

# BE SXS-Galerkin Discontinuu

Pierre RAYNAL, Paulin HUGUET, Jean-Pierre MANSOUR

Novembre 2023

## Introduction

L'objectif de ce BE est de résoudre le système des équations de Maxwell dans un domaine bidimensionnel  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ .

Plus précisément, nous cherchons à déterminer  $\mathbf{E} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $H : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  solution de

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mathbf{curl} H(x, t) &= \mathbf{J}(x, t), \\ \mu(x) \frac{\partial H}{\partial t}(x, t) + \mathbf{curl} \mathbf{E}(x, t) &= 0, \\ \mathbf{E}(x, 0) &= \mathbf{E}_0(x), \\ H(x, 0) &= H_0(x), \end{aligned}$$

avec :

- $\mathbf{curl} H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial y} \\ -\frac{\partial H}{\partial x} \end{pmatrix}$
- $\mathbf{curl} \mathbf{E} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$

## 1 Analyse Numérique de la méthode de Galerkin Discontinuu pour un problème de cavité

Dans un premier temps, nous ferons le problème en imposant sur la frontière  $\Gamma$  une condition de type métal parfait avec  $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$  avec  $\mathbf{n}$  la normale unitaire sortante du domaine  $\Omega$ .

**Q1 :** On construit un maillage fini du domaine  $\Omega$  que l'on notera  $\tau_h$ .

On travaillera sur les espaces  $\mathbf{V}_{h,k}^d = \{\mathbf{v}_h \in [\mathbf{L}^2(\Omega)]^d \text{ telles que } \forall T \in \tau_h, \mathbf{v}_h|_T \in [P^k(T)]^d\}$ , avec  $P^k(T)$  l'espace des polynômes de degré au plus égal à  $k \in \mathbb{N}$ .

On travaille alors sur le système équivalent en formulation faible avec  $\forall (\mathbf{v}_h, w_h) \in (\mathbf{V}_{h,k}^2, \mathbf{V}_{h,k}^1)$  et  $\forall T \in \tau_h$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_T \varepsilon \mathbf{E}_h \cdot \mathbf{v}_h dx - \int_T \mathbf{curl} H_h \cdot \mathbf{v}_h dx &= \int_T \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}_h dx, \\ \frac{d}{dt} \int_T \mu H_h w_h dx + \int_T \mathbf{curl} \mathbf{E}_h w_h dx &= 0. \end{aligned}$$

En utilisant les techniques d'intégration par parties sur les équations de notre système, on obtient alors :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_T \varepsilon \mathbf{E}_h \cdot \mathbf{v}_h dx - \int_T \text{curl} H_h \cdot \mathbf{v}_h dx + \frac{1}{2} \int_{\partial T} |[\mathbf{n} \times \mathbf{H}_h]| \cdot \mathbf{v}_h d\gamma = \int_T \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}_h dx},$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_T \mu H_h w_h dx + \int_T \mathbf{E}_h \cdot \text{curl} w_h dx - \int_{\partial T} \{\{\mathbf{E}_h\}\} \cdot (\mathbf{n}_T \cdot w_h) d\gamma = 0}.$$

avec, sur F la frontière entre T et T' :

- $|[\mathbf{n} \times z]|_F = \mathbf{n}_T \times z_T + \mathbf{n}_{T'} \times z_{T'}$ ,
- $\{\{z\}\}_F = \frac{1}{2}(z_T + z_{T'})$

On a ainsi ici un **schéma centré**.

On étudiera aussi le **Schéma décentré** obtenu en ajoutant les termes de pénalisation pondérées par  $\alpha_E, \alpha_H \geq 0$  :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_T \varepsilon \mathbf{E}_h \cdot \mathbf{v}_h dx - \int_T \text{curl} H_h \cdot \mathbf{v}_h dx + \frac{1}{2} \int_{\partial T} |[\mathbf{n} \times \mathbf{H}_h]| \cdot \mathbf{v}_h d\gamma + \alpha_E \int_{\partial T} |[\mathbf{n} \times \mathbf{E}_h]| (\mathbf{n} \times \mathbf{v}_h) d\gamma = \int_T \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}_h dx},$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_T \mu H_h w_h dx + \int_T \mathbf{E}_h \cdot \text{curl} w_h dx - \int_{\partial T} \{\{\mathbf{E}_h\}\} \cdot (\mathbf{n}_T \cdot w_h) d\gamma + \alpha_H \int_{\partial T} |[\mathbf{n} \times \mathbf{H}_h]| (\mathbf{n} \times \mathbf{w}_h) d\gamma = 0}.$$

Ces deux schémas construits correspondent bien à la formulation de Galerkin discontinue dans le cas  $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ .

