Sistemas de 1ª e 2ª ordem

Professor: Bernardo Barancelli Schwedersky

Disciplina: 22000275 – Sistemas de Controle

Revisão - Função de Transferência

- Razão entre as transformadas de Laplace da saída e entrada

$$G(s) = \frac{\mathscr{L}\{saída\}}{\mathscr{L}\{entrada\}}$$

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} \ldots b_{n-1} s + b_n}$$

- Zeros - raízes do numerador
- Polos - raízes do denominador
- Ordem - número de polos

Revisão - Funções Típicas

- Modelagem de sinais de entrada

  » Degrau unitário $x(t) = u(t)$ $X(s) = \frac{1}{s}$

  » Rampa unitária $x(t) = tu(t)$ $X(s) = \frac{1}{s^2}$

Revisão - Função de Transferência

- Exemplo 1: Encontrar os polos, zeros e a ordem da função de transferência:

$$G(s) = \frac{s^2 + 5s + 6}{s^3 + 15s^2 + 50s}$$

Solução: $$G(s) = \frac{(s+2)(s+3)}{s(s+5)(s+10)}$$

Zeros: (-2,-3)

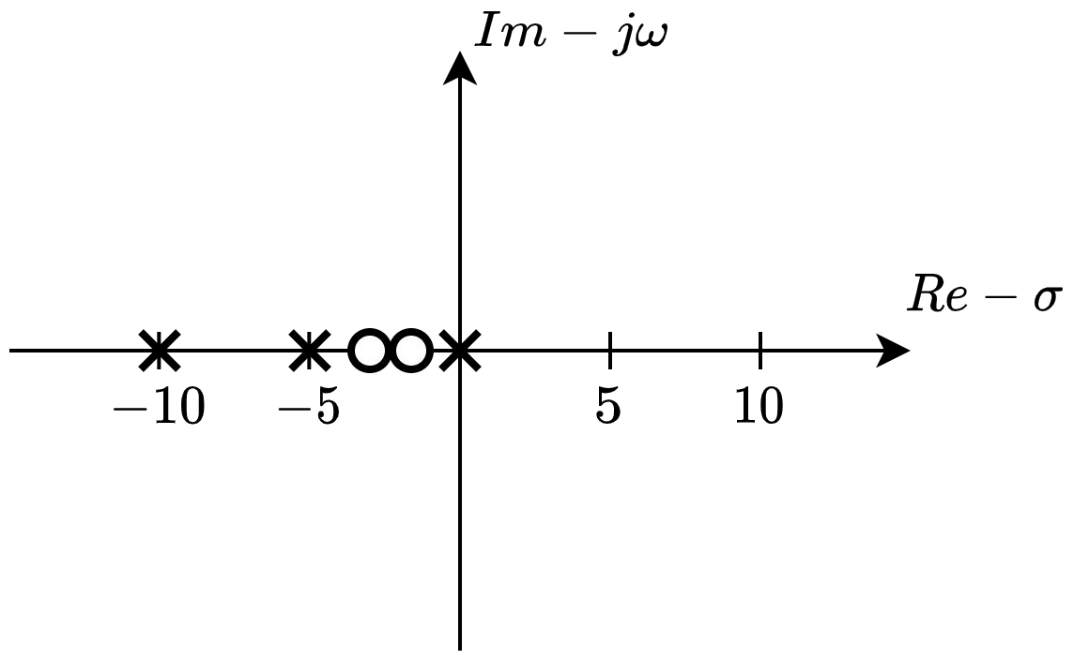
Polos: (0,-5,-10)

Ordem: (3)

Revisão - Função de Transferência

- Representação gráfica de uma função de transferência
  - » Polos – x
  - » Zeros - o

$$G(s) = \frac{(s+2)(s+3)}{s(s+5)(s+10)}$$



Saídas da Função de Transferência

- Para um sistema representado por uma FT
  - » Resposta/saída dependerá da entrada aplicada

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$Y(s) = G(s)X(s)$$

- Como obter uma solução para y(t)?
  - » Frações parciais e transformada inversa de Laplace
  - » Usando propriedades da transformada de Laplace

Sistemas de 1ª Ordem

- Considerando um sistema regido pela equação:

$$\tau\frac{dy}{dt} + y(t) = kx(t)$$

Como obter a função de transferência?

Transformada de Laplace

Sistemas de 1ª Ordem

- Considerando um sistema regido pela equação:

$$\tau \frac{dy}{dt} + y(t) = kx(t)$$

- Forma geral de uma função de transferência de 1ª ordem

$$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1} = \frac{k/\tau}{s + 1/\tau}$$

- τ (tau) - constante de tempo
- K - ganho estático - $G(0) = k$

Sistemas de 1ª Ordem

- Forma geral de uma função de transferência de 1ª ordem

$$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1} = \frac{k/\tau}{s + 1/\tau}$$

- Resposta ao degrau:

