INSA – MS ESD
ROUFFIAC Jean-Eudes

Année 2019-2020

STAT 3 : Méthodes itératives

Rapport de TP n°1

Titre : *Calcul de la variance et de la matrice de covariance de manière itératif*

L'objet est de mettre au point une méthode de calcul itératif permettant le calcul de la variance empirique S_n^2 définie par :

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x}_n)^2$$

On veut exprimer S_{n+1}^2 en fonction de S_n^2, x_{n+1} et $\bar{x}_{n+1}$.

On part de l'égalité :

$$S_{n+1}^2 = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}(x_j - \bar{x}_{n+1})^2 = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}x_j^2 - \bar{x}_{n+1}^2$$

On a alors :

$(n+1)S_{n+1}^2 = \sum_{j=1}^{n+1} x_j^2 - (n+1)\bar{x}_{n+1}^2$

$= \sum_{j=1}^{n} x_j^2 + x_{n+1}^2 - (n+1)\bar{x}_{n+1}^2$

$= nS_n^2 + n\bar{x}_n^2 + x_{n+1}^2 - (n+1)\bar{x}_{n+1}^2$

$(n+1)S_{n+1}^2 = nS_n^2 + B_{n+1}$

avec $B_{n+1} = n\bar{x}_n^2 + x_{n+1}^2 - (n+1)\bar{x}_{n+1}^2$

En reprenant l'équation permettant de faire le calcul itératif de la moyenne empirique :

$$\bar{x}_{n+1} = \frac{n}{n+1}\bar{x}_n + \frac{1}{n+1}x_{n+1}$$

on déduit alors que :

$\frac{n}{n+1}\bar{x}_n = \bar{x}_{n+1} - \frac{1}{n+1}x_{n+1}$

$n\bar{x}_n = (n+1)\bar{x}_{n+1} - x_{n+1}$

On injecte dans B_{n+1} :

$B_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{n}\bar{x}_{n+1}^2 + \frac{1}{n}x_{n+1}^2 - \frac{2(n+1)}{n}\bar{x}_{n+1}x_{n+1} + x_{n+1}^2 - (n+1)\bar{x}_{n+1}^2$

$B_{n+1} = \frac{(n+1)}{n}\bar{x}_{n+1}^2 - \frac{2(n+1)}{n}\bar{x}_{n+1}x_{n+1} + \frac{n+1}{n}x_{n+1}^2$

$B_{n+1} = \frac{n+1}{n}(\bar{x}_{n+1}^2 - 2\bar{x}_{n+1}x_{n+1} + x_{n+1}^2)$

$B_{n+1} = \frac{n+1}{n}(\bar{x}_{n+1} - x_{n+1})^2$

On obtient alors :

$(n+1)S_{n+1}^2 = nS_n^2 + \frac{n+1}{n}(\bar{x}_{n+1} - x_{n+1})^2$

d'où :

$S_{n+1}^2 = \frac{n}{n+1}S_n^2 + \frac{1}{n}(\bar{x}_{n+1} - x_{n+1})^2$

qu'on peut encore mettre sous la forme :
$S_{n+1}^2 = S_n^2 + \frac{1}{n+1}[\frac{n+1}{n}(\bar{x}_{n+1} - x_{n+1})^2 - S_n^2]$

La mise à jour de la moyenne doit donc être faite avant la mise à jour de S_n^2.

Algorithme en pseudo-code

Initialisation :

```
moy = première valeur de x
var = 0
n = 1
```

Instructions pour la mise à jour :

```
acquisition de x (à partir de la deuxième valeur de x)
n = n + 1
moy = moy + (x - moy) / n
var =  var + (n*((moy-x)^2)/(n-1) - var) / n
```