Sommaire

I Suites numériques **I-1**

1. Histoire des Mathématiques . . . I-1
   - a) Le saviez-vous ? . . . I-1
   - b) Activité : la méthode de Héron d'Alexandrie . . . I-2
2. Généralités sur les suites . . . I-4
   - a) Définition . . . I-4
   - b) Relation par récurrence et relation explicite . . . I-5
   - c) Variation d'une suite . . . I-6
   - d) Représentation graphique d'une suite . . . I-8
3. Suites arithmétiques . . . I-11
   - a) Exemples . . . I-11
   - b) Relation par récurrence . . . I-11
   - c) Relation explicite . . . I-14
   - d) Représentation graphique . . . I-16
     - A partir de la relation de récurrence . . . I-16
     - A partir de la relation explicite . . . I-17
   - e) Sens de variation d'une suite arithmétique . . . I-18
   - f) Somme finie des éléments d'une suite arithmétique . . . I-18
4. Suites géométriques . . . I-20
   - a) Exemples . . . I-20
   - b) Relation de récurrence . . . I-20
   - c) Relation explicite . . . I-22
   - d) Représentation graphique . . . I-24
     - A partir de la relation de récurrence . . . I-24
     - A partir de la relation explicite . . . I-25
   - e) Sens de variation d'une suite géométrique . . . I-26
   - f) Somme finie des éléments d'une suite géométrique . . . I-28
5. Raisonnement par récurrence . . . I-31
   - a) Le principe de récurrence . . . I-31
   - b) Exercices et exemples . . . I-31
6. Limite finie ou infinie d'une suite . . . I-33
7. Opérations sur les limites . . . I-35
   - a) Multiplication par une constante . . . I-36
   - b) Limite d'une somme de suites . . . I-36
   - c) Limite d'un produit de suites . . . I-36
   - d) Limite d'un quotient de suites . . . I-37
   - e) Formes indéterminées (F.I.) . . . I-38
8. Théorèmes sur les limites . . . I-38
9. Algorithme de seuil et programmation en Python . . . I-41
10. Suites majorées, minorées et bornées . . . I-42

Chapitre I

Suites numériques

1. Histoire des Mathématiques

a) Le saviez-vous ?

Extrait du site wikipédia :[1]
Les suites numériques sont liées à la mathématique de la mesure (mesures d'un phénomène prises à intervalles de temps réguliers) et à l'analyse (une suite numérique est l'équivalent discret d'une fonction numérique). La notion de suite est présente dès qu'apparaissent des procédés illimités de calcul. On en trouve, par exemple, chez Archimède, spécialiste des procédés illimités d'approximation (séries géométriques de raison 1/4) pour des calculs d'aires et de volumes, ou en Égypte vers 1700 av. J.-C. et plus récemment au ier siècle apr. J.-C. dans le procédé d'extraction d'une racine carrée par la méthode de Héron d'Alexandrie :
Pour extraire la racine carrée de A, choisir une expression arbitraire a et prendre la moyenne entre a et $\dfrac{A}{a}$ et recommencer aussi loin que l'on veut le processus précédent.
En notation moderne, cela définit la suite de nombres (u_n) définit par la relation :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{A}{u_n}\right). \end{array}\right.$$

On retrouve ensuite cette préoccupation plusieurs siècles plus tard (à partir du xviie siècle) avec la méthode des indivisibles (Cavalieri, Torricelli, Pascal, Roberval). Dans l'Encyclopédie Raisonnée de d'Alembert et Diderot (1751), une grande part est laissée aux suites et séries dont le principal intérêt semble être leur convergence :
Suite et série : se dit d'un ordre ou d'une progression de quantités qui croissent ou décroissent suivant quelques lois. Lorsque la suite va toujours en s'approchant de plus en plus de quelque quantité finie [...] on l'appelle suite convergente et si on la continue à l'infini, elle devient égale à cette quantité.
C'est ainsi que l'on voit Bernoulli, Newton, Moivre, Stirling et Wallis, s'intéresser aux suites pour approcher des valeurs numériques. C'est à Lagrange que l'on doit, semble-t-il, la notation indicielle. L'étude des suites ouvre la porte à celle des séries entières dont le but est d'approcher, non plus des nombres, mais des fonctions. Dans la seconde moitié du xxe siècle, le développement des calculateurs et des ordinateurs donne un second souffle à l'étude des suites en analyse numérique grâce à la méthode des éléments finis. On en retrouve l'usage aussi dans les mathématiques financières.

Parallèlement à ces études de suites pour leur convergence, se développe un certain goût pour l'étude de la suite non tant pour sa convergence mais pour son terme général. C'est le cas par exemple d'un grand nombre de suites d'entiers comme la suite de Fibonacci, celle de Lucas ou, plus récemment, celle de Syracuse. Sont aussi particulièrement étudiées les suites de coefficients dans des séries entières ou les suites de nombres découvertes lors de dénombrements.

1.

b) Activité : la méthode de Héron d'Alexandrie

Une activité à réaliser tout au long du chapitre en fonction des avancées.

Si on attribue à Héron l'Ancien (ier siècle av. J.-C), encore appelé Héron d'Alexandrie en référence à la ville grecque, une formule récurrente d'approximation de la racine carrée d'un nombre A, la méthode semblait connu des Babyloniens, plusieurs siècles auparavant ; c'est pourquoi l'algorithme de Héron s'appelle aussi l'algorithme de Babylone.

I. L'algorithme de Babylone et la suite $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{u_0} = \boldsymbol{a} \\ \forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}, \mathbf{u_{n+1}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\mathbf{u_n} + \dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{u_n}}\right). \end{array}\right.$

On souhaite construire un carré d'aire pas mieux a cm^2 ce qui revient, avec les notations d'aujourd'hui, de construire un segment de longueur $\sqrt{a}$ cm. Tout comme les Grecs, nous allons effectuer une construction géométrique pas à pas.

1. **Etape 0.**
   On considère un rectangle de longueur u_0 et d'aire A.
   Exprimer sa largeur l_0 en fonction de A et u_0.

2. **Etape 1.**
   Soit un nouveau rectangle d'aire A dont la longueur u_1 est la moyenne arithmétique de u_0 et l_0.
   Exprimer u_1 en fonction de A et u_0.

3. **Etape 2.**
   De manière analogue, on considère un nouveau rectangle d'aire A dont la longueur u_2 est la moyenne arithmétique de la longueur et la largeur du précédent rectangle.
   Exprimer u_2 en fonction de A et u_1.

4. **Etape (n+1).**
   En réitérant le raisonnement précédent, exprimer la longueur u_{n+1} en fonction de A et u_n.

La répétition des différentes étapes est le fondement de l'algorithme de Héron (de Babylone).

II. Etude de la suite $(\mathbf{u_n})$ définie par $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{u_0} = \boldsymbol{a} \\ \forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}, \mathbf{u_{n+1}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\mathbf{u_n} + \dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{u_n}}\right). \end{array}\right.$

On choisit le réel a de manière à ce que $a \geqslant \sqrt{A}$.
On pose f la fonction définie sur $\left[\sqrt{A}; +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{A}{x}\right)$

1. Démontrer que f est strictement croissante sur $\left[\sqrt{A}; +\infty\right[$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant \sqrt{A}$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
4. Démontrer que la suite est convergente.
5. Déterminer sa limite.

III. Application, algorithme et programmation en Python.

1. Déterminer les valeurs exactes de u_1, u_2, u_3 et u_4 dans le cas où $u_0 = 4$ et $A = 5$, puis en donner une valeur arrondie à 10^{-6} près.
2. Construire les rectangles de longueurs u_0, u_1, u_2, u_3, puis u_4.
3. Elaborer un algorithme qui retourne N termes de la suite (u_n).

   Cet algorithme a été programmé en Python mais le script est incomplet. Compléter les lignes manquantes sur la plateforme Jupyter. Le tester pour $N = 10$. Que constatez-vous ?

   Jupyter

4. Donner alors une valeur arrondie de $\sqrt{5}$ à 10^{-5} près. Construire un carré de côté u_4. Quelle est son aire ? Conclure.
5. Tester le programme suivant en saisissant par exemple l'instruction trace(2,2,8) ! Que fait-il ?

Codage en Python

```
import turtle
from turtle import*


def babylone(A,a,N) :#A  : nombre dont on cherche la racine carrée
                     #a  : valeur approchée par excès de la racine carrée
                     # N  : nombre de rectangles à tracer
    l=[a]
    for i in range(N) :
        l+=[0.5*(l[i]+A/l[i])]
    return(l)

def trace(A,a,N) :
#A  : nombre dont on cherche la racine carrée
#a  : valeur approchée par excès de la racine carrée
#N  : nombre de rectangles à tracer
    up()
    goto(-450,-350)
    down()
    setheading(-90)
    l=babylone(A,a,N)
    for i in range(N) :
        for j in range(2) :
            left(90)
            forward(l[i]*700/a)
            left(90)
            forward((A*700/a)/l[i])
```

2. Généralités sur les suites

a) Définition

De manière intuitive, on appelle suite numérique une liste infinie de nombres placés dans un certain ordre.

A titre d'exemple ▶ Pour comprendre la notation indicière

Exemple 1 : u : 2 ; -4 ; 8 ; -16 ; 32 ; -64 ; 128 ; ...
On va associer à chaque nombre sa place dans la liste.

Si on numérote la suite à partir de 0.

u :	2	-4	8	-16	32	-64	128	...
n :	0	1	2	3	4	5	6	...

L'élément de la suite associé au rang 0 est 2. On note $u(0) = 2$. On adoptera la notation indicielle $u_0 = 2$. **Attention !** Comme la numérotation commence à 0, $u_5 = -64$ désigne **le 6ème terme** de la suite. Le terme de rang 5 ou d'indice 5 est le sixième terme.

Exemple 2 : v : -4 ; 2 ; $\dfrac{2}{7}$; -5 ; -2 $\sqrt{3}$; ...

Si on numérote la suite à partir de 1.

v :	-4	2	$\frac{2}{7}$	-5	-2 $\sqrt{3}$	...
n :	1	2	3	4	5	...

L'élément de la suite associé au rang 1 est le nombre -4 : $v_1 = -4$. **Attention !** Comme la numérotation commence à 1, $v_3 = \dfrac{2}{7}$ désigne **le 3ème terme** de la suite.

Définition 1 ▶ Suites numériques

Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n) = u_n \end{aligned}$$

u_n est donc l'image de l'entier n par u.
A chaque rang n on associe le terme u_n de la suite (u_n) qui lui correspond.

Attention ! Il ne faut pas confondre les notations suivantes :

$\boxed{u_n}$ désigne le terme de la suite de rang n ou d'indice n.

$\boxed{(u_n)}$ désigne toute la suite, c'est-à-dire l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.

b) Relation par récurrence et relation explicite

Définition 2 ► Suite définie par une relation de récurrence

Soit n_0 un entier naturel. Une suite (u_n) est définie par récurrence si, à partir d'un certain rang n_0, tous les termes de rang supérieurs ou égaux à n_0 s'obtiennent à partir du ou des termes précédents.

A titre d'exemple

- $u_0 = 3$; pour tout $n \geqslant 0, u_{n+1} = u_n \times 2$.
- $u_4 = 1$; pour tout $n \geqslant 5, u_n = n + \dfrac{5}{u_{n-1}}$.
- $u_0 = 5$; $u_1 = -1$; pour tout $n \geqslant 1, u_{n+1} = 5u_n^2 - 3u_{n-1} + 4$.
- Lorsqu'à partir d'un certain rang le terme suivant est dépend (est fonction) du seul terme précédent, alors il existe une fonction f telle que :

$$\begin{cases} u_{n_0} & \text{désigne le premier terme} \\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, & u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Entraînement Labomep ► Calcul des termes d'une suite

Exercice 1 : Calcul des premiers termes d'une suite définie par récurrence.
Exercice 2 : Calcul des premiers termes d'une suite définie par récurrence (niveau 2).

