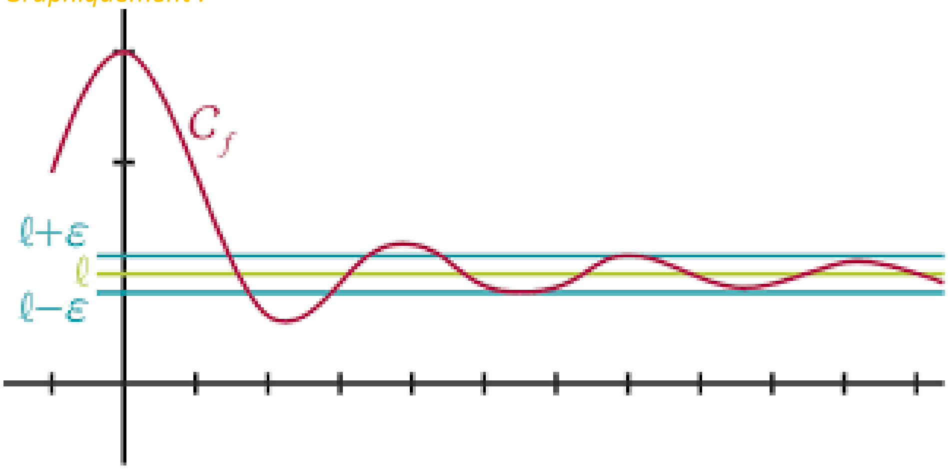
Limites de fonctions

1/ Limite d'une fonction à l'infini

Cas d'une limite finie en +∞

La limite est un réel l (autre que + ou – l'infini) lorsque x tend vers + ∞
On dit qu'une fonction admet pour limite l en plus l'infini lorsque celle-ci se rapproche de l plus x est grand

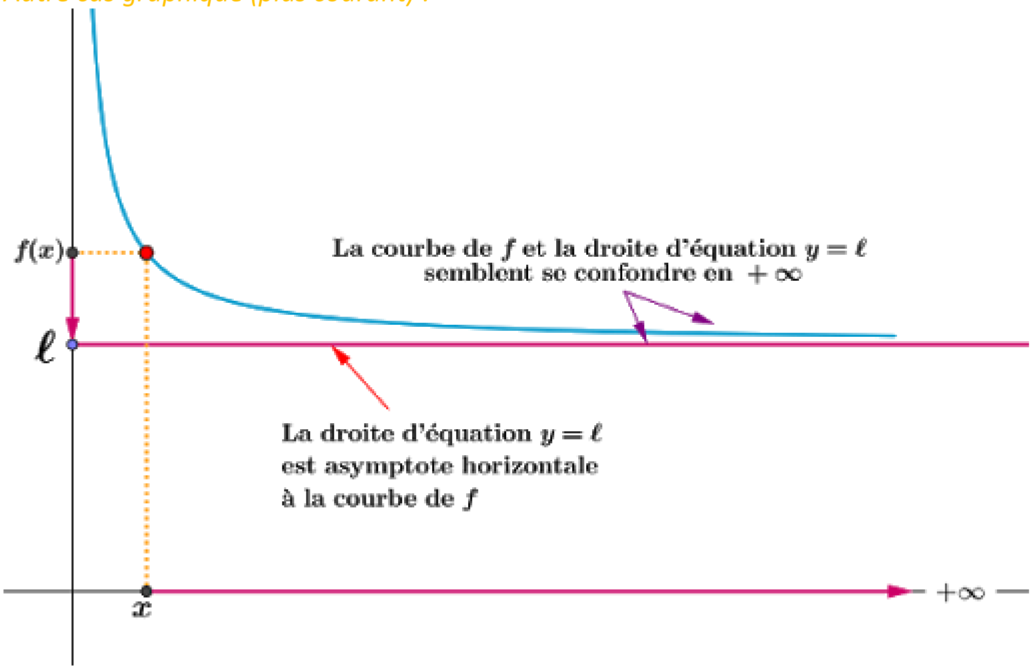
Graphiquement :



Ici a est ε
Dans cet situation on dit que la limite de la fonction f est l donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

Par ailleurs on peut dire que la droite d'équation y = l (droite en vert clair) est une asymptote horizontale à la courbe Cf

Autre cas graphique (plus courant) :