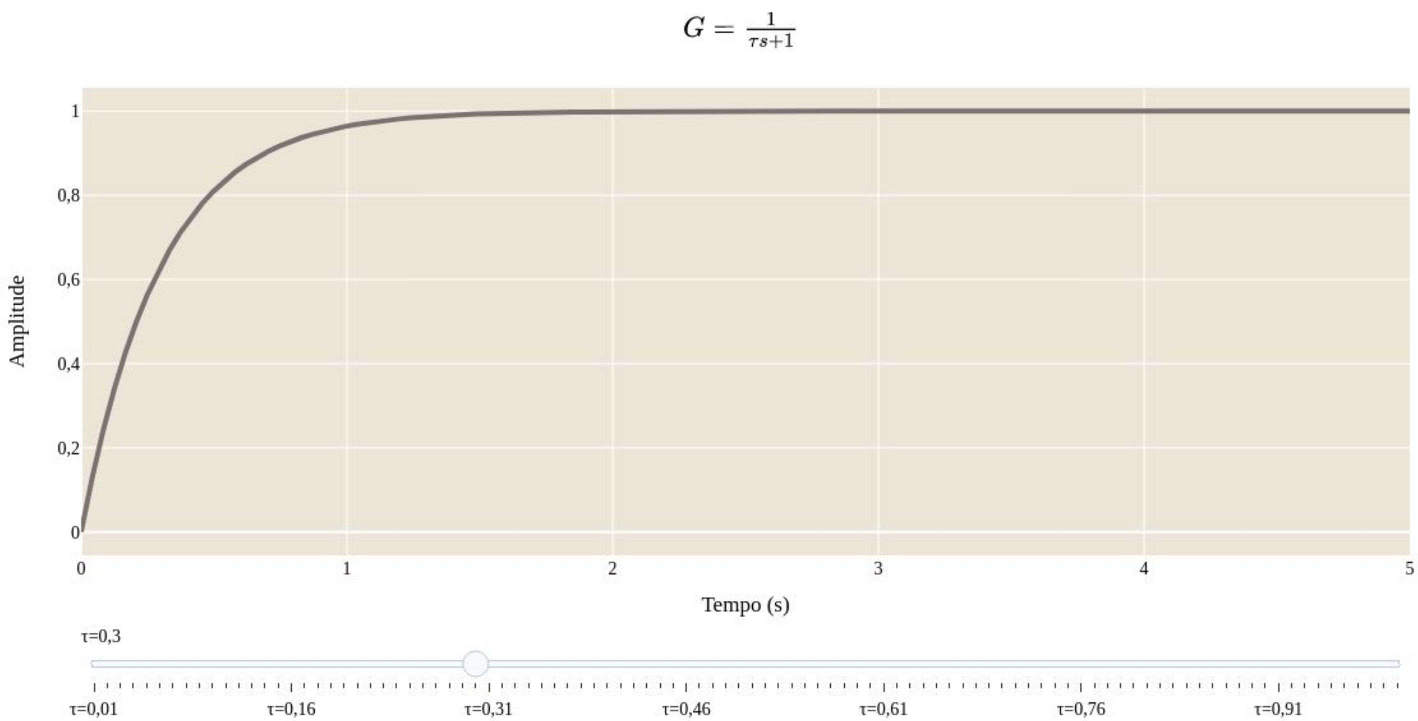
$$y(t) = k(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t})u(t)$$

Sistemas de 1ª Ordem

- Forma geral de uma função de transferência de 1ª ordem

$$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1} = \frac{k/\tau}{s + 1/\tau}$$

- Resposta ao degrau:



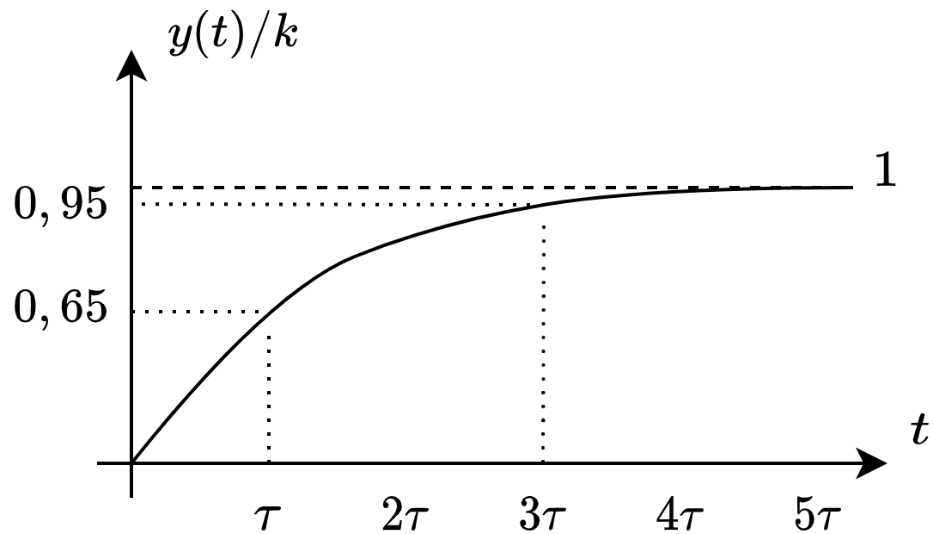
Sistemas de 1ª Ordem

- Forma geral de uma função de transferência de 1ª ordem

$$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1} = \frac{k/\tau}{s + 1/\tau}$$

- Resposta ao degrau:

t	**y(t)/k**
τ	0,6321
2τ	0,8647
3τ	0,9502
4τ	0,9817
5τ	0,9933



Métricas de Desempenho

- Constante de tempo (τ)
  - » Tempo que a resposta ao degrau leva para atingir 63% do valor final
- Tempo de elevação *(rise time)* (Tr)
  - » Tempo que a resposta leva entre 10% e 90% do valor final

$$Tr=2{,}2\tau$$

- Tempo de assentamento (Ts)
  - » Tempo que a resposta leva para alcançar um valor +-2% próximo do valor final

$$Ts=4\tau$$

Sistemas de 2ª Ordem

- Considerando um sistema regido pela

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y(t) = kx(t)$$

Como obter a função de transferência?

