Sommaire

Chapitre III

Limites des fonctions

1. Rappels sur les équations réduites de droites

a) Equation réduite d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées

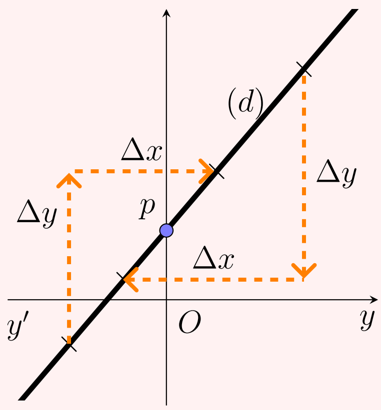
Définition 1 ▶ Equation réduite d'une droite non parallèle à (y'Oy)

L'équation réduite d'une droite (d) non parallèle à (y'Oy) s'écrit : $y = mx + p$.

- m est appelé **le coefficient directeur** de la droite.
- p est **l'ordonnée à l'origine** : $y = p$ lorsque x vaut 0. La droite passe ainsi par le point de coordonnées $(0; p)$.

Le coefficient directeur m de la droite (la pente) est définie par :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{écart des } y}{\text{écart des } x}$$



Conséquence pour les droites parallèles à l'axe des abscisses.

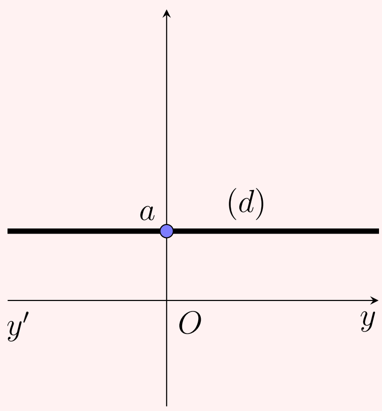
La « pente » est nulle ce qui se traduit par $\Delta y = 0$. Donc $m = 0$.

D'après le graphique, la droite passe par le point de coordonnée $(0, a)$ donc l'ordonnée à l'origine est égale à a.

En résumé : $\begin{cases} m = 0 \\ p = a \end{cases}$.

L'équation réduite de la droite (d) est : $y = a$

La droite est l'ensemble des points de coordonnées (x, a), pour tout réel x.

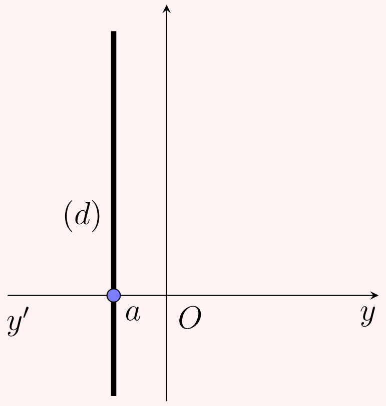


b) Equation réduite d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées

Définition 2 ▶ Equation réduite d'une droite parallèle à (y'Oy)

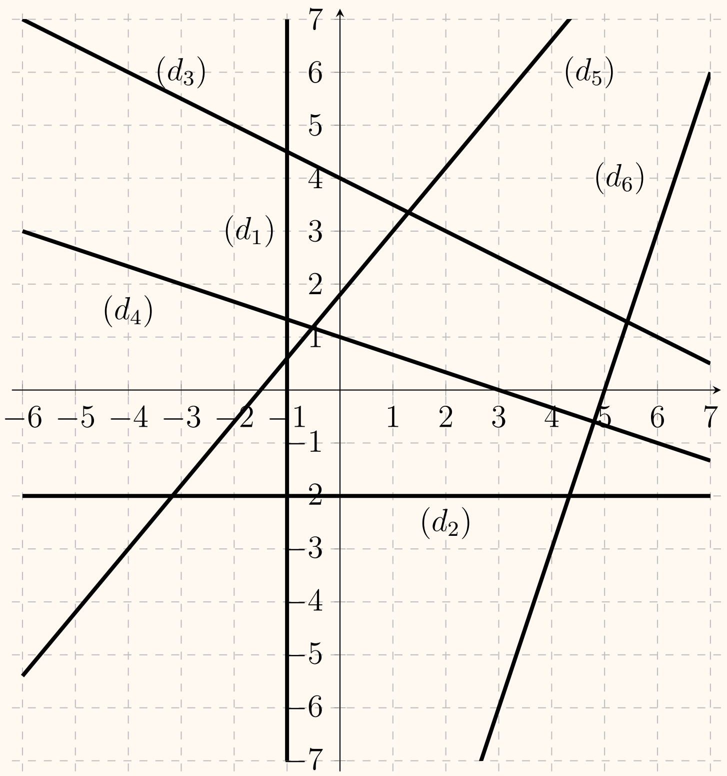
Comme le décalage horizontal est nul, $\Delta x = 0$. Il n'est pas possible de diviser par 0 donc la droite n'a pas de pente m.
L'équation réduite d'une droite parallèle à l'axe des ordonnée **ne peut donc pas** s'écrire sous la forme $y = mx + p$!

