IMSP Dangbo *Année académique : 2017-2018*

Master1 Mathématiques fondamentales et Applications

Projet d'optimisation

(Projet de construction d'une route)

Professeur : Marie-Postel

GROUPE N°6

Membres du groupe :

1. KOUAGOU N. Jean
2. BALOGOUN O. A. Ismaïla

Partie I

1. Vérifions que D_a est convexe.

$$D_a = \{u \in [0, L], \forall (x, y) \in [0, L]^2, |u(x) - u(y)| \leq \alpha |x - y|\}$$

Soient $u, v \in D_a$ et $\theta \in [0,1]$. Montrons que $\theta u + (1 - \theta)v \in D_a$. On a :

$$u, v \in D_a \Leftrightarrow \forall (x, y) \in [0, L]^2,$$

$|u(x) - u(y)| \leq \alpha|x - y|$ et $|v(x) - v(y)| \leq \alpha|x - y|$.

On a aussi :

$|(\theta u + (1 - \theta)v)(x) - (\theta u + (1 - \theta)v)(y)|$

$= |\theta\big(u(x) - u(y)\big) + (1 - \theta)\big(v(x) - v(y)\big)|$

$\leq \left|\theta\big(u(x) - u(y)\big)\right| + \left|(1 - \theta)\big(v(x) - v(y)\big)\right|$

$=\theta\left|\big(u(x) - u(y)\big)\right| + (1 - \theta)\left|\big(v(x) - v(y)\big)\right|$ car $\theta \in [0,1]$

$\leq \theta\alpha|x - y| + |(1 - \theta)\alpha|x - y|$

$= (\theta\alpha + (1 - \theta)\alpha)|x - y|$

$= \alpha|x - y|$

$Donc\ \ \theta u + (1 - \theta)v \in D_a$.

D'où D_a est un ensemble convexe.

2. Montrons que la solution u de ce problème est la projection au sens de la norme $L^2[0, L]$, de la fonction g sur le convexe D_a

$$J(u) = \int_0^L \phi\big(u(x) - g(x)\big)dx \quad \text{avec } \phi(x) = x^2$$

Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de D_a.
Supposons que $u_n \longrightarrow u$ et montrons que $u \in D_a$; c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in [0, L]^2, |u(x) - u(y)| \leq \alpha|x - y|$$

$$Soit\ \varepsilon > 0.$$

$$u_n \longrightarrow u \text{ donc } \exists\, N(\varepsilon),\ \ n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow |u_n - u|(x) \leq \tfrac{\varepsilon}{2}\, \forall\, x \in [0, L].$$

On a $\forall\ x, y\ \in [0, L], \forall\, n \geq N(\varepsilon)$,

$$|u(x) - u(y)| = |\big(u(x) - u_n(x)\big) + \big(u_n(x) - u_n(y)\big) + (u_n(y) - u(y))|$$

$$\leq \big|\big(u(x) - u_n(x)\big)\big| + \big|\big(u_n(x) - u_n(y)\big)\big| + |u_n(y) - u(y)|$$

$$\leq \big|\big(u(x) - u(y)\big)\big| + \big|\big(u(x) - u(y)\big)\big| + |u(y) - u(y)|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \alpha|x - y| + \frac{\varepsilon}{2}$$

$= \varepsilon + \alpha|x - y|$. ε étant arbitrairement choisi on en déduit que $|u(x) - u(y)| \leq \alpha|x - y|$.

Ainsi $u \in D_a$ et donc D_a est un convexe fermé.

La projection de g sur D_a est l'unique solution de

$$\inf_{u \in D_a} ||u - g||^2.$$

$$On\ a : \inf_{u \in D_\alpha} \big||u - g|\big|^2 = \inf_{u \in D_a} \int_0^L \big(u(x) - g(x)\big)^2 dx$$

$$= \inf_{u \in D_a} J(u)$$

$$= J(u^*)$$

3. Montrons que J est strictement convexe
   Il s'agit de prouver que $\forall\, \lambda \in]\, 0{,}1 [$ et $\forall\ u, v \in D_a$ avec $u \neq\ v$ on a :

