UNIVERSITE DU LAC TANGANYIKA

COURS DE RECHERCHE OPERATIONNELLE

0. Introduction

La recherche opérationnelle peut être définie comme l'ensemble des méthodes et techniques rationnelles orientées vers la recherche de la meilleure façon d'opérer des choix en vue d'aboutir au meilleur résultat possible. Elle propose des modèles conceptuels en vue d'analyser et de maîtriser des situations complexes pour permettre aux décideurs de comprendre et d'évaluer les enjeux et d'arbitrer et/ou de faire les choix les plus rationnels possibles.

La recherche opérationnelle est née dans les années 1940. Il se posait alors un problème d'affectation des ressources sur les différents fronts ouverts par les armées américaines et britanniques. Pour résoudre ce problème, une équipe d'experts composée de mathématiciens, d'économistes, de statisticiens et de militaires fut alors mise sur pieds avec pour objectif l'affectation des troupes et du matériel, qui étaient pour la circonstance des ressources rares.

A la suite des succès obtenus dans les domaines militaires, la recherche opérationnelle gagna petit à petit du terrain. Actuellement, on trouve beaucoup d'applications de la recherche opérationnelle dans l'industrie, les télécommunications, la gestion des projets, la gestion des stocks…

Un des rôles de la recherche opérationnelle est de trouver des solutions pour les problèmes d'optimisation sous contraintes, par exemple, augmenter la production tout en minimisant les coûts. La recherche opérationnelle utilise plusieurs méthodes dont les plus importants sont la programmation linéaire et non linéaire, la programmation dynamique, la théorie des graphes, la théorie des jeux…

Certaines méthodes de la Recherche Opérationnelle se démontrent au niveau mathématique - assez facilement. L'algorithme du simplexe, par exemple, repose sur des arguments élémentaires de l'algèbre linéaire.

D'autres méthodes, par exemple celles de la programmation dynamique, sont des cas particuliers de développements analytiques ou stochastiques.

Le schéma général suivi par la Recherche opérationnelle pourrait être résumé comme suit : Problème concret → modélisation → résolution par une méthode de la R.O → interprétation des résultats→ prise de décision.

CHAP.I : LA PROGRAMMATION LINEAIRE

I1. FORMULATION D'UN PROGRAMME LINEAIRE

La programmation linéaire est un outil très puissant de la recherche opérationnelle. C'est un outil qui peut résoudre un grand nombre de problèmes. D'une façon générale, un programme linéaire est un système d'équations ou d'inéquations appelées contraintes qui sont linéaires. A partir de ces contraintes, on doit optimiser une fonction également linéaire appelée fonction objectif.

En effet, une fois un problème modélisé sous la forme d'équations linéaires, des méthodes assurent la résolution du problème de manière exacte. On distingue dans la programmation linéaire, la programmation linéaire en nombres réels, pour laquelle les variables des équations sont dans IR^+ et la programmation en nombres entiers, pour laquelle les variables sont dans IN.

L'importance de l'optimisation et la nécessité d'un outil simple pour modéliser des problèmes de décision que soit économique, militaire ou autres on fait de la programmation linéaire un des champs de recherche les plus actifs au milieu du 20ème siècle. Les premiers travaux (1947) sont ceux de George B. Dantzig et ses associés du département des forces de l'air des Etats Unis d'Amérique.

Les problèmes de programmations linéaires sont généralement liés à des problèmes d'allocations de ressources limitées, de la meilleure façon possible, afin de maximiser un profit ou de minimiser un coût. Le terme meilleur fait référence à la possibilité d'avoir un ensemble de décisions possibles qui réalisent la même satisfaction ou le même profit. Ces décisions sont en général le résultat d'un problème mathématique.

Considérons l'exemple suivant. Une usine fabrique divers produits P_i (i=1…, i, ..., m), en utilisant des matières premières Q_j(j = 1 .. j .. n). La quantité de matière première $Q_j$disponible est supposée fixée: on la note b_j. La fabrication d'une unité du produit P_i nécessite une quantité A_i^1 de la matière première Q_1,une quantité A_i^2 de la matière première $Q2$, : ...., une quantité A_i^n de la matière première Q_n. Chaque unité de produit P_i vendue procure au fabricant un revenu net de $C_j$unitésmonétaires. Soit x_i la quantité de produit P_i qui est fabriquée. Le fabricant cherche à maximiser le revenu $f(x_1 \ldots \ldots x_n) = \sum_j c_j x_{xj}$

Formuler ou modéliser un programme linéaire consiste donc à représenter un problème sous forme d'équations mathématiques en tenant compte des propriétés fondamentales du phénomène étudié.

I.1 Les conditions de formulation d'un PL

La programmation linéaire en tant que modèle admet des hypothèses, c'est-à-dire des conditions que le décideur doit valider avant de pouvoir les utiliser pour modéliser son problème. Ces hypothèses sont:

1. Le critère de sélection de la meilleure décision est décrit par une fonction linéaire de ces variables, c'est à dire, que la fonction ne peut pas contenir par exemple un produit croisé de deux de ces variables. La fonction qui représente le critère de sélection est

dite fonction objectif (ou fonction économique). C'est la fonction à maximiser ou minimiser.

2. Les restrictions relatives aux variables de décision (exemple: limitations des ressources) peuvent être exprimées par un ensemble d'équations linéaires. Ces équations forment l'ensemble des contraintes.
3. Les paramètres du problème en dehors des variables de décisions ont une valeur connue avec certitude
4. Les variables de décision du problème sont positives (contrainte de non négativité)

I.2 Ecriture des modèles linéaires

Les modèles linéaires s'écrivent de la façon suivante : Maximiser ou minimiser la fonction objectif z(x) = $\sum_j c_j x_j$

Sous les contraintes

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \cdots\cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \cdots\cdots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

.

.

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \cdots\cdots + a_{mn}x_n \leq b_{mn}$$

$$x_1; x_2 \cdots x_n \geq 0$$

Exemple1 : Problème de l'agriculteur

Un agriculteur dispose de 150 ares de terrain sur lesquels il veut cultiver du riz et de légume. Il dispose pour cela d'une main d'œuvre dont le travail en saison utile ne dépasse pas 480 heures, et des réserves d'eau qui n'excède guère 440 mètres cubes. En outre, la superficie réservée à la culture du riz ne peut pas dépasser 90 ares.

Le tableau suivant résume l'utilisation de ces ressources.

	Eau (m3/ are)	M.O heures de travail par are	Rendement/are en FBu
Riz	4	1	100
Légumes	2	4	200

Question : Déterminer un programme de production optimale

$$Max\ Z(x) = 100x_1 + 200x_2$$

$$s.c\ x_1 + x_2 \leq 150$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 440$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 480$$

$$x_1 \leq 90$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Ecrire le programme sous forme matricielle

Ex$_2$: Problème de production

Une limonaderie fabrique 5 sortes de limonades à base du sucre et des concentrés. Par manque de devises, l'entreprise n'en n'importe qu'en quantités limitées., soit 2000 litres pour les concentrés et 12000 sacs pour le sucre. Par ailleurs, l'entreprise ne possède qu'une seule chaîne qui ne peut pas dépasser 1800 heures et une M.O qui ne de travaille que 3000 heures sans possibilité d'en augmenter. En outre, les emballages sont limités à 600.000 plastiques. Le tableau suivant donne les quantités de matière premières utilisées, la MO nécessaire et le temps machine pour la production d'une unité de chacune de ces limonades

Produit	Concentrés en Li	Sucre (sac)	Tps machine H	MO (H)	Emball plastiques	Profit Milliers F
A	2	8	2	3	120	200
B	5	6	3	1	100	180
C	3	9	1	2	80	160
D	1	7	2	1	90	170
E	4	5	1	3	70	150

Question : Etablir un programme de production optimale

Exemple 3 : Problème de mélange

Le tableau ci-dessous donne la composition et le coût de 5 alliages standards de plomb, de zinc et d'étain

Alliage%	1	2	3	4	5
Plomb	20	50	30	30	30
Zinc	30	40	20	40	30
Etain	50	10	50	30	40
Coût unitaire	7.3	6.9	7.3	7.5	7.6

Le But est de trouver un mélange des 5 alliages qui permet de fabriquer à coût minimal un alliage contenant

30% de Plomb, 30% de Zinc et 40% d'Etain

Question : Proposer un mélange optimal respectant les conditions proposées.

Exemple 3 :

Supposons qu'une usine fabrique 2 pièces p1 et p2 usinées dans 2 ateliers A1 et A2. Les temps d'usinage sont pour P1de 3heures dans l'atelier A1et de 6heures dans l'atelier A2 et pour P2 de 4 heures dans l'atelier A1 et de 3 heures dans l'atelier A2

Le temps de disponibilité hebdomadaire de l'atelier A1 est de 160 heures et celui de l'atelier A2 de 180 heures.La marge bénéficiaire est de 1.200 F pour une pièce P1et 1.000 F pour une pièce P2

Question : quelle production de chaque type doit-on fabriquer pour maximiser la marge hebdomadaire ?

Solution :

Max $Z(x) = 1.200x_1+1.000x_2$

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2 \leq 160 \\ 6x_1+3x_2 \leq 180 \\ x_1 \geq ;\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exemple 4

Une société fabrique trois types de pièces. Le processus de fabrication pour chaque produit nécessite le passage par trois types de machines.

L'ordre de passage par machines est le suivant

-Machines 1 : pour les opérations de découpe du métal

-Machines 2 : pour les opérations de roulage

-Machines 3 : pour les opérations de soudage

Les trois ateliers sont regroupés par technologie et comprennent chacun un seul type de machines. Les capacités nettes respectives de ces trois ateliers sont :

-pour l'atelier de découpage : 10.000 heures par mois

-pour l'atelier de roulage : 7.000 heures par mois

-pour l'atelier de soudage : 5.000 heures par mois

Les marges dégagées par ces trois produits sont de :

- 0.30 par pièces de type P1,
- 0.40 par pièces de type P2,
- 0.20par pièce de type P3

Les temps unitaires de fabrication par produit et par atelier sont exprimés en heures et sont données ci-dessous par type de pièce

	Atelier 1	Atelier 2	Atelier 3
P1	0.01	0.005	0.001
P2	0.002	0.01	0
P3	0	0.02	0.1

Pour le mois suivant, les commandes fermes en portefeuille représentent une quantité de 500.000 pièces P1, 250.000pièces P3. Ces quantités sont à produire et à livrer pour le mois

Le problème consiste à trouve la quantité mensuelle optimale à fabriquer par produit de façon à maximiser la marge globale

Hypothèses :

H1. le taux de rebut est supposé nul

Problème 5

Une entreprise dispose d'une usine et de cinq entrepôts implantés en fonction d'une clientèle régionale à distribuer et chacun est considéré comme un centre de profil

Les marges par produit sont différentes par région

Pour le produit PA , les marges exprimées par rapport coût de revient du produit sont respectivement de 120% , 130% , 120%, 150%, et 140% pour les entrepôts E1, E2 , E3, E4, E5

Le coût de revient usine est de 1.000 –par unité de produit PA fabriqué

Les prévisions des ventes pour la semaine à venir sont de :

-2.500 PA pour l'entrepôt E1

-1.500 PA pour l'entrepôt E2

-2.000 PA pour l'entrepôt E3

-500 PA pour l'entrepôt E4

-1.500 PA pour l'entrepôt E5

Le stock initial en PA est nul dans chaque entrepôt. Le stock actuel de l'usine est de 7. 000 PA ;

Il n'est pas possible de fabriquer les produits manquants dans le délai restant, d'ores et déjà, une perte prévisionnelle de chiffre d'affaires est constatée.

Pour minimiser cette perte et pour maximiser le chiffre d'affaires total, une répartition optimale des quantités à fournir aux différents entrepôts est à rechercher

A ce jour, le volume disponible dans les différents entrepôts est de :

-1.500(m^3) pour l'entreprise E1

-1.000 (m^3) pour l'entrepôt E2

-2.000(m^3) pour l'entrepôt E3

-200(m^3) pour l'entrepôt E4

-600(m^3) pour l'entrepôt E1

Le volume d'une unité de produit PA est de 0.5 (m^3)

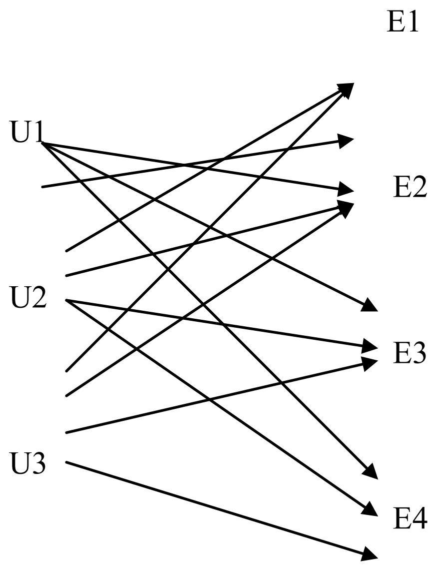
Optimisez ce problème

Exemple 6 : Modélisation d'un problème de transport

Une entreprise possède 3 usines U1, U2, U3 avec 4 entrepôts E1, E2, E3, E4. La capacité de production de chaque usine est a_1, a_2, a_3. Chaque entrepôt a une demande d_1, d_2, d_3, d_4

Si c_{ij} est le coût de transport par unité transporté, de l'usine i vers l'entrepôt j, on peut formuler un modèle linéaire qui minimise le coût de transport.

1. Représentation graphique



Représentation dans un tableau à double entrée

	E_1	E_2	E_3	E_4	a_i
U_1	C11 X11	C12 X12	C13 X12	C14 X14	a_1
U_2	C21 X21	C22 X22	C23 X23	C24 X24	a_2
U_3	C31 X31	C32 X32	C33 X33	C34 X34	a_3
d_j	d_1	d_2	d_3	d_4	$\sum_i a_i = \sum_j d_j$

Formulation d'un problème de transport

a_i : La quantité disponible à l'usine i

d_j : La quantité demandée par l'entrepôt j

c_{ij} : Coût de transport unitaire de i l'usine i vers l'entrepôt j

x_{ij} : Quantité transportée de l'usine i vers l'entrepôt j

1. Formulation de la fonction objectif

Minimiser z(x)= $\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$

2. Formulation des contraintes

   a) Contraintes liées à la disponibilité

   $\sum_j x_{ij} \leq a_i$

   b) Contraintes liées à la demande

$\sum_j x_{ij} \geq d_j$

   c) Contraintes de non négativité

$x_{ij} \geq 0$

1) Le choix du signe d'égalité ou d'inégalité dans les contraintes concernant les usines et les dépôts dépend du contexte concret.
2) $\sum_i a_i \geq \sum_j d_j$

La quantité disponible est supérieure à la quantité demandée

Exercices

1. Une firme fabrique 3 types de produits A, B, C. Chaque produit nécessite des matières premières et de la main d'œuvre. Les ressources sont disponibles en quantité limitée. Les

quantités de matières premières et de main d'œuvre nécessaires pour chaque produit sont données dans le tableau suivant

Produits	MP (KG)	MO (heures)	Profit (UM)
A	4	2	250
B	2	1	150
C	1	3	200
Disponibilités	6000	4500	

En supposant que la capacité d'entreposage est limitée à 2500 unités tout produits confondus, établir un plan de production optimal.

2. Une entreprise fabrique 2 types de voitures. Une dite modèle de luxe et une autre de catégorie économique. Les deux types de voitures passe dans 3 ateliers pour l'assemblage

Distribution du temps opératoire

	Atelier 1 (heures)	Atelier 2(heures)	Atelier 3(heures)
Modèle économique	2	3	4
Modèle de luxe	3	4	5
Tps disponible	1200	1500	1800

Distribution des coûts

	Modèle économique	Modèle de luxe	Disponibilité
MP	80	120	1.100.000
MO	70	100	900.000
Machines	40	200	1.500.000

En tout l'usine ne peut assembler plus de 600 voitures qu'elle compte écouler respectivement au prix de 300 unités monétaires pour le modèle économique et 240UM pour le modèle de luxe

Question : déterminer un plan de production optimale

3. Un chercheur veut expérimenter trois nouvelles variétés de cultures. Pour cela, il dispose d'un terrain de 30 ha sur lequel il veut tester trois plants A, B, C. Le chercheur a recruté une MO et acheté une machine dont le travail en saison utile est respectivement de 200 et 400 heures. Le tableau suivant donne la distribution du temps de travail et des rendements pour chacune des trois plants;

	MO	Machines	Rendt/ha
A	2	3	4000
B	4	1	3500
C	1	3	3000

Déterminer un programme optimal de production

I.2 RESOLUTION D'UN PROGRAMME LINEAIRE

1. Structure géométrique des programmes linéaires

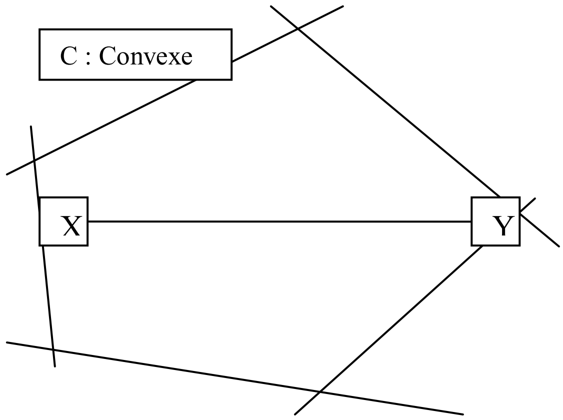
La résolution des problèmes d'optimisation linéaire fait intervenir quelques propriétés des parties convexes de R^m, en particulier des polytopes et polyèdres.

On appelle *polytope convexe* de R^m, l'intersection (supposée non vide) d'une famille finie de demi-espaces fermé de R^m. Un polytope convexe est évidemment convexe et ferme.

On appelle *polyèdre c onvexe* de R^m, un polytope convexe borne de R^m. Un polyèdre convexe est fermé et borné, donc compact.

1. Fonction convexes

Soit C un sous ensemble de l'espace à n dimensions. On dira que C est un ensemble convexe, si pour tout couple de points x et y, le segment joignant x à y est entièrement contenu dans C. Autrement dit, pour tout réel λ, $0 \leq \lambda \leq 1$, on a : $\lambda(x) + (1-\lambda)y \in C$



On appelle demi - espace affine, tout ensemble de vecteurs X, défini par une inégalité de la forme :

$$aX = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots\ldots + a_nx_n \leq b \text{ où } a = (a_1, a_2 \ldots a_n)$$

Un polyèdre est donc, tout ensemble formé par l'intersection d'un nombre fini de demi espace affines. Tout polyèdre est donc défini par m vecteurs tels que :

$$a_1x = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ldots\ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_2x = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ldots\ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

.

.

$$a_mx = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ldots\ldots + a_{mn}x_n \leq b_{mn}$$

Ou encore :

$Ax \leq b$ avec $(A = a_{ij})$, une matrice m x n

- Soit C un ensemble convexe dans l'espace à n dimensions, on dira qu'un élément X de C est un point extrémal de C s'il ne peut être situé à l'intérieur d'un segment joignant 2 points distincts de C. C'est-à-dire tout points qui ne peut s'écrire de la façon suivante : λ(x) + (1- λ)y $\in$ C

$\forall (x, y) \in C$ et $\forall \lambda$ *réel* $0 < \lambda < 1$

- Soit C un ensemble convexe dans l'espace à n dimensions et g une fonction convexe défini sur C à valeurs réels. On dira que g est une fonction convexe si $\forall \lambda$ *réel* $0 \leq \lambda \leq 1$:

$$g((\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)) \leq \lambda g(x_1) + (1-\lambda) g(x_2)$$

Théorème : Soit C et S deux ensembles dans l'espace à n dimensions. On dira qu'un hyperplan aX≤ b sépare C et S si l'on a :

aX ≤ b et aX ≥b $\forall x \in C$ *et* $\forall x \in S$

EXERCICE

Soit un polyèdre P défini par les relations suivantes :

$$-5x_1 + 2x_2 \leq 10$$
$$1/3x_1 + 1/2x_2 \leq 7$$
$$x_2 \leq 10$$
$$x_1 \leq 10$$
$$-3/4\, x_1 + x_2 \geq -3$$
$$5/4\, x_1 + x_2 \geq 5$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

a) Représenter dans un repère muni d'un repère orthonormé, l'ensemble correspondant à P
b) Déterminer les points extrémaux de p

c) Considérons le vecteur a $= (3\,;-2)$, on cherche à maximiser la forme linéaire f(x) = ax $\forall x \in P$.

- Calculer la valeur de f(x) n chacun des points extrémaux de P
- Ranger les points extrémaux selon l'ordre des valeurs prises par f en ces points

d) En quels points la forme P atteint –elle son maximum et son minimum ?

e) Tracer les perpendiculaires au vecteur a et passant par chacun des points extrémaux. Quel est le point touché en dernier lieu. Commentez les résultats

Solutions (Voir notes de cours)

Commentaires

On voit que pour trouver le maximum ou le minimum d'un programme linéaire, il suffit de comparer les valeurs prises par f au sommet du polyèdre formé par le système de contraintes. C'est-à-dire comparer les valeurs prises par f aux points extrémaux

Théorème : Un programme linéaire réalise sa valeur optimale à l'un des sommets du polyèdre formé par l'intersection des hyperplans ou demi-espaces définissant ses contraintes.

Conclusions :

- Tous les sommets du polyèdre sont des solutions de base réalisables
- S'il existe une solution optimale, elles se trouvent sur l'un des sommets du polyèdre
- Si P possède une solution optimale, alors P admet une solution de base réalisable.

I.2.3. Résolution graphique d'un programme linéaire à deux variables

Une entreprise fabrique *2* produits *X* et *Y*. Pour sa conception, chaque produit fini nécessite *3* produits intermédiaires *A*, *B* et *C*. Pour fabriquer un produit *X*, on a besoin de *2* unités A, de *2* unités *B* et de *1* unité de *C*. De même, pour fabriquer un produit *Y*, on a besoin de *3* unités *A*, de *1* unité *B* et de *3* unités *C*.

En outre, l'entreprise dispose d'une quantité limitée de produits *A*, *B* et *C*. Elle a *180* produits *A*, *120* produits *B* et *150* produits *C*. Sachant que le prix de revient de *X* est *3* francs et que celui de *Y* est de *4* francs, combien de produits *X* et *Y* faut-il fabriquer pour maximiser le profit ?

