Suites numériques

Définitions générales et notations

Définition 1

Une **suite** numérique u, également notée (u_n), est une fonction définie sur $\mathbf{N}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.

$$u \ : \ \begin{array}{l} \mathbf{N} \to \mathbf{R} \\ n \mapsto u(n) \end{array}$$

Définition 2

Le nombre $u(n)$, image par u du nombre entier n, est appelé le **terme d'indice** n ; il est noté u_n.

Remarques

□ u_0 est le terme d'indice 0 ; c'est le premier terme de la suite.

□ Une suite numérique (u_n) est une liste ordonnée de nombres réels, qui peut permettre de modéliser un **phénomène discret**.

□ Dans le plan muni d'un repère, une suite est représentée par le nuage de points de coordonnées (n, u_n) où $n \in \mathbf{N}$.

Notations

□ Pour tout nombre entier naturel n non nul, le **terme qui précède** u_n est noté u_{n-1}.

□ Pour tout nombre entier naturel n, le **terme qui suit** u_n est noté u_{n+1}.

Définition à l'aide d'une formule explicite

Définition 3

Une suite (u_n) est donnée par une **formule explicite** lorsque le nombre u_n est donné en fonction du nombre entier naturel n. On a donc $u_n = f(n)$ où f est une fonction.

Conséquence

Dans le plan muni d'un repère, les point du nuage représentant une suite de terme général $u_n = f(n)$, où $n \in \mathbf{N}$, sont situés sur la courbe représentative de la fonction f.

Définition à l'aide d'une relation de récurrence

Définition 4

Une suite (u_n) est donnée **sous forme récurrente** (d'ordre 1) lorsque :

- un terme de la suite est donné ;
- le nombre u_{n+1} est donné en fonction du nombre u_n.

On a donc $u_{n+1} = f(u_n)$, appelée **relation de récurrence**, où f est une fonction.

Remarque

Un terme de la suite peut être donné en fonction de deux termes précédents.
La forme récurrente est alors dite d'ordre 2.
Exemple
la suite (u_n) *définie par* $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ *et, pour tout entier naturel* n, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Modéliser une situation à l'aide d'une suite récurrente consiste à traduire cette situation en explicitant un procédé qui permet de calculer les termes de la suite à l'aide des termes précédents, c'est-à-dire déterminer une relation de récurrence.

Sens de variation d'une suite

Définition 5

☐ Une suite (u_n) est dite **croissante** à partir de l'indice p, où $p \in \mathbf{N}$, si et seulement si pour tout nombre entier naturel n, avec $n \geqslant p$, $u_{n+1} \geqslant u_n$;

☐ Une suite (u_n) est dite **strictement croissante** à partir de l'indice p, où $p \in \mathbf{N}$, si et seulement si pour tout nombre entier naturel n, avec $n \geqslant p$, $u_{n+1} > u_n$;

☐ Une suite (u_n) est dite **décroissante** à partir de l'indice p, où $p \in \mathbf{N}$, si et seulement si pour tout nombre entier naturel n, avec $n \geqslant p$, $u_{n+1} \leqslant u_n$;

☐ Une suite (u_n) est dite **strictement décroissante** à partir de l'indice p, où $p \in \mathbf{N}$, si et seulement si pour tout nombre entier naturel n, avec $n \geqslant p$, $u_{n+1} < u_n$;

☐ Une suite (u_n) qui est (strictement) croissante ou décroissante est dite (strictement) **monotone**.

Méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite

☐ Pour déterminer le sens de variation d'une suite il suffit d'étudier, pour tout entier naturel n, le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

☐ Lorsque la suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n, à l'aide d'une formule explicite $u_n = f(n)$ et que la fonction f est définie et monotone sur $[p; +\infty[$, alors la suite (u_n) a la même monotonie que la fonction f.

☐ Lorsque (u_n) est une suite telle que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, u_n **est strictement positif** :

- La suite (u_n) est **strictement croissante** à partir de l'indice p si et seulement si, pour tout entier naturel n, avec $n \geqslant p$,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1.$$
- La suite (u_n) est **strictement décroissante** à partir de l'indice p si et seulement si, pour tout entier naturel n, avec $n \geqslant p$,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1.$$