2) a) $\begin{cases} \text{Soit } X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \\ \text{soit } xy / \end{cases}$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t, \sigma^2, \mu)\, dt = y = F(x)$$

$$F^{-1}(y; \mu; \sigma^2) = x$$

Soit $\cancel{x' \sim \mathcal{N}(0,1)}$ $\quad x' = \frac{x-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \Rightarrow x = x'\sigma + \mu$

$$P(X \leq x) = P(x' \leq \cancel{x\sigma^2+\mu}\ \frac{x-\mu}{\sigma^2})$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma^2}} f(t, \sigma^2, \mu)\, dt$$

$$= F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}; 0, 1\right) = F(x; \mu, \sigma^2)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = F^{-1}_{0,1}(\underbrace{F(x;\mu,\sigma^2)}_{p})$$

$$t' = \frac{t-\mu}{\sigma^2} \Rightarrow t'' = \sigma^2 t' + \mu$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f(\sigma^2 t' + \mu) / \sigma^2 \, dt'$$

$$F(\sigma^2 t' + \mu, 0, 1) = \sigma^2 y$$

3) a)

$$\sigma F^{-1}(p; 0; 1) + \mu = x = F^{-1}(p, \mu, \sigma^2)$$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$y = F(x) = \int_{-\infty}^{x} \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \lambda \int_{-\infty}^{x} e^{-\lambda t}\, dt$$

$t' = \lambda t$: $\quad = \lambda \int_{-\infty}^{\lambda x} 1 e^{-t'}\, dt' \times \frac{1}{\lambda} = \int_{-\infty}^{\lambda x} e^{-t}\, dt$

$$\cancel{F^{-1}(y; \lambda) = F^{-1}(\lambda x, 1)}$$

$$\cancel{\Rightarrow x = \frac{1}{\lambda} F^{-1}(F^{-1}(y, \lambda), 1)}$$

Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et $y \in \cancel{\mathbb{R}}$ $[0; 1]$ /

$$P(X \leq x) = y \iff F^{-1}(y) = x$$

$$\iff \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2}} \, dt = y$$

posons $t' = \frac{t-\mu}{\sigma}$, $t = t'\sigma + \mu$. Alors

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}(t')^2} \, dt = F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}; 0, 1\right)$$

donc $F(x, \mu, \sigma^2) = F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}; 0, 1\right)$

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = F^{-1}\Big(\underbrace{F(x; \mu, \sigma^2)}_{y}; 0, 1\Big)$$

$$x = F^{-1}(y; \mu, \sigma^2) = \sigma F(y; 0, 1) + \mu$$

$$F(x, \lambda) = F(\lambda x, 1) \iff x = \frac{1}{\lambda} F^{-1}\Big(\underbrace{F(x, \lambda)}_{y}, 1\Big)$$

$$\iff F^{-1}(y, \lambda) = \frac{1}{\lambda} F^{-1}(y, 1)$$

• La densité d'une telle loi est :

$$f_\lambda(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

donc soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et $y \in [0;1]$:

$$P(X < x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt \qquad t' = \lambda t$$

$$= \int_0^{\lambda x} e^{-t'}\, dt'$$

On a donc $F(x, y) = F(\lambda x, 1) = y$

$\iff x = \frac{1}{\lambda} F'(y, 1)$

$\iff F^{-1}(y, \lambda) = \frac{1}{\lambda} F'(y, 1)$

$$p(x, \theta) = h(x) \exp(\langle q(\theta), T(x) \rangle - B(\theta))$$

densité

$$P(X_1 < x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \\ 0 \end{cases} \Rightarrow p(x, \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} = e^{-\lambda x + \log(\lambda)} \\ 0 \end{cases}$$

$\cancel{h(x) = 1}$ $\qquad \eta = \lambda$

$\cancel{q(\lambda) = \lambda}$ $\qquad T(x) = x$

$\cancel{p_\lambda(x) =}$ $\qquad A(\eta) = -\log(\lambda)$

$-\lambda x + \log(\lambda)$

$\Rightarrow -x + \frac{1}{\lambda} = 0$

$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{x}$

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_m = x_m) = \prod_{i=1}^{m} \lambda e^{-\lambda x_i}$$

$$= \lambda^m e^{-\lambda \sum_{i=1}^{m} x_i} = e^{-\lambda \sum_{i=1}^{m} x_i + m \log(\lambda)}$$

$$\log(\underbrace{P(X_1 = x_1), \dots, (X_m, x_m)}_{P}) = \underbrace{cste}_{=0} + m \log(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^{m} x_i$$

$$\frac{\partial \log P}{\partial \lambda} \iff m \frac{1}{\hat{\lambda}_m} - \sum_{i=1}^{m} x_i = 0$$

$$\iff \hat{\lambda}_m = \frac{m}{\sum_{i=1}^{m} x_i} = \frac{1}{\bar{x}_m}$$ où $\bar{x}_m$ est la moyenne des $(x_i)_{i \leq m}$