   $$J(\lambda u + (1 - \lambda)v) < \lambda J(u) + (1 - \lambda)J(v)$$

   On a :
   $J(\lambda u + (1 - \lambda)v) - \lambda J(u) - (1 - \lambda)J(v)$

$$= \int_0^L [\Big(\big(\lambda u(x) + (1 - \lambda)v(x)\big) - g(x)\Big)^2 - \lambda(u(x) - g(x))^2 - (1 - \lambda)(v(x) - g(x))^2]dx$$

$$= \int_0^L [(\lambda^2 - \lambda)u(x)^2 + ((1-\lambda)^2 - (1-\lambda))v(x)^2)$$
$$- 2\lambda u(x)g(x) - 2(1-\lambda)v(x)g(x) + 2\lambda(1-\lambda)u(x)v(x)$$
$$+ 2\lambda u(x)g(x) + 2(1-\lambda)v(x)g(x)]dx$$

$$= \int_0^L [(\lambda^2 - \lambda)u(x)^2 + (\lambda^2 - \lambda)v(x)^2 + 2\lambda(1-\lambda)u(x)v(x)]dx$$
$$= \int_0^L (\lambda^2 - \lambda)[(u(x)^2 + v(x)^2 - 2u(x)v(x)]dx$$
$$= \int_0^L [(\lambda^2 - \lambda)(u(x) - v(x))^2]dx$$
$$=(\lambda^2 - \lambda) \int_0^L [u(x) - v(x)]^2 dx$$
$$=(\lambda^2 - \lambda)||u - v||^2$$

Comme $\lambda \in]0,1[$, on a $\lambda^2 < \lambda$. Aussi, $u \neq v$ donc $\left||u - v|\right| > 0$.

Donc $(\lambda^2 - \lambda)||u - v||^2 < 0$; c'est-à-dire :
$$J(\lambda u + (1-\lambda)v) < \lambda J(u) + (1-\lambda)J(v)$$

On conclut que J est strictement convexe.

4. Montrons que J est différentiable

Soit $u, h \in \ D_a\ telles\ que\ u + h \ \in \ D_a$. On a :

$$J(u+h) =< u - g + h, u - g + h >$$
$$=< u - g, u - g > +2 < u - g, h > +< h, h >$$
$$=J(u) + \mathrm{d}J(u)(h) + o(||h||)$$

Donc J est différentiable et sa différentielle est :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}J(u): D_a &\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto 2\int_0^L \big(u(x)-g(x)\big)h(x)dx \end{aligned}$$

$\mathrm{d}J(u)$ est une forme linéaire sur $C([0,L])$

5. Montrons que $\int_0^L \big(u^*(x)-g(x)\big)dx = 0$
   u^* est solution de (**??**), alors d$J(u^*)$(h)=0 pour tout h ∈ D_a. On a donc :

pour tout h ∈ D_a d$J(u^*)$(h) $= 0 \Leftrightarrow 2\int_0^L \big(u(x)-g(x)\big)h(x)dx = 0$ pour tout h ∈ D_a

$\Leftrightarrow \int_0^L \big(u(x)-g(x)\big)h(x)dx = 0$ pour tout h ∈ D_a

$\Rightarrow \int_0^L \big(u^*(x)-g(x)\big)dx = 0$ en particulier pour h(x)=1 pour tout x élément de [0,L]

$$D'o\grave{u} \quad \int_0^L \big(u^*(x)-g(x)\big)dx = 0$$

Partie II

1. Montrons que $u \in V_h \cap D_a \Leftrightarrow u \in C_h$

$$C_h = \{U \in \mathbb{R}^n, \forall\, i, 1 \le i \le n, |u_i - u_{i-1}| \le \alpha h\}$$

$u \in V_h \cap D_a \Leftrightarrow u \in V_h$ et $|u(x_i) - u(x_{i-1})| \le \alpha h$ $\forall\, i$=1,...,n

$\Leftrightarrow u \in V_h$ et $|u_i - u_{i-1}| \le \alpha h$ $\forall\, i$=1,...,n car $u(x_i) = u_i$

$\Leftrightarrow u \in C_h$

2. Montrer qu'il existe une matrice A qu'on explicitera, telle que

$$I(U) = \langle A(U-G), U-G \rangle$$

On a :

$I(U) = h(\frac{1}{2}(u_0 - g_0)^2 + (u_1 - g_1)^2 + \cdots + (u_{n-2} - g_{n-2})^2 + \frac{1}{2}(u_{n-1} - g_{n-1})^2)$

