

Versuchsprotokoll zum Versuch Nr. 356

Kettenschaltungen mit LC-Gliedern

Johannes Kollek

johannes.kollek@udo.edu

Jean-Marco Alameddine

jean-marco.alameddine@udo.edu

Durchführung: 15.12.2015

TU Dortmund – Fakultät Physik

1 Zielsetzung

Im vorliegenden Experiment wird eine LC_1C_2 -Kette, bestehend aus alternierenden Kapazitäten sowie Induktivitäten betrachtet. Diese wird in Hinblick auf ihre Eigenschaften wie Grenzfrequenzen, Eigenfrequenzen oder Reflexionsverhalten untersucht.

2 Theorie

Im vorliegenden Experiment wird eine LC-Kette, bestehend aus alternierenden Kapazitäten C_1 und C_2 , genauer im Kapitel 3.1 beschrieben, untersucht.

2.1 Dispersionsrelation einer LC-Kette

Ein repräsentativer Ausschnitt der LC-Kette ist in Abbildung 1 dargestellt.

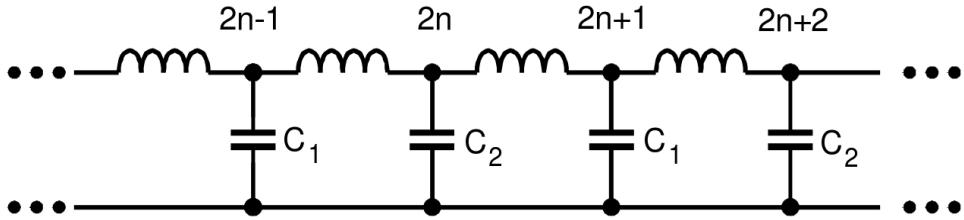


Abbildung 1: Schematischer Ausschnitt einer LC-Kette. [1]

Nach Anwendung der Knotenregel sowie der Maschenregel folgen die beiden gekoppelten Gleichungen

$$\frac{1}{L}(-U_{2n} + 2U_{2n+1} - U_{2n+2}) - \omega^2 C_1 U_{2n+1} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{L}(-U_{2n-1} + 2U_{2n+1} - U_{2n+1}) - \omega^2 C_2 U_{2n} = 0 \quad (2)$$

für die LC-Kette. Dabei bezeichnet U_k jeweils die am zum k -ten Knotenpunkt gehörenden Kondensator anliegenden Spannung. Als Lösungen für diese Gleichungen werden die Ansätze

$$U_{2n+1} = U_{0,1} e^{i\theta(2n+1)} e^{i\omega t} \quad (3)$$

$$U_{2n} = U_{0,2} e^{i\theta(2n)} e^{i\omega t} \quad (4)$$

verwendet. Hierbei bezeichnet θ die Phasenänderung pro Kettenglied sowie ω die Kreisfrequenz der Schwingung. Durch Einsetzen von (3) in (1) sowie (4) in (2) erhält man

durch Umformungen und Anwendung der Eulerformel die Beziehungen

$$U_{0,1}\left(\frac{2}{L} - \omega^2 C_1\right) - U_{0,2} \frac{2 \cos(\theta)}{L} = 0, \quad (5)$$

$$-U_{0,1} \frac{2 \cos(\theta)}{L} + U_{0,2} \left(\frac{2}{L} - \omega^2 C_2\right) = 0. \quad (6)$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich schreiben als

$$\vec{U} \mathbf{M} = 0$$

mit der Matrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{2}{L} - \omega^2 C_1 & -\frac{2}{L} \cos(\theta) \\ -\frac{2}{L} \cos(\theta) & \frac{2}{L} - \omega^2 C_2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Nur für $\det(\mathbf{M}) = 0$ ergeben sich nicht-triviale Lösungen dieses Gleichungssystems. Hieraus folgt sofort die Dispersionsrelation zu

$$\omega_{1/2}^2 = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \pm \frac{1}{L} \sqrt{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^2 - \frac{4 \sin^2(\theta)}{C_1 C_2}}. \quad (8)$$

Sie beschreibt das Verhältnis der Phasenänderung pro Kettenglied θ und der Kreisfrequenz ω . Die Dispersionskurve wird in Abbildung 2 schematisch dargestellt.

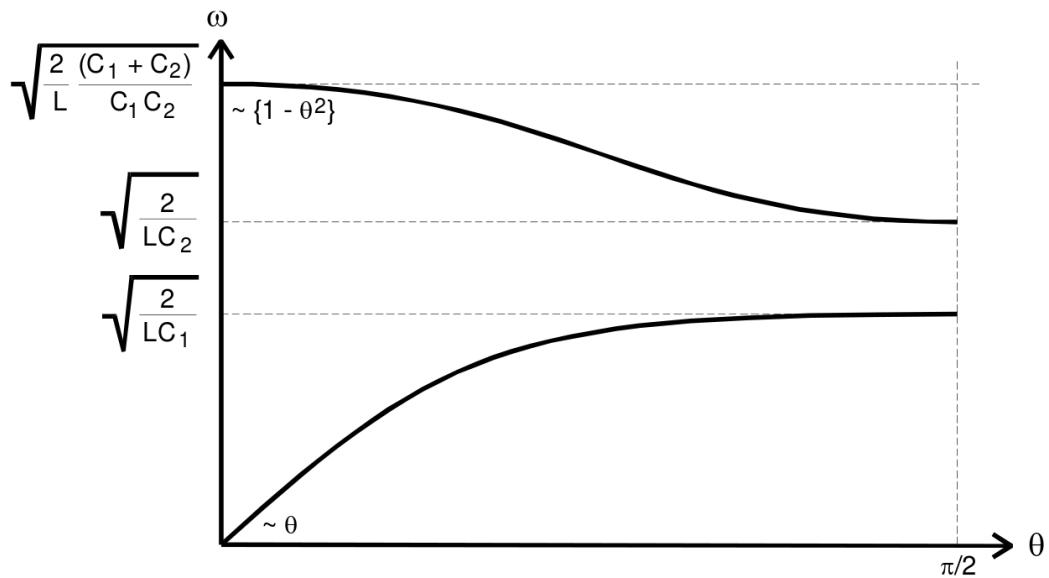


Abbildung 2: Kurve der Dispersionsrelation einer LC-Kette mit alternierenden Kapazitäten. [1]

Es fällt auf, dass sich die Kurve in zwei Äste aufteilt, von denen der obere Ast in Analogie zur Kristallphysik als optischer Ast, der untere als akustischer Ast bezeichnet wird.

Zudem ergibt sich zunächst eine Bandsperre im Bereich

$$\sqrt{\frac{2}{LC_1}} < \omega < \sqrt{\frac{2}{LC_2}} \quad (9)$$

sowie eine Grenzfrequenz

$$\omega_{\text{gr}} = \sqrt{\frac{2(C_1 + C_2)}{LC_1 C_2}}, \quad (10)$$

wobei innerhalb der Bandsperre bzw. oberhalb von ω_{gr} keine Schwingungen erzeugt werden können.