La droite est l'ensemble des points de coordonnées (a, y), pour tout réel y. L'équation réduite de la droite (d) est : $x = a$



Recherche 1 ▶ Revoir les bases

Exercice 1 : Utiliser l'animation interactive pour comprendre les équations réduites de droite et apprendre à les déterminer dans les deux cas de figure décrites précédemment.
Exercice 2 : Trouver les équations des différentes droites ci-dessous.



Animation interactive

2. Limites et asymptotes

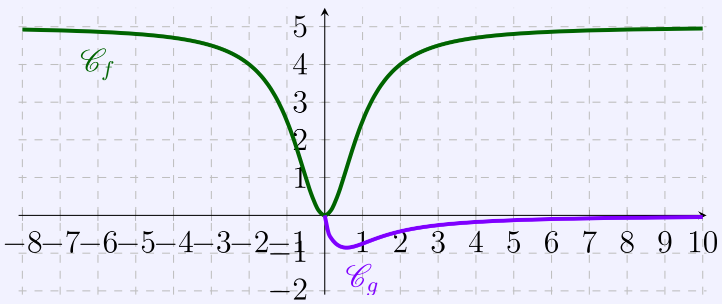
a) Limite finie en $+\infty$ ou $-\infty$

L'animation permet de comprendre le lien entre la limite finie en l'∞, l'existence d'**une asymptote horizontale** et son équation réduite.

Animation

A titre d'exemple

Exemple 1 : On a représenté ci-dessous les courbes des fonctions f et g définies ainsi :
$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \dfrac{5x^2}{x^2+1}$; $\forall x \in [0\ ;\ +\infty[\ ,\ g(x) = \dfrac{-3\sqrt{x}}{2x^2+2}$



- On constate graphiquement que la courbe de f se confond avec la droite d'équation $y = 5$ sur la partie du repère correspondant aux abscisses $x < -7$; cela revient à écrire que pour $x < -7$, $f(x)$ est « très proche » de 5.

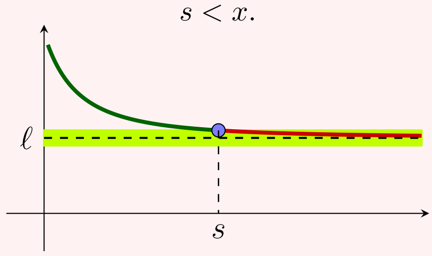
- La courbe de f se confond avec la droite d'équation $y = 5$ également sur la partie du repère correspondant aux abscisses $x > 8$; cela revient à écrire que pour $x > 8$, $f(x)$ est « très proche » de 5.

- La courbe de g se confond avec la droite d'équation $y = 0$ sur la partie du repère correspondant aux abscisses $x > 8$; cela revient à écrire que pour $x > 8$, $g(x)$ est « très proche » de 0.

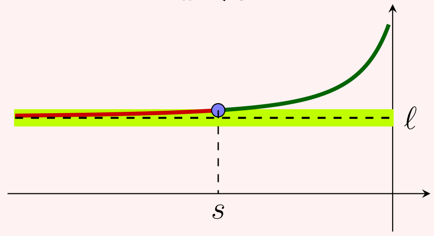
Afin d'expliquer le comportement de ces fonctions pour de grandes ou petites valeurs de x, on définit les notions de limites et d'asymptotes.

