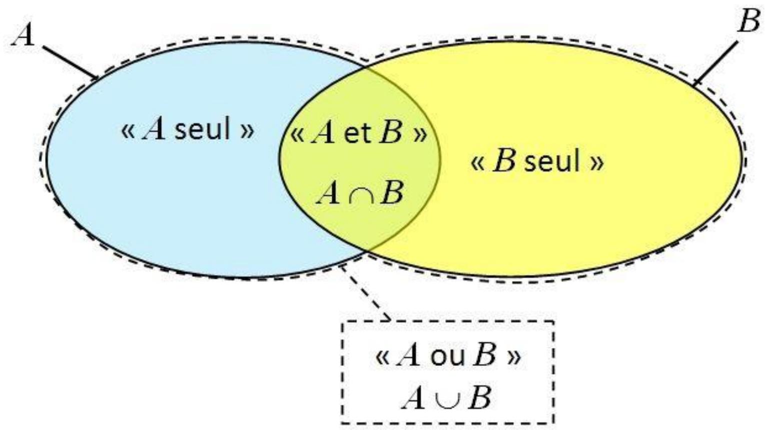
Dénombrements

1/ Rappel sur les ensembles

Définition d'un ensemble : Comme son nom l'indique il s'agit d'un ensemble d'objets (le plus souvent des nombres)

Représentation :
On le modélise par un ovale :



Ici l'ensemble A et l'ensemble B
Sinon on l'écrit : A = {1,2,3,6} et B = {2,6,7}   *(important : ne pas oublier les accolades)*

Ce qui est à la fois dans A et dans B se note A ∩ B se lit A inter B
Ce qui est à dans A ou dans B se note A ∪ B se lit A union B
Remarque : Le « ou » de A union B est inclusif c'est-à-dire que l'élément peut se trouver dans A, dans B, dans A et B.

2/ La notion de Cardinal

Définition : On appelle le cardial d'un ensemble le nombre d'élément d'un ensemble on le note Card(..)

Exemple pour l'ensemble A : A = {1,2,3,6} Card(A) = 4

Si on connaît Card(B), Card(A) et Card(A ∩ B) on peut calculer Card(A ∪ B) :

Card(A ∪ B) = Card(B) + Card(A) - Card(A ∩ B)

Exemple : ici Card(A) = 4 Card(B) = 3 et Card(A ∩ B) = 2 (puisque 2 et 6 sont à la fois dans A et B)
Donc Card(A ∪ B) = 4+3-2 = 5

3/ Le produit cartésien

Définition : On appelle produit cartésien de deux ensembles A et B l'ensemble des couples (a ;b) avec a appartenant à l'ensemble A et b à l'ensemble B
On note le produit cartésien de A et B : A×B *(inconvénient : le symbole du produit cartésien × est appelé « croix » on lit donc A croix B et c'est le même symbole que celui de la multiplication)*

Attention comme dit dans la définition A×B est un ensemble qui se présente de la forme suivante :
A×B = {(a ;b) , (a' ; b') etc…} avec a et a' ∈ A et b et b' ∈ B *(attention ne pas confondre les accolades et les parenthèses)* donc cet ensemble a un cardinal

Relation avec le Cardinal :
Card (A×B) = Card (A) * Card (B)

4/ Le nombre de k-uplets

Définition : On prend k éléments dans un ensemble de n éléments il s'agit d'une liste donc **l'ordre dans lequel apparaissent les éléments est pris en compte**
On utilise les k-uplets lorsque l'on effectue **un tirage successif et avec remise** (par exemple un lancé de 2 dés , un tirage dans une urne avec remise…) de manière générale il s'agit d'une situation ou l'on **prélève les éléments un par un en prenant soin de les remettre ensuite en jeu.**

Rappel : Lorsque l'ordre est pris en compte on écrit des parenthèses : (a,b,c) n'est pas la même chose que (b,a,c)
Lorsque l'ordre n'est pas pris en compte on met entre accolades : {a ;b ;c} est la même chose que {b ;a ;c}

Exemple : On veut noter les 2-uplets de A
A = {1,2,3,6}
On a : (1,1) (1,2) (1,3) (1,6) (2,1) (2,2) (2,3) (2,6) (3,1) (3,2) (3,3) (3,6) (6,1) (6,2) (6,3) (6,6)

Pour obtenir sans avoir à tout noter le nombre de k-uplets d'un ensemble :
On notera n le Cardinal d'un ensemble :
Nb de k-uplets = n^k
Dans notre exemple : Nb de 2-uplets = 4^2

5/ Arrangements

Définition : On prend k éléments dans un ensemble de n éléments il s'agit d'une liste donc **l'ordre dans lequel apparaissent les éléments est pris en compte**
On utilise les arrangements lorsque l'on effectue **un tirage successif et sans remise** (par exemple un tirage dans une urne sans remise, au loto , podium…) de manière générale il s'agit d'une situation où **l'on prélève les éléments un par un en prenant soin de ne pas les remettre ensuite en jeu.**

Pour obtenir le nombre d'arrangements possibles pour un ensemble :
On notera n le Cardial d'un ensemble et k le nombre d'éléments que l'on doit prendre parmi l'ensemble

On a : $\frac{n!}{(n-k)!}$ **Arrangements possibles**

Rappel sur les factorielles :
Factorielle de 4 s'écrit 4 ! et correspond à la multiplication de 4 par tout les entiers qui précèdent 4 jusqu'à 0 (0 n'est bien sûr pas compris) : 4*3*2*1
Donc de manière générale : n ! = n*(n-1)*(n-2)…*3*2*1

6/ Combinaisons

Définition : On prend k éléments dans un ensemble de n éléments **mais l'ordre n'est pas pris en compte.**

On utilise les combinaisons dans 2 cas :

Si le tirage est successif et sans remise (dans ce cas la différence avec les Arrangement est *qu'un arrangement prend en compte l'ordre et pas une combinaison*) (exemple : tirage de cartes)

Si le tirage est simultané (on prend k élément en même temps) (exemple : on prend dans une urne 6 boules d'un coup)

Une combinaison se note : $\binom{n}{k}$ et on le lit « k parmi n » on appelle cela également *un coefficient binomial*

Si on connait n et k on a une formule pour calculer $\binom{n}{k}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Le triangle de Pascal permet de lire facilement les valeurs de $\binom{n}{k}$ pour les premiers n et les premiers k :

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Le triangle de Pascal

(Ici le k s'appelle p)

On lit par exemple : $\binom{6}{5}$ = 6 ou $\binom{5}{2}$ = 10