2.2 Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen

Die Lösungen für die Spannungen U_n besitzen die, in (3) und (4) spezifizierte, allgemeine Form

$$U_k = U_0 e^{i(\omega t - k\theta)}. \quad (11)$$

Im Allgemeinen beschreibt die Phasengeschwindigkeit v_{Ph} nun, mit welcher Geschwindigkeit sich Orte gleicher Phase in einer Welle ausbreiten:

$$v_{\text{Ph}} = \frac{\Delta n}{\Delta t}. \quad (12)$$

Betrachtet man nun jene Geschwindigkeit für die in (11) angegebene Formel, ergibt sich eine Phasengeschwindigkeit von

$$v_{\text{Ph}} = \frac{\omega}{\theta}. \quad (13)$$

Für die Signalübertragung notwendig sind jedoch sogenannte Wellengruppen, welche durch eine sich fortpflanzende, einhüllende Funktion mit Anfang und Ende gekennzeichnet sind. Schematisch ist eine solche Wellengruppe in Abbildung 3 dargestellt.

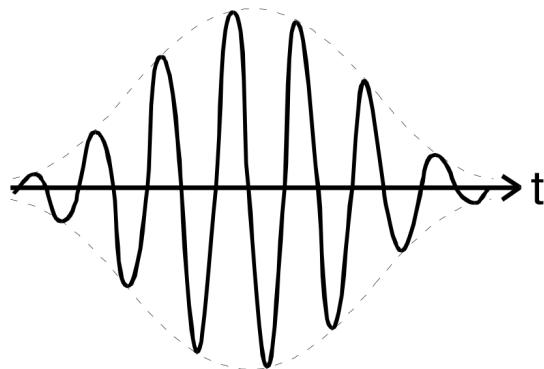


Abbildung 3: Schematische Darstellung eines Wellenpaketes. [1]

Die Ausbreitung des Maximums dieses Wellenpaketes, welches aus mehreren Wellen mit verschiedenen Frequenzen und somit unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten besteht, wird als Gruppengeschwindigkeit v_{gr} bezeichnet. Um diese zu beschreiben, werde eine Welle mit der zeitabhängigen Amplitude

$$A(t) = A_0 \cos(\omega t - \theta)$$

sowie eine mit der Amplitude

$$A'(t) = A_0 \cos(\omega' t - \theta')$$

betrachtet, wobei sich die Frequenzen ω und ω' nur leicht unterscheiden sollen. Nach Anwendung der Additionstheoreme sowie der Näherungen

$$\frac{1}{2}(\omega + \omega') \approx \omega$$

und

$$\frac{1}{2}(\theta + \theta') \approx \theta$$

ergibt sich

$$A(t) + A'(t) = 2A_0 \cos(\omega t - \theta) \cos\left(\frac{1}{2}(\omega - \omega')t - (\theta - \theta')\right). \quad (14)$$

Dieses Phänomen, bei dem eine Welle mit Überlagerungsfrequenz durch eine einhüllende Welle mit Resonanzfrequenz entsteht, bezeichnet man als Schwebung. Die Gruppengeschwindigkeit v_{gr} entspricht nun der Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Schwebungsmaximums. Dieses ergibt sich somit zu

$$v_{\text{gr}} = \frac{\omega - \omega'}{\theta - \theta'} \stackrel{\omega \rightarrow \omega'}{\stackrel{\theta \rightarrow \theta'}{=}} \frac{d\omega}{d\theta}. \quad (15)$$

Angewendet auf die in Formel (8) gefundene Dispersionsrelation für die alternierende LC-Kette ergibt sich

$$v_{\text{Ph}} = \frac{\omega}{\arcsin\left(\sqrt{\frac{-1}{4}\omega^4 L^2 C_1 C_2 + \frac{1}{2}\omega^2 L C_1 C_2 \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)}\right)} \quad (16)$$

als Phasengeschwindigkeit sowie nach kurzer Rechnung auch die Gruppengeschwingigkeit. Letztere Rechnung sei dem aufmerksamen Leser als Übung überlassen.

2.3 Widerstand der LC-Kette

Von Interesse bei der LC-Kette ist ebenfalls der sogenannte Eingangswiderstand Z , welcher das Verhältnis der am ersten Kondensator der Kette anliegenden Spannung und

des in die LC-Kette fließenden Stromes angibt. Betrachtet man exemplarisch eine in Abbildung 4 dargestellte normale LC-Kette mit Kapazität $\frac{C}{2}$ am ersten Kondensator, so gilt am eingezeichneten Punkt P_0 mithilfe der Knotenregel

$$I_0 - i\omega \frac{C}{2} U_0 + \frac{U_1 - U_0}{i\omega L} = 0. \quad (17)$$

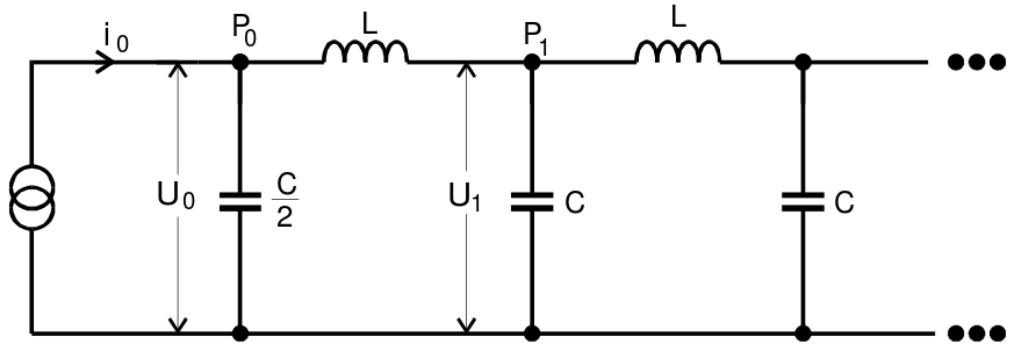


Abbildung 4: Exemplarischer Ausschnitt des Anfangs einer normalen LC-Kette. [1]

Mithilfe des Ansatzes

$$U_1 = U_0 e^{-i\theta} \quad (18)$$

sowie der Dispersionsrelation

$$\omega^2 = \frac{2}{LC} (1 - \cos(\theta)) \quad (19)$$

für eine normale LC-Kette ohne alternierende Kapazitäten, welche wie im Kapitel 2.1 beschrieben analog bestimmt werden kann, folgt für den Eingangswiderstand der Wert

$$Z(\omega) = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}\omega^2 LC}. \quad (20)$$

Dieser ist reell, so dass es zu keiner Phasenverschiebung zwischen Eingangsspannung und Eingangsstrom kommt. Zudem fällt auf, dass für Frequenzen unterhalb der Grenzfrequenz

$$\omega_G = \sqrt{\frac{2}{LC}}$$

der Wellenwiderstand annähernd $\frac{L}{C}$ beträgt. Analog zu dieser Überlegung soll für $\omega \ll \omega_G$ die Näherung

$$Z(\omega) = \sqrt{\frac{2L}{C_1 + C_2}} \quad (21)$$

für die LC-Kette mit alternierenden Kapazitäten genügen. Es bleibt zu erwähnen, dass man mithilfe eines ohmschen Widerstandes mit ebendiesen Wert als Abschluss der LC-Kette eine unendliche LC-Kette simulieren kann. Dies wird dann als Abschluss der LC-Kette mit dem Wellenwiderstand Z bezeichnet. Genauer wird dieses Verhalten im folgenden Kapitel 2.4 analysiert.

