

Versuchsprotokoll zum Versuch Nr. 301

# Leerlaufspannung und Innenwiderstand von Spannungsquellen

Johannes Kollek  
johannes.kollek@udo.edu

Jean-Marco Alameddine  
jean-marco.alameddine@udo.edu

Durchführung: 24.11.2015

1. Abgabe



TU Dortmund – Fakultät Physik

# 1 Zielsetzung

Im vorliegenden Experiment wird das Verhalten von Spannungsquellen in Hinblick auf ihre Leerlaufspannung und ihren Innenwiderstand untersucht.



## 2 Theorie



Um elektrischen Bauteilen Energie zuzuführen, wird eine **Spannungsquelle**, beispielsweise ein Dynamo oder ein LC-Generator, benutzt. In der Theorie wird immer von einer idealen Spannungsquelle ausgegangen, dessen Innenwiderstand über einen zusätzlichen Widerstand  $R_i$  realisiert wird. Um nun in der Praxis Spannungsquellen zu benutzen, müssen die technischen Daten eben dieser bekannt sein. Es handelt sich um die Leerlaufspannung  $U_0$  und den vorhin bereits erwähnten Innenwiderstand  $R_i$ .

Die Leerlaufspannung  $U_0$  liegt an einer Spannungsquelle genau dann an, wenn ihr keine Leistung entnommen wird, also bei eingeschalteter Spannungsquelle kein Strom fließt. Sobald aber ein Strom über einen Lastwiderstand  $R_a$  fließt, wie beispielsweise in Abbildung 1, wird ein Sinken der Spannung  $U_k$  (Klemmspannung) parallel zur Spannungsquelle beobachtet.

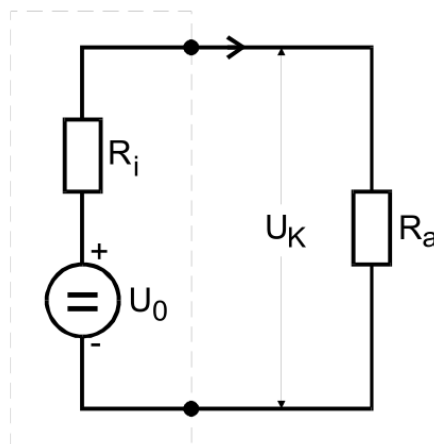
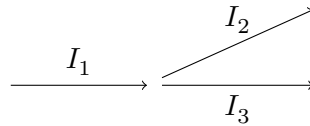


Abbildung 1: Beispielaufbau [1]

Dies folgt aus den Kirchhoffschen Regeln, vor allem aus der Maschenregel (2).

Die Knotenregel folgt direkt aus der Ladungserhaltung und besagt, dass in jedem Knotenpunkt einer Schaltung die Summe aller eingehenden und ausgehenden Ströme verschwinden muss:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0. \quad (1)$$



**Abbildung 2:** Knotenregel.

Die zweite und hier tragende Regel ist die Maschenregel. Sie besagt, dass in jeder geschlossenen Masche der Schaltung die Summe der Spannungen null ergeben muss:

$$\sum_{i=1}^n U_i = 0. \quad (2)$$

Demnach folgt für den Beispielaufbau 1, dass die Spannungsquelle einen Innenwiderstand  $R_i$  haben muss, der sich in der Formel

$$U_0 = IR_i + IR_a \quad (3)$$

äußert, wobei die oben genannte Klemmenspannung

$$U_k = IR_a = U_0 - IR_i \quad (4)$$

beträgt. Dass durch alle Bauteile derselbe Strom fließt, folgt aus der Knotenregel (1). Würde es den Innenwiderstand nicht geben, folgt aus dem Ohmschen-Gesetz,

$$U = RI, \quad (5)$$

dass mit der Spannungsquelle eine unendlich große Stromstärke  $I$  und somit eine beliebig große Leistung  $P$  erreicht wird, da für sie