Le programme linéaire s'écrit:

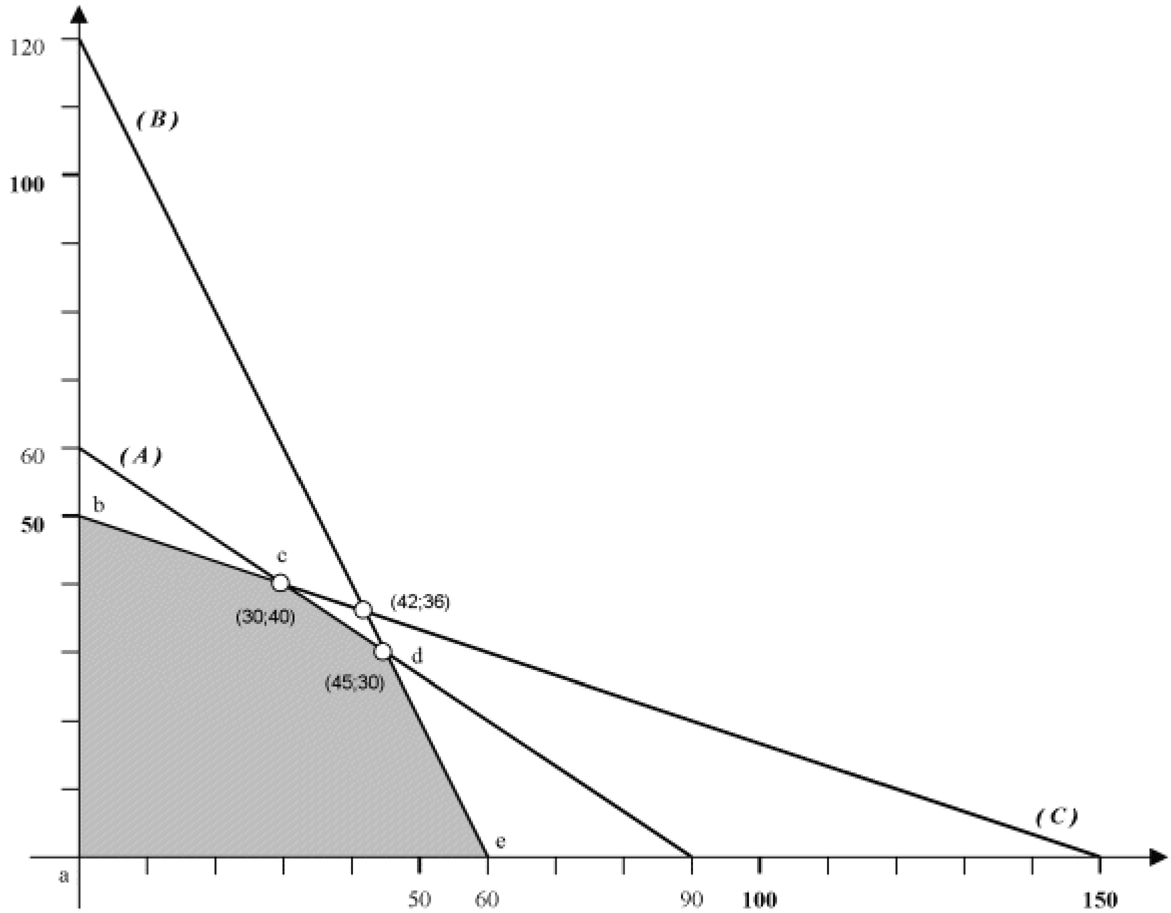
$Max(x): 3x + 4y$

$2x + 3x \leq 180$ (A)

$2x + y \leq 120$ (B)

$x + 3y \leq 150$ (C)

$x \geq 0$; $y \geq 0$



La zone grise représente l'ensemble des solutions admissibles . Ce sont les solutions qui satisfont les contraintes du programme linéaire.

a) L'intersection des demi plans déterminés par les droites qui correspondent aux contraintes représente l'ensemble des solutions qui satisfont aux contraintes.
b) La direction qui correspond à la fonction objectif est donné par le vecteur gradient de Z(x)
c) On obtient la solution optimale en effectuant une translation parallèle à la perpendiculaire de cette direction, jusqu'à atteindre le dernier sommet du domaine hachuré. C'est ce dernier sommet qui constitue la solution optimale du programme linéaire.

EXERCICES

1) $Max\, Z(x) = 4x_1 + 3x_2$

$s.c\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12$

$7x_1 + 2x_2 \leq 14$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

2) $Max\ Z(x) = 4x_1 + 3x_2$

$s.c - x_1 + 2x_2 \leq 3$

$x_1 + x_2 \leq 5$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

3) $Max\ Z(x) = 4x_1 + 5x_2$

$2x_1 + x_2 \leq 12$

$x_1 + 2x_2 \leq 12$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

I.3 LA METHODE DU SIMPLEXE

On a déjà présenté dans la méthode graphique pour résoudre un programme linéaire à deux variables. Cependant, dans la plupart des problèmes réels, on a plus que deux variables à déterminer. Une procédure algébrique pour résoudre les programmes linéaires avec plus que deux variables est donc nécessaire fera l'objet de la section suivante. C'est la méthode de simplexe. Cette dernière est une procédure itérative qui passe d'une solution réalisable de base à une autre jusqu'à atteindre la solution optimale.

Une implémentation de cette procédure permet de résoudre des programmes avec plusieurs de variable

I.3.1. Forme générale et forme standard d'un programme linéaire

Max z(x)= $\sum_j c_j x_j$

Sous les contraintes

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \cdots\cdots\cdots + a_{2n}x_n \leq b_2$

.

.

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \cdots\cdots\cdots + a_{mn}x_n \leq b_{mn}$

$x_1; x_2 \cdots x_n \geq 0$

C'est la forme générale ou forme canonique d'un programme linéaire

Sous forme matricielle, on écrit

$Max \;\; Z(x) = \mathbf{cx}$

$Sc \;\; \mathbf{Ax} \leq b$

$x_i \geq 0$

I.3.2. Mise sous forme standard

La mise sous forme standard consiste à introduire des variables supplémentaires, de manière a réécrire les inégalités sous la forme d'égalités. Chacune de ces variables représente le nombre de ressources non utilisés. Ces variables sont appelées **variables d'écart**. La forme standard s'écrit donc :

Max z(x)= $\sum_{j} c_j x_j$

Sous les contraintes

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \cdots\cdots\cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2$$

.

$$\cdot a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \cdots\cdots\cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_{mn}$$

$$x_1 ; x_2 \cdots x_n , x_{n+1} \cdots x_{n+m} \geq 0$$

$x_{n+1}; x_{n+2}; \cdot x_{n+m}$ sont des variables d'écart

Sous forme matricielle, on a :

Max Z(x)= CX

S/c Ax =b

x≥0

Les variables d'écart peuvent représenter, par exemple l'excédent de chacune des ressources : terrain, eau, heures de travail,. Elles sont aussi dites variables de surplus.

Quand une variable d'écart est nulle, on dit que la contrainte correspondante est saturée.

Si le problème posé consiste à transformer des biens pour vendre une production avec un meilleur profit et l'augmentation maximale de revenu qui résulte de la possibilité de disposer d'une unité supplémentaire de l'un des biens, est la valeur marginale de ce bien. Très souvent, on emploie également dans ce cas le qualificatif coût marginal.

Solution de base réalisable

Qu'est ce qu'une base ?

L'impact de ces variables d'écart sur la fonction objectif est nulle. Ceci explique le fait que leur existence soit tout simplement liée à une mise en forme du programme linéaire initial. Ces variables d'écart peuvent prendre des valeurs non-négatives. Le fait de donner la valeur des variables d'écart a l'optimum donne une idée du nombre des ressources non utilisées.

Généralement, si on a un programme linéaire standard constitué de n variables et m contraintes alors une solution de base initiale est obtenue, en annulant (n) variables et en résolvant les m contraintes pour déterminer les valeurs des autres m variables.

Une solution réalisable de base est obtenue en posant $x_1 = x_2 = 0$, on a ainsi:

$X_1 = 150$;$X_2= 440$; $X_3 = 480$; $X_4 = 90$

Cette solution correspond à un point extrême de l'ensemble des solutions réalisables qui est l'origine O.

A partir de ce point la méthode de simplexe va générer successivement des solutions réalisables de base pour notre système d'équations en s'assurant que la valeur de la fonction objectif est en train d'augmenter jusqu'à localiser la solution optimale du problème qui est un point extrême de l'espace des solutions réalisables donc une solution réalisable de base.

Ainsi, on peut décrire la méthode de simplexe comme étant une procédure itérative qui passe d'une solution réalisable de base à une autre jusqu'à atteindre la solution optimale.

Etapes de l'algorithme du simplexe

1) A jouter les variable d'écarts au système d'inéquation constituant les contrainte du programme linéaire. L'impact de ces variables d'écart sur la fonction objectif est nulle, car affectés d'un coefficient nul. leur existence est tout simplement liée à une mise en forme du programme linéaire initial. Ces variables d'écart peuvent prendre

des valeurs non négatives. A l'optimum les variables d'écart donne une idée des ressources non utilisées.

2) Déterminer une solution de base initiale $x_{n+i} = b$ Généralement, un programme linéaire standard est constitué de *n* variables et *m* contraintes. Une solution de base initiale est obtenue, en annulant *n* variables et en résolvant les *m* contraintes pour déterminer les valeurs des autres *m* variables.

3) Construire le tableau initial du simplexe.

4) Déterminer la variable qui sort et celle qui entre dans la base.

La méthode du simplexe va alors générer successivement des solutions réalisables de base pour notre système d'équations en s'assurant que la valeur de la fonction objectif est en train d'augmenter jusqu'à localiser la solution optimale du problème qui est un point extrême de l'espace des solutions réalisables, en d'autres termes, une solution réalisable de base.

Pour tester l'optimalité de la solution, on regarde le signe du vecteur coûts réduits :

a) Pour un problème de maximisation, l'optimum est atteint, lorsque tous les coûts réduits sont négatifs

b) **Pour un problème de minimisation, l'optimum est atteint lorsque tous les coûts réduits sont positifs**

Exemple

4) $Max\ Z(x) = 100x_1 + 200x_2$

$s.c\ x_1 + x_2 \leq 150$

$4x_1 + 2x_2 \leq 440$

$x_1 + 4x_2 \leq 480$

$x_1 \leq 90$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

En ajoutant les variables d'écart on a le programme sous forme standard suivant :

$Max\ Z(x) = 100x_1 + 200x_2$

$s.c\ x_1 + x_2 + x_3 = 150$

$4x_1 + 2x_2 + x_4 = 440$

$x_1 + 4x_2 + x_5 = 480$

$x_1 + x_6 = 90$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

En posant

$x_1 = 0; x_2 = 0$

On a une solution de base réalisable qui va servir de point départ à la méthode du simplexe:

$x_1 = x_2 = 0,$ on a : $\begin{array}{l} \overline{x_3 = 150} \\ x_4 = 440 \\ x_5 = 480 \\ x_6 = 90 \end{array}$ solution réalisable de base initiale

On construit le premier tableau du simplexe:

1er Tableau du simplexe

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	b	
Cj	100	**200**	0	0	0	0	0	-z
$\Theta_1 = 150$	1	1	1	0	0	0	150	X_3
$\Theta_2 = 220$	4	2	0	1	0	0	440	X_4
$\Theta_3 =$ **120**	1	**4**	0	0	1	0	480	X_5
$\Theta_4 = -$	1	0	0	0	0	1	90	X_6

- Choix de la variable qui entre dans la base : Max $C_j = 200$

X_2 entre dans la base

Choix de la variable qui sort : On calcule Min $\frac{b_i}{a_{ij}} = 120$

X_5 : sort de la base

Elément pivot : 4

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5 X_6	X_6	b	
C_j	50	0	0	0	-50	0	-24000	-z
$\Theta_1 =$ **40**	**0,75**	0	1	0	-0,25	0	30	X_3
Θ_2 =57,14	3,5	0	0	1	-0,5	0	200	X_4
Θ_3 =480	0,25	1	0	0	0,25	0	120	X_2
Θ_4 =90	1	0	0	0	0	1	90	X_6

Pour le deuxième tableau du simplexe, on fait entrer dans la base X_1

Et on fait sortir X_3

L'élément pivot : 0,75

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	b	
Cj	0	0	-66,67	0	-33,33	0	-26000	-z
$\Theta_{1=}$ 40	1	0	1,33	0	-0,33	0	40	X_1
Θ_2 $_=$57,14	0	0	-4,67	1	0,67	0	60	X_4
$\Theta_{3\,=}$480	0	1	-0,33	0	0,33	0	110	X_2
$\Theta_{4\,=}$90	0	0	-1,33	0	0,33	1	50	X_6

$$\overline{\begin{array}{l} x_1 = 40 \\ x_4 = 60 \\ x_2 = 110 \\ x_6 = 50 \end{array}}$$

est donc une solution optimale du programme linéaire. C'est à dire que notre agriculteur devra consacrer 40 ares à la culture du riz et ares à la culture des légumes

A l'optimum Z(x) = 26000 UM

C'est le profit maximal qu'il peut tirer de l'exploitation de son petit terrain

On arrête les itérations lorsque le vecteur coûts réduits est négatif (Coefficients des variables hors base dans la fonction objectif)

Si une variable d'écart n'est pas nulle, dans la solution optimale, c'est que le bien correspondant est déjà excédentaire. Par conséquent, le fait de disposer d'une unité supplémentaire de ce bien n'aura aucune influence sur le revenu. On dit alors que ce bien à une valeur marginale nulle, ou par extension, que la variable d'écart associée à ce bien a une valeur marginale nulle.

Par contre, si une variable d'écart est nulle dans la solution optimale, c'est que le bien correspondant est totalement utilisé. Par la suite une variation de la disponibilité aura généralement une influence sur le revenu. C'est pourquoi cette variable d'écart nulle dans la solution optimale à une valeur marginale non nulle, et cette valeur marginale précise la variation de la fonction économique résultant de l'utilisation d'une unité supplémentaire du bien associée. Dans le problème de l'agriculteur on a le coût marginal lié à X_1 quiest 66,67

Une augmentation de x_3 d'une unité entraîne une diminution de 66,67 de la valeur de la fonction économique.

Le coût marginal lié à x_4 est 0 et à l'optimum $x_4 = 0$

C'est dire qu'on a déjà 60 mètres cubes d'eau de plus, donc si on ajoute 1 mètre cube ça ne va pas changer la solution optimale ni la valeur de la fonction économique.

Exemple 2 :

Max $Z(x) = 1.200x_1 + 1.000x_2$

$$\begin{aligned} \text{S/c: } & 3x_1+4x_2 \leq 160 \\ & 6x_1+3x_2 \leq 180 \\ & X_1 \geq 0 \text{ , } x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

En introduisant les variables d'écart, on a le programme sous forme standard suivant:

Max $Z(x) = 1.200x_1 + 1.000x_2$

$$\begin{aligned} \text{S/c : } & 3x_1+4x_2 - x_3 = 160 \\ & 6x_1+3x_2 - x_4 = 180 \\ & X_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

En posant $x_1 = x_2 = 0$, on une solution de base réalisable :

$X_3 = 160$; $X_4 = 180$ avec $Z(x) = 0$

Tableaux du simplexe

	X_1	X_2	X_3	X_4	b	
C_j	1200	1000	0	0	0	-z
$\Theta_1 = 53,33$	3	4	1	0	160	X_3
$\Theta_2 = 30$	$\boxed{\mathbf{6}}$	3	0	1	180	X_4

	X_1	X_2	X_3	X_4	b	
Cj	0	400	0	-200	-36000	-z
$\Theta_1 = 28$	0	$\boxed{\mathbf{2{,}5}}$	1	-0,5	70	X_3
$\Theta_2 = 60$	1	0,5	0	0,16667	30	X_1

	X_1	X_2	X_3	X_4	b	
Cj	0	0	-160	-120	-47200	-z
	0	1	0,4	-0,2	28	X_2
	1	0	-0,2	0,26667	16	X_1

Les quantités optimales à produire sont : 16 pièces de type 1 et 28 pièces de type 2 avec un profit optimal de 47.200

Exercices

1) $Max\ Z(x) = 4x_1 + 3x_2$

$s.c\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12$

$7x_1 + 2x_2 \leq 14$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

2) $Max\ Z(x) = 4x_1 + 3x_2$

$s.c\ -x_1 + 2x_2 \leq 3$

$x_1 + x_2 \leq 5$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

I.4. La Méthode *M*.

Supposons que le programme linéaire à résoudre est donné par le programme suivant : Maximiser $z(x) = Cx$,

$$\text{S/c } Ax = b,\ x \geq 0$$

En ajoutant des variables d'écarts (de signe positif ou négatif), il est toujours possible de mettre un programme linéaire en la forme (P =) ci-dessus avec $b \in R_+^m$

S'il n'est pas évident de trouver une solution de base réalisable qui peut servir de solution initiale pour le simplexe, on ajoute aux contraintes des variables artificielles $y_i \geq 0$, on a le système de contraintes

$Ax = b$ *qui* est remplacé par $Ax + y = b$; $y = {}^t(y_1, y_2, \ldots, y_m) \in R_+^m$

Les nouvelles contraintes ne sont bien sur pas équivalentes aux contraintes initiales. On pénalise alors les $y_i > 0$ en remplaçant la fonction-objectif $z(x)$= Cx par $Z'(x) = Cx - M \sum_1^m y_i$

Où M est une valeur positive très élevée.

On choisira les $y_i = b_i$, $i = (1, 2 \ldots, m)$ comme solution de base réalisable qui sert de solution initiale à la méthode du simplexe.

Diminuant considérablement la valeur de $Z(x)$, les variables artificielles vont disparaître de la base au cours des étapes du simplexe.

Pour la résolution, part du programme linéaire suivant :

Maximiser $Z(x,y) = Cx - M \sum_1^m y_i$

S/c : $Ax + y = b$,

S'il y a des composantes de b qui sont négatives, on multiplie par (-1) les contraintes initiales concernées

La solution de base réalisable initiale est *y* = *b*. On exprime alors Z(x)en termes de variables hors base en substituant les *yi* dans la fonction objectif

Exemple :

$$Max\, Z(x) = 5x_1 + 6x_2$$

$$s.c \; -x_1 + x_2 \leq 4$$
$$5x_1 + 3x_2 \leq 60$$
$$x_2 \geq 5;$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

En introduisant des variables d'écart, on a :

$$Max\, Z(x) = 5x_1 + 6x_2$$
$$s.c \; -x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$5x_1 + 3x_2 + x_4 = 60$$
$$x_2 - x_5 = 5$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

En posant $x_1 = x_2 = 0$

On a : $X_3 = 4$

$X_4 = 60$ Solution non réalisable, car X_5 négative

$X_5 = -5$

On introduit alors des variables artificielles dans les contraintes concernées, ici la troisième contrainte.

$$Max\ Z(x) = 5x_1 + 6x_2 - My$$

$$s.c\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$5x_1 + 3x_2 + x_4 = 60$$

$$x_2 - x_5 + y = 5$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; y \geq 0$$

On a une solution réalisable de base

$X_3 = 4$

$X_4 = 60$ Solution réalisable de base

$y = 5$

En exprimant les variables de base en fonction des variables hors base, on a : $y = 5 - X_2 + X_5$
On remplace alors la valeur de y dans la fonction objectif.

$$Max\ Z(x) = 5x_1 + 6x_2 - M(5 - X_2 + X_5)$$

$$= 5x_1 + 6X_2 - 5M + MX_2 - MX_5$$

$$= 5x_1 + (6 + M)X_2 - MX_5 - 5M$$

$$s.c\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$5x_1 + 3x_2 + x_4 = 60$$

$$x_2 - x_5 + y = 5$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; y \geq 0$$

On a alors le 1er tableau du simplexe

	X_1	**X_2**	X_3	X_4	X_5	y	b	
C_j	5	**6+M**	0	0	-M	0	5M	-Z
$\Theta_1 = 1$	-1	**1**	1	0	0	1	4	**X3**
$\Theta_2 = 20$	5	3	0	1	0	0	60	X4

$\Theta_3 =$	1	-1	0	0	-1	0	5	Y

Voir suite dans les notes

EXERCICES

1) $Min\ z(x) = 12x_1 + 14x_2$

$s.c\ 3x_1 + 7x_2 \geq 4$

$4x_1 + 2x_2 \geq 3$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

2) $Min\ Z(x) = x_1 - x_2$

$s.c\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 \geq 8$

$-x_1 + 8x_2 \leq 40$

$x_1 \geq 8$

$x_2 \leq 8$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

I.5 PROGRAMME LINEAIRE DUAL

Considérons le problème de production suivant :

Soit x_j :nombre d'unités du produit P_j fabriquées par une entreprise *I* ($j = 1, 2, . ., n$).

a_{ij} : Nombre d'unités de la matière première *Mi* utilisées pour la fabrication d'une unité de P_j

c_j : *Bénéfice* de l'entreprise *I* en vendant une unit´e de P_j.

Le programme linéaire pour déterminer le plan de production qui permet de maximiser le bénéfice de l'entreprise *I* s'énonce comme suite :

Maximiser $z(x)$ =Cx sous les contraintes de disponibilité

$\sum a_{ij} x \leq b_i (i = 1, 2, \ldots, m)$, $\quad x_j \geq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

En forme matricielle les contraintes se lisent : $Ax \leq b,\ x \geq 0$

Supposons qu'une entreprise *II* essaie de s'emparer du marché. Sous l'hypothèse d'un comportement économique de l'entreprise *I*, celle-ci est prête à céder les matières premières à un prix qui est au moins aussi élevé que le bénéfice qu'elle ferait en vendant ses produits.

Soit y_i ,le prix que l'entreprise IIdevra payer pour une unité de M_i .Les contraintes sont les suivantes : $\sum y_i a_{ij} \geq c_j$

Sous forme matricielle $yA \geq c$, $y \geq 0$

L'entreprise *II* essaiera de minimiser le coût d'achat des matières premières : $\sum_{i=1}^{i=m} y_i b_i$

Sous les contraintes $yA \geq c,$

$y_i \geq 0$, $(i=1.2\ldots..,m)$

Soit le programme primal

P : Maximiser $z(x) = cx$

sous $Ax \leq b,$

$x \geq 0$

et son dual D : Minimiser $g(y) = yb$

sous les contraintes $yA \geq c,\ y_i \geq 0$.

On a liens suivants :

m= nombre de contraintes de *P* = nombre de variables de D,
n= nombre de variables de *P* = nombre de contraintes de D.

