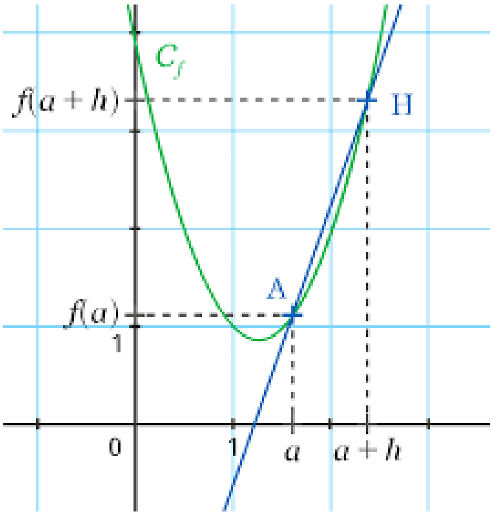
Dérivation – Spé maths 1ère

Nombre dérivé et tangente :

Soit une fonction f définie sur R, on trace sa courbe représentative Cf ; a est une abscisse d'un des points de la courbe que l'on appellera A.

Soit un réel h on écrit a + h avec h non nul qui correspond à l'abscisse d'un autre point de la courbe que l'on appellera H

*Définition :*le nombre τ (h) = f (a+h) – f(a) / h est appelé le « taux de variation » de la fonction f entre a et a+h. Ce nombre est aussi le coefficient directeur de la droite passant par A et H.



Lorsque h prend des valeurs proche de 0 si τ (h) tend vers un nombre réel on dit que la fonction f est dérivable en a. Ce nombre réel est le nombre dérivé notée f'(a)

On écrit alors : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f\,(a+h)-f(a)}{h}$

Exemple : on une fonction f définie sur R par f(x) = -1/3x + 1 , un point A d'abscisse 3 et un point H d'abscisse 3+h on veut obtenir le nombre dérivé f'(3)

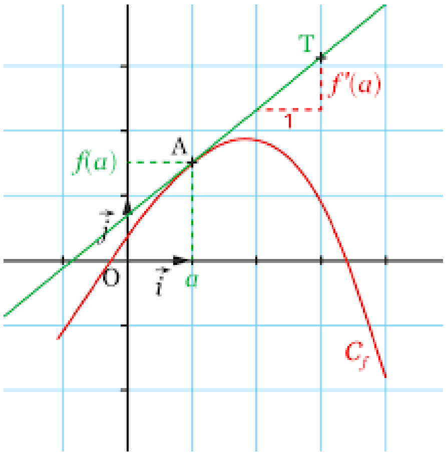
f(3) = -1/3*3+1 = 0   f (3+h) = -1/3 (3+h) +1 = -1/3*3 -1/3*h +1 = -h/3

τ (h) = $\frac{f\,(3+h)-f(3)}{h}$ = $\frac{-\frac{h}{3}-0}{h}$ = -h/3 / h (les h s'annulent) = -1/3

donc $\lim\limits_{h\to 0} \tau\,(h)$ = -1/3 donc f'(3) = -1/3

Tangente à une courbe :

On a une représentation graphique d'une fonction f : Cf avec sur cette courbe un point A d'abscisse a, on appelle T la droite passant par A et tangente à Cf (cette droite ne passe que par un seul point de Cf : A)Le nombre dérivée f'(a) est en fait le coefficient directeur de cette tangente.



Si on connait a , f(a) et f'(a) on est en mesure de trouver l'équation de cette tangente par la formule suivante :

y = f'(a) (x -a) + f(a)

Exemple : soit f une fonction dérivable en a, je connait a = 10 f(10) = 12 et f'(10) = 5 je cherche l'équation de la tangente T à Cf passant par A d'abscisse a :

y = 5 (x – 10) + 12 = 5x -15 +12 donc y = 5x – 3 il s'agit de l'équation de T

Fonctions dérivés :

Définition :

Soit une fonction f dérivable pour tout nombre réel a dans un intervalle I. La fonction dérivée de f est la fonction qui permet de trouver f' (a) à partir de tout réel a de l'intervalle I, on la note f'.

Les principales fonctions et leurs fonctions dérivés :

Dérivées des fonctions usuelles		
Fonction f	Fonction dérivée f'	Intervalles de dérivabilité
$f(x) = k$ (constante réelle)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$]0; +\infty[$ $]-\infty; 0[$
$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ $(n \in \mathbb{N})$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$	$]0; +\infty[$ $]-\infty; 0[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

<u>L'intervalle de dérivabilité correspond à l'intervalle I dans lequel on peut dériver n'importe quel a.</u>

n dans le tableau est un nombre entier

Pour l'intervalle de dérivabilité de f(x) = 1/x et de f(x) = $1/x^n$ on peut dire qu'il s'agit de tout les réel sauf O on peut le noter R / {0} (/ = sauf)

Rajout : soit g une fonction f une autre fonction : f(x) = g(ax+b)

La fonction dérivée de f : f'(x) = a * g' (ax+b) avec g' la fonction dérivée de g

Opération avec les fonctions dérivées :

Opération	Fonction	Dérivée
Addition	$u+v$	$u'+v'$
Multiplication	$k \times u$ avec $k \in \mathbb{R}$	$k \times u'$
Produit	$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$
Inverse	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
Quotient	$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

u et v sont deux fonctions différentes , k est une constante. u' est la fonction dérivée de u et v' la fonction dérivée de v.

Applications de la dérivation :

Sens de variation d'une fonction :

Attention : pour cette partie ne pas confondre le signe et le sens de variation d'une fonction, une fonction peut très bien être négative tout en étant croissante ou positive en étant décroissante.

Soient f une fonction et f' sa dérivée :

Si f' est négative sur un intervalle I alors f sera décroissante sur I

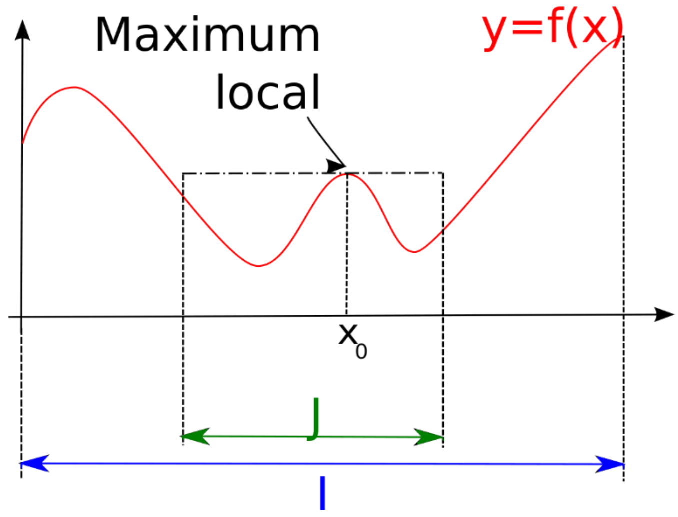
Si f' est positive sur I alors f sera croissante sur I

Si f' est nulle sur I alors f est constante sur I

Un extremum local :

Définition un extremum est soit un minimum soit un maximum pour une fonction : lorsqu'un énoncé demande de trouver un extremum local (ou au voisinage) d'un point c on cherche un maximum ou un minimum autour de c.

On reconnait un extremum lorsque la variation d'une fonction change : la fonction était croissante, elle devient décroissante et inversement



L'intervalle J correspond au voisinage du point c. On voit que la fonction est croissante puis devient décroissante au point d'abscisse x0, on peut dire **qu'au niveau de ce point f'(x0) = 0**