2.4 Verhalten der LC-Kette in Abhängigkeit des Abschlusswiderstandes

Es wird nun das Reflexionsverhalten des Endes einer LC-Kette, über welches eine reale LC-Kette verständlicherweise verfügen muss, diskutiert. Am Ende der Kette, an welcher sich ein im Allgemeinen komplexer Abschlusswiderstand R befinden soll, gelten nach der Knotenregel sowie der Maschenregel die Beziehungen

$$U_R = U_e + U_{\text{ref}}, \quad (22)$$

$$I_R = I_e + I_{\text{ref}}, \quad (23)$$

wobei U_R die am Abschlusswiderstand anliegende Spannung, U_e die Spannung der einlaufenden Welle sowie U_{ref} die Spannung der gegebenenfalls reflektierten Welle beschreibt. Analoges gilt für die Ströme. Mithilfe des in Kapitel 2.3 hergeleiteten Begriffs des Wellenwiderstandes Z , welcher für die LC-Kette gültig sein soll, folgt für das Verhältnis der Spannungen der eingehenden sowie reflektierten Welle das Verhältnis

$$\frac{U_{\text{ref}}}{U_e} = \frac{R - Z}{R + Z}. \quad (24)$$

Durch geeignete Wahl von R kann das Reflexionsverhalten nun beeinflusst werden. So folgt, dass bei der Wahl $R = \infty$, welches einem offenen Ende der Kette entspricht, die eingehende Spannung ohne Phasensprung vollständig reflektiert wird, während bei $R = 0$, welches einem kurzgeschlossenen Ende entspricht, die eingehende Spannung mit Phasensprung von π vollständig reflektiert wird. Eine weitere Möglichkeit ist der in Kapitel 2.3 bereits besprochene Abschluss mit dem Wellenwiderstand, wobei hier $U_{\text{ref}} = 0$ folgt und somit keine Reflexion der eingehenden Welle stattfindet. Wird nun das offene bzw. kurzgeschlossene Ende betrachtet, so erhält man eine hinlaufende Welle der Form

$$A_h = A_0 \cos(\omega t - n\theta)$$

sowie eine rücklaufende Welle mit

$$A_{r,\infty} = A_0 \cos(\omega t + n\theta)$$

für das offene Ende, bzw.

$$A_{r,0} = -A_0 \cos(\omega t + n\theta)$$

für das kurzgeschlossene Ende. Mit Hilfe von Additionstheoremen lässt sich die Überlagerung dieser Wellen beschreiben, was zu stehenden Wellen der Form

$$A_{\text{ges},\infty} = 2A_0 \cos(\omega t) \cos(n\theta) \quad (25)$$

$$A_{\text{ges},0} = 2A_0 \sin(\omega t) \sin(n\theta) \quad (26)$$

führt. Für das offene Ende folgt also, dass sich Schwingungskonten, d.h. Orte mit dauerhaft verschwindender Amplitude, für

$$n_{(2k+1)}\theta = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{N}$$

aufreten. Am Ende der Kette muss dementsprechend ein Spannungsbauch auftreten, damit eine stehende Welle entstehen kann. Analog hierzu kann man sehen, dass bei dem kurzgeschlossenen Ende Schwingungsknoten für

$$n_k\theta = k\pi, \quad k \in \mathbb{N}$$

aufreten, am Ende der Kette muss ein Spannungsknoten herrschen. Außerdem folgt, dass für beide Fälle die Bedingung

$$n_{\max}\theta_k = k\pi, \quad k = 1, 2, \dots, n_{\max}$$

erfüllt sein muss.

3 Aufbau und Durchführung

3.1 Aufbau

3.1.1 Aufbau zur Durchlasskurve

Um zu untersuchen welchen Frequenzbereich eine LC_1C_2 -Kette durchlässt wird ein Versuchsaufbau nach Abbildung 5 gewählt.

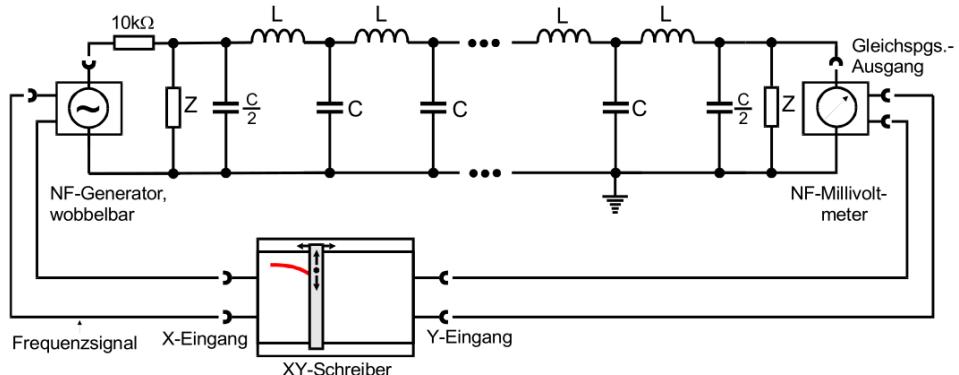


Abbildung 5: Aufbau zur Untersuchung der Durchlasskurve einer LC_1C_2 -Kette. [1]

Die oben skizzierte LC_1C_2 -Kette besteht im Experiment aus 14 alternierenden LC-Gliedern, bei denen jeweils eine Spule L in Reihe und ein Kondensator, abwechselnd

C_1 und C_2 , parallel dazu geschaltet ist. Die Kette ist am Anfang und am Ende mit dem Wellenwiderstand Z abgeschlossen. Am Anfang der Kette ist eine Spannungsquelle zugeschaltet. Der unmittelbar danach geschaltete Widerstand von $10\text{k}\Omega$ dient dazu, den Eigenwiderstand der Spannungsquelle, welche einen systematischen Fehler darstellt, zu eliminieren. Am Ende der LC_1C_2 -Kette befindet sich ein Millivoltmeter, welches die Speisewechselspannung in Gleichspannung umwandelt. Diese wird dem Y-Eingang eines XY-Schreibers zugeführt, während der X-Eingang mit dem Logarithmus der Frequenz der Speisespannung verbunden wird. Die LC_1C_2 -Kette hat die Werte

$$L = 1,217 \text{ mH},$$

$$C_1 = 20,13 \text{ nF},$$

$$C_2 = 9,41 \text{ nF},$$

wobei der Wellenwiderstand Z noch zu bestimmen ist. Dieser wird nach Formel (21) aus der Theorie berechnet und eingestellt. Er beträgt

$$Z = 287,048 \Omega.$$

3.1.2 Aufbau zur Dispersionsrelation

Die Dispersionsrelation wird mit der Schaltung aus Abbildung 6 untersucht.

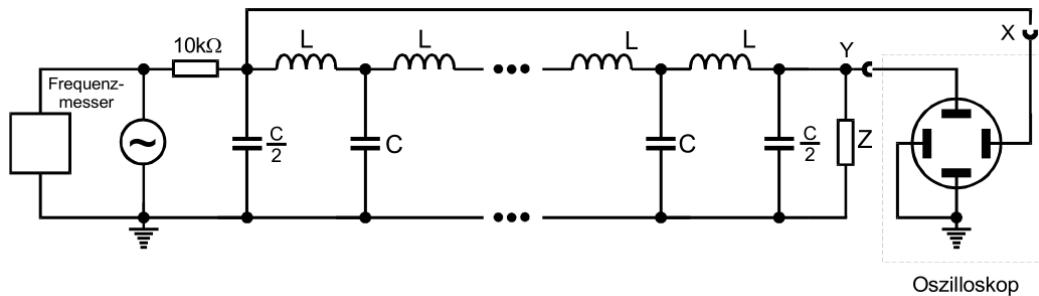


Abbildung 6: Aufbau zur Untersuchung der Dispersionsrelation einer LC_1C_2 -Kette.
[1]

Es handelt sich um eine leicht abgewandelte Schaltung aus Abbildung 5. Das Ende der LC_1C_2 -Kette wird dem Y-Eingang eines Oszilloskops zugeführt. Der X-Eingang wird mit der Speisespannung verbunden. Diese ist auch mit einem Frequenzmesser verbunden, da der Anzeige der Spannungsquelle nicht vertraut werden kann.

