

Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques

(IMSP)

Année académique : 2017-2018

PROJET DE DISCRETISATION D'EDO

(Modélisations de l'évolution de populations)

Professeur : Sidi-Mahmoud Kaber

GROUPE 6

Membres du groupe :

1. KOUAGOU N. Jean
2. BALOGOUN O.A. Ismaïla

Rapport du projet

1. Equation logistique.

L'évolution au cours du temps d'une population évoluant en milieu fermé peut être modélisée par $u'(t) = au(t)(1 - bu(t))$. Les paramètres a et b sont positifs. Le terme $au(t)$ modélise l'accroissement naturel de la population. Le terme $-abu(t)$ freine cette croissance, les ressources disponibles étant limitées. La condition initiale est $u(t_0) = u_0$, population à un instant donné t_0 .

Point d'équilibre: A l'équilibre les effectifs de la population ne varient plus:

$$au(1 - bu) = 0$$

Le système admet les points d'équilibres $u = 0$ et $u = \frac{1}{b}$ si $r > 0$.

Stabilité: Le point $u = 0$ est un équilibre instable (si on introduit quelques individus dans le milieu $u(t)$ croît et donc s'éloigne de 0). Par contre $u = \frac{1}{b}$ est stable (si $u_0 > \frac{1}{b}$, il y a trop d'individus par rapport aux capacités du milieu, donc $u(t)$ décroît et tend vers $\frac{1}{b}$; et inversement si $u_0 < \frac{1}{b}$, $u(t)$ croît et tend vers $\frac{1}{b}$).

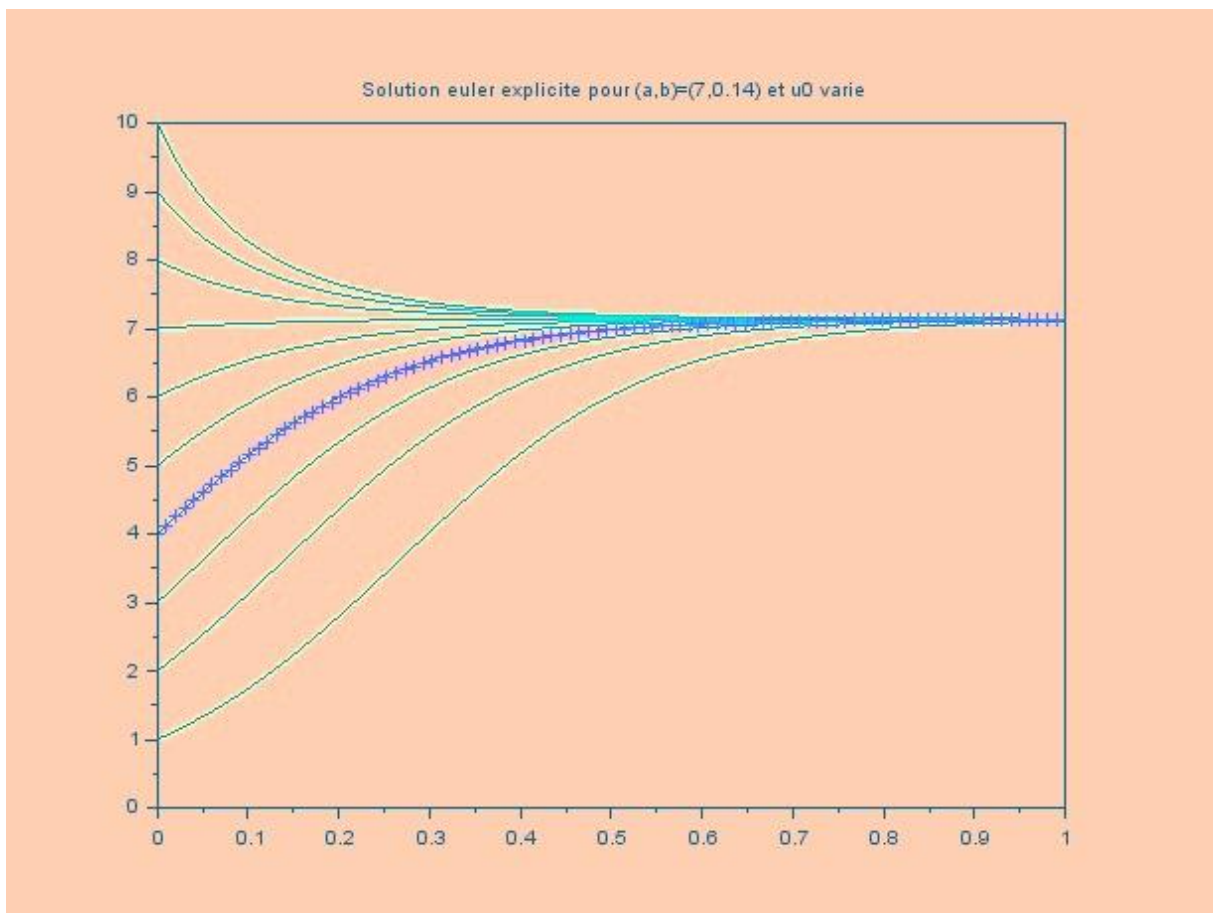


Figure 1.1

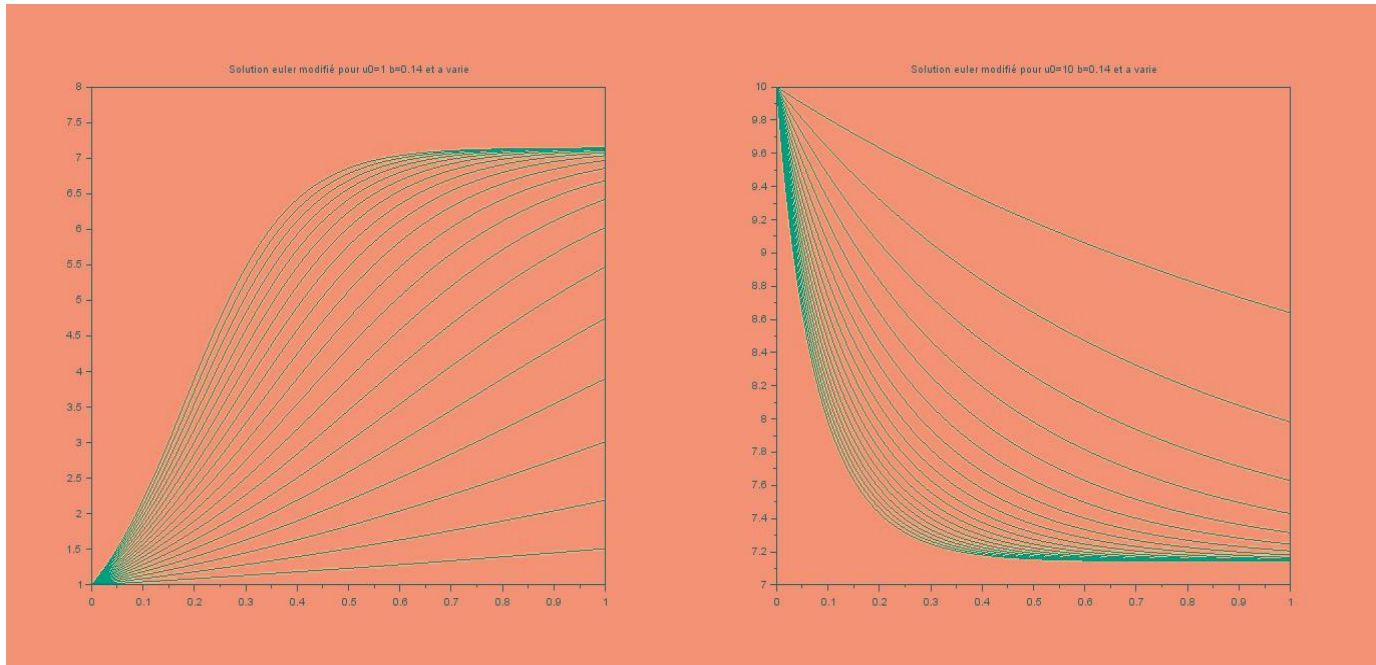


Figure 1.2

Sur les figures 1.1 et 1.2, nous pouvons voir l'influence du taux de croissance a et la capacité limite $\frac{1}{b}$ sur la variation des effectifs de la population. La variation de la population dépend de $\frac{1}{b}$ par rapport à la condition initiale u_0 . Plus a est grand, plus la population va croître ou décroître rapidement vers le point d'équilibre selon que u_0 est inférieur ou supérieur à $\frac{1}{b}$ et plus a est petit, la population va croître ou décroître lentement vers le point d'équilibre.

2. Système de Lotka-Volterra (proies-prédateurs)

On considère cette fois deux populations. Une population de proies dont l'évolution est donnée par $u_1(t)$ et une population de prédateurs dont l'évolution est donnée par $u_2(t)$. Voici une modélisation de l'interaction entre ces deux populations

$$\begin{cases} u'_1(t) = au_1(t) - bu_1(t)u_2(t) \\ u'_2(t) = -cu_2(t) + du_1(t)u_2(t) \end{cases} \quad (1)$$

Les paramètres a , b , c et d sont positifs. La condition initiale est cette fois un vecteur $(u_1(t_0), u_2(t_0)) = u_0$, populations à un instant t_0 donné.

Dans cette section, les courbes bleues représentent le nombre de proies et celles vertes, le nombre de prédateurs.

Points d'équilibre : Soit f la fonction associée au système (1). Alors

$f(u_1, u_2) = (au_1 - eu_1^2 - bu_1u_2, -cu_2 + du_1u_2)$ Les points d'équilibre du système (1) sont donc $(u_1, u_2) = (0, 0)$ et $(u_1, u_2) = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$.

Stabilité du point d'équilibre $(0, 0)$

La fonction est différentiable en $(0, 0)$ et

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

Une valeur propre est de partie réelle strictement positive, alors le point d'équilibre $(0,0)$ est instable (quand on introduit un nombre même petit de proies dans le milieu, en absence de prédateurs, les proies augmentent en nombre, voir la figure 2.1 ci-dessous). Par contre quand on apporte un nombre donné de prédateurs dans le milieu, en absence de proies, les prédateurs meurent et reviennent à zéro en nombre, voir la figure 2.2 ci-dessous. On peut donc dire que le point $(0,0)$ est instable dans la direction u_1 et asymptotiquement stable dans la direction u_2 . Les figures suivantes illustrent ces résultats :

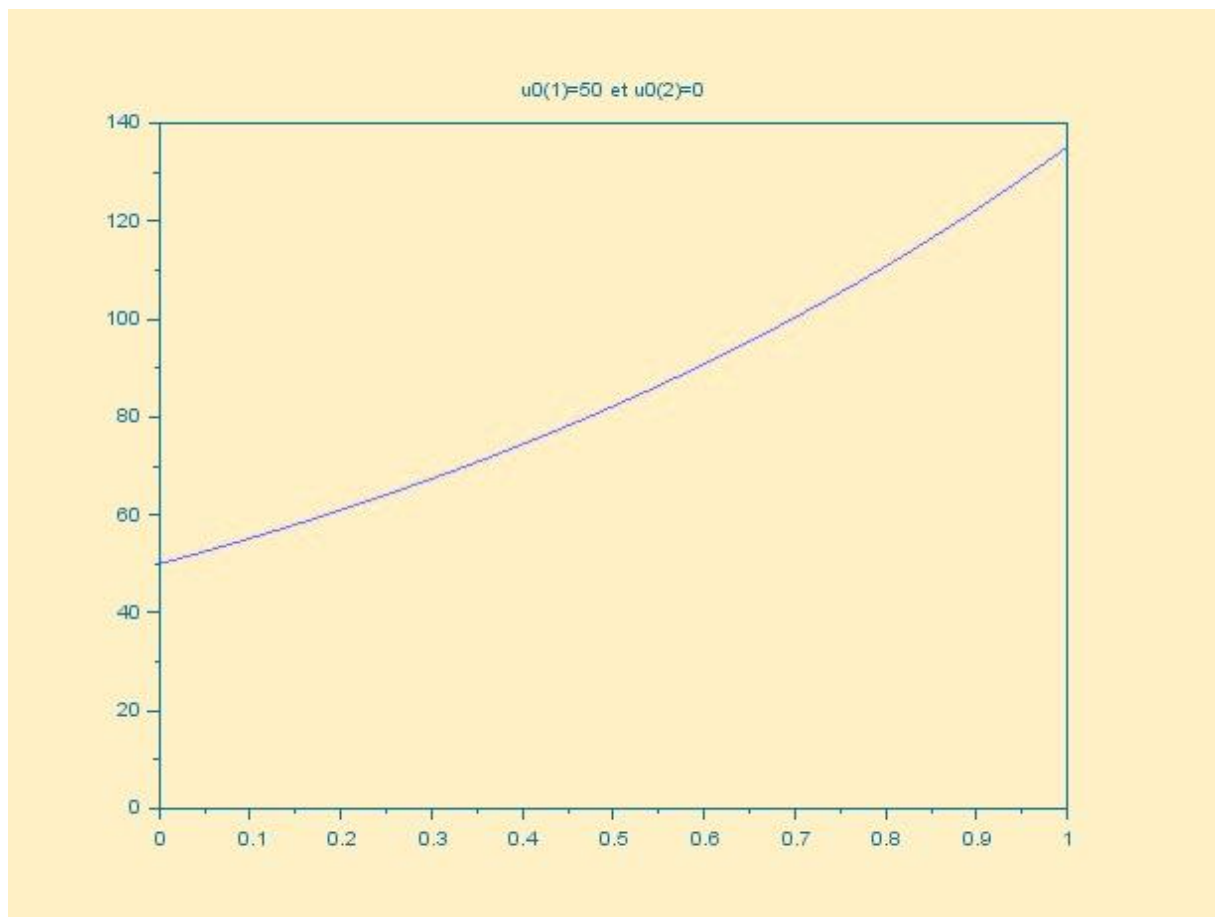


Figure 2.1

L'axe des abscisses est celui du temps et l'axe des ordonnées, celui du nombre de proies.