$$P = I^2 R_a \quad (6)$$

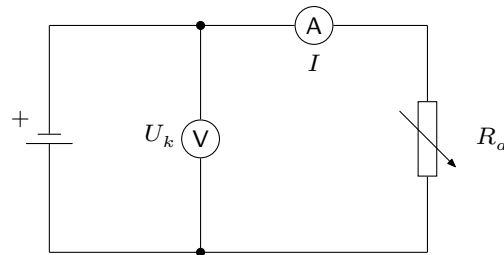
gilt. Im realen Fall durchläuft  $P(R_a)$  ein Maximum. Es wird von Leistungsanpassung gesprochen, wenn  $R_a$  so gewählt wird, dass die Leistung  $P$  der Spannungsquelle maximal wird.

### 3 Durchführung

Zunächst wird im Versuchsaufbau eine Monozelle betrachtet, dessen Leerlaufspannung  $U_0$  gemessen wird. Dazu wird die Monozelle direkt an ein Voltmeter mit möglichst hohem Eigenwiderstand  $R_{\text{Eigen}}$  angeschlossen und die Spannung abgelesen. Der Eigenwiderstand wird direkt am Voltmeter abgelesen.

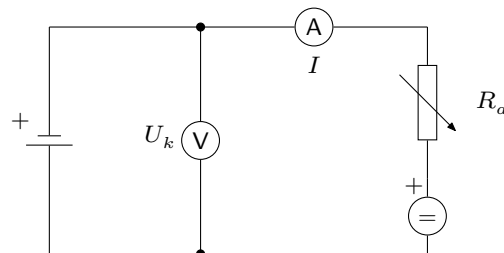
Als nächstes wird ein einstellbarer Widerstand  $R_a$ , wie in Abbildung 3 beschrieben, in die Schaltung eingebaut. Dabei wird jeweils der Strom  $I$  durch ein in Reihe geschaltetes

Strommessgerät sowie die Klemmspannung  $U_k$  durch ein parallel geschaltetes Spannungsmessgerät betrachtet. Der Widerstand  $R_a$  wird variiert und mehrere Messungen für verschiedene Widerstände durchgeführt.



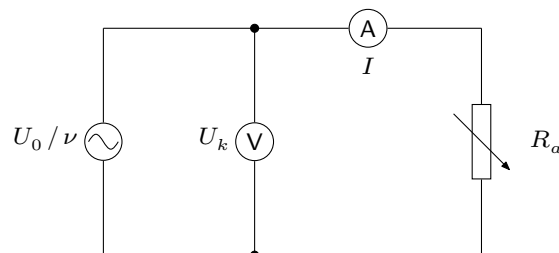
**Abbildung 3:** Messung von  $U_k$  in Abhängigkeit von  $R_a$ .

Im folgenden Versuchsteil wird der vorherige Aufbau durch eine Gegenspannung ergänzt, die, wie in Abbildung 4 beschrieben, hinter den Widerstand in Reihe geschaltet wird. Die Gegenspannung  $U_{\text{Gegen}}$  wird so gewählt, dass sie in etwa 2 V größer ist als die Leerlaufspannung der Monozelle. Der Messprozess von  $I$  und  $U_k$  findet analog zum ersten Aufbau statt.




**Abbildung 4:** Messung von  $U_k$  in Abhängigkeit von  $R_a$  mit Gegenspannung.

Zum Schluss wird die Gegenspannung wieder entfernt und die Monozelle als Spannungsquelle, wie in Abbildung 5 beschrieben, durch einen RC-Generator ersetzt. Dabei wird einmal eine Messreihe analog zu den bisherigen Messungen mit einer Rechteckspannung sowie einmal mit einer Sinusspannung durchgeführt. Bei beiden Messungen wird der Widerstand erneut variiert und verschiedene Messungen durchgeführt.