Sistemas de 2ª Ordem

- Considerando um sistema regido pela

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi\omega_n\frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y(t) = kx(t)$$

- Forma geral de uma função de transferência de 2ª ordem

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Quais são os polos?

Sistemas de 2ª Ordem

- Forma geral de uma função de transferência de 2ª ordem

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{k\omega_n^2}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

- Polos:

$$p_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$
$$p_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

Ou seja:

$$p = -\sigma \pm j\omega$$

$$\omega_n^2 = \sigma^2 + \omega^2 \qquad \xi = \frac{\sigma}{\omega_n}$$

Sistemas de 2ª Ordem

- Forma geral de uma função de transferência de 2ª ordem

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

- k - ganho estático $G(0) = k$

- ω_n - frequência natural
- ξ - fator de amortecimento

Sistemas de 2ª Ordem

- Polos: $p = -\sigma \pm j\omega$ com $\sigma = \xi\omega_n$ e $\omega_n^2 = \sigma^2 + \omega^2$

$$p_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \qquad p_2 = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

- Caso sobreamortecido (superamortecido) ($\xi > 1$)
  - » Polos: reais e distintos
- Caso criticamente amortecido ($\xi = 1$)
  - » Polos: reais e iguais
- Caso subamortecido ($\xi < 1$)
  - » Polos: complexos conjugados

Sistemas de 2ª Ordem

- Resposta ao degrau - função de transferência de 2ª ordem

- Caso sobreamortecido: polos reais e distintos ($\xi > 1$)

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{k\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)s}$$

$$Y(s) = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s - p_1} + \frac{c_3}{s - p_2}$$

$$y(t) = (c_1 + c_2 e^{p_1 t} + c_3 e^{p_2 t})u(t)$$

Sistemas de 2ª Ordem

- Resposta ao degrau - função de transferência de 2ª ordem

- Caso criticamente amortecido: polos reais e iguais ($\xi = 1$)

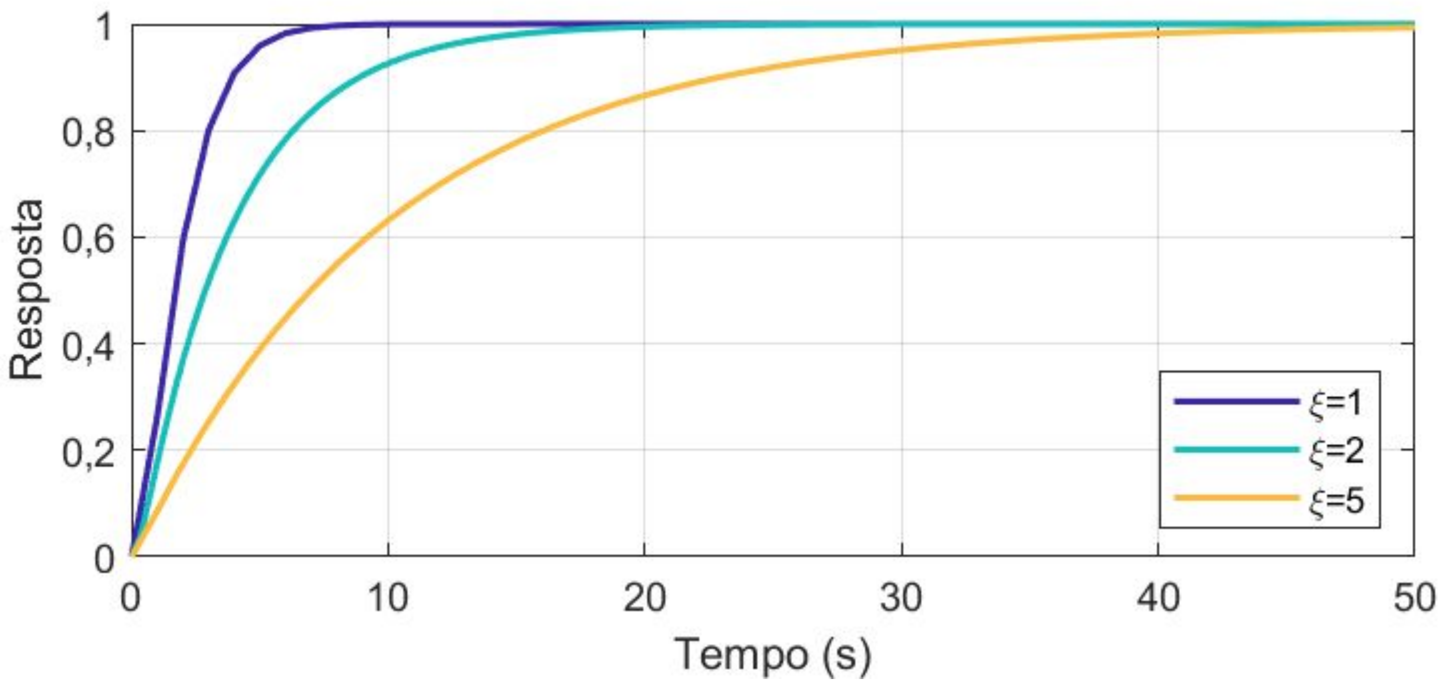
$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{k\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)s}$$