On a donc $\hat{\lambda}_m = \frac{1}{\bar{x}_m}$

Cet estimateur est efficace si (1) $E_\lambda\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i\right) = g_1(\lambda)$ et si :

$$(2) \quad Var_\lambda\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i\right) = \frac{g_1'(\lambda)}{I(\lambda)} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$$

$\underline{(1)}$: $\frac{1}{m} \times \sum_{i=1}^{m} E(X_i) = \frac{1}{m} \times m \times \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} = g_1(\lambda)$ ✓

$\underline{(ii)}$: $\bullet\ g_1'(\lambda)^2 = \frac{+1}{\lambda^4}$ $\quad \bullet\ I(\theta) = m\, Var_\lambda\left(\frac{\partial \log P}{\partial \lambda}(x, \theta)\right)^2$ car $P = \{P_\lambda, \lambda > 0\}$ régulier

or $\frac{\partial \log P}{\partial \lambda} = m \log(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^{m} x_i$

donc $Var_\lambda\left(\frac{\partial \log P}{\partial \lambda}\right) = \cancel{m} \times m \times \frac{1}{\lambda^2} = \frac{m}{\lambda^2} \Rightarrow \frac{g_1'(\lambda)^2}{I(\theta)} = \frac{1}{m\lambda^2}$

$\bullet$ finalement : $Var_\lambda\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i\right) = \frac{1}{m^2} \times m \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{m\lambda^2} = \frac{g_1'(\lambda)}{I(\theta)}$

(2) est vérifiée

3) Cet estimateur est efficace ssi :

$$\begin{cases} (i) & E_\lambda\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i\right) = g_1(\lambda) \\ (ii) & Var_\lambda\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i\right) = \frac{g_1'(\lambda)^2}{I(\lambda)} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

→ • $E_\lambda\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i\right) = \frac{1}{m} \times E(X_0) \times m = \frac{1}{\lambda} = g_1(\lambda)$

(1) est vérifié

→ • Puisque $P = \{P_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}^+\}$ est régulier, $I(\lambda)$ vaut :

$$I(\lambda) = m \cancel{Var}\ I_1(\lambda) \text{ où } I_1(\lambda) = Var_\lambda\left(\frac{\partial \log p(x,\lambda)}{\partial \lambda}\right)$$

$$I_1(\lambda) = Var_\lambda\Big(\underbrace{m\log(\lambda)}_{= cte} - \sum_{i=1}^{m} x_i\Big) = \sum_{i=1}^{m} Var_\lambda(x_i)$$

car $(X_i)_{i \leq m}$ indépendants

$$= m \times \frac{1}{\lambda^2}$$

De plus, $g_1'(\lambda) = \frac{-1}{\lambda^2}$ donc $g_1'(\lambda)^2 = \frac{1}{\lambda^4}$

• Finalement :

- $\frac{g_1'(\lambda)^2}{I(\lambda)} = \frac{\frac{1}{\lambda^4}}{\frac{m}{\lambda^2}} = \frac{1}{m\lambda^2}$

- $Var_\lambda\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i\right) = \frac{1}{m^2} \times \sum_{i=1}^{m} Var_\lambda(x_i) = \frac{1}{m\lambda^2}$

(car indep)

donc $T_1(X) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i$ est bien ~~régulier~~ efficace pour $g_1(\lambda)$

5) $\tilde{T}_{1,\eta}(x) = \eta\, T_1(x)$

- $R(\lambda, T_1) = E_\lambda(L(\lambda, T_1))$

$\eta_0(m+1) - 4m + m + 1 < 0$

$m(\eta_0 - 3) + \eta_0 + 1$

$\frac{\ln(2)+1}{3 - \ln(2)}$

$$L(\lambda, T_1) = (g_1(\lambda) - T_1)^2$$
$$= \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2$$
$$= \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2\lambda}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i + \frac{1}{m^2}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2$$

$$R(\lambda, T_1) = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2\lambda}{m} \times \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{m^2} E\left(\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2\right)$$

- $R(\lambda, \tilde{T}_{1,\eta}) = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2\eta}{m} + \left(\frac{\eta}{m}\right)^2 E\left(\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2\right)$

- $R(\lambda, \tilde{T}_{1,\eta}) - R(\lambda, T_1) = \frac{-2}{m}(\eta - 1) + (\eta^2 - 1)\, E\left(\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2\right)/m^2$