Définition 3 ► Limite finie à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ si, pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, il existe un nombre s tel que toutes les valeurs $f(x)$ seront dans I dès que $s < x$.



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ si, pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, il existe un nombre s tel que toutes les valeurs $f(x)$ seront dans I dès que $x < s$.



Définition 4 ► Asymptote horizontale

La droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote « horizontale »** à la courbe représentative de f en $+\infty$ (ou en $-\infty$) si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (ou si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$).

A titre d'exemple ► Retour à l'exemple précédent

Exemple 1 :
La droite d'équation $y = 5$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe de g en $+\infty$.

b) Limite infinie en un réel a

L'animation permet de comprendre le lien entre la limite infinie en un réel a, l'existence d'**une asymptote verticale** et son équation réduite.

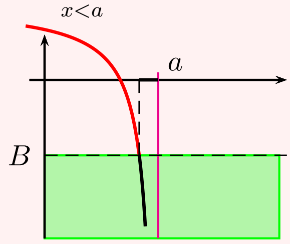
Animation

Définition 5

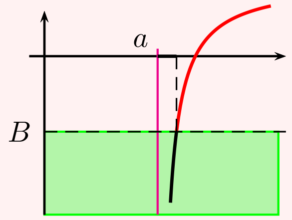
Soit f définie sur $[a - r\ ;\ a[$ ou $]a\ ;\ a + r]$ avec $r \in \mathbb{R}^{*+}$.

• $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$ si tout intervalle $]-\infty\ ;\ B[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de a et strictement inférieur à a. On note aussi : $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$, et on parle de « limite par valeurs inférieures ».

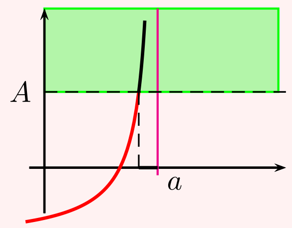
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$



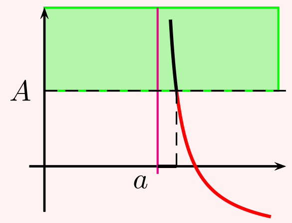
• $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$ si tout intervalle $]-\infty\ ;\ B[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de a et strictement supérieur à a.
On note aussi : $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$, et on parle de « limite par valeurs supérieures ».



• $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$ si tout intervalle $]A\ ;\ +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de a et strictement inférieur à a.
On note aussi : $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$, et on parle de « limite par valeurs inférieures ».



• $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ si tout intervalle $]A\ ;\ +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de a et strictement supérieur à a.
On note aussi : $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$, et on parle de « limite par valeurs supérieures ».



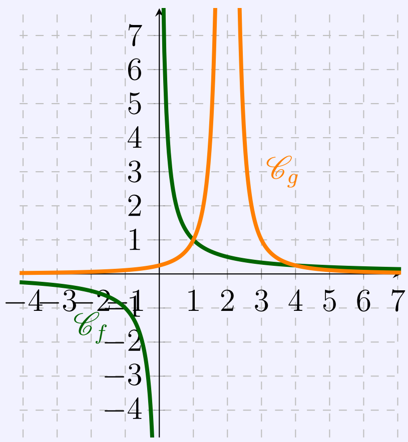
Définition 6

Soit f définie sur $[a-r\ ;\ a[$ ou $]a\ ;\ a+r]$ avec $r \in \mathbb{R}^{*+}$.
La droite d'équation $x = a$ est une **asymptote « verticale »** à la courbe représentative de f si :
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, que ce soit par valeurs inférieures ou supérieures.

A titre d'exemple

Exemple 2 **:** On a représenté ci-dessous les courbes des fonctions f et g définies ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*\ ,\ f(x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}\ ,\ g(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

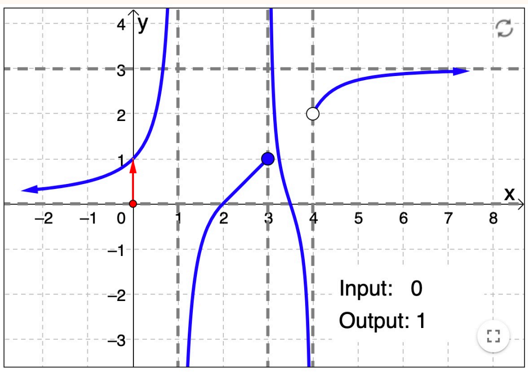


On remarque graphiquement que $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = +\infty$.
Mais on remarque graphiquement également que $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ et que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.
Les limites par valeurs inférieures et supérieures ne sont pas forcément les mêmes !