Exercice 1 **Exercice 2**

Définition 3 ► Suite définie par une relation explicite

Soit n_0 un entier naturel.
On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est définie explicitement si son terme général est une fonction f de n.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \quad u_n = f(n)$$

Entraînement Labomep ► Autour de la forme explicite d'une suite

Exercice 3 : Ecrire une expression en fonction d'une variable.
Exercice 4 : Calculer des termes d'une suite définie de manière explicite.

Exercice 3 Exercice 4

c) Variation d'une suite

Définition 4 ▶ Variations

- Une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est **croissante** (respectivement **strictement croissante**) si, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ (respectivement $u_n < u_{n+1}$).
- Une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est **décroissante** (respectivement **strictement décroissante**) si, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n+1}$ (respectivement $u_n > u_{n+1}$).
- Une suite qui est croissante (respectivement **strictement croissante**) ou décroissante (respectivement **strictement décroissante**) est dite **monotone (respectivement strictement monotone)**.

Propriété 1 ▶ Méthodes pour déterminer le sens de variation d'une suite

Soit une suite (u_n) définie à partir d'un certain rang n_0 (en général $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$).

1. L'étude du signe de $\mathbf{u_{n+1} - u_n}$ renseigne sur les variations de la suite (u_n) :
   - si, pour tout $n \geq n_0, \mathbf{u_{n+1} - u_n \geqslant 0}$, la suite (u_n) est **croissante**.
   - Si, pour tout $n \geq n_0.$, $\mathbf{u_{n+1} - u_n \leqslant 0}$, la suite (u_n) est **décroissante**.
2. Si la suite est définie par une relation explicite, on peut étudier le sens de variation de la fonction associée.

A titre d'exemple

Exemple 3

Enoncé :

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -3n + 1 + u_n \end{cases}$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Écrire dans le cours le code Python à compléter de manière ce qu'il retourne le terme u_n, pour tout entier n. Vérifier vos calculs précédents et donner la valeur de u_{50}. Utiliser par exemple la plateforme Jupyter.

Jupyter

3. Etudier les variations de (u_n).

Corrigé :

1. Calcul de u_1, u_2 et u_3.

   - $u_0 = 4$
   - $u_1 = u_{0+1} = -3 \times 0 + 1 + u_0 = 0 + 1 + 4 = 5$
   - $u_2 = u_{1+1} = -3 \times 1 + 1 + u_1 = -3 + 1 + 5 = 3$
   - $u_3 = u_{2+1} = -3 \times 2 + 1 + u_2 = -6 + 1 + 3 = -2$

2. Programmation en Python

Codage en Python

```
def terme_rang_n(N) :
    u=4
    for i in range(N) :
        u=-3*i+1+u
    return u
```

Exécution du programme :

```
>>> terme_rang_n(0)
4
>>> terme_rang_n(1)
5
>>> terme_rang_n(2)
3
>>> terme_rang_n(3)
-2
>>> terme_rang_n(50)
-3621
```

3. Etude de la variation de la suite.

   - Etudions le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \underbrace{-3n + 1 + u_n}_{u_{n+1}} - u_n \\ &= -3n + 1 \end{aligned}$$

   Donc $u_{n+1} - u_n < 0$, dès que $n > \dfrac{1}{3}$, soit dès que $n \geq 1$.
   La suite (u_n) est donc strictement décroissante à partir du rang 1.

A titre d'exemple

Exemple 4

Enoncé :

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n = 5n^2 + 9n + 3$.

1. Calculer v_0, v_1 et v_2.
2. Écrire dans le cours le code Python à compléter, puis le saisir sur la plateforme Jupyter de façon à obtenir la liste des N premiers termes de la suite. Exécuter ce programme pour N=10.
3. Etudier les variations de (v_n).

Corrigé :
Pour tout entier naturel n, $v_n = f(n)$, où f est la fonction définie par $f(x) = 5x^2 + 9x + 3$. La suite (v_n) est définie de manière explicite.

1. Calcul de v_0, v_1 et v_2.
   - $v_0 = f(0) = 5 \times 0^2 + 9 \times 0 + 3 = 3$
   - $v_1 = f(1) = 5 \times 1^2 + 9 \times 1 + 3 = 17$
   - $v_2 = f(2) = 5 \times 2^2 + 9 \times 2 + 3 = 41$

2. Programmation en Python

Codage en Python

```
def f(x) :
    return 5*x**2+9*x+3

def suite_explicite(N) :
    l=[]
    for i in range(N) :
        l.append(f(i))
    return l
```

Exécution pour N=10 :
>>> **suite_explicite(10)**
[3, 17, 41, 75, 119, 173, 237, 311, 395, 489]

3. Etude des variations de (v_n).
   La fonction $f : x \mapsto 5x^2 + 9x + 3$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $f'(x) = 10x + 9$. $f'(x) > 0$ si, et seulement si $x > -\frac{9}{10}$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{9}{10}\right]$ et strictement croissante sur $\left[-\frac{9}{10}; +\infty\right[$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} 0 \leq n &< n+1 \\ f(n) &< f(n+1), \text{car la fonction est strictement croissante sur } [0; +\infty[\\ v_n &< v_{n+1} \\ v_{n+1} - v_n &> 0 \end{aligned}$$

   $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n > 0$, donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

d) Représentation graphique d'une suite

Graphique 1 ▶ Représentation des termes d'une suite définie par récurrence

Soit (u_n) une suite définie par récurrence. Il existe donc un premier terme de rang n_0, noté u_{n_0}, et une fonction f, tels que :

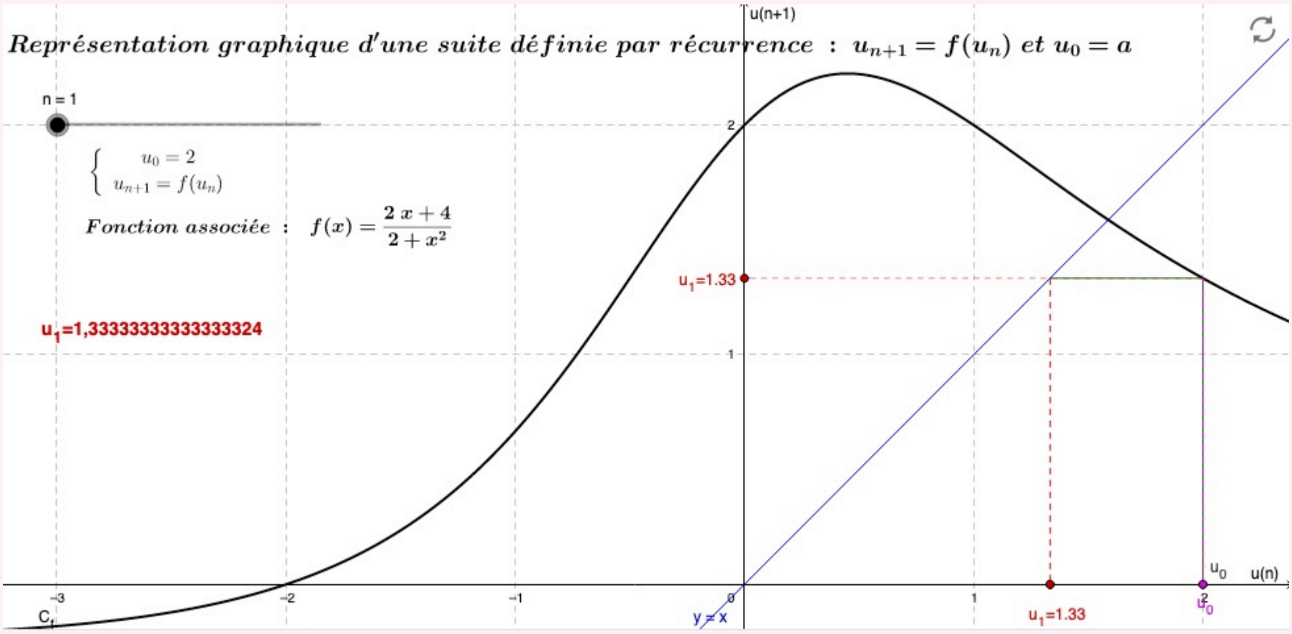
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

A l'aide de la courbe représentative de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$, on peut représenter chaque terme de la suite définie par récurrence par un point sur l'axe des abscisses.

Pour en avoir une illustration, observer l'animation sous Geogebra dans le cas où la suite (u_n) est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \quad u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 4}{2 + u_n^2} \end{cases}$$

Animation GeoGebra



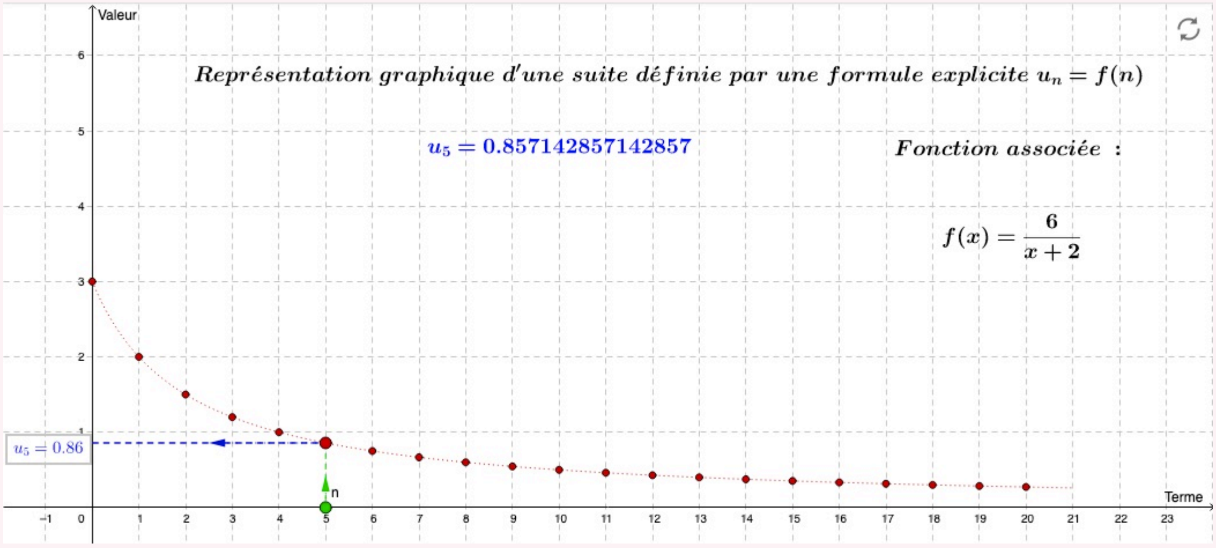
Graphique 2 ▶ Représentation des termes d'une suite définie explicitement

Soit n_0 un entier naturel, f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et a un réel ; on définit la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ par réccurence : $u_{n_0} = a$. Pour tout $n \geqslant n_0, u_{n+1} = f(u_n)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = f(n)$$

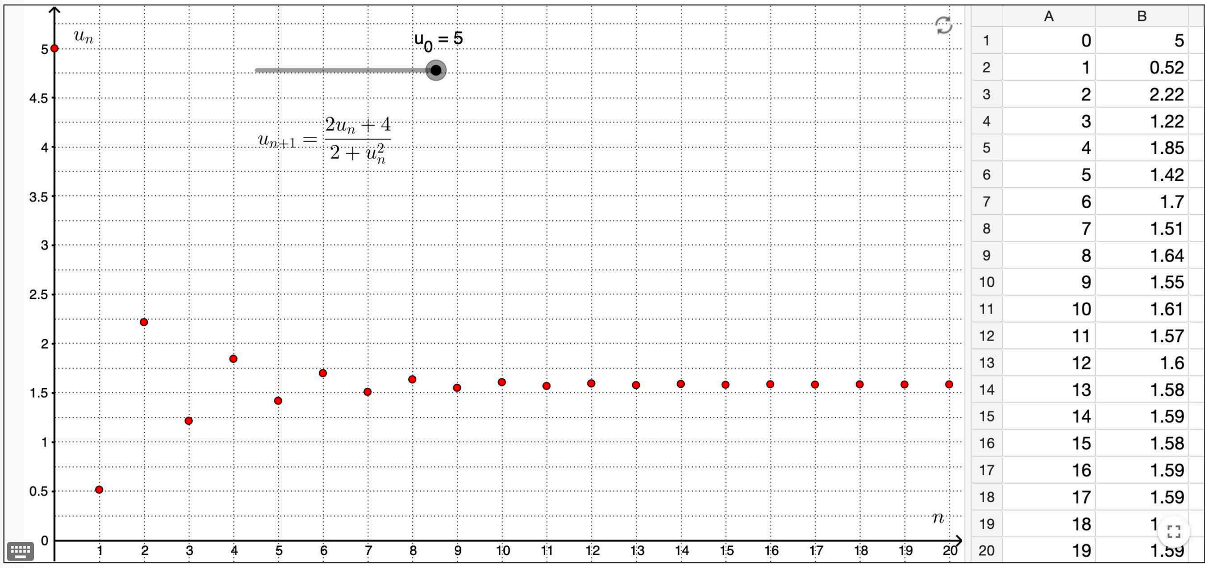
A l'aide de la courbe représentative de la fonction f, on peut représenter chaque terme de la suite définie explicitement par un point du plan de coordonnées $\left(n; \underbrace{f(n)}_{u_n}\right)$, comme illustré sur la figure dans le cas où la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par son terme général $u_n = \dfrac{6}{n+2}$.