5) $\tilde{T}_{1,\eta}(x) = \eta\, T_1(x)$

$$\Delta = R(\lambda, T_1) - R(\lambda, \tilde{T}_{1,\eta}) = E\left[(g_1(\lambda) - T_1)^2 - (g_1(\lambda) - \tilde{T}_{1,\eta})^2\right]$$
$$= E\left[(\tilde{T}_{1,\eta} - T_1) \times (2g_1(\lambda) - (T_1 + \tilde{T}_{1,\eta}))\right]$$

$$\tilde{T}_{1,\eta} - T_1 = \frac{(\eta - 1)}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i \quad ; \quad T_1 + \tilde{T}_{1,\eta} = \frac{(\eta + 1)}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i$$

$$\Delta = 2g_1(\lambda) \times \frac{(\eta - 1)}{m} E\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) - \frac{(\eta^2 - 1)}{m^2} E\left(\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2\right)$$

$$= \frac{2(\eta - 1)}{\lambda m} \times m \times \frac{1}{\lambda} - \frac{\eta^2 - 1}{m^2} \underbrace{E\left(\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2\right)}_{= a > 0}$$

$$\Delta = \frac{2(\eta - 1)}{\lambda^2} - \frac{(\eta + 1)(\eta - 1)}{m^2} a > 0$$

$\cancel{a = \frac{m}{\lambda^2}}$

$$\Leftrightarrow \eta + 1 < \frac{m^2}{a} \times \frac{2}{\lambda^2} \Leftrightarrow \eta < -1 + \frac{2m^2}{a\lambda^2} \cancel{= 2m} = 1$$

5) suite

La condition finale est en effet indépendante de λ donc pour $n \geq 1$, on a :

$$R(\lambda, \tilde{T}_{1,\eta}) \leq R(\lambda, T_1) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$$
$$\forall \eta \in \left[\frac{n-1}{n+1} ; 1\right[$$

$\Rightarrow$ Ce résultat n'est pas en contradiction avec les résultat précédents car il est simplement lié au fait que $\tilde{T}_{1,\eta}$ ~~ne~~ soit biaisé : en effet :

$$\forall \eta \neq 1, \quad \mathbb{E}(\tilde{T}_{1,\eta}) = \eta \, \mathbb{E}(T_1) = \eta \, g_1(\lambda) \neq g_1(\lambda)$$

Une autre interprétation possible est le manque de données. On observe en effet que lorsque n tend vers l'infini : $\left[\frac{n-1}{n+1} ; 1\right[\xrightarrow[n \to \infty]{} \emptyset$

5) suite ×2 La condition finale ne dépend pas de λ, donc :

$$\forall n \geq 1, \ \forall \lambda \in \mathbb{R} : \ R(\lambda, \tilde{T}_{1,\eta}) < R(\lambda, T_1) \quad \forall \eta \in \left[\frac{n-1}{n+1} ; 1\right]$$

- Ce n'est pas en contradiction avec la question précédente car peu importe n, η ne vérifie cette condition que pour un nombre fini de valeurs, et non pas dans le cas général.

---

c) La médiane d'une loi exponentielle est $\frac{\ln(2)}{\lambda}$

$$E_\lambda\left(\tilde{T}_{1,\eta} - \frac{\ln(2)}{\lambda}\right) = 0$$

$$\iff E_\lambda\left(\tilde{T}_{1,\eta}\right) = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

$$\iff \frac{\eta \cancel{\alpha}}{\cancel{\alpha}\lambda} = \frac{\ln(2)}{\lambda} \iff \eta = \ln(2) = \eta_0$$

L'estimateur vaut alors $\ln(2) \times \hat{\lambda}$

---

5) suite $a = E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right) = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^{n} E(X_i)E(X_j) + \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = \frac{1}{\lambda^2}(n+1)n$

La condition est donc : $\eta < \frac{2n^2}{\lambda^2} \times \frac{\lambda^2}{n(n+1)} - 1$

$$\iff \eta < \underbrace{\frac{2n^2}{n(n+1)}}_{\geq 1 \ \forall n \geq 1} - 1 = \frac{n-1}{n+1}$$

Résultat logique : $\frac{n-1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ donc l'ensemble limite est $\emptyset$.

$8 / \ldots$

7) • $R(\lambda, \tilde{T}_{1,\eta_0}) = E_\lambda\left((g_1(\lambda) - \tilde{T}_{1,\eta_0})^2\right)$

$= E_\lambda\left(g_1(\lambda)^2 - 2 g_1(\lambda)\tilde{T}_{1,\eta_0} + \tilde{T}_{1,\eta_0}^{2}\right)$

$$= \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda} \times \eta_0 \times \frac{1}{\lambda} + \frac{\eta_0^2}{m^2} \underbrace{E\left(\left(\sum_{i=1} X_i\right)^2\right)}_{= \frac{m(m+1)}{2} \times \frac{1}{\lambda^2}}$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} \times \left(1 - 2\ln(2) + \frac{m(m+1)}{2m^2} \ln(2)^2 \right)$$

• $R(\lambda, T_1) = \frac{1}{\lambda^2}\left(1 - 2 + \frac{m(m+1)}{2m^2}\right)$