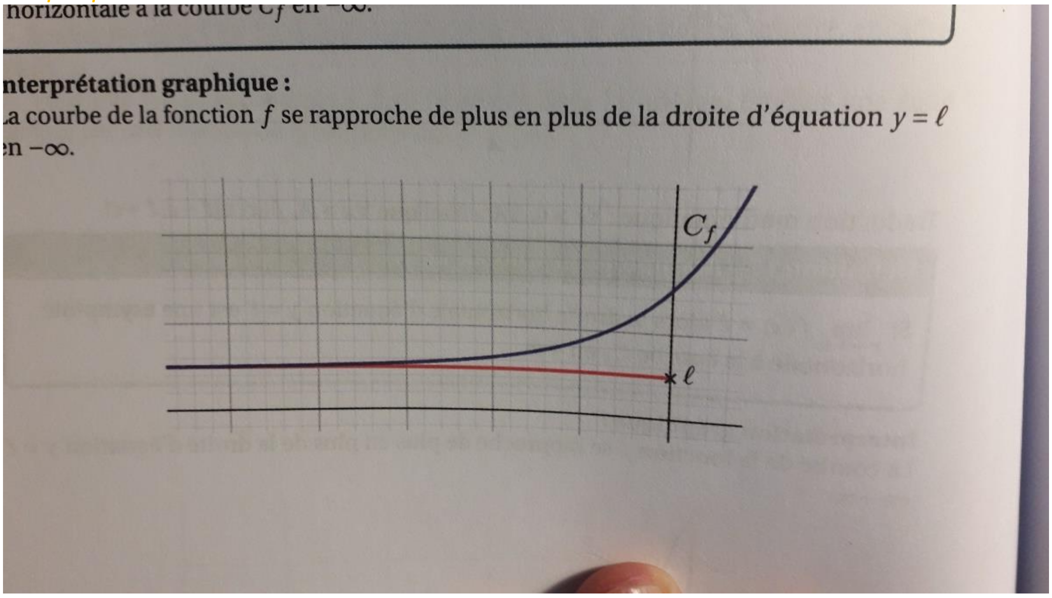


De la même manière : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

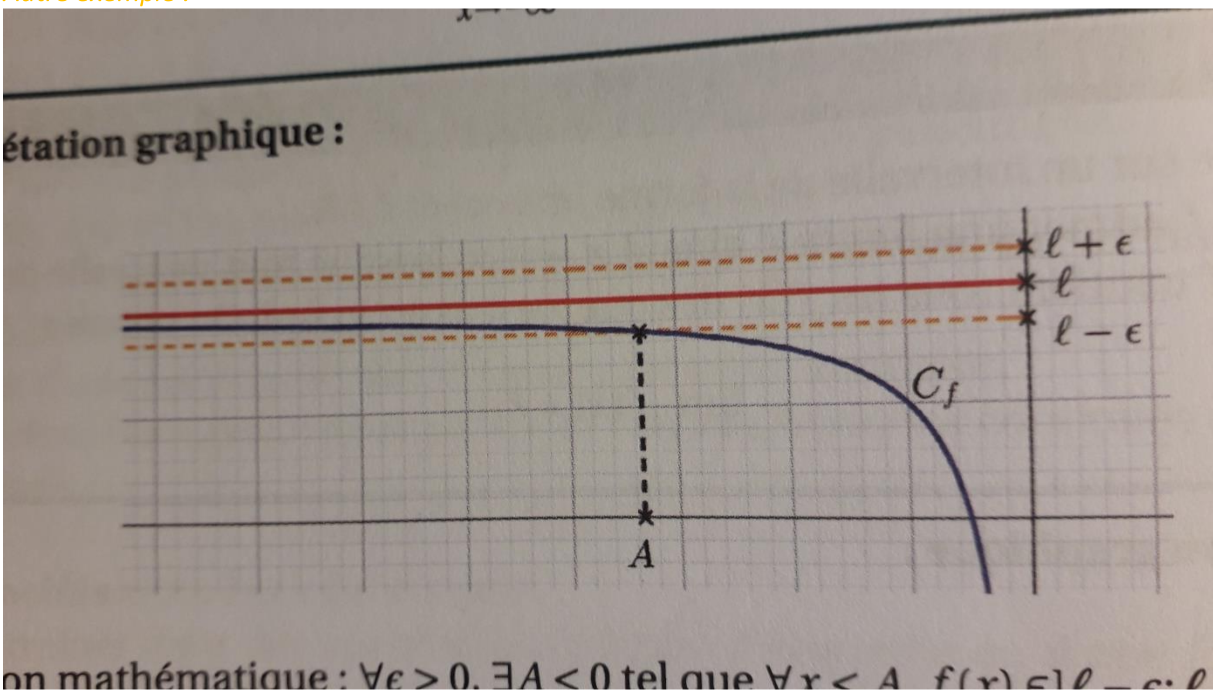
Cas d'une limite finie en -∞

La limite est un réel l (autre que + ou – l'infini) lorsque x tend vers - ∞
On dit qu'une fonction admet pour limite l en moins l'infini lorsque celle-ci se rapproche de l plus x est petit

Graphiquement :



Autre exemple :