3.1.3 Aufbau zur Bestimmung der Eigenfrequenzen und Form der stehenden Wellen

Hierzu wird die Schaltung aus Abbildung 6 benutzt. Jedoch wird an Stelle des Oszilloskops ein Millivoltmeter zugeschaltet. Zudem soll die Kette für die Bestimmung der Eigenfrequenzen offen sein, was bedeutet, dass der Wellenwiderstand Z abgeschaltet wird.

3.2 Durchführung

3.2.1 Aufnahme der Durchlasskurve

Zunächst wird der Wellenwiderstand richtig eingestellt. Um eine ansehnliche Durchlasskurve aufzunehmen, müssen Spannungsquelle und XY-Schreiber richtig justiert werden. Die Spannungsquelle wird dabei auf einen kontinuierlichen Frequenzsweep linearer Form eingestellt, während der X- und Y-Eingang des Schreibers entsprechend skaliert wird. Nach der erfolgten Justierung wird die Durchlasskurve über einen einzelnen Sweep aufgenommen. Gleichzeitig wird die Frequenzskala notiert. Hiermit wird die Amplitude der Ausgangsspannung in Abhängigkeit von der Frequenz gemessen. Wichtig beim Aufnehmen ist es, den akustischen und den optischen Ast aufzunehmen.

3.2.2 Bestimmung der Dispersionsrelation

Hierzu wird das Oszilloskop auf XY-Betrieb gestellt um die Lissajous-Figuren zu finden, bei denen die Phasenverschiebung 0 oder π ist, sie also eine Gerade ist. Die Frequenzen, bei denen dies der Fall ist, werden notiert.

3.2.3 Bestimmung der Eigenfrequenzen

Hierzu wird wie zuvor vorgegangen. Diesmal werden aber die Frequenzen notiert, bei denen ein Spannungsmaximum am Ende der Kette beobachtet wird. Dies sind nämlich die Frequenzen, bei denen sich eine stehende Welle in der Kette bildet.

3.2.4 Bestimmung der Form der stehenden Wellen

Um die Form zu bestimmen wird die Frequenz auf die erste bzw. zweite zuvor ermittelte Eigenfrequenz der Kette gestellt. Es werden die Spannungen pro zugeschaltetem Kettenglied notiert. Zuletzt wird dasselbe mit einer Eigenfrequenz mit zugeschaltetem Wellenwiderstand durchgeführt.

4 Auswertung

4.1 Berechnung der Grenzfrequenzen aus der Durchlasskurve

Zunächst wird, wie in der Durchführung beschrieben, die Spannungsamplitude am Ende der *LC*-Kette in Abhängigkeit der Frequenz betrachtet. Der mithilfe des XY-Schreibers entstandene Graph ist in Abbildung 7 dargestellt. Auf der y -Achse ist die Spannungsamplitude, auf der x -Achse der natürliche Logarithmus der Frequenz dargestellt. Exemplarisch

wurden an der x -Achse mehrere Frequenzwerte eingetragen, wobei diese den realen Frequenzwert und nicht dessen Logarithmus darstellen. Um nun die Grenzfrequenzen möglichst genau ablesen zu können, wird eine lineare Regression durchgeführt. Diese wird für die Längeneinheiten auf der x -Achse und die Logarithmen der Frequenzen für die abgelesenen Werte durchgeführt. Alle abgelesenen Werte sind wiederum nochmals in Tabelle 1 angegeben.

Die lineare Regression wird nun mit der Methode der kleinsten Quadrate mit Hilfe von

Tabelle 1: Exemplarisch abgelesene Frequenzen der Durchlasskurve der *LC*-Kette.

$LE[\text{cm}]$	$\nu[\text{kHz}]$
0,0	29,8
2,0	32,8
4,0	36,3
6,0	40,2
8,0	44,3
10,0	48,9
12,0	53,6
14,0	58,6
16,0	64,6
18,0	70,5
20,0	77,3
22,0	85,4

SciPy durchgeführt. Es ergeben sich die Parameter

$$b = (3,403 \pm 0.004) \ln(\text{kHz})$$

$$m = (0,0476 \pm 0.0003) \frac{\ln(\text{kHz})}{\text{cm}}.$$

Die Grenzfrequenzen werden an der Durchlasskurve zu

$$g_1 = 9 \text{ cm}$$

$$g_2 = 16,5 \text{ cm}$$

abgelesen. Aus diesen Längenangaben und den in der linearen Regression bestimmten Parametern ergibt die Umrechnungsformel

$$\nu = e^{mg_i + b} \quad (27)$$

die gesuchten Grenzfrequenzen. Vergleicht man diese mit den aus Formel (9) bestimmten theoretischen Grenzfrequenzen, ergeben sich die Werte

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 46,1 \text{ kHz}, \\ \nu_{1,\text{theorie}} &= 45,5 \text{ kHz}, \\ \nu_2 &= 65,9 \text{ kHz}, \\ \nu_{2,\text{theorie}} &= 66,5 \text{ kHz}. \end{aligned}$$

