Suites numériques – Notions de l'année de Terminale

1/ Démonstration par récurrence

Définition : Une démonstration par récurrence sert à démontrer qu'une propriété qui dépend de n est vraie ou fausse. Pour qu'elle soit possible il faut qu'on connaisse une formule par récurrence.

Structure : Cette démonstration se fait toujours en 3 étapes fondamentales : l'Initialisation , l'Hérédité et la conclusion.
Initialisation : On montre que la propriété est vraie pour la première valeur que prend n (n=0 ou n=1 dans certains cas)
Hérédité : On va supposer que la propriété est vraie pour un entier k (c'est l'hypothèse de récurrence) et on va montrer à partir de cela que cette propriété est vraie pour l'entier k+1
Conclusion : Etant donné que l'Initialisation et l'Hérédité sont vérifiées (ou pas) on dit que la propriété est vraie pour tout entier n (ou qu'elle est fausse).

Exemple : On a une suite un tel que $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$ avec u0 = 2 et on veut démontrer que quel que soit l'entier n , $u_n > n$

On pose P(n) : « $u_n > n$ » , $\forall n \in N$
(indication : P(n) c'est la propriété que l'on souhaite démontrer d'où les guillemets juste après)

Initialisation : (pour n = 0)

D'une part n = 0
D'autre part $u_0 = 2$
On a $2 > 0$ donc $u_0 > 0$ P(0) est vraie

Hérédité :
On suppose qu'il existe un entier k tel que P(k) soit vraie c'est-à-dire $u_k > k$ (On vient de formuler l'Hypothèse de Récurrence)
A-t-on P(k+1) vraie c'est-à-dire $u_{k+1} > k+1$?

$U_k > k$
$U_k + 2k > k + 2k$
$U_k + 2k +1 > 3k + 1$
$U_k+1 > 3k +1$
Et $3k+1 > k+1$

Donc $u_{k+1} > k+1$ P(k+1) est vraie

Conclusion :
P(0) est vraie et l'Hérédité à été démontrée donc d'après l'axiome de récurrence, P(n) est vraie pour tout entier n :
$\forall n \in N, u_n > n$

2/ Variation d'une suite

Rappel : Donner la variation d'une suite revient à dire si elle est croissante, décroissante ou constante
Définition d'une suite croissante :
Une suite est croissante si : $u_{n+1} > u_n$ ou encore si $u_{n+1} - u_n > 0$

Définition d'une suite décroissante :
Une suite est croissante si : $u_{n+1} < u_n$ ou encore si $u_{n+1} - u_n < 0$

On peut recourir à plusieurs méthode pour déterminer les variation des suites :
Trouver le signe de $u_{n+1} - u_n$
Dans le cas ou une suite est définie par une formule explicite on peut étudier les variations de la fonction de même formule
On peut aussi étudier le signe de u_{n+1} / u_n **(fortement déconseillé)**

3/ Suites Majorées , minorées et bornées

Une suite est dite majorée si il existe un réel M tel que $u_n \leq M$ quel que soit n

Par exemple si la note sur 20 était une suite alors elle serait majorée par 20 (ici la limite de la suite est 20 mais attention **le majorant n'est pas forcément la limite : cette suite est aussi majorée par 21, 22, 23 …)**

Une suite est dite minorée s'il existe un réel m tel que $u_n \geq m$ quel que soit n

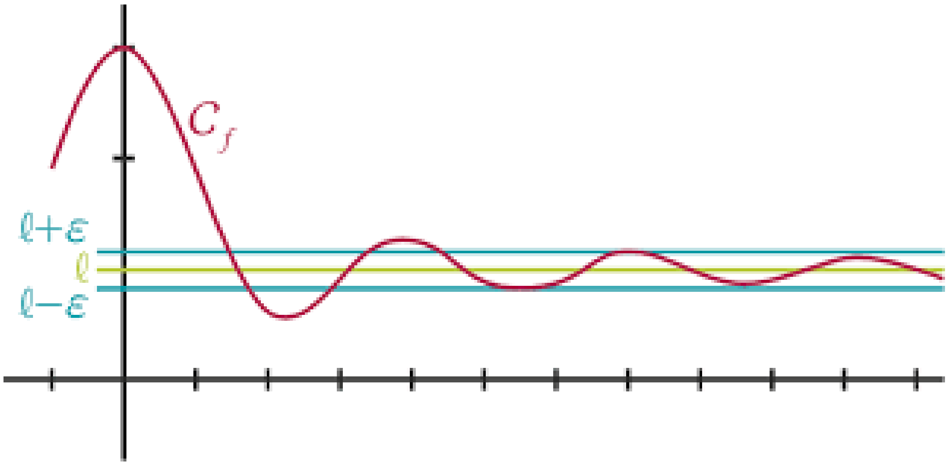
Une suite est bornée si elle est majorée et minorée donc $m \leq u_n \leq M$

La plupart du temps pour montrer qu'une suite est majorée ou minorée on demandera une démonstration par récurrence.