C'est-à-dire que si P contient deux contraintes, D contient deux variables

Théorème : Les liens entre le programme primal et son dual sont les suivants :

Primal	Dual
Maximisation	minimisation
Coefficient de z	Second membre des contraintes de g
Second membre des contraintes de z	Coefficients de g
Contraintes $\begin{cases} = \\ \leq \\ \geq \end{cases}$	Variables $\begin{cases} \text{Sans restriction de signe} \\ \geq \\ \leq \end{cases}$
Variable $\begin{cases} \text{Sans contrainte de signe} \\ \geq ;\ \leq \end{cases}$	Contrainte $\begin{cases} = \\ \leq \\ \geq \end{cases}$

Théorèmes de dualité

Théorème1

Soit (x_1, x_2) une solution réalisable du programme linéaire P et (y_1, y_2), une solution réalisable du programme linéaire dual D. Alors :

1) $Z(x_1, x_2) \leq g(y_1, y_2)$
2) $Z(x_1, x_2) = g(y_1, y_2) \Rightarrow (x_1, x_2)$ et (y_1, y_2) sont des solutions optimales de P et de D

Théorème2:

Soit un programme linéaire P et D son dual. Alors, trois cas peuvent se produire :

1) P et D possèdent des solutions optimales et max $Z(x_1, x_2) = $ Min $g(y_1, y_2)$
2) P ou D possède une solution optimale, mais pas les deux
3) Ni P ni D ne possède des solutions optimales

Exemple :

Ecrire le dual du programme linéaire suivant:

Max $Z(x) = 1.200x_1 + 1.000x_2$

$$\text{S/c : } 3x_1+4x_2 - x_3 = 160$$
$$6x_1+3x_2 - x_4 = 180$$
$$X_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

P : Max $z(x) = cx$ $\quad C^t = (1200 \quad 1000)$; $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 160 \\ 180 \end{pmatrix}$

s/c $Ax \leq b,$

$x \geq 0 \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad y = (y_1, y_2)$

D : Min $g(y) = yb$

s/c $\quad yA \geq c,$

$y_i \geq 0.$

Le programme dual s'écrit alors :

$$\text{Min } g(y) = yb = (y_1, y_2)\begin{pmatrix} 160 \\ 180 \end{pmatrix} = 160y_1 + 180y_2$$

Sous les contraintes $yA \geq c$,

$$(y_1, y_2)\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 1200 \\ 1000 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3y_1 + 6y_2 \geq 1200 \\ 4y_1 + 3y_2 \geq 1000 \end{cases}$$

En ajoutant les contraintes de non négativité, on a alors le programme dual suivant :

Min $g(y) = 160y_1 + 180y_2$

$$\text{S/c} \begin{cases} 3y_1 + 6y_2 \geq 1200 \\ 4y_1 + 3y_2 \geq 1000 \\ y_1 \geq 0; y_2 \geq 0 \end{cases}$$

En ajoutant des variables, d'écart on a le programme linéaire sous forme standard suivants :

Min $g(y) = 160y_1 + 180y_2$

$$\text{S/c} \begin{cases} 3y_1 + 6y_2 - y_3 = 1200 \\ 4y_1 + 3y_2 - y_4 = 1000 \\ y_i \geq 0; i = (1,2,3,4) \end{cases}$$

La solution y = $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 1000 \end{pmatrix}$ n'est pas une solution réalisable, car elle ne satisfait pas à la contrainte de non négativité

On ajoute alors des variables artificielles. On a :

Min $g(y) = 160y_1 + 180y_2 - Mt_1 - Mt_2$

S/c $\begin{cases} 3y_1 + 6y_2 - y_3 + t_1 = 1200 \\ 4y_1 + 3y_2 - y_4 + t_2 = 1000 \\ y_i \geq 0; t_i \geq 0 \end{cases}$

La solution : $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 1000 \end{pmatrix}$ est une solution réalisable de base initiale qui peut servir de point de départ à la méthode du simplexe.

En exprimant les variables de base en fonction des variables hors base,

$$t_1 = 1200 - 3y_1 - 6y_2 + y_3$$
$$t_2 = 1000 - 4y_1 - 3y_2 + y_4$$

En remplaçant les valeurs de t_1 et t_2 dans la fonction objectif, on a :

Min $g(y) = 160y_1 + 180y_2 - M(1200 - 3y_1 - 6y_2 + y_3) - M(1000 - 4y_1 - 3y_2 + y_4)$

$= 160\ y_1 + 180\ y_2 - 1200M - 3My_1 - 6My_2 + My_3 - 1000M - 4My_1 -$

$- 3My_2 + My_4$

En procédant au regroupement, on a :

Min $g(y) = (160-7M)y_1 + (180- 9M)y_2 + My_3 + My_4 - 2200M$

1[er] tableau du simplexe

	y_1	y_2	y_3	y_4	t_1	t_2	b_i	
C_j	160-7M	180-9M	M	M	0	0	2200M	-g
$\Theta_1 = 200$	3	6	-1	0	1	0	1200	t_1

Θ_2 =333,3	4	3	0	1	0	1	1000	t_2

(Voir résolution dans les notes)

I.6 PROGRAMMATION EN NOMBRES ENTIERS

Dans beaucoup de problèmes d'optimisation une solution à valeurs entières est exigée. C'est souvent le cas qui arrive lorsqu'on a déterminé par exemple une quantité optimale de pièces à produire ou de machines à produire.

Pour résoudre ce type de problèmes, on fait recours à la méthode dite de séparation évaluation (Branch and bound) ou la méthode des coupes. Ces méthodes utilisent à plusieurs reprises la méthode du simplexe

Méthode par séparation évaluation

$$Z(x) = 4x_1 + 3x_2$$
$$Sous\,les\,contraint\,es:$$
$$3x_1 + 4x_2 \leq 12$$
$$7x_1 + 2x_2 \leq 14$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \quad \grave{a}\,valeurs\,enti\grave{e}res$$

a) Résoudre le programme linéaire sans tenir compte de la contrainte x_1, x_2 *à valeures entières* Solution optimale x_1= 1,455 ; x_2= 1.909 ; Z(x) = 11,55

Brancher par rapport à x_1, $x_1 \leq 1$ *ou* $x_2 \geq 2$

b) Ajouter la contrainte $x_1 \leq 0$ au programme initial et résoudre à l'aide du simplexe sans tenir compte de la contrainte x_1 ; x_2 à valeurs entières. Solution optimale x_1= 1 ; x_2= 2,25 ; Z(x) = 10,75

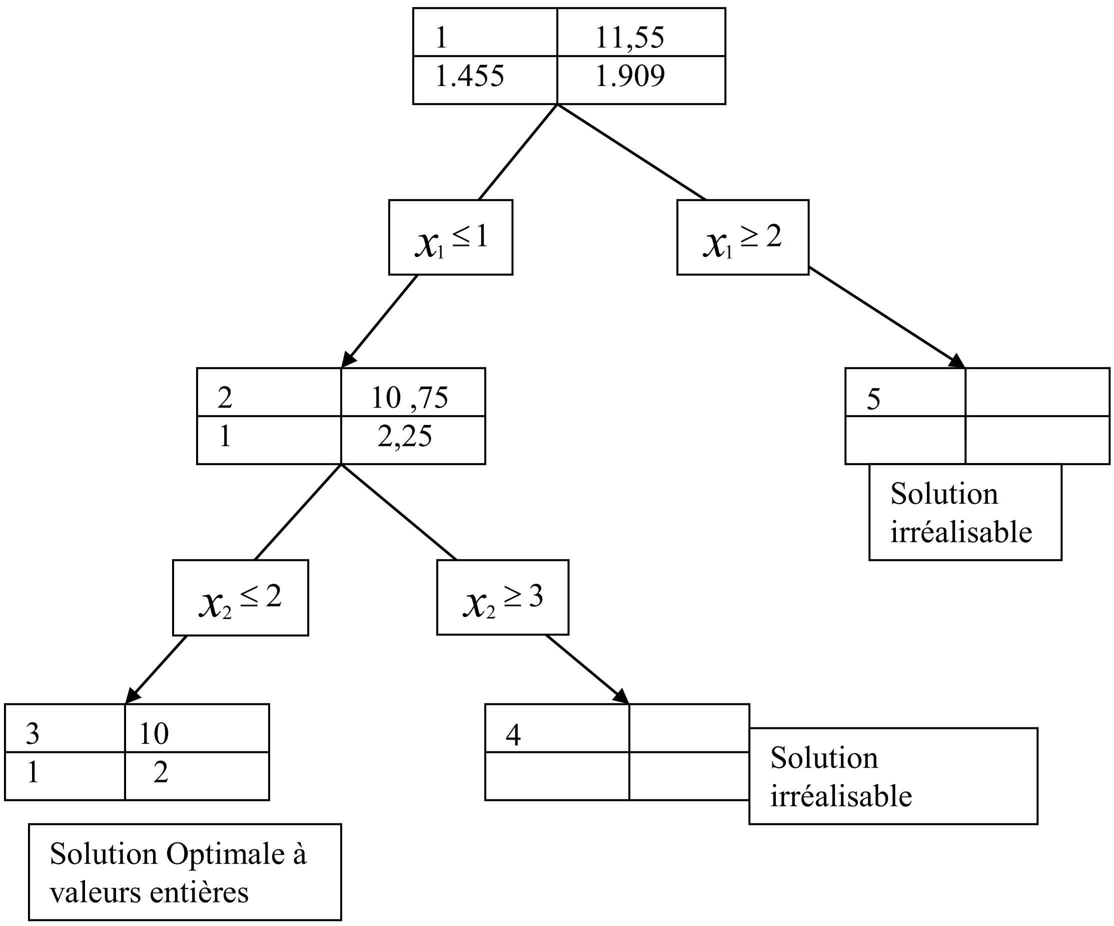
Brancher par rapport à x_2 : $x_2 \leq 2$ *ou* $x_2 \geq 3$

c) Ajouter les contraintes $x_1 \leq 1$ *et* $x_2 \leq 2$ *et résoudre le programme linéaire*

on obtient une solution à valeurs entières : $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; Z(x) = 10

d) Les étapes 4 et 5 donnent des solutions qui ne sont pas réalisables.

On borne donc à Z(x) = 10 ; $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *est une solution optimale à valeurs entires*



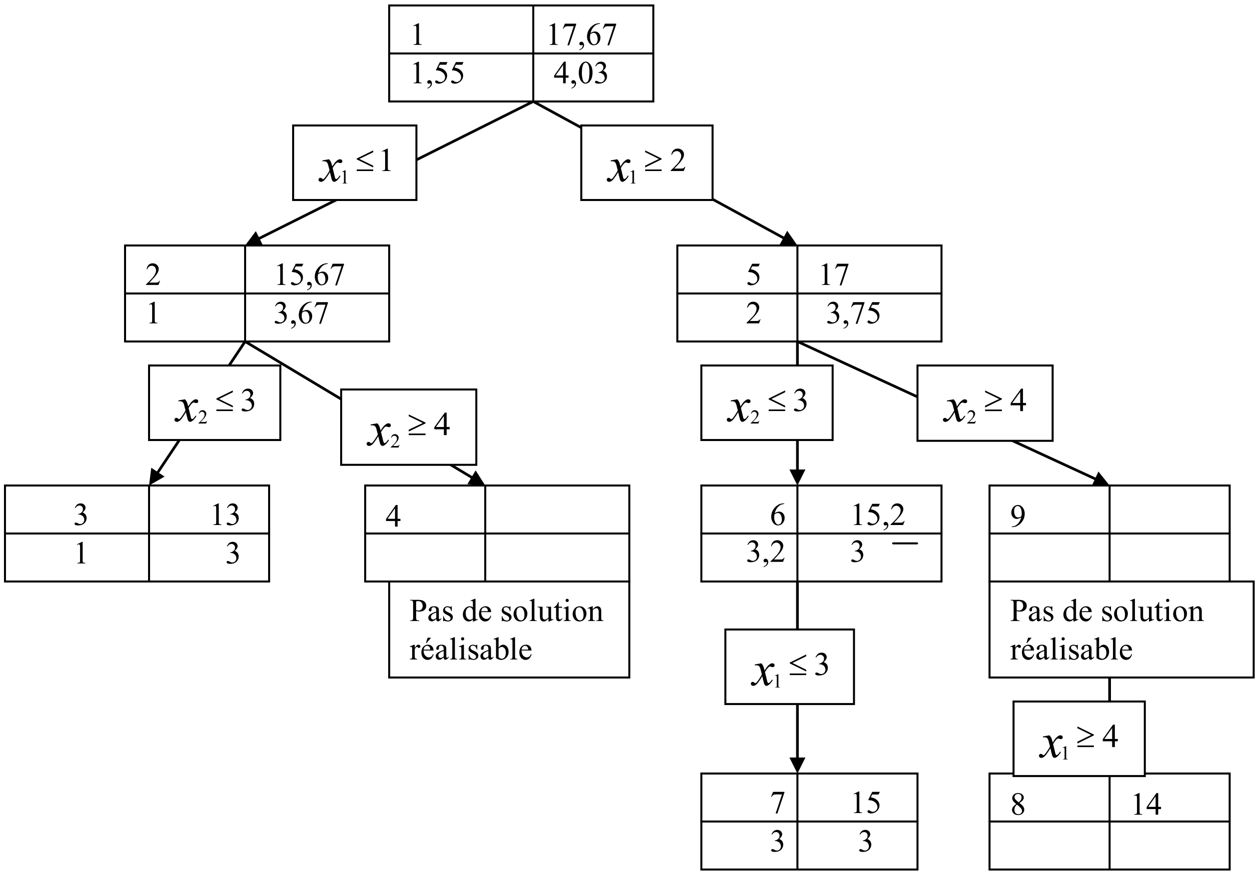
La solution optimale à valeur entière est donnée par le programme linéaire :

$Z(x) = 4x_1 + 3x_2$
Sous les contraintes :
$3x_1 + 4x_2 \leq 12$
$7x_1 + 2x_2 \leq 14$
$x_1 \leq 1$
$x_2 \leq 2$
$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$ *à valeurs entières*

Dans cet exemple, la solution à valeur entière est proche de la solution optimale fractionnaire. Ce qui n'est pas toujours le cas.

$Z(x) = x_1 + 4x_2$
Sous les contraintes
$5x_1 + 8x_2 \leq 40$
$-2x_1 + 3x_2 \leq 9$
$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$ *à valeurs entières*

Exemple 2



La solution optimale est donnée par la résolution du programme linéaire suivant

$Z(x) = x_1 + 4x_2$

Sous les contraintes

$5x_1 + 8x_2 \leq 40$

$-2x_1 + 3x_2 \leq 9$

$x_1 \geq 2$

$x_2 \leq 3$

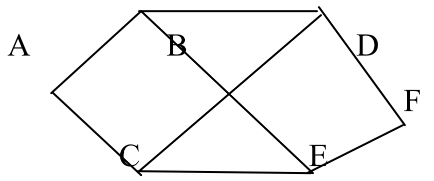
$x_1 \leq 3$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$ *à valeurs entières*

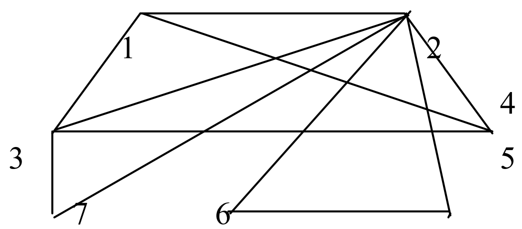
CHAP.II : THEORIE DES GRAPHES

Introduction

Considérons des points en nombre fini, distincts et dénombrables. Relions ces points par des traits, la figure que nous obtenons est un graphe.



Exemple : une entreprise fabrique, 7 produits chimiques, dont certains, par paires, ne peuvent être transportés dans un même camion sans risque d'explosion. Connaissant les produits qui ne peuvent cohabiter, l'objectif est de réaliser le transport sans risque et au moindre coût (c.à.d. en utilisant le moins de camions possible). On peut représenter ce problème par un graphe. On symbolise chaque produit par un point du plan, mais on a un choix à faire concernant la symbolisation des relations entre les produits : soit on relie deux points si et seulement si ils peuvent être transportés ensemble



A partir de ce graphe, on voit par exemple que le produit 1 ne peut pas être transporté ensemble avec les produits 5 et 6, le produit 7 ne peut pas être mélangé avec 6 et 4 …

L'histoire de la théorie des graphes débute avec les travaux d'Euler au 18ème siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg (dans lequel, les habitants de cette ville se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ), la marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème de coloriage de cartes.

La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales. Depuis le début du XX^{ème} siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdös.

D'une manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments : réseau de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques,. . .

Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser
une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de sommets et d'arcs.
Les derniers travaux en théorie des graphes sont souvent effectués par des informaticiens, du fait de l'importance qu'y revêt l'aspect algorithmique.

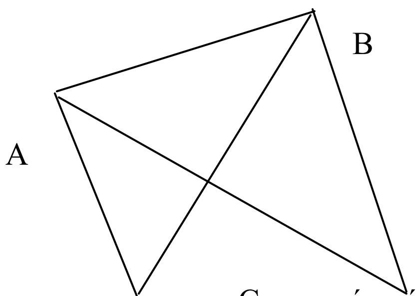
II 1 Graphes orientés et graphes non orientés

Considérons des points en nombre fini distincts et dénombrables. Relions ces points par des traits, la figure que nous obtenons est un graphe

1.Définition

Un graphe simple G=(X, A) est un couple formé de deux ensembles : un ensemble $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dont les éléments sont appelés sommets, et un ensemble $A=(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, partie de l'ensemble $P_2(X)$ des parties à 2 éléments de X dont les éléments sont appelés arrêtes. Lorsque $a=(x,y)\in A,$ on dit que a est une arête de G et que x et y sont des extrémités de a, a est incidente en x et y ; x est un prédécesseur de y et y un successeur de x et vice versa. Les sommets x et y sont dits adjacents.

Graphe non orienté



C D

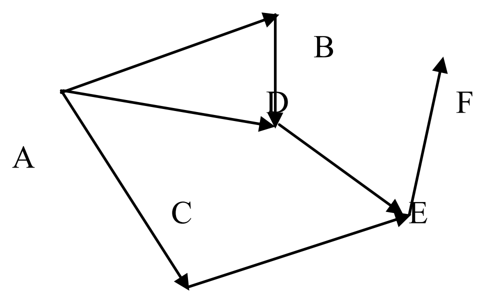
Graphe orienté

A priori, les arêtes (*A, B*) et (*B, A*) ne sont donc pas les mêmes. Dans ce cas, on dit que le graphe est orienté.

Définition : Un graphe simple G =(X, A) est un couple formé de deux ensembles : un ensemble $X=(x_1,x_2.....,x_n)$, dont les éléments sont appelés sommets, et un ensemble $A=(a_1,a_2,....,a_m)$, partie du produit cartésien X x X dont les éléments sont appelés arcs.

Si $a=(x,y)\in A$, est un arc du graphe G, on dit que est x est l'extrémité initial de G et que y est l'extrémité final de a

Graphe orienté



Degré d'un sommet

Le degré d'un sommet *A* est le nombre d'arêtes, noté *d*(*A*), qui ont pour extrémité *A*.

$$\sum_{a\in S} d(A) = 2Card(A)$$

Preuve : Il suffit de voir que chaque arête relie deux sommets du graphe, et donc qu'elle est comptée exactement deux fois dans la somme de gauche

Exercice n°1.

Déterminer le degré de chacun des sommets du graphe suivant :

Schéma

Corrigé

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Degré	4	6	4	2	4	4	6	4	2

3 Connexité

Un graphe est dit connexe lorsque deux sommets quelconques peuvent être reliés par un chemin. Si A est un sommet d'un graphe G, l'ensemble de tous les sommets B pour lesquels il existe un chemin de A à B, est appelée la composante connexe de A, et on la note CA.

Il est alors facile de vérifier que si A et B sont deux sommets d'un graphe G (non orienté), alors soit $CA = CB$ soit $CA \cap CB = \emptyset$

Les sommets d'un tel graphe peuvent alors se répartir en groupes appelés composantes connexes, deux à deux disjointes, deux sommets appartenant à une même composante étant reliés par un chemin.

Exercice

Trois pays envoient chacun à une conférence deux espions ; chaque espion doit espionner tous les espions des autres pays (mais pas son propre collègue!).

1) Représentez cette situation par un graphe d'ordre 6 dans lequel chaque arête reliant i et j signifie que i espionne j que et j espionne i.

2) Ce graphe est-il complet ? est-il connexe ?

3) Quel est le degré de chaque sommet ? Déduisez-en le nombre d'arêtes.

Les espions d'un même pays sont notés 1 et 2 , 3 et 4, 5 et 6

1)

2) Ce graphe n'est pas complet car deux espions d'un même pays ne s'espionnent pas, donc les sommets ne sont pas adjacents

En revanche ce graphe est connexe car entre tout couple de points, il existe au moins une chaîne

3) Les sommets sont tous de degré 4 car chaque espion en espionne quatre autres

Autrement dit :

Sommet	1	2	3	4	5	6
Degré	4	4	4	4	4	4

Le nombre de degré est 24 et le nombrer d'arrêtes 12, car somme des degrés est égale au double du nombre d'arêtes

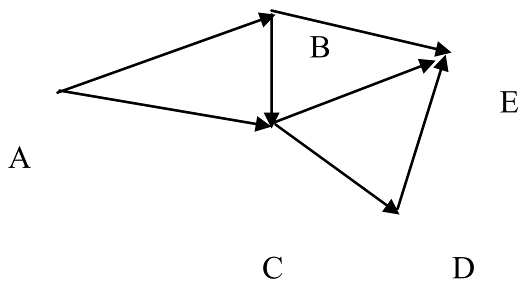
II. 2 Mode de représentation d'un graphe

Plusieurs modes de représentations peuvent être envisagés suivant la nature des traitements que l'on envisage appliquer au graphe. Traditionnellement un graphe est représenté par un ensemble d'arcs et de sommets

Listes de succession

Un graphe peut être représenté à l'aide d'une liste de successeurs ou de prédécesseurs de chaque sommet :

Considérons le graphe G suivant :



Liste de prédécesseurs **Liste de successeurs**

Sommet	Prédécesseurs
A	-
B	A
C	A ; B
D	C
E	B ; C ; D

Sommet	successeurs
A	B ; C
B	C ; E
C	E ; D
D	E
E	-

Les outils classiques d'algèbre linéaire peuvent également être utilisés pour représenter un graphe. L'idée consiste à considérer un arc comme un lien entre deux sommets. Considérons un graphe G =(X, A), comportant n sommets. La matrice d'adjacence de G est la matrice $U = u_{ij}$ de dimension n x n de telle sorte que :

$$u_{ij} = \begin{cases} 1 \ \text{Si } (i, j) \in A \text{ c'est-à-dire si } (i,j) \text{ est une arrête de A} \\ \end{cases}$$

0 Sinon

Matrice d'adjacence du graphe G :

	A	B	C	D	E
A	0	1	1	0	0
B	0	0	1	0	1
C	0	0	0	1	1
D	0	0	0	0	1
E	0	0	0	0	0

On a donc une matrice booléenne

Un graphe orienté quelconque a une matrice d'adjacence quelconque, tandis qu'un graphe non orienté a un graphe symétrique.

