Produit scalaire – Spé maths 1ère

Le produit scalaire est le produit de deux vecteurs à partir duquel on obtient un résultat algébrique (scalaire)

Formule trigonométrique :

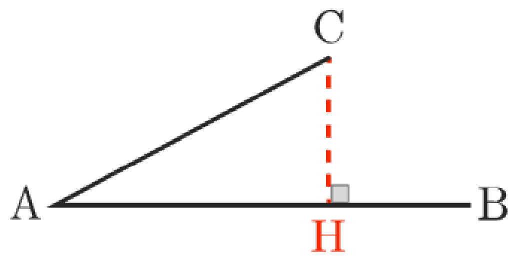
Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, l'angle formés par ces deux vecteurs (ils faut qu'ils aient la même origine) se note : $(\vec{u}\,,\vec{v}\,)$

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'écrit donc : **$\vec{u}\,.\,\vec{v} = ||\vec{u}|| * ||\vec{v}|| * \cos(\vec{u}\,,\vec{v}\,)$**

$||\vec{u}||$ est la norme (la longueur) de $\vec{u}$

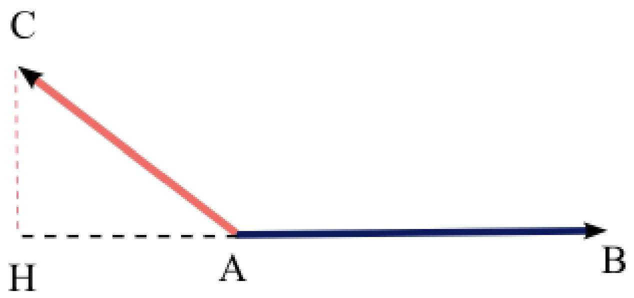
Formule du projeté orthogonal :

On a $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs **qui forment un angle aigu,** H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) :



On peut écrire le produite scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: **$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$ = AB * AH**

On a $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs **qui forment un angle obtus,** H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) :



On peut écrire le produite scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: ***$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$ = - AB * AH***

Dans un repère orthonormé :

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, ils ont respectivement pour coordonnées (x ; y) et (x' ; y')

Donc le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est : **$\vec{u}\,.\,\vec{v}$ = x*x' + y*y'**

Formule du « défaut d'orthogonalité » :

Soit ABC un triangle quelconque :

On peut écrire le produite scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: **$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$ = ½ (AB^2 + AC^2 – BC^2)**

Bilinéarité et symétrie :

Pour tout vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$

Le produit scalaire est distributif :

$\vec{u}$.($\vec{v}$ + $\vec{w}$) = $\vec{u}$. $\vec{v}$ + $\vec{u}$. $\vec{w}$

Le produit scalaire est bilinéaire :

$\vec{u}$.(k* $\vec{v}$) = (k* $\vec{u}$). $\vec{v}$ = k ($\vec{u}$. $\vec{v}$) avec k un réel

Le produit scalaire est symétrique :

$\vec{u}$. $\vec{v}$ = $\vec{v}$. $\vec{u}$

Orthogonalité :

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont dits orthogonaux lorsque les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Si deux vecteurs sont orthogonaux alors leurs produit scalaire est égal à 0.

Vecteur normal :

Un vecteur normal à une droite d est un vecteur non nul perpendiculaire à un vecteur directeur de d (se trouvant sur d).

Equation cartésienne :

On imagine une droite d d'équation : ax + by +c = 0 son vecteur directeur est $\vec{u}$ et son vecteur normal est $\vec{n}$, les coordonnées de $\vec{u}$ sont (-b ; a) et celles de $\vec{n}$ sont (a ; b)

Méthode pour trouver une équation cartésienne d'une droite :

J'ai une droite d passant par le point A (5 ; -1) et avec un vecteur normal $\vec{n}$ (2 ; -3)

On aura une équation de la forme ax + by + c = 0

On sait déjà d'après les coordonnées de $\vec{n}$ que a = 2 et que b = -3, pour trouver c on va utiliser les coordonnées de A en les mettant dans l'équation à la place de x et y

Donc : 2*5 - 3*(-1) + c =0 donc 10 + 3 = - c donc 13 = -c donc c = -13

On a donc l'équation finale :

2x – 3y – 13 = 0