$$Y(s) = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{(s-p)} + \frac{c_3}{(s-p)^2}$$

$$y(t) = [c_1 + (c_2 + tc_3)e^{pt}]u(t)$$

Sistemas de 2ª Ordem

- Resposta ao degrau - função de transferência de 2ª ordem
- Casos sobreamortecido e criticamente amortecido
  - » Constante de tempo dominada pelo polo mais lento



Sistemas de 2ª Ordem

- Resposta ao degrau - função de transferência de 2ª ordem
- Caso subamortecido: polos complexos conjugados ($\xi < 1$)

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{k\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)s}$$

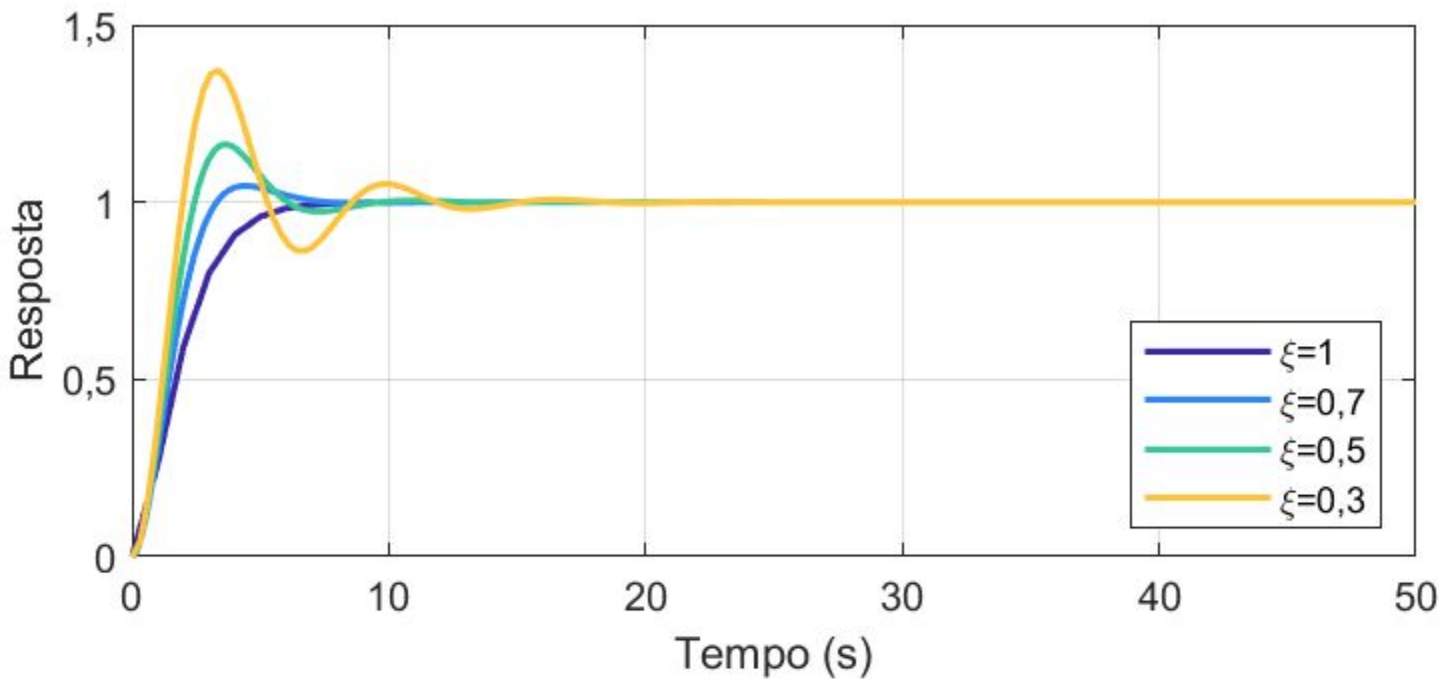
$$Y(s) = \frac{k\omega_n^2}{(s + \sigma + j\omega)(s + \sigma - j\omega)}$$

$$\sigma = \xi\omega_n \qquad \omega = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