En notant  $E \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{V}_{h,k}^2)}$  et  $H \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{V}_{h,k}^1)}$ , les vecteurs contenant respectivement les degrés de liberté des champs  $\mathbf{E}_h$  et  $H_h$ , on peut alors réécrire la formulation générale de Galerkin discontinu sous la forme matricielle suivant :

$$\boxed{M^E \frac{dE}{dt} - R^E H + P^E E = F},$$

$$\boxed{M^H \frac{dH}{dt} + R^H E + P^H H = 0},$$

$$E(0) = E_0 \text{ et } H(0) = H_0,$$

avec :

- $M^E \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{V}_{h,k}^2) \times \dim(\mathbf{V}_{h,k}^2)}$  et  $M^H \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{V}_{h,k}^1) \times \dim(\mathbf{V}_{h,k}^1)}$ , les matrices de masses "diagonales" respectives pour les deux équations.

$$M^E = \begin{pmatrix} M^{E,1} & & & \\ & M^{E,2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & M^{E,N} \end{pmatrix} \text{ et } M^H = \begin{pmatrix} M^{H,1} & & & \\ & M^{H,2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & M^{H,N} \end{pmatrix}, \text{ avec N le nom-}$$

bre d'éléments du maillage, et  $\forall i \in [1, N]$ ,  $M_{k,l}^{E,i} = \int_{T_i} \varepsilon(x) v_l^i(x) v_k^i(x) dx$  produit scalaire des composantes d'une base de  $\mathbf{V}_{h,k}^2$  adapté à l'élément du maillage  $T_i$ . Et de même  $M_{k,l}^{H,i} = \int_{T_i} \mu(x) w_l^i(x) w_k^i(x) dx$  sur  $\mathbf{V}_{h,k}^1$ .

- $P^E \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{V}_{h,k}^2) \times \dim(\mathbf{V}_{h,k}^2)}$  et  $P^H \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{V}_{h,k}^1) \times \dim(\mathbf{V}_{h,k}^1)}$  sont des matrices de pénalisation, construites sur un modèle permettant d'ajouter des effets dissipants sur les frontières des éléments.
- $R^E \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{V}_{h,k}^2) \times \dim(\mathbf{V}_{h,k}^1)}$  et  $R^H = (R^E)^T \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{V}_{h,k}^1) \times \dim(\mathbf{V}_{h,k}^2)}$  sont les matrices de rigidité, composées de termes diagonaux relatifs aux effets sur le domaine ouvert de l'élément, et d'autres éléments "quasi-diagonaux" incorporant les effets sur les frontières des éléments.

**Q2 :** Dans le cas de la discrétisation temporelle du système, on va utiliser un schéma de type **saute-mouton** ou **leap-frog** qui peut se résumer ainsi :

$$\boxed{M^E \frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} - R^E H^{n+1/2} + P^E E^n = F^{n+1/2}},$$

$$\boxed{M^H \frac{H^{n+1/2} - H^{n-1/2}}{\Delta t} - R^H E^n + P^H H^n = 0},$$

Avec  $E^n = E(t_n)$ ,  $H^{n+1/2} = H(t_{n+1/2})$  et  $t_i = i\Delta t$ .

Dans le cas de ce système,  $E$  et  $H$  ne sont pas calculés au même moment. L'initialisation de  $E^0$  reste la même que précédemment, mais pour  $H^{1/2}$ , on est obligé de passer par un développement de Taylor en  $t = 0$  à l'ordre 1 :

$$H^{1/2} = H^0 + \frac{\Delta t}{2} \frac{dH^0}{dt} + O(\Delta t^2)$$

$$\approx H^0 - \frac{\Delta t}{2} (M^H)^{-1} R^H E^0$$

Définissioin maintenant l'énergie du système discrétisé au temps n par :

$$\boxed{\varepsilon_h^n = (M^E E^n, E^n) + (M^H H^{n+1/2}, H^{n-1/2})}. \quad (1)$$

Si on se place dans le cas où  $F = 0$  et sans pénalité, on a alors le système qui devient :

$$M^E (E^{n+1} - E^n) = \Delta t R^E H^{n+1/2},$$

$$M^H (H^{n+1/2} - H^{n-1/2}) = -\Delta t (R^E)^T E^n,$$

Ce qui donne alors :

$$(E^{n+1})^T M^E (E^{n+1} - E^n) = (E^{n+1})^T \Delta t R^E H^{n+1/2},$$

$$(H^{n+1/2})^T M^H (H^{n+3/2} - H^{n+1/2}) = -(H^{n+1/2})^T \Delta t (R^E)^T E^{n+1} = -(E^{n+1})^T \Delta t R^E H^{n+1/2},$$

et :

$$(E^n)^T M^E (E^{n+1} - E^n) = (E^n)^T \Delta t R^E H^{n+1/2},$$

$$(H^{n+1/2})^T M^H (H^{n+1/2} - H^{n-1/2}) = -(H^{n+1/2})^T \Delta t (R^E)^T E^n = -(E^n)^T \Delta t R^E H^{n+1/2},$$