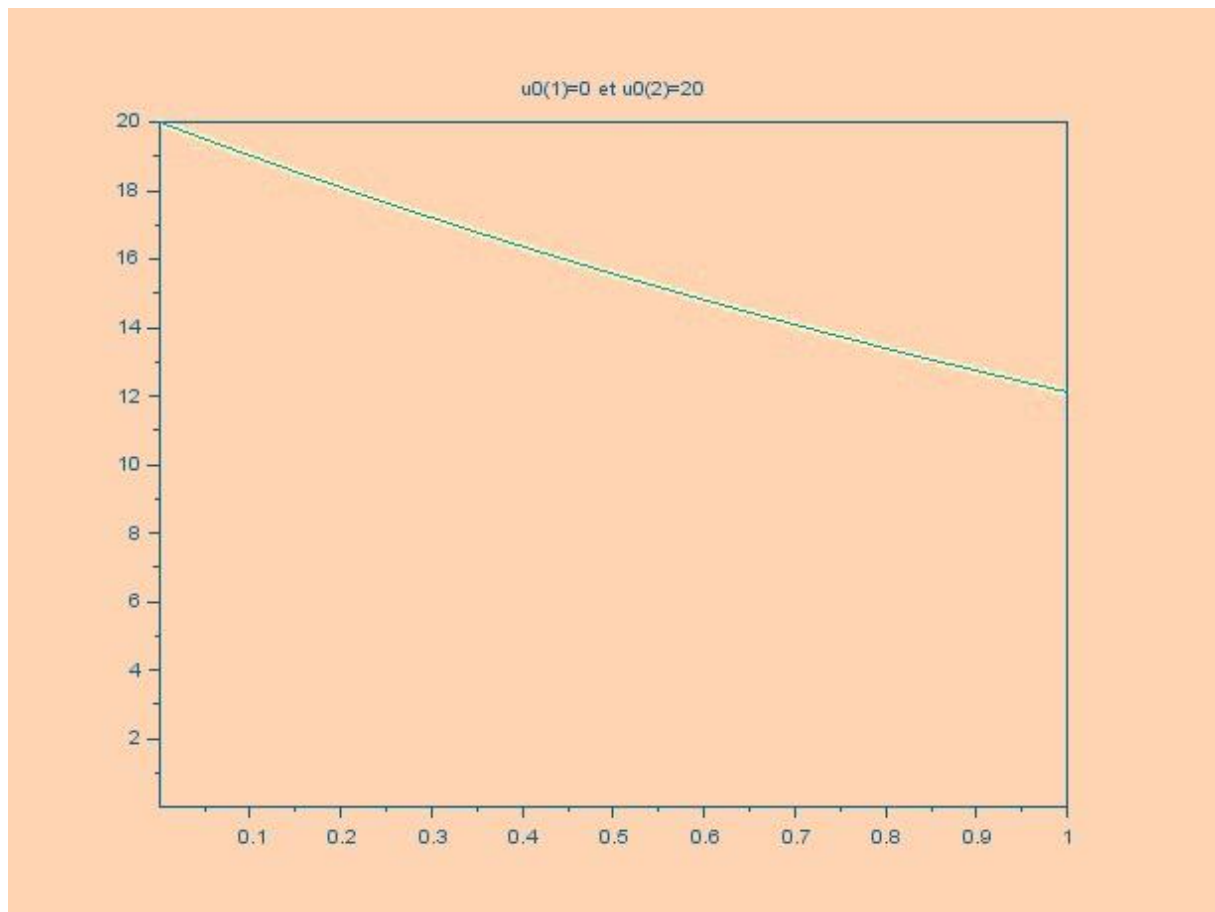


Figure 2.2

L'axe des abscisses est celui du temps et l'axe des ordonnées, celui du nombre de prédateurs.

Stabilité du point d'équilibre $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$

La fonction est différentiable en $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ et

$$Df\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont $-i\sqrt{ac}$ et $i\sqrt{ac}$: toutes les deux imaginaires pures. Le principe de linéarisation ne s'applique pas.

Soit H l'intégrale première du système (1) et posons $V(u_1, u_2) = H(u_1, u_2) - H\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$.

$V(u_1, u_2)$ est supérieure ou égale à zéro, zéro seulement pour $(u_1, u_2) = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ et le produit scalaire de f en u et du gradient de V en u est égal à zéro. Ainsi la fonction V est une fonction de Lyapunov. D'où le point d'équilibre $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ est stable.

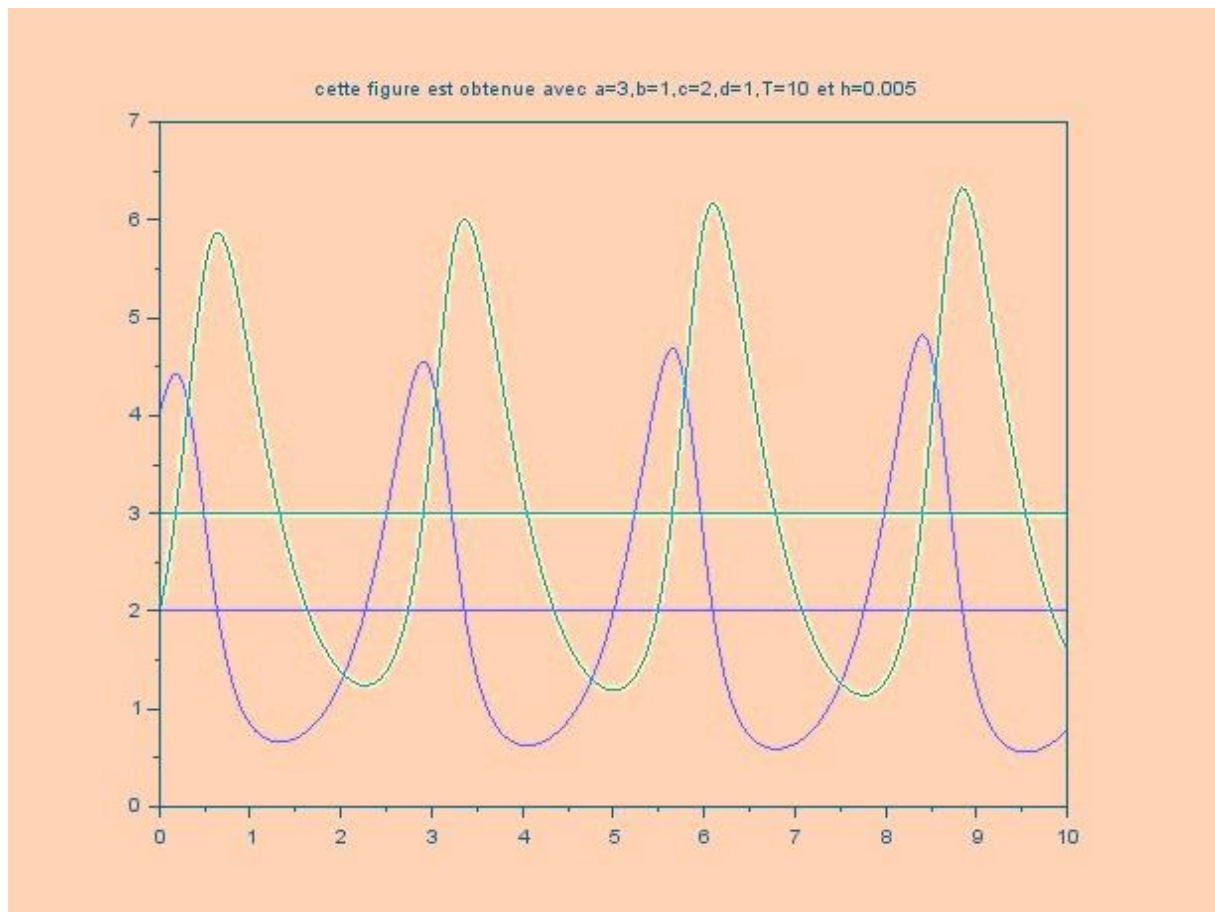


Figure 2.3

Le temps est en abscisses et le nombre des proies et prédateurs en ordonnées.

La droite d'équation $y=3$ est la droite "d'équilibre des prédateurs" et celle d'équation $y=2$ est la droite "d'équilibre des proies". La mise entre griffe signifie que c'est un abus de langage.

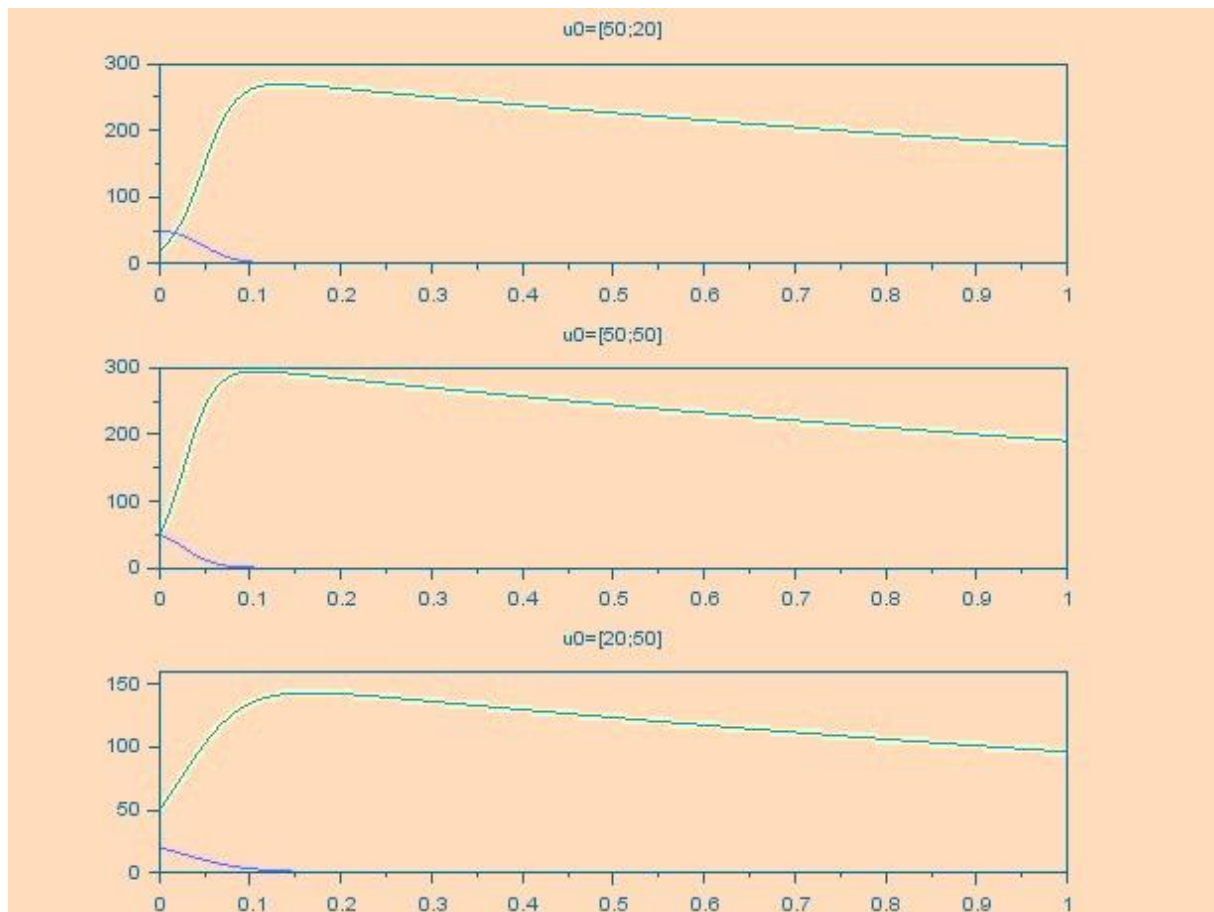


Figure 2.4

Sur les figures 2.3 et 2.4 on voit que quand le nombre de prédateurs augmente, celui des proies diminuent. Et quand il n'y a presque plus de proies, le nombre de prédateurs chute et peut même aller à zéro s'il n'y a plus de proies dans le milieu (ou si ces dernières ne se font plus voir).

Réciproquement (voir figure 2.3), quand le nombre de prédateurs diminuent, celui des proies augmente (cela est possible si les proies ont un lieu de cachette lorsque leur nombre diminue).

