$ alors $\frac{c_{q+1}}{c_q} \sim \frac{2\nu}{q}$ est la fonction P est équivalente à une exponentielle, ce qui empêche Ψ d'être normalisable.

— Si $\exists n > \ell$ tel que : $\nu = \frac{1}{n}$ alors $c_q = 0$ pour $q > n$ et $P(\rho) = \sum_{q=\ell+1}^n c_q \rho^q$

est un polynôme de degré n .

La condition trouvée sur ν s'écrit :

$$\frac{4\pi\epsilon_0\hbar}{e^2} \sqrt{\frac{-2E}{\mu}} = \frac{1}{n}, \text{ soit } E_n = E_1/n^2. \text{ Avec } E_1 = \frac{-\mu}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} \right)^2 \sim -13,6$$

eV. L'énergie d'un atome d'hydrogène est quantifiée et le nombre n est appelé "nombre quantique principal". C'est une valeur propre de l'opérateur hamiltonien.

8.2.2 Récapitulation.

Les solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger s'écrivent :

$$\Psi_{n,\ell,m}(\vec{r}, t) = \psi_{n,\ell,m}(\vec{r}) e^{\frac{-iE_n t}{\hbar}}$$

avec n le nombre quantique principal, ℓ le nombre quantique magnétique et m le nombre quantique magnétique qui sont tels que :

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{N}[\star] & \quad \hat{H}\psi_{n,\ell,m} = E_n\psi_{n,\ell,m} \\ l \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket & \quad \hat{L}^2\psi_{n,\ell,m} = \hbar^2\ell(\ell+1)\psi_{n,\ell,m} \\ m \in \llbracket -\ell, \ell \rrbracket & \quad \hat{L}_z\psi_{n,\ell,m} = \hbar m\psi_{n,\ell,m} \end{aligned}$$

En particulier, l'énergie de l'atome d'hydrogène est quantifiée : $E_n = \frac{E_1}{n^2}$, avec $E_1 = -13,6$ eV. L'énergie minimale E_1 est celle du fondamental.

$$\psi_{n,\ell,m} = R_{n,\ell}(r)Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$$

La partie radiale se décompose sous la forme suivante, faisant intervenir les polynômes de Laguerre :

$$R_{n,\ell}(r) = e^{-\frac{r}{na}} \left(\frac{r}{a}\right)^{\ell^{n-\ell-1}} \sum_{p=0}^{\ell^{n-\ell-1}} c_{p+\ell+1} \left(\frac{r}{a}\right)^p$$

a désignant le rayon de Bohr.

La probabilité de présence de l'électron autour du noyau est stationnaire. Dans l'élément de volume $\delta\tau = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$ des coordonnées sphériques, elle a pour expression : $|\psi_{n,\ell,m}(r, \theta, \varphi)|^2 \delta\tau$. En sommant sur θ et φ on obtient la probabilité de présence de l'électron entre r et $r + dr$, soit :

$$|R_{n,\ell}(r)|^2 r^2 dr$$

En sommant sur r on obtient la probabilité de présence pour l'électron dans l'angle solide $\delta\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$, soit :

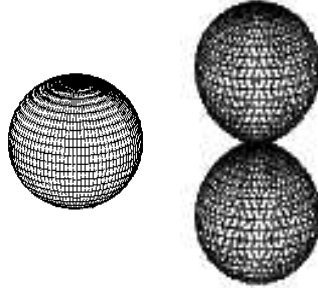
$$|R_{n,\ell}(\theta, \varphi)|^2 \delta\Omega$$

Les premières harmoniques sphériques sont données ci-dessous :

- $\ell = 0, m = 0$ $Y_{0,0}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
- $\ell = 1, m = -1$ $Y_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{-i\varphi}$
- $\ell = 1, m = 0$ $Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$
- $\ell = 1, m = 1$ $Y_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\varphi}$

Représentons les premières harmoniques sphériques, qui fournissent les densités de probabilités par unité d'angle solide.

$$\ell = 0, m = 0 \quad \ell = 1, m = 0$$



Index

- Activité, 75
- Affinité, 86
- Alternateur, 37
- Ampère, 27
- Anode, 94
- Apodisation, 131
- Approximation
 - de l'optique géométrique, 43
 - scalaire, 44
- Approximation d'Ellingham, 88
- ARQS, 31
- Avancement, 81
- Axe principal, 112