4/ Limite d'une suite

Limite finie (notée l) : La limite est un réel l (autre que + ou – l'infini)
On dit qu'une suite tend vers l lorsque à partir d'un certain rang tout les termes de la suite se trouve dans un intervalle : [l-a ; l + a] avec a un réel

On le visualise mieux avec une courbe :

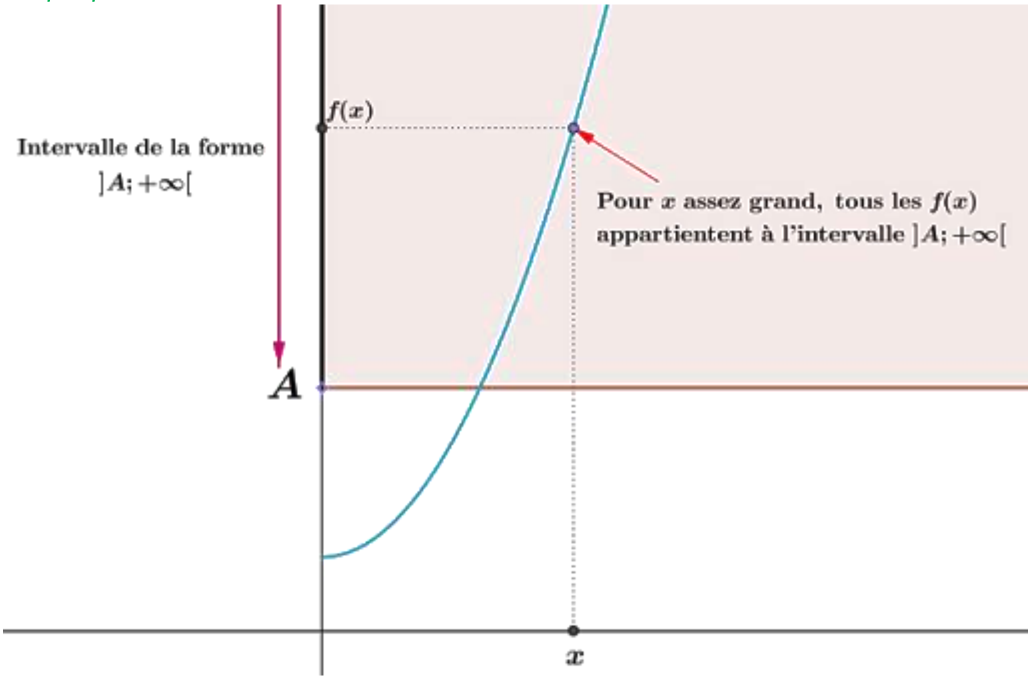


Ici a est ε
Dans cet situation on dit que la limite de la suite est l donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$
Si une suite à une limite finie l on dit qu'elle **converge vers l**

Limite infinie (+ ou – l'infini)

Une suite à pour l'imite + l'infini si il existe un réel A tel que tous les termes de la suite son supérieur à A
Une suite à pour l'imite - l'infini si il existe un réel A tel que tous les termes de la suite son inférieur à A
Lorsqu'une suite a une limite infinie on dit qu'elle **diverge vers plus ou moins l'infini**

Graphiquement :



(ici le graphe présente une fonction mais le principe est exactement le même pour une suite)
Dans ce cas :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Limites de fonctions courantes :

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0$

5/ Opérations sur les limites

Limite d'une somme :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	Exemple
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -5\end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = 4+(-5) = -1$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -4 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty\end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = "-4+(+\infty)" = +\infty$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -4 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty\end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = "-4+(-\infty)" = -\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty\end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = "+\infty+\infty" = +\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty\end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = "-\infty-\infty" = -\infty$
$+\infty$	$-\infty$	?	$(+\infty)+(-\infty)$ est une forme indéterminée On ne peut pas conclure directement avec ce tableau

Attention ce qui est entre guillemet n'est surtout pas à mettre sur une copie.