3. Modèle logistique de Verhulst.

$$\begin{cases} u'_1(t) = au_1(t) - eu_1(t)^2 - bu_1(t)u_2(t) \\ u'_2(t) = -cu_2(t) + du_1(t)u_2(t) \end{cases} \quad (2)$$

Les paramètres a, b, c, d et e sont positifs. La condition initiale est cette toujours un vecteur $(u_1(t_0), u_2(t_0)) = u_0$, populations à un instant t_0 donné.

Points d'équilibre : Soit f la fonction associée au système (2)

. Alors $f(u_1, u_2) = (au_1 - eu_1^2 - bu_1u_2, -cu_2 + du_1u_2)$

Les points d'équilibre du système (2) sont donc $(u_1, u_2) = (0, 0)$, $(u_1, u_2) = (\frac{a}{e}, 0)$,
 $(u_1, u_2) = (\frac{c}{d}, \frac{ad-ec}{bd})$. u_1 et u_2 devant être positifs ou nuls, on impose $ad - ec \geq 0$.

Stabilité du point d'équilibre (0,0)

La fonction est différentiable en $(0,0)$ et

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

Une valeur propre est de partie réelle a strictement positive, alors le point d'équilibre $(0,0)$ est instable (pour e petit). Notons cependant que pour e non négligeable (exemple pour $e \geq 5$), l'équilibre $(0,0)$ se comporte comme un équilibre stable. Car, même en absence de prédateurs, le nombre de proies diminue et tend vers 0 pour e grand. La figure suivante le démontre clairement :

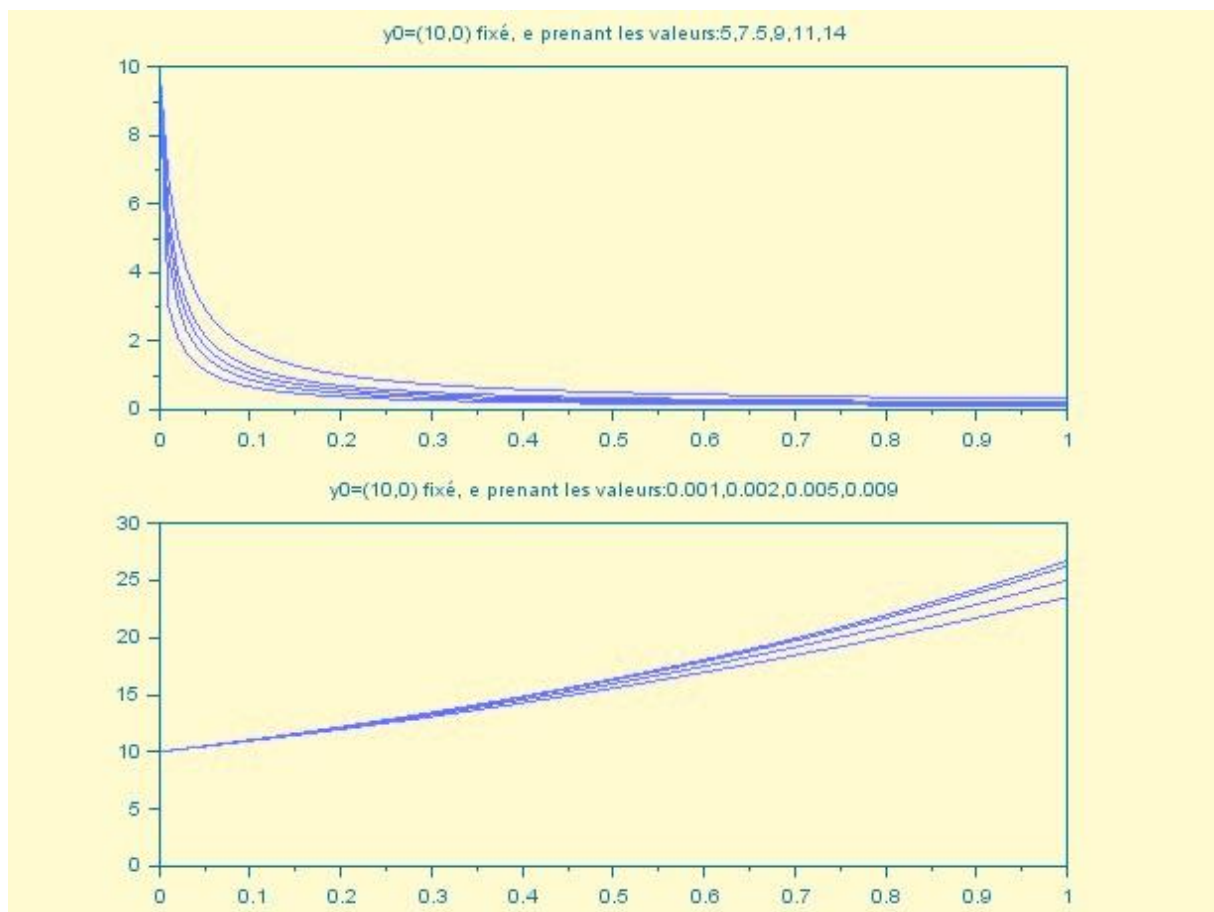


Figure 3.1

Stabilité du point d'équilibre $(\frac{c}{d}, \frac{ad-ec}{bd})$

La fonction f est différentiable en $(\frac{c}{d}, \frac{ad-ec}{bd})$ et

$$Df(\frac{c}{d}, \frac{ad-ec}{bd}) = \begin{pmatrix} \frac{ec}{d} & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad-ec}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

Le calcul des valeurs propres de cette matrice n'étant pas aisé, prenons $e = 1$ avec

$(a, b, c, d) = (1, 0.2, 0.5, 1)$. On a bien $ad \geq ec$.

Les valeurs propres de $Df(\frac{c}{d}, \frac{ad-ec}{bd})$ données par Scilab sont :

$$-0.25 + 0.4330127i \text{ et } -0.25 - 0.4330127i$$

Elles sont toutes deux de partie réelles strictement négative. Le point $(\frac{c}{d}, \frac{ad-ec}{bd})$ **est donc un point d'équilibre stable.**

Stabilité du point d'équilibre $(\frac{a}{e}, 0)$

La fonction f est différentiable en $(\frac{a}{e}, 0)$ et

$$Df(a/e, 0) = \begin{pmatrix} -a & -\frac{ab}{e} \\ 0 & \frac{(ad-ec)}{e} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $Df(\frac{a}{e}, 0)$ sont : $\lambda = -a$ et $\lambda = \frac{(ad-ec)}{e}$. On a : $-a < 0$ et $ad - ec \geq 0$. Ainsi l'une des valeurs propres est positive. Donc l'équilibre $(\frac{a}{e}, 0)$ est instable.

La figure ci-dessous montre l'influence du paramètre e sur l'évolution des deux populations.

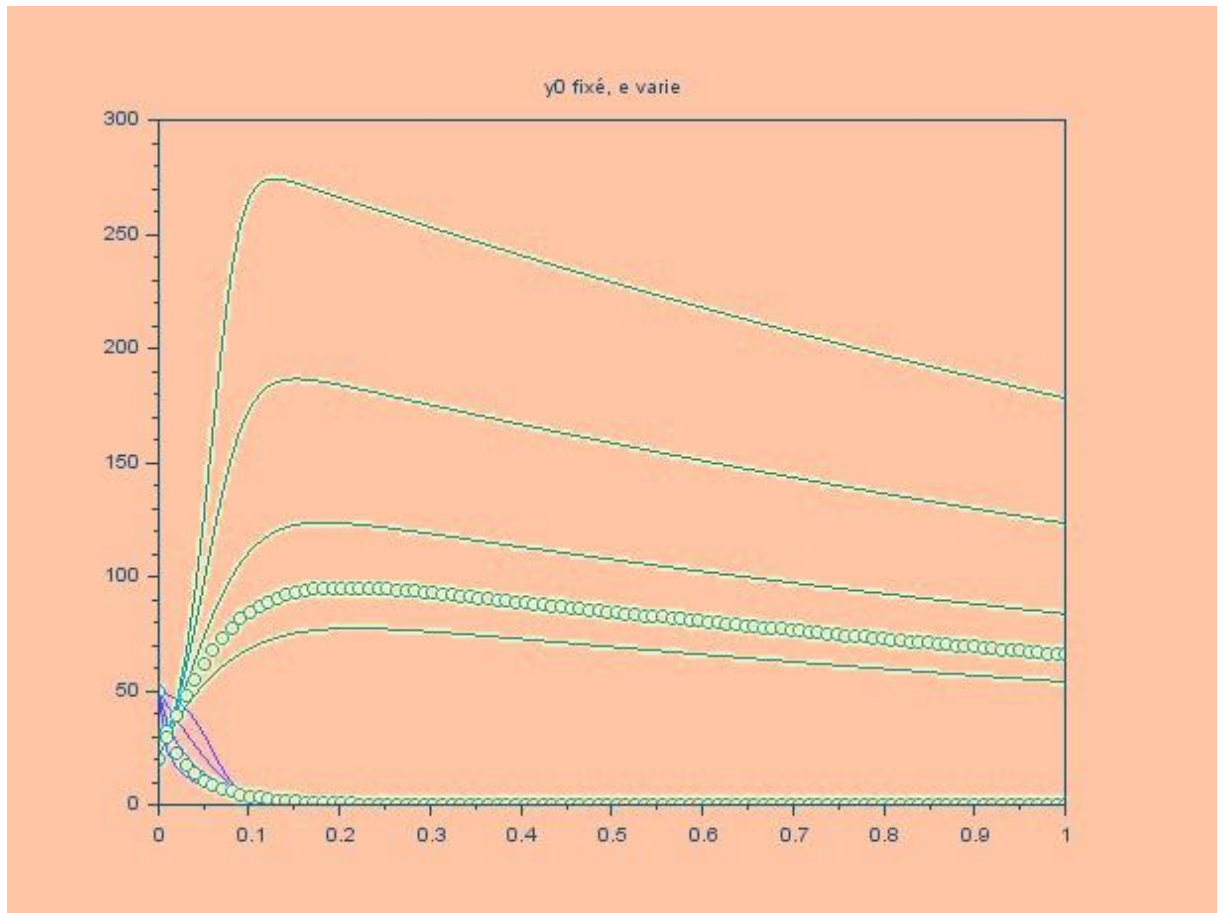


Figure 3.2

En présence de prédateurs, si le paramètre e est important, le nombre de proies chute très rapidement, ce qui entraîne la chute du nombre de prédateurs aussitôt. Si le paramètre e est assez petit, on se ramène dans le cas du **Système de Lotka-Volterra (proies-prédateurs)** précédemment résolu.

Lorsqu'on part de la donnée initiale $(\frac{a}{e}, 0)$, le nombre de proies reste constant et égal à $\frac{a}{e}$ comme le démontre la figure ci-dessous.

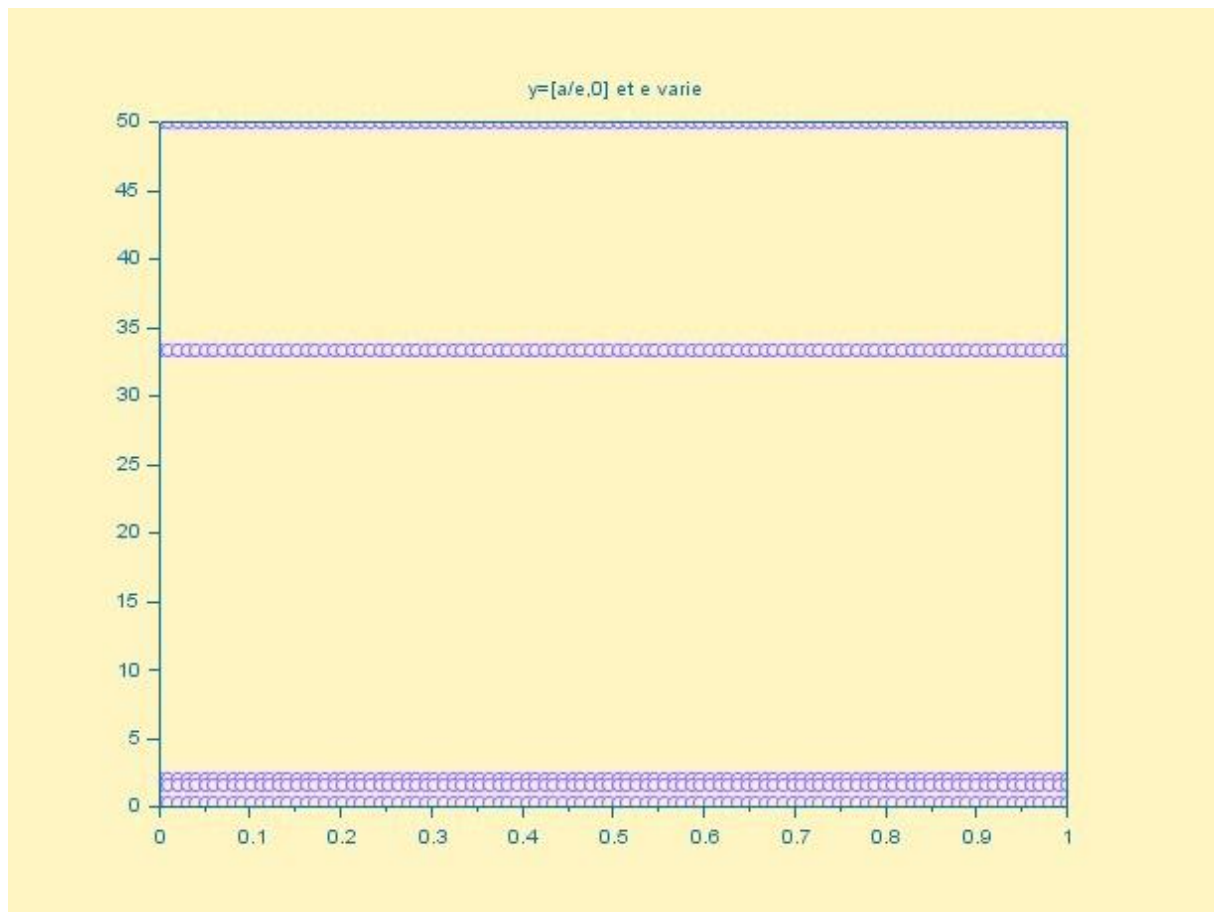


Figure3.3

4. Populations en compétition

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_1(t)(1 - u_1(t) - \theta_{1,2}u_2(t)) \\ u_2'(t) = au_2(t)(1 - u_2(t) - \theta_{2,1}u_1(t)) \end{cases} \quad (3)$$

Pour cette partie de compétition, les courbes bleues représentent le nombre d'individus de la première espèce, c'est-à-dire les courbes de u_1 et celles vertes, le nombre d'individus de la deuxième espèce (courbes de u_2).