- Bilan local, 10
- Bobine, 36
- Bose-Einstein, 66
- Boson, 66

- Cable coaxial, 118
- Capacité, 18, 19
- Cas
 - de Lorentz, 34
 - de Neumann, 34
- Cathode, 94
- Centre de masse, 111
- Champ
 - complexe, 33
 - électromagnétique, 29
 - Electrostatique, 15
 - Magnétostatique, 23
- Chemin optique, 44
- Chemin optique, 130
- Circuit filiforme, 25
- Coefficient
 - d'activité, 76
 - calorimétriques, 57
 - de compressibilité, 57
 - conducto-convectif, 61
 - de diffusion, 56
 - de frottement, 114
 - de performance, 60
 - stœchiométriques, 81
- Cohérence temporelle, 137
- Collection de pointeurs, 102
- Condensateur, 19
 - cylindrique, 20
 - plan, 20
 - sphérique, 20
- Condition aux limites, 16, 24, 32
- Condition aux limites, 61
- Conducteur
 - ellipsoïdal, 18
 - en équilibre, 17
 - seul dans l'espace, 17
 - sphérique, 18
- Conductivité
 - électrique, 56
 - thermique, 56
- Conservation, 9
- Convolution, 123
- Corde de Melde, 122
- Corps noir, 69
- Couple, 105
- Courant non-convectif, 8

- Densité
 - spectrale, 135
- Dérivée particulaire, 10
- Détente
 - de Joule Gay-Lussac, 58
 - de Joule Thomson, 59
- Diffraction, 127
- Dipôle
 - 2ⁿ-pôle, 22
 - électrique, 22

- magnétique, 28
- Doublet du sodium, 136
- Effet d'écran, 19
- Effusivité, 65
- Electrolyseur, 95
- Energie
 - cinétique, 112
 - d'un condensateur, 20
 - électromagnétique, 33
 - interne, 51
 - cinétique interne, 51
 - potentielle interne, 51
 - libre, 56
 - magnétique, 26
 - mécanique, 52, **109**
 - potentielle, **108**
 - thermique, 52
 - totale, 52
- Enthalpie, 56
- Entropie, 17, 53, 54
- Equation
 - de d'Alembert, 30
 - de Schrödinger
 - indépendante du temps, 140
 - de Schrödinger, 139
 - de diffusion thermique, 61
 - d'état, 54
 - d'Euler, 11
 - de Laplace, 16
 - de Maxwell, 29
 - générales, 32
 - d'onde, 40, 117
 - de Poisson, 16, 24, 31
- Equations
 - de Maxwell
 - dans un métal, 39
- Equilibre, 54
 - chimique, 86
 - radiatif, 69
- Equilibre
 - d'un conducteur, 17
- Fentes d'Young, 131
- Figure de diffraction, 130
- Flux
 - thermodynamique, 17, **55**
- Fonction d'onde stationnaire, 140
- Force
 - subie par un dipôle, 22
 - électromotrice, 35
 - d'inertie, 107
 - intérieures, 114
 - de Laplace, 27
 - de liaison, 114
 - de Lorentz, 15, 23, 29
 - thermodynamique, 17, **55**
- Formule
 - de Nernst, 91
- Four à induction, 39
- Franges, 135
- Freinage par induction, 34
- Gagarine Youri, 106
- Glissement, 110
- Grandeur
 - conjuguées, 53
 - standard de formation, 85
- Grandeur extensive, 7
- Hamiltonien, 140
- Harmoniques sphériques, 144
- Hypothèse de Bodenstein, 83
- Inductance, 25
 - d'une ligne bifilaire, 26
 - d'une Bobine cylindrique, 26
 - d'une Bobine torique, 25
- Induction, 34
- Intensité
 - d'une OPPM, 41
- Interférences, 134
- Intermédiaire réactionnel, 82
- Jauge
 - de Coulomb, 31
 - de Lorentz, 30, 31
- Lemme de Lebesgue, 123
- Ligne de transmission, 63
- Loi
 - de Boltzmann, 11
 - de De Broglie, 46
 - de Clapeyron, 57
 - de Composition des vitesses, 100
 - de Coulomb, **113**
 - de Descartes, 45
 - de Faraday, 35
 - de Fick, 56
 - de Fourier, 56