**Abbildung 5:** Messung von  $U_k$  in Abhängigkeit von  $R_a$  mit Wechselstromgenerator.

## 4 Auswertung

Der Eigenwiderstand des verwendeten Voltmeters beträgt  $R_v = 10 \text{ M}\Omega$ , dessen systematischer Fehler liegt bei  $\pm 1.5\%$ , der des Amperemeters beträgt  $\pm 3\%$ . 

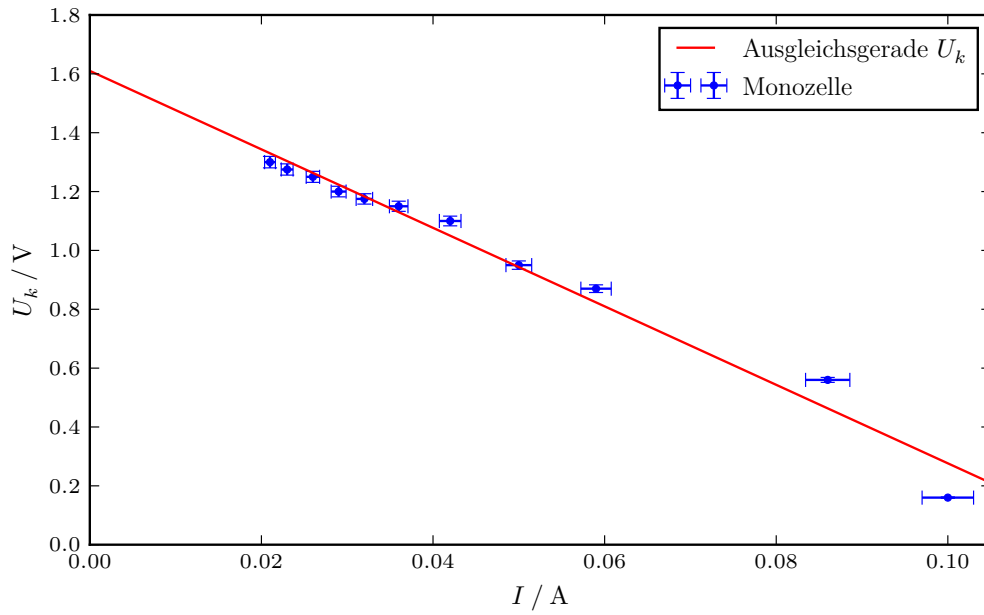
### 4.1 Monozelle und Gegenspannung

Der wie in der Durchführung beschriebene gemessene Wert für die Leerlaufspannung der Monozelle beträgt  $U_{0,\text{mono}} = 1.55 \text{ V}$ . Bei der folgenden Messreihe wird der Widerstand  $R_a$  jeweils in einem Bereich von  $0 \Omega$  bis  $50 \Omega$  variiert. Die Messwerte sind in Tabelle 1a für die Monozelle und in Tabelle 1b für die Schaltung mit zusätzlicher Gegenspannung dargestellt.

(a) Messdaten Monozelle.			(b) Messdaten Gegenspannung.		
$R_a - \text{Wert}$	$I[\text{mA}]$	$U_k[\text{V}]$	$R_a - \text{Wert}$	$I[\text{mA}]$	$U_k[\text{V}]$
0	100.000	0.016	0	220	0.34
10	86.000	0.056	10	160	0.29
20	59.000	0.087	20	125	0.25
30	50.000	0.095	30	76	0.23
40	42.000	0.110	40	72	0.22
50	36.000	0.115	50	59	0.21
60	32.000	0.118	60	52	0.21
70	29.000	0.120	70	47	0.20
80	26.000	0.125	80	42	0.19
90	23.000	0.128	90	39	0.19
100	21.000	0.130	100	36	0.19