Points d'équilibre : Soit f la fonction associée au système (3). On a :

$f(u_1, u_2) = (u_1(1 - u_1 - \theta_{1,2}u_2), au_2(1 - u_2 - \theta_{2,1}u_1))$. Donc $f(u_1, u_2) = (0,0)$ équivaut à :

$$(u_1, u_2) = (0, 0) \text{ ou } (u_1, u_2) = (0, 1) \text{ ou } (u_1, u_2) = (1, 0) \text{ ou } \begin{cases} 1 - u_1 - \theta_{1,2}u_2 = 0 \\ 1 - u_2 - \theta_{2,1}u_1 = 0 \end{cases}$$

Il y a trois états d'équilibre qui sont toujours présents quelque soient les valeurs des paramètres du système (3). Il s'agit de : $(u_1, u_2) = (0, 0)$, $(u_1, u_2) = (0, 1)$ et $(u_1, u_2) = (1, 0)$.

Un quatrième état d'équilibre existe sous certaines conditions : quand les droites d'équation $1 - u_1 - \theta_{1,2}u_2 = 0$ et $1 - u_2 - \theta_{2,1}u_1 = 0$ ont un point d'intersection qui se trouve dans le quart de plan positif. Ce point d'équilibre existe lorsque $\theta_{1,2}\theta_{2,1} \neq 1$ et on a :

$$u_1 = \frac{1 - \theta_{1,2}}{1 - \theta_{1,2}\theta_{2,1}}, u_2 = \frac{1 - \theta_{2,1}}{1 - \theta_{1,2}\theta_{2,1}}. \text{ On l'appelle état d'équilibre intérieur.}$$

Stabilité des équilibres :

***Stabilité de (0,0)**

La fonction f est différentiable en $(0, 0)$ et

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres qui sont 0 et 1 sont positives. Donc l'équilibre $(0,0)$ est instable.

***Stabilité de (1,0)**

La fonction f est différentiable en $(1, 0)$ et

$$Df(1, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -\theta_{1,2} \\ 0 & a - a\theta_{2,1} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont -1 et $a - a\theta_{2,1}$. Si $\theta_{2,1} \geq 1$, les deux valeurs propres sont négatives et l'équilibre est stable. Sinon, l'équilibre est instable.

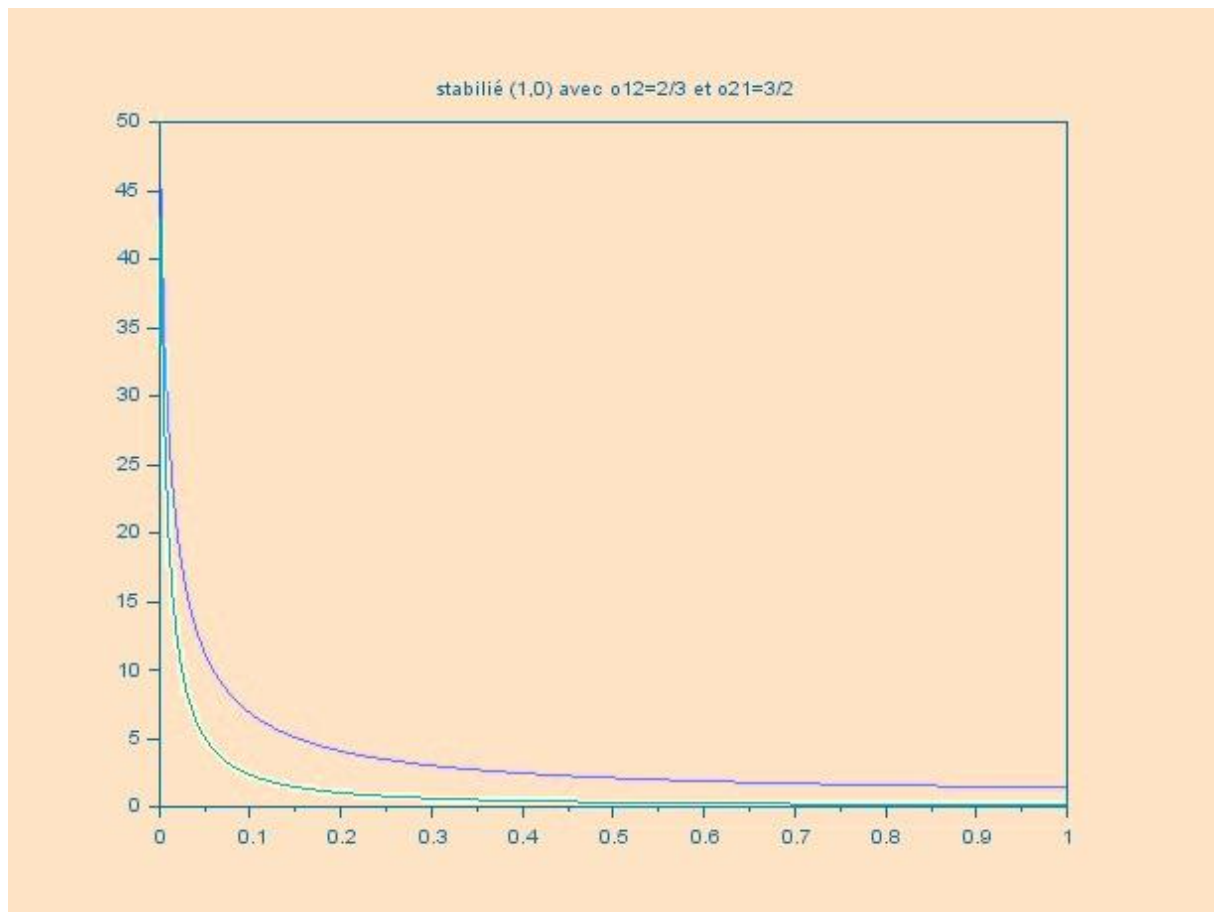


Figure 4.1

***Stabilité de (0,1)**

La fonction f est différentiable en $(0, 1)$ et

$$Df(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 - \theta_{1,2} & 0 \\ -a\theta_{2,1} & -a \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont $-a$ et $1 - \theta_{1,2}$. Si $\theta_{1,2} \geq 1$, les deux valeurs propres sont négatives et l'équilibre est stable. Sinon, l'équilibre est instable.

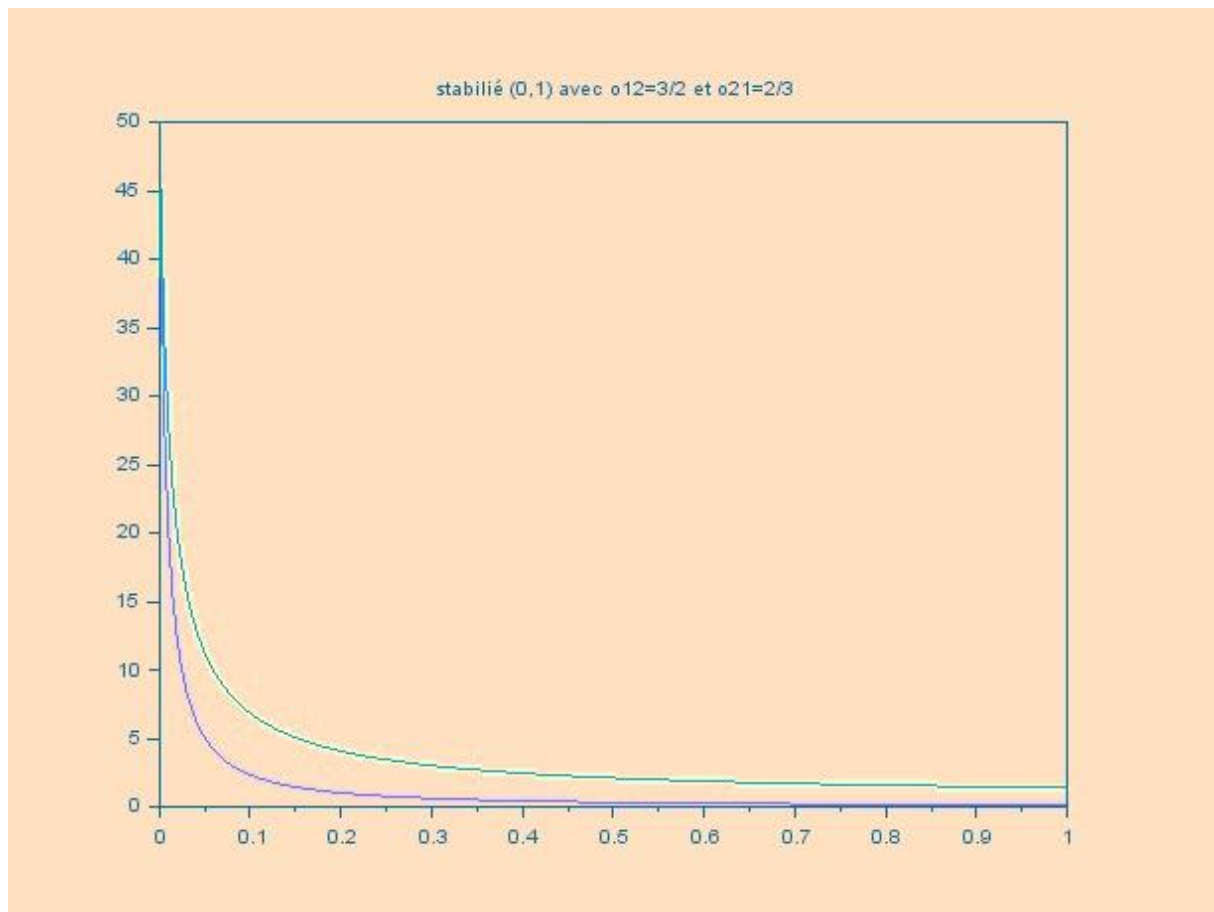


Figure 4.2

Sur les figures 4.1 et 4.2 ci-dessus, le choix de $\theta_{1,2}$ et $\theta_{2,1}$ (donnant $\theta_{1,2}\theta_{2,1}=1$ avec $\theta_{2,1} \geq 1$ pour la figure 4.1 et $\theta_{1,2} \geq 1$ pour la figure 4.2) assure respectivement, non seulement que les équilibres $(1, 0)$ et $(0,1)$ soient stables mais aussi que l'équilibre intérieur n'interfère pas avec ces derniers. Cela permet de bien faire les observations cas par cas.

***Stabilité du quatrième état d'équilibre**

Selon les cas il peut être stable ou instable. Trois régimes qualitativement très différents sont observables selon les positions relatives de ces deux droites.

Dans le cas où elles ne se coupent pas, l'état d'équilibre intérieur n'existe pas : la coexistence des deux populations est impossible car l'une des deux supplante l'autre qui s'éteint. Ceci advient pour n'importe quelles abondances initiales $(u_{01}, u_{02}) \geq 0$.