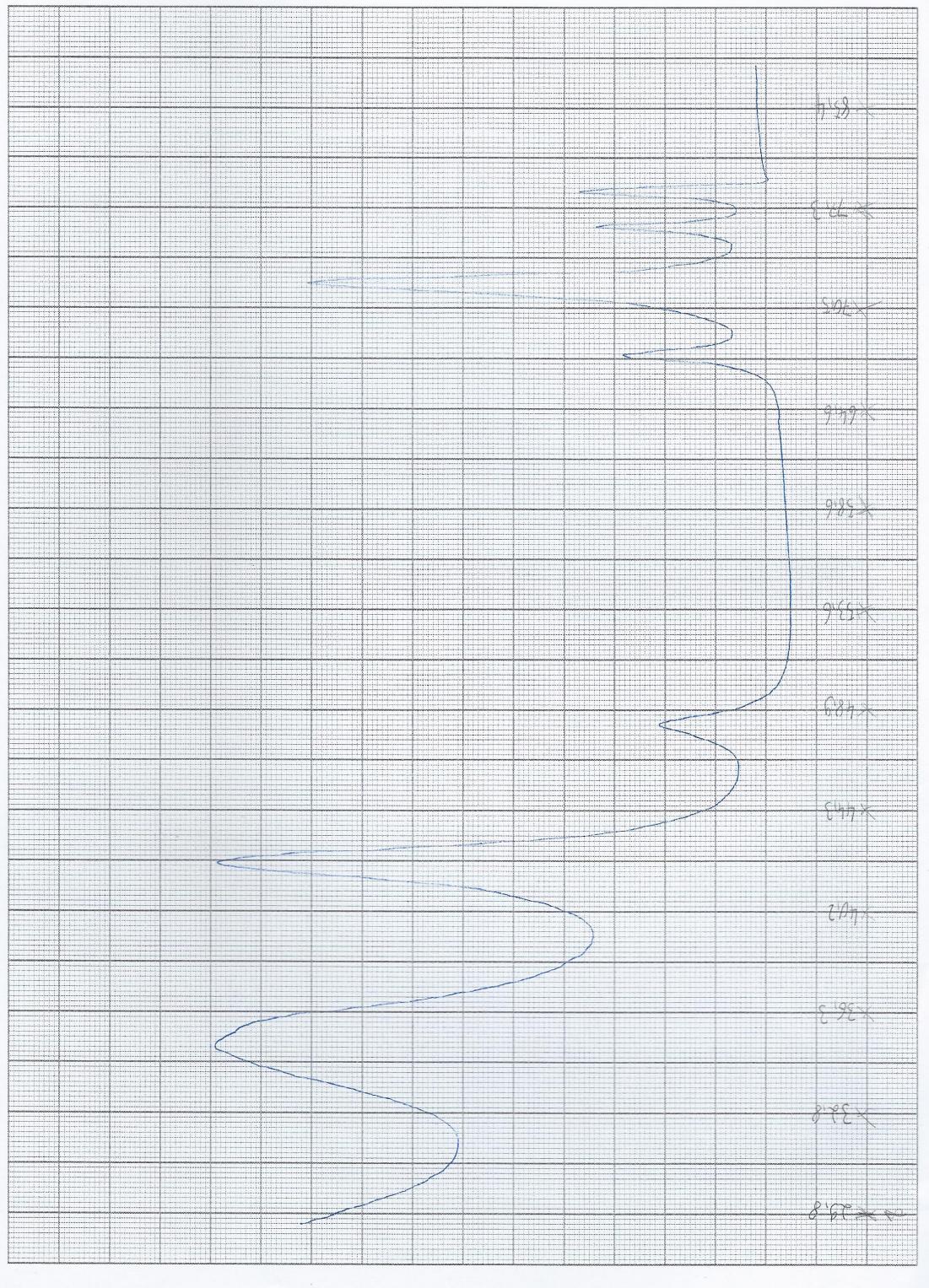


Abbildung 7: Aufgenommene Durchlasskurve der alternierenden Kette.

Es zeigt sich somit eine relative Abweichung der Messwerte zu den Theoriewerten von

$$\begin{aligned}\Delta\nu_1 &= 1,3\%, \\ \Delta\nu_2 &= 0,9\%,\end{aligned}$$

wobei die relative Abweichung nach

$$f = \frac{|N - x|}{N} \quad (28)$$

mit einem Theoriewert N sowie einem Messwert x berechnet werden.

4.2 Betrachtung der Dispersionsrelation

Es wird nun die Dispersionsrelation, wie in der Durchführung beschrieben, betrachtet. Dazu werden alle Frequenzen ω betrachtet, bei denen die Phasenverschiebung zwischen dem ersten und letzten LC -Glied ein Vielfaches von π ist. Aufgrund der Tatsache, dass die LC -Kette aus 14 alternierenden Gliedern besteht, folgt somit die jeweilige Phasenänderung pro Kettenglied θ zu $\frac{n\pi}{14}$. Die gemessenen Werte sind in Tabelle 2 angegeben. Hierbei beschreibt α die gemessene Phasenverschiebung zwischen dem ersten

Tabelle 2: Bestimmung der Phasenverschiebung pro Glied in Abhängigkeit der Frequenz.

ω [Hz]	$\frac{\alpha}{\pi}$	$\frac{\theta}{\pi}$
51912	1	0,07
102196	2	0,14
154064	3	0,21
199931	4	0,29
237819	5	0,36
274198	6	0,43
308617	7	0,50
428507	9	0,64
464956	10	0,71
485439	11	0,79
506173	12	0,86

und letzten LC -Glied sowie θ die aus den bereits genannten Beobachtungen folgende Phasenverschiebung pro einzelnen Glied. Bei der genaueren Auswertung der Messwerte ist aufgefallen, dass sich eine Unregelmäßigkeit zwischen dem siebten und achten Messwert ergeben hat. Hieraus wird geschlussfolgert, dass der Messwert für die Phasenverschiebung $\alpha = 8\pi$ übersprungen wurde. Dementsprechend ist für dieses α kein Messwert angegeben. Mithilfe von Formel (8) können die Theoriekurven der Dispersionsrelation bestimmt werden. Diese sind zusammen mit den gemessenen Werten in Abbildung 8 dargestellt.

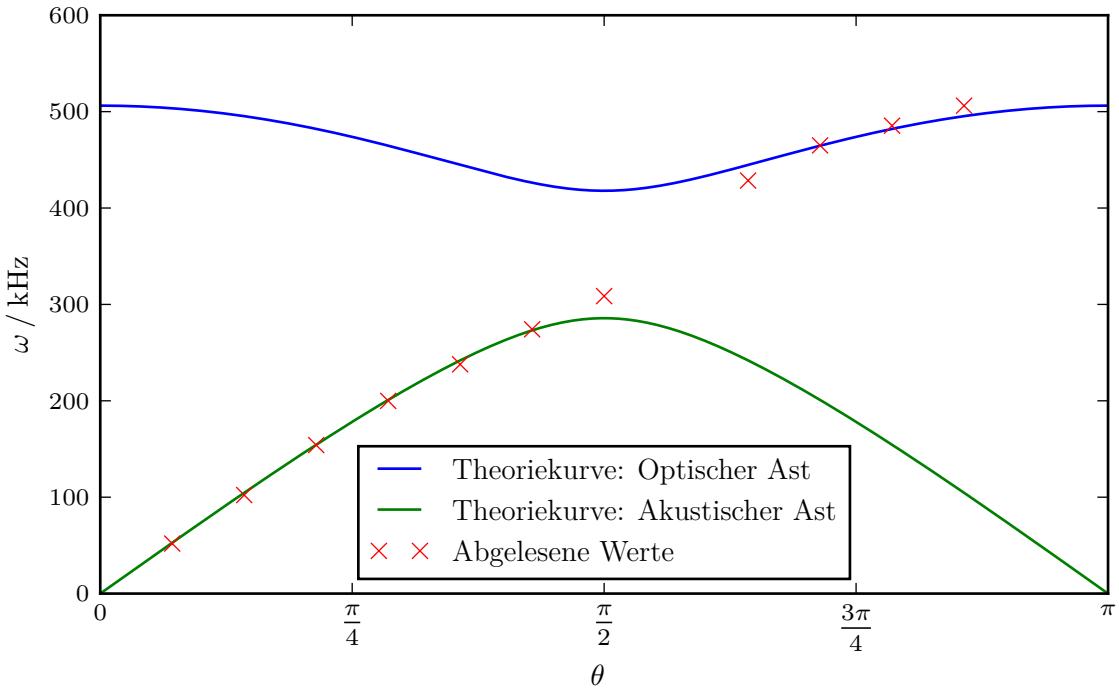


Abbildung 8: Gemessene sowie theoretisch bestimmte Dispersionsrelation der alternierenden Kette.

4.3 Bestimmung der Eigenfrequenzen

Es werden nun, wie in der Durchführung beschrieben, die Eigenfrequenzen der offenen *LC*-Kette bestimmt. Aufgrund der in Kapitel 2.4 beschriebenen Eigenschaften der stehenden Wellen ergeben sich die Phasenverschiebungen von Anfang und Ende der LC-Kette zu Vielfachen von π , und die Phasenverschiebungen θ zu Vielfachen von $\frac{\pi}{14}$. Die Phasengeschwindigkeit v_{Ph} berechnet sich mit diesen Angaben nach (13). Die gemessenen Werte sind in Tabelle 3 angegeben. Diese Daten werden nun zusammen mit den Theoriewerten der Phasengeschwindigkeit, welche sich nach Formel (16) berechnen, in Abbildung 9 dargestellt.

