

Versuchsprotokoll zum Versuch Nr. 206

## **Die Wärmepumpe**

Johannes Kollek	Jean-Marco Alameddine
johannes.kollek@udo.edu	jean-marco.alameddine@udo.edu

Durchführung: 20.10.2015

TU Dortmund – Fakultät Physik

# 1 Zielsetzung

Im vorliegenden Versuch wird eine Wärmepumpe untersucht. Dazu sollen charakteristische Werte wie die Güteziffer, der Massendurchsatz sowie die Kompressorleistung bestimmt und mit den theoretischen Werten einer idealen Wärmepumpe verglichen werden.

## 2 Theorie

Aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik geht hervor, dass es unmöglich ist, ohne äußere Einwirkung einem kälteren Reservoir Teile dessen Wärmemenge zu entziehen, um sie einem wärmeren Reservoir zuzuführen. Der erste Hauptsatz beinhaltet jedoch die Möglichkeit, durch Zuführen zusätzlicher Arbeit auch den umgekehrten Prozess zu realisieren. Laut ihm gilt

$$Q_1 = A + Q_2 \quad (1)$$

wobei  $Q_1$  die zusätzliche Wärmemenge im wärmeren Reservoir  $R_1$ ,  $A$  die aufgewendete Arbeit und  $Q_2$  die dem kälteren Reservoir  $R_2$  entzogenen Wärmemenge ist. Eine Wärmepumpe kann dies leisten.

Die Effizienz der Wärmepumpe wird durch ihre Güteziffer bestimmt. Sie stellt sich zusammen aus der zugeführten Wärmemenge und der zu diesem Zweck aufgewendeten Arbeit:

$$v = \frac{Q_1}{A} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}. \quad (2)$$

Dabei ist  $T_1$  die Temperatur in  $R_1$  und  $T_2$  die Temperatur in  $R_2$ . Damit diese Gleichung erfüllt werden kann, muss der Wärmetransport in einem reversiblen Prozess stattfinden. Dies bedeutet, dass der durchgeführte Prozess jederzeit ohne Energieverluste umgekehrt ablaufen könnte. Erfahrungsgemäß ist es jedoch schwierig ein absolut geschlossenes System innerhalb der Wärmepumpe zu gewährleisten, wodurch

$$Q_1 < Q_2 + A \quad (3)$$

ist. Für die reale Güteziffer gilt dann

$$v_{real} < \frac{T_1}{T_1 - T_2}. \quad (4)$$

### 3 Aufbau und Durchführung

#### 3.1 Aufbau

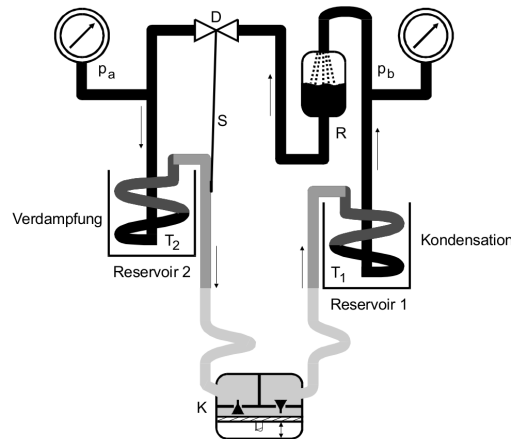


Abbildung 1: Skizze der Wärmepumpe [1].

Das Grundgerüst der Wärmepumpe bildet ein Kupferrohr, welches ein Transportmedium beinhaltet. Dieses Medium kann Wärmeenergie in Form von Phasenumwandlungsenergie aufnehmen bzw. abgeben. Es empfiehlt sich, einen Stoff mit möglichst hoher Kondensationswärme zu verwenden, um einen möglichst effizienten Wärmetransport zu ermöglichen. Deshalb wird beim vorliegenden Aufbau Dichlordifluormethan ( $\text{Cl}_2\text{F}_2\text{C}$ ) eingesetzt.