Cette matrice a des propriétés très intéressantes.

- La somme des éléments de la $i^{ème}$ ligne de U est égale au degré sortant d_s (x_i) du sommet x_i de G
- La somme des éléments de la $j^{ème}$ colonne de U est égale au degré entrant d_j (x_j) du sommet x_j de G

Matrice d'incidence

Considérons un graphe orienté sans boucle G= (X ; A) comportant n sommets. La matrice d'incidence aux arcs de G est la matrice $M = m_{ij}$ de dimension

n x m telle que :

$m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ Si le sommet } x_j \text{ est l'extrémité initial de l'arc } a_j \\ \end{cases}$

-1 si le sommet x_i est l'extrémité terminale de l'arc a_j

0 Si le sommet x_i n'est pas l'extrémité terminale de l'arc a_j

Matrice d'incidence du graphe G (page 132)

$$\begin{array}{c|cccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline A & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ D & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ E & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{array}$$

Exercice n°1 : reconstituer les graphes suivants à partir de leurs matrices d'adjacence

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice n°2 : reconstituer les graphes suivants à partir de leurs matrices d'incidences

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Principales définitions

- **Ordre d'un graphe** : l'ordre d'un graphe est le nombre de sommets de ce graphe.
- C**haîne** : suite finie de sommets reliés entre eux par une arête.
- Chaine simple : chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête.
- Ch**aîne eulérienne** : chaîne simple passant par toutes les arêtes d'un graphe.
- C**haîne hamiltonienne** : chaîne simple passant par tous les sommets d'un graphe une et une seule fois
- **chemin** : suite de sommets reliés par des arcs dans un graphe orienté.
- Cy**cle** : chaîne qui revient à son point de départ.
- Cy**cle eulérien** : cycle simple passant par toutes les arêtes d'un graphe une et une seule fois par toutes les arrêtes du graphe
- **Cycle hamiltonien** : cycle simple passant par tous les sommets d'un graphe une et une seule fois
- **Graphe connexe :** un graphe G est connexes'il existe au moins une chaine entre une paire quelconque de sommets de G
- **Graphe fortement connexe** : un graphe orienté est dit fortement connexe s'il existe un chemin joignant deux sommets quelconques.
- **Graphe eulérien** : graphe qui possède un cycle eulérien.
- **Graphe semi-eulérien** : graphe qui possède une chaîne eulérienne.
- **Graphe hamitonien** : graphe qui possède un cycle hamiltonien.
- **Graphe valué** : graphe où des réels sont associés aux arêtes.
- **Longueur d'une chaîne** : nombre des arêtes qui composent la chaîne.
- Longueur d'un chemin : nombre d'arcs qui composent ce chemin
- **Valeur d'une chaîne** : somme des valeurs des arêtes (arcs) d'une chaîne d'un graphe valué
- **Distance entre deux sommets** : longueur de la plus courte chaîne joignant ces deux sommets

Parcours eulériens et hamiltoniens

L'intérêt porté à ce type de problèmes s'explique par les nombreuses applications notamment les tournées de distributions, tracé automatique sur ordinateur, problèmes d'ordonnancement d'ateliers…

Graphes eulériens

Théorème

Un graphe connexe possède un chemin eulérien mais pas de circuits eulérien si et seulement si le nombre de ses sommets de degré impair est 0 ou 2. Autrement dit, si pour tout sommet sauf deux (aet b) , le degré entrant est égal au degré sortant.
$d_e(a) = d_s(a)-1$ et $d_e(b) = d_s(b)+1$

Un graphe eulérien admet un circuit eulérien si et seulement si pour tout sommet le degré entrant est égal au degré sortant.

De plus, si le graphe possède exactement deux sommets de degré impair alors tout chemin eulérien commence en un de ces sommets et se termine à l'autre.

Graphes hamiltoniens

II.3 Coloriages

Nombre chromatique

Un coloriage du graphe *G* consiste à attribuer une couleur à chacun de ses sommets. Le coloriage est dit propre lorsque deux sommets adjacents ne sont jamais de la même couleur. S'il existe une coloration propre de *G* à l'aide de *k* couleurs, on dira que *G* est *k*-colorable. Le plus petit entier *k* (s'il existe) pour lequel *G* est *k*-colorable est appelé le nombre chromatique de *G*, et on le note $X(G)$. L'existence de $X(G)$ est assurée dans le cas où le graphe ne possède qu'un nombre fini de sommets.

Reprenons l'exemple dont nous avons parle dans l'introduction sur le transport des produits chimiques. Construisons le graphe dont les sommets sont les produits chimiques, deux étant reliés si et seulement s ils ne peuvent pas être transportés ensemble. Transporter un des produits dans un camion revient à attribuer un numéro ou une couleur à ce produit (celui du camion correspondant). Ainsi, tous les produits d'une même couleur seront transportés dans un même camion. Les conditions de sécurité imposent donc d'attribuer ces couleurs de sorte que deux produits adjacents n'aient pas la même couleur.

Ce faisant, on construit donc un coloriage propre du graphe, et le problème consistant à n'utiliser que le moins possible de camions revient à déterminer le nombre chromatique du graphe construit.

ALGORITHME DE COLORATION DE WELCH ET POWELL

Il s'agit de l'algorithme de coloriage suivant :

Soit G un graphe de n sommets. On ordonne les sommets $M_1, M_2, ..., M_n$selon les degrés décroissants (i.e. pour tout i : $d(Mi) > d\ (Mi+1)$).Tant qu'il reste des sommets à colorier, on exécute les deux actions suivantes:

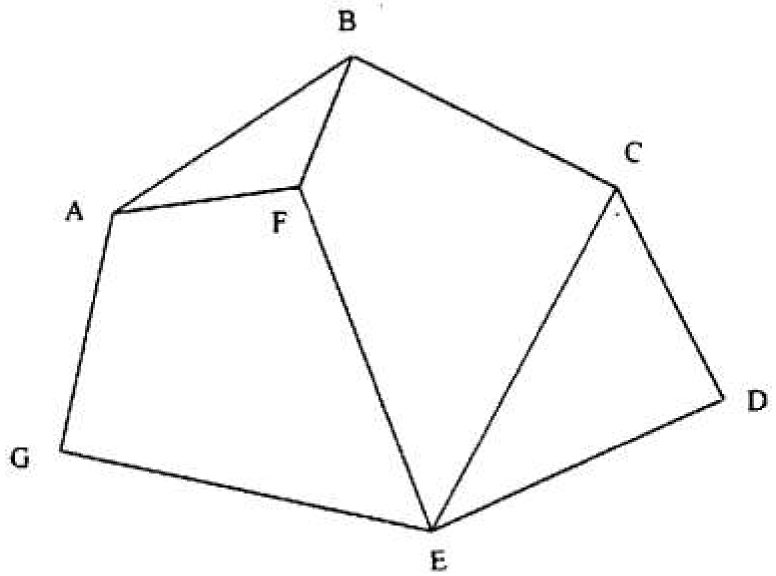
a) Chercher dans la liste ordonnée des sommets le premier sommet non encore colorié et le colorier d'une nouvelle couleur.

b) Colorier avec cette même couleur, et en respectant leur ordre dans la liste, tous les sommets non encore coloriés qui ne sont pas adjacents au sommet précédent et ni adjacents entre eux.

c) S'il reste des sommets non encore colorés dans le graphe, revenir à l'étape 2.

Puisque le nombre de sommets non coloriés diminue d'au moins une unité à chaque fois que l'on exécute les points a) et b), cette procédure va se terminer et fournir un coloriage propre de G.

Exemple : Soit à colorier le graphe suivant

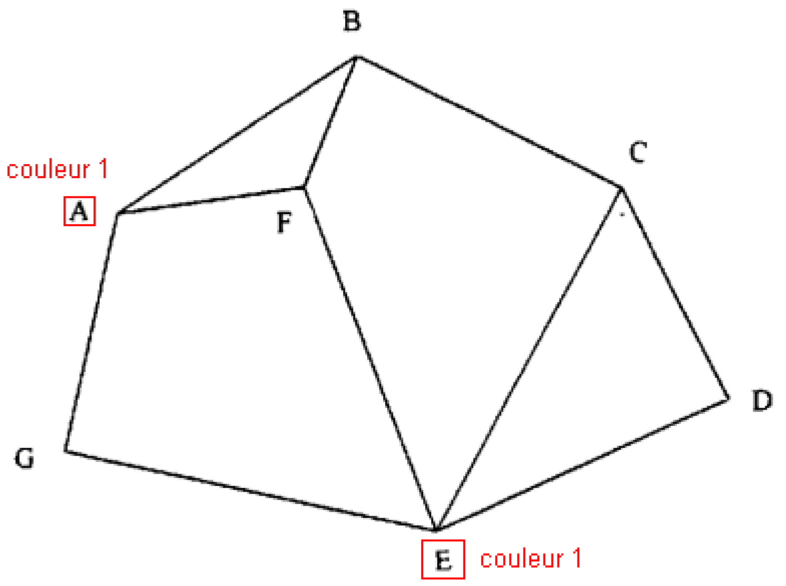


Etape 1 : on classe les sommets dans l'ordre décroissant de leur degré

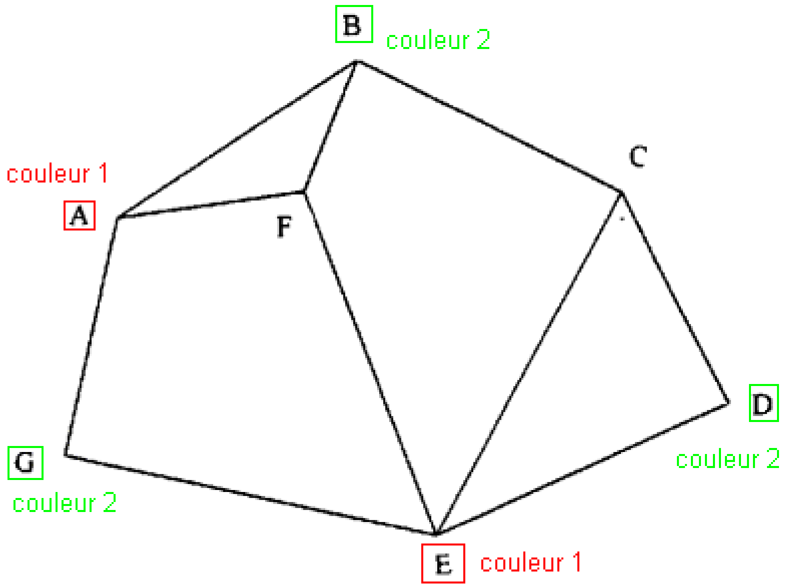
Sommets	Degrés
E	4
A	3
B	3
C	3
F	3
D	2
G	2

Etape 2 :

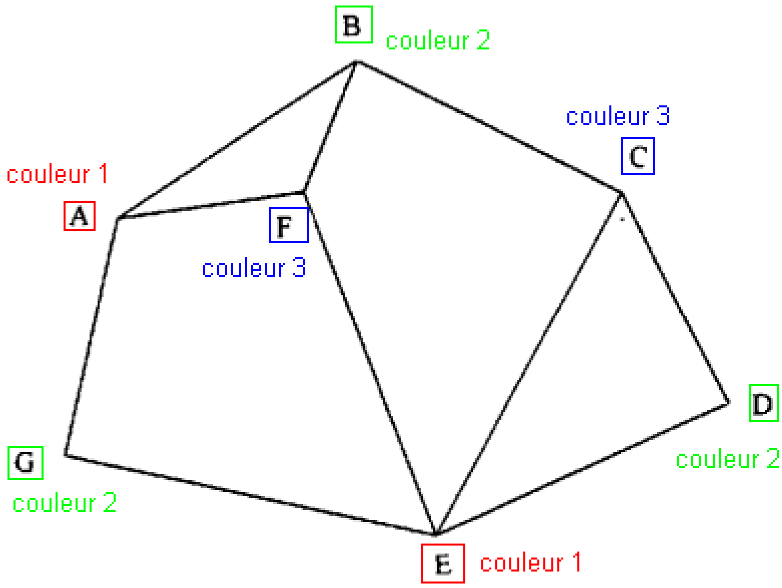
On affecte une couleur "1" au sommet E ainsi qu'à chaque sommet non encore coloré, et non adjacent à un sommet de cette couleur. En pratique, cela signifie que l'on attribue une couleur à E (couleur n°1) ainsi qu'à tous les sommets non adjacents à E et non adjacents entre eux. Par exemple à A



S'il reste des sommets non colorés, on retourne à l'étape 2. On affecte une couleur "2" au sommet B ainsi qu'à chaque sommet non encore coloré, et non adjacent à un sommet de cette couleur. On affecte donc cette couleur à D et G



Il reste des sommets non colorés, on retourne à l'étape 2. On affecte une couleur "3" au sommet C ainsi qu'à chaque sommet non encore coloré, et non adjacent à un sommet de cette couleur. On affecte donc cette couleur à F



Les sommets étant tous colorés, l'algorithme s'arrête, et on a ainsi Une trois coloration :

$S_1 = \{A; E\}$

$S_2 = \{B; G; D\}$

$S_3 = \{C; F\}$

Soit M le dernier sommet colorié. Si M n'a pas été colorié avant, c'est que pour chacune des couleurs précédentes, un sommet adjacent à M a été colorié de cette couleur. Par suite, le nombre de couleurs utilisées avant de colorier M ne peut dépasser $d(M)$. En tenant compte de la couleur de M, on en déduit que le nombre total de couleurs utilisées par l'algorithme ne dépasse pas $d(M) + 1$.

Coloriages d'arêtes

Parfois, les relations entre les sommets sont de natures différentes. Il peut être judicieux de conserver le côté pratique d'une représentation par un graphe, mais en symbolisant les divers types de relations par des arêtes de couleurs différentes.

Exemple: Dans une soirée à laquelle participent n personnes, certaines sont amies, d'autres sont ennemies et certaines ne se connaissent pas.

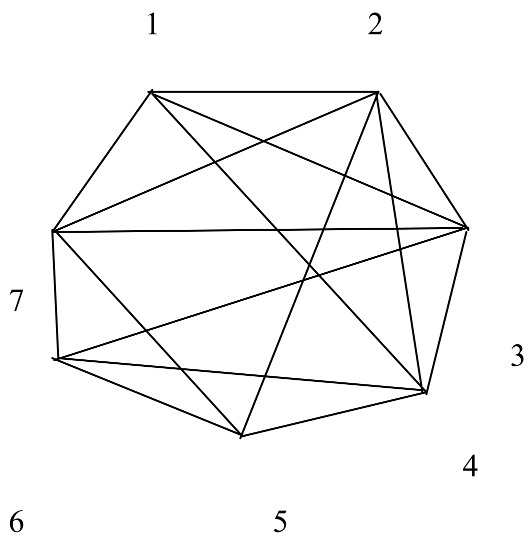
Puisqu'il y a trois types de relations, on peut choisir de représenter la situation par un graphe non orienté (on suppose qu'une relation quelconque est symétrique) de n sommets, un par personne, et de relier ces sommets par une arête bleue, rouge ou verte selon que les deux personnes en question sont amies, ennemies ou indifférentes.

EXEMPLE

Une université doit organiser les horaires des examens. On suppose qu'il y a 7 épreuves à planifier, correspondant aux cours numérotés de 1 à 7 et que les paires de cours suivantes ont des étudiants communs : 1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 1et 7, 2 et 3, 2 et 4, 2 et 5, 2 et 7, 3 et 4, 3 et 6, 3 et 7, 4 et 5, 4 et 6, 5 et 6, 5 et7 et 6 et 7. Comment organiser ces épreuves de façon qu'aucun étudiant n'ait à passer deux épreuves en même temps et cela sur une durée minimale ?

Solution :
Construisons un graphe G dont les sommets sont les épreuves numérotées de 1 à 7, une arête relie deux de ses sommets lorsque les deux cours correspondant possèdent des étudiants communs :

Graphe



Planifier les épreuves en temps minimal consiste à déterminer une k- coloration. En appliquant l'algorithme de Glouton, on trouve une partition de G en 4 sous ensembles stables :

- Le sommet 1 peut porter la même couleur que le sommet 6, car ils sont non adjacents
- Le sommet 7 avec le sommet 4
- Le sommet 3 avec le sommet 5

- Le sommet deux

On peut colorier les sommets du graphe avec 4 couleurs différentes

Les épreuves peuvent être organisées en 4 périodes

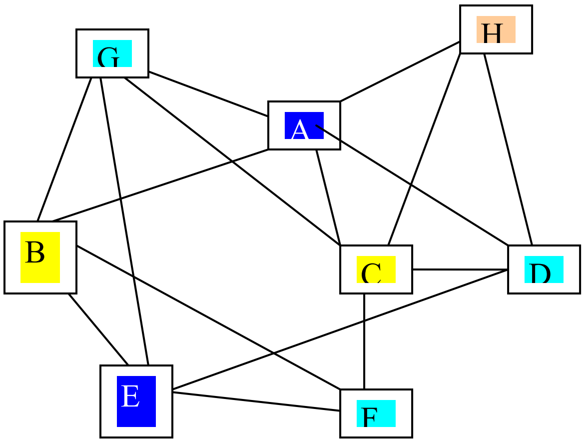
- Période1 : épreuves des cours 1 et 6
- Période2 : épreuve du cours 2
- Période3 : épreuves des cours 3 et 5
- Période 4: épreuves des cours 4 et 7.

Les lettres A, B, C, D, E, F, G, H désignent 8 poissons.

Dans le tableau ci-dessous, une crois signifient que les deux espèces ne peuvent pas cohabiter dans un même aquarium. Quel est le nombre minimal d'aquarium faut – il prévoir ?

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		X	X					
B	X				X	X	X	
C	X			X		X	X	X
D	X		X		X			X
E		X		X		X	X	
F		X	X		X			
G	X	X	X		X			
H	X		X	X				

Pour résoudre ce problème, on construit un graphe G, dont les sommets sont les 8 poissons, tel que deux de ces sommets sont reliés lorsque les poissons associés à ces sommets ne peuvent cohabiter. Le nombre minimum d'aquariums est égal au nombre chromatique de ce graphe. (Voir notes de cours)



$S_1 = \{A; E\}$

$S_2 = \{B; C\}$

$S_3 = \{D; F; G\}$

$S_4 = \{H\}$

II.4 Graphes valués et problème du plus court chemin

Le problème considéré se formule ainsi: Etant donné un graphe orienté G=(X, A), On associe à chaque arc a $\in$ A, un nombre l(a) $\in$ R appelé longueur de l'arc. On dit alors que G est valué par les longueurs l(a).

Beaucoup de problèmes peuvent être modélisés en utilisant des graphes valués. Les problèmes de cheminement dans les graphes, en particulier la recherche du plus court chemin, comptent parmi les problèmes les plus anciens de la théorie des graphes et les plus importants par leurs applications : coût de transport, temps de parcours, problème de trafic,. . . Les algorithmes de recherche de plus court chemin

On utilisera pour résoudre ce type de problèmes l'algorithme de DIJKSTRA. Cet algorithme calcule le plus court chemin du sommet 1 à tous les sommets du graphe (il donnera donc la première ligne de la matrice de coût minimum).

Exercice

La matrice qui suit donne en heures les durées des vols entre certaines villes v_1, v_2, …v_6

0	3	∞	5	∞	∞
3	0	5	2	4	∞
∞	4	0	∞	4	3
6	2	∞	0	4	4
∞	4	4	5	0	2
∞	∞	5	4	3	0

Appliquer l'algorithme de Dijkstra pour déterminer l'itinéraire le plus rapide de v_1 àv_6

Initialisation : S = $\{1\ \}$, $S' = \{2;3;4;5\ \}$

$\Pi = (0;3;\infty;5;\infty;\infty)$

1ère itération : i = 2

S $= \{1;2\}$ **;** $S' = \{3;4;5,6\}$

$\Pi = (0;3;8;5;7;\infty)$

2ème itération: i =4

S $= \{1;2;4\}$ $S' = \{3;5,6\}$

$\Pi = (0;3;8;5;7;9)$

3ème itération: i = 5

S $= \{1;2;4;5\}$ **;** $S' = \{3,6\}$

$\Pi = (0;3;8;5;7;9)$

4ème itération: i = 3

S $= \{1;2;4;5;3\}$ **;** $S' = \{6\}$

$\Pi = (0;3;8;5;7;9)$

4ème itération: i = 6

$\mathbf{S} = \{1; 2;4;5;3;6\}$ **;** $S' = \{\varnothing\}$

$\Pi = (0;3;8;5;7;9)$

L'itinéraire le plus rapide nécessite donc heures pour aller de la ville v_1à la ville v_6

II.5 PROBLEME DE RESEAUX, RESEAU DE TRANSPORT ET DE FLOTS

Définitions

Un graphe fortement connexe, sans bouche et ayant plus d'un sommet, est appelé un *réseau*.

On appelle nœud d'un réseau un sommet qui a plus de deux arcs incidents. Les autres sommets sont appelés *antinoeuds.*

On appelle branche tout chemin pour lequel seuls les premiers et derniers sommets sont des nœuds.

Dans un graphe orienté *G, un flot est l'affectation d'une valeur réelle à chaque arc de G, représentant une quantité transportée sur cet arc*, de telle sorte que, en chaque sommet, la somme des flots entrants soit égale à la somme des flots sortants (loi de Kirchhoff : conservation des flux en chaque sommet).

Parmi les problèmes les plus classiques, on peut citer celui de la recherche d'un flot maximal. On se donne une capacité maximale sur chaque arc qui sera une borne supérieure du flot autorise sur cet arc. Le problème du flot maximal consiste à déterminer un flot dont la valeur en un certain lieu est maximale. On peut, de plus, se donner un coût de transport d'une unité de flot sur chaque arc et chercher le flot maximal de coût minimal.