En sommant alors les deux sets d'équations, on obtient alors :

$$(M^E E^{n+1}, E^{n+1}) - (M^E E^n, E^{n+1}) + (M^H H^{n+3/2}, H^{n+1/2}) - (M^H H^{n+1/2}, H^{n+1/2}) = 0,$$

$$\underbrace{(M^E E^{n+1}, E^n) - (M^E E^n, E^{n+1})}_{(M^E E^n, E^{n+1})} + (M^H H^{n+1/2}, H^{n+1/2}) - \underbrace{(M^H H^{n-1/2}, H^{n+1/2})}_{(M^H H^{n+1/2}, H^{n-1/2})} = 0,$$

Ce qui donne ultimement en sommant les deux dernières équations :

$$\varepsilon_h^{n+1} - \varepsilon_h^n = 0,$$

Et ce  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

L'énergie discrétisée est donc bien conservée dans le cas sans source et sans pénalité (centré).

Néanmoins, dans ce cas, l'énergie discrétisée n'est pas forcément positive, ce qui vient imposer une contrainte supplémentaire sur le temps :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_h^n &= (M^E E^n, E^n) + (M^H H^{n+1/2}, H^{n-1/2}) \\
&= \underbrace{(M^E E^n, E^n)}_{\|E^n\|^2 \geq 0} + \underbrace{(M^H H^{n-1/2}, H^{n-1/2})}_{\|H^{n-1/2}\|^2} \geq 0 - \Delta t (R^H E^n, V^{n-1/2}) \\
&= \|E^n\|^2 + \|H^{n-1/2}\|^2 - \Delta t (R^T (M^E)^{-1/2} (M^E)^{1/2} E^n, (M^H)^{-1/2} (M^H)^{1/2} H^{n-1/2}) \\
&\geq \|E^n\|^2 + \|H^{n-1/2}\|^2 - \Delta t \|(M^E)^{-1/2} R^H (M^H)^{-1/2}\| \|E^n\| \|H^{n-1/2}\| \\
&\geq (1 - \frac{\Delta t}{2} \|(M^E)^{-1/2} R^H (M^H)^{-1/2}\|) (\|E^n\|^2 + \|H^{n-1/2}\|^2),
\end{aligned}$$

Et donc si  $\Delta t < \frac{2}{\|(M^E)^{-1/2} R^H (M^H)^{-1/2}\|}$ , l'énergie est donc bien positive et le système est bien stable ici.

**Q3.1 :** Nous allons tout d'abord étudier l'algorithme de résolution sur un exemple simple correspondant à  $\Omega = ]0,1[ \times ]0,1[$ , avec  $\varepsilon = \varepsilon_0$  permittivité diélectrique du vide, et  $\mu = \mu_0$ , sans aucun mouvement de charge  $J = 0$ , et avec les conditions initiales suivantes ( $m \in \mathbb{N}^*$ ) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_0(x, y) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
H_0(x, y) &= -\cos(m\pi x) \cos(m\pi y).
\end{aligned}$$

Ré-injecter les champs proposés dans l'énoncé, dans les différentes équations du système, permet de voir que la solution suivante convient bien au système de propagation d'une onde électromagnétique dans le vide :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(x, y, t) &= \frac{m\pi}{\omega \varepsilon_0} \sin(\omega t) \begin{pmatrix} \cos(m\pi x) \sin(m\pi y) \\ -\sin(m\pi x) \cos(m\pi y) \end{pmatrix} \\
H(x, y, t) &= -\cos(\omega t) \cos(m\pi x) \cos(m\pi y),
\end{aligned}$$

avec  $\omega = c_0 \pi m \sqrt{2}$  et  $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ .

**Q3.3 :** (a) Numériquement, on va d'abord travailler sur un schéma centré sans pénalisation avec  $\alpha_E = \alpha_H = 0$  avec le maillage `cavitypas01.mat`.

On impose une CFL issue de l'analyse précédente de la forme suivante :

$$CFL = \frac{c_0}{h_{min}} \frac{2}{\|(M^H)^{-1/2} R^H (M^E)^{-1/2}\|},$$

avec  $h_{min}$  de l'ordre du plus petit diamètre du cercle circonscrit aux triangles du maillage.

Pour les ordres d'approximation entre  $k=1$  et  $k=3$ , on obtient :

- **Pour  $k=1$ ,** on a une CFL=0.4367 très grande, donnant un schéma très rapide à calculer mais un résultat très discontinu et peu satisfaisant pour une simulation d'une fonction continue.