Vom Kompressor K, welcher den Mediumkreislauf ermöglicht, durchläuft es das erste Reservoir  $R_1$ . Das vorliegende Gas wird nun so gewählt, dass es in  $R_1$  bei der Temperatur  $T_1$  sowie dem Druck  $p_b$  flüssig ist. Jenes Medium gibt beim Phasenübergang von gasförmig zu flüssig die Kondensationswärme ab, die es im Reservoir  $R_2$  als Verdampfungswärme aufgenommen hat. Daraufhin durchläuft die Flüssigkeit ein Drosselventil. Der Strömungswiderstand am Drosselventil sorgt für den nötigen Druckunterschied  $p_b - p_a$ . Hinter dem Druckventil durchläuft das Medium das Reservoir  $R_2$ . Durch den hier vorherrschend Druck  $p_a$  und die Temperatur  $T_2$  verdampft die Flüssigkeit und nimmt die latente Wärme  $L$  auf. Wieder im Kompressor angekommen wird das Gas nahezu adiabatisch komprimiert. Der Druck steigt erneut an, so dass sich das Medium im Reservoir  $R_1$  wieder verflüssigt und der Kreislauf fortgesetzt wird.

Die beiden Rührmotoren gewährleisten eine gleichmäßige Temperaturverteilung im jeweiligen Reservoir.

Die interessanten Größen in diesem Versuch sind die Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$ , die Drücke  $p_b$  und  $p_a$  sowie die Kompressorleistung  $P$ .

## 3.2 Durchführung

Vor Versuchsbeginn werden die beiden Reservoirire mit Wasser befüllt. Danach werden sie möglichst isoliert an den vorgegebenen Kupferspiralen positioniert. Unmittelbar nach dem Einschalten der Rührmotoren und des Kompressors werden in festem zeitlichen Abstand die Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$  an den jeweiligen Thermometern, sowie die beiden Drücke  $p_b$  und  $p_a$  an den jeweiligen Manometern und die Kompressorleistung  $P_K$  am Wattmeter gemessen und tabellarisch notiert.

Der Versuch endet nach dem Erreichen von  $50^\circ\text{C}$  in  $R_1$ . Anschließend werden den beiden Manometern die Drucktemperaturen zum Erstellen einer Dampfdruckkurve entnommen.

## 4 Auswertung

Im Folgenden wird der Versuch ausgewertet.

Die Messerte werden immer im Abstand von  $\Delta t = 1 \text{ min}$  aufgenommen. Die Reservoirire werden jeweils mit genau abgemessenen 4 l Wasser befüllt. Die Temperaturen werden auf  $0,1^\circ\text{C}$  genau gemessen. Die Druckskala von  $p_b$  kann auf 0.1 bar genau ablesen werden, die von  $p_a$  auf 0.2 bar. Die Kompressorleistung wird auf 1 W genau bestimmt.