Définition

On appelle réseau de transport un graphe orienté antisymétrique valué G= (X, A) sans boucle et dans lequel il existe:

- un sommet sans prédécesseur nommé *entrée* ou *source* du réseau,
- un sommet x_n sans successeur nommé *sortie* ou *puits* du réseau, et tel qu'au mois un chemin unisse x_1 à x_n dans *G*.

La fonction de pondération *C est supposé positive et l'on nomme capacité de l'arc a le nombre C (a)*

Définition : Si l'on désigne A_x^- l'ensemble des arcs sortant du sommet x et A_x^+, l'ensemble des arcs entrants de ce sommet x, on dit qu'une fonction $\varphi(a)$ défini sur A et à valeurs réelles est un flot pour le réseau de transport si :

- il est positif : $\varphi(a) > 0$
- il vérifie la loi des nœuds de Kirchhoff :

$$\sum_{a \in A_x^-} \varphi(a) - \sum_{a \in A_{x+}} \varphi(a) = 0 \;\; \forall x \neq x_1 \, et \, x \neq x_n$$

$$\varphi(a) \leq \text{c(a)} \quad \forall a \in A$$

Si $Si\, x \neq x_1 \, et \, x \neq x_n$,

Si φ est un flot sur un réseau de transport G, alors on a $\varphi_{x1} = \varphi_{xn}$. Cette quantité s'appelle la *valeur du flot.*

La principale question qui se pose pour un réseau de transport donné est de déterminer un flot de valeur maximale ainsi que les flots le long de chaque arc. Il arrive fréquemment également que l'on doive considérer des réseaux avec des capacités localisées non seulement sur les arêtes mais également sur les sommets. C'est notamment le cas pour les réseaux téléphoniques pour lesquels la limite de capacité est autant due aux lignes qu'aux centraux. On peut ramener aisément ce problème au précédent ; il suffit de dédoubler chaque sommet en une entrée et une sortie liées par un arc ayant pour capacité celle qu'on attribuait précédemment au sommet.

Recherche d'un flot complet

Définition

Pour un flot φ dans un réseau de transport G= (X,A), on dit qu'un arc est *saturé* si on a $\varphi(a) =$ c(a) $\forall a \in A$

Le flot est dit *complet* si tout chemin allant de x_1 à x_n contient au moins un arc saturé.

Amélioration du flot

Soit φ un flot complet. On va utiliser une procédure itérative pour identifier et marquer tous les sommets du graphe où il est possible de faire transiter une unité de flot supplémentaire.

On définit un processus d'étiquetage de certains sommets du graphe. En x_1, on place une étiquette + Soit x un sommet déjà marqué :

- On marque avec une étiquette $+x$ tout successeur y non marqué de x pour lequel le flot n'est pas à son maximum

- On marque avec étiquette $-x$ tout prédécesseur y non marqué de x pour lequel le flot n'est pas nul.

L'étiquette a pour rôle de donner le nom d'un prédécesseur ou d'un successeur d'un sommet donné en indiquant si le flot peut être augmenté dans le sens de parcours….ou diminué s'il est s'il est dans le sens contraire (étiquette…). Le « **marquage** » consiste donc à tester si une amélioration du flux est possible.

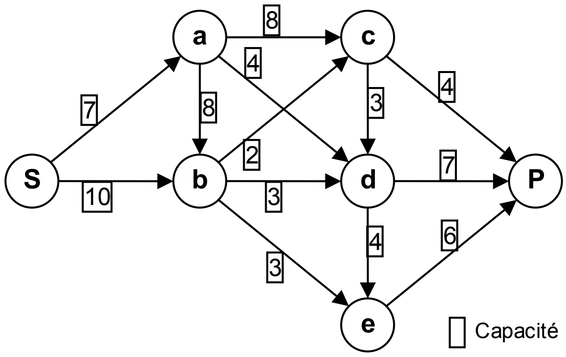
Si l'on parvient jusqu'au marquage du sommet x_n avec l'indice du sommet précédent au signe près. Notons que l'on n'est pas obligé de marquer tous les sommets (tous les successeurs ou prédécesseurs d'un sommet donné) ; l'objectif étant simplement d'élaborer une chaîne marquée de x_1 à x_n.

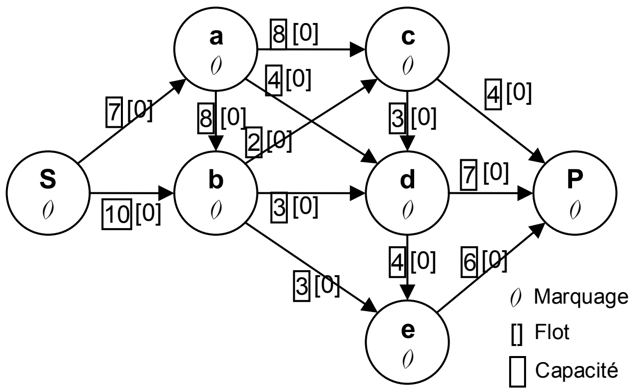
L'algorithme de Ford-Fulkerson permet d'optimiser les flux à l'aide d'un outil de modélisation mathématique. La structure sous-jacente est représentée par un graphe orienté dont le sommet initial symbolise la source du réseau et le sommet terminal la sortie du réseau.

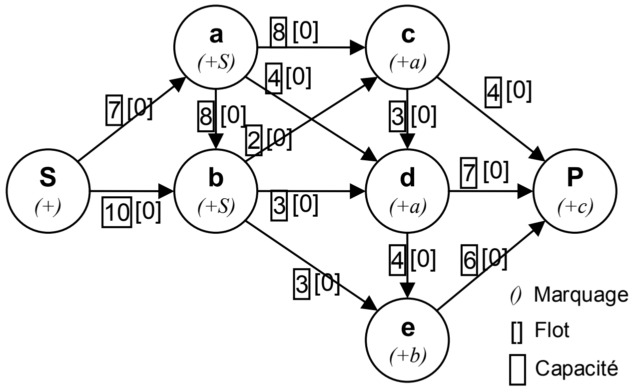
Algorithme de Ford – Fulkerson

Principe :
Tant qu'il existe un chemin augmentant dans le graphe, on ajoute un flot le long de ce chemin.

On appelle chemin augmentant ou chemin améliorant, un chemin du graphe résiduel allant de S à P Sa capacité est le minimum des capacités résiduelles des arcs appartenant au chemin.



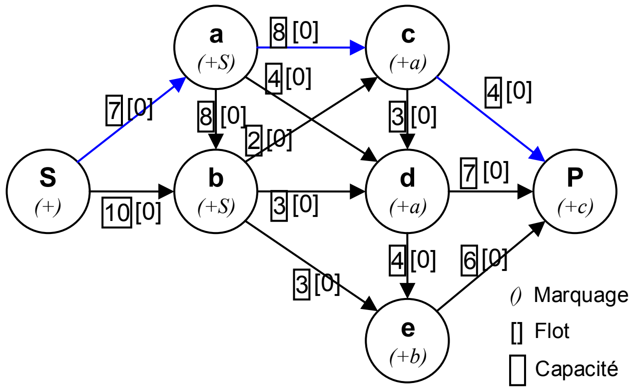
	Flot nul



Premier marquage :

L'ordre dans lequel on traite les sommets marqués est une file :

S, a, b, c, d, e, P

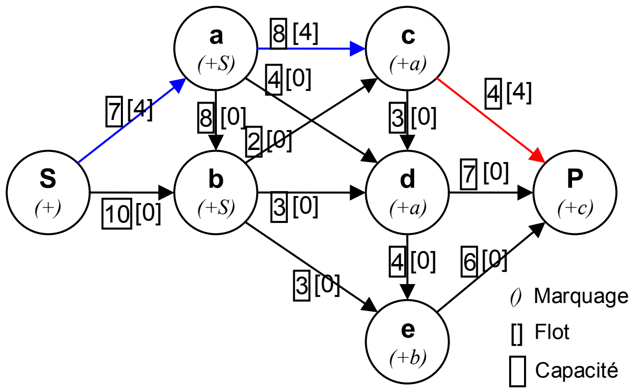


Augmentation possible du flot dans la chaîne améliorante :

$$S \xrightarrow{7} a \xrightarrow{8} c \xrightarrow{4} P$$

La capacité minimale de la chaîne : 4

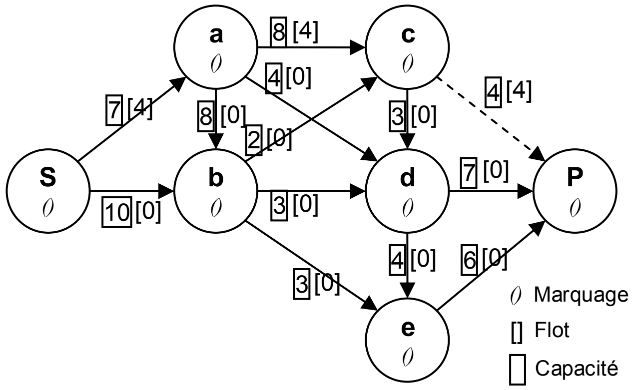
On va donc augmenter le flot sur cette chaîne, au maximum, cad jusqu'à la capacité minimale de la chaîne.



Le flot sur cette chaîne est maintenant :

$f_1 / v_1 = 4$

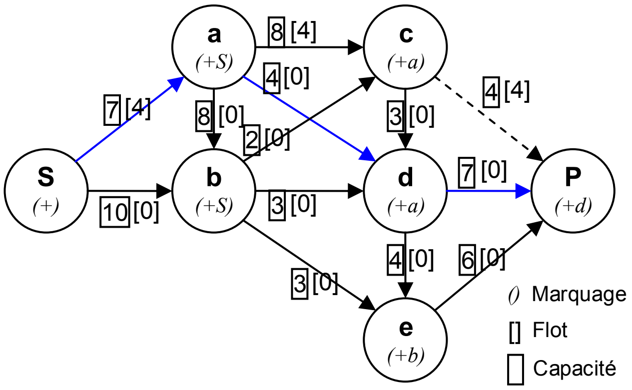
On remarque que le flot est complet dans $c \to P$, cet arc est saturé.



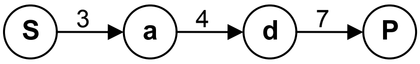
Nouveau marquage :

L'ordre dans lequel on traite les sommets marqués est une file :

S, a, b, c, d, e, P

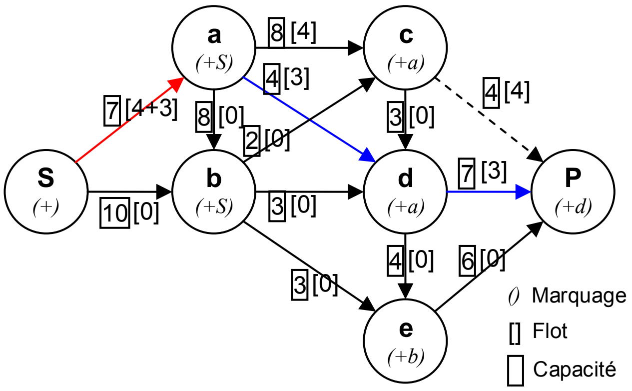


Augmentation possible du flot dans la chaîne améliorante :



La capacité minimale de la chaîne : 3

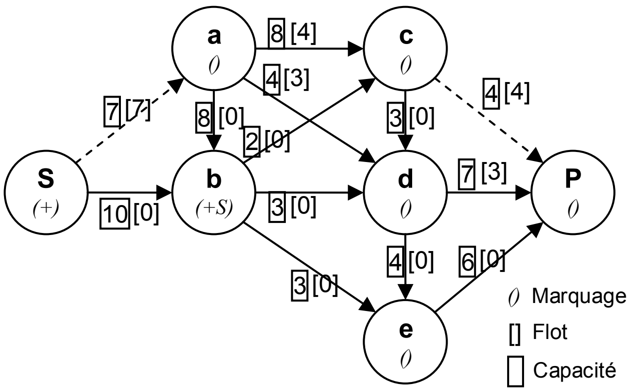
On va donc augmenter le flot sur cette chaîne, au maximum, cad jusqu'à la capacité minimale de la chaîne.



Le flot sur cette chaîne est maintenant :

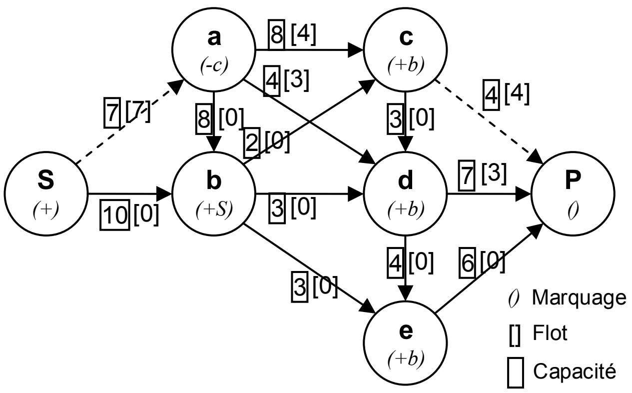
$f_2 / v_2 = 3$

On remarque que le flot est complet dans $S \rightarrow a$, cet arc est saturé.



Nouveau marquage :

Le sommet a n'est pas marquable depuis S car il est saturé.



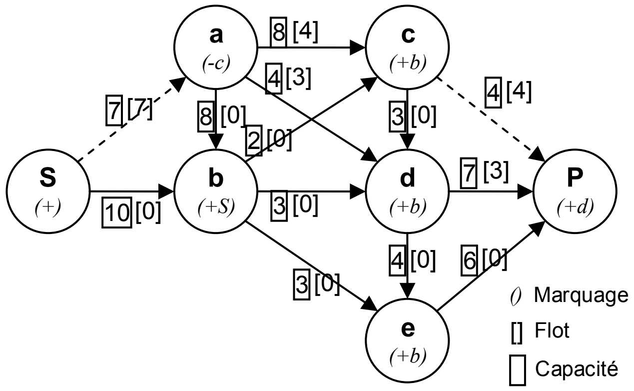
On continue le marquage :

Le sommet b traité, on traite c.

Or on a $f(a,c) > 0$, on note donc le sommet a par $(-c)$.

Ensuite on a $c \rightarrow P$ saturé, on ne peut donc pas encore marquer P.

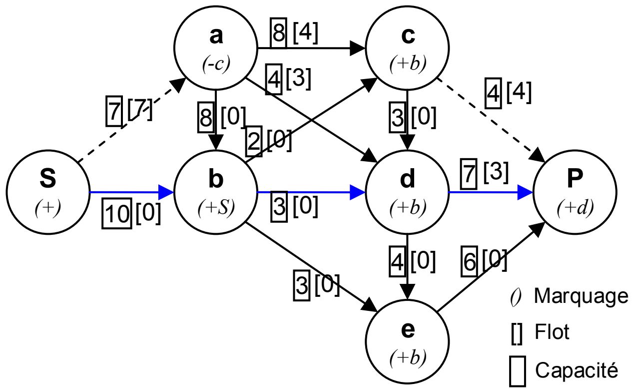
Les autres sommets encadrants c sont déjà marqués (b et d), on passe donc au suivant.



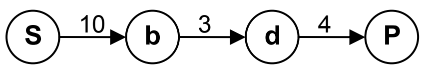
On continue le marquage :

On traite d.

on a $f(d,P) < c(d,P)$, on note donc le sommet P par $(+d)$.

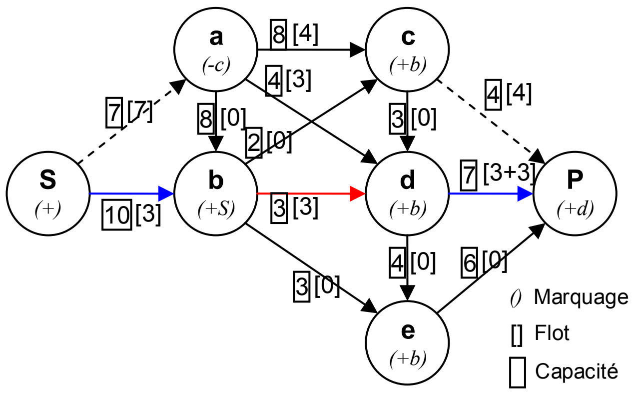


Augmentation possible du flot dans la chaîne améliorante :



La capacité minimale de la chaîne : 3

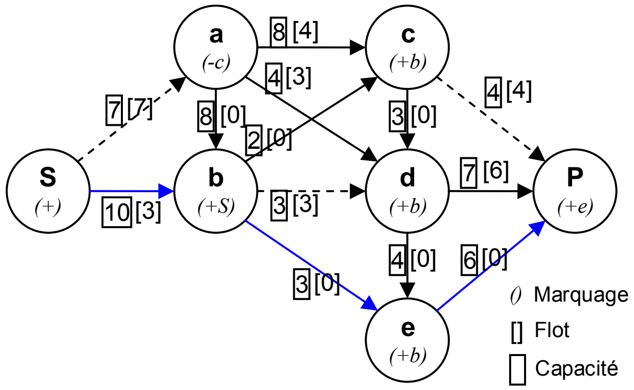
On va donc augmenter le flot sur cette chaîne, au maximum, cad jusqu'à la capacité minimale de la chaîne.



Le flot sur cette chaîne est maintenant :

$f_3 / v_3 = 3$

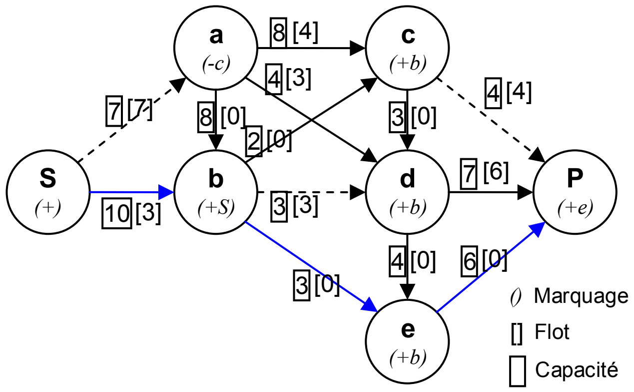
On remarque que le flot est complet dans $b \rightarrow d$, cet arc est saturé.



Nouveau marquage

L'ordre dans lequel on traite les sommets marqués est une file :

S, b, c, e, a, d, P

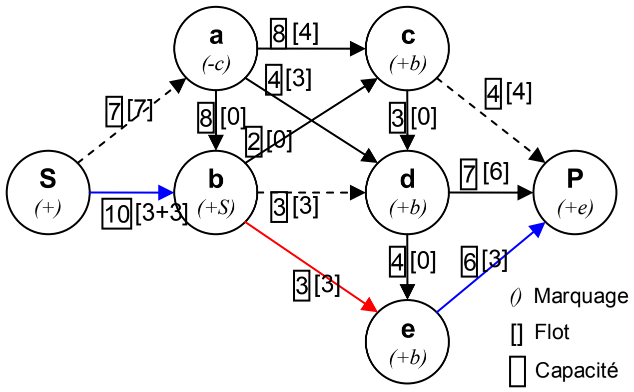


Augmentation possible du flot dans la chaîne améliorante :

$$S \xrightarrow{7} b \xrightarrow{3} e \xrightarrow{6} P$$

La capacité minimale de la chaîne : 3

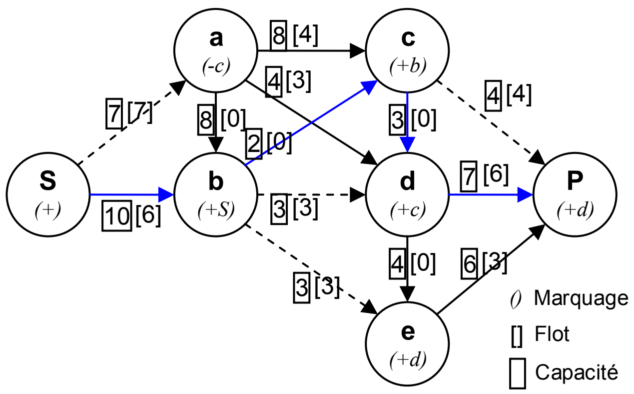
On va donc augmenter le flot sur cette chaîne, au maximum, cad jusqu'à la capacité minimale de la chaîne.



Le flot sur cette chaîne est maintenant :

$f_4 / v_4 = 3$

On remarque que le flot est complet dans $b \rightarrow e$, cet arc est saturé.



Nouveau marquage :

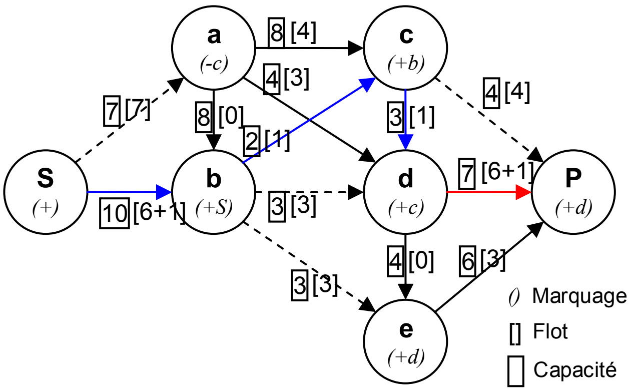
L'ordre dans lequel on traite les sommets marqués est une file :

S, b, c, d, a, P, e

Augmentation possible du flot dans la chaîne améliorante :

$$S \xrightarrow{4} b \xrightarrow{2} c \xrightarrow{3} d \xrightarrow{1} P$$

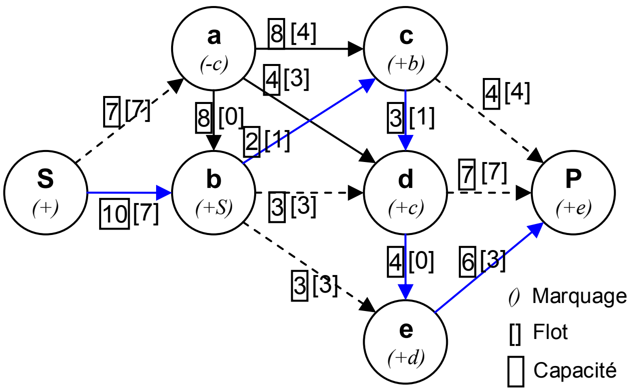
La capacité minimale de la chaîne : 1



Le flot sur cette chaîne est maintenant :

$f_5 / v_5 = 1$

On remarque que le flot est complet dans $d \rightarrow P$, cet arc est saturé.