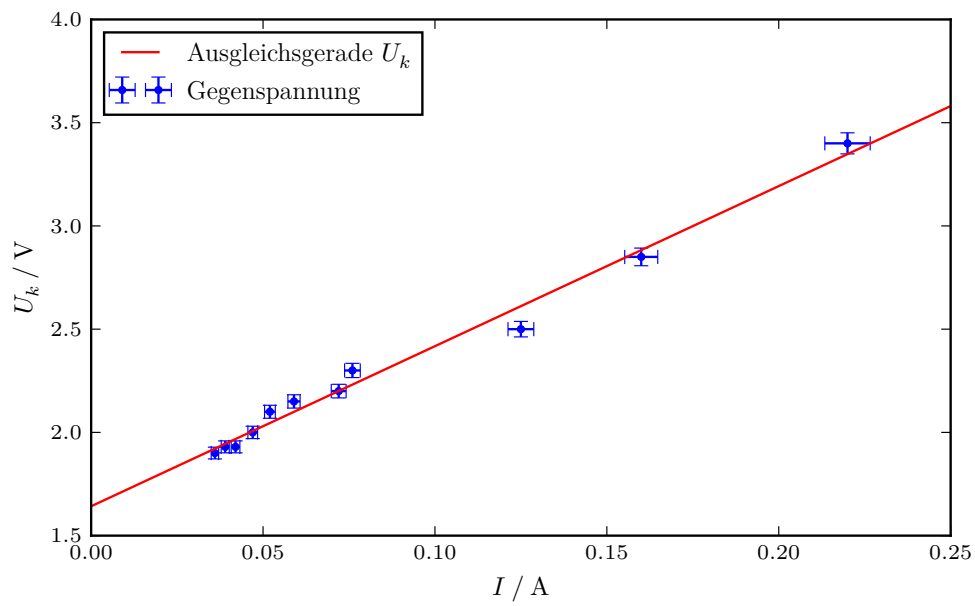
**Tabelle 1:** Messdaten für die Monozelle und die Gegenspannung.

Somit ergibt sich der Monozellenplot in Abbildung 6,



**Abbildung 6:** Monozellenplot.

sowie der Plot mit der angesetzten Gegenspannung in Abbildung 7



**Abbildung 7:** Gegenspannungsplot.

Beide Ausgleichsgeraden werden mit SciPy auf eine lineare Funktion inklusive Fehlerbalken

der Form

$$f(x) = b + mx \quad (7)$$

gefittet, wobei für die Monozelle

$$U_k(I) = U_0 - R_i I \quad (8)$$

und für die gegenläufige Schaltung

$$U_k(I) = U_0 + R_i I \quad (9)$$

gilt. Zur Berechnung der jeweiligen Leerspannung und des Innenwiderstandes wird die Methode der linearen Regression,

$$m = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (10)$$



$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}, \quad (11)$$

bei  $n$  Messwerten, gewählt.

Die Standardabweichungen berechnen sich zu

$$\sigma_m = \sqrt{\sigma_y^2 \frac{n}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}} \quad (12)$$



$$\sigma_b = \sqrt{\sigma_y^2 \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}} \quad (13)$$

für die Steigung  $m$ , welche für den Innenwiderstand  $R_i$  steht, und für den y-Achsenabschnitt  $b$ , der die Leerlaufspannung  $U_0$  darstellt.[2] Daraus folgen die jeweiligen Werte

$$\begin{aligned} U_{0,\text{mono}} &= (1.61 \pm 0.04) \text{ V} & R_{i,\text{mono}} &= (13.3 \pm 0.7) \Omega, \\ U_{0,\text{gegen}} &= (1.64 \pm 0.03) \text{ V} & R_{i,\text{gegen}} &= (7.8 \pm 0.3) \Omega. \end{aligned}$$