Figure animée



Graphique 3 ► Représentation graphique avec un tableur

La suite est définie par la relation de récurrence : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 4}{2 + u_n^2} \end{cases}$



	A	B
1	0	5
2	1	0.52
3	2	2.22
4	3	1.22
5	4	1.85
6	5	1.42
7	6	1.7
8	7	1.51
9	8	1.64
10	9	1.55
11	10	1.61
12	11	1.57
13	12	1.6
14	13	1.58
15	14	1.59
16	15	1.58
17	16	1.59
18	17	1.59
19	18	[illegible]
20	19	1.59

La colonne A contient le rang n de chacun des termes de la suite, la colonne B les termes u_n de la suite. Les points représentés ont pour coordonnées (n, u_n).
Ci-joint un lien vers la page dynamique du graphique ci-dessous.

Graphique dynamique

3. Suites arithmétiques

a) Exemples

A titre d'exemple

Exemple 5 : on commence à -4 et on passe d'un terme au suivant en ajoutant la même valeur 1. $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$
Exemple 6 : on commence à 5,7 et on passe d'un terme au suivant en ajoutant la même valeur -0,5. $\{5.7, 5.2, 4.7, 4.2, 3.7, 3.2, 2.7, 2.2, \ldots\}$

b) Relation par récurrence

Définition 5 ▶ relation de récurrence

Une suite est **arithmétique** si chaque terme se déduit du précédent en lui ajoutant un nombre constant, appelé raison qui est notée r. On commence au rang n_0. Notons a la valeur du premier terme.

$$\begin{cases} u_{n_0} = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \quad u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

Définition 6 ▶ relation de récurrence et relation fontionnelle associée

Soit n_0 un nombre entier.
La relation de récurrence d'une suite arithmétique peut s'exprimer à l'aide d'une fonction affine. Cette fonction permet le passage d'un terme de la suite au terme suivant.

$$\begin{cases} u_{n_0} \\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \quad u_{n+1} = f(u_n) \text{ où } f : x \mapsto x + r \end{cases}$$

Recherche

Exercice 5 : En reprenant les deux exemples précédents, déterminer le premier terme de chaque suite, la relation de récurrence, puis la fonction f qui leur est associée.

Exemple 5

Exemple 6

Entraînement Labomep

Exercice 6 : Identifier une suite arithmétique

A titre d'exemple ▶ Générer une suite avec GeoGebra

Exemple 7 :

La suite arithmétique est définie par la relation de récurrence $\begin{cases} u_0 = -4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$

Les instructions : IterationListe(<Expression>, <Variables>, <Valeurs départ>, <Nombre>)

$\left[\begin{array}{l} f(x) := x+1 \\ \text{IterationListe}(f, -4, 10) \end{array}\right.$ affichent $\boxed{\text{liste1} = \underbrace{\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}}_{\text{10 valeurs calculées à partir de } -4}}$

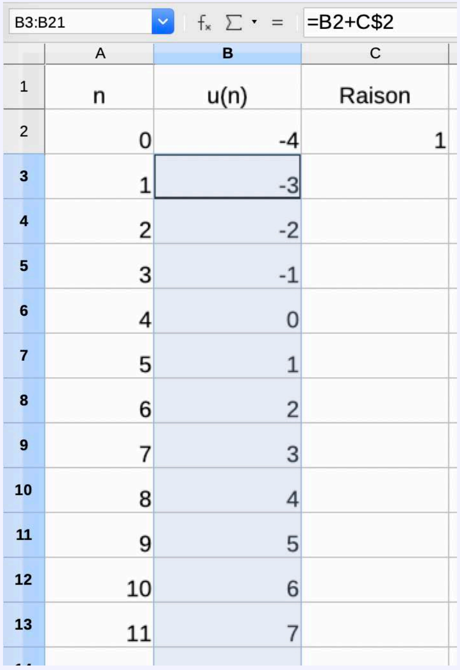
Exemple 8 :

La suite arithmétique est définie par la relation de récurrence $\begin{cases} u_1 = 5,7 \\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, u_{n+1} = u_n - 0,5 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} g(x) := x-0.5 \\ \text{IterationListe}(g, 5.7, 8) \end{array}\right.$ affichent $\boxed{\text{liste2} = \underbrace{\{5.7,5.2,4.7,4.2,3.7,3.2,2.7,2.2\}}_{\text{8 valeurs calculées à partir de } 5.7}}$

A titre d'exemple ▶ Génération d'une suite avec un tableur

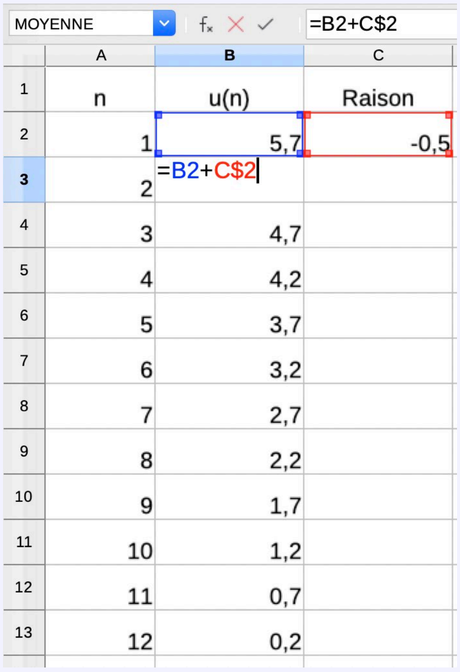
Exemple 9 :
La suite arithmétique est définie par la relation de récurrence $\begin{cases} u_0 = -4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$
Les cellules A1, B1 et C1 sont étiquetées par n, u_n et Raison.
On saisit en A2 la valeur 0 et on étire vers le bas pour obtenir la première colonne.
Dans la cellule B2 on entre la valeur de u_0 c'est-à-dire le nombre -4.
Dans la cellule C2 on entre la valeur de la raison qui vaut 1.
Pour obtenir les éléments de la suite (u_n), on saisit dans la cellule B3, l'instruction $\boxed{\text{=B2+C\$2}}$, ce qui indique que pour obtenir le terme suivant de la suite, on ajoute au terme précédent contenu dans B2 la raison contenue dans C2. On bloque cette dernière cellule à l'aide du symbole \$. Il suffit ensuite d'étirer la cellule B3 vers le bas pour générer la suite.



B3:B21 =B2+C$2

	A	B	C
1	n	u(n)	Raison
2	0	-4	1
3	1	-3	
4	2	-2	
5	3	-1	
6	4	0	
7	5	1	
8	6	2	
9	7	3	
10	8	4	
11	9	5	
12	10	6	
13	11	7	

Exemple 10 :
La suite arithmétique est définie par la relation de récurrence $\begin{cases} u_1 = 5.7 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - 0.5 \end{cases}$
Les cellules A1, B1 et C1 sont étiquetées par n, u_n et Raison.
On saisit en A2 la valeur 1 et on étire vers le bas pour obtenir la première colonne. Dans la cellule B2 on entre la valeur de u_1 c'est-à-dire le nombre 5,7.
Dans la cellule C2 on entre la valeur de la raison qui vaut -0,5.
Pour obtenir les éléments de la suite (u_n), on saisit dans la cellule B3, l'instruction $\boxed{\text{=B2+C\$2}}$, ce qui indique que pour obtenir le terme suivant de la suite, on ajoute au terme précédent contenu dans B2 la raison contenue dans C2. On bloque cette dernière cellule à l'aide du symbole \$. Il suffit ensuite d'étirer la cellule B3 vers le bas pour générer la suite.



MOYENNE =B2+C$2

	A	B	C
1	n	u(n)	Raison
2	1	5,7	-0,5
3	2	=B2+C$2	
4	3	4,7	
5	4	4,2	
6	5	3,7	
7	6	3,2	
8	7	2,7	
9	8	2,2	
10	9	1,7	
11	10	1,2	
12	11	0,7	
13	12	0,2	

Algorithme et Python 1 ▶ Génération d'une suite arithmétique

On souhaite générer un nombre entier N de valeurs d'une suite arithmétique définie par récurrence.

Algorithme :
On saisit le premier terme u.
On saisit la raison r.
On saisit N.
ℓ est une liste vide
Pour I allant de 1 à N
On ajoute u dans la liste ℓ
$u \leftarrow u + r$
Fin du Pour

Programme en Python (Jupyter) :
Dans une liste vide, on va entrer un à un les N termes de la suite.

Codage en Python

```
def suitearithm(u,r,N) :
# u est le premier terme
# r est la raison
# N est le nombre de termes
#création d'une liste vide
    l=[]
    for i in range(N) :
        l.append(u)
        u=u+r
    return l
```

Une fois exécuté avec les valeurs des exemples 1 et 2, le programme donne :

>>> **suitearithm(-4,1,10)**
$[-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5]$
>>> **suitearithm(5.7,-0.5,8)**
$[5.7, 5.2, 4.7, 4.2, 3.7, 3.2, 2.7, 2.2]$

c) Relation explicite

Propriété 2 ▸ relation explicite

Relation explicite pour une suite arithmétique : soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite arithmétique de raison r.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 + (n-1)r$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_2 + (n-2)r$.
- etc...

Plus généralement, on a la formule importante suivante :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, u_n = u_p + (n-p)r.}$$

On peut alors, à l'aide de la forme explicite, calculer facilement les termes de chaque rang de la suite (u_n).

A titre d'exemple

Exemple 11 :

La suite arithmétique est définie par la relation de récurrence $\begin{cases} u_0 = -4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$

Sa forme explicite est donc :

$$\begin{aligned} u_n &= \underbrace{u_0}_{-4} + n \underbrace{r}_{1} \\ &= -4 + n \\ &= n - 4 \end{aligned}$$

Calculons par exemple le 11ème terme de la suite (u_n). Comme le premier terme est u_0, alors le le 11ème terme est u_{10}.

$$\boxed{u_{10} = 10 - 4 = 6}$$

Exemple 12 :

La suite arithmétique est définie par la relation de récurrence $\begin{cases} u_1 = 5,7 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - 0,5 \end{cases}$

Sa forme explicite est donc :

$$\begin{aligned} u_n &= \underbrace{u_1}_{5,7} + (n-1) \underbrace{r}_{-0,5} \\ &= 5,7 + (n-1) \times (-0,5) \\ &= 5,7 - 0,5n + 0,5 \\ &= 6,2 - 0,5n \\ &= -0,5n + 6,2 \end{aligned}$$

Calculons par exemple le 7ème terme de la suite (u_n). Comme le premier terme est u_1, alors le le 7ème terme est u_7.

$$\boxed{u_7 = -0,5 \times 7 + 6,2 = 2,7}$$

Entraînement Labomep ► Suites arithmétiques

Exercice 7 : Terme général d'une suite arithmétique
Exercice 8 : Nature et terme général d'une suite arithmétique
Exercice 9 : Nature, terme général et calcul d'un terme d'une suite arithmétique

Exercice 7 **Exercice 8** **Exercice 9**

Recherche

Exercice 10 : Savoir déterminer la raison et le premier terme de la suite arithmétique connaissant deux de ses éléments et leur rang associé.