Nouveau marquage :

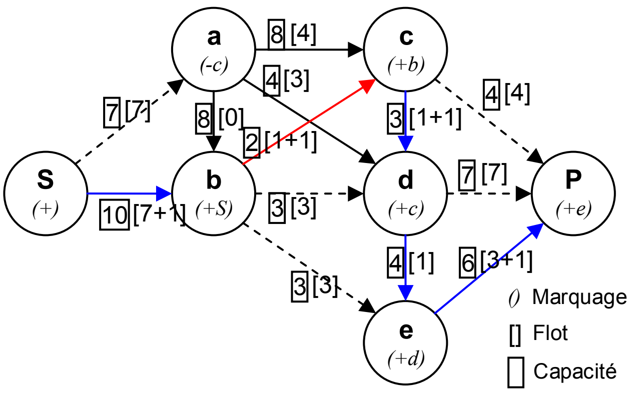
L'ordre dans lequel on traite les sommets marqués est une file :

S, b, c, d, a, e, P

Augmentation possible du flot dans la chaîne améliorante :

$$S \xrightarrow{3} b \xrightarrow{1} c \xrightarrow{2} d \xrightarrow{4} e \xrightarrow{3} P$$

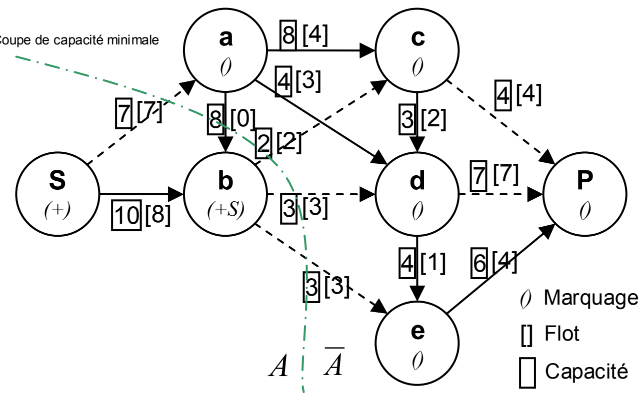
La capacité minimale de la chaîne : 1



Le flot sur cette chaîne est maintenant :

$f_6 / v_6 = 1$

On remarque que le flot est complet dans $b \rightarrow c$, cet arc est saturé.



Nouveau marquage :

On traite S, on marque b.

On traite b : aucun sommet n'est marquable.

On n'a plus aucun sommet à traiter.

On constate que P n'est pas marqué, donc on a atteint le flot complet du graphe.

$f(S \rightarrow P)/v = 15$

On note : $A = \{S, b\}$ et $\overline{A} = X - A$

A la fin, lorsque l'on ne peut plus marquer de nouveaux noeuds pour atteindre le noeud de sortie, on obtient un sous-ensemble $T \subset N$ qui représente les noeuds ”touchés” ou ”marqués”.

On peut définir le complémentaire de T par rapport à N qui représente donc l'ensemble des noeuds ”non marqués”

Les **arcs reliant un noeud marqué à un noeud non marqué**, c'est-à-dire les arcs ayant une extrémité dans T et l'autre dans S forment ce quel' on appelle **la coupe minimale** du graphe Ce sont les **noeuds qui font goulet d'étranglement**. Pour accroître le flot, il faudra **augmenter les capacités ou diminuer les bornes inférieures** de ces arcs.

Exercice 51 (Recherche du flot maximum.)

Considérons le réseau de transports dont la matrice des capacités est donnée par:

$$\begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les conditions à vérifier pour affirmer que c'est bien un réseau de transports ?
2. En utilisant l'algorithme de Ford et Fulkerson, donner un flot maximum pour ce réseau de transports.
3. Quelles sont les canalisations saturées à remplacer préférentiellement pour augmenter le flux total de ce réseau ?

II.7 Problème d'affectation

La formulation générale d'un problème d'affectation est la suivante: étant donnée n tâches à réaliser et n machines pour les réaliser et sachant que l'on connaît le coût de réalisation c_{ij} de la tâche t_i par la machine m_j pour tous les couples (t_i, m_j) possibles. Si la tâche t_i ne peut être effectuée par la machine m_j, on pose $C_{ij} = \infty$. Pour résoudre ce problème, on utilise l'algorithme de Khun

L'algorithme repose sur l'idée que si l'on fait apparaitre suffisamment de Zéros indépendants dans le tableau, mais pas de coûts négatifs, et qu'il existe n zéros indépendants, on aura trouvé l'affectation optimale.

Exemple : La matrice suivante donne les coûts par ouvrier/ poste pour 5 ouvriers.

	1	2	3	4	5
A	7	3	5	7	10
B	6	∞	∞	8	7
C	6	5	1	5	∞
D	11	4	∞	11	15
E	∞	4	5	2	10

Déterminer l'affectation optimale de ces 5 ouvriers (qui minimise le coût total)

A tous les éléments de chacune des colonnes, on enlève le plus petit élément de la colonne. Dans la matrice ainsi obtenue, on enlève à cette ligne le plus petit élément de la ligne.

	1	2	3	4	5
A	1	0	4	5	3
B	0	∞	∞	6	0
C	0	2	0	3	∞
D	5	1	∞	6	8
E	∞	1	4	0	3

	1	2	3	4	5
A	1	0	4	5	3
B	0	∞	∞	6	0
C	0	2	0	3	∞
D	5	1	∞	6	8
E	∞	1	4	0	3

	1	2	3	4	5
A	1	0	4	5	3
B	0	∞	∞	6	0
C	0	2	0	3	∞
D	4	0	∞	5	7
E	∞	1	4	0	3

- On considère la ligne ayant un minimum de Zéro. On encadre un des zéros sur cette ligne. On barre les zéros qui restent sur la même ligne et la même colonne

- On procède de la même façon pour toutes les lignes restantes

On obtient la matrice suivante :

	1	2	3	4	5
A	1	$\boxed{0}$	4	5	3
B	$\boxed{0}$	∞	∞	6	$\cancel{0}$
C	$\cancel{0}$	2	$\boxed{0}$	3	∞
D	4	$\cancel{0}$	∞	5	7
E	∞	1	4	$\boxed{0}$	3

Pour déterminer les affectations optimales, on procède de la manière suivante :

- On marque toutes les lignes qui ne contiennent aucun zéro encadré (ligne D de l'exemple)
- On marque les colonnes qui ont un ou plusieurs zéros barrés dans une ligne marquée (colonne 2 de l'exemple)
- On marque les lignes qui ont un zéro encadrés dans une colonne marquée (ligne A de l'exemple

	1	2	3	4	5	
A	1	$\boxed{0}$	4	5	3	*
B	$\boxed{0}$	∞	∞	6	$\cancel{0}$	
C	$\cancel{0}$	2	$\boxed{0}$	3	∞	
D	4	$\cancel{0}$	∞	5	7	*
E	∞	1	4	$\boxed{0}$	3	
		*				

On répète ces trois marquages jusqu'à ce qu’on ne puisse plus effectuer de nouveaux marquages.
Dans le tableau réduit ainsi obtenu (cases non barrées), on recherche ensuite l’élément le plus petit, nécessairement non nul par construction (pour l’exemple , il s’agit de l’élément C_1, A_1) ; on retranche sa valeur aux colonnes non barrée et on l’ajoute aux lignes barrées . On obtient les tableaux successifs suivants.

	1	2	3	4	5
A	0	0	3	4	2
B	-1	∞	∞	5	-1
C	-1	1	-1	2	∞
D	3	0	∞	7	6
E	∞	1	3	-1	2

	1	2	3	4	5
A	0	0	3	4	2
B	0	∞	∞	6	0
C	0	3	0	3	∞
D	3	0	∞	7	6
E	∞	2	4	0	3

On note (C_2, ij) la matrice ainsi obtenue et l’on poursuit la procédure de traitement en reprenant à la seconde phase . Lorsqu’une solution optimale est obtenue (un zéro par ligne et par colonne) , on arrête ; sinon on recommence et on définit successivement les matrices (C_3 , ij) , (C_4 ,ij) , … , (C_n , ij).

Sur le tableau (C_2 , ij) de l’exemple , on est amené à encadrer C_2 , D_2 et barrer C_2 , A_2 , encadrer C_2 , E_4 , encadrer C_2 , A_1 et barrer C_2 ,B_1 et C_2 , C_1 , encadrer C_2 , B_5 et enfin encadrer C_2 , C_3 :

	1	2	3	4	5
A	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	3	4	2
B	$\cancel{0}$	∞	∞	6	$\boxed{0}$
C	$\cancel{0}$	3	$\boxed{0}$	3	∞
D	3	$\boxed{0}$	∞	7	6
E	∞	2	4	$\boxed{0}$	3

Affectations optimales

A	B	C	D	E
1	5	3	2	4

: Coût optimal : 7+7+1+4+2 = 21

Exercice 2

Des élèves (A, B, C, D, E) choisissent leur affectation dans des chambres (a, b, c, d, e) selon le tableau de préférence (dans l'ordre décroissant) suivant :

	A	B	C	D	E
A	1	2	3	4	5
B	1	4	2	5	3
C	3	2	1	5	4
D	1	2	3	5	4
E	2	1	4	3	5

Proposer une affectation permettant de satisfaire au mieux les demandes.

Exercice n°3

Une entreprise ouvre 5 nouveaux postes au recrutement interne: {P1, P2, P3, P4, P5}. L'entreprise dispose de 5 candidats internes pour ces postes, chacun pouvant obtenir un ou plusieurs des postes selon ses compétences. La question est de savoir quelle affectation de personne / poste faire afin de maximiser le nombre de postes. Nous donnons ci-dessous la liste des personnes et des postes qu'elle peut obtenir.

Jean P1, P2, P3

Marie P1, P3

Paul P2, P3, P4, P5

Daniel P1, P3

Florent P2, P3

1. Modélisez ce type de situation par un réseau de transports.
2. Résolvez alors ce problème afin de maximiser le nombre de postes remplis.
3. Cette fois-ci, les personnes sont notées sur leurs futurs postes. Le but est alors de trouver l'affectation des personnes / postes maximisant les compétences au sein de l'entreprise.

Jean P1(5), P2(6), P3(3)
Marie P1(6), P3(5) ; P5(3)
Paul P2(9), P3(9), P4(6), P5(5)
Daniel P1(3), P3(3) ; P4(5)
Florent P2(7), P3(5)

EXERCICES SUR LA THEORIE DES GRAPHES

1) On désire faire un réseau de 5 machines (nommées 1 à 5) fonctionnant en Wifi. Le nombre de canaux disponibles est limité. Les machines fonctionnent avec les contraintes suivantes : les deux premières machines ne peuvent pas fonctionner simultanément. Les deux dernières aussi. Au plus une seule des machines 1,3 et 4 peut fonctionner à un instant donné.

- Combien de machines au maximum peuvent fonctionner simultanément et lesquelles ?
- Quel est le problème formel (justifier votre réponse)?

2)On dispose de 3 machines pour faire l'exécution de 4 tâches. Le tableau suivant donne les temps de traitements des tâches sur les différentes machines. Les tâches peuvent migrer d'une machine sur une autre au cours de leur exécution (les temps de communications sont considérés comme négligeables). On souhaite optimiser le temps d'exécution. Donnez la modélisation du problème.

Tâches/machines	1	2	3

1	15	10	6
2	9	9	9
3	8	6	8
4	3	3	2

3) On désire installer au moindre coût un réseau de communication entre divers sites. Les coûts des connections inter sites sont les suivants:

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	-	-	-	-	-	-	-	-
B	5	-	-	-	-	-	-	-
C	18	17	-	-	-	-	-	-
D	9	11	27	-	-	-	-	-
E	13	7	23	20	-	-	-	-
F	7	10	15	15	15	-	-	-
G	38	38	20	40	40	35	-	-
H	22	15	25	25	30	10	45	-

1) Quel est le problème formel associé ?

2) Déterminer la solution optimale

IV GESTION D'UN RESEAU DE TRANSPORT

IV.1 Introduction

Le problème de flot maximum vu dans la théorie des graphes n'est pas le problème le plus général que l'on puisse rencontrer en matière de transport. Si ce problème peut être utile dans le cas où l'on veut renforcer un réseau pour indiquer quels sont les endroits les plus judicieux pour des investissements (par exemple le renforcement du réseau routier autour d'un pôle de croissance ce n'est pas le problème qui se pose chaque jour aux gestionnaires d'un réseau de transport.

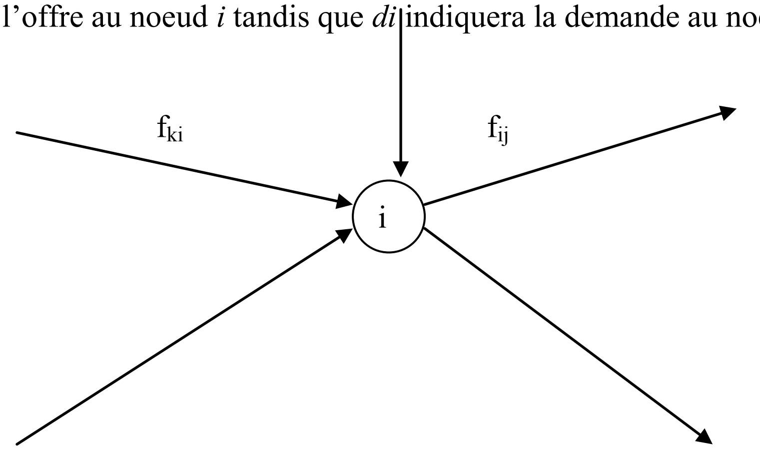
Généralement, on aura une quantité donnée de flux à faire transiter sur le réseau. Cette quantité correspond à la somme des demandes qui apparaissent comme les bornes inférieures sur les arcs de sortie du réseau.

Généralement, on a des coûts associes à chaque arc. Nous allons maintenant voir la formulation générale de ce problème. Nous verrons ensuite un cas particulier, le cas du réseau de transport simple, qui peut être résolu par un algorithme spécifique : l'algorithme de stepping stone.

IV.2 Formulation du problème général de transport

Le **problème général de transport** est donc de déterminer le flot qui minimise le coût total de passage de chaque flux dans chaque arc. Notons dij le coût unitaire de transport dans l'arc (i, j). Notons Nd, l'ensemble des noeuds de demande et Ns, l'ensemble des noeuds d'offre. Notons dj, la demande au noeud de demande $j \in Nd$. Cette demande apparaît donc comme une borne inférieure sur le flux sur l'arc de sortie du noeud j. Notons s_i, l'offre au noeud d'offre $i \in Ns$. Cette quantité apparaît donc comme une borne supérieure sur le flux sur l'arc d'entrée entrant au noeud $i \in Ns$.

Les **variables** du problème sont donc les flux f_{ij}dans chaque arc du réseau. Les **contraintes** sont celles d'un réseau de transport avec capacités sur les arcs. A savoir, les équations aux noeuds exprimant la conservation de la matière en chaque noeud ainsi que les contraintes de bornes sur les variables de flux. **L'objectif** est simplement la minimisation de la somme des coûts de transport sur chaque arc. Dans chaque arc, on va faire circuler un flux, c'est à dire une quantité par unité de temps. Dans notre exemple. On note par *fij* cette quantité qui traverse l'arc (*i, j*) par unité de temps. Nous utiliserons également deux autres notations : *si* indiquera l'offre au noeud *i* tandis que *di* indiquera la demande au noeud*i*. S_i

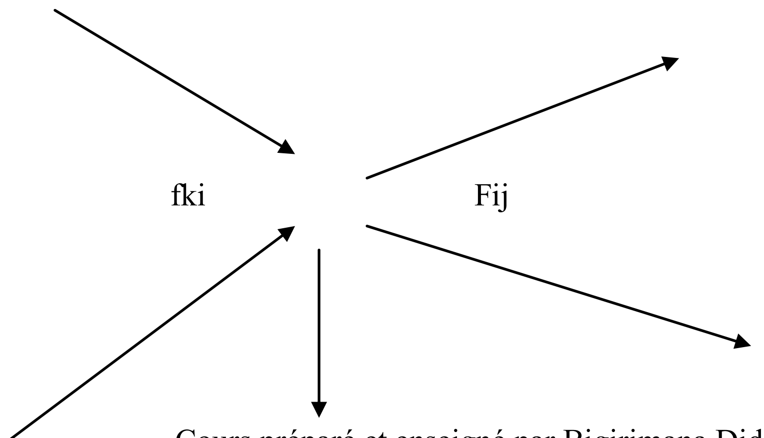


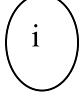
La **loi de conservation** exprime simplement que la somme des flux sortant d'un noeud *i* est égale à la somme des flux entrant.

En un nœud d'offre, cette équation s'écrit :

$$\sum_{k/(ki)\in A} f_{ki} + s_i = \sum_{j/(ij)\in A} f_{ij}$$

En en un nœud de demande, on a

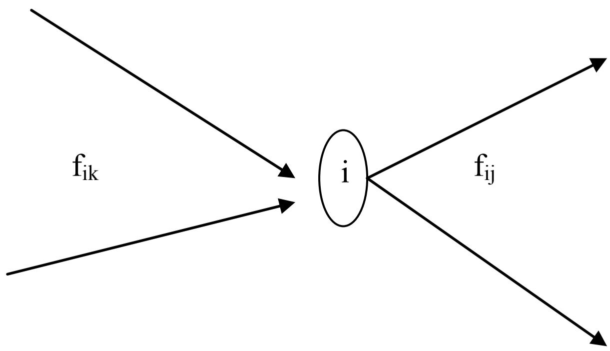




di

$$\sum_{k/(ki)\in A} f_{ki} = \sum_{j/(ij)\in A} f_{ij} + d_i$$

Enfin, pour un simple noeud d'interconnexion



elle s'exprime par : $\sum_{k/(ki)\in A} f_{ki} = \sum_{j/(ij)\in A} f_{ij}$

Une façon de ne pas distinguer entre les 3 types de nœuds est de relier tous les noeuds d'offre à un noeud fictif 0 qui sera l'entrée dans le réseau et de relier tous les noeuds de demande à un noeud de sortie $n + 1$.

IV.3 Problème de transport simple

Le problème de flot maximum n'est pas le problème le plus général que l'on puisse rencontrer en matière de transport. Si ce problème peut être utile dans le cas où l'on veut renforcer un réseau pour indiquer quels sont les endroits les plus judicieux pour des investissements, ce n'est pas le problème qui se pose chaque jour aux gestionnaires d'un réseau de transport.

Généralement, on a une quantité donnée de flux à faire transiter sur le réseau avec des coûts associés à chaque arc.

Plus généralement, considérons n usines candidates pour alimenter m dépôts

Soient :

a_i : La quantité disponible à l'usine i

d_j : La quantité demandée par l'entrepôt j

c_{ij} : Coût de transport unitaire de i l'usine i vers l'entrepôt j

x_{ij} : Quantité transportée de l'usine i vers l'entrepôt j

On peut résoudre ce problème par la programmation linéaire ou par les méthode heuristiques.

IV.4 Résolution par la programmation linéaire.

Il suffit de résoudre le PL suivant:

Minimiser z(x)= $\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$

Sous les contraintes suivantes :

a) Contraintes liées à la disponibilité

$$\sum_j x_{ij} \leq a_i$$

b) Contraintes liées à la demande

$$\sum_j x_{ij} \geq d_j$$

c) Contraintes de non négativité

$$x_{ij} \geq 0$$

- Le choix du signe d'égalité ou d'inégalité dans les contraintes concernant les usines et les dépôts dépend du contexte concret.

- La quantité disponible est généralement supérieure à la quantité demandée $\sum_i a_i \geq \sum_j d_j$.

IV.5 Résolution par les méthodes heuristiques

Nous allons illustrer la résolution du problème de transport simple sur l'exemple

Suivant :

Trois dépôts : Cankuzo, Makamba Kirundo doivent approvisionner quatre centres de consommations situés à Bujumbura, Gitega, Cibitoke et Mwaro. Le tableau suivant fournit (en F par tonne) les tarifs des transporteurs routiers de chaque dépôt vers les centres.

Coût des fournitures venant de	Bujumbura	Gitega	Cibitoke	Mwaro	Capacité du dépôt
Cankuzo	264	130	139	160	9
Kirundo	279	244	146	307	17
Makamba	200	166	66	278	9
Demande	10	14	7	4	

Le tableau qui suit donne également la capacité et la demande des centres (exprimée en milliers de tonnes). On cherche l'affectation Centre / dépôts permettant d'aboutir à un coût de transport minimum.

IV.5.1 Résolution par la méthode du simplexe

Ce problème put être résolu à l'aide du programme linéaire suivant (voir cours) qui donne la solution optimale suivante :

- Cankuzo envoie 5.000 T à Gitega et 4.000 Mwaro;
- Kirundo envoie 10 T Bujumbura et 7 à Cibitoke
- Makamba envoie 9T à Gitega.

Le coût de transport total est de 6.580 kF.

IV.5.2 Résolution par les méthodes heuristiques

Résolution par la méthode du stepping stone

Le principe de cette méthode consiste a partir d'une solution de base que l'on améliore pas à pas. Pour la détermination d'une solution de départ, deux méthodes peuvent être utilisées la méthode du coin Nord-Ouest et la méthode de Houthakker.

a) La méthode du coin Nord-Ouest :

L'application de la méthode du coin Nord-Ouest consiste à attribuer le plus grand nombre possible à la case située le plus à l'Ouest et le plus au Nord possible tout en respectant les contraintes de capacité de et de demande. (Voir cours)

Coût des fournitures venant de	Bujumbura	Gitega	Cibitoke	Mwaro	Capacité du dépôt
Cankuzo	9				9
Kirundo	1	14	2		17
Makamba	10	14	5	4	9
Demande	10	14	7	4	

b) Heuristique de Houthakker

Houthakker propose de commencer par saturer les liaisons (*i, j*) pressentant le coût de transport unitaire *cij* le plus faible. Si deux cases sont de coût minimum, on choisira celle où l'on peut attribuer le plus grand nombre : ceci aura pour effet de mettre comme coefficient du coût minimum la plus grande valeur d'une variable. (Voir cours)

Coût des fournitures venant de	Bujumbura	Gitega	Cibitoke	Mwaro	Capacité du dépôt
Cankuzo		9			9
Kirundo	10	3		4	17
Makamba		2	7		9
Demande	10	14	7	4	

c) Amélioration de la solution de base :

Pour chaque case présentant une valeur nulle, on calcule le coût marginal engendre par le déplacement d'une unité des cases affectées voisines vers celle-ci. (voir cours)

Notez que l'algorithme de stepping stone choisit à chaque étape comme variable celle de coût marginal le plus négatif.