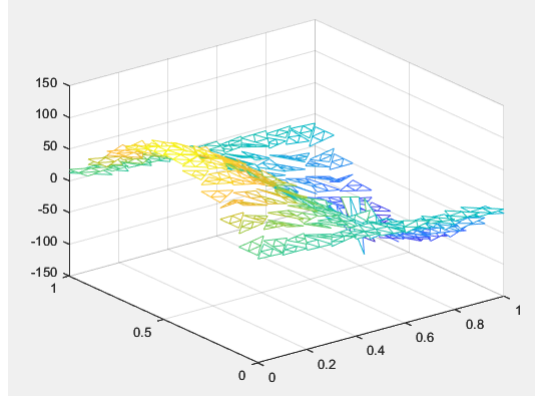


Figure 1: Résultat  $E_x$  final pour  $k=1$  ( $T_f = 10^{-9}$ ) (schéma centré)

- **Pour  $k=2$** , on a une CFL=0.2421, bien plus petite mais donnant un résultat "lissé" bien plus satisfaisant pour une approximation d'un champ continu

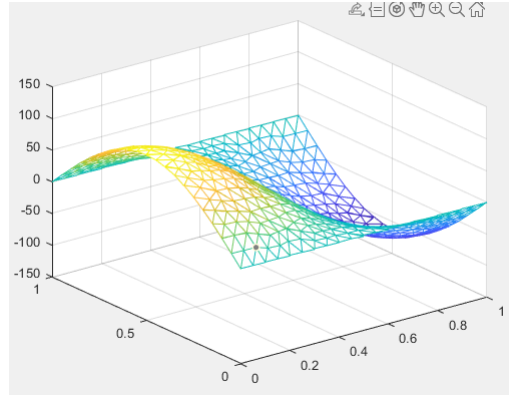


Figure 2: Résultat  $E_x$  final pour  $k=2$  ( $T_f = 10^{-9}$ ) (schéma centré)

- **Pour  $k=3$** , on a une CFL=0.1547, toujours plus petite et donnant des résultats s'approchant toujours plus du champ continu, mais au prix d'un plus grand nombre d'opérations (le pas temporel étant bien plus petit)

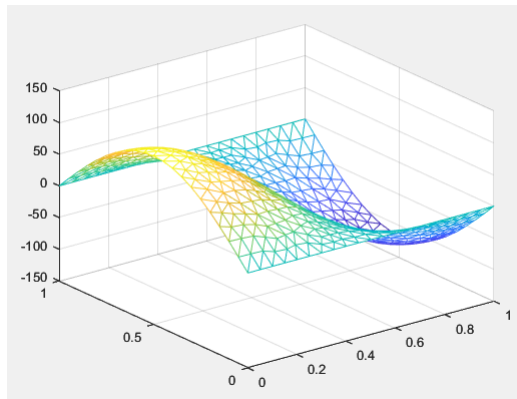


Figure 3: Résultat  $E_x$  final pour  $k=3$  ( $T_f = 10^{-9}$ ) (schéma centré)

De tout cela, on en déduit que pour un même maillage, la CFL évolue approximativement de manière proportionnelle à  $\frac{1}{k}$ .

(b) Maintenant, on vient rajouter des valeurs de pénalité correspondant aux flux upwind avec  $\alpha_E = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$  et  $\alpha_H = \alpha_E^{-1}$ .

En utilisant le même maillage que précédemment, et la même CFL, même pour un temps de simulation très petit ( $T_f = 10^{-9}$ ), on observe très rapidement une divergence violente des valeurs de notre schéma ( $10^9$  contre  $10^2$  obtenu précédemment).

En effet, avec ces termes de pénalité, on n'est plus dans le cas du schéma centré, la CFL utilisée calculée sur cette base n'est plus valide.

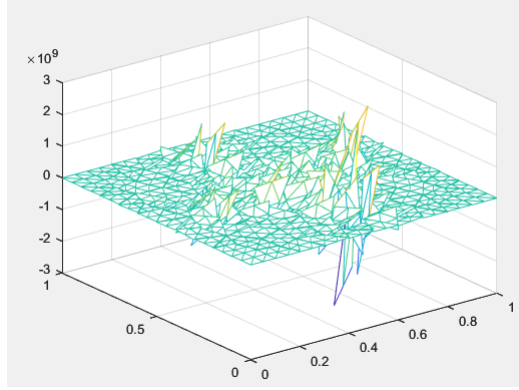


Figure 4: Divergence de la simulation ( $T_f = 10^{-9}$ ) pour  $E_x$  avec CFL du schéma centré mais matrices de pénalisation

Ce résultat était donc assez prévisible.

(c) En divisant la CFL précédente par 4, on prend en compte le passage à un ordre différent d'approximation causé par les matrices de pénalisation. On retrouve ainsi une simulation qui converge bien vers le résultat souhaité sans divergence.