$\neq \frac{1}{...}$

$\Delta' = R(\lambda, T_1) - R(\lambda, \tilde{T}_{1,\eta_0})$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\left[-2(1-\ln(2)) + \frac{m(m+1)}{2m^2}(1 - \ln(2)^2)\right.$$

$\Delta' > 0 \iff$

---

7) D'après 5, $R(\lambda, \tilde{T}_{1,\tilde{\eta}}) < R(\lambda, T_1)$

lorsque $\eta = \eta_0 \leqslant \frac{4m^2}{m(m+1)} - 1$

$\iff \ln(2)\, m^2 + \ln(2)\, m - 4m^2 + m^2 + m \leqslant 0$

$\iff (\ln(2) - 3)m^2 + (\ln(2)+1)m \leqslant 0$

$\iff m \leqslant \frac{\ln(2)+1}{3-\ln(2)} \simeq 0{,}73$

Vrai pour aucun m positif donc on a :

$\forall m \geqslant 1 : \quad R(\lambda, \tilde{T}_{1,\eta_0}) > R(\lambda, T_1)$

1) $\begin{cases} H_0 : \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1000 \\ H_1 : H_0 \text{ faux} \iff \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i > 1000 \end{cases}$

2)

1) $\begin{cases} H_0 : \ 1/\lambda \leq 1000 & \text{est l'hypothèse nulle} \\ H_1 : \ 1/\lambda > 1000 & \text{" " alternative.} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} H_0 : \lambda \geq 10^{-3} \\ H_1 : \lambda < 10^{-3} \end{cases}$

2) Soit $\lambda' > \lambda$. Alors le test du rapport de vraisemblance au niveau α s'écrit :

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i}}{\prod_{i=1}^{n} \lambda' e^{-\lambda' x_i}} < R_\alpha \iff \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^n e^{(\lambda'-\lambda)\overline{X}_n \times n} < R_\alpha$$

(où $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$)

$$\iff \overline{X}_n \times n = \sum_{i=1}^{n} x_i < \underbrace{\frac{\ln\left(\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^n R_\alpha\right)}{\lambda'-\lambda}}_{\text{cste}} \quad (\text{car } \lambda' > \lambda)$$

~~On rejette donc H_0 si $P(\sum_{i=1}^{n} x_i > \text{cste} \mid H_0) =$~~

• De plus, $(X_i)_{i=1}^{n} \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et iid donc $\sum_{i=1}^{n} x_i = S \sim \Gamma(n, \lambda)$

Finalement, $P(\sum_{i=1}^{n} x_i > c \mid H_0) = \alpha \iff P(\sum_{i=1}^{n} x_i > Q_{\Gamma(n,\lambda)}(1-\alpha) \mid H_0) = \hat{\alpha}$

(test de puissance maximale pour le niveau α)

3) Cherchons $P\left(\sum_{i=1}^{n} x_i > Q_{\Gamma(n,\lambda)}(0,95) \mid H_0\right)$

Pour couvrir tous les cas, nous devons prendre λ / la probabilité est ~~maximisée~~ minimisée
$\iff \lambda$ tel que $Q_{\Gamma(n,\lambda)}(0,95)$ est maximisé.

Nous cherchons à maximiser la fonction inverse de celle juste au dessus. Puisque celle ci est décroissante, son inverse aussi :
Sa valeur ~~est~~ maximale est atteinte pour sa première valeur, et donc pour le premier λ de np.arange(0, 1, 1/10000)[1:],
càd pour $\lambda = \lambda_0 = \frac{1}{10000} = 10^{-4}$

Comparons maintenant pour voir le verdict sur notre hypothèse :

4) Puisque $\mathcal{E}(\lambda)$ est la loi des $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid,
Alors
$\Gamma(n, n\lambda)$ est la loi de $M = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} X_i$

La région de rejet se situe à droite de la droite verticale orange, et la probabilité de rejet est l'aire de cette zone là.

$T_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $E(X_i) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(X_i) = \frac{1}{\lambda^2}$

D'après le théorème central limite et avec n suffisamment grand:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}\left(\frac{n}{\lambda} ; \frac{n}{\lambda^2}\right)$$

Dans ce cas: le théorème Neyman-Pearson s'écrit:

$$P(T_1(x) > c) = \alpha \iff P\left(T_1(x) > q_{\mathcal{N}\left(\frac{1}{\lambda} ; \frac{1}{\lambda^2 n}\right)}(1-\alpha) \mid \lambda = \lambda_0 = 10^{-3}\right) = \alpha$$

$$\iff P\left(\frac{T_1 - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 n}}} > q_{\mathcal{N}(0;1)}(1-\alpha) \mid \lambda = \lambda_0 \right) = \alpha$$

On peut donc plus facilement implémenter la suite.