Déterminer la raison et le premier terme de la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} u_5 = 7 \\ u_9 = 19 \end{cases}$

Pour vous aider, une vidéo d'Yvan Monka.

Exercice 11 : Savoir déterminer le nombre de termes d'une suite d'éléments d'un ensemble fini qui suivent une progression arithmétique.
Déterminer le nombre de termes de l'ensemble suivant : $E = \{117, 124, 131, 138, \dots, 551, 558, 565\}$.
Pour vous aider, cette vidéo.

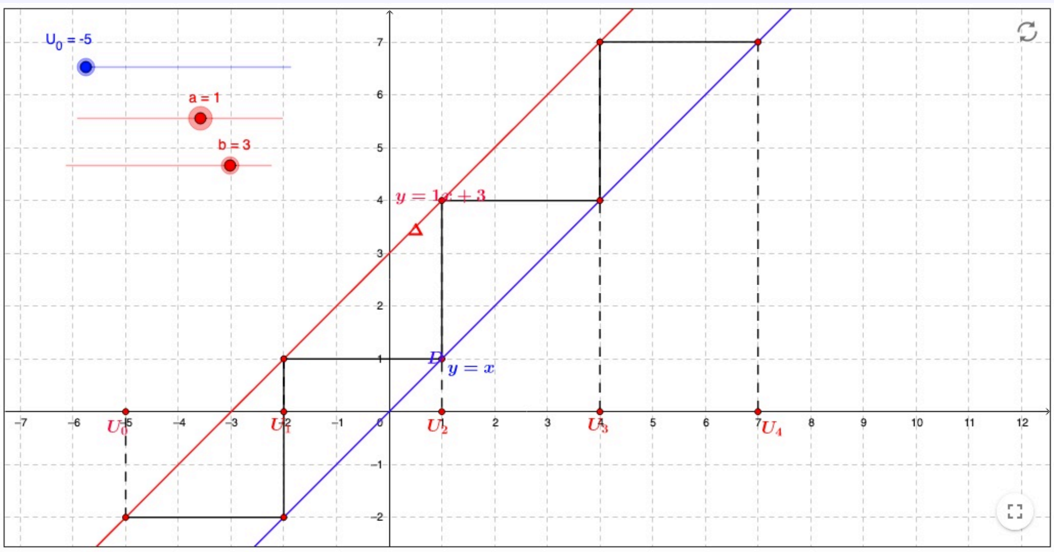
Exercice 10 **Exercice 11**

d) Représentation graphique

A partir de la relation de récurrence

A titre d'exemple

Exemple 13 : Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ la suite arithmétique définie par $\begin{cases} u_0 = -5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$



Les éléments de la suite apparaissent sur l'axe des abscisses.
Représenter graphiquement la suite en lien avec l'exemple 1 en vous aidant de ce lien ou du QR code .

A partir de la relation explicite

Il est plus facile de travailler avec une suite exprimée sous la forme explicite. **La représentation graphique d'une suite arithmétique est un alignement de points**. Voilà comment l'obtenir avec différentes applications.

A titre d'exemple ▶ Avec Geogebra

Exemple 14 : On saisie dans la ligne dédiée de GeoGebra l'instruction :

Séquence(< Expression e >, < Variable k >, < de a >, < à b >, < pas p >)

Reprenons la suite définie dans **l'exemple 9**.

Dans cet exemple, la forme explicite du terme général est donnée par :

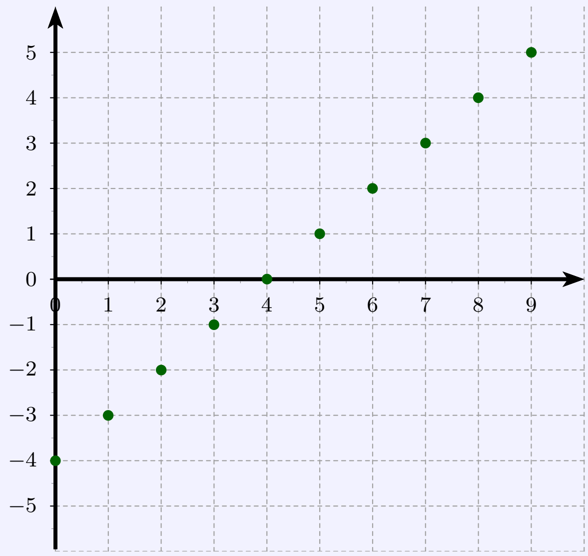
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n - 4.$$

Dans la ligne de saisie on écrit :
$L = \text{séquence}((k, k-4), k, 0, 9, 1)$.

On obtient alors une représentation graphique des éléments de la suite avec l'ensemble des 10 points d'abscisse k et d'ordonnée u_k pour $k \in [\![0, 9]\!]$.

Mais si dans la ligne de saisie on écrit :
$L = \text{séquence}(k-4, k, 0, 9, 1)$, on obtient la suite des éléments :

liste1 $= \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$



A titre d'exemple ▶ Avec Xcas

Exemple 15 : reprenons la suite définie dans **l'exemple 10**.

1 `u(n):=-0.5*n+6.2 // Forme explicite de la suite`

$$n \to -0.5 \cdot n + 6.2$$

2 `x_n:=seq(n,n,0,9) // les abscisses x_n des 10 points`

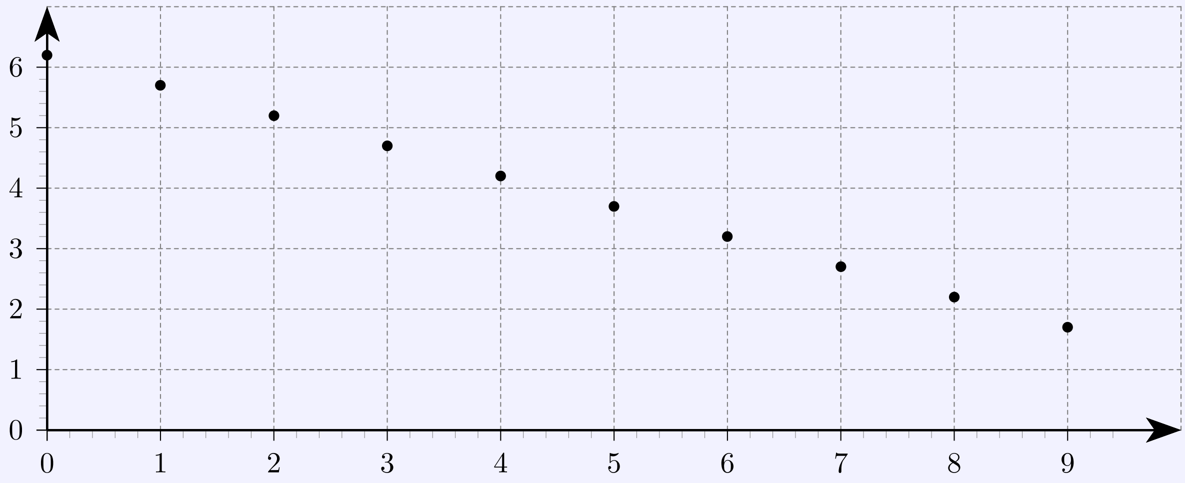
$$[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$$

3 `u_n:=seq(u(n),n,0,9) // les valeurs des termes de la suite (u_n)`

$$[6.2, 5.7, 5.2, 4.7, 4.2, 3.7, 3.2, 2.7, 2.2, 1.7]$$

4 `scatterplot(x_n,u_n) // placement des points de coordonnées (x_n,u_n)`

8



e) Sens de variation d'une suite arithmétique

Propriété 3 ▸ variations d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Si $r < 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r = 0$, la suite (u_n) est constante et est toujours égale à son premier terme.
- Si $r > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante.

Recherche

Exercice 12 : Déterminer le sens de variation des suites définies ci-dessous.

- $(u_n)_{n\geqslant 0}$ arithmétique de premier terme -5 et de raison 2,5.
- $(u_n)_{n\geqslant 0}$ arithmétique de premier terme $2,5$ et de raison -5.

f) Somme finie des éléments d'une suite arithmétique

Recherche

Exercice 13 : Calculer la somme $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$.

Exercice 14 : Calculer la somme $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$, pour tout entier naturel n.

Pour vous aider, une vidéo d'Yvan Monka .

Propriété 4 ▶ Somme finie

La somme de plusieurs termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par la formule :

$$S = (\text{nombre de termes}) \times \left[\frac{(1^{\text{er}}\ \text{terme}) + (\text{dernier terme})}{2}\right]$$

A titre d'exemple

Exemple 16 : soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite arithmétique de premier terme -5 et de raison 3. On a alors :

$u_1 = -2$; $u_2 = 1$; $u_3 = 4$; $u_4 = 7$; $u_5 = 10$; $u_6 = 13$; etc.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_2 + 3(n-2) = 1 + 3n - 6$; on obtient donc $u_n = -5 + 3n$, d'où sa forme explicite : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3n - 5$.

Rappel sur la notation "somme" : $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$

On souhaite calculer $\sum_{i=0}^{24} u_i$:

- C'est la somme des 25 premiers termes ;
- le premier terme est $u_0 = -5$ et le dernier terme est $u_{24} = -5 + 3 \times 24 = 67$

$$\text{Ainsi } \sum_{i=0}^{24} u_i = 25 \times \left(\frac{-5+67}{2}\right) = 775.$$

On souhaite calculer $\sum_{i=13}^{51} u_i$:

- C'est la somme de 39 termes ;
- le premier terme est $u_{13} = -5+3\times 13 = 34$ et le dernier terme est $u_{51} = -5+3\times 51 = 148$

$$\text{Ainsi : } \sum_{i=13}^{51} u_i = 39 \times \left(\frac{34+148}{2}\right) = 3\ 549.$$

Entraînement Labomep ▶ Somme des termes d'une suite arithmétique

Exercice 15 : Somme des termes d'une suite arithmétique

Algorithme et Python 2 ▶ Somme finie des termes d'une suite arithmétique

On souhaite effectuer la somme de N termes d'une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_k. On renseigne le premier terme u_k, la raison r et le nombre de termes N consécutifs à sommer.