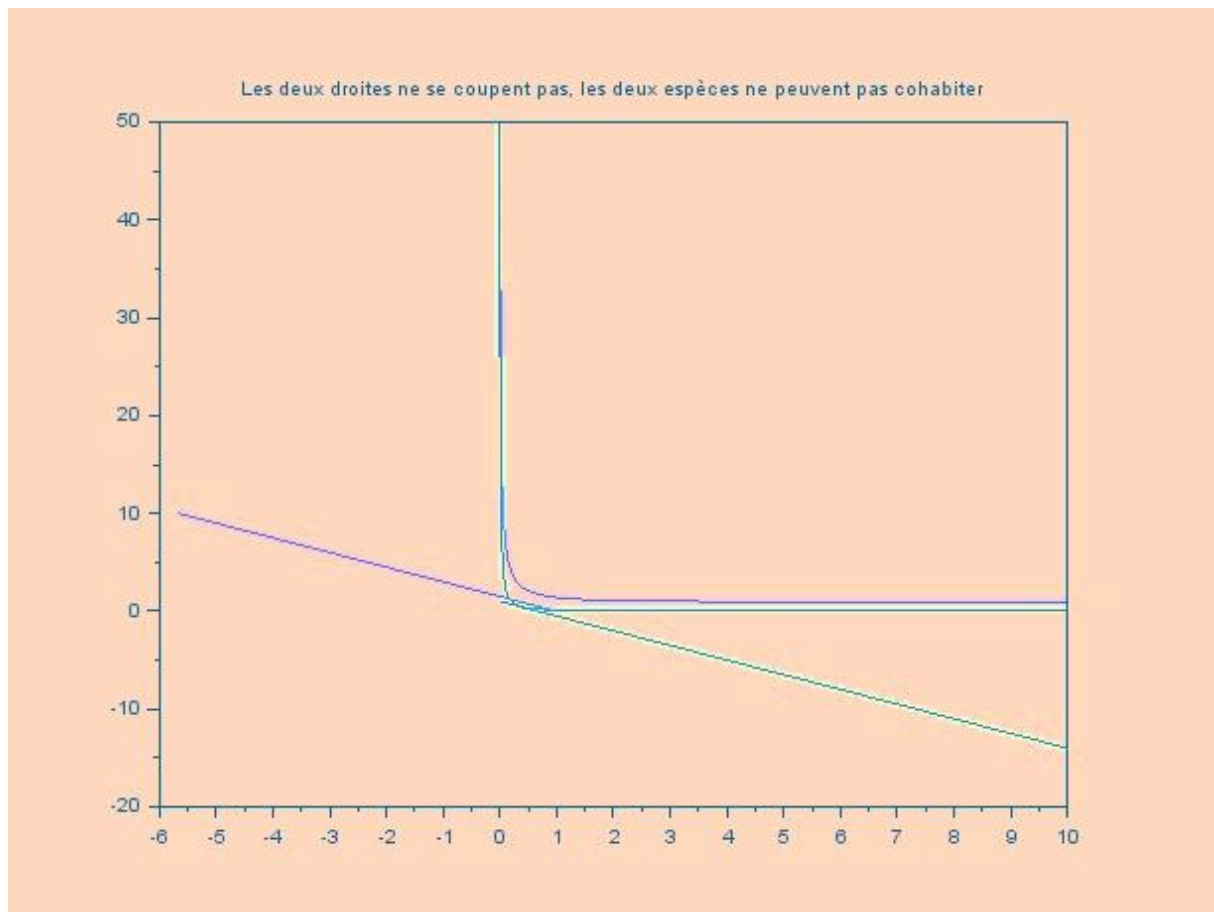


Figure 4.3

Dans le cas où les droites se coupent, il y a deux régimes très différents : soit il y a convergence vers l'état d'équilibre intérieur ($u_1 \rightarrow \frac{1-\theta_{1,2}}{1-\theta_{1,2}\theta_{2,1}}$, $u_2 \rightarrow \frac{1-\theta_{2,1}}{1-\theta_{1,2}\theta_{2,1}}$), c'est-à-dire coexistence des deux populations, pour n'importe quelles abondance initiales $(u_{01}, u_{02}) \geq 0$; soit une population supplante l'autre mais cela dépend des conditions initiales (u_{01}, u_{02}) . Plus précisément, on peut observer que le quart de plan positif se divise en deux régions complémentaires : l'une est le bassin d'attraction de l'état d'équilibre $(1,0)$ qui correspond au fait que la population u_1 va finir par supplanter l'autre qui va s'éteindre ; l'autre est le bassin d'attraction de l'équilibre $(0,1)$ qui correspond à la situation inverse. On parle de bi-stabilité.

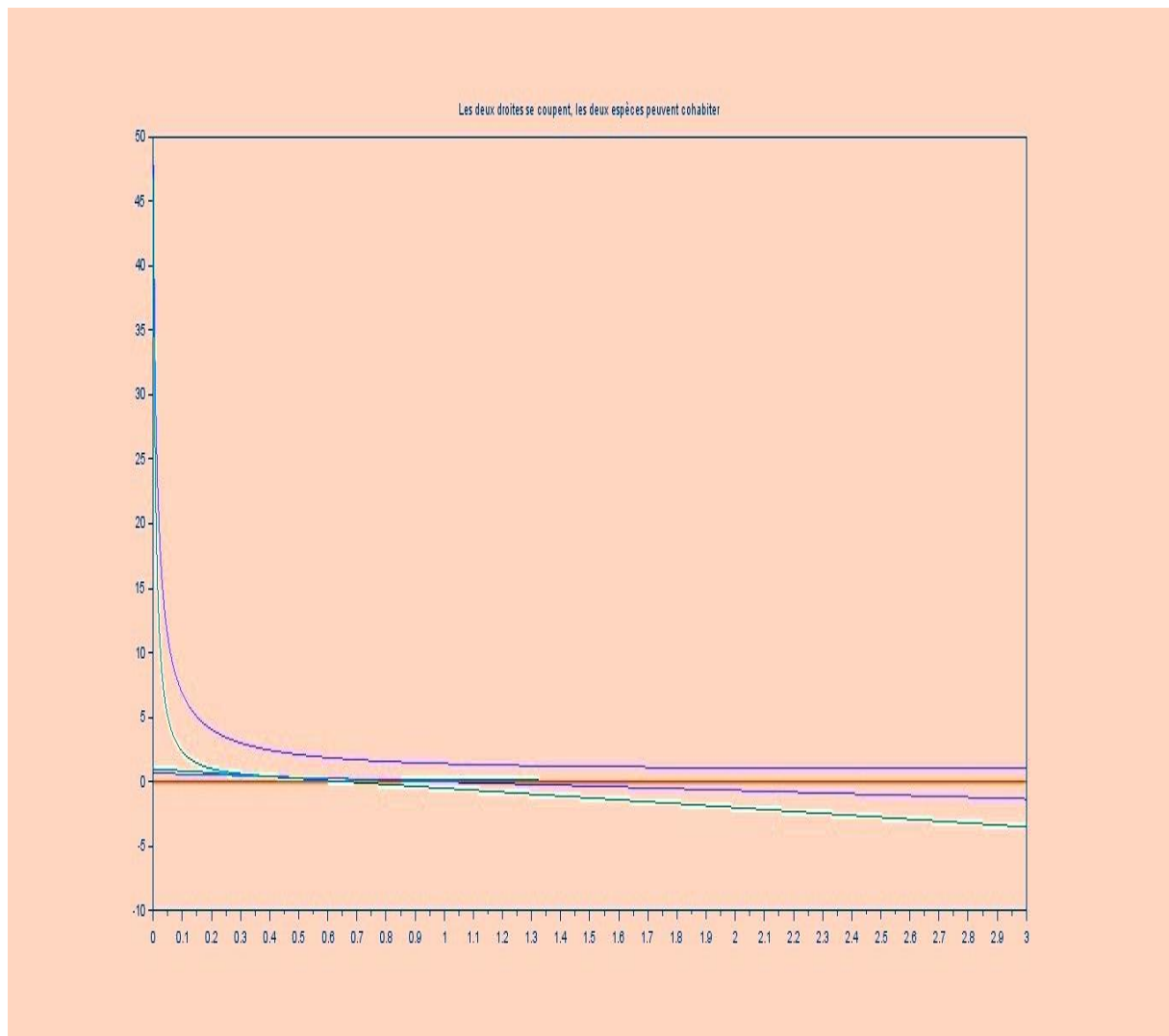


Figure 4.4

Si l'une des populations est absente (ou si la présence de l'une n'a aucun impact sur l'autre) alors la population (de chacune des espèces) tend vers 1. La figure ci-dessous illustre ce résultat :

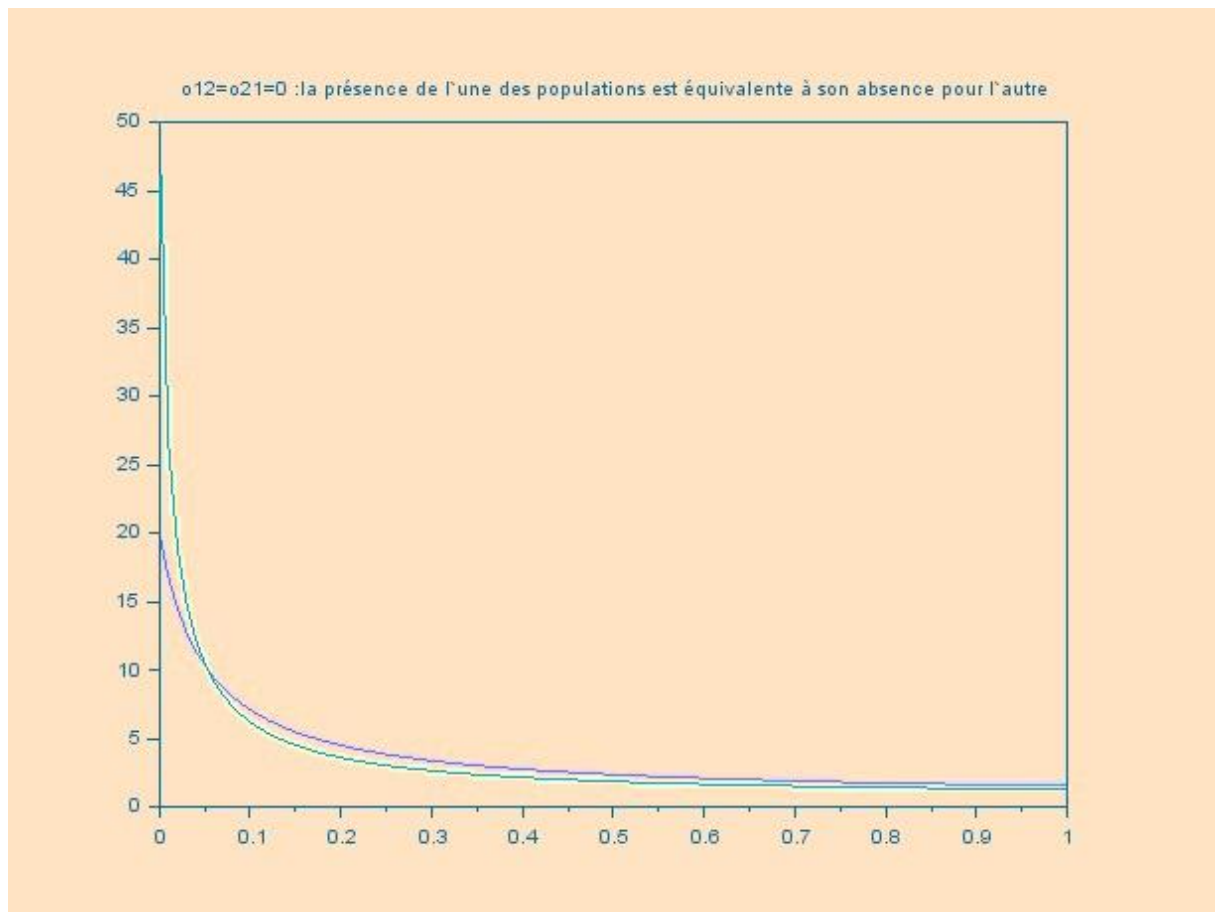


Figure 4.5

Lorsqu'une seule des espèces inhibe le développement de l'autre, on a la figure suivante (correspondant au cas $\theta_{1,2} = 0$ et $\theta_{2,1} = 3$) :