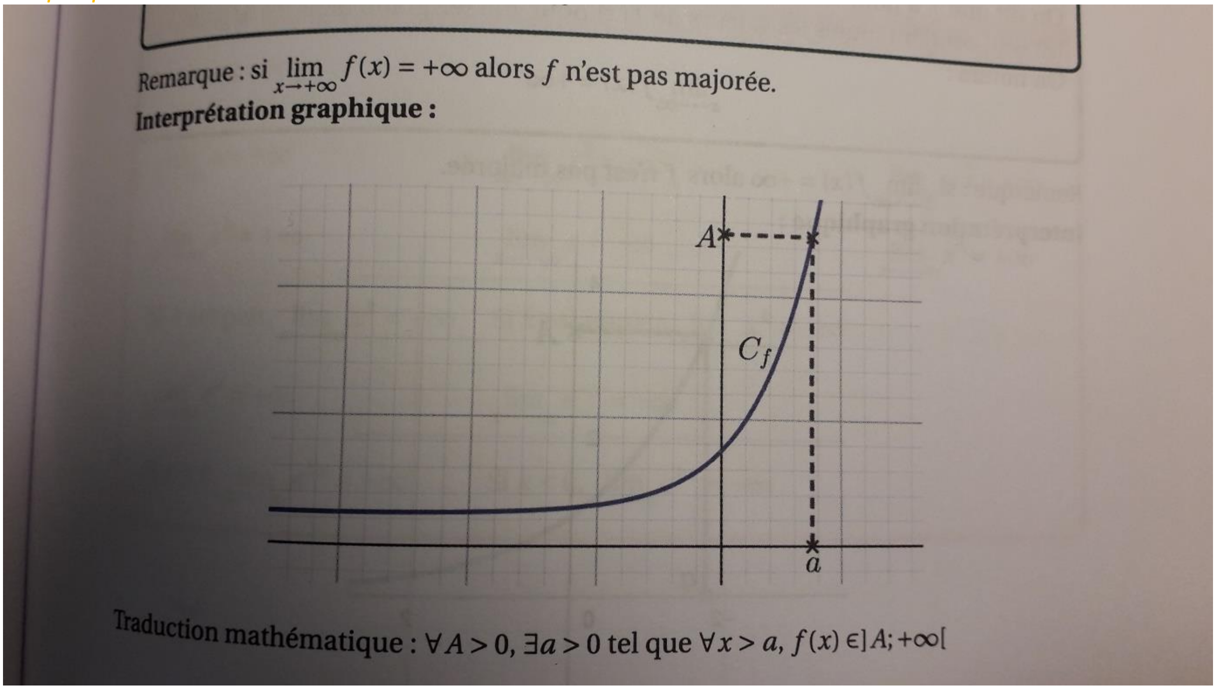
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

Les droites rouges sont donc des asymptotes horizontales d'équation y = l

Petit point sur les exposants + et - ; lorsque l'on note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$ cela signifie que la fonction f « se rapproche » de 0 par les valeurs positives (3,2,1…) , si on écrit $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^-$ cela signifie que la fonction f « se rapproche » de 0 par les valeurs négatives (-3,-2,-1…) cette indication peut être utile lorsque l'on fait des opérations sur les limites

Cas d'une limite infinie en +∞
La limite est + ou - ∞ lorsque x tend vers +∞

Graphiquement :