- La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe de f.
- La droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à la courbe de g.

Recherche ▶ sur les asymptotes

Exercice 3 : En vous aidant du graphique, conjecturer les limites aux bornes de chacun des intervalles de l'ensemble de définition, que vous déterminerez au préalable.
Exercice 4 : Une fonction g est définie par sa courbe ci-dessous.
Après avoir déterminé l'ensemble de définition de la fonction g, conjecturer l'ensemble des limites à ses bornes. Déterminer graphiquement les éventuelles asymptotes. Pour vous aider, cliquer sur le lien ou scanner le QRcode associé.



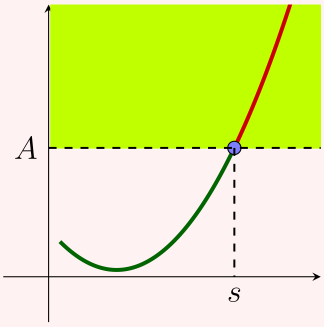
Réaliser deux ou trois séries des deux exercices wim's suivants.
Exercice 5 : de l'asymptote à la limite.
Exercice 6 : de la limite à l'asymptote.

Exercice 3 **Exercice 4** **Exercice 5** **Exercice 6**

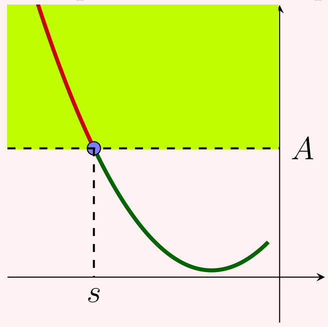
c) Limite infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$

Définition 7

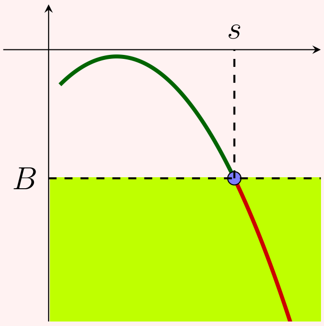
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si, pour tout réel A, il existe un nombre s tel que toutes les valeurs $f(x)$ seront supérieures à A dès que $s < x$.



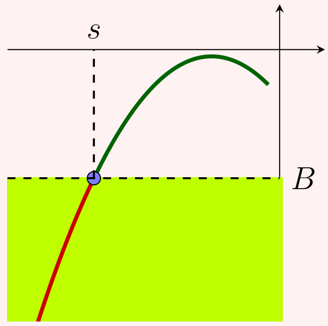
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ si, pour tout réel A, il existe un nombre s tel que toutes les valeurs $f(x)$ seront supérieures à A dès que $x < s$.



- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ si, pour tout réel B, il existe un nombre s tel que toutes les valeurs $f(x)$ seront inférieures à B dès que $s < x$.



- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ si, pour tout réel B, il existe un nombre s tel que toutes les valeurs $f(x)$ seront inférieures à B dès que $x < s$.



Il n'existe pas d'asymptote parallèle à un axe dans ce cas de figure.
Il peut cependant exister des droites asymptotes obliques ou des branches infinies.

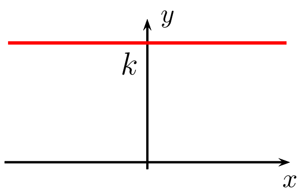
d) Limites de référence

Dans ce qui suit, a désigne un nombre réel.