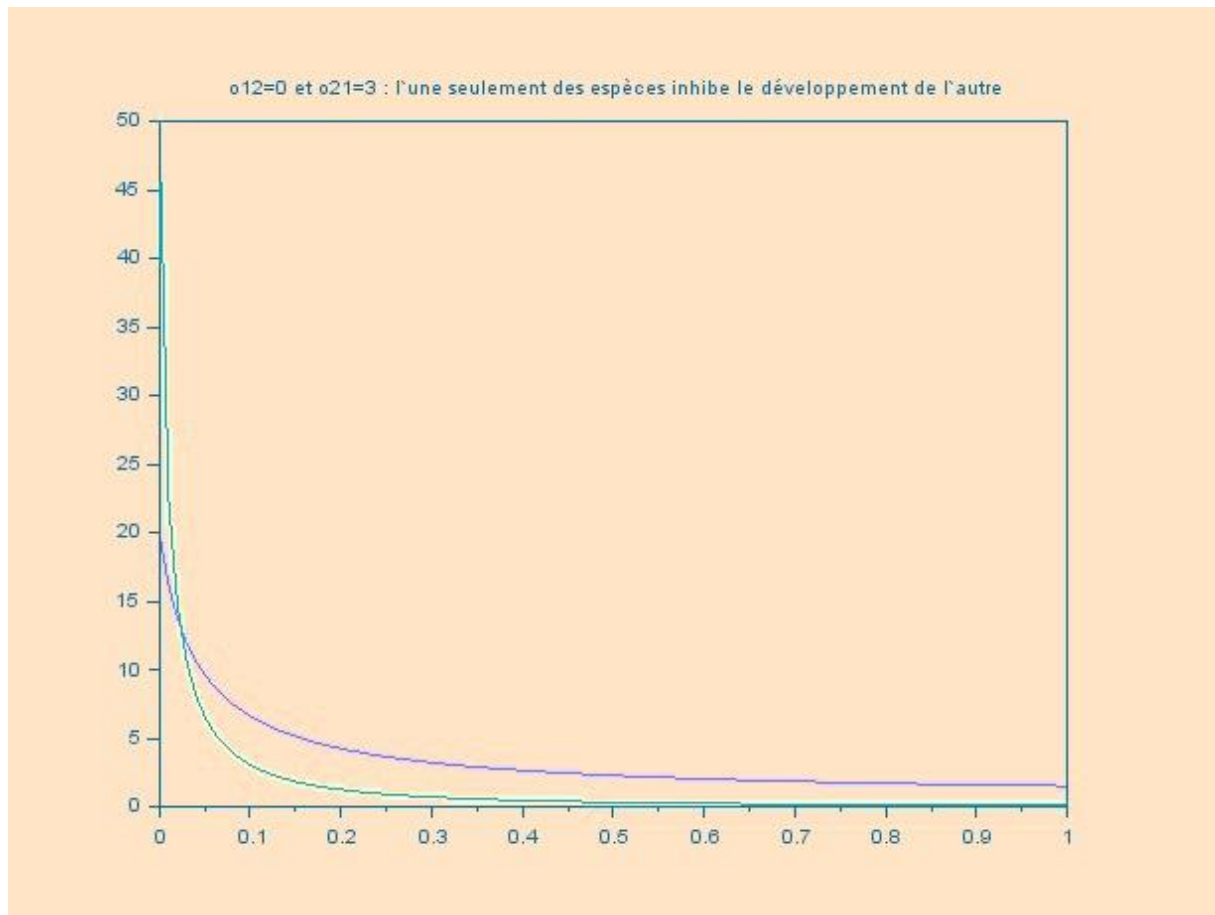


Figure 4.5

5. Généralisation

Nous avons choisi le modèle de deux prédateurs ayant une proie commune :

$$\begin{cases} u'_1(t) = au_1(t) - bu_1(t)u_2(t) - cu_1(t)u_3(t) \\ u'_2(t) = -du_2(t) - eu_2(t)u_3(t) + fu_1(t)u_2(t) \\ u'_3(t) = -gu_3(t) - hu_2(t)u_3(t) + iu_1(t)u_3(t) \end{cases} \quad (4)$$

Les paramètres ***a, b, c, d, e, f, g, h et i*** sont tous positifs.

-Le terme ***au₁(t)*** est l'accroissement naturel des proies. Donc, le nombre de proies augmente de manière « exponentielle » (en fait nous ignorons les autres facteurs qui pourraient freiner l'accroissement des proies) en absence des deux prédateurs.

- Le terme ***-du₂(t)*** est l'accroissement naturel de la première classe de prédateurs. Ce qui signifie que ces prédateurs meurent en absence (ou en cas d'insuffisance) de proies.

- Le terme $-gu_3(t)$ est l'accroissement naturel de la deuxième classe de prédateurs. Aussi, ces prédateurs meurent en absence (ou en cas d'insuffisance) de proies.
- Le produit $u_2(t)u_3(t)$ modélise l'interaction entre les deux classes de prédateurs. Il apparaît avec le signe moins (-) dans l'équation d'évolution des deux classes de prédateurs. Cela signifie que la présence de l'une ou l'autre de ces deux classes de prédateurs nuit à l'autre.
- Les termes $u_1(t)u_2(t)$ et $u_1(t)u_3(t)$ apparaissent dans l'équation d'évolution des proies avec un signe négatif et dans l'équation d'évolution des prédateurs avec un signe positif. Cela signifie que la présence de l'une des deux classes de prédateurs nuit aux proies mais que la présence des proies est avantageuse pour les deux classes de prédateurs.

Ici, les courbes rouges (***courbes de u_1***) montrent l'évolution des proies au cours du temps, les courbes vertes (***courbes de u_2***) l'évolution de la première classe de prédateurs et les courbes bleues (***courbes de u_3***) l'évolution de la deuxième classe de prédateurs.

Points d'équilibre du système : Soit G la fonction associée au système (4). Alors $G(u_1, u_2, u_3) = (au_1 - bu_1u_2 - cu_1u_3, -du_2 - eu_2u_3 + fu_1u_2, -gu_3 - hu_2u_3 + iu_1u_3)$.
 Le système a cinq points d'équilibre qui sont : $(u_1, u_2, u_3) = (0, 0, 0)$,
 $(u_1, u_2, u_3) = (0, -\frac{g}{h}, -\frac{d}{e})$, $(u_1, u_2, u_3) = (\frac{g}{i}, 0, \frac{a}{c})$, $(u_1, u_2, u_3) = (\frac{d}{f}, \frac{a}{b}, 0)$ et
 $(u_1, u_2, u_3) = (\frac{ebg + hdc + ahe}{hcf + eib}, \frac{idc - fgc + aei}{hcf + eib}, \frac{idb + fgb + ahf}{hcf + eib})$

Le dernier point d'équilibre est l'unique solution du système suivant qui est obtenu quand $x \neq 0, y \neq 0$ et $z \neq 0$:

$$\begin{cases} a - bu_2 - cu_3 = 0 \\ -g + iu_1 - hu_2 = 0 \\ -d + fu_2 - eu_3 = 0 \end{cases}$$

Stabilité des points d'équilibre

Nous n'allons pas nous intéresser au point $(0, -\frac{g}{h}, -\frac{d}{e})$ puisqu'on ne peut avoir un nombre négatif d'individus.

***Stabilité du point d'équilibre $(0, 0, 0)$**

La fonction G est différentiable en $(0, 0, 0)$ et

$$dG(0,0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 \\ 0 & 0 & -g \end{pmatrix}$$

Une valeur propre est de partie réelle a strictement positive, alors le point d'équilibre $(0,0,0)$ est instable (quand on introduit un nombre même petit de proies dans le milieu, en absence des prédateurs, les proies augmentent en nombre). Par contre quand on apporte un nombre donné de prédateurs dans le milieu, en absence de proies, les prédateurs meurent et reviennent à zéro en nombre. On peut donc dire que le point $(0,0,0)$ est instable dans la direction u_1 et asymptotiquement stable dans les direction u_2 et u_3 . Les figures suivantes illustrent ces résultats :

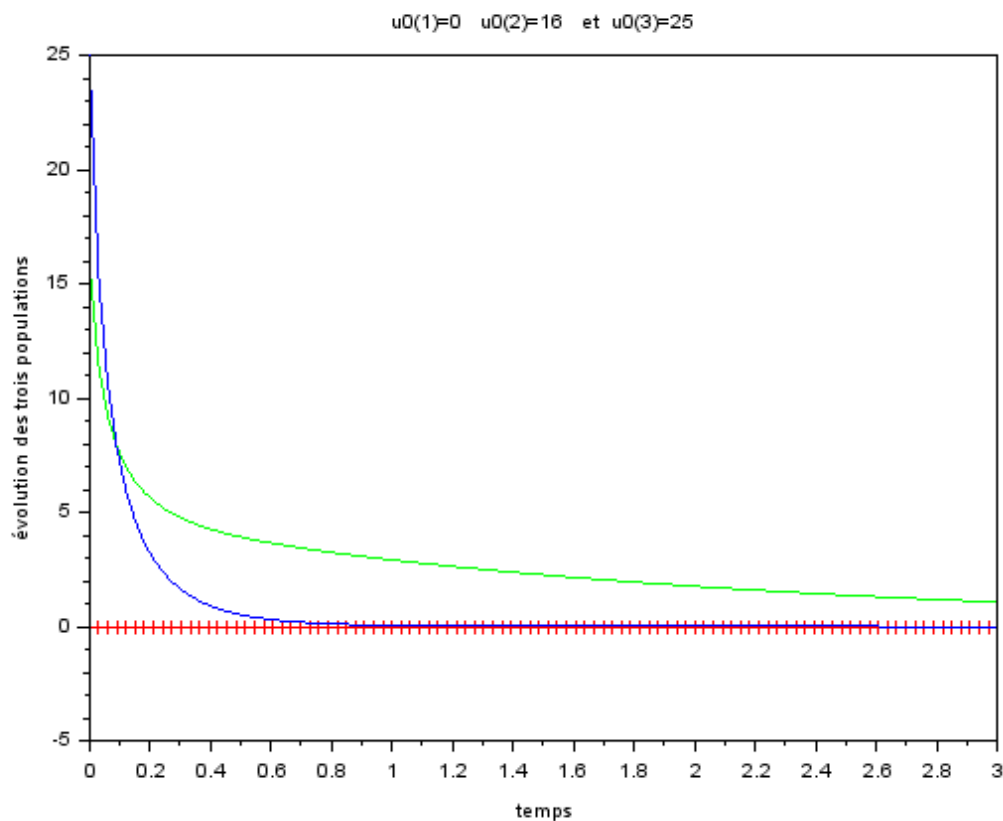


Figure 5.1

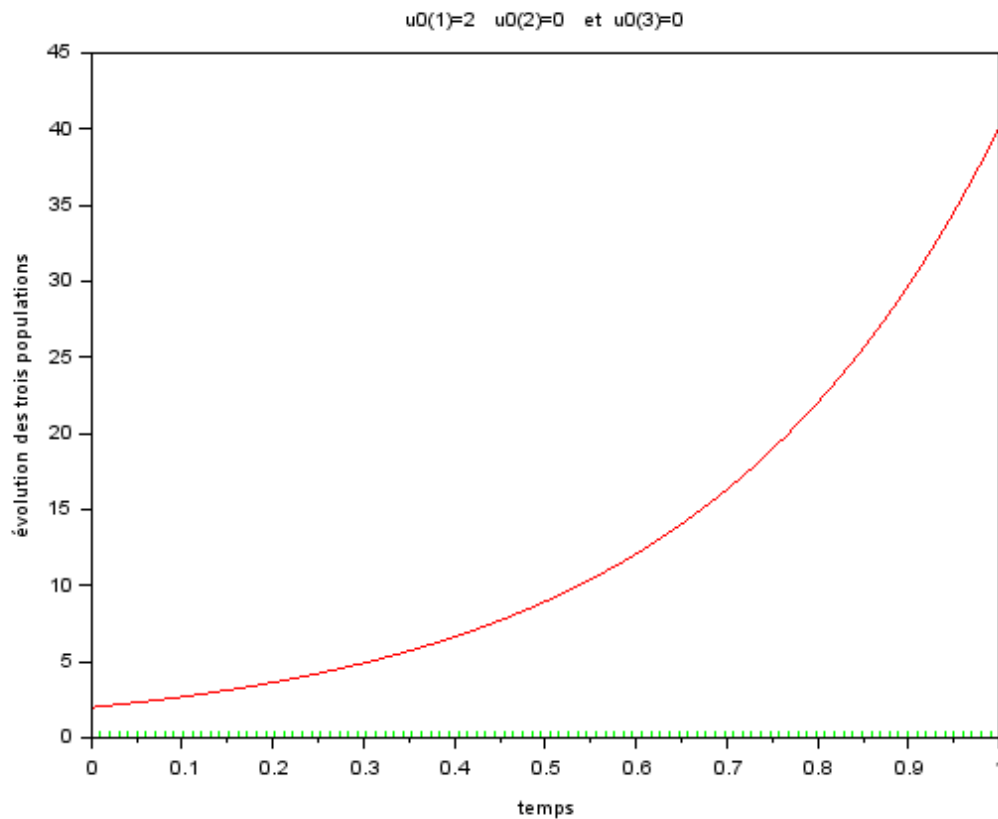


Figure 5.2

***Stabilité du point d'équilibre** $\left(\frac{g}{i}, 0, \frac{a}{c}\right)$,

La fonction G est différentiable en $(d/e, a/b, 0)$ et

$$dG\left(\frac{g}{i}, 0, \frac{a}{c}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bg}{i} & -\frac{cg}{i} \\ 0 & -d - \frac{ae}{c} + \frac{fg}{i} & 0 \\ \frac{ia}{c} & -\frac{ha}{c} & 0 \end{pmatrix}$$

Le calcul des valeurs propres de cette matrice n'étant pas prenons les valeurs $a = 3$; $b = 0.5$; $c = 0.7$; $d = 0.5$; $e = 0.5$; $f = 0.1$; $g = 1.5$; $h = 1$; $i = 0.6$ qui sont utilisées dans la programmation.

Les valeurs propres données par Scilab sont : $2.1213203i$; $-2.1213203i$; -2.3928571

Soit H l'intégrale première du système (4). Posons $V(u_1, u_2, u_3) = H(u_1, u_2, u_3) - H\left(\frac{g}{i}, 0, \frac{a}{c}\right)$. $V(u_1, u_2, u_3)$ est supérieure ou égale à zéro, zéro seulement pour $(u_1, u_2, u_3) = \left(\frac{g}{i}, 0, \frac{a}{c}\right)$ et le produit scalaire de f en u et du gradient de V en u est égal à zéro. Ainsi la fonction V est une fonction de Lyapunov. D'où le point d'équilibre $\left(\frac{g}{i}, 0, \frac{a}{c}\right)$ est stable.

