Produit scalaire de deux vecteurs

I. Rappels sur les vecteurs

1. Notions de direction, de sens

Une *direction* du plan (ou de l'espace) est représentée par une droite d.
Deux droites *parallèles* ont la même direction.
La direction de d peut être représentée par n'importe quelle autre droite parallèle à d.

Soit A et B deux points distincts d'une droite d.

Il y a deux *sens* de déplacement sur la droite d :

— le sens de A vers B ;

— le sens de B vers A.

2. Notion de vecteur

Un *vecteur non nul* $\vec{u}$ est défini par :

— sa **direction** ;

— sa **norme**, notée $\|\vec{u}\|$;

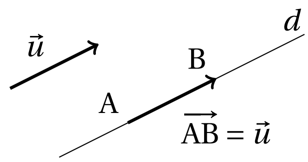
— son **sens**.

Cette définition permet de représenter un vecteur $\vec{u}$ non nul par un « segment fléché ».

— Choisir une droite d qui représente la direction du vecteur $\vec{u}$;

— fixer un point « *origine* » A sur la droite d, puis placer le point « *extrémité* » B sur la droite d tel que :

- la distance AB est égale à la norme du vecteur $\vec{u}$;
- le sens de A vers B est celui du vecteur $\vec{u}$.



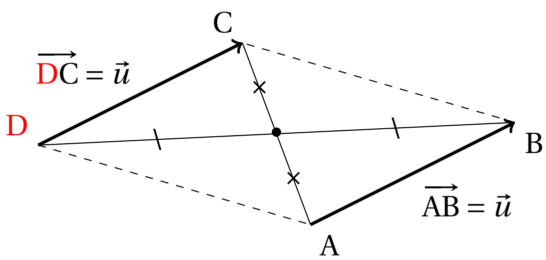
On écrit alors $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{u}$ et on dit que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est un représentant du vecteur $\vec{u}$:

— la direction du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est celle de la droite (AB) ;

— la norme du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est $\|\vec{u}\| = \mathrm{AB}$;

— le sens du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est celui de A vers B.

Il existe une infinité de représentants d'un vecteur $\vec{u}$, mais un seul d'origine fixée.



$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}} \iff \mathrm{ABDC}$ est un parallélogramme $\iff$ les segments $[\mathrm{AD}]$ et $[\mathrm{BC}]$ ont même milieu.

Le *vecteur nul* n'a ni direction, ni sens, mais sa norme est égale à zéro ; on le note $\vec{0}$. Le vecteur nul est représenté par un « point » : $\vec{0} = \overrightarrow{\mathrm{AA}} = \overrightarrow{\mathrm{BB}} = \cdots = \overrightarrow{\mathrm{MM}} = \ldots$

3. Coordonnées

Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\,\vec{j}\right)$, on considère deux points $\mathrm{A}(x_\mathrm{A};y_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B};y_\mathrm{B})$.

Quelle que soit la nature du repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\,\vec{j}\right)$, les coordonnées du vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sont $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A} \\ y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A}\end{pmatrix}$ et ne dépendent pas du représentant choisi.

Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, leurs coordonnées sont égales.

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix} \iff x=x' \text{ et } y=y'.$$

Dans un repère **orthonormé** $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\,\vec{j}\right)$,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A} \\ y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A}\end{pmatrix} \text{ et } \|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| = \mathrm{AB} = \sqrt{(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})^2+(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})^2}.$$

II. Définition et expressions du produit scalaire de deux vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Soient A, B et C trois points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
En rapport avec l'activité B page 231 du manuel (cliquer ici), la définition choisie pour le produit scalaire de deux vecteurs est la suivante :

1. Définition

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ ou $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, est égal à :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-\mathrm{BC}^2\right)=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{v}-\vec{u}\|^2\right).$$

2. Autres expressions du produit scalaire

☐ **avec le projeté orthogonal :** soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB), $\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$.

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{cases} \mathrm{AB}\times\mathrm{AH} & \text{, si } \mathrm{H}\in[\mathrm{AB}] \\ -\mathrm{AB}\times\mathrm{AH} & \text{, si } \mathrm{H}\notin[\mathrm{AB}]\end{cases}$$

☐ **formule trigonométrique :** pour $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$, c'est-à-dire $\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$ et $\mathrm{A}\neq\mathrm{C}$,

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})\text{, c'est-à-dire : }\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\cos(\widehat{\mathrm{BAC}}).$$

☐ **dans un repère orthonormé :** soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix}$,

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy' \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}.$$

Si $\mathrm{A}(x_\mathrm{A};y_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B};y_\mathrm{B})$, on retrouve :

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})^2+(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})^2=\mathrm{AB}^2.$$

III. Propriétés du produit scalaire de deux vecteurs

1. Bilinéarité et symétrie

Propriétés

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs ; a et b sont deux nombres réels.

- ☐ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (symétrie) ;
- ☐ $\vec{u} \cdot \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (compatible avec l'addition des vecteurs) ;
- ☐ $\left(a\vec{u}\right) \cdot \left(b\vec{v}\right) = (ab) \times \left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)$ (compatible avec le produit d'un vecteur par un réel) ;
- ☐ $\left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$.

2. Orthogonalité

Définition

Deux vecteurs <u>non nuls</u> $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ sont *orthogonaux* si, et seulement si, les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Propriété

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

3. Vecteur normal — Équations cartésiennes de droites

Définition

Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.

Tout vecteur $\vec{n}$ non nul et orthogonal au vecteur $\vec{u}$ est appelé *vecteur normal* à la droite d.

Équation d'une droite dont on connaît un point et un vecteur normal

Soit d la droite passant par $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}; y_\mathrm{A})$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

$\mathrm{M}(x; y) \in d \iff$ les vecteurs $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix} x - x_\mathrm{A} \\ y - y_\mathrm{A} \end{pmatrix}$ sont orthogonaux $\iff a(x - x_\mathrm{A}) + b(y - y_\mathrm{A}) = 0$

$$\mathrm{M}(x; y) \in d \iff ax + by + c = 0 \quad \text{(avec } c = -ax_\mathrm{A} - by_\mathrm{A}\text{)}.$$

Si $(a, b) \neq (0, 0)$, l'équation $ax + by + c = 0$ est celle d'une droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ — et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.