

Tarea 1 Algoritmos y Complejidad

Gabriel Carmona - Jorge Ludueña - Jean-Franco Zárate

Octubre de 2019

Demostración de Cota inferior de Convex Hull

Para este problema, queremos encontrar la cota inferior del problema de Convex Hull, utilizando el problema de ordenamiento. Los algoritmos que resuelven Convex Hull retornan un conjunto de puntos, los cuales forman un polígono convexo de área mínima que contiene todos los puntos dados en un plano.

Ahora, para demostrar la cota inferior de Convex Hull, usando el problema de ordenamiento:

1. **Mostrar cómo transformar la entrada de Ordenamiento a una entrada para Convex Hull**

El problema de ordenamiento recibe un conjunto de elementos (para este caso, números reales). A diferencia de Convex Hull, este recibe un conjunto de puntos de coordenadas (x,y). Ahora, la transformación de la entrada de Ordenamiento a una Convex Hull consiste en transformar todos los elementos de Ordenamiento a un conjunto de coordenadas (x,y) de la siguiente forma: (x, x^2) , donde x es el número perteneciente al conjunto de entrada de Ordenamiento. Esta transformación se realiza en $O(n)$.

2. **Cómo la respuesta producida para Convex Hull puede usarse para Ordenamiento**

Se ve que la entrada para Convex Hull corresponde a una parábola y todos los puntos son parte de ella. Al ser todos parte de esa parábola, la figura que formará Convex Hull tendrá como vértices todos los puntos del conjunto anterior.

Con la figura encontrada, se recorre desde el vértice con la coordenada 'x' más pequeña y en sentido antihorario. A medida que recorre, va agregando las coordenadas 'x' de los vértices por las que pasa en el nuevo conjunto. Esto se realiza en $O(n)$.

Debido a lo anterior, el conjunto resultante es un conjunto que tiene los elementos originales ordenados de menor a mayor. Con esto, se demuestra que una instancia de Convex Hull resuelve el problema de ordenamiento, por lo que el problema de ordenamiento se reduce al problema de convex hull.

Finalmente, como el algoritmo de Sort tiene tiempo de ejecución $T(n) \in \Omega(n \log(n))$ tenemos que:

$$T_{sort} \leq T_{hull} + 2O(n)$$

$$T_{hull} \geq T_{sort} - 2O(n)$$

$$\therefore T_{hull} \in \Omega(n \log(n))$$