Limite d'un produit :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n\times v_n)$	Exemple
ℓ	ℓ'	$\ell\times\ell'$	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -5\end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n) = 4\times(-5) = -20$
$\ell\neq 0$	$\pm\infty$	$*\infty$	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -4 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty\end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n) = "-4\times(-\infty)" = +\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$*\infty$	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty\end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n) = "+\infty\times(-\infty)" = -\infty$
0	$\pm\infty$	?	$0\times\infty$ est une forme indéterminée On ne peut pas conclure directement avec ce tableau

$*$: appliquer la règle des signes

Remarque : $\pm$ = plus ou moins

Limite d'un quotient :

a désigne soit un nombre, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$	Exemple
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=4\\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-5\end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=-\frac{4}{5}$
ℓ	$\pm\infty$	0	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=4\\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty\end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}="\frac{4}{-\infty}"=0$
$\ell\neq 0$	0	$*\infty$	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=4\\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0\\ g(x)>0\end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}="\frac{4}{0^+}"=+\infty$
$\pm\infty$	0	$*\infty$	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to3} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to3} g(x)=0\\ g(x)<0\end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)}{g(x)}="\frac{-\infty}{0^-}"=+\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	?	$\frac{\infty}{\infty}$ est une forme indéterminée On ne peut pas conclure directement avec ce tableau
0	0	?	$\frac{0}{0}$ est une forme indéterminée On ne peut pas conclure directement avec ce tableau

$*$: appliquer la règle des signes

Remarque globale : la limite d'une constante est la constante ; la limite de 4 est 4

On a 4 formes indéterminées : ∞/∞ ***; 0/0 ;*** -$\infty+\infty$ ***et*** $\mathbf{0}*\pm\infty$
Pour lever les indéterminations on factorise la suite par son terme de plus au degré (si la suite est un quotient on factorise le dénominateur par son terme de plus au degré et son numérateur par son terme de plus au degré)
Ou on connait le théorème qui dit que la limite d'un polynôme est celle de son terme de plus au degré et que la limite d'un quotient de polynôme est la limite du quotient de leurs termes de plus haut degré.

Exemple : Calculons la limite de $\frac{n^2-2n}{n^3-2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} -2n=-\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-2n=FI$ (car on fait $+\infty-\infty$)

Donc on factorise par le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur :
$\frac{n^2(1-\frac{2}{n})}{n^3(1-\frac{2}{n^3})}=\frac{1-\frac{2}{n}}{n(1-\frac{2}{n^3})}$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1=1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{2}{n}=1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n^3}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1=1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{2}{n^3}=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{2}{n^3}\right)=+\infty$

Enfin : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-\frac{2}{n}}{n\left(1-\frac{2}{n^3}\right)} = 0$ **=** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2-2n}{n^3-2}$

En utilisant le théorème :

$\frac{n^2-2n}{n^3-2}$ au numérateur le terme de plus haut degré est n^2 et au dénominateur n^3

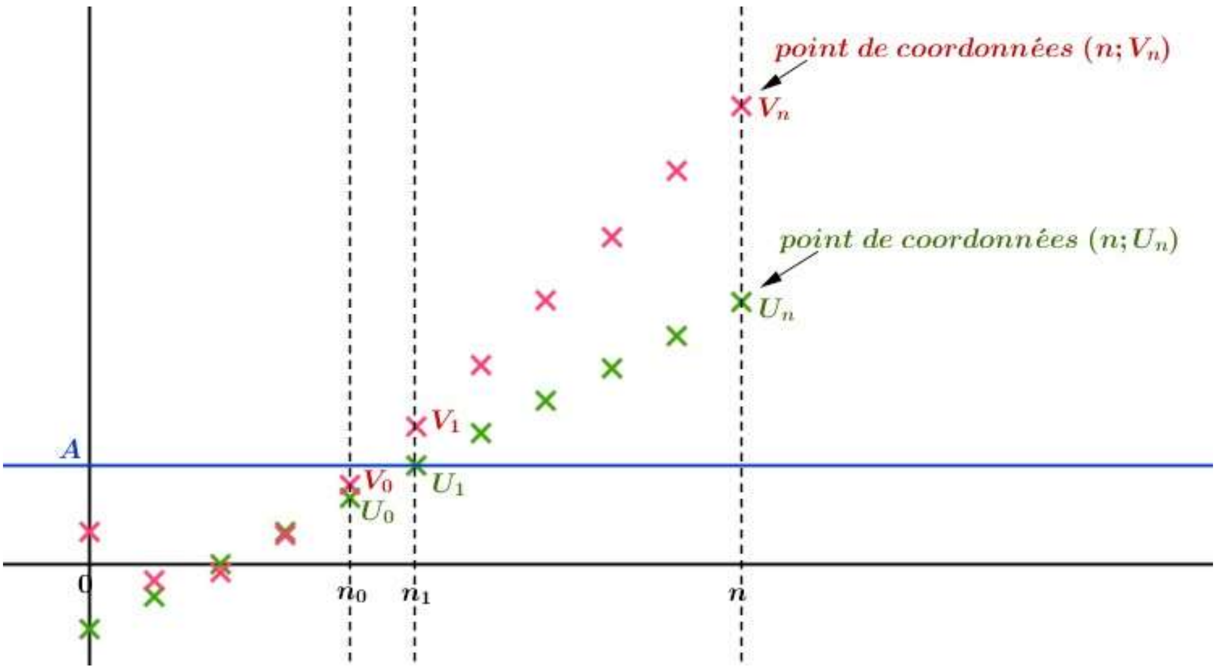
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2-2n}{n^3-2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