• La fonction constante :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & k \end{array}$$

Equation de la courbe : $y = k$



$\lim\limits_{x \to -\infty} k = k$

$\lim\limits_{x \to +\infty} k = k$

$\lim\limits_{x \to a} k = k$

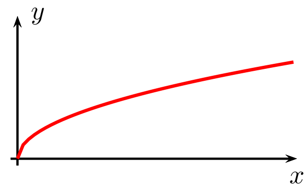
• La fonction racine carrée :

$$\begin{array}{rcl} [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

pour $a \geqslant 0$, $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

Equation de la courbe : $y = \sqrt{x}, x \geqslant 0$



• La fonction carré :

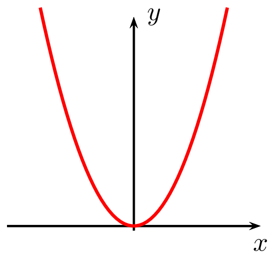
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to a} x^2 = a^2$

Equation de la courbe : $y = x^2$



• La fonction cube :

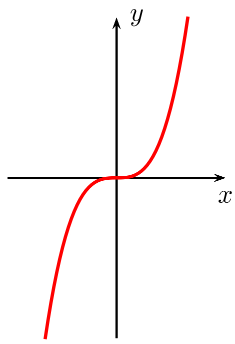
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to a} x^3 = a^3$

Equation de la courbe : $y = x^3$



• La fonction puissance :

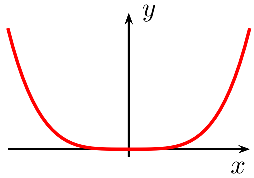
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$$

Equation de la courbe : $y = x^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$

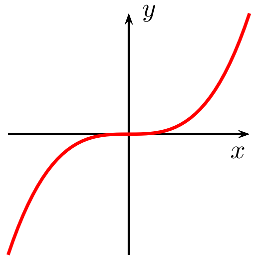
si n est pair	si n est impair
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

$\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$

Equation de la courbe : $y = x^n, n$ pair



Equation de la courbe : $y = x^n, n$ impair



• La fonction inverse :

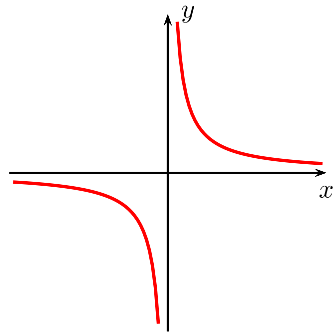
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0^-$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0^+$, donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe en $-\infty$ et en $+\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe.

Pour $a \neq 0$, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a}$

Equation de la courbe : $y = \dfrac{1}{x}$



• La fonction exponentielle :

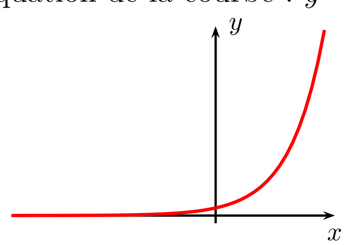
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$, donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe en $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to a} e^x = e^a$

Equation de la courbe : $y = e^x$



Recherche ▶ Etude de limites de fonctions usuelles (wim's)

Réaliser deux ou trois séries de chaque exercice.

Exercice 7 : Limites des fonctions usuelles (niveau 1)
Exercice 8 : Limites des fonctions usuelles (niveau 2)
Exercice 9 : Limites d'autres fonctions usuelles (niveau 1)
Exercice 10 : Limites d'autres fonctions usuelles (niveau 2)

Exercice 7 **Exercice 8** **Exercice 9** **Exercice 10**

3. Opérations sur les limites

Les théorèmes sont similaires à ceux énoncés pour les suites.
On considère deux expressions $f(x)$ et $g(x)$ dont on connaît la limite lorsque x tend vers a (a pouvant désigner soit un nombre réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$) . On présente dans cette partie des résultats qui permettent d'établir les limites de $k \times f(x)$ (où k est un réel), $f(x)+g(x)$, $f(x)\times g(x)$ et $\frac{f(x)}{g(x)}$ à partir de celles de $f(x)$ et $g(x)$.
Les résultats sont intuitifs, et ne seront pas démontrés.
Dans certains cas, on ne peut pas prévoir la limite : on parle alors de forme indéterminée, notée **F.I.**.
Pour autant, on apprendra à « lever » les indéterminations. *Dans ce qui suit, ℓ et ℓ' désignent des nombres réels.*

a) Multiplication par une constante

Propriété 1 ▶ Multiplication par une constante

Il suffit d'appliquer la règle des signes d'un produit.