### 4.1 Bestimmung einer Ausgleichskurve

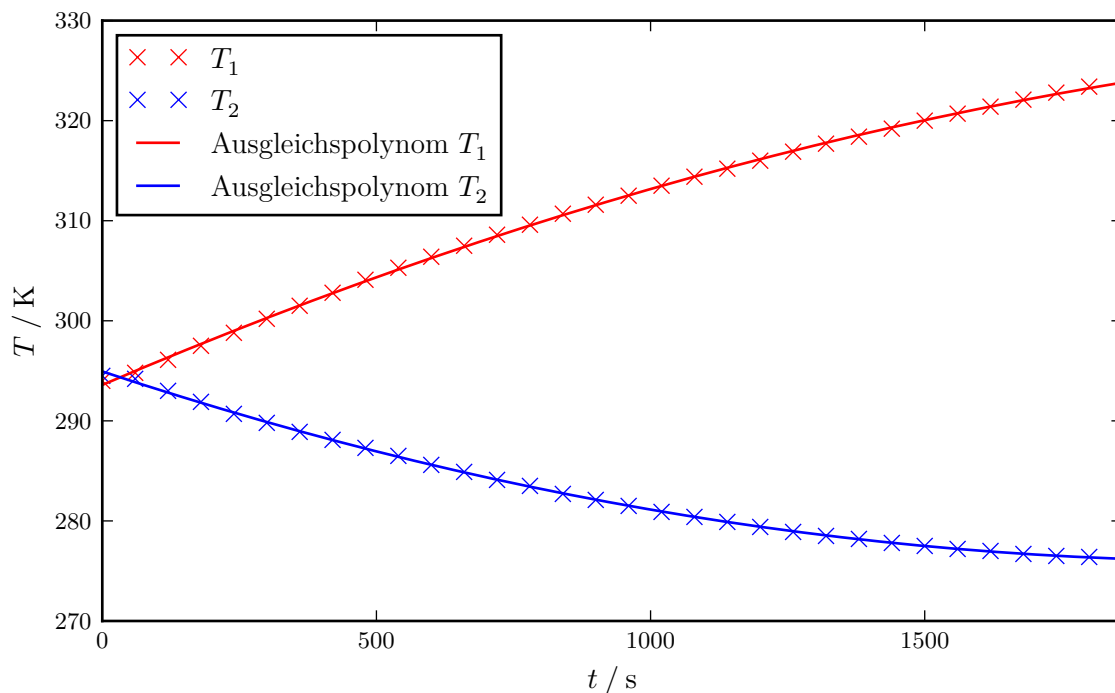


Abbildung 2: Temperaturverlauf.

Die gemessenen Daten für die Temperatur  $T_1$  des wärmeren sowie die Temperatur  $T_2$  des kälteren Reservoirs werden gegen die Zeit  $t$  in Sekunden abgetragen. Zum Plotten in Python wird Matplotlib benutzt, die Ausgleichsrechnung wird mit SciPy durchgeführt. Für folgende Funktion wird das Ausgleichspolynom bestimmt:

$$T(t) = A \cdot t^2 + B \cdot t + C \quad (5)$$

Die Parameter  $A$ ,  $B$  und  $C$  ergeben sich zu

$$\begin{aligned} A_{T_1} &= (-3.9 \pm 0.1) \cdot 10^{-6} \text{ K/s}^2 \\ B_{T_1} &= (0.0234 \pm 0.0002) \frac{\text{K}}{\text{s}} \\ C_{T_1} &= (293.29 \pm 0.06) \text{ K} \\ A_{T_2} &= (4.35 \pm 0.09) \cdot 10^{-6} \text{ K/s}^2 \\ B_{T_2} &= (-0.0182 \pm 0.0002) \frac{\text{K}}{\text{s}} \\ C_{T_2} &= (294.94 \pm 0.06) \text{ K} \end{aligned}$$

Durch Ableiten und Einsetzen in die Ausgleichskurve

$$\frac{dT}{dt} = 2 \cdot A \cdot t + B \quad (6)$$

ergeben sich die Werte der Differentialquotienten, welche der Tabelle 1 entnommen werden können.

Für die Fehlerrechnung wird bei der vorliegenden Rechnung und bei allen folgenden Rechnungen das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n\right)^2} \quad (7)$$

für eine Funktion  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , bei der die Größen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  voneinander unabhängig sind, verwendet. Dementsprechend beträgt der Fehler für die Differentialquotienten

$$\Delta \frac{dT}{dt} = \sqrt{\left(2 \cdot A \cdot \Delta A\right)^2 + \left(\Delta B\right)^2}. \quad (8)$$

Uncertainties hat jene und folgende Rechnungen übernommen.

## 4.2 Güteziffervergleich

Für eine ideale Wärmepumpe gilt

$$v_{ideal} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}. \quad (9)$$

**Tabelle 1:** Differentialquotienten

$t[\text{s}]$	$T_1[\text{K}]$	$T_2[\text{K}]$	$\frac{dT_1}{dt} [\frac{\text{K}}{\text{s}}]$	$\frac{dT_2}{dt} [\frac{\text{K}}{\text{s}}]$
420	$29.6 \pm 0.1$	$14.9 \pm 0.1$	$0.020\,20 \pm 0.000\,20$	$-0.0145 \pm 0.0002$
840	$37.5 \pm 0.1$	$19.5 \pm 0.1$	$0.016\,94 \pm 0.000\,30$	$-0.0108 \pm 0.0002$
1260	$43.7 \pm 0.1$	$5.7 \pm 0.1$	$0.013\,68 \pm 0.000\,30$	$-0.0071 \pm 0.0003$
1680	$48.9 \pm 0.1$	$3.5 \pm 0.1$	$0.010\,43 \pm 0.000\,40$	$-0.0040 \pm 0.0003$