Tabelle 3: Eigenfrequenzen sowie zugehörige Phasengeschwindigkeiten der LC-Kette.

ω [Hz]	$\frac{\theta}{\pi}$	v_{Ph} [kHz]
49047	0,07	219
97641	0,14	218
152518	0,21	227
188496	0,29	210
227326	0,36	203
265559	0,43	197
311018	0,50	198
428067	0,64	212
460193	0,71	205

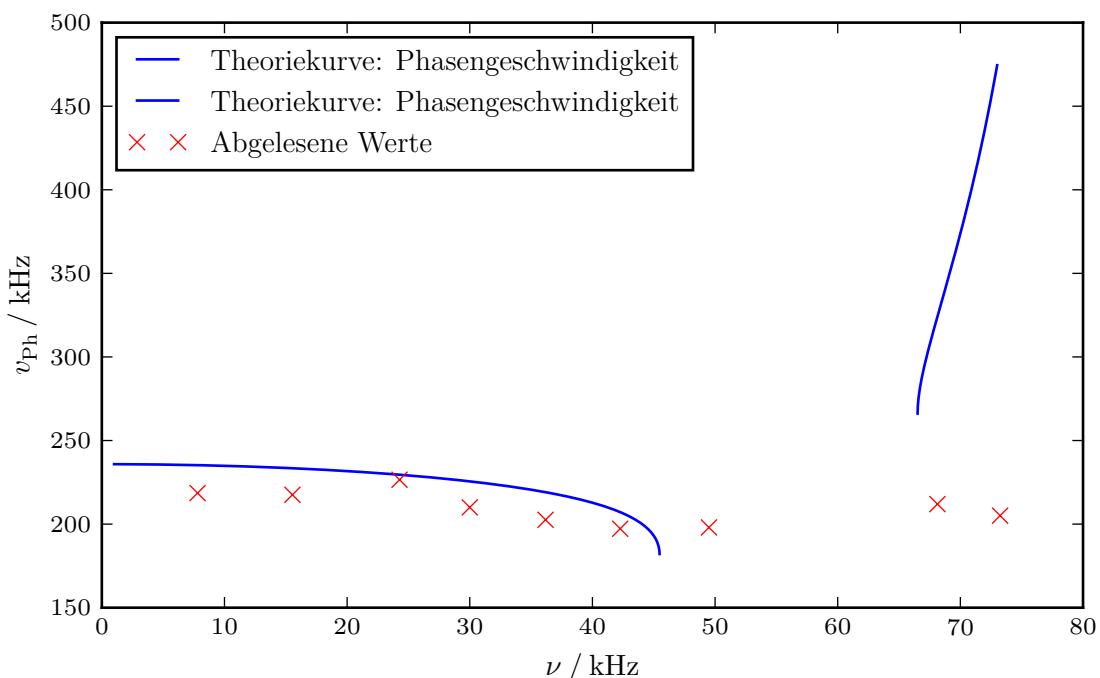


Abbildung 9: Phasengeschwindigkeiten der Eigenfrequenzen der LC-Kette sowie dazugehörige Theoriwerte.

Für die Theoriekurve ergeben sich zwei Abschnitte des Graphen, da die Phasengeschwindigkeit im Bereich der Grenzfrequenzen nicht definiert ist. Es fällt direkt auf, dass es, abgesehen vom dritten Messwert, starke systematische Abweichungen der Phasengeschwindigkeiten nach unten gibt. Dieser Sachverhalt, und die Tatsache, dass es sich nicht um einen Fehler in der theoretischen Betrachtung handelt, werden in der Diskussion genauer beleuchtet.

4.4 Bestimmung der Form der stehenden Wellen

Um die Form der stehenden Wellen zu analysieren, werden, wie in der Durchführung beschrieben, die Amplituden der einzelnen Kondensatoren betrachtet. Exemplarisch wird die Form der stehenden Wellen für die Frequenzen

$$\nu_1 = 7806 \text{ Hz}$$

$$\nu_2 = 15\,540 \text{ Hz}$$

betrachtet. Hierzu werden die gemessenen Spannungen an den Kapazitäten gegen die jeweilige Nummer n des Kondensators abgetragen, wobei zu beachten ist, dass die Spannungen jeweils den Effektivwert der Spannung darstellen. In Tabelle 4 sind die gemessenen Werte angegeben.

Tabelle 4: Gemessene Spannungen an den einzelnen Kondensatoren der LC -Kette für die Eigenfrequenzen ν_1 und ν_2 .

n	$U_{\nu_1}[\text{V}]$	$U_{\nu_2}[\text{V}]$
0	1,99	1,70
1	1,85	1,35
2	1,68	0,80
3	1,40	0,05
4	1,10	0,70
5	0,70	1,30
6	0,32	1,70
7	0,08	1,75
8	0,48	1,60
9	0,82	1,05
10	1,25	0,56
11	1,60	0,04
12	1,90	0,63
13	2,05	1,05
14	2,20	1,35

Zudem wird die erwartete stehende Welle, welche sich nach Formel (25) berechnet, eingetragen. Die Daten sind in den Abbildungen 10 sowie 11 dargestellt.

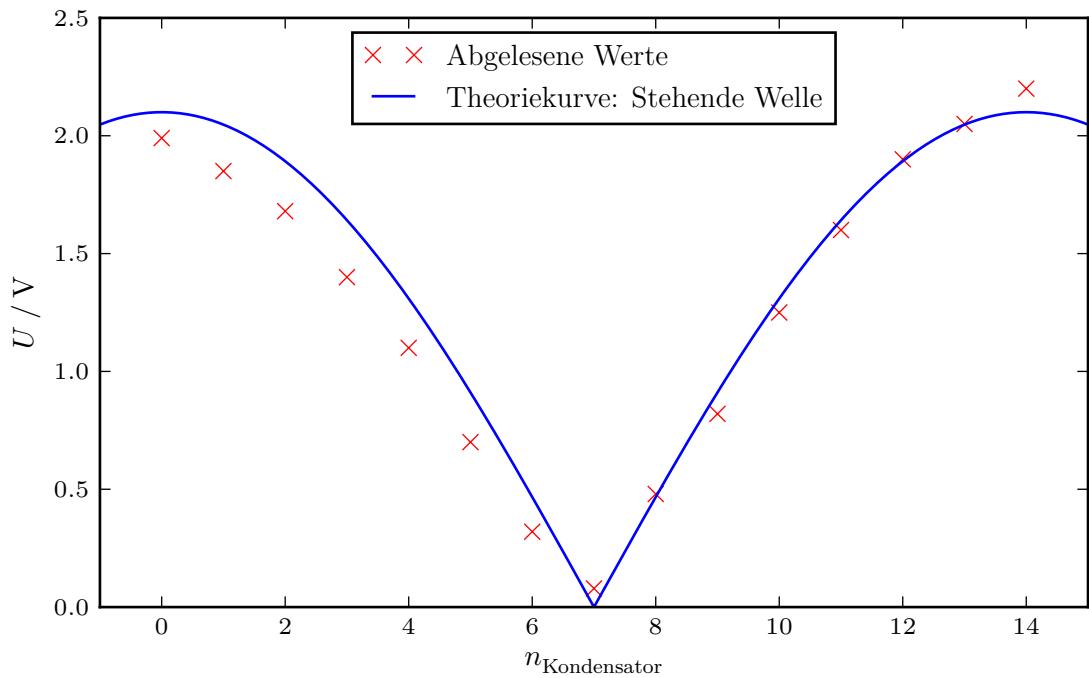


Abbildung 10: Form der stehenden Welle für die Eigenfrequenz ν_1 .