- Si $k > 0$:

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_{x\to a} k\times f(x) =$	$k\times\ell$	$+\infty$	$-\infty$

- Si $k < 0$:

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_{x\to a} k\times f(x) =$	$k\times\ell$	$-\infty$	$+\infty$

b) Limite d'une somme de fonctions

Propriété 2 ▶ Limite d'une somme de fonctions

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x)) =$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

c) Limite d'un produit de fonctions

Propriété 3 ▶ Limite d'un produit de fonctions

Le principe est, là encore, celui de la règle des signes d'un produit.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	ℓ	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	0
Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f(x)\times g(x)) =$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

d) Limite d'un quotient de fonctions

Propriété 4 ▶ Limite d'un quotient de fonctions

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	ℓ	ℓ	$\ell\neq 0$	∞	∞	0
Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	$\ell'\neq 0$	∞	0	0	∞	0
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	∞ (Il faut étudier l'expression pour déterminer le signe.	∞ (Il faut étudier l'expression pour déterminer le signe.	F.I.	F.I.

On peut retenir facilement ces résultats en retenant les deux principes suivants :

- en limite, diviser par l'infini revient à multiplier par 0 ;
- en limite, diviser par 0 revient à multiplier par l'infini ;

puis en appliquant les résultats sur les limites d'un produit. Ainsi, le cas « $\frac{\infty}{\infty}$ »se ramène au cas « $\infty \times 0$ », qui est une forme indéterminée.

A titre d'exemple ►

Exemples de limites « $\frac{\ell}{0}$ »ou « $\frac{\infty}{0}$ » : Dans ces cas la limite est $+\infty$ ou $-\infty$; il faut étudier le signe de l'expression pour déterminer quel est le signe de cet infini.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$: $\forall x > 0$, $\frac{1}{x} > 0$; donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$: $\forall x < 0$, $\frac{1}{x} < 0$; donc $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}$: $\forall x > 0$, $\frac{1}{x^2} > 0$; donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2}$: $\forall x < 0$, $\frac{1}{x^2} > 0$; donc $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Entraînement Labomep

Exercice 11 : Limite d'une fonction à l'infini.
Exercice 12 : Limite d'une fonction en un réel.

Exercice 11 **Exercice 12**

Recherche

Exercice 13 : limites et opérations
Chercher les limites suivantes :
- $\lim\limits_{x\to -\infty} 3x^2 + \frac{1}{x}$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} (x-5)(3+x^2)$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{x+3}$

Pour vous aider une correction d'Y. Monka

Exercice 13

Recherche

Exercice 14 : Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x+2}{x-2}$; 2. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-3}{x-2}$; 3. $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$; 4. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+2}{x^2-5x+6}$

e) Formes indéterminées (F.I.)

On recense 4 situations de formes indéterminées que l'on peut résumer ainsi : « $\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ ». Pour lever l'indétermination, il faut transformer l'écriture de l'expression pour se ramener à un des théorèmes généraux, par exemple en développant ou en factorisant.

Limite d'un polynôme

Soit k un entier naturel ; un polynôme de degré k est une expression du type

$$a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

où les coefficients a_i sont des nombres réels, avec $a_k \neq 0$, et où x désigne la variable ; a_kx^k est le terme de plus haut degré.
Bien souvent, la limite en $+\infty$ et $-\infty$ d'un polynôme est une forme indéterminée :
par exemple $\lim\limits_{x \to -\infty} 5x^3 + 2x^2 - 6x + 5$.
On pourra alors utiliser la propriété suivante :

Propriété 5 ▶ Limite en $\pm\infty$ d'un polynôme

La limite en $+\infty$ et $-\infty$ d'un polynôme est la limite de son terme de plus haut degré.

Recherche

Exercice 15 : Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des expressions suivantes :

$5x^3 + 2x^2 - 6x + 5$; $-x^3 + 2x$; $-4x^5 + 2x^2 + 10$; $-x^2 + 3x + 4$

Limite d'une fonction rationnelle

Une fonction rationnelle est une fonction dont l'expression est du type $\dfrac{\text{polynôme 1}}{\text{polynôme 2}}$.
Bien souvent, la limite en $+\infty$ et $-\infty$ d'une fonction rationnelle est une forme indéterminée :
par exemple $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 + x - 3}{3x + 4}$.
On pourra alors utiliser la propriété suivante :

Propriété 6 ▶ Limite en $\pm\infty$ d'une fonction rationnelle

La limite en $+\infty$ et $-\infty$ d'une fonction rationnelle est la limite du quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.