Für die reale Wärmepumpe gilt jedoch die Formel

$$v_{real} = \frac{dQ_1}{dtN} = (m_1 c_w + m_k c_k) \frac{dT_1}{dtN}. \quad (10)$$

wobei  $N$  die Kompressorleistung,  $m_1$  die Masse des Wassers in  $R_1$ ,  $m_k$  die Masse des zu heizenden Reservoirs inklusive Kupferrohre,  $c_w$  die spezifische Wärmekapazität des Wassers sowie  $c_k$  die spezifische Wärmekapazität des Reservoirs und der Kupferrohre ist. Es werden folgende Werte benutzt:

$$\begin{aligned} \rho_{H_2O} &= 0.998 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \\ m_1 &= \rho_{H_2O} \cdot V = 3.992 \text{ kg} \\ m_k \cdot c_k &= 750 \frac{\text{J}}{\text{K}} \\ c_w &= 4184 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \end{aligned}$$

[2]

Die Kompressorleistung ergibt sich aus dem arithmetischen Mittelwert der Messdaten zu  $N = (124.8 \pm 1.1) \text{ W}$ . Für die Differentialquotienten werden die Werte der Ausgleichskurve, angegeben in Tabelle 1, verwendet. Es ergeben sich nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung die Fehlerformeln

$$\Delta v_{ideal} = \sqrt{\left(\frac{-T_2}{(T_1 - T_2)^2} \Delta T_1\right)^2 + \left(\frac{T_1}{(T_1 - T_2)^2} \Delta T_2\right)^2} \quad (11)$$

sowie

$$\Delta v_{real} = \sqrt{\left((m_1 c_w + m_k c_k) \cdot \frac{1}{N} \cdot \Delta\left(\frac{T_1}{dt}\right)\right)^2 + \left((m_1 c_w + m_k c_k) \cdot \frac{T_1}{dt} \cdot \frac{1}{N^2} \cdot \Delta N\right)^2}. \quad (12)$$

**Tabelle 2:** Güteziffervergleich.

$t[\text{s}]$	$T_1[\text{K}]$	$T_2[\text{K}]$	$\Delta T[\text{K}]$	$v_{real,T_1}$	$v_{ideal}$
420	$29.6 \pm 0.1$	$14.9 \pm 0.1$	$14.7 \pm 0.1$	$2.83 \pm 0.04$	$20.6 \pm 0.2$
840	$37.5 \pm 0.1$	$19.5 \pm 0.1$	$18.0 \pm 0.1$	$2.37 \pm 0.04$	$11.10 \pm 0.05$
1260	$43.7 \pm 0.1$	$5.7 \pm 0.1$	$38.0 \pm 0.1$	$1.91 \pm 0.05$	$8.34 \pm 0.03$
1680	$48.9 \pm 0.1$	$3.5 \pm 0.1$	$45.4 \pm 0.1$	$1.46 \pm 0.06$	$7.10 \pm 0.02$

### 4.3 Massendurchsatz

Bei einer Wärmepumpe wird dem kälteren Reservoir, hier  $R_2$ , die Wärmeenergie  $Q_2$  in Form von Verdampfungswärme entzogen. Der Zusammenhang zwischen dem Massendurchsatz  $\frac{dm}{dt}$  und der entnommenen Wärmemenge pro Zeit  $\frac{dQ_2}{dt}$  wird durch