Algorithme :

$S \leftarrow 0$
Pour I allant de 0 à N-1
    $S \leftarrow S + u$
    $u \leftarrow u + r$
Fin du Pour

Programme en Python (Jupyter) :

Codage en Python

```
def sommearithm(u,r,N) :
# u est le premier terme
# r est la raison
# N est le nombre de termes
    S=0 # initialisation de la somme à 0
    for i in range(N) :
        S=S+u
        u=u+r
    return S
```

La somme des 100 premiers nombres entiers naturels non nuls vaut 5050.
Celle des 50 termes consécutifs de la suite arithmétique de raison 2 et dont le premier terme est -10 vaut 1950.

```
>>> sommearithm(1,1,100)
5050
>>> sommearithm(-10,2,50)
1950
```

4. Suites géométriques

a) Exemples

A titre d'exemple

Exemple 17 : on commence à 2 et on passe d'un terme au suivant en multipliant par la même valeur : 3. $\{2, 6, 18, 54, 162, 486, 1\,458, 4\,374, \ldots\}$
Exemple 18 : on commence à 5 et on passe d'un terme au suivant en multipliant par la même valeur : $\frac{1}{2}$. $\{5, 2.5, 1.25, 0.625, 0{,}312\,5, 0{,}156\,25, 0{,}078\,125, 0{,}039\,062\,5, 0{,}019\,531\,25, \ldots\}$

b) Relation de récurrence

Définition 7 ▶ relation de récurrence

Une suite est **géométrique** si chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par un nombre constant appelé raison qui est notée q. On commence au rang n_0. Notons a la valeur du premier terme.

$$\begin{cases} u_{n_0} = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \quad u_{n+1} = u_n \times q \end{cases}$$

Définition 8 ▶ relation de récurrence et relation fonctionnelle associée

La relation de récurrence d'une suite géométrique peut aussi d'exprimer à l'aide d'une fonction linéaire. Cette fonction permet le passage d'un terme de la suite au terme suivant.

$$\begin{cases} u_{n_0} = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \quad u_{n+1} = f(u_n) \text{ où } f : x \mapsto q \times x \end{cases}$$

Recherche

Exercice 16 : En reprenant les deux exemples précédents, déterminer le premier terme de chaque suite, la relation de récurrence, puis la fonction f qui leur est associée.

Exemple 17 :

Exemple 18 :

Entraînement Labomep

Exercice 17 : Identifier une suite géométrique

A titre d'exemple ▶ Génération d'une suite, définie par récurrence, avec GeoGebra

Exemple 19 : La suite géométrique est définie par la relation de récurrence $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$

Les instructions : ItérationListe(<Expression>, <Variables>, <Valeurs départ>, <Nombre>)

$\left[\begin{array}{l} f(x) := 3x \\ \text{IterationListe}(f, 2, 10) \end{array}\right.$ affichent $\boxed{\text{liste1} = \underbrace{\{2, 6, 18, 54, 162, 486, 1\,458, 4\,374, 13\,122, 39\,366\}}_{\text{10 valeurs calculées à partir de 2}}}$

Exemple 20 :

La suite géométrique est définie par la relation de récurrence $\begin{cases} u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, u_{n+1} = 0.5u_n \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} g(x) := 0.5 * x \\ \text{IterationListe}(g, 5, 8) \end{array}\right.$ affichent $\boxed{\text{liste2} = \underbrace{\{5, 2.5, 1.25, 0.625, 0{,}312\,5, 0{,}156\,25, 0{,}078\,125, 0{,}039\,062\,5\}}_{\text{8 valeurs calculées à partir de 5}}}$

A titre d'exemple ▶ Génération d'une suite, définie par récurrence, avec un tableur

On utilise le tableur de GeoGebra pour d'une part générer les éléments de la suite de **l'exemple 1** qui est définie par récurrence, puis pour représenter graphiquement la suite par un nuage de points.

Exemple 21 : Voir la vidéo

Exemple 22 : En vous inspirant de la vidéo ci-dessus, générer les éléments de la suite de **l'exemple 2**, puis représenter graphiquement la suite par un nuage de points.

Algorithme et Python 3 ▶ Génération d'une suite géométrique

On souhaite générer un nombre entier N de valeurs d'une suite géométrique définie par récurrence.

Algorithme :

On saisit le premier terme u.
On saisit la raison q
On saisit N
ℓ est une liste vide
Pour I allant de 1 à N
    On ajoute u dans la liste ℓ
$u \leftarrow q * u$
Fin du Pour

Programme en Python (Jupyter) :

Dans une liste vide, on va entrer un à un les N termes de la suite.

Codage en Python

```
def suitegeom(u,q,N) :
# u est le premier terme
# q est la raison
# N est le nombre de termes
#création d'une liste vide
    l=[]
    for i in range(N) :
        l.append(u)
        u=q*u
    return l
```

Une fois exécuté avec les valeurs des exemples 1 et 2, le programme donne :

```
>>> suitegeom(2,3,10)
[2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458, 4374, 13122, 39366]
>>> suitegeom(5,0.5,9)
[5, 2.5, 1.25, 0.625, 0.3125, 0.15625, 0.078125, 0.0390625, 0.01953125]
```

c) Relation explicite

Propriété 5 ▶ relation explicite

Relation explicite pour une suite géométrique : soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite géométrique de raison q.

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times q^n$.
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_1 \times q^{n-1}$.
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_2 \times q^{n-2}$.
- etc...

Plus généralement, on a la formule importante suivante :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, u_n = u_p \times q^{n-p}.}$$

La forme explicite permet l'obtention rapide des termes de chaque rang de la suite (u_n).

A titre d'exemple

Exemple 23 :

La suite géométrique est définie par la relation de récurrence $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3 \times u_n \end{cases}$

Sa forme explicite est donc :

$$\begin{aligned} u_n &= \underbrace{u_0}_{2} \times \underbrace{q^n}_{3^n} \\ &= 2 \times 3^n \end{aligned}$$

Calculons par exemple le 5ème terme de la suite (u_n). Comme le premier terme est u_0, alors le le 5ème terme est u_4.

$$\boxed{u_4 = 2 \times 3^4 = 162}$$

Exemple 24 :

La suite géométrique est définie par la relation de récurrence $\begin{cases} u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,5u_n \end{cases}$

Sa forme explicite est donc :

$$\begin{aligned} u_n &= \underbrace{u_1}_{5} \times \underbrace{q^{n-1}}_{0{,}5^{n-1}} \\ &= 5 \times 0,5^{n-1} \end{aligned}$$

Calculons par exemple le 7ème terme de la suite (u_n). Comme le premier terme est u_1, alors le le 7ème terme est u_7.

$$\boxed{u_7 = 5 \times 0,5^6 = 0{,}078125}$$

Entraînement Labomep

Exercice 18 : Nature, terme général et calcul d'un terme d'une suite géométrique
Exercice 19 : Terme général d'une suite géométrique

Exercice 18 **Exercice 19**

Recherche

Exercice 20 : Savoir déterminer la raison et le premier terme de la suite arithmétique connaissant deux de ses éléments et leur rang associé

Déterminer la raison et le premier terme de la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} u_7 = 16 \\ u_4 = 2 \end{cases}$

Pour vous aider, une vidéo d'Yvan Monka.

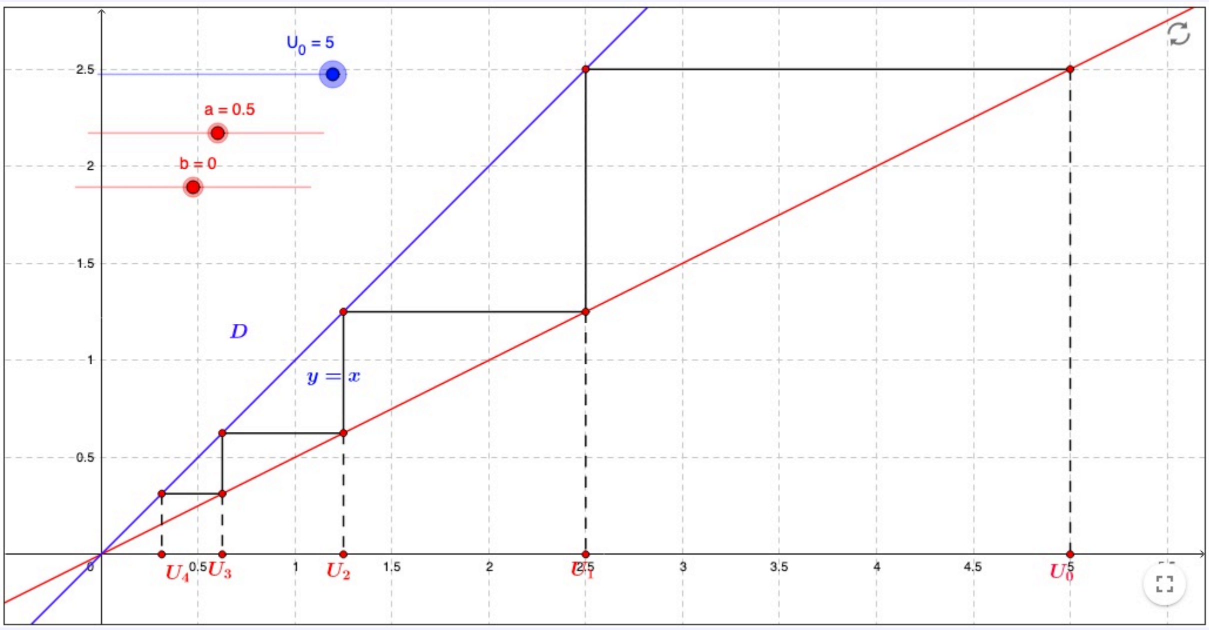
d) Représentation graphique

A partir de la relation de récurrence

A titre d'exemple ▶ Suite géométrique définie par récurrence et $0 < q < 1$

Exemple 25 :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0.5 * u_n \end{cases}$$



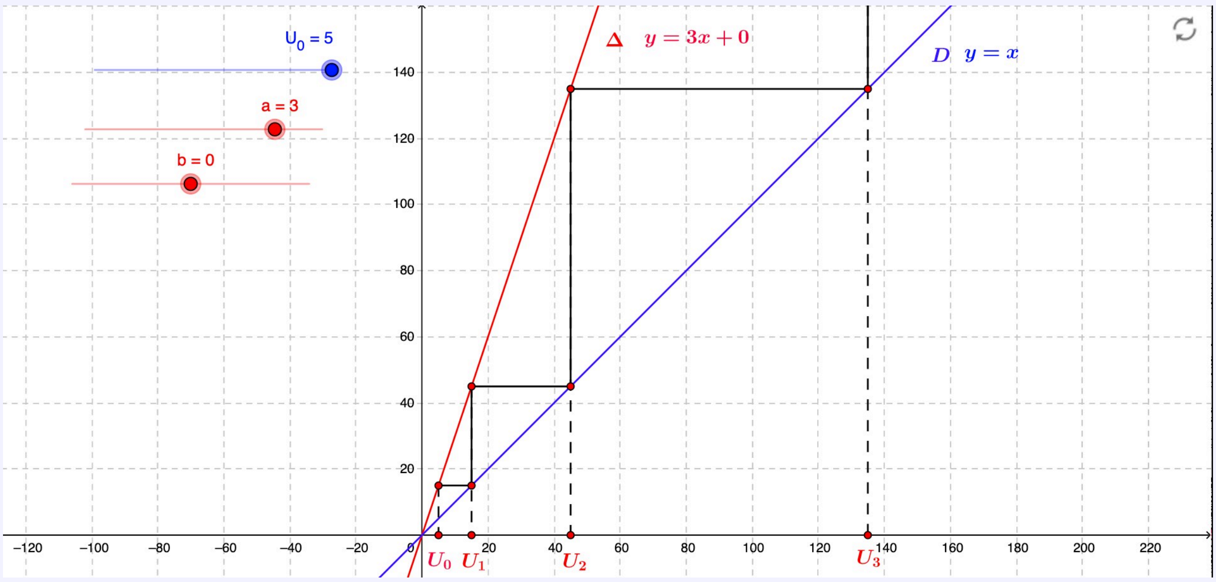
Les éléments de la suite apparaissent sur l'axe des abscisses.

Pour effectuer différentes simulations suivre le lien ou scanner le QR code ci-après.

A titre d'exemple ▶ Suite géométrique définie par récurrence et $q > 1$

Exemple 26 :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3 * u_n \end{cases}$$



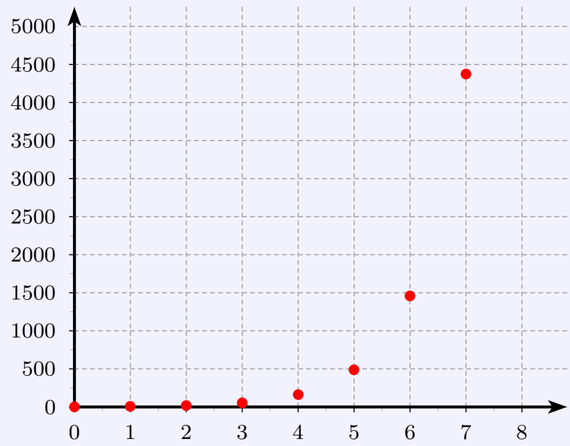
A partir de la relation explicite

A titre d'exemple 1 ▶ Avec GeoGebra

Exercice 21 : soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite géométrique définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3 \times u_n \end{cases}$

Rappelons la forme explicite du terme général : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 \times 3^n$.