La figure 5.3 est le résultat d'une perturbation de l'état d'équilibre $\left(\frac{g}{i}, 0, \frac{a}{c}\right)$ en prenant le départ en $\left(\frac{g}{i} + 1.5; 2; \frac{a}{c} + 1.5\right)$.

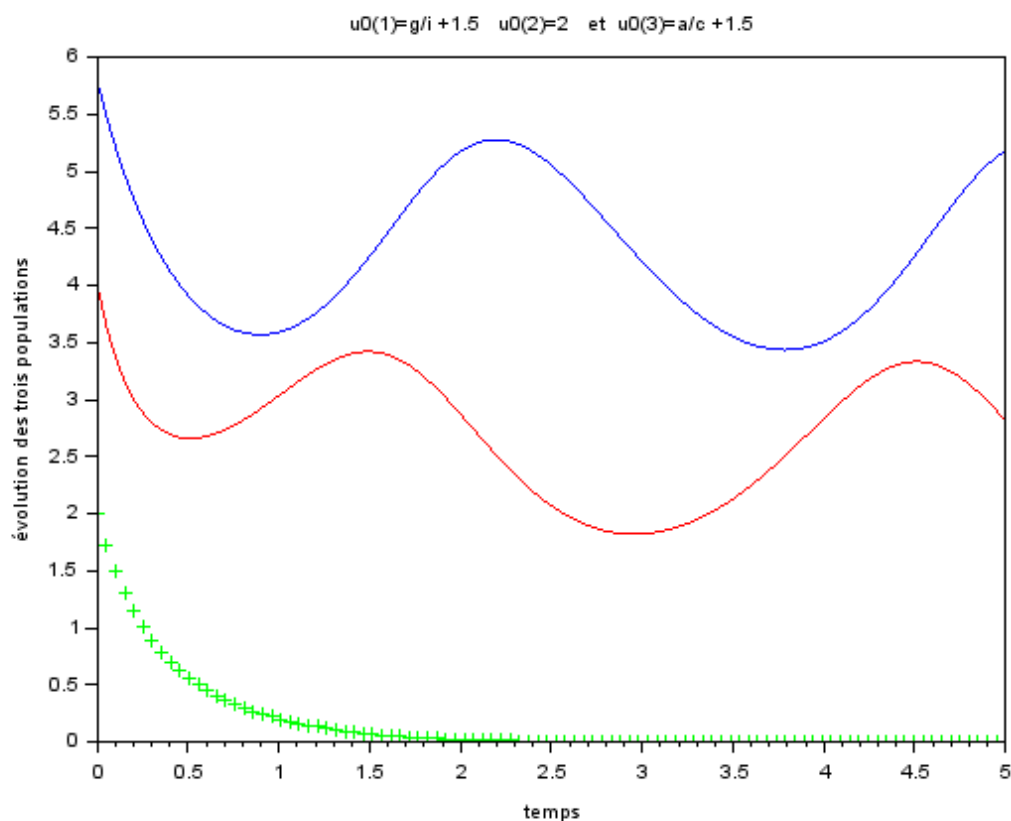


Figure 5.3

Si une c'est une seule classe de prédateurs qui est initialement présente avec les proies, ($u_3=0$ par exemple), le nombre de proies diminue toujours quand celui des prédateurs s'élève. Le nombre de prédateurs diminuent par la suite à cause du manque de proies. La figure 5.4 suivante montre ce résultat.

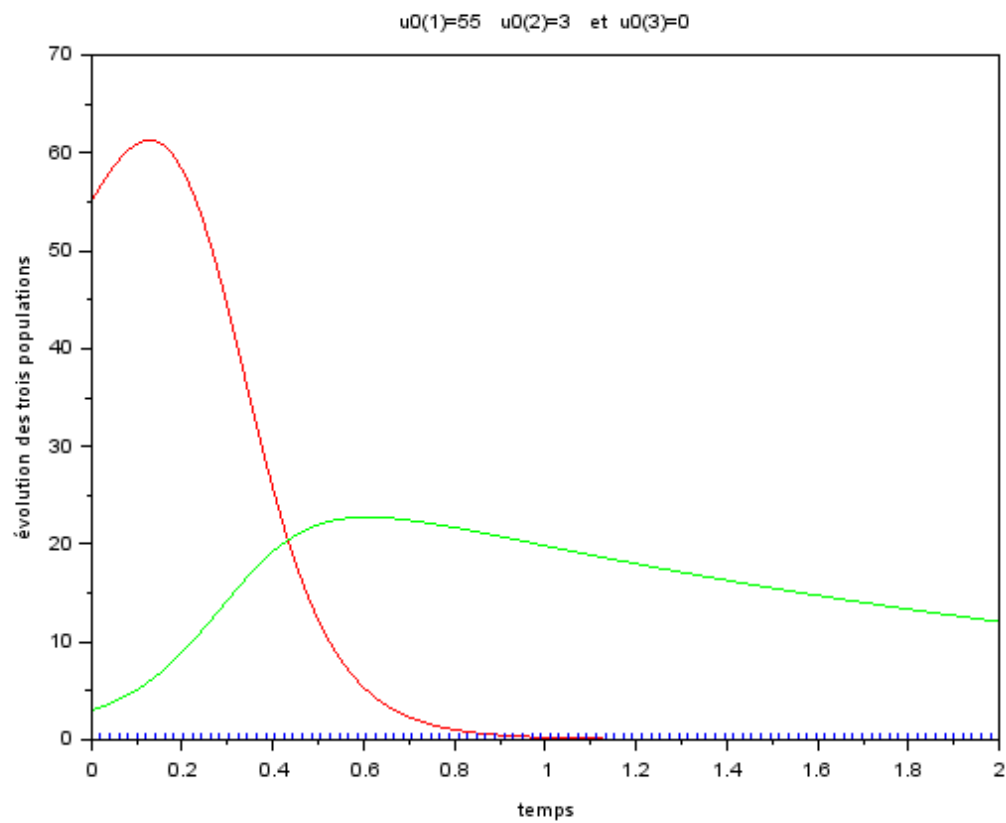


Figure 5.4

***Stabilité du point d'équilibre $\left(\frac{d}{f}, \frac{a}{b}, 0\right)$**

Par la méthode précédente, on montre que l'équilibre $\left(\frac{d}{f}, \frac{a}{b}, 0\right)$ est stable.

La figure obtenue après perturbation de cet équilibre en prenant le départ en $\left(\frac{d}{f} + 1.5, \frac{a}{b} + 1.5, 5\right)$ est la suivante :

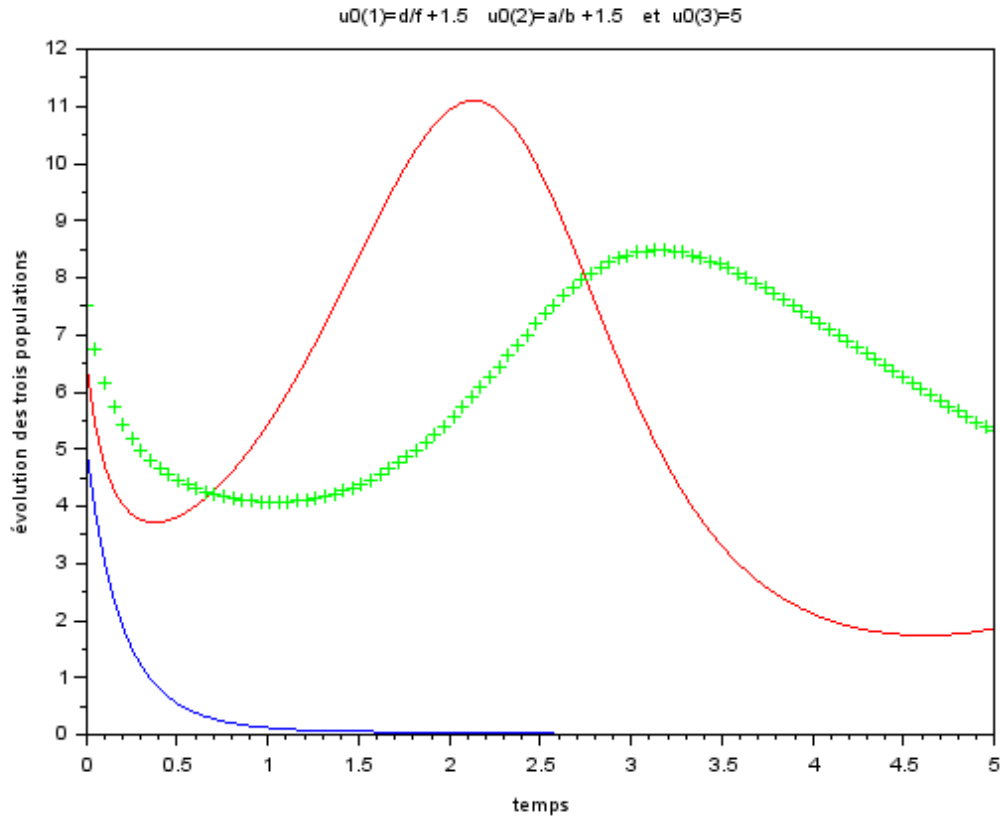


Figure 5.5

On voit que le nombre d'individus de la deuxième classe de prédateurs (courbe bleue) revient à zéro, qui est bien la troisième coordonnée du point d'équilibre. Aussi, les deux autres coordonnées du point d'équilibre sont atteintes mais de manière alternée.

***Stabilité du point d'équilibre** $\left(\frac{ebg+hdc+ahe}{hcf+eib}, \frac{idc-fgc+aei}{hcf+eib}, \frac{idb+f gb+ahf}{hcf+eib}\right)$

$$dG\left(\frac{ebg+hdc+ahe}{hcf+eib}, \frac{idc-fgc+aei}{hcf+eib}, \frac{idb+f gb+ahf}{hcf+eib}\right)=$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{aheb - eb^2g - hbdc}{hcf + eib} & \frac{-ecbg - hdc^2 - ahce}{hcf + eib} \\ \frac{idcf - f^2gc + afei}{hcf + eib} & 0 & \frac{-eidc + efgc - ae^2i}{hcf + eib} \\ \frac{-i^2db + fgbi + ahfi}{hcf + eib} & \frac{ibdh - fgbh - ah^2f}{hcf + eib} & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de cette matrice données par Scilab avec les valeurs $a = 3$; $b = 0.5$; $c = 0.7$; $d = 0.5$; $e = 0.5$; $f = 0.1$; $g = 1.5$; $h = 1$; $i = 0.6$ sont :

$$-0.2774676 + 1.1977505i$$

$$-0.2774676 - 1.1977505i$$

$$0.5549352$$

La valeur propre 0.5549352 est strictement positive donc l'équilibre est instable.

Avec les valeurs $a = 3$; $b = 0.5$; $c = 0.7$; $d = 0.5$; $e = 0.5$; $f = 0.1$; $g = 1.5$ cet équilibre est le point : (10.2 ; 4.6 ; 1.1).

En effet, on a la figure suivante :

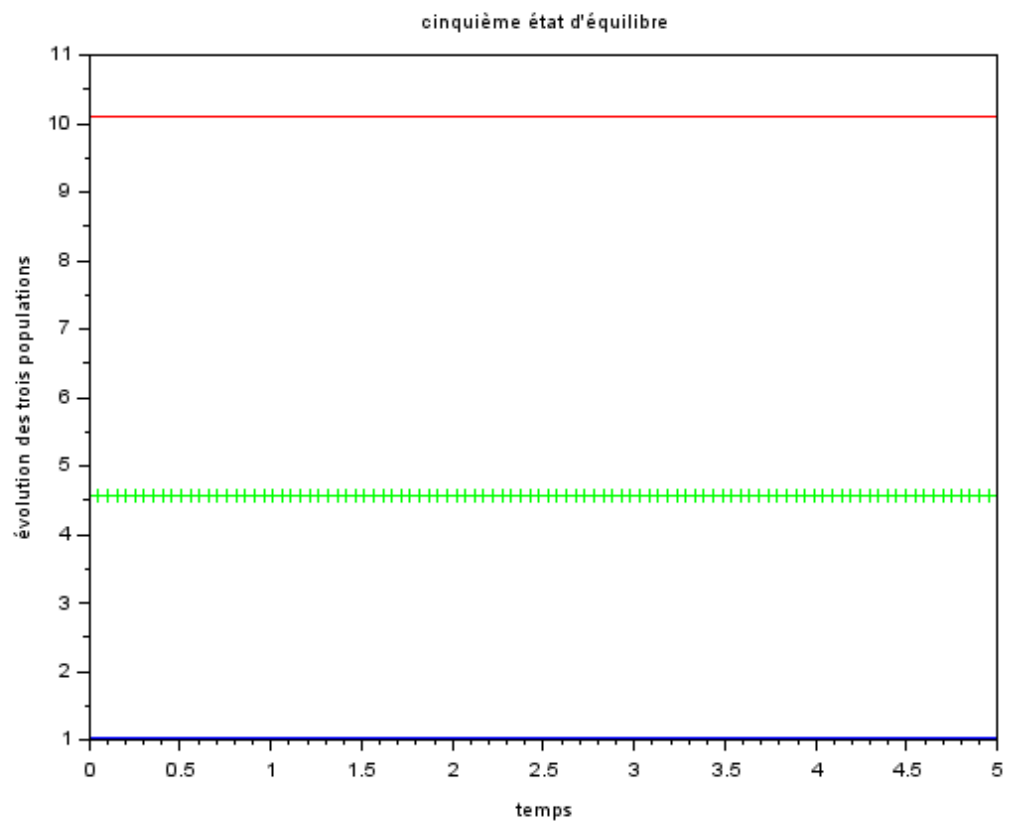


Figure 5.6

Quand on perturbe cet équilibre en partant de $(10.2 - 1 ; 4.6 + 1 ; 1.1 + 0.5)$ on obtient la figure 5.6 ci-dessous.