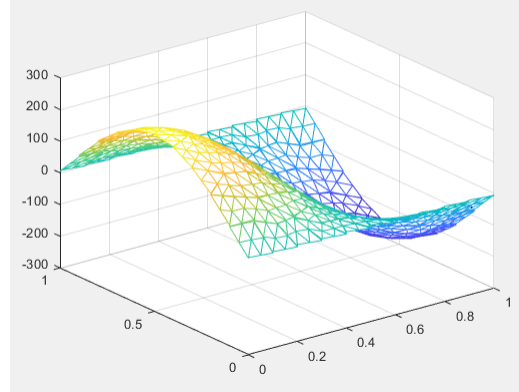


Figure 5: Résultat final  $E_x$  ( $T_f = 10^{-9}$ ) avec CFL mise à jour et matrices de pénalisation non nulles

(d) On compare maintenant les ordres de convergence en espace de notre schéma simulé dans les cas avec et sans matrices de pénalisation.

Afin d'avoir une erreur de discrétisation en temps qui permet de rendre l'ordre étudié. On impose ainsi une condition sur les pas de temps :

$$\Delta t = \frac{1}{4} \text{CFL} \frac{h_{min}^\beta}{c_0}.$$

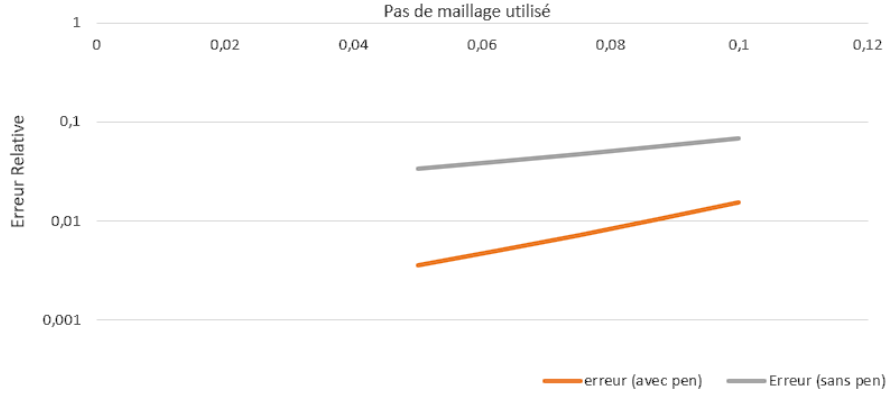


Figure 6: Erreurs relatives dans le cas  $k=1$ ,  $m=1$ ,  $\beta=2$ , pour un temps final  $T_f = 10^{-9}$

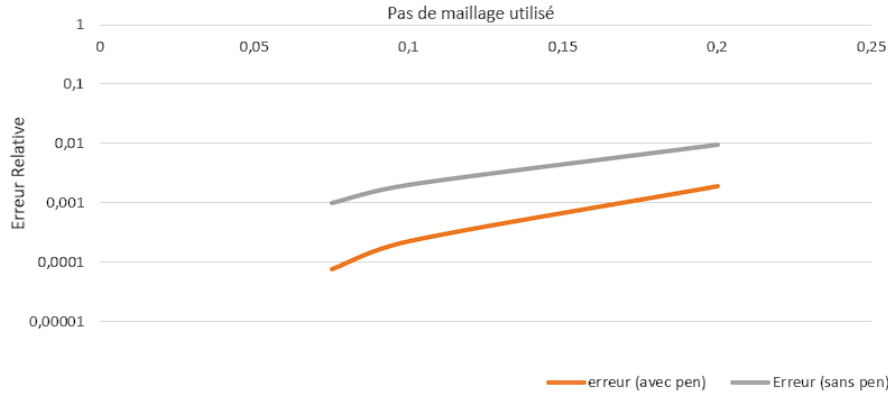


Figure 7: Erreurs relatives dans le cas  $k=2$ ,  $m=1$ ,  $\beta=3$ , pour un temps final  $T_f = 10^{-9}$

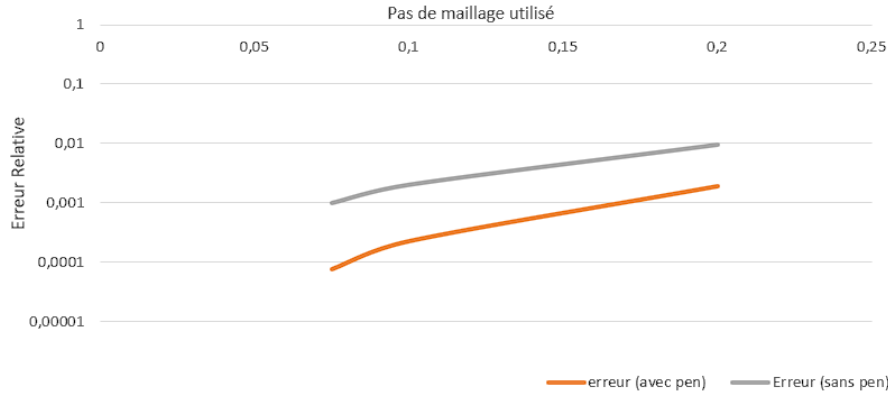


Figure 8: Erreurs relatives dans le cas  $k=3$ ,  $m=2$ ,  $\beta=4$ , pour un temps final  $T_f = 10^{-10}$

On observe en effet que les ordres de convergence évoluent de manière très similaire par rapport au pas de temps pour les cas avec et sans pénalité.