Es ist zu erwähnen, dass bei der anfänglichen Messung der Leerlaufspannung der Monozelle durch den vorhandenen Innenwiderstand des Voltmeters ergibt. Aus Gleichung 4 folgt, wenn der Eigenwiderstand des Voltmeters  $R_v$  für  $R_a$  eingesetzt wird sowie die aus der Maschenregel folgende Relation

$$I = \frac{U_k}{R_v} \quad (14)$$

genutzt wird, direkt die Formel

$$U_0 = U_k + \frac{R_i}{R_v} U_k \quad (15)$$

für die wahre Leerlaufspannung. Mit den gegebenen Werten für  $R_i$  und  $R_v$  beträgt die Abweichung von  $U_0$  zu  $U_k$

$$\Delta U_0 = (2.07 \pm 0.11) \mu\text{V}.$$

Würde das Amperemeter in Abbildung 3 zwischen der Spannungsquelle und dem Voltmeter liegen, so würde der Innenwiderstand des Amperemeters ebenfalls einen zusätzlichen systematischen Fehler ergeben.

## 4.2 Rechteckspannung und Sinusspannung

Bei der Messung unter einer Rechteckspannung wird  $R_a$  zwischen  $20 \Omega$  bis  $250 \Omega$  variiert, bei der Messung unter der Sinusspannung zwischen  $100 \Omega$  bis  $5000 \Omega$ .

Die direkte Messung der Rechteckspannung am Generator ergibt  $U_{0,\text{rechteck}} = 0.56 \text{ V}$ , die direkte Messung der Sinusspannung ergibt  $U_{0,\text{sinus}} = 2 \text{ V}$ . Es ergeben sich die in Tabelle 2a und Tabelle 2b angegebenen Messwerte.

(a) Messdaten Rechteckspannung.

$R_a$ – Wert	$I[\text{mA}]$	$U_k[\text{V}]$
0	6.80	0.02
10	6.00	0.02
20	4.70	0.03
30	3.70	0.04
40	3.10	0.04
50	2.75	0.04
60	2.20	0.04
70	2.10	0.04
80	1.90	0.05
90	1.70	0.05
100	1.60	0.05

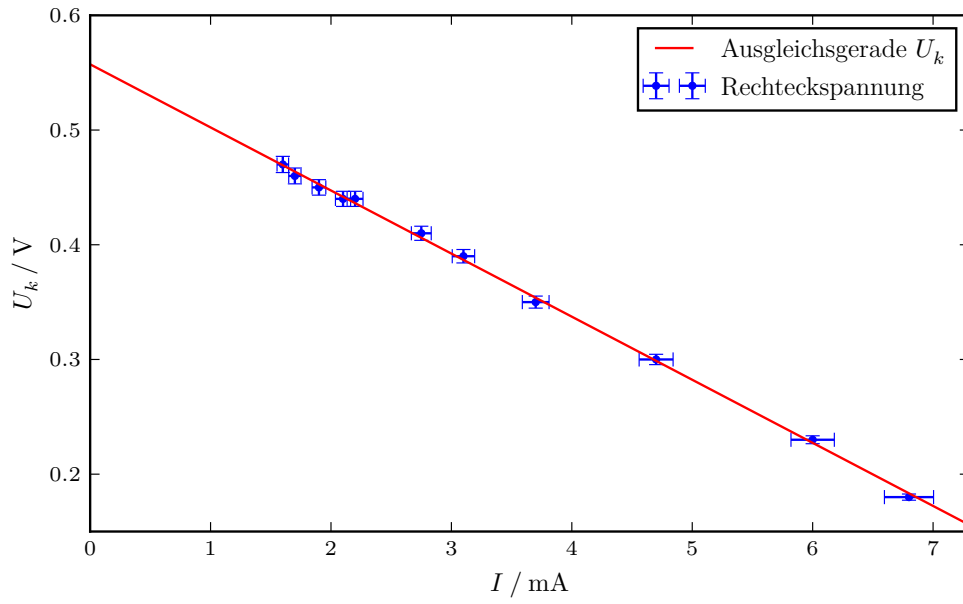
(b) Messdaten Sinusspannung.