$$y(t) = [c_1 + c_2 e^{-\sigma t} cos(\omega t)]u(t)$$

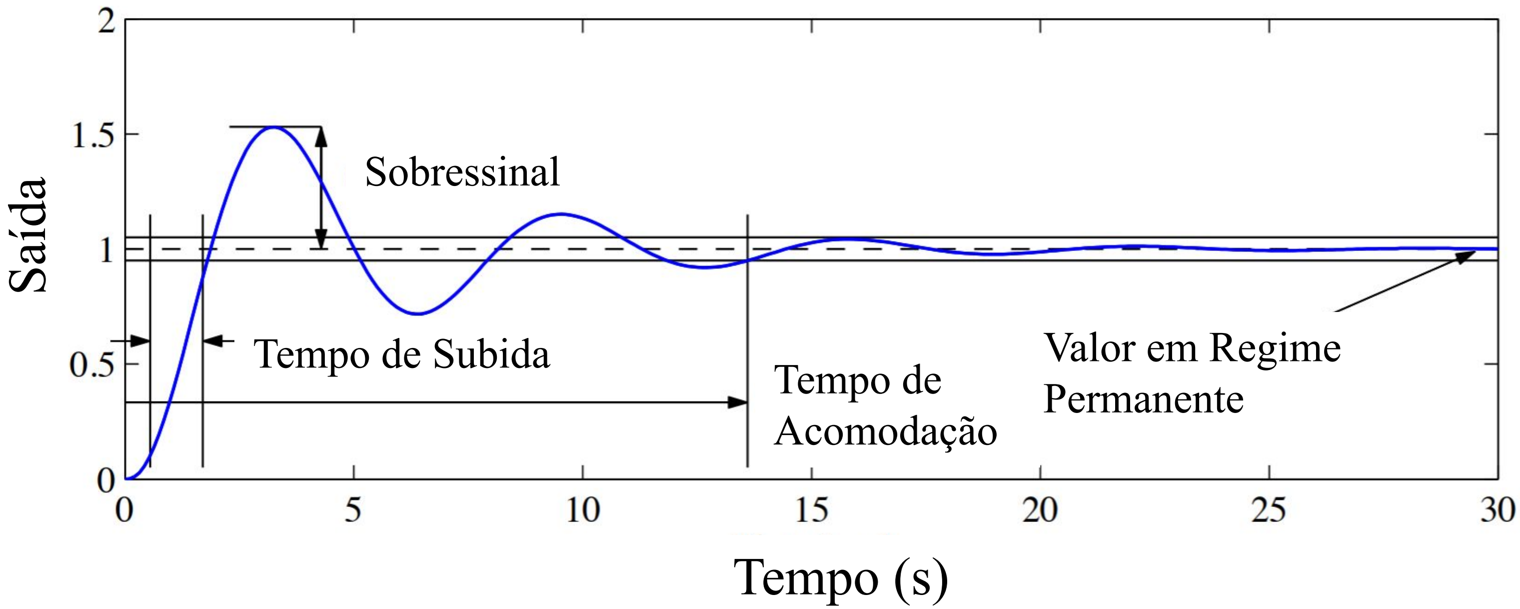
Sistemas de 2ª Ordem

- Resposta ao degrau - função de transferência de 2ª ordem
- Caso subamortecido



Sistemas de 2ª Ordem

- Resposta ao degrau - função de transferência de 2ª ordem



Sistemas de 2ª Ordem

- Resposta ao degrau - função de transferência de 2ª ordem
  - » Td – tempo de atraso – tempo até atingir 50% do valor final
  - » Tr – tempo de subida – tempo entre 10% e 90% do valor final
  - » Tp – tempo de pico – tempo até atingir o primeiro pico
  - » Mp - máximo sobresinal – valor percentual do sobressinal em relação ao valor em regime permanente
  - » Ts – tempo de acomodação - tempo até atingir 5% ou 2% do valor final

Sistemas de 2ª Ordem

- Resposta ao degrau - função de transferência de 2ª ordem
  - » Tempo de acomodação (Ts) - função de csi e ômega

$$t_s \approx \frac{4}{\xi\omega_n} \qquad \text{para} \qquad \xi < 0,8$$

$$t_s \approx \frac{5}{\xi\omega_n} \qquad \text{para} \qquad 0,8 \leq \xi < 1$$

Sistemas de 2ª Ordem

- Aproximações analíticas
  - » Tempo de acomodação - depende apenas da parte real dos polos

$$T_s = \frac{-\ln(2\%)}{\sigma} \qquad \sigma = \frac{-\ln(2\%)}{T_s}$$

- Exemplo: sistema com Ts=10 s

Sistemas de 2ª Ordem

- Aproximações analíticas
  - » Tempo de acomodação - depende apenas da parte real dos polos

$$T_s = \frac{-\ln(2\%)}{\sigma} \qquad \sigma = \frac{-\ln(2\%)}{T_s}$$

- Exemplo: sistema com Ts=10 s

$$\sigma = \frac{-\ln(0,02)}{10} = 0,39$$

Sistemas de 2ª Ordem

- Aproximações analíticas
  - » Sobressinal – depende apenas do valor de ξ
    - – Quanto maior o ξ, menor o sobressinal

$$\ln(M_p) \approx \frac{\sigma\pi}{\omega} \qquad \xi^2 \approx \frac{\ln(M_p)^2}{\pi^2 + \ln(M_p)^2}$$

- Exemplo: sistema com Mp=5%

$$\xi^2 = \frac{(\ln(0,05))^2}{\pi^2 + (\ln(0,05))^2} \qquad \xi = 0,69$$

Sistemas de 2ª Ordem

- Para o exemplo onde Mp=5% e Ts=10 s

$$\xi^2 = \frac{(\ln(0,05))^2}{\pi^2 + (\ln(0,05))^2} \qquad \xi = 0,69$$

$$\sigma = \frac{-\ln(0,02)}{10} = 0,39$$

- Qual é a função de transferência do sistema?