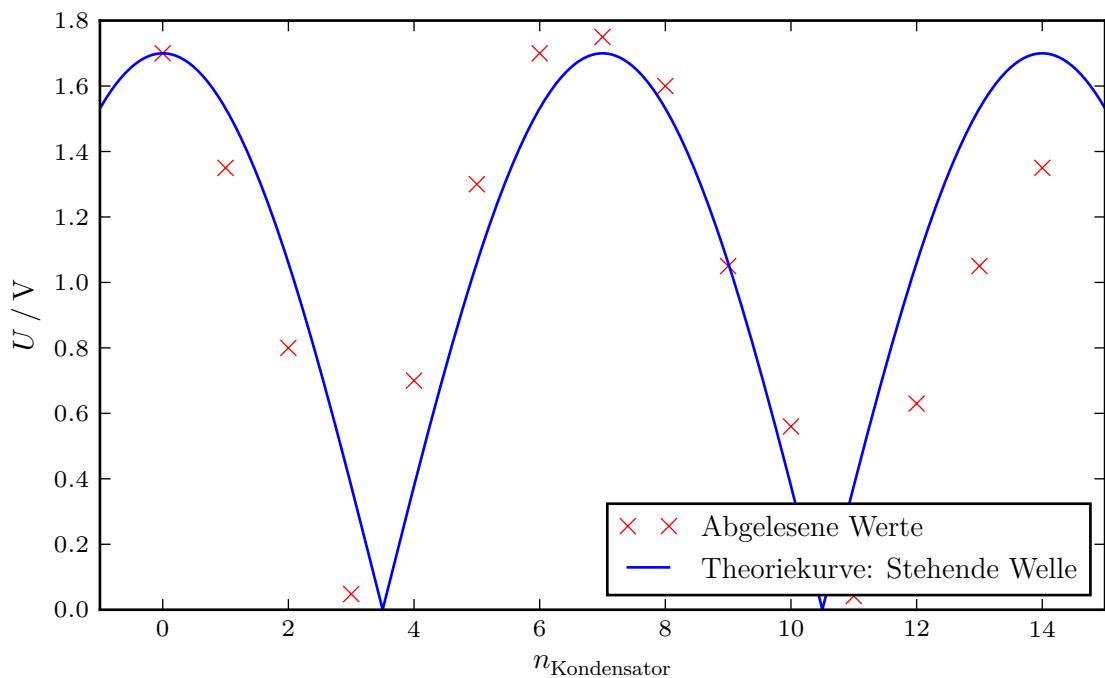


Abbildung 11: Form der stehenden Welle für die Eigenfrequenz ν_2 .

Wird das Experiment, wie in der Durchführung beschrieben, mit zugeschalteten Wellenwiderstand für ν_1 durchgeführt, so wird nach dem im Kapitel 2.4 beschriebenen Verhalten keine Reflexion erwartet. In der Theorie wäre das Ausbreiten einer stehenden Welle unterbunden und eine annähernd konstante Spannung zu erwarten. Die gemessenen Werte sind in Tabelle 5 angegeben.

Tabelle 5: Gemessene Spannungen an den einzelnen Kondensatoren der *LC*-Kette für die Eigenfrequenz ν_1 bei zugeschalteten Wellenwiderstand.

n	U_{ν_1} [mV]
0	300
1	370
2	440
3	500
4	540
5	560
6	570
7	540
8	500
9	440
10	390
11	340
12	295
13	260
14	250

Entgegen der ursprünglichen Erwartung ergibt sich das Muster einer stehenden Welle mit dem Peak beim sechsten Kondensator. Dieser resultiert daraus, dass der Wellenwiderstand frequenzabhängig ist und nicht mehr auf die verwendete Frequenz exakt eingestellt ist. Dementsprechend werden weiterhin Wellen reflektiert, die die erwartete konstante Spannung überlagern.

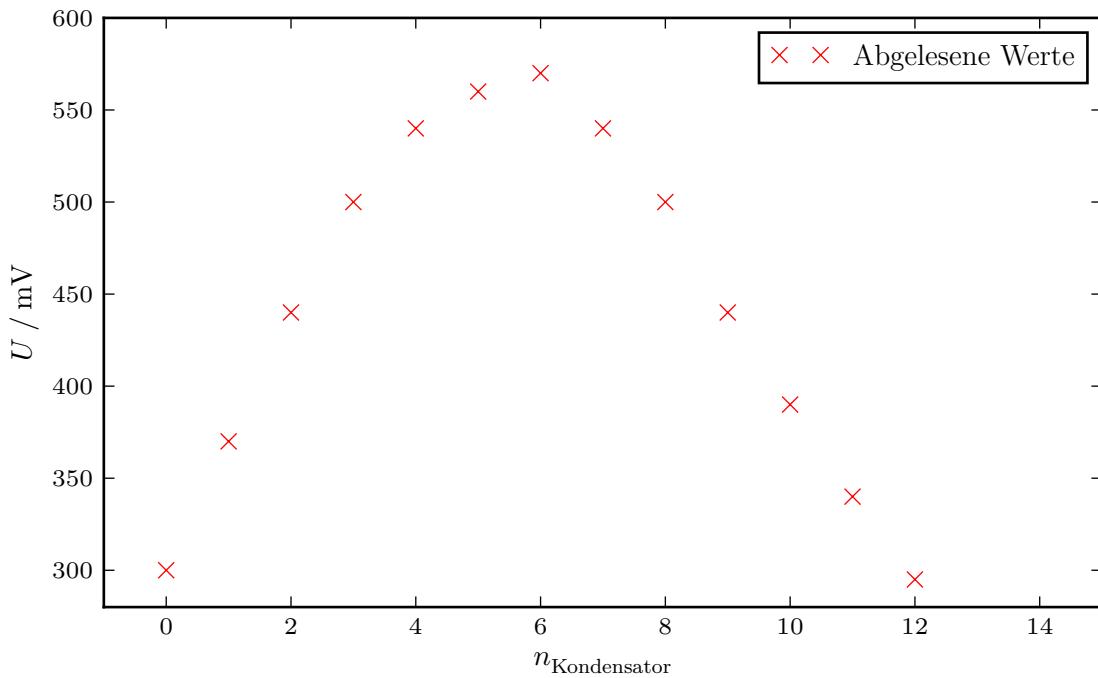


Abbildung 12: Form der stehenden Welle für die Eigenfrequenz ν_1 mit zugeschaltetem Wellenwiderstand.