- de Guldberg et Waage, 86
- de Lambert, 69
- de Laplace, 27, 57
- de Lenz, 39
- de Malus, 43
- de Newton, 61
- d'Ohm, 21, 56
- de Planck, 66
- de Raoult, 77
- de Stefan, 67
- de Van't Hoff, 83, 85
- de Wien, 66
- Longueur de cohérence
 - spatiale, 138
 - temporelle, 137
- Lumière blanche, 137
- Machines thermique, 60
- Matrice
 - inductance, 26
 - d'inertie, 112
- Mécanique, 99
 - du solide, 110
- Mélange, 71
 - monophasé, 71
- Métal, 39
- Milieu
 - dispersif, 124
 - non-dispersif, 117
 - optique, 42
- Modèle
 - de Debye-Hückel, 76
- Moment
 - cinétique, 104
 - cinétique d'un solide, 112
 - dynamique, 104
 - électrique, 22
 - d'inertie, 111
 - magnétique, 28
- Montage de Frauhöfer, 128
- Nombres
 - quantiques, 143
- Onde, 117, **124**
 - cohérentes, 134
 - électromagnétique, 40
 - évanescence, 125
 - incohérentes, 134
 - plane, 120
 - sphérique, 121
 - stationnaire, 121
- OPPM, 124
 - électromagnétique, 40
- Optique, 127
- Phase, 71
 - gazeuse idéale, 73
 - idéale, 73
 - réelle, 76
- Phénomène d'influence, 19
- Photon, 65
- Pile, 95
- Point
 - d'azéotropie, 79
- Polarisation, 41
- Polynômes
 - de Laguerre, 143
- Potentiel
 - chimique, 72
 - chimique standard, 75
 - électromagnétique, 30
 - Electrostatique, 15
 - redox, 91
 - retardé, 31
 - vecteur, 23
- Pression, 53
 - électromagnétique, 46
 - Electrostatique, 19
- Principe
 - de l'électromagnétisme, 29
 - relatif à l'entropie, 53
 - d'Huygens-Fresnel, 127
 - de la mécanique, 105
 - d'Onsager, 55
 - premier principe, 52
 - reliant U et S , 53
- Principes
 - de la mécanique quantique, 140
- Produit d'inertie, 112
- Propagation
 - guidée, 47
 - libre, 48
- Puissance, 107
- Raie gaussienne, 136
- Rayon lumineux, 43
- Rayon de Bohr, 144
- Réaction

- en chaîne, 82
 - prépondérante, 83
- Réaction prépondérante, 83
- Référentiel, 99
 - du centre de masse, 101
 - changement, 99
 - galiléen, 105
 - du solide, 110
- Réfrigérateur à compression, 60
- Relation
 - de De Donder, 86
 - de dispersion, 41
 - de Gibbs-Duhem, 72
 - de Hess, 85
 - de Kirchhoff, 84
 - de Mayer, 57
 - de Reech, 57
- Rendement, 60
- Résistance
 - électrique, 21
 - thermique, 21, 62
- Résultante cinétique, 103
- Réversibilité, 53
- Rotation
 - autour d'un axe fixe, 101
 - autour d'un point fixe, 101
- Roue de Barlow, 34, **38**
- Sensation de température, 64
- Solution de la chaleur, 64
- Source
 - étendue, 138
 - ponctuelle
 - monochromatique, 134
 - non-monochromatique, 135
- Symétrie, 17, 24
- Système, 8, 54
 - état, 54
 - évolution, 54
 - fermé, 52
 - stationnaire, 54
- Tableau d'avancement, 81
- Température, 53
- Théorème
 - d'Ampère, 24, 31
 - de Coulomb, 17
 - d'Ellingham, 90
 - de l'énergie cinétique, 108
 - de l'énergie mécanique, 109
 - de Fermat, 44
 - de Gauss, 16, 31
 - de Gibbs, 87
 - de Guldin, 111
 - d'Huygens, 111
 - d'interaction, 106
 - de Kœnig, 104, 108
 - du moment cinétique, 106
 - des moments, 76
 - de la résultante cinétique, 105
 - d'unicité, 17
- Thermodynamique, 51
 - chimique, 71
- Torseur, 101
 - cinétique, 103
 - dynamique, 104
 - équivalence, 103
 - force, 104
- Train d'onde, 138
- Transfert thermiques, 60
- Transformateur, 34, 36
- Transformée de Fourier, 123
- Transmittance, 129
- Travail, 107
- Tripoux, 34
- Trous d'Young, 133
- Vecteur
 - rotation, 99
- Visibilité, 135
- Vitesse
 - de groupe, 125
 - de phase, 125
 - de réaction, 82