Sistemas de 2ª Ordem

- Para o exemplo onde Mp=5% e Ts=10 s

$$\xi^2 = \frac{(\ln(0,05))^2}{\pi^2 + (\ln(0,05))^2} \qquad \xi = 0,69$$

$$\sigma = \frac{-\ln(0,02)}{10} = 0,39$$

- Qual é a função de transferência do sistema?

Polos - $p = -\sigma \pm j\omega$

$$\omega_n = 0,57$$

$$\omega = 0,41$$

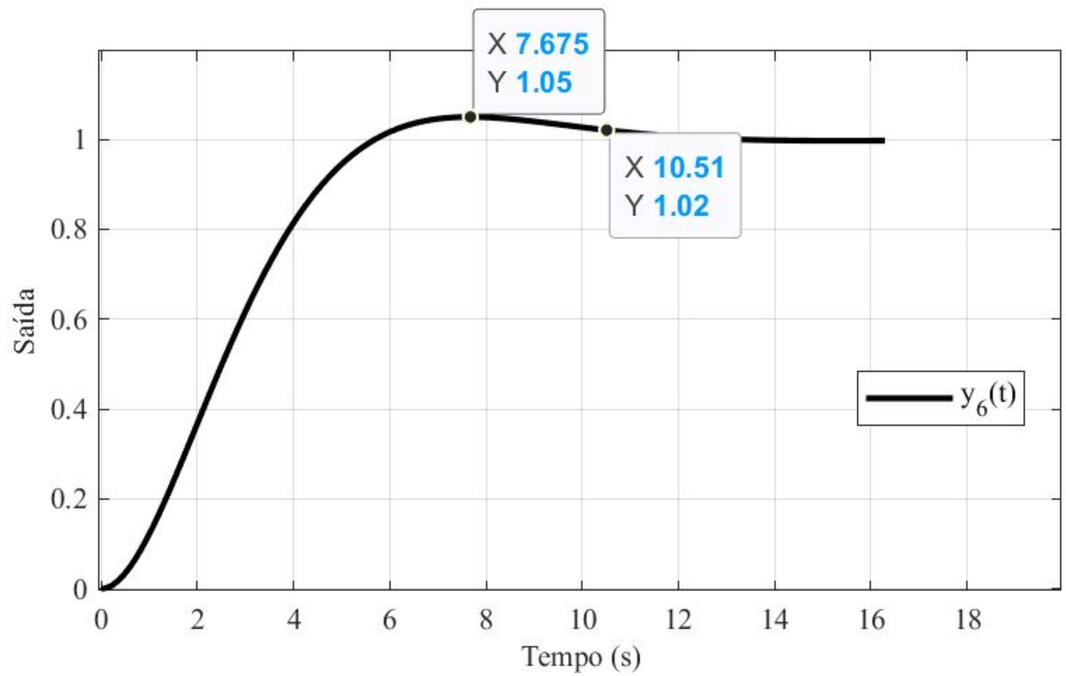
$$\omega_n^2 = \sigma^2 + \omega^2 \qquad \xi = \frac{\sigma}{\omega_n}$$

$$s = -0,39 \pm 0,41j$$

Sistemas de 2ª Ordem

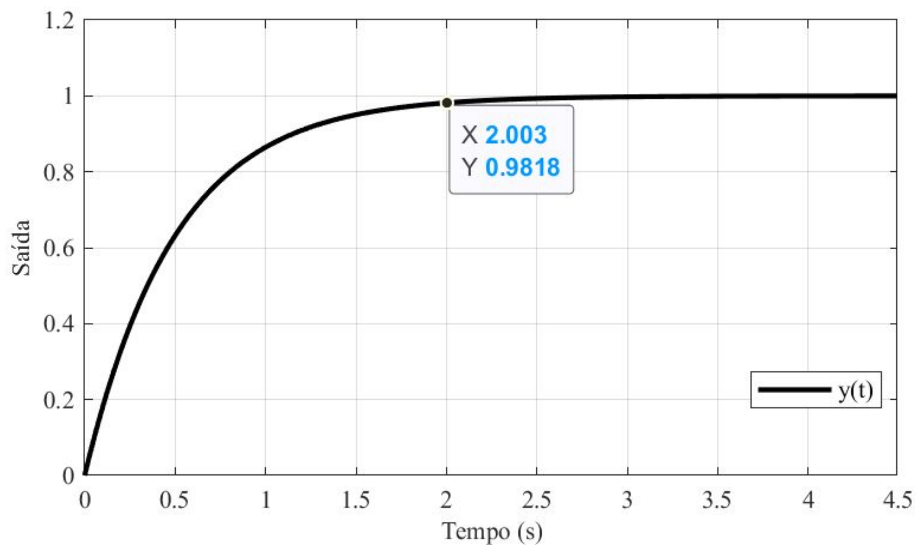
- Para o exemplo onde Mp=5% e Ts=10 s

- Sistema desejado - $G(s) = \dfrac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \dfrac{0,32}{s^2 + 0,79s + 0,32}$



Sistemas de 2ª Ordem

- Exercício: encontre a função de transferência do sistema desejado considerando como especificação:
  - » Tempo de acomodação (Ts) 20% mais rápido que em malha aberta
  - » Máximo sobressinal (Mp) = 2%