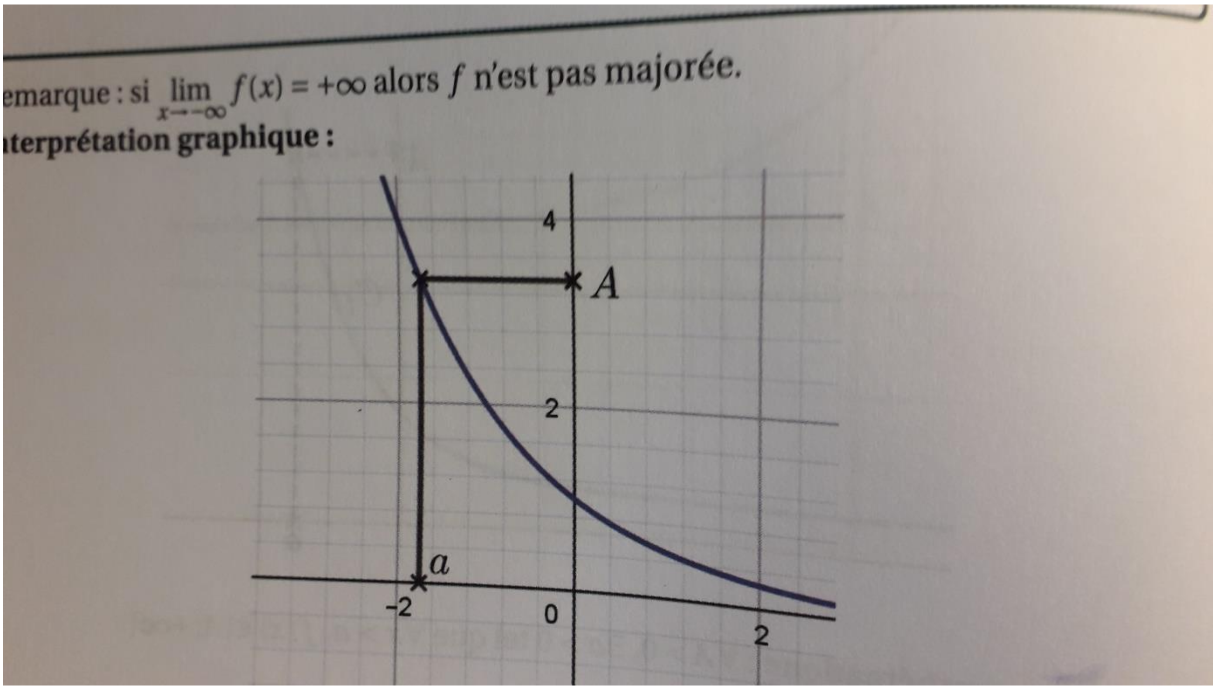

Remarque : si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors f n'est pas majorée.
Interprétation graphique :

Traduction mathématique : $\forall A > 0, \exists a > 0$ tel que $\forall x > a, f(x) \in]A;+\infty[$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Pas d'asymptote lorsque x tend vers + ou – l'infini

Cas d'une limite infinie en -∞
La limite est + ou - ∞ lorsque x tend vers -∞
Graphiquement :



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

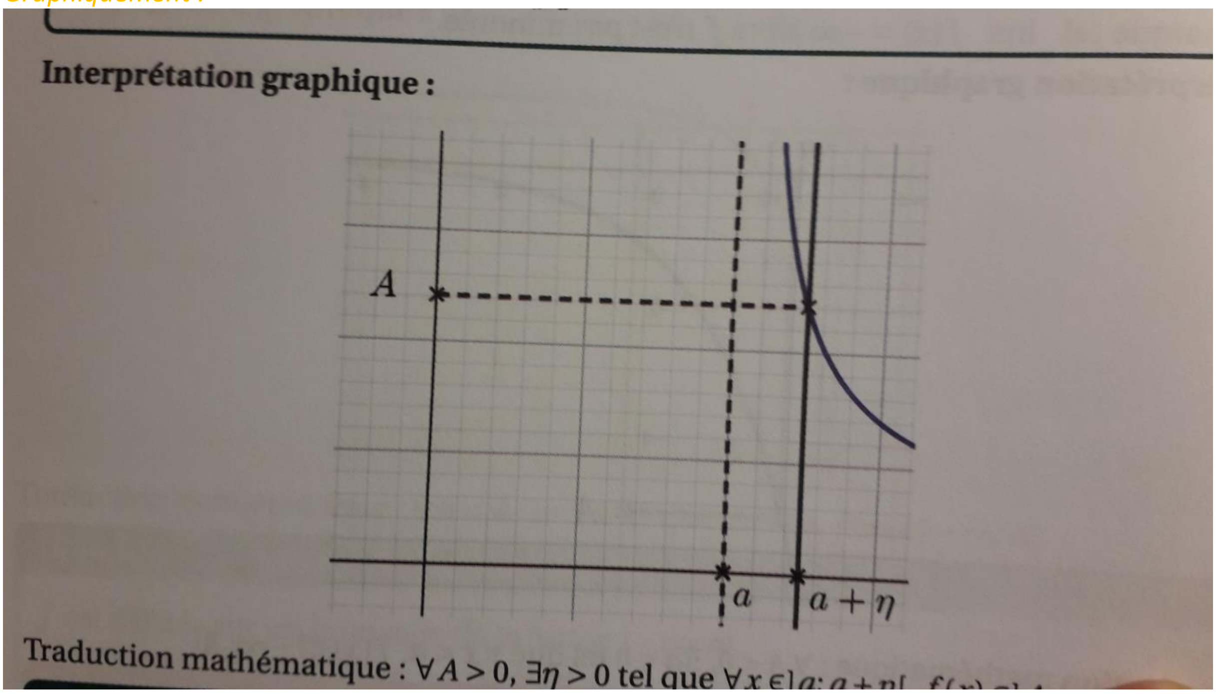
Pas d'asymptote lorsque x tend vers + ou – l'infini