Recherche

Exercice 16 : déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des expressions suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2+x-3}{3x+4}$ 2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+x-3}{3x^2+4}$; 3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{8x^3-5x+4}{3x^3+2x^2-1}$ 4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7x^2-x+4}{-3x^+5}$

Entraînement Labomep

Exercice 17 : Asymptote à partir d'une limite.

Exercice 17

Recherche

Exercice 18 : Asymptote horizontale

Soit f la fonction définie sur $]\infty;2[\cup]2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x+1}{2-x}$.
Démontrer que la droite d'équation $y=-3$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
Pour un corrigé, cliquer sur le corrigé d'Y. Monka.

Exercice 19 : Asymptote verticale

Soit f la fonction définie sur $]\infty;4[\cup]4;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x}{x-4}$.
Démontrer que la droite d'équation $x=4$ est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.
Pour un corrigé, cliquer sur le corrigé d'Y. Monka.

Exercice 20 : Approfondissement : Asymptote oblique

On considère la fonction f définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2+6x-5}{x-2}$$

Démontrer que la droite d'équation $y=-x+4$ est asymptote oblique à la courbe représentative en $+\infty$. Pour une aide, cliquer sur le corrigé d'Yvan Monka.

Exercice 18 **Exercice 19** **Exercice 20**

4. Autres théorèmes sur les limites

a) Limite d'une fonction composée

La composition est une opération sur les fonctions qui est différente de la somme, du produit et du quotient.

Elle revient à enchaîner l'action de deux fonctions.

A titre d'exemple ▶ Décomposition en fonctions usuelles

Exemple 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{1+\frac{1}{x}}$; si on note $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$, f est la composée de g suivie de la fonction racine carrée.

$$f : x \xrightarrow{g} 1 + \frac{1}{x} = X \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} \sqrt{X} = \sqrt{1+\frac{1}{x}}$$

$$\text{On note : } f(x) = \sqrt{g(x)}$$

Exemple 4 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (5x^3 - 2x)^5$; si on note $g(x) = 5x^3 - 2x$ et $h(x) = x^5$, f est la composée de g suivie de h.

$$f : x \xrightarrow{g} 5x^3 - 2x = X \xrightarrow{h} X^5 = \left(5x^3 - 2x\right)^5$$

$$\text{On note : } f(x) = h\left(g(x)\right)$$

Exemple 5 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x^2+5}$; si on note $g(x) = x^2 + 5$ et h la fonction inverse, f est la composée de g suivie de h.

$$f : x \xrightarrow{g} x^2 + 5 = X \xrightarrow{h} \frac{1}{X} = \frac{1}{x^2+5}$$

$$\text{On note : } f(x) = h\left(g(x)\right)$$

Propriété 7 ▶ Propriété (admise)

Dans ce qui suit, a, b et c désignent ou bien des réels, ou bien $-\infty$ ou $+\infty$.

$$\text{Si } \lim_{x\to a} g(x) = b \text{ et si } \lim_{X\to b} h(X) = c, \text{ alors } \lim_{x\to a} h\left(g(x)\right) = c.$$

A titre d'exemple ▶ Limite d'une composée de fonctions

Exemple 6 : Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{X\to 1} \sqrt{X} = \sqrt{1} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1$.

Entraînement Labomep

Exercice 21 : Limite de fonctions composées.

Exercice 21

Recherche ▶ Etude de limites de fonctions composées

Exercice 22 : Déterminer les limites suivantes.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(5x^3-2x\right)^5 \ ; \ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2-x+5} \ ; \ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1-2x^2}{-x^2+3x-2}} \ ; \ \lim_{x\to 3^-}\frac{1}{(-x+3)^3} \ ;$$

$$\lim_{x\to 3^-}\mathrm{e}^{\frac{x^2+1}{3-x}} \ ; \ \lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{x^2+1}{3-x}}$$