Sistemas de 2ª Ordem

- Especificações:
  - » Ts=1,6
  - » Mp = 2%

$$\sigma = \frac{-\ln(0,02)}{1.6} = 2,44$$

$$\xi^2 = \frac{(\ln(0,02))^2}{\pi^2 + (\ln(0,02))^2} = 0,61$$

$$\xi = 0,78$$

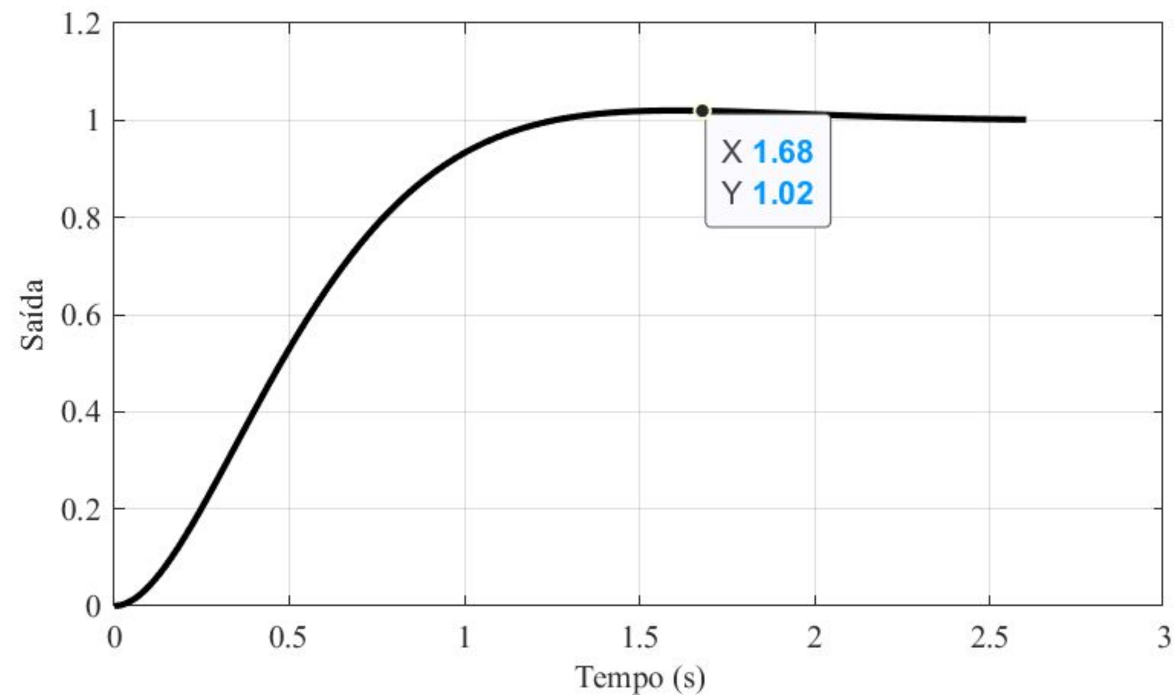
$$\omega_n = \frac{2,44}{0,78} = 3,13$$

$$\omega = 1,96$$

$$s = -2,44 \pm 1,96j$$

Sistemas de 2ª Ordem

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{9,80}{s^2 + 4,88s + 9,79}$$



Sistemas de ordem superior

- Sistemas de ordem superior à 2 são representados pela função de transferência

$$G(s) = k\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$

- Resposta ao degrau
  - » Obtida da mesma forma
    - – Multiplicação por U(s)
    - – Frações parciais
    - – Transformada inversa de Laplace

Sistemas de ordem superior

- Dominância
  - » Normalmente algum dos polos dominará a resposta
  - » Ocorre quando a parte real em módulo de algum polo for muito menor que a do restante de polos e zeros (~5 vezes)
  - » Polo exerce dominância quando sua resposta no tempo tem um decaimento muito mais lento que os demais

Sistemas de ordem superior

- Quando há dominância de um polo real
  - » O sistema se comporta de forma similar a um sistema de primeira ordem com o polo dominante
  - » O ganho estático será o mesmo da função de transferência original

- Quando há dominância de par de polos
  - » O sistema se comporta de forma similar ao sistema de segunda ordem com o mesmo par de polos dominantes
  - » O ganho estático será o mesmo da função de transferência original

Sistemas de ordem superior

- Exemplo de dominância:

