Fiche de synthèse sur la dérivation

Fonction dérivable – nombre dérivé

f est une fonction définie sur un intervalle I et $a \in \mathrm{I}$.

- f est dérivable en a si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell$ où ℓ est un nombre réel.
- $f'(a) = \ell$ est le nombre dérivé de la fonction f en a.
- f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout nombre réel a de I.
- Lorsque f est dérivable sur I, la fonction dérivée de f est la fonction $f' : x \longmapsto f'(x)$ définie sur I.

Interprétation graphique

Si la fonction f est dérivable en a, la droite passant par le point $\mathrm{A}\big(a; f(a)\big)$ et de pente $f'(a)$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.
Une équation de cette tangente est :

$$y = f(a) + f'(a) \times (x-a).$$

Dérivées usuelles

Fonction ...	définie sur ...	par ...	dérivable sur ...	Fonction dérivée ...
constante	$\mathbf{R}$	$f(x) = k \ (k \in \mathbf{R})$	$\mathbf{R}$	$f'(x) = 0$
affine	$\mathbf{R}$	$f(x) = ax+b$ $(a \in \mathbf{R},\ b \in \mathbf{R})$	$\mathbf{R}$	$f'(x) = a$
carré	$\mathbf{R}$	$f(x) = x^2$	$\mathbf{R}$	$f'(x) = 2x$
puissance	$\mathbf{R}$ (si $n > 0$) $\mathbf{R}^*$ (si $n < 0$)	$f(x) = x^n \ (n \in \mathbf{Z}^*)$	$\mathbf{R}$ (si $n > 0$) $\mathbf{R}^*$ (si $n < 0$)	$f'(x) = nx^{n-1}$
inverse	$\mathbf{R}^*$	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbf{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
racine carrée	$[0; +\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Opérations sur les dérivées

Les fonctions u et v sont dérivables sur un intervalle I.

Fonction du type ...	Fonction dérivée ...	Ensemble de dérivabilité ...
Somme : $u+v$	$(u+v)' = u'+v'$	I
Multiplication par un nombre réel : $ku \ (k \in \mathbf{R})$	$(ku)' = ku'$	I
Produit de deux fonctions : uv	$(uv)' = u'v+uv'$	I
Inverse : $\dfrac{1}{v}$	$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$	tous les réels $x \in \mathrm{I}$ tels que $v(x) \neq 0$
Quotient de deux fonctions : $\dfrac{u}{v}$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	tous les réels $x \in \mathrm{I}$ tels que $v(x) \neq 0$

Composée

Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I. Soient a et b deux nombres réels.
L'ensemble J des réels x tels que $ax+b \in \mathrm{I}$ est un intervalle sur lequel on définit la fonction f par $f(x) = g(ax+b)$.

La fonction f est dérivable sur J et, pour tout $x \in \mathrm{J}$, $f'(x) = a \times g'(ax+b)$.

Exercices

E1

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction, puis calculer sa dérivée.

a) $f : x \mapsto f(x) = 5x^4$

b) $g : x \mapsto g(x) = -5x^2 + 7x + 2$

c) $h : x \mapsto h(x) = 4x^3 - \dfrac{x^2}{3} - 7x + 2$

d) $l : x \mapsto l(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{4}$

E2

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction, puis calculer sa dérivée.

a) $f : x \mapsto f(x) = 6x^5$

b) $g : x \mapsto g(x) = -8x^2 + 4x - 21$

c) $h : x \mapsto h(x) = -3x^2 + 8x - \dfrac{16}{3}$

d) $l : x \mapsto l(x) = \dfrac{-5x^2 - x + 7}{5}$

Démonstration rédigée de la propriété : dérivée d'un produit

1) On commence par calculer le taux de variation de la fonction $u \times v$ en a :
Pour tout $a \in \mathrm{I}$ et pour tout $h \in \mathbf{R}^*$ tel que $a + h \in \mathrm{I}$, le taux de variation de la fonction $u \times v$ entre a et $a + h$ vaut :

$$t(h) = \frac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a)}{h}$$

On cherche à faire apparaître le taux de variation de u en a et celui de v en a. Pour cela, on retranche et on ajoute $u(a) \times v(a+h)$ au numérateur (ce qui revient à ajouter 0) :

$$t(h) = \frac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a+h) + u(a) \times v(a+h) - u(a) \times v(a)}{h}$$

$$t(h) = \frac{(u(a+h) - u(a)) \times v(a+h) + u(a) \times (v(a+h) - v(a))}{h}$$

$$t(h) = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times v(a+h) + u(a) \times \frac{v(a+h) - v(a)}{h}$$

2) On étudie la limite du taux de variation lorsque h tend vers 0. Pour cela, on étudie la limite de chaque facteur et on utilise l'hypothèse « u et v sont dérivables sur I ».
Les fonctions u et v sont donc dérivables en a :

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a) \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a)$$

Le nombre $u(a)$ ne dépend pas de h donc $\lim\limits_{h \to 0} u(a) = u(a)$ et on admet que $\lim\limits_{h \to 0} v(a+h) = v(a)$. En reprenant l'expression de $t(h)$, on obtient :

$$\lim_{h \to 0} t(h) = u'(a) \times v(a) + u(a) \times v'(a)$$

3) On conclut sur la dérivabilité et sur l'expression de la dérivée.

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors la fonction produit $x \longmapsto u(x) \times v(x)$, notée $u \times v$, est dérivable sur I et, pour tout nombre réel x de I,

$$(u \times v)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x).$$

Exercice : Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction, puis calculer sa dérivée.

a) $f : x \mapsto f(x) = (5x + 3)(-2x + 1)$

b) $g : x \mapsto g(x) = -4x\sqrt{x}$

c) $h : x \mapsto h(x) = (3x^2 - 5)(2x - 4)$

d) $l : x \mapsto l(x) = (5x - 7) \times \dfrac{1}{x}$