On remarque aussi, qu'augmenter l'ordre d'approximation de  $k=2$  à  $k=3$  n'a que très peu d'effet sur l'erreur relative contrairement au passage de  $k=1$  à  $k=2$ .

(e) On trace ensuite l'évolution de cette erreur relative (par rapport à la solution réelle de notre problème) en fonction de  $\sqrt{N_{tri}} \bar{N}$  avec  $N_{tri}$  le nombre de triangle du maillage utilisé, et donc  $N_{tri} * N$

représentant le nombre de degrés de liberté de notre schéma, et permettant de comparer les différentes approximations  $k$  entre elles ici.

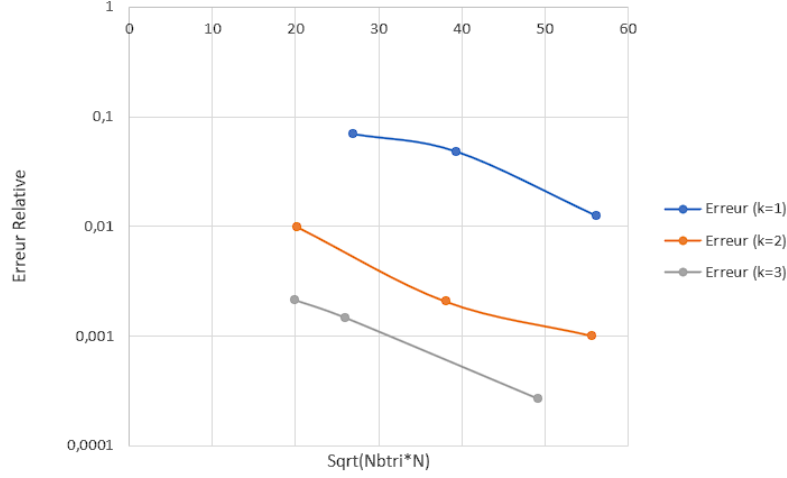


Figure 9: Erreurs relatives en fonction de la racine du nombre de degrés de libertés de notre schéma (pour  $m=1$ )

## 2 Simulation en domaine non-borné

**Q4 :** On peut reprendre exactement la même approche faite pour la question 1. La seule véritable différence vient du fait que lorsque l'on intègre par partie le terme  $\int_T \text{curl} E_h w_h$ , l'on obtient :

$$\int_T \text{curl} E_h \cdot w_h = \int_T E_h \text{curl} w_h + \int_{\partial T} (n \times E_h) \cdot w_h$$

Puis en remplaçant  $n \times E$  par  $-\sqrt{\mu/\epsilon}H$  sur  $\Gamma_{SM}$ , on obtient bien la formulation variationnelle attendue. On peut ensuite lui ajouter des termes de décentrement pour obtenir les formulations (13a) et (13b).

**Q5 :** Voici après simulation une visualisation de l'état de la composante  $E_y$  en temps  $T_f = 2E - 9$  :

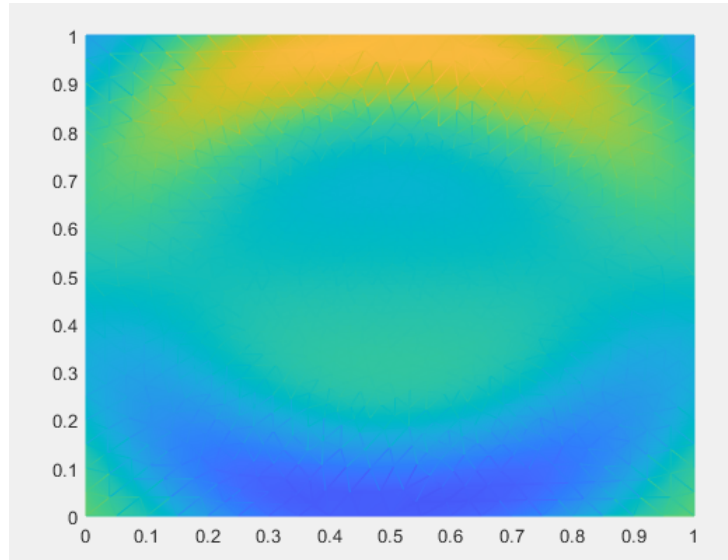


Figure 10: Etat de  $E_y$  en temps  $T_f = 2E - 9$



On constate que les conditions de Silver-Müller sont une bonnes approximations d'une transparence à l'infini. C'est à dire qu'avec ces conditions, le bord du domaine  $\Omega$  est en quelque sorte "effacé" et l'onde continue à se propager comme si elle vivait en domaine non borné. C'est évidemment très pratique car les conditions de Silver-Müller permettent de simuler avec une bonne précision un comportement non borné, quelque chose qui n'est en pratique pas réalisable.