Dans la ligne de saisie on écrit :
$L = \text{séquence}((k, 2 * 3^k), 0, 7)$.
On obtient alors une représentation graphique des éléments de la suite avec l'ensemble des 8 points d'abscisse k et d'ordonnée u_k pour $k \in [\![0, 7]\!]$.



Mais si dans la ligne de saisie on écrit :
$L = \text{séquence}(2 * 3^k, k, 0, 7)$, on obtient les 8 premiers éléments de la suite :

liste1 $= \{2, 6, 18, 54, 162, 486, 1\,458, 4\,374\}$

A titre d'exemple ▶ Avec Xcas

Exercice 22 : soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite géométrique définie par $\begin{cases} u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0.5 * u_n \end{cases}$

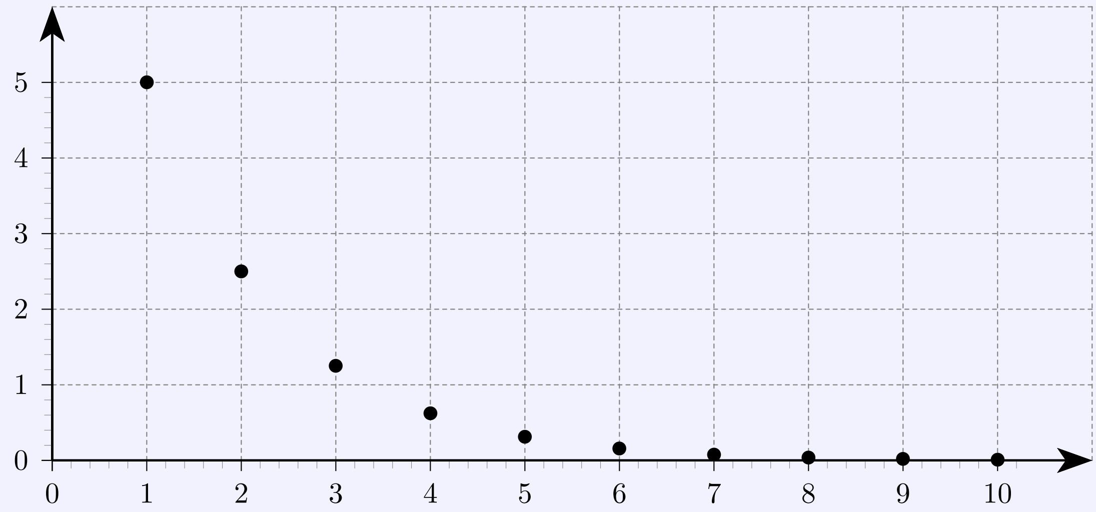
```
1 n_k:=seq(k,k,1,10) // Liste des indices n de la suite (abscisses des points)
```

$$[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]$$

2 `u_k:=seq(5*0.5^(k-1),k,1,10) // liste des termes u(k) de la suite (ordonnées des points)`

$$[5.0, 2.5, 1.25, 0.625, 0.3125, 0.15625, 0.078125, 0.0390625, 0.01953125, 0.009765625]$$

3 `scatterplot(n_k,u_k)`



e) Sens de variation d'une suite géométrique

Recherche

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison q, avec $q \neq 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n$$

Observer les variations de la suite (q^n) en faisant varier la raison q sur geogebra.

Voici le QR code associé au document geogebra :

Théorème 1 ▶ Variations de q^n

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison q, avec $q \neq 0$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n$$

- Si $q < 0$, alors la suite (q^n) n'est ni croissante, ni décroissante. On dit que la suite est alternée (le terme suivant un terme positif est négatif, et le terme suivant un terme négatif est positif).
- Si $0 < q < 1$, la suite (q^n) est strictement décroissante.
- Si $q = 1$, la suite (q^n) est constante et est toujours égale à son premier terme.

- Si $q > 1$, la suite (q^n) est strictement croissante.

Théorème 2 ▶ Variations de $u_k q^n$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_k et de raison q.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant k,\ u_n = u_k q^{n-k}$$

- **1er cas :** $u_k = 0$, alors la suite est identiquement nulle, c'est-à-dire que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq k, u_n = 0$.

- **2ème cas :** $u_k > 0$
  - Si $q < 0$ alors la suite (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante. On dit qu'elle est alternée.
  - Si $0 < q < 1$, la suite (u_n) est strictement décroissante.
  - Si $q = 1$, la suite (u_n) est constante et est égal à son premier terme.
  - Si $q > 1$, la suite (u_n) est strictement croissante.

- **3ème cas :** $u_k < 0$
  - Si $q < 0$ alors la suite (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante. On dit qu'elle est alternée.
  - Si $0 < q < 1$, la suite (u_n) est strictement croissante.
  - Si $q = 1$, la suite (u_n) est constante et est égal à son premier terme.
  - Si $q > 1$, la suite (u_n) est strictement décroissante.

Vous trouverez , ici, une vidéo d'Yvan Monka explicative mais vous pouvez aussi scanner le QR code.

Recherche

Exercice 23 : Déterminer le sens de variation des suites définies ci-dessous :

- $(u_n)_{n\geqslant 0}$ géométrique de premier terme $1,5$ et de raison 3.
- $(u_n)_{n\geqslant 0}$ géométrique de premier terme $1,5$ et de raison -2.
- $(u_n)_{n\geqslant 0}$ géométrique de premier terme -2 et de raison $1,5$.

f) Somme finie des éléments d'une suite géométrique

Propriété 6 ▶ Somme finie

La somme de plusieurs termes consécutifs d'une suite géométrique non constante (c'est-à-dire de raison $q \neq 1$) est donnée par la formule :

$$S = (\text{premier terme}) \times \left(\frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q} \right)$$

Corollaire 1

Pour tout entier naturel n et pour tout réel $q \neq 1$, on a :

$$S = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

On reconnaît une suite géométrique de premier terme 1 et de raison q.

A titre d'exemple

Exemple 27 : Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ la suite géométrique de premier terme 128 et de raison $\frac{1}{4}$. On a alors :

$u_1 = 32$; $u_2 = 8$; $u_3 = 2$; $u_4 = \frac{1}{2}$; $u_5 = \frac{1}{8}$; $u_6 = \frac{1}{32}$; etc.

Forme explicite :
On peut utiliser la formule :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n = 128 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{128}{4^n}$, ou la formule :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 32 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{32}{4^{n-1}}$; en multipliant numérateur et dénominateur par 4, on retrouve la formule $\frac{128}{4^n}$.

Calcul de différentes sommes :

- On souhaite calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{24} u_i$:
  - C'est la somme de 25 termes ;
  - le premier terme est $u_0 = 128$.

- Calcul de la somme :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{24} u_i &= 128 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{25}}{1-\frac{1}{4}}\\ &= 128 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{25}}{\frac{3}{4}}\\ &= 128 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{25}}{\frac{3}{4}}\\ &= 128 \times \frac{4}{3} \times \left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{25}\right]\\ &= \frac{512}{3} \simeq 170.67\end{aligned}$$

- On souhaite calculer $\sum_{i=13}^{51} u_i$:
  - C'est la somme de 39 termes ;
  - le premier terme est $u_{13} = 128 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{13}$.
  - $\sum_{i=13}^{51} u_i = 128 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{13} \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{39}}{1-\frac{1}{4}} \simeq 2.5 \times 10^{-6}$.

Entraînement Labomep

Exercice 24 : Somme des termes d'une suite géométrique

Exercice 24

Recherche

Exercice 25 : Déterminer $\mathrm{S} = \sum_{i=1}^{13} 3^i$. Pour vous aider, vous pouvez suivre ce lien.

Exercice 26 : Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ la suite géométrique de premier terme 18 et de raison 1,1.

Donner sa relation explicite, puis calculer $\sum_{i=5}^{30} v_i$.

Exercice 25

Algorithme et Python 4 ▶ Somme finie des termes d'une suite géométrique

On souhaite effectuer la somme de N termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme u_k. On renseigne le premier terme u_k, la raison q et le nombre de termes N consécutifs à sommer.

Algorithme :

$S \leftarrow 0$
Pour I allant de 0 à N-1
    $S \leftarrow S + u$
    $u \leftarrow q \times u$
Fin du Pour

Programme en Python (Jupyter) :

Codage en Python

```
def sommegeom(u,q,N) :
# u est le premier terme
# q est la raison
# N est le nombre de termes
    S=0 # initialisation de la somme à 0
    for i in range(N) :
        S=S+u
        u=q*u
    return S
```

Exécution du programme avec les sommes de l'exemple précédent.

```
>>> sommegeom(128,0.25,25)
170.6666666666666
>>> sommegeom(128*0.25**13,0.25,39)
2.5431315104166665e-06
```

5. Raisonnement par récurrence

a) Le principe de récurrence

Les suites sont souvent définies par une relation de récurrence.
Lorsqu'on étudie une suite on s'intéresse souvent à :

- déterminer sa forme explicite lorsqu'elle existe,
- démontrer, le cas échéant, sa monotonie,
- démontrer, le cas échéant, qu'elle est minorée, majorée ou/et bornée.

Ne connaissant d'une suite que son premier terme et sa forme récurrente, c'est-à-dire la formule qui permet de passer d'un terme au suivant, pour démontrer une propriété sur la suite, il sera nécessaire et suffisant de :

1. montrer que la propriété est vraie au moins une fois,
2. montrer que si la propriété est vraie à un rang quelconque k, alors elle le sera au rang suivant $(k+1)$.

Ces deux étapes constituent **le principe de récurrence**. Il s'articule en deux raisonnements bien distincts.

Axiome 1 ► Principe de récurrence

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.
Soit $\mathrm{P}(n)$ une propriété portant sur un entier n tel que $n \geqslant n_0$, dont on sait pas, a priori, si elle est vraie ou fausse.

Pour que $\mathrm{P}(n)$ soit vraie pour tout entier n tel que $n \geqslant n_0$, **il faut et il suffit que l'on ait** :

- **Initialisation :** $\mathrm{P}(n_0)$ vraie ;
- **Hérédité :** Pour tout entier n tel que $k \geqslant n_0$

  Si $\mathrm{P}(k)$ est vraie, alors $\mathrm{P}(k+1)$ est vraie

b) Exercices et exemples

Entraînement Labomep

Exercice 26 : Démontrer une égalité par récurrence.

Exercice 26

Recherche

Exercice 27 : détermination d'une forme explicite

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (n+1)^2$.

Pour une correction, suivre la vidéo d'Yvan Monka

Exercice 28 : détermination d'une forme explicite

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par : $\begin{cases} a_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = 2a_n - 7 \end{cases}$

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 7 - 3 \times 2^n$.

Exercice 29 : variation et importance de l'initialisation

1. Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par :
   $\begin{cases} v_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n + 3 \end{cases}$

   Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

2. Soit $(w_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par :
   $\begin{cases} w_0 = -5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = \frac{1}{5}w_n + 3 \end{cases}$

   Montrer que la suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

Exercice 27

A titre d'exemple ▶ une inégalité importante, l'inégalité de Bernoulli

Exemple 28 : démontrer par récurrence que pour tout nombre réel $\alpha > 0$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$$

Démonstration : Soit α un nombre réel strictement positif. Soit $n \in \mathbb{N}$; on définit la propriété $\mathrm{P}(n)$:

$$(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$$

On cherche à démontrer l'inégalité entre les deux membres.