$= h(\frac{1}{2}(u_0 - g_0), (u_1 - g_1), \cdots, (u_{n-2} - g_{n-2}), \frac{1}{2}(u_{n-1} - g_{n-1})) \begin{pmatrix} u_0 - g_0 \\ \vdots \\ u_{n-2} - g_{n-2} \\ u_{n-1} - g_{n-1} \end{pmatrix}$

$= (h\, diag\left(\frac{1}{2}, 1, \cdots, 1, \frac{1}{2}\right)(U - G)) \cdot (U - G)$

Donc $A = h\, diag\left(\frac{1}{2}, 1, \cdots, 1, \frac{1}{2}\right)$

3. Mise du problème (??) sous la forme canonique d'un problème d'optimisation sous contraintes d'inégalités.

$$U^* = (u_0^*, u_1^*, \cdots u_n^*)^T$$

$$I(U^*) \leq I(U), \forall\, U \in C_h$$

$$\begin{array}{cc} \inf & I(U) \\ u_1 - u_0 - \alpha h \leq 0 & \\ u_2 - u_1 - \alpha h \leq 0 & \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \\ u_{n-1} - u_{n-2} - \alpha h \leq 0 & \\ u_0 - u_1 - \alpha h \leq 0 & \\ u_1 - u_2 - \alpha h \leq 0 & \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \\ u_{n-2} - u_{n-1} - \alpha h \leq 0 & \end{array}$$

$$\text{Donc } C = \left(\begin{array}{rc} & \begin{matrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \end{matrix} \\ ligne\ n-1 \rightarrow & \begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{matrix} \\ & \begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \end{matrix} \\ ligne\ 2(n-1) \rightarrow & \begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{matrix} \end{array}\right) \text{ et}$$

$$b=\begin{pmatrix}\alpha h\\ \vdots\\ \alpha h\\ \alpha h\end{pmatrix}, \text{ b ayant 2(n-1) lignes.}$$

4. Oui le problème a une solution unique car la matrice A est définie positive.
5. Les conditions de KKT pour le premier problème

$$I(U) =< A(U-G), U-G >$$

Soit $Z \in R^{2n-2}$.

$$l(U,Z) = I(U)+< Z, CU-b >$$

$$l(U,Z) =< A(U-G), U-G > +< Z, CU-b >$$

$$\nabla l_U(U,Z) = 2A(U-G) + C^T Z$$

$Si\ U^*$ est un minimum local du problème d'optimisation alors il existe $Z^* \in R^{2n-2}$ tel que :

i) $\nabla l_U(U^*, Z^*) = 0$
ii) ${Z^*}_j \geq 0\ \forall\ j = 1, \dots 2(n-1)$
iii) ${Z^*}_j = 0$ si $C_j^I(U^*) < 0$, avec $C^I(U) = CU - b$

6. Disons si les conditions de KKT sont nécessaires ou suffisantes

Puisque la fonction I (en absence des contraintes d'égalités) à minimiser est strictement convexe, il suffit que la fonction (des inégalités) C^I définie par

$$C^I : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{2(n-1)}$$

$$U \longmapsto CU - b$$

soit convexe pour que les conditions de KKT deviennent suffisantes.
Vérifions si C^I est convexe, c'est-à-dire si

$C^I(\lambda U + (1-\lambda)V) \leq \lambda C^I(U) + (1-\lambda)C^I(V)\ \forall\, \lambda \in [0,1]$,
$\forall$ U, V $\in \mathbb{R}^n$.
Soit $\lambda \in [0,1]$ et soient $\forall$ U, V $\in \mathbb{R}^n$. On a :
$C^I(\lambda U + (1-\lambda)V)$=$C(\lambda U + (1-\lambda)V) - b$

$$= \lambda(C(U) - b) + (1-\lambda)(C(V) - b)$$

$$= \lambda C^I(U) + (1-\lambda)C^I(V)$$

Donc C^I est convexe.

Ainsi les condition de KKT sont suffisantes.