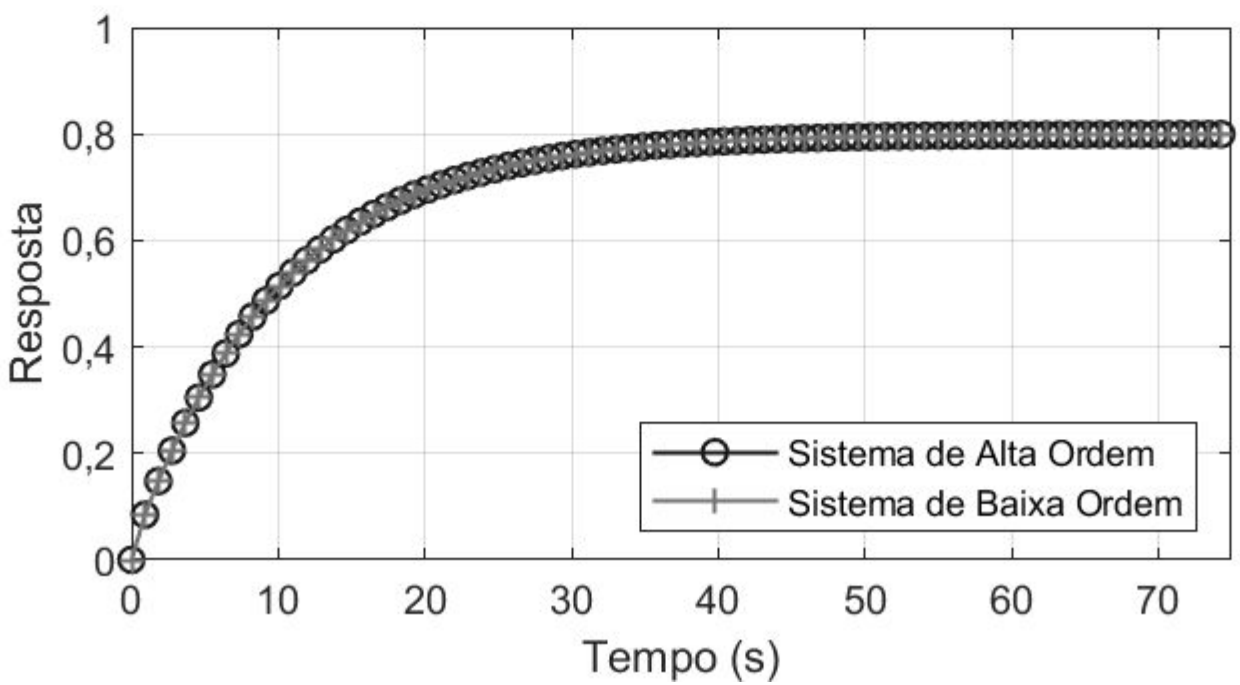
$$G_1(s) = \frac{2(s+2)}{(s+0,1)(s+5)(s+10)}$$

- Quais são os polos e zeros?
- Existe dominância?
- Quais polo é dominante?
- Qual a constante de tempo?

Sistemas de ordem superior

- Exemplo de dominância:

$$G_1(s) = \frac{2(s+2)}{(s+0,1)(s+5)(s+10)}$$



Sistemas de fase não mínima

- Sistemas contendo zeros positivos
- Zero introduz uma **dinâmica inversa** no início da resposta

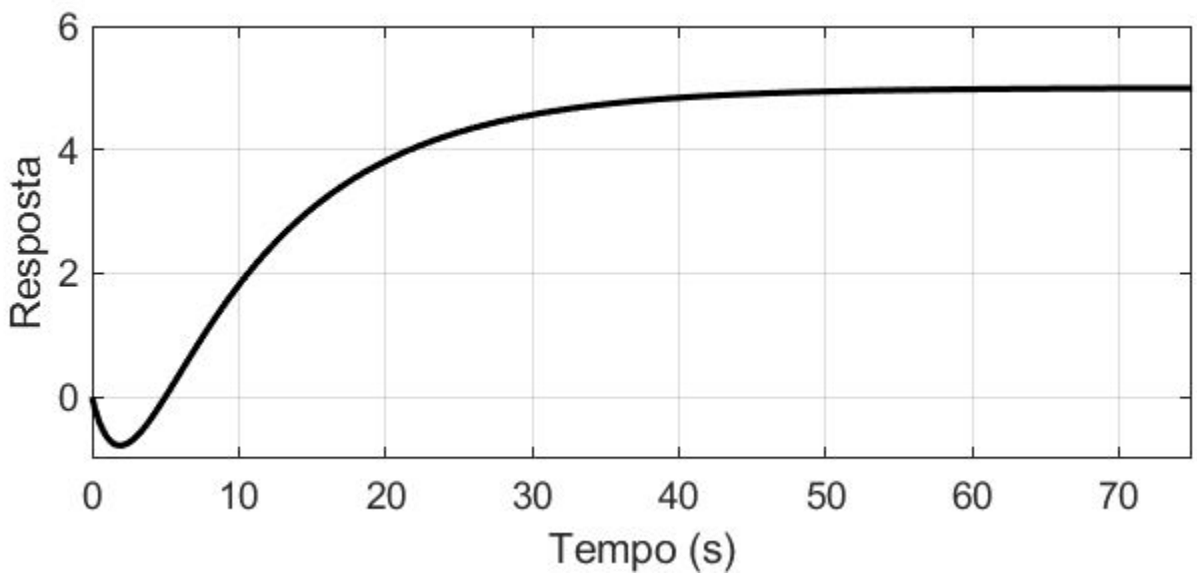
$$G(s) = \frac{5(-4s+1)}{(2s+1)(10s+1)}$$

- Zero - (z1=1/4)

Sistemas de fase não mínima

- Sistemas contendo zeros positivos
- Zero introduz uma **dinâmica inversa** no início da resposta

$$G(s) = \frac{5(-4s+1)}{(2s+1)(10s+1)}$$



Referências

OGATA, Katsuhiko. Engenharia de controle moderno. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003. 788 p. ISBN 9788587918239

NISE, Norman S. Engenharia de sistemas de controle. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011. 682 p. ISBN 9788521613015