1. **Initialisation :**
   $n = 0$; montrons que $\mathrm{P}(0)$ est vraie.

   $\left.\begin{array}{ll} \text{D'une part :} & (1+\alpha)^0 = 1 \\ \text{D'autre part :} & 1 + 0 \times \alpha = 1 \end{array}\right\} (1+\alpha)^0 \geqslant 1 + 0 \times \alpha$, donc $\mathrm{P}(0)$ est vraie.

2. **Hérédité :**

Soit un entier $k \geqslant 0$.
On suppose que $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $(1+\alpha)^k \geqslant 1+k\alpha$.
Montrons que $\mathrm{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $(1+\alpha)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)\alpha$.

$$\begin{aligned}
(1+\alpha)^k &\geqslant 1+k\alpha \\
(1+\alpha)(1+\alpha)^k &\geqslant (1+k\alpha)(1+\alpha) \quad (\text{Car } \alpha > 0 \quad \text{, donc } 1+\alpha > 1 > 0\ ) \\
(1+\alpha)^{k+1} &\geqslant (1+k\alpha)(1+\alpha) \\
(1+\alpha)^{k+1} &\geqslant 1+\underbrace{k\alpha+\alpha}_{(k+1)\alpha}+k\alpha^2 \\
(1+\alpha)^{k+1} &\geqslant 1+(k+1)\alpha+\underbrace{k\alpha^2}_{>0} > 1+(k+1)\alpha \\
(1+\alpha)^{k+1} &\geqslant 1+(k+1)\alpha
\end{aligned}$$

On a montré que si $\mathrm{P}(k)$ est vraie, alors $\mathrm{P}(k+1)$ est vraie.

3. **Conclusion :**
La propriété est vraie au rang 0 (initialisation) et elle est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence :

Pour tout nombre réel $\alpha > 0$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha$$

Pour une autre explication, suivre la vidéo d'Yvan Monka ou scanner le QR code .

Vidéo Y.M..

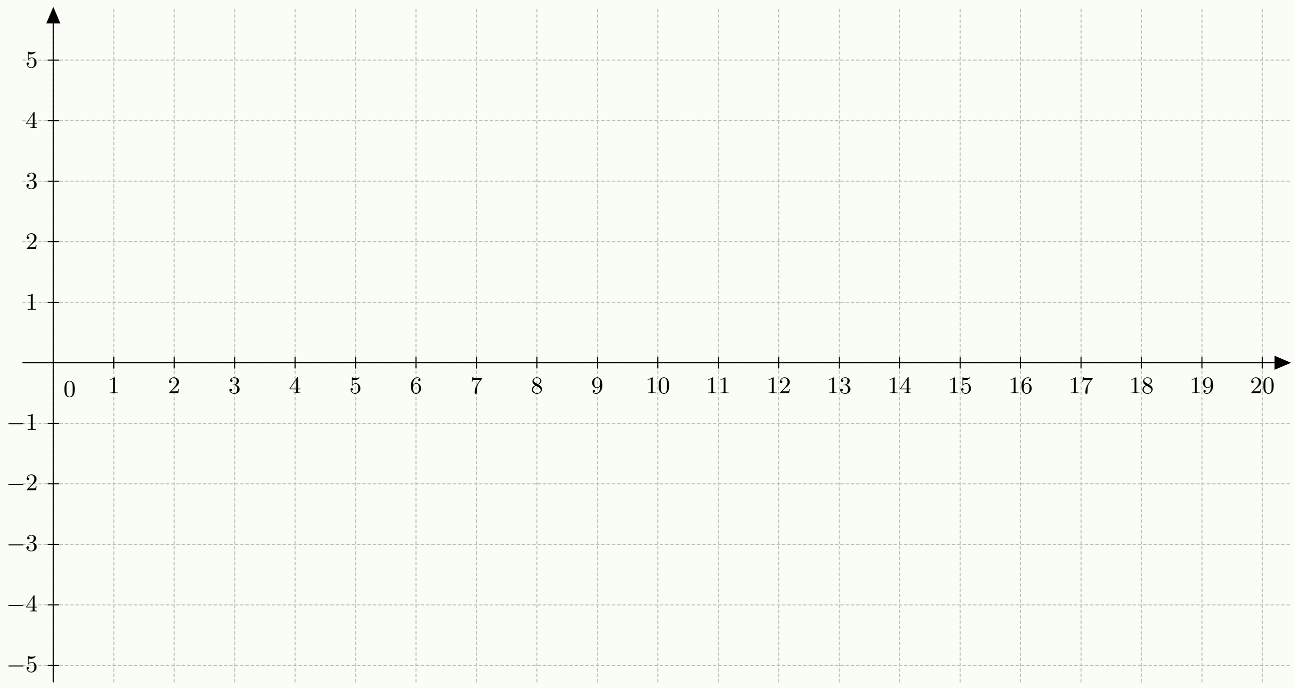
6. Limite finie ou infinie d'une suite

Recherche

On s'intéresse aux suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies ainsi :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1,2^n - 5$
- $\begin{cases} v_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ v_{n+1} = 0,6v_n - 1 \end{cases}$

A l'aide de la calculatrice, représenter graphiquement ces suites ci-dessous.



On s'intéresse au comportement à l'infini de ces suites, c'est-à-dire quand n tend vers $+\infty$. D'après ces graphiques et d'après les tableaux de valeurs, on peut conjecturer que :

- Si on se fixe n'importe quel nombre A, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ sont supérieurs à A.
  On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ a pour limite $+\infty$.
- Si on se fixe n'importe quel nombre a, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont compris entre $-2,5-a$ et $-2,5+a$.
  On dit que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ a pour limite $-2,5$.

A titre d'exemple

Deux animations permettent de comprendre la notion de limite de suite :

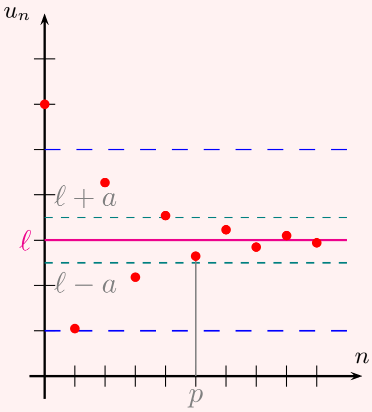
- 1er cas : dans le cas où la suite tend vers une limite finie.
- 2ème cas : dans le cas où la suite tend vers l'infini .

limite finie **limite infinie**

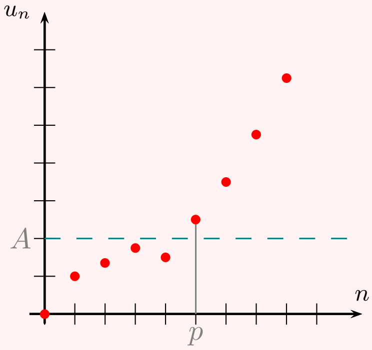
Définition 9 ▶ Convergence et divergence d'une suite à l'infini

Soit la suite (u_n). On s'intéresse à son comportement à l'infini, c'est-à-dire lorsque n tend vers $+\infty$. Trois cas se présentent :

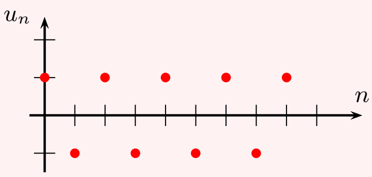
- 1$^{\text{er}}$ cas : la suite (u_n) admet une limite finie ℓ à l'infini. Si tout intervalle ouvert et centré sur ℓ (du type $]\ell - a\ ;\ \ell + a[$ avec $a > 0$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang alors on dit que la suite (u_n) **converge** vers le réel ℓ. On écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.
  Si une suite converge alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.
  Toute suite constante converge vers la valeur de la constante.
  Si une suite converge alors sa limite est unique.
  Si une suite ne converge pas elle est **divergente**.



- 2$^{\text{ème}}$ cas : la suite (u_n) admet une limite infinie. Si tout intervalle ouvert du type $]\mathrm{A}\ ;\ +\infty[$ (avec A un nombre réel) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang alors on dit que la suite (u_n) **diverge** vers $+\infty$. On écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
  Il en va de même pour une limite égale à $-\infty$, si tout intervalle ouvert du type $]-\infty\ ;\ \mathrm{A}[$ (avec A un nombre réel) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.



- 3$^{\text{ème}}$ cas : la suite (u_n) n'admet ni de limite finie, ni de limite infinie. On dit qu'elle n'a pas de limite. La suite est alors divergente. Par exemple la suite de terme général $(-1)^n$.



Propriété 7 ▶ limites de référence

Les suites de terme général $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n^k}$ (k entier naturel), $\frac{1}{\sqrt{n}}$ sont convergentes et leur limite est 0.
Les suites de terme général n, n^2, n^k (k entier naturel), $\sqrt{n}$ sont divergentes et leur limite est $+\infty$.

7. Opérations sur les limites

On considère deux suites (u_n) et (v_n) dont on connaît la limite lorsque n tend vers l'infini. On présente dans cette partie des résultats qui permettent d'établir les limites de $u_n + v_n$, $u_n v_n$ et $\frac{u_n}{v_n}$ à partir de celles de (u_n) et (v_n).
Les résultats sont intuitifs ; ils ne seront pas démontrés.
Dans certains cas, on ne peut pas prévoir la limite : on parle alors de forme indéterminée, notée **F.I.**. Pour autant, on apprendra à « lever » les indéterminations. *Dans ce qui suit, ℓ désigne un nombre réel.*

a) Multiplication par une constante

Propriété 8

Il suffit d'appliquer la règle des signes d'un produit.

- Si $k > 0$:

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (k \times u_n) =$	$k \times \ell$	$+\infty$	$-\infty$

- Si $k < 0$:

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (k \times u_n) =$	$k \times \ell$	$-\infty$	$+\infty$

b) Limite d'une somme de suites

Propriété 9

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Recherche ▶ $+\infty - \infty$

Exercice 28 : soient les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = n^2, \; v_n = 1 - n^2, \; w_n = 2 - n^2.$$

1. Déterminer les limites de u_n, v_n et de w_n.
2. Déterminer les limites de $u_n + v_n$ et de $u_n + w_n$.

c) Limite d'un produit de suites

Propriété 10

Le principe est là encore celui de la règle des signes d'un produit.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) =$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Recherche ▶ $\infty \times 0$

Exercice 29 : soient les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = 5n^2,\ v_n = 5n^3,\ w_n = \frac{1}{n^2}.$$

1. Déterminer les limites de u_n, v_n et de w_n.
2. Déterminer les limites de $u_n \times w_n$ et de $v_n \times w_n$.

d) Limite d'un quotient de suites

Propriété 11

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	∞	0
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$\ell' \neq 0$	∞	0	0	∞	0
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) =$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	∞ (Il faut étudier l'expression pour déterminer le signe.)	∞ (Il faut étudier l'expression pour déterminer le signe.)	F.I.	F.I.

On peut retenir facilement ces résultats en retenant les deux principes suivants :

- en limite, diviser par l'infini revient à multiplier par 0 ;
- en limite, diviser par 0 revient à multiplier par l'infini ;

puis en appliquant les résultats sur les limites d'un produit. Ainsi, le cas « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » se ramène au cas « $\infty \times 0$ », qui est une forme indéterminée.

Recherche

Exercice 30 : déterminer les limites des suites définies pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par :

$$u_n = n^2 + 4n + 1\ ;\ v_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)(-n+3)\ ;\ p_n = u_n v_n\ ;\ q_n = \frac{1}{u_n}$$

e) Formes indéterminées (F.I.)

On recense 4 situations de formes indéterminées que l'on peut résumer en : « $\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ ». Pour lever l'indétermination, il faut transformer l'écriture de l'expression pour se ramener à un des théorèmes généraux, par exemple en développant ou en factorisant.