2/ Limite d'une fonction en un réel a

Cas d'une limite de $+\infty$ à droite d'un réel a

Cela signifie que quand x tend vers a sa limite est $+\infty$ le fait de dire « à droite » signifie que x « se rapproche » de a par des valeurs plus grandes que a (a+2 ; a+1 ; a)

Graphiquement :



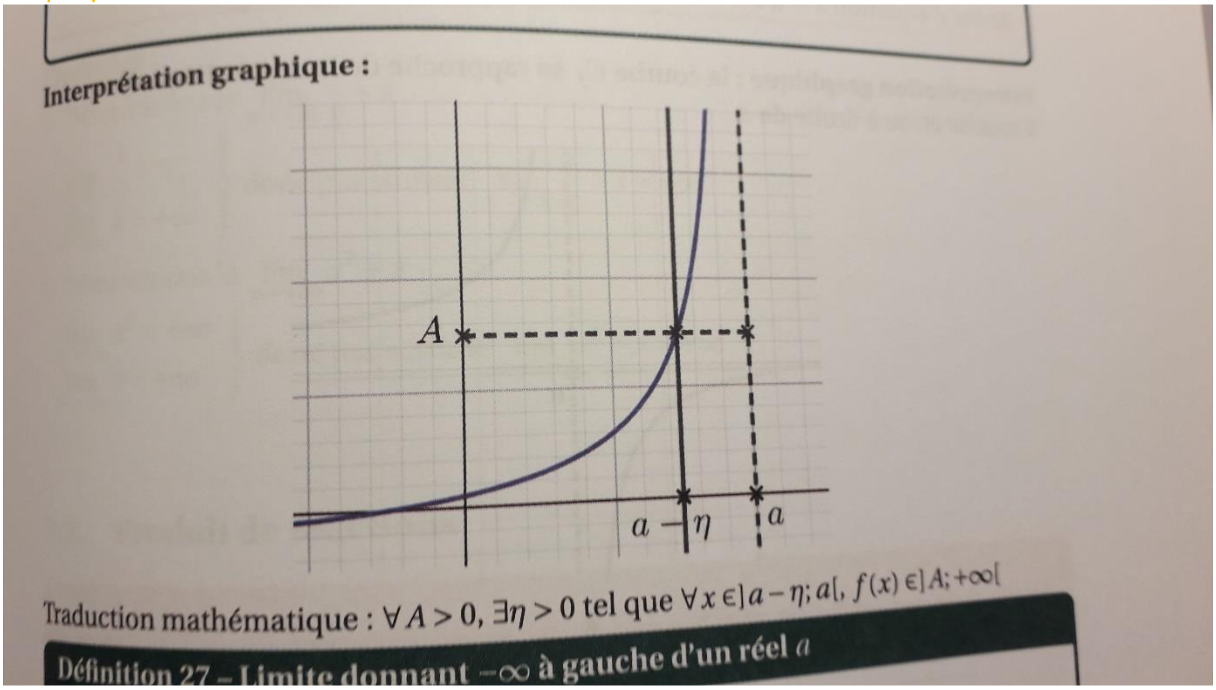
$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ ici l'exposant + pour a signifie qu'on se rapproche de a par des valeurs plus grandes

On a ici une asymptote verticale d'équation x = a

Cas d'une limite de +∞ à gauche d'un réel a

Cela signifie que quand x tend vers a sa limite est +∞ le fait de dire « à gauche » signifie que x « se rapproche » de a par des valeurs plus petites que a (a-2 ; a-1 ; a)

Graphiquement :