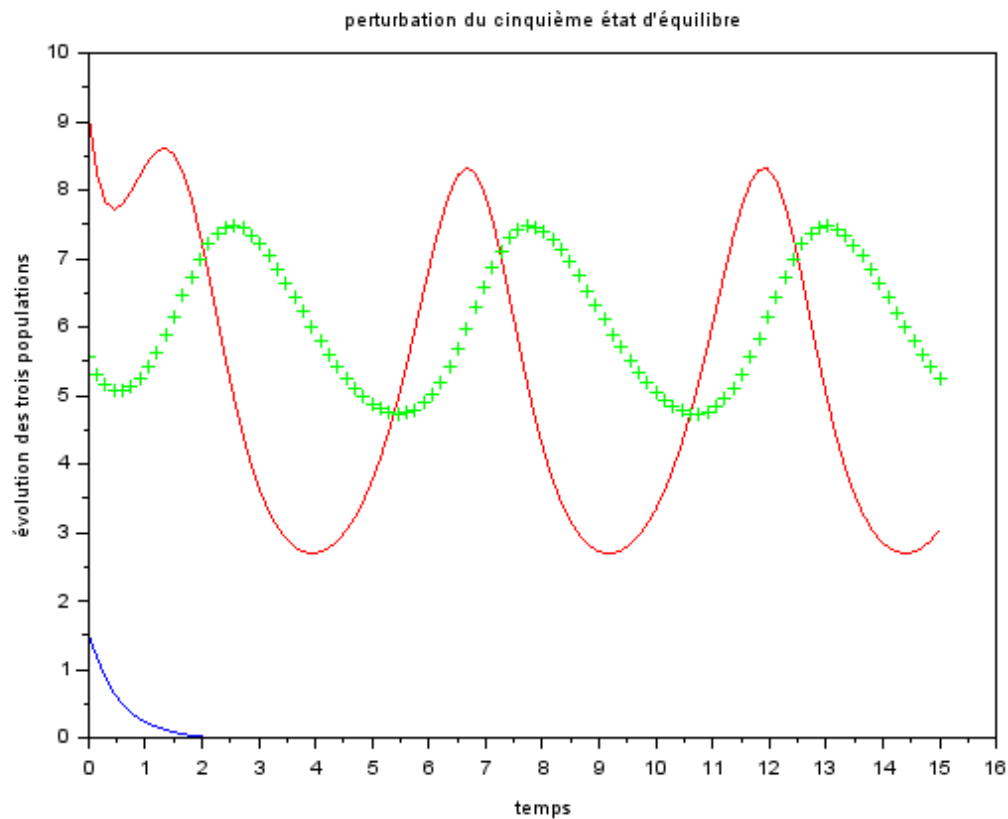


Figure 5.7

On remarque bien qu'après perturbation, le point d'équilibre (10.2 ; 4.6 ; 1.1) n'est plus atteint.

Par ailleurs, on voit sur toutes les figures (à l'exception de la figure 5.5 obtenue en partant d'un point d'équilibre) que quand le nombre de proies s'élève, celui des prédateurs (les deux prédateurs en fait, s'ils sont tous deux présents) s'élève par la suite. L'élévation du nombre de prédateurs entraîne la chute de celui des proies (car les prédateurs dévorent les proies). Et quand il n'y a plus assez de proies, les prédateurs meurent de faim.

Ainsi, le système (4) modélise bien l'évolution au cours du temps d'une population de proies et de deux populations de prédateurs tous dans un milieu fermé.

Jusqu'ici on a observé les résultats les solutions données par le schéma de Cranck Nicolson. Faisons la comparaison avec le solveur ODE, les schémas de RK4 et d'Euler explicite au niveau du cinquième point d'équilibre.

Les figures suivantes comparent les résultats obtenus par le schéma de Cranck Nicolson avec le solveur ODE, RK4 et Euler explicite :

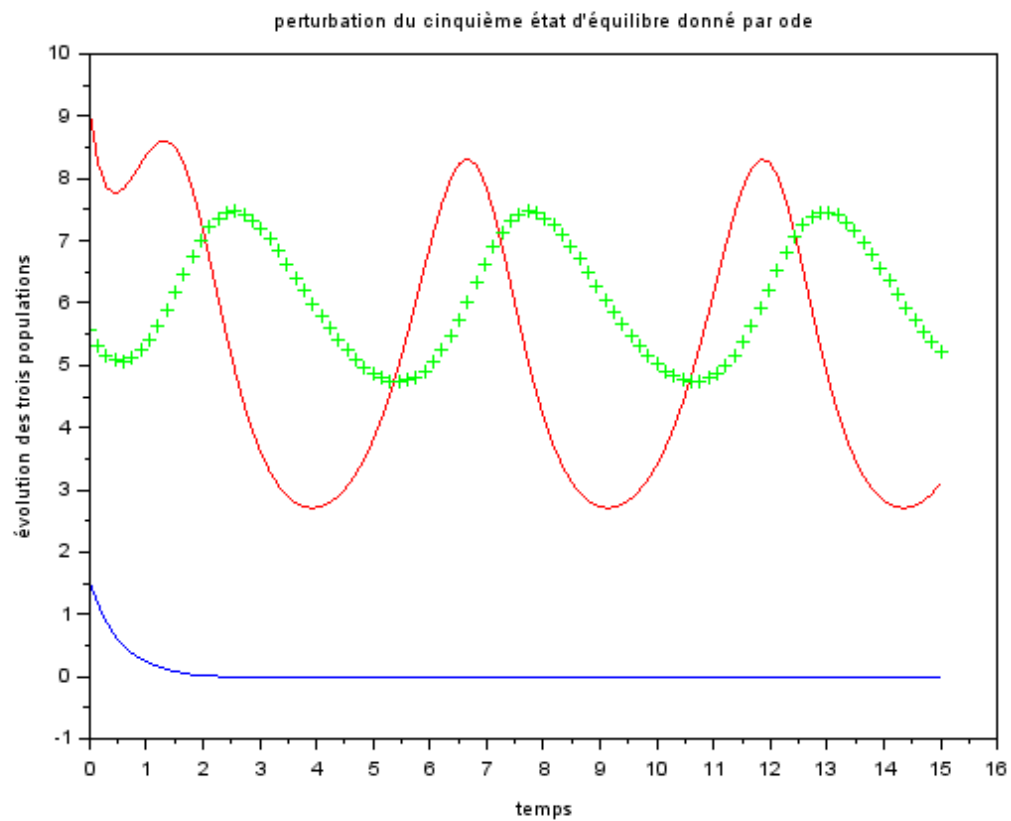


Figure 5.8

On voit que la figure obtenue avec le solveur ODE est très proche de celle donnée par le schéma de Cranck Nicolson.

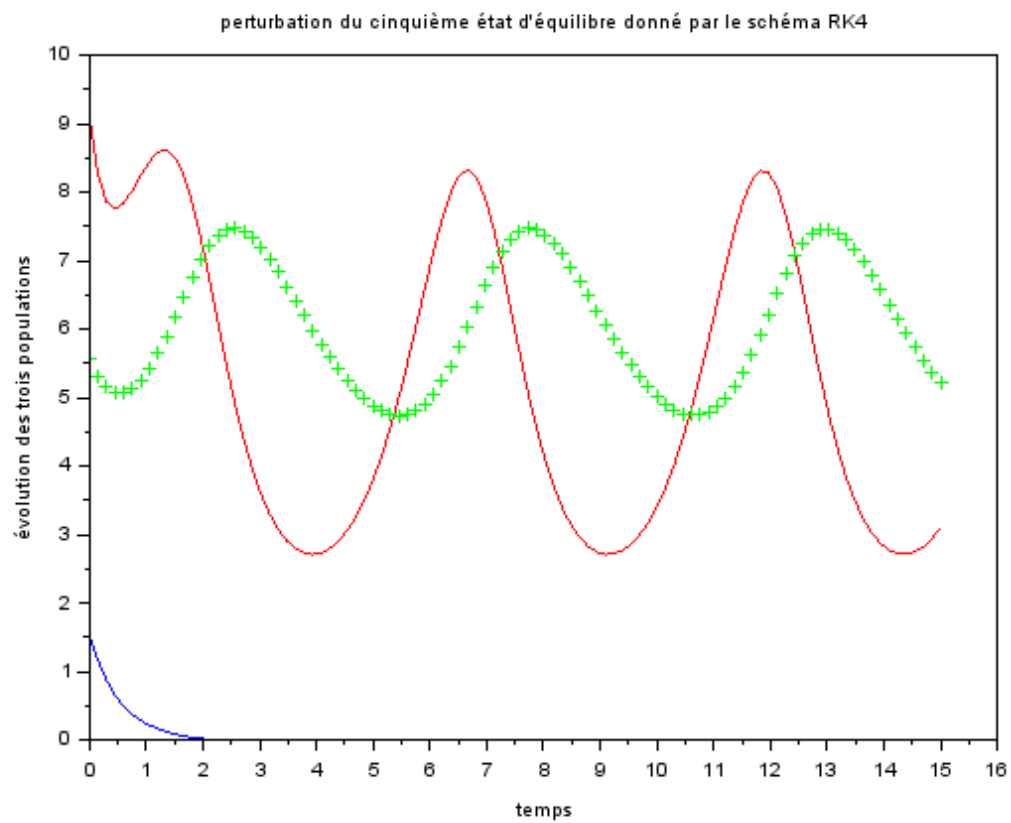


Figure 5.9

On voit que la figure obtenue avec le schéma RK4 est identique à celle donnée par le schéma de Cranck Nicolson.

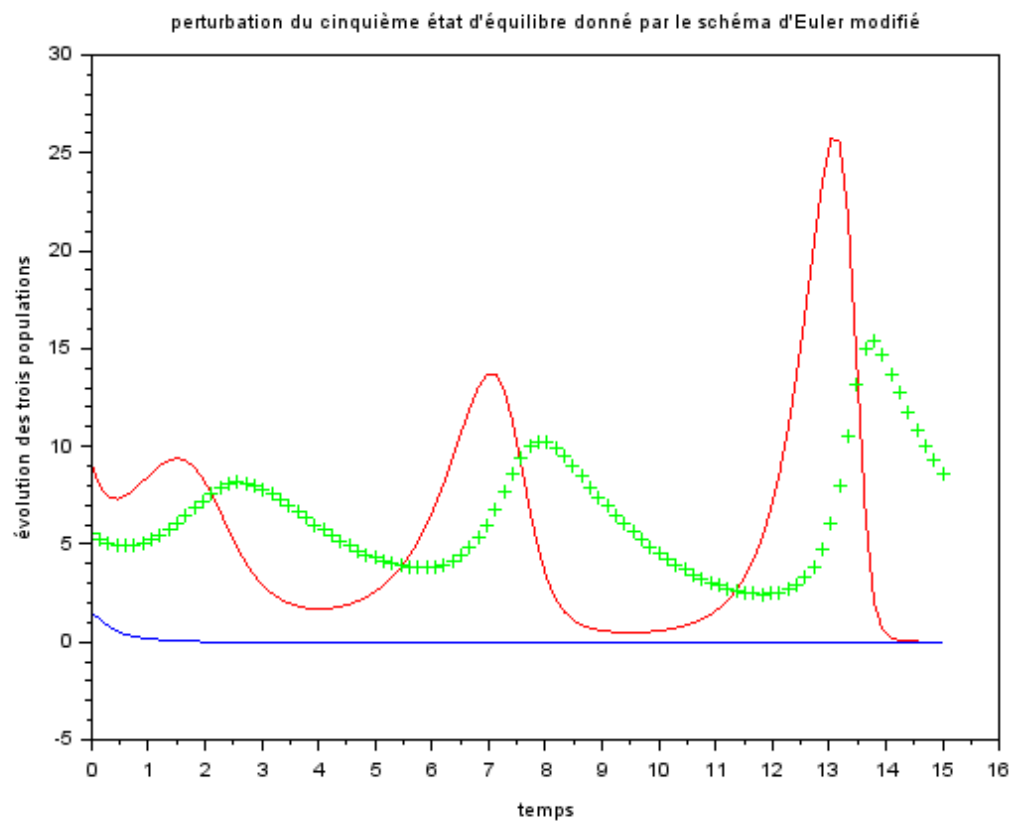


Figure 5.10

On voit que la figure obtenue avec le schéma d'Euler modifié est assez proche de celle donnée par le schéma de Cranck Nicolson.