**Q6 :** Le but de cette question est de représenté un signal électromagnétique qui subirait un changement discontinu de milieu. On lance donc le programme comme demandé et voici ce que l'on obtient pour les composantes du champ électrique  $E$  :

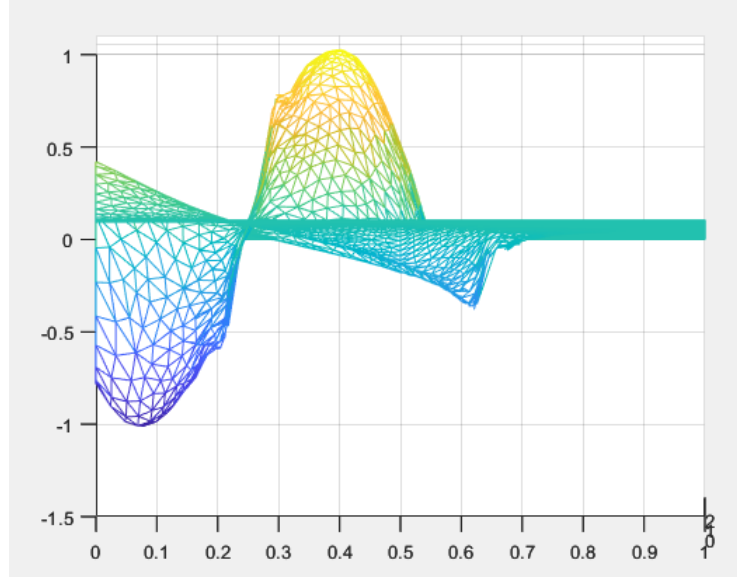


Figure 11:  $E_x$  en temps  $t_f = 1E - 9$

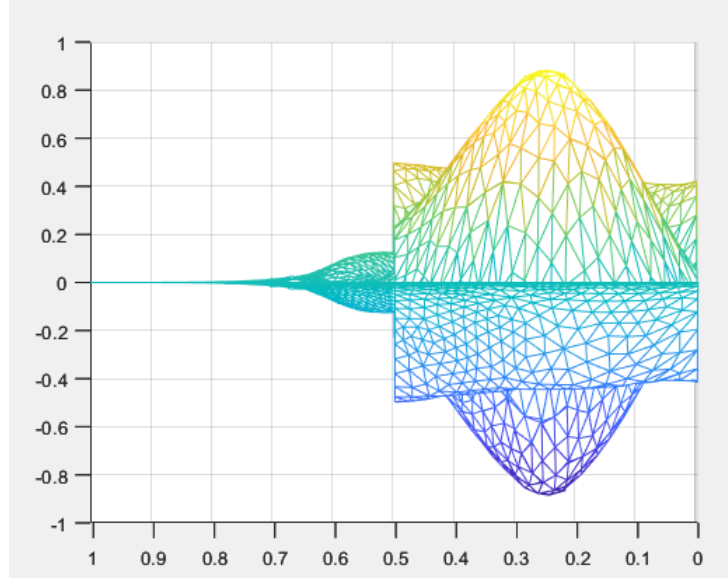


Figure 12:  $E_y$  en temps  $t_f = 1E - 9$

Un résultat frappant est que la composante  $E_x$  reste continue contrairement à  $E_y$ . Ceci peut paraître étonnant mais pas tant que ça en réalité. En effet, la physique nous enseigne que au passage d'une discontinuité de milieu, le champ électrique ne retient sa continuité uniquement dans la direction

*tangentielle* au changement de milieu. On peut également l'expliquer mathématiquement :

Appelons  $\Omega_1$  (resp.  $\Omega_2$ ) le sous-domaine de  $\Omega$  dans lequel  $\epsilon = \epsilon_0$  (resp.  $\epsilon = 4\epsilon_0$ ), ainsi que  $\Gamma$  la frontière les séparants. Les équations nous disent que  $E \in H(curl)$ , et ceci est équivalent (d'après le cours) à ce que :