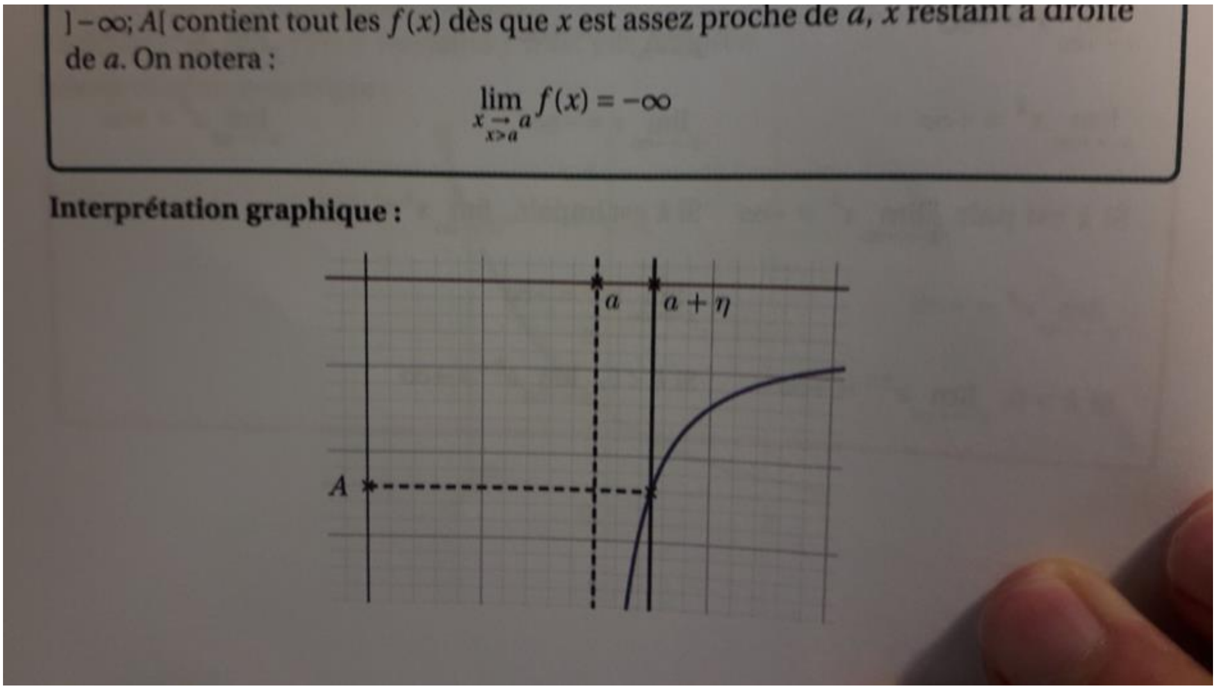


$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ ici l'exposant - pour a signifie qu'on se rapproche de a par des valeurs plus petites

On a ici une asymptote verticale d'équation x = a

Cas d'une limite de -∞ à droite d'un réel a

Graphiquement :


]−∞; A[contient tout les $f(x)$ dès que x est assez proche de a, x restant à droite de a. On notera :

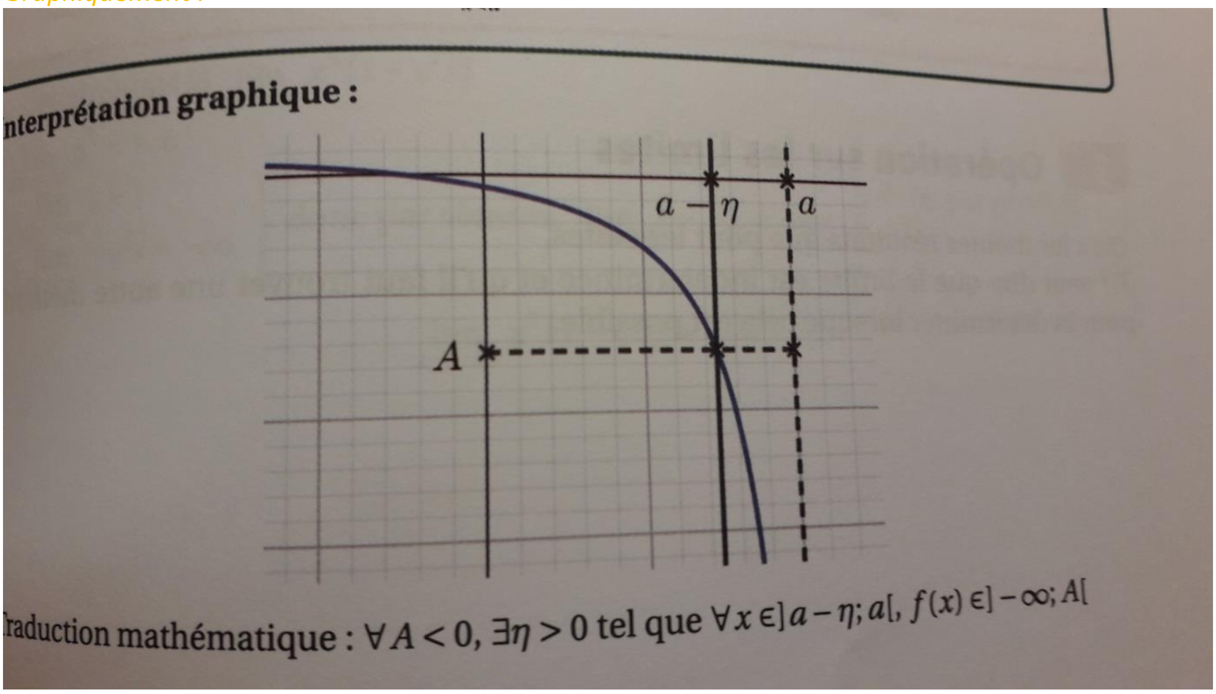
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = -\infty$$

Interprétation graphique :

$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

On a ici une asymptote verticale d'équation x = a

Cas d'une limite de -∞ à gauche d'un réel a
Graphiquement :


nterprétation graphique :

raduction mathématique : $\forall A < 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in]a-\eta; a[$, $f(x) \in]-\infty; A[$

$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

On a ici une asymptote verticale d'équation x = a

3/ Limites de fonctions usuelles

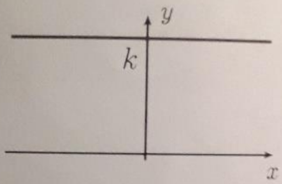
On reprendra ici les documents du cours qui semblent assez visuels et simples à comprendre.