$R_a$ – Wert	$I[\text{mA}]$	$U_k[\text{V}]$
0	2.10	0.06
10	1.85	0.07
20	1.25	0.12
30	0.92	0.14
40	0.72	0.15
50	0.62	0.15
60	0.53	0.17
70	0.45	0.17
80	0.38	0.18
90	0.34	0.18
100	0.31	0.18

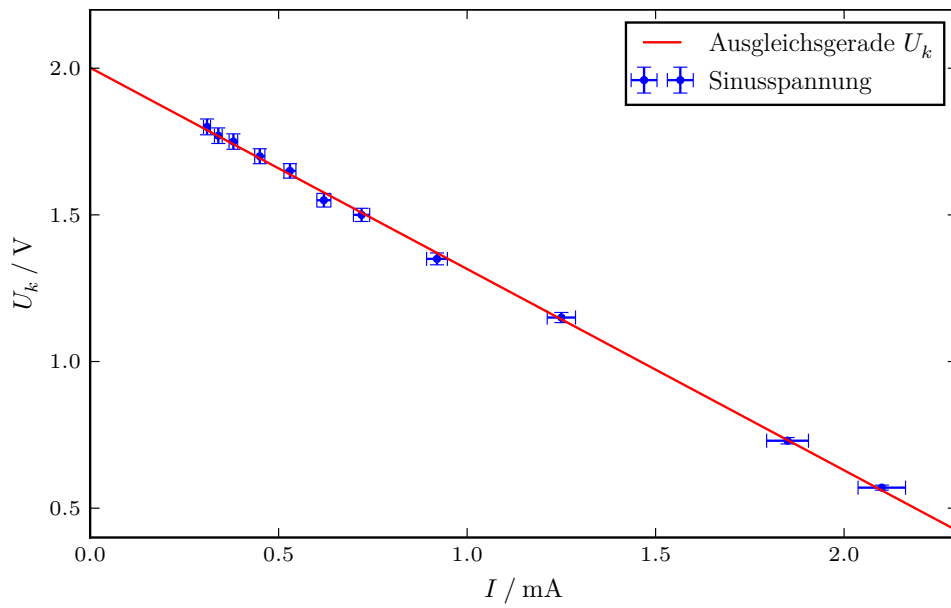
**Tabelle 2:** Messdaten für die Rechteckspannung und Sinusspannung.

Hieraus ergibt sich für die Messung der Rechteckspannung der in Abbildung 8 angegebene Plot, für die Messung der Sinusspannung der in Abbildung 9 angegebene Plot.





**Abbildung 8:** Rechteckspannungsplot.



**Abbildung 9:** Sinusspannungsplot.

Analog zur Rechnung bei der Monozelle sowie bei der Gegenspannung werden mit SciPy Ausgleichsgeraden erstellt. Dabei werden die Messwerte an die Funktion 7 gefittet, so dass aus den errechneten Parametern nach 8 der Innenwiderstand  $R_i$  und die Leerspannung  $U_0$  abgelesen werden können. Der y-Achsenabschnitt, die Steigung sowie deren Fehler

berechnen sich nach (10), (11), (12) und (13), so dass sich die Werte

$$\begin{aligned} U_{0,\text{rechteck}} &= (0.557 \pm 0.002) \text{ V}, & R_{i,\text{rechteck}} &= (55.0 \pm 0.6) \Omega, \\ U_{0,\text{sinus}} &= (2.002 \pm 0.007) \text{ V}, & R_{i,\text{sinus}} &= (686 \pm 7) \Omega \end{aligned}$$

ergeben .

### 4.3 Leistung im Belastungswiderstand

Im Folgenden werden die Messergebnisse der Monozellenmessung aus Tabelle 1a betrachtet. Aus der gemessenen Klemmspannung  $U_k$  sowie dem Strom  $I$  lässt sich die Leistung zu

$$P = U_k I \quad (16)$$

berechnen. Diese Leistung wird gegen den Belastungswiderstand  $R_a$  abgetragen, welcher sich aus

$$R_a = \frac{U_k}{I} \quad (17)$$

ergibt. Hieraus folgen die in Tabelle 3 angegebenen Werte.