6/ Comparaison et encadrement :

Théorème de comparaison :

On a une suite u_n qui a pour limite + l'infini et une autre suite v_n tel que $v_n > u_n$
On peut dire que v_n à pour limite + l'infini aussi car elle est supérieure à u_n

Graphiquement :



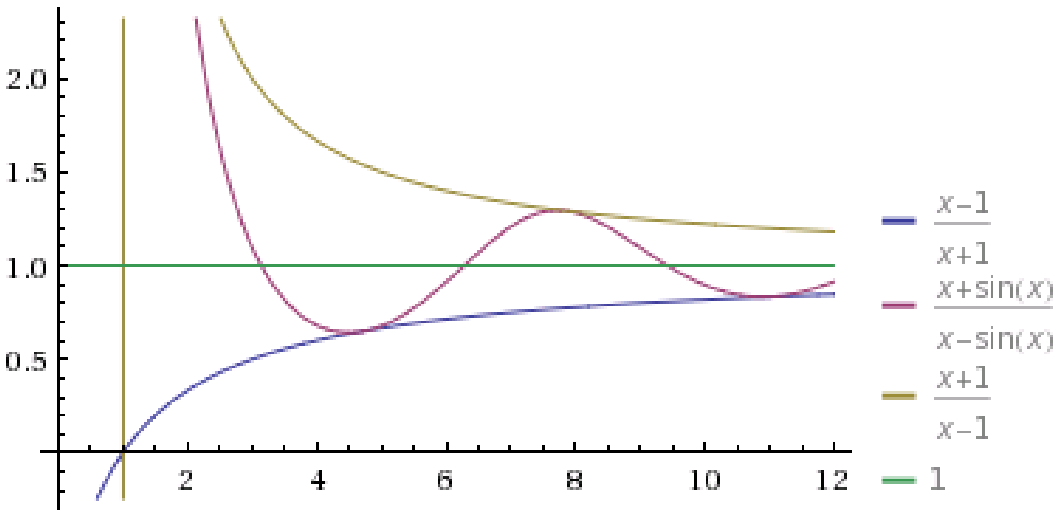
De la même manière :

On a une suite u_n qui a pour limite - l'infini et une autre suite v_n tel que $v_n < u_n$
On peut dire que v_n a pour limite - l'infini aussi car elle est inférieure à u_n

Théorème des gendarmes :

On a 3 suites v_n , w_n et u_n tel que $v_n < u_n < w_n$
Si la limite de v_n et de w_n est égale au même l alors la limite de u_n est égale à l

Graphiquement :



On imaginera que la courbe beige représente w_n la bleue v_n et la rose u_n les trois suites convergent vers 1

Ce théorème est utilisé surtout lorsque l'on étudie des suites avec des cosinus et des sinus puisque --
-1≤ cos(n) ≤ 1 et -1≤ sin(n) ≤ 1
De même avec $(-1)^n$: $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

Exemple : Trouvons la limite de $\frac{4-\cos(n)}{n}$

$-1 \leq -\cos(n) \leq 1$
$-1+4 \leq -\cos(n) +4 \leq 1+4$
$\frac{1}{n} \leq \frac{4-\cos(n)}{n} \leq \frac{5}{n}$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{5}{n} = 0$ **donc** $\lim_{n\to+\infty} \frac{4-\cos(n)}{n} = 0$

7/ Théorèmes de convergence

Théorème de convergence monotone :
Si une suite est croissante et majorée alors elle converge
Si une suite est décroissante et minorée alors elle converge

Théorème de convergence des suites géométriques :
On veut déterminer la limite de q^n avec q un réel différent de 1
Si q > 1 alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
Si $-1 \leq q \leq 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$
Et si $q \leq -1$ alors q^n n'a pas de limite (cas d'une suite alternée)