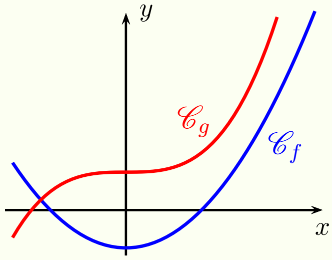
b) Limites et comparaison

Ces théorèmes sont formulés avec les limites quand x tend vers $+\infty$, on pourrait également les formuler :

- quand x tend vers $-\infty$: dans ce cas l'intervalle $[\alpha\ ;\ +\infty[$ serait remplacé par $]-\infty\ ;\ \beta[$;
- quand x tend vers a : dans ce cas l'intervalle $[\alpha\ ;\ +\infty[$ serait remplacé par $]a\ ;\ a+r]$ ou $[a-r\ ;\ a[$ avec $r\in\mathbb{R}^{*+}$.

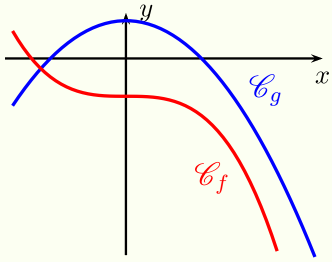
Théorème 1 ▶ Théorèmes de comparaison (admis)

Si
pour tout $x\in[\alpha\ ;\ +\infty[$, les fonctions f et g sont définies et si $f(x)\leqslant g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$,
alors
$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.



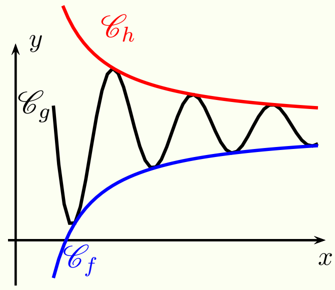
Théorème 2 ▶ Théorèmes de comparaison (admis)

Si
pour tout $x\in[\alpha\ ;\ +\infty[$, les fonctions f et g sont définies, $f(x)\leqslant g(x)$, et $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$,
alors
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.



Théorème 3 ▶ Théorème des gendarmes (admis)

Si
pour tout $x \in [\alpha\ ;\ +\infty[$, les fonctions f, g et h sont définies, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$
alors
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$.



Entraînement Labomep

Exercice 23 : Limite d'une fonction à l'aide d'un théorème de comparaison.

Exercice 23

Recherche 2 ▶ Exercices et leur corrigé en vidéo

Exercice 24 Théorème de comparaison.
Etudier la limite en $+\infty$ de $x + \sin(x)$. Pour une aide, cliquer sur le corrigé d'Y. Monka.

Exercice 25 Théorème des gendarmes.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)+3}{x}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+\cos(x)}{x-1}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x)}{x^2}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+\cos(x)}{x-\sin(2x)}$

Pour une aide, cliquer sur le corrigé de Hans Amble.

Exercice 26 Théorème de comparaison

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 3\sin(x)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x + 3\sin(x) - 4\cos(x)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^3-\cos(x)}{x^2}$

Pour une aide, cliquer sur le corrigé de Hans Amble.

Exercice 24 **Exercice 25** **Exercice 26**

c) Croissantes comparées

Propriété 8 ▶ Croissances comparées

Soit n un nombre entier non nul.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

On dit que la fonction exponentielle l'« **emporte** » sur la fonction puissance.

Démonstration guidée :

On veut montrer que pour tout entier n non nul, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$:

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x$; montrer que g est croissante. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) > 0$.
2. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto e^x - \dfrac{x^2}{2}$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
3. En déduire que pour tout $x > 0$, $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$, puis déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}$.
4. Pour tout nombre réel $x > 0$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, démontrer que :
$$\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n .$$
5. En déduire la limite de $\dfrac{e^x}{x^n}$ en $+\infty$.
6. Conclure.

Recherche 3

Exercice 27 : Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x + x}{e^x - x^2}$.
Pour une aide ou une correction, consulter la vidéo d'Y. Monka.
Exercice 28 : Calculer les limites , si elles existent, des fonctions suivantes en $-\infty$ et en $+\infty$:

- $x \longmapsto (3x^2 + 4x + 1)e^x$
- $t \longmapsto t^3 e^{-t} - t^2$
- $x \longmapsto \dfrac{5e^{-2x} + 2}{e^{-2x} - 1}$

Exercice 27