5 Diskussion

Die Ergebnisse zur Untersuchung der Grenzfrequenzen mittels Durchlasskurve und Theorie lauten

$$\begin{aligned}\nu_1 &= 46,1 \text{ kHz}, \\ \nu_{1,\text{theorie}} &= 45,5 \text{ kHz}, \\ \nu_2 &= 65,9 \text{ kHz}, \\ \nu_{2,\text{theorie}} &= 66,5 \text{ kHz}.\end{aligned}$$

mit einer jeweiligen Abweichung der Messwerte zu den Theoriewerten von

$$\begin{aligned}\Delta\nu_1 &= 1,3\%, \\ \Delta\nu_2 &= 0,9\%.\end{aligned}$$

Die Schwankungen der aufgenommenen Durchlasskurve, dargestellt in Abbildung 7, lassen sich dadurch erklären, dass der Wellenwiderstand frequenzabhängig ist. Dies wird jedoch bei dieser Messung vernachlässigt. Es entstehen daher Teilreflexionen, welche sich vor allem bei den Schwankungen jener Frequenzen äußern, die weit von der Frequenz entfernt

sind, nach der der Wellenwiderstand ursprünglich ausgerichtet wurde. Dennoch lassen sich die Grenzfrequenzen gut erkennen.

Die Abbildung 8 spiegelt die beiden Äste der Dispersionsrelation wieder. Problematisch war es, dass der Frequenzgenerator für höhere Frequenzen eine gröbere Messskala verwendet, und die Einstellung ebendieser Frequenzen sich als schwierig gestaltet hat. Trotz dieser Schwierigkeiten beim Justieren der gewünschten Lissajous-Figuren, was sich letztendlich im Fehlen eines Wertes bemerkbar macht, liegen die gemessenen Werte auf den berechneten Theorieästen. Größere Abweichungen im höheren Frequenzbereich lassen sich durch den oben genannten Fehler vollständig erklären.

Bei der Bestimmung der Eigenfrequenzen und dem in Abbildung 9 dargestellten Diagramm ergeben sich große Abweichungen. Ein systematischer Fehler bei dieser Messung liegt im benutzten Frequenzgenerator, welcher die Frequenz konstant abfallen lässt. Bei näherer Betrachtung der hier bestimmten Eigenfrequenzen ist aufgefallen, dass diese eine starke systematische Ähnlichkeit zu den Frequenzen aufweisen, welche bei der Betrachtung der Dispersionsrelation in Kapitel 4.2 bestimmt wurden. Diese Frequenzen, welche in Tabelle 2 dargestellt sind, weichen lediglich alle nach oben ab. Diese Ähnlichkeit lässt sich dadurch erklären, dass bei der Aufgabenstellung in Kapitel 4.2 Frequenzen gesucht wurden, bei denen sich eine Phasenverschiebung von π zwischen dem ersten und letztem Kondensator ergibt. Ebendiese Bedingung ist jedoch auch für die Eigenfrequenzen erfüllt. Tragen wir also die Frequenzen aus Tabelle 2 mit den dazugehörigen Phasengeschwindigkeiten in das Diagramm in Abbildung 9 ein, so ergibt sich das in Abbildung 13 dargestellte Bild.

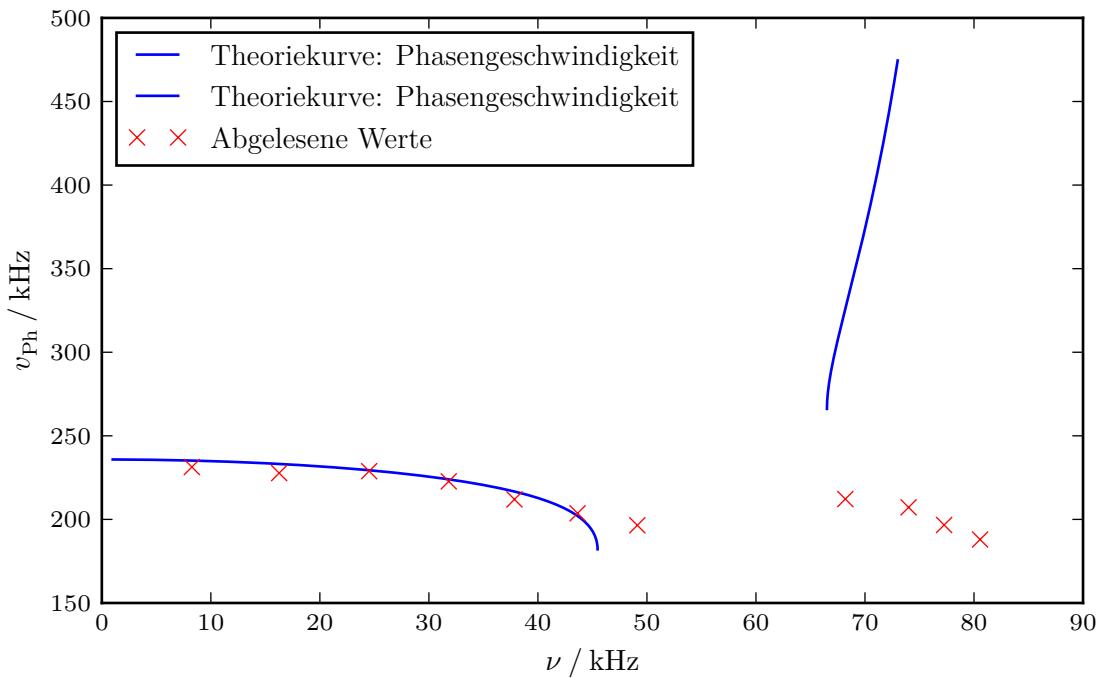


Abbildung 13: Phasengeschwindigkeiten der in Abschnitt 4.2 bestimmten Frequenzen der LC-Kette sowie dazugehörige Theoriewerte.

Es fällt auf, dass die hier angegebenen Werte deutlich besser mit der Theorie zusammenpassen. Die weiterhin vorhandenen Abweichungen bei höheren Frequenzen lassen sich ebenfalls durch die Schwierigkeiten des Frequenzgenerators bei hohen Frequenzen erklären.

Im Allgemeinen kann der Grund für diese Abweichung daran liegen, dass das Ablesen der Lissajous-Figuren schneller durchgeführt werden konnte als das Ablesen der Spannungsmaxima. Dementsprechend sind die Frequenzen dort zu stark abgefallen und die Messwerte verfälscht worden.

6 Anhang

Versich 336	
b)	f [Hz]
	142,2 (?)
	8262
	16365
	24520
	31620 ⚡
	37850
	43640
	49198
	68199 Ein Übersetzen
	74000
	77260
	80560
	Elberg
c)	f [Hz]
Maxima am Ende	X
1.	7806
2.	75540
3.	29274
4.	30000
5.	36780
6.	42265
7.	49500 Ein übersetzen
8.	68729
9.	73243

Abbildung 14: Originaldaten Teil 1.

d) bei 2806 Hz		bei -55540
0	19,9 V	77 V
1	18,5 V	73,5 V
2	16,8 V	8 V
3	7,8 V	680 mV
4	11 V	7 V
5	7 V	72 V
6	3,2 V	77 V
7	790 mV	73,5 V
8	4,8 V	76 V
9	8,2 V	70,5 V
10	72,5 V	5,6 V
11	16 V	420 mV
12	7,9 V	6,3 V
13	20,5 V	70,5 V
14	22 V	73,5 V
<i>Werte abwärts 10 Zeilen</i>		<i>100</i>
<i>Ebey</i>		

Abbildung 15: Originaldaten Teil 2.

bei: 7806 Hz		
e)	0	300 mV
1		$L = 7,277 \text{ mH}$
2		$C_1 = 20,72 \mu\text{F}$
3		$C_2 = 9,67 \mu\text{F}$
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		

(Elorey)

Abbildung 16: Originaldaten Teil 3.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung, Versuch Nr. 356*. 2015. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V356.pdf>.