Calcul des coûts marginaux

Une méthode permet de réduire fortement le temps de calcul des coûts réduits.

En effet, on peut montrer (cela résulte du principe de dualité de la programmation linéaire) qu'il existe des variables auxiliaires ui et vj telles que pour chaque case de base (c'est-à-dire chaque case utilisée dans la solution de départ), on ait :

$ui + vj = cij$

Pour la solution du tableau ci-dessus, on a donc que :

$u1 + v2 = 130$

$u2 + v1 = 279$

$u2 + v2 = 244$

$u2 + v4 = 307$

$u3 + v2 = 166$

$u3 + v3 = 66$

Il s'agit d'un système de 6 équations à 7 inconnues. On peut donc arbitrairement fixer à zéro la valeur d'une variable (par exemple $u1$). On en déduit immédiatement la valeur de toutes les autres variables :

$u1 = 0$

$v2 = 130$

$u2 = 114$

$u3 = 36$

$v1 = 165$

$v4 = 193$

$v3 = 30$

On peut alors calculer les coûts marginaux par la formule suivante (c'est la formule de calcul des coûts réduits de l'algorithme du Simplexe) :

$dij = cij - (ui + vj)$

	v1=165	v2=130	v3=30	v4=193
u1=0	264-0-165=99	130-0-130=0	139-0-30=109	160-0-193=-33
u2=114	279-114-165=0	244-114-130=0	146 -114-30=2	307 -114-193=0
u3=36	200 -36-165=-1	166 -36-130=0	66 -36-30=0	278 -36-193=49

On retrouve bien les valeurs +99, +109 et -33 déjà calculées plus haut.

Affectation à coût minimal optimal

Coût des fournitures venant de	Bujumbura	Gitega	Cibitoke	Mwaro	Capacité du dépôt
Cankuzo		5		4	9
Kirundo	10		7		17
Makamba		9			9
Demande	10	14	7	4	

Le coût de transport total est de 6.580 kF.

Exercices

1) Une entreprise, spécialisée dans la production de saucisses, dispose de 4 laboratoires où elle élabore son produit et de 5 centres de distribution d'où elle ravitaille sa clientèle. Le tableau suivant indique les distances entre les laboratoires et les centres de distribution.

	CD1	CD2	CD3	CD4	CD5	Capacité
L1	100	300	250	450	250	26
L2	50	200	250	450	250	24
L3	250	100	50	350	300	27
L4	300	150	200	250	450	23
Demande	18	20	22	19	21	

Le transport a été négocié au tarif kilométrique de 2 $ la tonne. Les disponibilités en tonne de chair des différents laboratoires sont également données dans le même tableau. Proposer un plan de transport optimal.

2) Une entreprise dispose de deux usines de production dont les débouchés sont situés sur trois marchés distants géographiquement. On connaît la capacité de production de chacune des usines ainsi que la demande de chacun des marchés. On dispose également des distances, exprimées en milliers de miles, entre les sites de production et les marchés.

Usines	Marchés			Offre
	New York	Chicago	Topeka	
Seattle	2.5	1.7	1.8	350
San Diego	2.5	1.8	1.4	550
Demande	325	300	275	

Les frais de transport sont de 90 $ par millier de km. On se demande combien d'unités du produit acheminer à chaque marché à partir de chaque usine de manière à minimiser les coûts de transport.

III. PROBLEMES D'ORDONNANCEMENT

Lors de tout projet de grande envergure, un problème crucial qui se pose est celui du calendrier d'exécution des tâches. Le problème est de déterminer dans quel ordre doivent s'enchaîner les diverses tâches de manière à minimiser le temps total d'exécution du projet.

L'objet d'un problème d'ordonnancement est de faciliter la mise en œuvre et de guider l'exécution d'un ensemble complexe de tâches (programme de recherche ou de production, lancement d'un produit, construction d'un édifice. . .)

La technique d'analyse la plus connue, est méthode PERT (Program Evaluation and Review Technic) a été introduite aux Etats- Unis en 1958 pour la conduite du programme de recherche et de construction des fusées Polaris. Cette méthode tient une place dominante par sa simplicité, son efficacité et la variété d'extensions qui ont pu être développées.

En toute généralité, les problèmes d'ordonnancement se posent sous la forme suivante. Etant donné un objectif qu'on se propose d'atteindre et dont la réalisation suppose l'exécution préalable de multiples tâches, soumises à de nombreuses contraintes, déterminer l'ordre et le calendrier d'exécution des diverses tâches.

Le critère d'optimalité peut porter sur la minimisation de la durée ou du coût du projet. La représentation par un graphe permet une bonne appréciation globale du problème. L'étude de ce graphe conduit à l'identification des tâches prioritaires et la détection des retards ou de dépassements de moyens afin de prendre des mesures correctives nécessaires.

Prenons un exemple. On veut construire un nouveau bâtiment de manière à pouvoir l´emménager au plus tôt. Certaines tâches ne peuvent s'exécuter qu'après que d'autres soient terminées.

Par exemple, on ne peut commencer les fondations que lorsque le terrassement est fini. On ne peut monter les murs que lorsque les fondations sont terminées. D'autres tâches peuvent s'exécuter simultanément. Par exemple, les travaux d'électricité et de plomberie peuvent être menés de pair.

On doit tenir compte, dans les problèmes d'ordonnancement, de divers types de contraintes.

- Les **contraintes de localisation temporelle** expriment la localisation d'une tâche dans le temps : une tâche ne peut commencer avant une telle date, ou après une telle date (par exemple, en raison des conditions climatiques).

- Les **contraintes de succession temporelle** expriment les relations d'antériorité
entre les tâches : une telle tâche ne peut commencer avant la fin d'une autre (par exemple, on ne coule pas les fondations si le terrassement n'est pas fini).

- Les **contraintes disjonctives** expriment le fait que deux tâches ne peuvent avoir lieu en même temps sans que l'on puisse dire laquelle doit être effectuée avant l'autre (par exemple, une même grue est utilisée sur deux chantiers).

Exemple : construction d'un bâtiment

N°	Tâche	Durée	Préalables
1	terrassement	5	-
2	fondations	4	1
3	Colonnes porteuses	2	2
4	Charpente	2	3
5	Couverture	3	4
6	Maçonnerie	5	3
7	Plomberie électricité	3	2
8	Coulage dalle béton	3	7
9	Plâtre	4	8 et 6
10	Finition	2	9 et 5
11	emménagement	5	10

Le problème d'ordonnancement *avec des contraintes de localisation temporelle et de succession temporelle seulement* est appelé **problème central d'ordonnancement**. Il s'agit donc de déterminer le calendrier de début de chacune des tâches de manière à terminer le chantier au plus vite en respectant les contraintes temporelles.

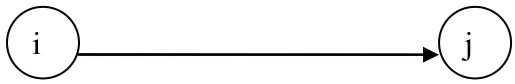
Nous allons voir que, aussi bien pour sa formulation que pour sa résolution, ce problème utilise la notion de graphe. On peut, en effet, représenter le problème sur un graphe et, ensuite, résoudre le problème graphiquement. De plus, la présentation
du résultat de calcul (l'ordonnancement des tˆaches) sera beaucoup plus claire sur ce graphique que sur un tableau de chiffres.

Il existe deux méthodes alternatives de résolution, toutes deux basées sur une représentation graphique: la *méthode du potentiel* et la *méthode PERT*.

9.2 Méthodes de résolution

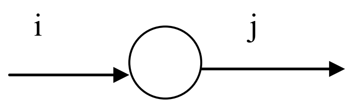
Il existe deux méthodes de résolution pour ce problème, à savoir :

- La**méthode du potentiel** développée en France dans les années 60 et qui associe à chaque tâche un noeud du réseau, tandis que les relations d'antériorité sont représentées par des arcs entre les tâches



Dans cette méthode, *chaque tâche i est associée à un noeud i du réseau.* On représente le fait que la tâche *i* doit être terminée avant le début de la tâche *j* par une *flèche issue du noeud i vers le noeud j de longueur égale à la duréedi de la tâche préalable.*

La **méthode PERT** développée parallèlement aux Etats Unis d'Amérique et qui, elle, associe chaque tâche à un arc du réseau, et chaque relation d'antériorité à un noeud



Dans cette méthode, *chaque tâche i est associée à un arc i du réseau* de longueur égale à sa durée *di*. On représente le fait que la tâche *i* doit être terminée avant le début de la tâche *j* par une *noeud précédé de la flèche i etsuivi de la flèche j*

Algorithmiquement, les deux méthodes de résolution sont équivalentes, mais la méthode du potentiel permet d'écrire le graphe de réseau de manière systématique.

Formulation du problème

Soient n tâches à exécuter, indicées $i = 1, \dots n$. Utilisons également la notation di pour désigner la durée d'exécution de la tâche i (qui est ici une donnée).Les **variables** du problème sont les suivantes :

- t_0 note le temps de début d'exécution du chantier,
- $t_i$note le temps de *début d'exécution* de la tâche i, et t_f (= tn+1) note le temps de fin de chantier.

Formulons maintenant **l'objectif :** il s'agit simplement de minimiser le temps de réalisation du chantier, autrement dit : $min\ z = t_f - to$ qui consistera à minimiser tf si on se fixe initialement $to = 0$.

Formulons maintenant les **contraintes** du problème central d'ordonnancement.
Elles sont de trois types :

- Les contraintes de **localisation temporelle** expriment que la tâche i ne peut commencer avant le début de chantier :

$ti \geq to,\ \forall_i\ i = 1, 2, \dots n$

- Les contraintes de **succession temporelle** expriment que la tâche j ne peut débuter avant que toute tâche i préalable à j ne soit finie :

$ti + di \leq tj\ ,\ \forall_{ij}\ i$ antérieure à la tâche j

- Les contraintes de **fin de chantier** expriment que toute tâche i doit être finie avant la fin de chantier : $ti + di \leq tf\ ,\ \forall_i\ \ i = 1, 2, \dots n$

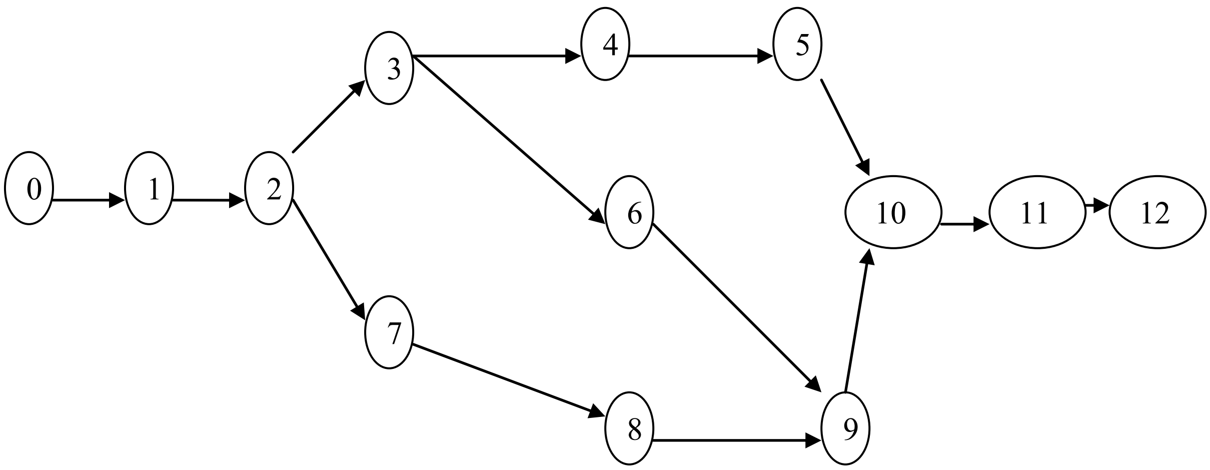
Représentation graphique du problème

On associe donc au problème central d'ordonnancement un graphe dont les **sommets** représentent les diverses tˆaches du problème d'ordonnancement. On ajouteun noeud 0 qui correspond à la date de début de chantier et un noeud $f = n + 1$qui correspond à la fin de chantier.

Les **arcs du réseau** représentent les diversescontraintes qui peuvent toutes se mettre sous la forme suivante$ti + di \leq tj$en définissent $d0 = 0$. Le problème central d'ordonnancement se formule doncainsi :

$min\ tf\ (-to)$

s.c.. $ti + di \leq tj\ ,\ \forall (i, j) \in A$; où A note l'ensemble des arcs du réseau. On peut construire systématiquement le graphe associé au problème d'ordonnancement de la manière suivante:



1. On relie d'abord toutes les tâches qui peuvent être effectuées sans préalable au noeud 0, début de chantier par un arc de longueur nulle. Dans l'exemple, seule la tâche 1 est dans ce cas.

2. Ensuite, on prend une tâche déjà dans le graphe et on examine si elle précède d'autres. Par exemple, la tâche 1 doit précéder la tâche 2. On doit donc avoir

$t2 \geq t1 + d1$.

On trace le noeud 2 et on le relie au noeud 1 par un arc de longueur $d1$. On fait de même pour représenter toutes les autres contraintes succession temporelle

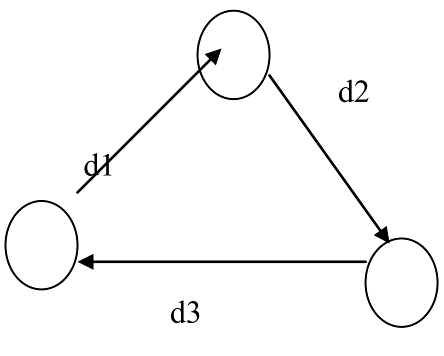
3. Enfin, quand toutes les tâches sont dans le graphe, pour les seules tâches qui ne sont suivies d'aucune autre, on les relie au noeud $n + 1$, fin de chantier, avec un arc de longueur égale `a la durée de la tâche.

Pour les *trois autres types de contraintes* :

1. Supposons d'abord que la tâche 3 ne puisse commencer avant :10 : $t3 \geq 10 \Leftrightarrow t3 \geq t0 + 10$. Ceci se représente en joignant les noeuds 0 et 3 par un arc de longueur 10.
2. Ensuite, supposons que la tâche 5 doive être commencée avant 40 :
$t5 \leq 40 \Leftrightarrow t0 \geq t5 - 40$.
3. Enfin, supposons que la tˆache 9 doive commencer au plus tard 5 jours après le début de la tˆache 8 : $t9 \leq t8 + 5 \Leftrightarrow t8 \geq t9 - 5$. Ceci se représente en joignant les noeuds 9 et 8 par un arc de "longueur" -5.

Avant de voir l'algorithme qui permet de résoudre le problème d'ordonnancement, nous allons dire un mot des conditions sous lesquelles ce problème est réalisable. En effet, les contraintes temporelles peuvent venir de divers services et être incompatibles entres elles.

Supposons que nous ayons la situation suivante. La tâche 1, qui dure $d1$ jours, doit être terminée avant que la tâche 2 ne commence. La tâche 2, qui dure $d2$ jours, doit être terminée avant que la tâche 3 ne commence. La tâche 3, qui dure $d3$ jours, doit être terminée avant que la tâche 1 ne commence. Il est clair qu'un tel problème va conduire à une impossibilité. Cette situation est représentée à la figure suivante.



On voit ici que le graphe contient un circuit (cycle avec tous les arcs dans le même sens) dont la somme des longueurs des arcs est positive. Ecrivons les contraintes correspondantes :

$t1 + d1 \leq t2$

$t2 + d2 \leq t3$

$t3 + d3 \leq t1$

En sommant et en simplifiant, on obtient la condition suivante : $d1 + d2 + d3 \leq 0$. On peut alors montrer le résultat suivant.

Lemme : *Les contraintes temporelles sont compatibles entre elles si et seulement si le graphe associé ne comporte aucun circuit de longueur (somme des longueurs des arcs le constituant) positive.*

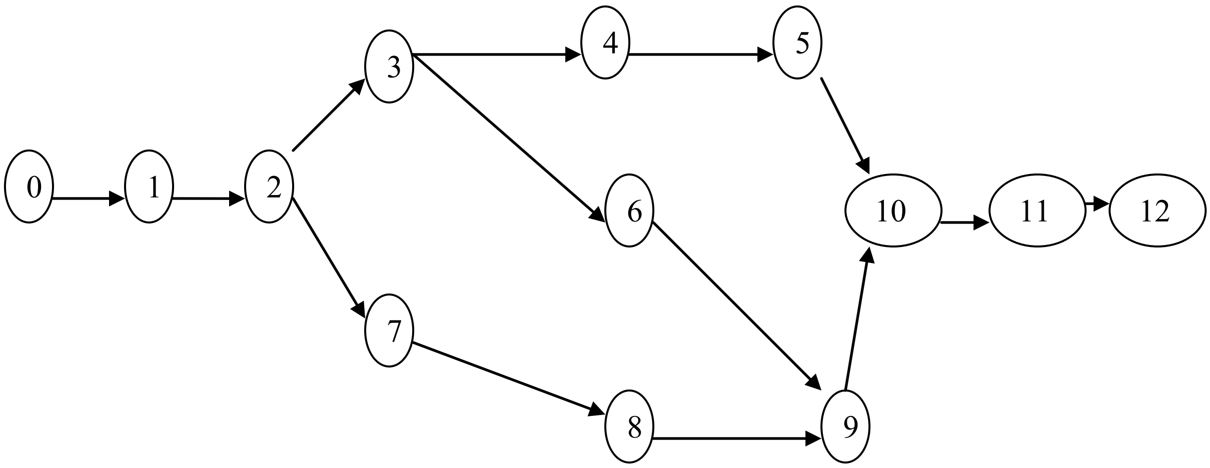
Remarquez qu'un cycle avec une somme des longueurs négative ne pose pas de problème.

Calcul de l'ordonnancement au plus tôt

Nous allons maintenant voir un algorithme de calcul de l'ordonnancement **au plus tôt**. L'ordonnancement au plus tôt détermine les dates de début au plus tôt desdifférentes tâches, notées ti, en partant du noeud de début de chantier. Illustrons les choses sur l'exemple. La tâche 1 peut commencer au plus tôt en0 puisqu'elle est reliée au noeud 0, début de chantier, par un arc de longueurnulle. La tâche 2 peut commencer dès la fin de la tâche 1, c'est-à-dire$t2 = t1 + d1 = 5$et ainsi de suite, on marque $t3 = 9$, $t4 = 11$, $t5 = 13$, ...

Lorsqu'un sommet (comme le sommet 9) a plus d'un prédécesseur (8 et 6), on détermine la date au plus tôt par un maximum : $t9 = max \{t6 + d6, t8 + d8\} = 16$.

Il faut, en effet, que les deux tâches précédentes soient finies avant de pouvoir débuter la tâche 9. On arrive ainsi à déterminer la durée totale minimum qui est ici de 35 jours.



Ordonnancement au plus tard

Certaines tâches sont telles que si on retarde leur date de début, cela aura des répercussions sur la date de fin de chantier. Par exemple, si on retarde la date de début de la tâche 11 (finition), cela va directement retarder la date de fin de chantier. De même, si on retarde la tâche 10 (plâtre), cela va retarder la date de début de la tâche 11 (finition) qui elle-même retarde la date de fin de chantier.

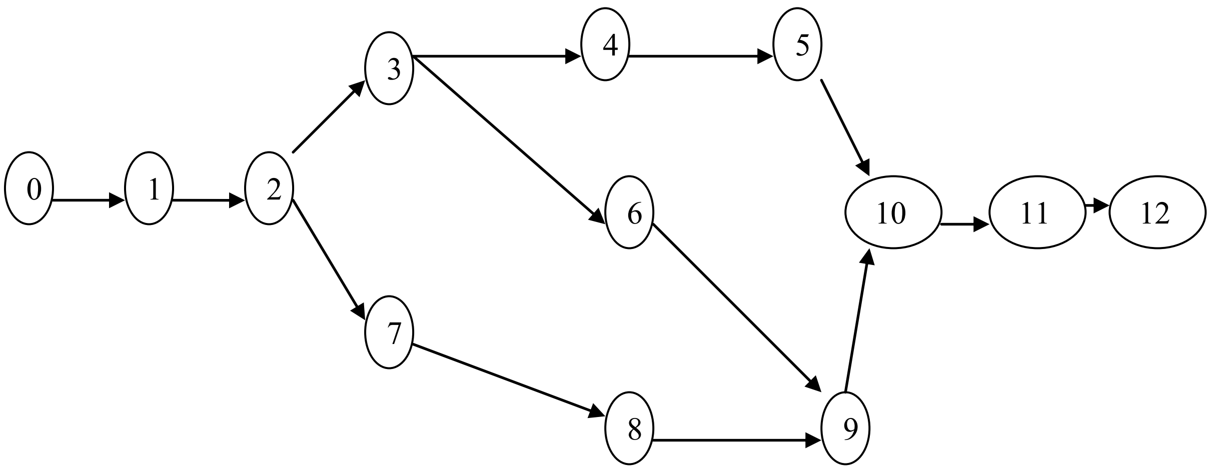
Par contre, si on retarde le début de la tˆache 5 (couverture), cela n'aura pas de répercussion, car ce n'est pas `a partir de ce noeud que son successeur (10) a été marqué mais bien `a partir du noeud 9. On voit donc que l'on peut retarder la date de début de la tâche 5 sans conséquence sur la date de fin de chantier jusqu``a un certain point.

En effet, $t5 = 13$, $t10 = 20$, et $d5 = 3$. Autrement dit, la date de début de la tâche 5 peut être retardée jusqu'à la valeur : $t10 - d5 = 20 - 3 = 17$ sans retarder la date de début de la tâche 10. On dit que 17 est **la date de début auplus tard** de la tâche 5. C'est à -dire que la tâche 5 peut être commencée à cette date au plus tard sans allonger la durée totale minimale des travaux.

On notera une date de début au plus tard par *ti*. On peut calculer **l'ordonnancement au plus tard** de la manière suivante. Partant du noeud fin,pour lequel la date de début au plus tard coïncide avec la date de début au plus tôtt_{12} = t_{12} = 35,on retranche à la date au plus tard la durée de la dernière tâche. On détermine ainsi la date de fin au plus tard de la tâche 11 :t_{11} = $t_{12}- d_{11}$ = 35 − 5 = 30.On marque ensuite à rebours les noeuds 10, 5, ...