Recherche

Exercice 31 : déterminer les limites des suites définies pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par :

$$u_n = 2\sqrt{n} - n \; ; \; v_n = \frac{n^2+3n}{3n^2+4} \; ; \; p_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(n+2) \; ; \; q_n = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}$$

8. Théorèmes sur les limites

Théorème 3 ▶ Théorème de comparaison à l'infini

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$.

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$;
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration du premier point :
Soit A un nombre réel, et $\mathrm{I} =]\mathrm{A} \; ; \; +\infty[$; $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ donc il existe un entier n_1 tel que $\forall n \geqslant n_1$, $u_n \in I$.
De plus à partir d'un certain rang n_2, $u_n \leqslant v_n$, c'est-à-dire que pour tout $n \geqslant n_2$, $u_n \leqslant v_n$.
Soit N un entier supérieur ou égal à n_1 et n_2 ; alors $\forall n \geqslant N$, $A < u_n$ et $u_n \leqslant v_n$.
Donc pour tout $n \geqslant N$, $A < v_n$ donc $v_n \in I$; par définition : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Recherche

Observer l'animation pour comprendre comment on peut déterminer la limite d'une suite lorsqu'elle est encadrée par deux suites convergentes vers une même limite.

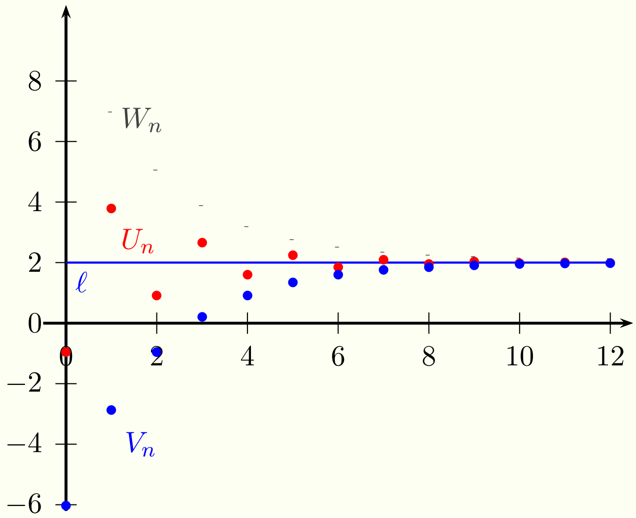
Animation

Théorème 4 ▶ Théorème des gendarmes (admis)

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que, à partir d'un certain rang,

$$v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$$

Si (v_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ.



A titre d'exemple ▶ Exercices corrigés d'Yvan Monka

Exercice 32 : théorème de comparaison sur les limites.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2+(-1)^n\right)$
Exercice 33 : théorème des gendarmes.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{\sin(n)}{n}\right)$

Exercice 32 **Exercice 33**

Entraînement Labomep

Exercice 34 : théorème de comparaison sur les limites.
Exercice 35 : théorème de comparaison et théorème des gendarmes.

Exercice 34 **Exercice 35**

Recherche

Exercice 36 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie ainsi : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1. \end{cases}$

1. Démontrer que cette suite est strictement croissante.
2. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > n$.
3. En déduire la limite de cette suite.
4. Ecrire un algorithme qui, pour un nombre A donné, détermine le plus petit rang n_0 tel que $u_{n_0} > \text{A}$.

   Le programmer en Python sur la plateforme Jupyter .

   On pourra s'inspirer de l'exercice du paragraphe précédent.

Exercice 37 : Déterminer les limites des suites définies pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par :

$$u_n = \frac{5 + (-1)^n}{n} \ ;\ v_n = \frac{n + \sin n}{n - \sin n}$$

Théorème 5 ▶ Comportement à l'infini de la suite géométrique (q^n) avec q réel

	$q \leqslant -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n =$				

Démonstration ▶ le cas où $q > 1$

Prérequis : $\forall \alpha > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$.

Soit $u_n = q^n$. Si $q > 1$, on peut poser $q = 1 + \alpha$ avec $\alpha > 0$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, on a alors $q^n = (1+\alpha)^n$.
D'après le prérequis $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$, donc $q^n \geqslant 1 + n\alpha$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + n\alpha = +\infty$ car $\alpha > 0$, donc, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Entraînement Labomep

Exercice 38 : Terme général et limite d'une suite arithmético-géométrique.

Recherche

Exercice 39 : Déterminer les limites des suites définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{2}{3^n}\ ;\ v_n = \frac{-3}{\sqrt{2}^n}\ ;\ w_n = \frac{(-3)^n}{5}\ ;\ p_n = 2^n - 3^n$$

9. Algorithme de seuil et programmation en Python

Lorsqu'une suite diverge vers $+\infty$, alors pour toute valeur de A, il existe un plus petit rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à A, ce qui s'écrit en langage symbolique :

$$\boxed{\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0, u_n \geqslant \mathrm{A}}$$

La détermination du rang n_0 à partir duquel les termes de la suite u_n dépasse le seuil A, peut s'obtenir à partir d'un algorithme, appelé originalement **algorithme de seuil**.

De manière analogue, lorsqu'une suite diverge vers $-\infty$, alors pour toute valeur de A, il existe un plus petit rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont inférieurs à A, ce qui s'écrit en langage symbolique :

$$\boxed{\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \,/\, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0, u_n \leqslant \mathrm{A}}$$

A titre d'exemple ► Vidéos d'Yvan Monka pour programmer un algorithme de seuil

- Programmer sous TI
- Programmer sous Casio
- Programmer en Python

TI Casio Python

Entraînement Labomep

Exercice 40 : savoir utiliser la calculatrice pour émettre des conjectures et déterminer n_0.
Exercice 41 : comprendre une boucle non bornée.
Exercice 42 : savoir programmer en Python un algorithme de seuil.
Exercice 43 : conjecturer des limites, programmer en python et déterminer un seuil à la calculatrice.

Exercice 40 **Exercice 41** **Exercice 42** **Exercice 43**

Recherche

Exercice 44 :
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par $u_n = 3n^2 + 5n + 2$.

1. Démontrer que cette suite est strictement croissante.
2. Démontrer que cette suite diverge vers $+\infty$.
3. On saisit une valeur A.
   Cet algorithme incomplet permet de déterminer, quel que soit la valeur A, le plus petit rang n_0 à partir duquel $u_{n_0} > A$. Cette valeur est la dernière stockée dans la variable n.
4. Compléter le programme en Python sur la plateforme Jupyter et le tester lorsque A= 10 000.

Compléter cet algorithme.

$n \longleftarrow \ldots\ldots$
$u \longleftarrow \ldots\ldots$
Tant que $u \ldots\ldots A$
  $n \longleftarrow n+1$
  $u \longleftarrow \ldots\ldots\ldots$
Fin Pour

Jupyter

10. Suites majorées, minorées et bornées

Définition 10 ▶ Suite minorée, majorée, bornée

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, s'il existe un réel M supérieur à tous les termes de la suite.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée si : $\exists\ M \in \mathbb{R}\ /\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, s'il existe un réel m inférieur à tous les termes de la suite.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée si : $\exists\ m \in \mathbb{R}\ /\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, si elle est minorée et majorée.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si : $\exists\ m \in \mathbb{R},\ \exists\ M \in \mathbb{R}\ /\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M$.

Recherche

Exercice 45 : soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = 3 + \frac{2}{n}$, démontrer que (u_n) est bornée.

A titre d'exemple

- ☐ Toute suite croissante est minorée par son premier terme : $u_n \geqslant u_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant u_2 \geqslant u_1 \geqslant u_0$.
- ☐ Toute suite décroissante est majorée par son premier terme : $u_n \leqslant u_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant u_2 \leqslant u_1 \leqslant u_0$.
- ☐ Les suites de terme général $u_n = n$, $u_n = n^2$ et $u_n = \sqrt{n}$ sont croissantes. Elles sont donc toutes minorées par leur premier termes u_0 , qui vaut 0. Mais ces suites, dont on a vu précédemment qu'elles divergeaient vers $+\infty$, ne sont pas majorées ; elles ne sont pas bornées.

- ☐ Les suites de terme général $u_n = \frac{1}{n}$, $u_n = \frac{1}{n^2}$ et $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ sont décroissantes. Elles sont donc toutes majorées par leur premier terme qui vaut $u_1 = 1$, car $n \in \mathbb{N}^*$.

  Ces suites sont toutes minorées par zéro. Elles sont donc bornées par 0 et 1.

- ☐ Les suites de terme général $\sin(n)$, $\cos(n)$ et $(-1)^n$ sont majorées par 1 et minorées par -1, donc elles sont bornées.

Propriété 12

Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Démonstration

Soit A un réel quelconque. La suite (u_n) n'est pas majorée, donc il existe au moins un entier p tel que : $u_p > A$. La suite (u_n) est croissante, donc pour tout entier $n \geqslant p$, $u_n > A$, ce qui justifie que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Propriété 13

Si une suite est croissante et admet pour limite ℓ, alors la suite est majorée par ℓ.

Démonstration

Pour démontrer ce résultat, on va réaliser un raisonnement par l'absurde, c'est-à-dire « prêcher le faux pour avoir le vrai ». Expliquons ce qu'est précisément un raisonnement par l'absurde :

Rappel à propos du raisonnement par l'absurde :
Pour établir qu'une proposition est vraie, on va démontrer que la proposition contraire débouche sur un résultat absurde. Autrement dit pour démontrer qu'une proposition A est vraie, on va supposer que la proposition A est une proposition fausse. Par une suite de déductions logiques, on arrivera à un résultat absurde (comme par exemple $1 = 0$) ; on pourra alors conclure que l'hypothèse de départ est fausse, c'est-à-dire que la proposition « A est fausse » est fausse. On aura alors prouvé que la proposition A est vraie.

Soit (u_n) une suite croissante qui admet une limite finie ℓ.

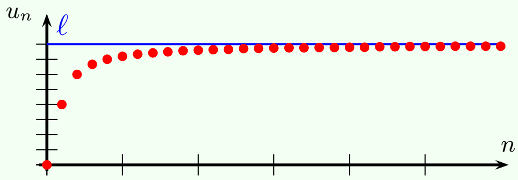
Supposons que la suite ne soit pas majorée par ℓ.

Alors : $\exists\, p \in \mathbb{N} / \; u_p > \ell$.
Soit I l'intervalle ouvert $]\ell - 1; u_p[$, qui contient la limite ℓ. La suite (u_n) est croissante, donc : $\forall n \geqslant p$, $u_n \geqslant u_p$.
Il existe alors un intervalle ouvert I contenant ℓ qui ne contient aucun des termes suivant u_p ; c'est absurde, car la suite converge vers ℓ.

Par conséquent l'hypothèse est fausse : la suite est donc majorée par ℓ.

Propriété 14 ► Convergence d'une suite monotone (admis)

- Si une suite croissante est majorée, alors elle est convergente.
- Si une suite décroissante est minorée, alors elle est convergente.



A titre d'exemple ► Vidéo d'Yvan Monka

Exercice 46 : Convergence d' une suite monotone .

Entraînement Labomep

Exercice 47 : Convergence d' une suite monotone .

Recherche

Exercice 48 : on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie ainsi : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + 4 \end{cases}$

1. Démontrer par récurrence que cette suite est majorée par 5.
2. Exprimer $u_{n+1} - u_n$; puis en utilisant le résultat précédent, montrer que la suite est croissante.
3. Justifier que cette suite converge vers un nombre ℓ.
4. Déterminer la valeur de la limite ℓ.
5. Ecrire un algorithme, qui, pour un nombre r donné, renvoie le plus petit rang n_0 tel que $u_{n_0} \in [\ell - r, \ell]$.

   Le programmer en Python sur la plateforme Jupyter .

   Le tester lorsque $r = 10^{-3}$.
6. a) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $v_n = u_n - 5$ pour tout entier n. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, donner son premier terme et sa raison.

   b) Exprimer v_n en fonction de n.

   c) En déduire une relation explicite pour u_n, puis, en justifiant, retrouver la valeur de ℓ.