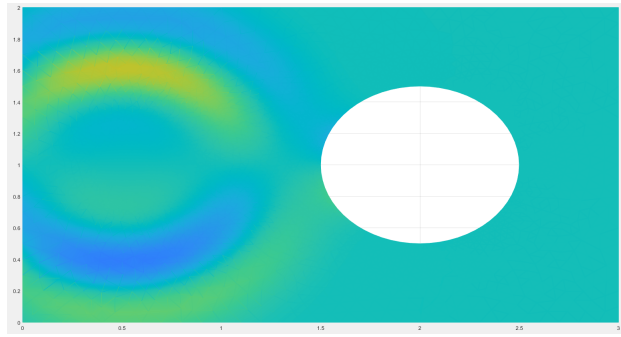
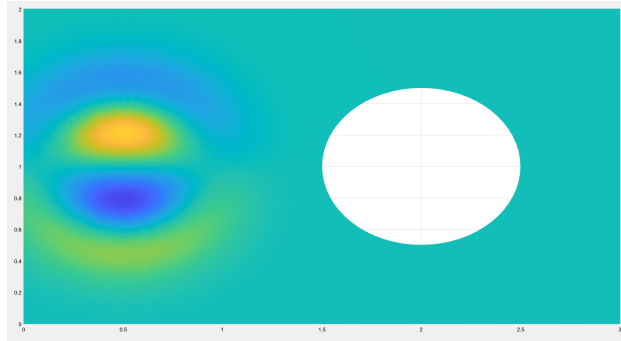
$$n \times E_1 = n \times E_2 \text{ sur } \Gamma$$

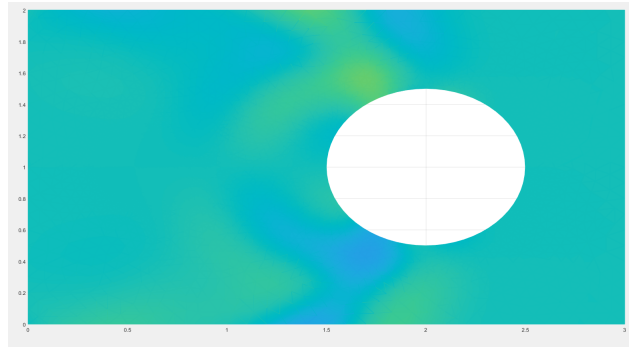
(où  $E_1$  et  $E_2$  sont le champ  $E$  restreint aux deux sous domaines) ainsi que  $E_1 \in H(\Omega_1, curl)$  et  $E_2 \in H(\Omega_2, curl)$ . Dans ce cas précis, ceci revient à dire que  $(E_x)_1 = (E_x)_2$  d'où la continuité de  $E_x$  mais sans plus de contrainte sur  $E_y$ .

On peut d'ores et déjà remarquer un avantage de la méthode GD : en relaxant les continuités, on autorise notre solution à atteindre des espaces plus généraux qui dans ce cas-ci sont nécessaires pour atteindre la solution physique. On imagine qu'une méthode plus restrictive sur la continuité de ses fonctions donnerait des résultats aberrants dans cette situation.

**Q7 :** On ne souhaite aucune pénétration du champ électrique à l'intérieur du disque. Notons  $\Gamma$  le bord extérieur du domaine (à l'infini) et  $C$  le cercle délimitant le disque unité. On a donc  $\partial\Omega = \Gamma \cup C$ . Pour éviter les perturbations dues au bord du domaine et d'éventuelles réflexions non désirables on choisit des conditions SM sur  $\Gamma$ , pour prendre en compte la conductivité parfaite du disque, on impose au champ  $E$  de vérifier  $n \times E = 0$  sur  $C$  (condition de type métal parfait).

On peut donc reprendre le système (11) en remplaçant  $\Gamma_{SM}$  par  $\Gamma$  ainsi que  $\Gamma_D$  par  $C$  pour obtenir un modèle physique probant. L'approximation GD qui en découle est donc simplement celle qui nous vient de (13a) et (13b). Voici les simulations que l'on obtient :





On voit que l'onde traverse le bord  $\Gamma$  sans perturbation et vient se réfléchir sur  $C$  (c'est particulièrement visible sur la troisième image). Il s'agit exactement de ce que l'on pourrait attendre d'un conducteur parfait soumis à un champ électrique.

**Q8 :** Le but de ce BE a été d'étudier divers aspects (numériques et qualitatifs) du schéma de Galerkin Discontinu. On propose de lister ici quelques avantages notables de l'utilisation de cette méthode.

Tout d'abord, il faut remarquer que cette méthode confère l'avantage d'avoir des matrices de masses relativement simples à inverser car ces dernières sont diagonalisables par blocs (ce qui est agréable, lorsque l'on compare par exemple à une méthode d'éléments finis). Autre chose dans le même registre : les maillages de la méthode GD ne requiert pas de conformité, ce qui peut simplifier grandement les affinages de maillages.

Il est également quantitativement fonctionnel car comme vu en question 2, ce schéma fait décroître l'énergie  $L^2$  ce qui nous assure une bonne stabilité.

On peut à présent mentionner l'essentiel : la possibilité de considérer des fonctions discontinues dans nos espaces d'approximations. A première vue, ceci pourrait donner l'impression que l'on relaxe artificiellement les continuités simplement pour un confort mathématique. Comme vu en question 6, il n'en ai en réalité rien car certaines situations physiques régits par les équations de Maxwell (qui forment l'objet de ce BE) requiert cette relaxation des régularités.