**Tabelle 3:** Leistung in Abhängigkeit des Belastungswiderstandes.

$R_a[\Omega]$	$\Delta R_a[\Omega]$	$P[\text{W}]$	$\Delta P[\text{W}]$
1.60	0.05	0.0160	0.0005
6.5	0.2	0.048	0.002
14.7	0.5	0.051	0.002
19.0	0.6	0.048	0.002
26.2	0.9	0.046	0.002
32	1	0.041	0.001
37	1	0.038	0.001
41	1	0.035	0.001
48	2	0.033	0.001
55	2	0.029	0.001
62	2	0.0273	0.0009

Für die Fehlerrechnung der einzelnen Fehler wird bei der vorliegenden Rechnung und bei allen folgenden Rechnungen das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n\right)^2} \quad (18)$$

für eine Funktion  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , bei der die Größen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  voneinander unabhängig sind, verwendet. Hieraus folgt für den Fehler von  $P$  die Fehlerformel

$$\Delta P = \sqrt{\left(I \Delta U_k\right)^2 + \left(U_k \Delta I\right)^2} \quad (19)$$

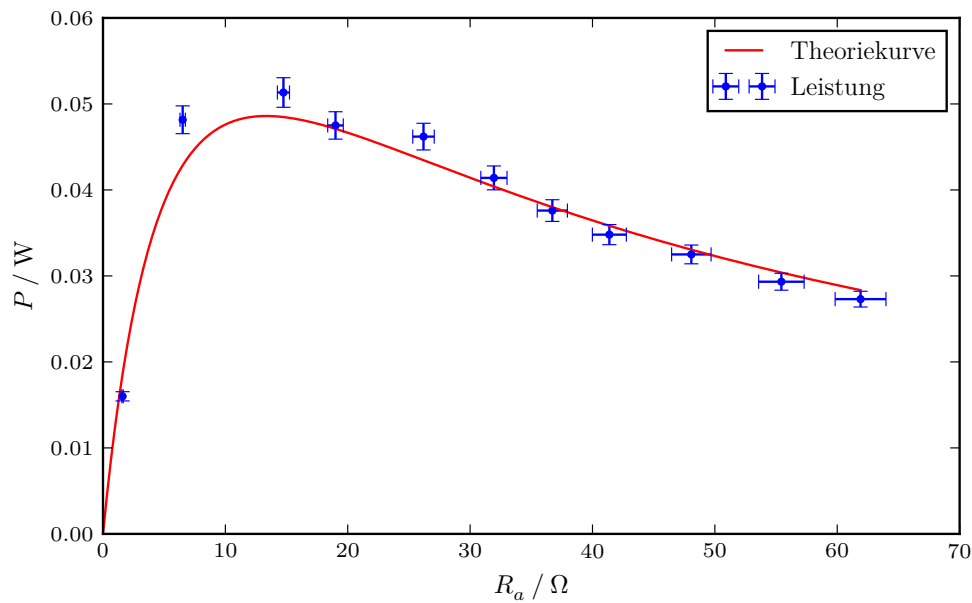
sowie für  $R_a$  die Fehlerformel

$$\Delta R_a = \sqrt{\left(\frac{1}{I} \Delta U_k\right)^2 + \left(-\frac{U_k}{I^2} \Delta I\right)^2}. \quad (20)$$

Zudem wird als Theoriekurve die Leistung nach Formel 6 sowie nach Formel 4 zu

$$P = \frac{U_0^2}{(R_i + R_a)^2} R_a \quad (21)$$

bestimmt. Hierbei werden für  $R_i$  sowie  $U_0$  die in Kapitel 4.1 bestimmten Werte genutzt. Es ergibt sich somit der in Abbildung 10 dargestellte Plot.