Dans ce qui suit, a désigne un nombre réel.

• **La fonction constante :**

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & k \end{array}$$

Equation de la courbe : $y = k$



$\lim\limits_{x \to -\infty} k = k$

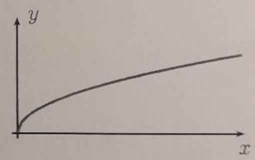
$\lim\limits_{x \to +\infty} k = k$

$\lim\limits_{x \to a} k = k$

• **La fonction racine carrée :**

$$\begin{array}{rcl} [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Equation de la courbe : $y = \sqrt{x}, x \geqslant 0$



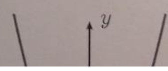
$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

pour $a \geqslant 0$, $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

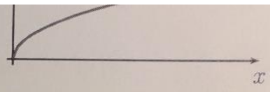
• **La fonction carré :**

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Equation de la courbe : $y = x^2$



$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

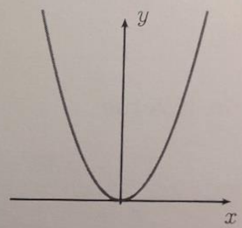


pour $a \geqslant 0, \ \lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

• La fonction carré :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Equation de la courbe : $y = x^2$



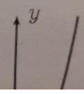
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$

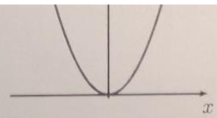
• La fonction cube :

Equation de la courbe : $y = x^3$



$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$



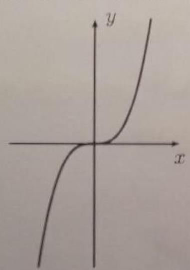
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$

• La fonction cube :

Equation de la courbe : $y = x^3$

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3 \end{aligned}$$



$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

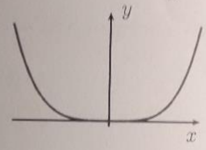
$\lim\limits_{x \to a} x^3 = a^3$

- **La fonction puissance :**

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$$

Equation de la courbe : $y = x^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$

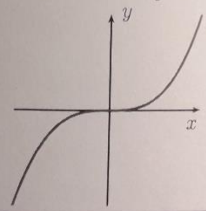
Equation de la courbe : $y = x^n, n$ pair



si n est pair	si n est impair
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

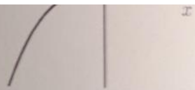
$\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$

Equation de la courbe : $y = x^n, n$ impair



- **La fonction inverse :**

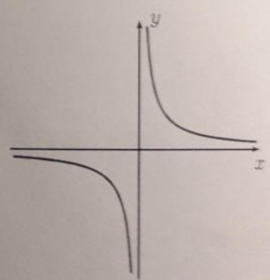
$\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$



- **La fonction inverse :**

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

Equation de la courbe : $y = \dfrac{1}{x}$



$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0^-$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0^+$, donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe en $-\infty$ et en $+\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe.

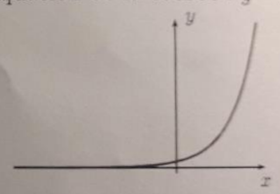
Pour $a \neq 0$, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a}$

Pour $a \neq 0$, $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$

- **La fonction exponentielle :**

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array}$$

Equation de la courbe : $y = e^x$



$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$, donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe en $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to a} e^x = e^a$

4/ Opérations sur les limites :

On suit exactement le même modèle que les suites

3.1. Somme de fonctions

Propriété 20 – Limite de somme de fonctions

ℓ et ℓ' sont des réels.

$\lim f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\mathbf{\lim f(x) + g(x)}$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	***F.I***

Exemples :

▷ Déterminons la $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + x$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \text{donc par somme } \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + x = +\infty$$

▷ Déterminons la $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + x$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \text{donc par somme } \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + x = +\infty$$

3.2. Produit de fonctions

Propriété 21 – Limite de produit de fonctions

ℓ et ℓ' sont des réels.