7. Explicitons la solution à l'étape (i)

On a pour tout $(U, Z) \in \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^n$,

$$2A(U-G) + C^T Z = 0 \Leftrightarrow 2A(U-G) = -C^T Z$$
$$\Leftrightarrow (U-G) = -\frac{1}{2}A^{-1}C^T Z$$
$$\Leftrightarrow U = -\frac{1}{2}A^{-1}C^T Z + G$$

Donc la solution à l'étape (i) est :

$$U^{k+1} = -\frac{1}{2}A^{-1}C^T Z^k + G.$$

Partie III Mis en œuvre numérique avec Scilab

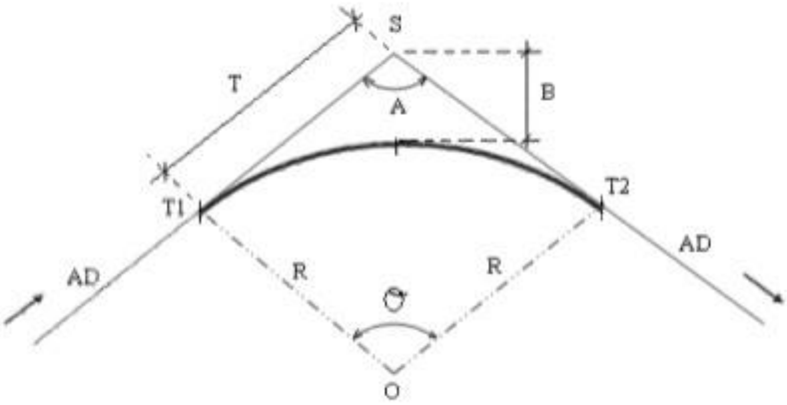
Questions 1 à 9 voir la console du fichier exécuté
« projet_optimisation_groupe_6.sce »

10.

Puisqu’on a trouvé avec Scilab que $\int_0^L (u^*(x) - g(x))dx \approx < A(U * -G), I >$ est positif avec $I = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur colonne de n lignes, alors on a plus remis de terrain qu'on en a retiré.

11. Pour limiter les angles saillants et rentrants et avoir une route plus lisse, nous allons faire des raccordements circulaires simples qui consistent à tailler les parties pointues et remblayer les parties creuses de manière économique comme l’indique la figure ci-dessous. Ces raccordements permettent de calculer l’angle des tangentes, le rayon du secteur circulaire, la longueur des tangentes, le développement (la longueur de l’arc) et la longueur de la bissectrice.

1. Raccordement circulaire simple

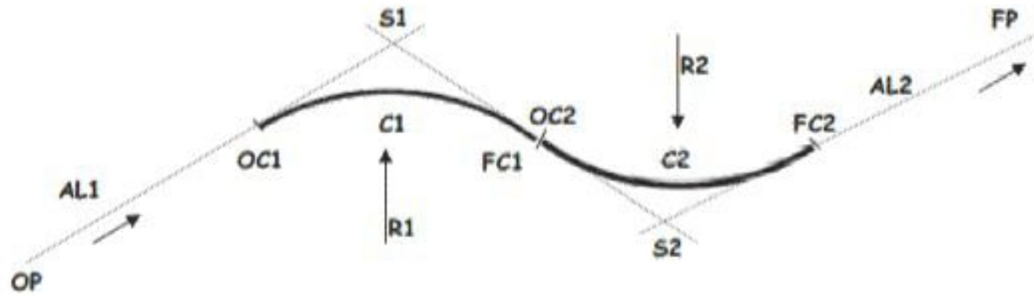


Les ARTBD

A = angle au sommet
R = rayon
T = tangente
B = bissectrice
D = développement
θ = angle au centre

T = R/tan(A/2)
B = R.[(1/sin(A/2)-1]
D = ((200-A).Л.R)/200

.. Courbe en S



✓ Eléments du raccordement

OP : origine du projet
FP : Fin projet
AL : Alignement droit
C : Courbe circulaire
R : Rayon de courbure
S : Sommet des alignements

NB : La longueur totale du tracé en plan est égale à :

L_{totale} = AL1 + C1 + C2 + AL2

12. Disons pourquoi le choix de la fonction x→ x^2

D'abord, la fonction x→ x^2 permet bien de résoudre le problème posé puisque le problème se ramène à une projection sur un convexe fermé. De plus les calculs dans l'espace L^p avec p>2 sont très couteux même pour un ordinateur .