**Abbildung 10:** Leistung in Abhängigkeit des Belastungswiderstandes.

## 5 Diskussion

Im Vergleich von dem direkt gemessenen  $U_0$  und den im Nachhinein ermittelten Leerlaufspannungen zeigt sich, besonders bei der Sinusmessung sowie der Rechteckmessung keine signifikante Abweichung. Bei der Monozellenmessung sowie der Gegenspannungsmessung liegt der direkt gemessene Wert leicht unterhalb des bestimmten Fehlerintervalls. Dies mag in dem systematischen Fehler liegen, dass die Nutzung des regelbaren Widerstandes problematisch war. So zeigt sich, dass die zu ablesenden Werte abhängig vom Druck auf den Inbetriebnahmeschalter des Widerstandes sind. Dementsprechend gestaltet es sich als schwierig, die Werte  $I$  und  $U_k$  simultan bei gleichem Widerstand zu bestimmen.

Die Berechnung des systematischen Fehlers von  $U_0$  zeigt, dass tatsächlich die Annahme  $U_0 \approx U_k$  getroffen werden kann, da die Abweichung  $\Delta U_0$  hinreichend klein im Gegensatz zu den anderen genannten systematischen Fehlern ist.

Bei Betrachtung der Leistungskurve ist beim Peak der Theoriekurve eine nach oben tendierende Abweichung der Messwerte im Vergleich zur Theoriekurve zu beobachten. Diese Ursache dieser Abweichung kann nicht genau zurückverfolgt werden. Ansonsten liegen die Werte der Theoriekurve im Rahmen der Fehlerbalken der Messwerte.

## 6 Anhang

Versuch Nr. 30.1			d) $V = 60 \text{ Hz}$ 1 Volt volle Amplitude, Rechteckspannung		
a) $U_{\text{Anlage}} = 1,55 \text{ V}$ $R_V = 10 \text{ A } \Omega$			$U_0 = 0,56 \text{ V}$		
b)	I	$U_k$	$R_d$ -Wert	24. 11. S.	
	0,1 A	0,16 V	0	I	$U_k$
	86 mA	0,56 V	10	6,8 mA	160 mV
	59 mA	0,87 V	20	6 mA	230 mV
	50 mA	0,95 V	30	<del>4,4 mA</del>	
	42 mA	1,1 V	40	4,7 mA	0,3 V
	38 mA	1,15 V	50	3,7 mA	0,35 V
	32 mA	1,175 V	60	3,1 mA	0,39 V
	29 mA	1,2 V	70	2,75 mA	0,41 V
	26 mA	1,25 V	80	2,2 mA	0,44 V
	23 mA	1,275 V	90	2,1 mA	0,44 V
	21 mA	1,3 V	100	1,9 mA	0,45 V
				1,7 mA	0,46 V
				1,6 mA	0,47 V
					100
c)	$U_{\text{Anlage}} = 3,55 \text{ V}$			$V = 60 \text{ Hz}$ 1 Volt, volle Amplitude, Sinusspannung	
	I	$U_k$	$R_d$ -Wert	$U_0 = 2 \text{ V}$	
	0,22 A	3,4 V	0	I	$U_k$
	0,16 A	2,85 V	10	2,1 mA	0,57 V
	0,125 A	2,5 V	20	1,85 mA	0,33 V
	0,106 A	2,3 V	30	1,25 mA	1,15 V
	72 mA	2,2 V	40	0,92 mA	1,35 V
	59 mA	2,15 V	50	0,72 mA	1,5 V
	52 mA	2,1 V	60	0,62 mA	1,55 V
	47 mA	2,0 V	70	0,53 mA	1,65 V
	42 mA	1,95 V	80	0,45 mA	1,7 V
	39 mA	1,93 V	90	0,38 mA	1,75 V
	36 mA	1,9 V	100	0,34 mA	1,77 V

Abbildung 11: Originaldaten.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung, Versuch Nr. 302*. 2015. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V301.pdf>.
- [2] Wilhelm Walcher. *Praktikum der Physik*. Bd. 7. Teubner, 1994, S. 37–39.