$\lim f(x)$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim f(x) \times g(x)$	$\ell \times \ell'$	$+\infty\ (\ell > 0)$ $-\infty\ (\ell < 0)$	$-\infty\ (\ell > 0)$ $+\infty\ (\ell < 0)$	$\pm\infty$	***F.I***

Exemples :

▷ Déterminons la $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3(1-\sqrt{x})$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\sqrt{x} = -\infty \end{array}\right\} \text{donc par somme } \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\sqrt{x} = -\infty \end{array}\right\} \text{donc par produit}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3(1-\sqrt{x}) = -\infty$$

Cours complet

3.3. Quotient de fonctions

Propriété 22 – Limite de quotient de fonctions

ℓ et ℓ' sont des réels.

$\lim f(x)$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim g(x)$	$\ell'(\ell' \neq 0)$	$+\infty$	0	$\ell'(\ell' \neq 0)$	0	$\pm\infty$
$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0^+ **ou** 0^-	$\pm\infty$	$\pm\infty$	***F.I***	***F.I***

Exemples :

▷ Déterminons la $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x+3}{x^2-1}$

Pour les formes indéterminée on dispose d'un théorème simple à utiliser :

la limite d'un polynôme est celle de son terme de plus au degré

la limite d'un quotient de polynôme est la limite du quotient de leurs termes de plus haut degré

Attention : un polynôme est une expression du type ax^n+ bx^m +… avec a,b,n et m des réels donc il ne doit pas y avoir d'exponentielle

Exemple : Calculons la limite de $\frac{x^2-2x}{x^3-2}$ quand x tend vers $+\infty$

au numérateur le terme de plus haut degré est x^2 et au dénominateur x^3

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x}{x^3-2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0^+$

5/ L'opération de composition

Face à des fonctions dont les formules sont très complexe on a recourt à la composition pour calculer sa limite.

Exemple : Calculons la limite de f(x) = $(5x^3 - 2x)^5$ lorsque x tend vers +∞

Au brouillon on note : $x \to 5x^3 - 2x = X \to X^5$

On traduit cela par : on prend x auquel on associe $5x^3$ -2x, on pose $5x^3$ -2x = X , on associe à X, X^5

La limite de $(5x^3 - 2x)^5$ est celle de X^5 (puisque X^5 est la dernière étape)

Au propre :

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^3 - 2\mathrm{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 5x^3 (règle\ du\ polynôme) = +\infty$

Et $\lim\limits_{X\to+\infty} X^5$ = +∞ (attention ne pas oublier de remplacer le x par X en bas)

Donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ = +∞

Pour la présentation on procède comme n'importe quel calcul de limite avec les accolades, **la composition est considérée comme une opération** au même titre qu'une somme, un produit ou un quotient

Autre exemple : Calculons la limite de g(x) = $\frac{1}{x^2-x+5}$ lorsque x tend vers -∞

Au brouillon on note : $x \to x^2 - x + 5 = X \to \frac{1}{X}$

La limite de $\frac{1}{x^2-x+5}$ est celle de $\frac{1}{X}$ (puisque $\frac{1}{X}$ est la dernière étape)

Au propre :

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 - x + 5 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 \ (règle\ du\ polynôme) = +\infty$

Et $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{X}$ = 0

Remarque : On observe bien que X tend vers +∞ et pas -∞ car on reprend la limite trouvée précédemment : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et on fait tendre X vers cette limite pour la suite du calcul

Si il y avait eu une étape suivante on aurait fait tendre Y (le nom qu'on aurait donné au résultat de $\frac{1}{X}$) vers O car $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{X}$ = 0

Dans notre exemple : **Par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ = 0**

6/ Théorèmes sur les limites

On retrouve les mêmes théorèmes que pour les suites

Celui de comparaison :

On a une fonction u(x) qui a pour limite - l'infini quand x tend vers 0 et une autre fonction v(x) tel que v(x) < u(x)

On peut dire que v(x) a pour limite - l'infini quand x tend vers O aussi car elle est inférieure à u(x)

On a une fonction u(x) qui a pour limite + l'infini quand x tend vers +∞ et une autre fonction v(x) tel que v(x) > u(x)

On peut dire que v(x) a pour limite + l'infini quand x tend vers +∞ aussi car elle est supérieure à u(x)

Et Celui des gendarmes :

On a 3 suites v(x) , w(x) et u(x) tel que v(x) < u(x) < w(x)
Si la limite de v(x) et de w(x) est égale au même l alors la limite de u(x) est égale à l

Ce théorème est surtout utilisé avec les cosinus les sinus ou $(-1)^x$ (cf cours sur les suites)

7/ Croissances comparées

On explique ici que l'exponentielle l'emporte toujours sur les puissances
Ainsi la limite de de $\frac{e^x}{x^k}$ avec k un réel est égale à la limite de e^x
La limite de $e^x * x^k$ avec k un réel est égale à la limite de e^x
Attention tout dépendra de vers quoi tend x car la limite de e^xest différente si x tend vers + ou - ∞