Lorsqu'un noeud a plusieurs successeurs, on ne peut marquer ce sommet que si *tous ses successeurs directs sont marqués*. Prenons, à titre d'illustration, le cas du noeud 3. Dans ce cas, il faut prendre le minimum : $t3 = min\ \{t4 - d4, t6 - d6\} = min\{15 - 2, 11 - 2\} = 9$, sans quoi on retarderait la date de fin de chantier.

On procède ainsi à rebours jusqu'au marquage du noeud origine 0. On peut alors calculer deux autres informations très importantes : **la marge des tâches** et le **chemin critique**.



Chemin critique et calcul des marges

On voit directement que l'on a deux sortes de tâches.

- Les **tâches critiques** sont celles qui servent à marquer de proche en proche le sommet $n + 1$ à partir du sommet 0. Elles forment ce que l'on appelle le **chemin critique** qui donne l'ensemble des tâches à surveiller en premier si l'on veut respecter le délai minimum de réalisation du projet. Le **chemincritique**, peut être déterminé de la manière suivante. Partant du noeud $n + 1$, on ne retient que les sommets qui ont permis de joindre n+1 à partir du noeud 1. Il s'agit, dans l'exemple, des noeuds 12, 11, 10, 9, 6, 3, 2,1 et 0.
- Pour toutes les autres tâches, c'est-à-dire les **tâches non critiques**, on peut déterminer la **marge d'une tâche** comme la différence entre son temps de début au plus tard et au

plus tôt : $mi = ti - ti$ et donc la marge mi est strictement positive pour les tâches non critiques tandis qu'elle est nulle pour les tâches critiques.

i	4	5	7	8
mi	4	4	1	1

La marge d'une tâche représente donc le nombre de jours de retard que peut prendre la réalisation de la tâche sans que cela n'est de conséquence sur la date de fin de chantier.

Exercices

1. L'équipement d'un ensemble minier comporte les tâches suivantes dont la durée est exprimée en trimestres.

N°	Tâche	durée	Préalables
1	Commande d'une piste	6	-
2	Construction d'un port provisoire	3	-
3	Commande de matériel portuaire	2	-
4	Pose d'une voie ferrée	4	2
5	Construction d'une cité administrative	7	2
6	Construction du port définitif	2	2
7	Construction de l'installation minière	4	1et4
8	Equipement portuaire définitif	3	3 et 6

(a) Construire le graphe relatif à la méthode du potentiel.

(b) Calculer les dates de début au plus tôt, les dates de début au plus tard.

Déterminer le chemin critique.

(c) Comment modifier le graphe si, on veut que la tâche 7 ne commence pas avant 8 trimestres ? Recalculez les dates de début au plus tôt, les dates de début au plus tard.

(d) Comment modifier le graphe si on veut en plus que la tâche 8 ne commence pas après 4 trimestres ? Dites si le problème reste soluble.

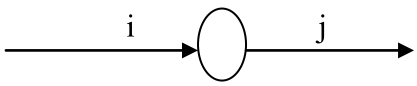
L'ordonnancement par la méthode PERT

1 Introduction

La méthode PERT (Program Evaluation Review Technique) s'est développé, parallèlement `a la méthode du potentiel, aux Etats-Unis en 1958 pour la planification de la construction des sous-marins Polaris. Elle se distingue de la méthode du potentiel par le fait que les tâches ne sont plus associées aux nœuds **mais bien aux arcs du réseau**.

L'algorithme de résolution est très semblable à celui de la méthode du potentiel. La différence majeure réside donc dans la construction du graphe : le graphe de la méthode PERT est souvent plus difficile à construire que celui de la méthode du potentiel car on peut être amené à introduire des arcs fictifs qui ne correspondent `a aucune tˆache.

Dans la méthode PERT, chaque tâche est donc associée à un **arc du graphe**. La longueur de l'arc correspondant à la durée de la tâche en question. Les **sommets** sont utilisés pour traduire les relations de succession temporelle. Ainsi, si la tâche *j* doit suivre la tâche *i*, l'extrémité terminale de l'arc représentant la tâche *i* coïncidera avec l'extrémité initiale de l'arc représentant la tâche *j*.

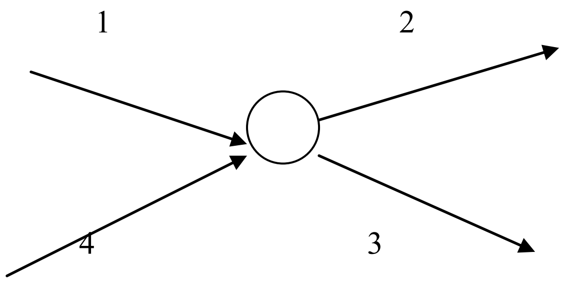


Ceci permet de tracer le graphe pour l'exemple déjà considéré pour la méthode du potentiel. Si, sur cet exemple, le graphe de la méthode du potentiel et celui de la méthode PERT sont très proches, il n'en va pas toujours de même. C'est ce que nous allons maintenant examiner.

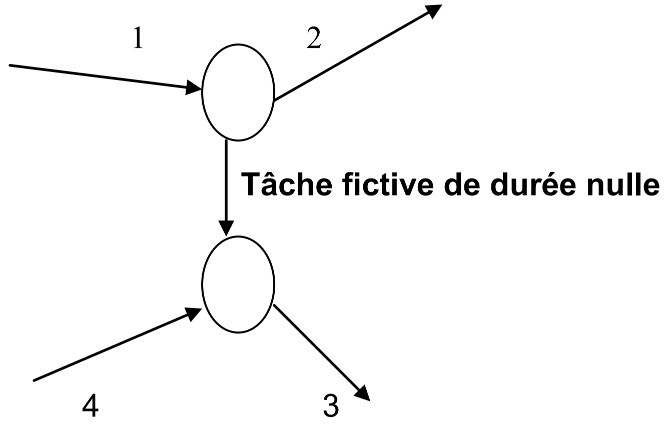
Difficultés de construction du graphe PERT

La construction du graphe PERT pose divers problèmes qui amènent à **ajouter des arcs fictifs qui ne correspondent à aucune tâche**. Un premier problème se rencontre lorsque l'on veut tenir compte des contraintes **de localisation temporelle**. Par exemple, supposons qu'une tâche *i* ne peutcommencer avant une date *li*. Il faut introduire un arc joignant l'origine des travauxà l'origine de l'arc représentant la tâche *i* et ayant pour longueur la date en question*li*. On est donc amené, dans ce cas, à **ajouter un arc fictif** qui ne correspond àaucune tâche.

Un second problème, plus délicat, se rencontre pour **les contraintes de succession temporelle**. En effet, supposons que la tâche 1 précède les tâches 2 et 3et que la tâche 4 précède la tâche 3.



On introduit une contrainte supplémentaire qui dit que la tâche 4 doit précéder la tâche



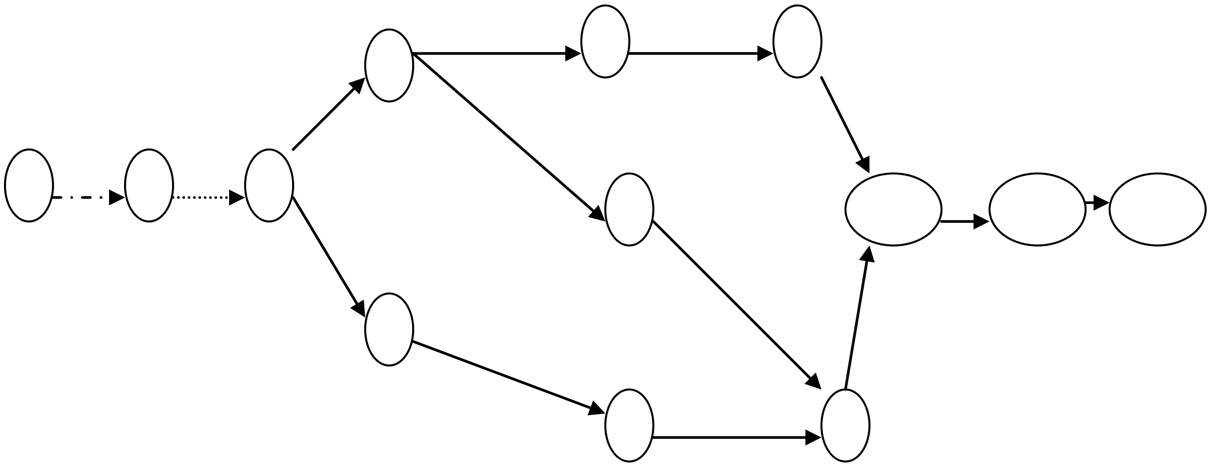
Il conviendra donc d'être vigilant dans la construction du graphe PERT. Remarquez que le problème ne peut se produire que dans le cas où il y a au moins deuxprédécesseurs et deux successeurs. Dans tous les autres cas, on peut construire le graphe sans ajouter d'arc fictif.

Calcul de l'ordonnancement par la méthode PERT

Construisons le graphe PERT associé à l'exemple de construction d'un bâtiment du chapitre 9 dont les données sont reprises au tableau suivant.

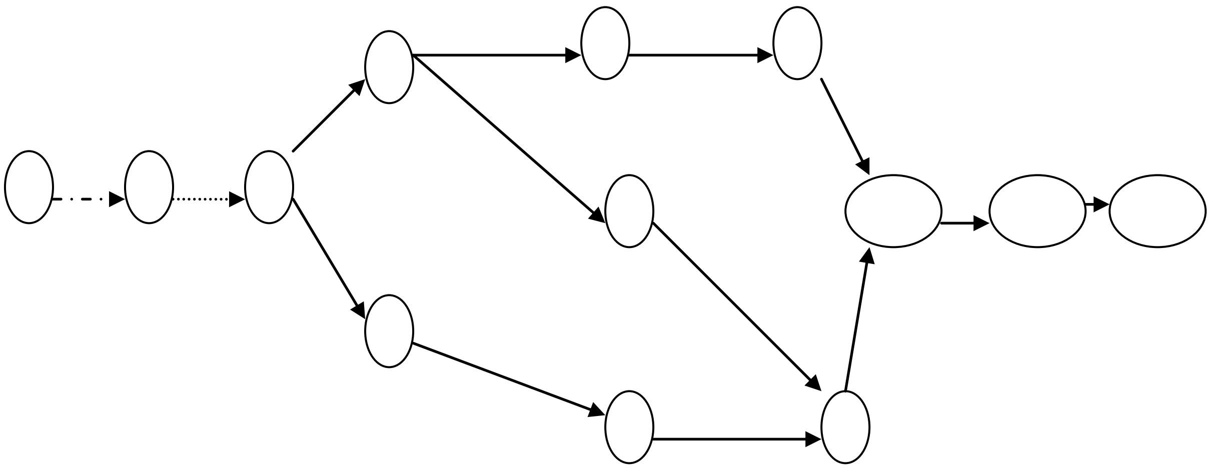
N°	Taches	Durée	Préalables
1	terrassement	5	-
2	fondations	4	1
3	colonnes porteuses	2	2
4	charpente toiture	2	3
5	couverture	3	4
6	maçonnerie	5	3
7	plomberie, électricité	3	2
8	coulage dalle béton	3	7
9	chauffage	4	8 et 6
10	plâtre	10	9 et 5
11	finitions	5	10

Graphe PERT



Calcul de l'ordonnancement au plus tôt

L'ordonnancement se calcule ainsi. D'abord, on détermine les **dates de début au plus tôt des noeuds,** que nous noterons *ti*. Ceci est fait par marquage des noeuds à partir de l'origine comme dans la méthode du potentiel. On additionne au tempsdu noeud précédent le temps de la tâche. En cas de plusieurs prédécesseurs, onprend le maximum. Ces dates au plus tôt sont indiquées au dessus des noeuds augraphique de la figure. Comme dans la méthode du potentiel *les dates dedébut au plus tôt de toutes les tâches suivant un noeud correspondent à la date auplus tôt ti du noeud situé juste avant la tache.*



Calcul de l'ordonnancement au plus tard

Contrairement `a la méthode du potentiel, on ne peut calculer simplement *l'ordonnancement au plus tard*. En effet, on détermine les dates au plus tard des noeuds,notées *ti*, par marquage à partir de la fin, en soustrayant au temps du noeud suivantle temps de la tâche. En cas de plusieurs successeurs, on prend le minimum.

Il est à remarquez que **ces dates aux plus tard des noeuds ¯*ti* ne correspondent pas dans tous les cas aux dates au plus tard des tˆaches qui suivent le nœud.** Prenons l'exemple de la tâche 4, de durée 2. La date de début au plus tard de son successeur direct, la tâche 5 est de 17. La date de début au plus tard de la tâche 4 est donc de17 − 2 = 15 ; alors que la date de début au plus tard du noeud précédent la tâche dans le graphe est de 11. Ce 11 provient en fait de la tâche 6 qui est critique (16 - 5 = 11).

Il convient donc de procéder en deux temps. D'abord, on calcule le temps de début au plus tard des noeuds comme dans la méthode du potentiel. Ensuite, on calcule la marge de la tˆache (*i, j*) entre les noeuds *i* et *j* comme : $mij = tj - (ti + dij)$

Autrement dit, la marge est la différence entre le temps de début au plus tard du noeud *j* et l'arrivée au plutôt à ce noeud pour la tâche (*i, j*) qui peut partir au plus tôt en *ti* du noeud *i*. On obtient alors les dates au plus tard des tˆaches en *additionnant à la date au plus tôt du noeud de départ, la marge de la tâche.*

Les résultats sont indiqués au tableau suivant

Tâches	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Date au plutôt	0	5	9	11	13	11	9	12	16	20	30
Marge	0	0	0	4	4	0	1	1	0	0	0
Date au plus tard	0	5	9	15	17	11	10	13	16	20	30

Calcul du chemin critique

Un chemin critique peut alors se construire à partir du noeud de fin en ne retenant que les arcs critiques. L'application à l'exemple donne de page précédente donne le chemin critique est suivant : $P = (1, 2, 3, 6, 9, 10, 11)$. Remarquez que *le chemin critique ne doit pas être unique.* En effet, on peut avoir des chemins critiques parallèles. Si par exemple, la durée de la tâche 4 est portée de 2 à 6, un second chemin critique apparaît dans notre exemple :

$P1 = (1, 2, 3, 6, 9, 10, 11)$

$P2 = (1, 2, 3, 4, 5, 10, 11)$

Remarquez également que, pour réduire la durée minimum de réalisation du projet, il faut *réduire la durée d'une tâche dans chaque chemin critique.* En effet, il ne sert à rien de réduire la durée d'un chemin critique si un autre chemin reste critique avec une valeur supérieure. Dans ce cas on peut soit réduire la durée d'une tâche dans chaque chemin, soit réduire la durée d'une tâche commune aux chemins dans le cas où une telle tâche existe.

Exercices

1. L'armée, pour établir son plan de mutation, tient compte du désagrément (coût de transport et autres frais) d'être muté loin de sa base d'origine. Pour les 4 officiers à muter cette année, on a établi le coût de les affecter à chacun des 4 autres postes : A ; B, C, D. Cette information est reprise dans le tableau ci-dessous

Coût pour l'officier	D'être muté au poste			
	A	B	C	D
1	6	14	12	16
2	8	17	21	17
3	7	16	11	12
4	12	13	15	14

Proposer l'affectation des officiers qui satisfait au mieux les 4 officiers

2. Une entreprise de construction doit affecter 4 ouvriers à 4 tâches. Le tableau suivant indique l'efficacité de la personne si elle est affectée à la tâche. Une barre indique que la personne n'est pas qualifiée pour la tâche. Identifier une affectation qui maximise l'efficacité générale.

	Ouvrier1	Ouvrier2	Ouvrier3	Ouvrier4
Tâche 1	45			30
Tâche 2	50	50	15	
Tâche 3		60	25	75
Tâche 4	45			75

3. Les coûts de transport entre les différentes usines et les différents clients sont donnés en dollars par kg. Les demandes des clients sont données en millions de kg par jour. Les

capacités de production sont données en millions de kg par jour. On veut déterminer le plan de distribution qui minimise les coûts de production et les coûts de transport

	Coût de l'usine (dollars/kg)			Demande du client en millions de kg/jour
	A	B	C	
Vers le client	0,021	0,039	0,035	0,5
1	0,024	0,029	0,034	0,8
2	0,019	0,04	0,029	0,5
3	0,048	0,027	0,026	0,9
4	0,037	0,024	0,032	0,9
5	0,029	0,023	0,041	0,8
6	0,02	0,041	0,032	0,6
Capacité Usines en millions de kg/jour	1,8	4	1,6	

4. Etant donné une région comportant quatre villes V1, V2 ; V3 ; V4 ; on veut savoir où implanter, parmi divers emplacements disponibles (au nombre de 5), un ensemble d'émetteurs de télévision susceptibles de desservir ces différentes villes au moindre coût. La dernière colonne représente le coût de construction de chaque émetteur. Chaque ville doit être desservie par au moins un émetteur.

Emetteurs	V1	V2	V3	V4
Emeteur1	1	1		1
Emeteur2	1			
Emeteur3		1	1	
Emeteur4			1	1
Emeteur5	1		1	1

Formuler mathématiquement le problème

5) L'usine "Max & Fils", localisée à Lille, produit des voitures. Ces voitures sont acheminées en train jusqu'à Lyon, où elles sont stockées dans un entrepôt puis vendues. Les capacités des trains sont:

- sur la ligne Lille/Reims : 16 voitures par jour,
- sur la ligne Lille/Paris : 13 voitures par jour,
- sur la ligne Paris/Reims : 4 voitures par jour,
- sur la ligne Reims/Paris : 10 voitures par jour,
- sur la ligne Reims/Dijon : 12 voitures par jour,
- sur la ligne Paris/Nevers : 14 voitures par jour,
- sur la ligne Dijon/Paris : 9 voitures par jour,
- sur la ligne Nevers/Dijon : 7 voitures par jour,
- sur la ligne Nevers/Lyon : 4 voitures par jour,
- sur la ligne Dijon/Lyon : 20 voitures par jour.

a) Modéliser ce problème par un graphe
b) A quel type de problème fait-il référence
c) Déterminer la plus grande quantité de voitures pouvant voyager depuis la source jusqu'au puits, sans violer aucune contrainte de capacité, et tout en préservant la propriété de "conservation de flot"

6) Une entreprise sidérurgique a reçu une commande de 5 tonnes d'aciers destinés à la fabrication de carrosseries automobiles. Les teneurs de cet acier en différents éléments chimiques doivent se trouver dans les fourchettes suivantes :

Eléments chimiques	Teneur minimale en %	Teneur maximale en %
Carbone	2	3
Cuivre	0,4	0,6
Manganèse	1,2	1,65

Pour fabriquer cet acier, l'entreprise dispose de 7 matières premières dont les teneurs, les quantités disponibles et les cours d'achats sont donnés dans le tableau suivant:

Matière première	teneur en C	teneur en Cu	teneur en Mn	Stock disponible (Kg)	Coût/kg
Ferraille1	2,5	0	1,3	4000	0,2
Ferraille2	3	0	0,8	3000	0,25
Ferraille3	0	0,3	0	6000	0,15
Ferraille4	0	90	0	5000	0,22
Ferraille5	0	96	4	2000	0,26
Ferraille6	0	0,4	1,2	3000	0,2
Ferraille7	0	0,6	0	250	0,17

Déterminer la quantité de ferraille à mélanger pour obtenir la commande souhaitée par le client au meilleur coût

7) On prévoit une augmentation du trafic entre les villes A et F. On veut déterminer si le réseau routier actuel entre les deux villes peut supporter une telle augmentation. Les données (exprimées en milliers de voitures par heure) sont reprises au tableau suivant

Arc	Origine	Destination	Capacité
1	A	B	3
2	A	C	7
3	C	B	2
4	C	D	2
5	B	E	4
6	C	D	4
7	E	D	2
8	D	F	6
9	E	F	5

(a) Représenter le réseau sous forme d'un graphe.
(b) Compléter le graphe de manière à y faire apparaître le flot total.
(c) Formuler mathématiquement le problème linéaire correspondant à la détermination du flot maximal entre les deux villes.
(d) Qu'a de particulier la matrice des coefficients du problème ?

8. Dans une exploitation agricole, on élève des vaches et des moutons. Les étables peuvent contenir un maximum de 50 vaches et 200 moutons. De plus, 72 ha de pâturages sont disponibles. On a besoin de 1 ha par vache et de 0,2 ha par mouton. Pour s'occuper du bétail,

on dispose de 10000heures de travail par année. On estime qu'une vache nécessite150 heures de travail par année et un mouton 25 heures. Le gain annuel net s'élève à 250 UM par vache et à 35 UM par mouton. Combien doit-on élever de vaches et de moutons pour que le gain net soit maximal

9. On nourrit des lapins exclusivement de carottes et de pommes de terre. Une mesure de carottes fournit 1 kcal, 4 mg de vitamine B et 3 mg de vitamine A. Une mesure de pommes de terre fournit 2 kcal, 3 mg de vitamine B et 1 mg de vitamine A. Les besoins du lapin sont d'au moins 2 kcal, 6 mg de vitamine B et 3 mg de vitamine A. Une mesure de carottes coûte autant que deux mesures de pommes de terre. Déterminer la composition du menu optimal

10. Une usine fabrique les produits P1 et P2. Elle utilise les matières premières M1, M2 et M3, à raison de 2 tonnes de M1, 1 tonne de M2et 3 tonnes de M3 par unité produite de P1 et de 1 tonne de M1,3 tonnes de M2 et 4 tonnes de M3 par unité produite de P2. Elle dispose mensuellement de 50 tonnes de M1, 25 tonnes de M2 et 60 tonnes deM3. Le bénéfice net est de 5 000 UM par unité de P1 et de 2000 UM par unité de P2. Quelle quantité de chacun des deux produits l'entreprise doit-elle fabriquer pour que le bénéfice soit maximal ?

Bibliographie

1. BAGLIN Gérard, Olivier BRUEL, Alain GARREAU, Michel GREIF et Christian VAN DELFT, *Management Industriel et Logistique*, Economica, Paris, 1996.

2.FORD L.K. et D.K.FULKERSON, *Flows in networks*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1962.

3. Christelle GUERET, Christian PRINS, Marc SEVAUX, Programmation linéaire, Eyrolles, Paris, 2000.

4 LACAZE Dominique, *Optimisation appliquée à la gestion et à l'économie*, Economica, 1990.

5. T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest Editions Dunond ;1997

6. Exercices et problèmes résolus de recherche opérationnelle ROSEAUX Editions Masson ; 1986