$$\frac{dQ_2}{dt} = L \cdot \frac{dm}{dt} \quad (13)$$

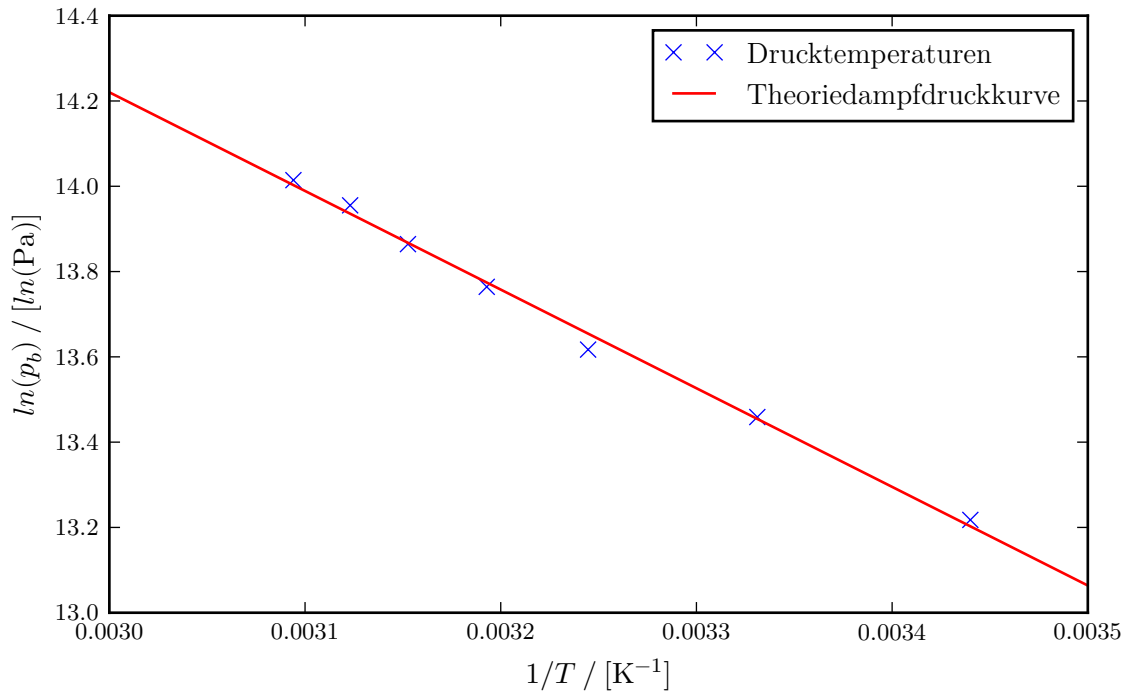
beschrieben, wobei  $L$  die Verdampfungswärme des Mediums ist [3]. Dabei gibt  $L$  an, welche Energie pro Mol erforderlich ist, um einen Stoff bei gleichbleibender Temperatur zu verdampfen. Der Wert von  $L$  kann dabei der Dampfdruckkurve des jeweiligen Stoffes entnommen werden, welche den Phasenübergang zwischen flüssig und gasförmig in einem  $pT$ -Diagramm beschreibt. Diese Kurve wird im Allgemeinen durch die Clausius-Clapeyronsche Gleichung beschrieben, aus der unter vereinfachten Bedingungen der Zusammenhang

$$\ln(p) = -\frac{L}{R} \frac{1}{T} + \text{const} \quad (14)$$

folgt. Hierbei ist  $R$  die allgemeine Gaskonstante. Damit die Formel in dieser Form gültig ist, wird angenommen, dass die Temperatur  $T$  deutlich unter der kritischen Temperatur  $T_{Kr}$  liegt. In diesem Fall kann davon ausgegangen werden, dass  $L$  unabhängig von Druck und Temperatur ist. Um nun den Wert von  $L$  für das genutzte Medium  $\text{Cl}_2\text{F}_2$  zu bestimmen, werden die Kehrwerte der Drucktemperaturen 3 gegen den natürlichen Logarithmus des dazugehörigen Drucks abgetragen.

**Tabelle 3:** p,T

$p[\text{Pa}]$	$T[\text{K}]$
$5.5 \pm 1.0$	$17.5 \pm 1.0$
$7.0 \pm 1.0$	$27.0 \pm 1.0$
$8.2 \pm 1.0$	$35.0 \pm 1.0$
$9.5 \pm 1.0$	$40.0 \pm 1.0$
$10.5 \pm 1.0$	$44.0 \pm 1.0$
$11.5 \pm 1.0$	$47.0 \pm 1.0$
$12.2 \pm 1.0$	$50.0 \pm 1.0$

**Abbildung 3:** Dampfdruckkurve.

Durch lineare Ausgleichsrechnung mit SciPy werden die Parameter  $b$  und  $m$  der Ausgleichsgerade bestimmt zu:

$$m = (-2313 \pm 7) \text{ K} \qquad b = 21.2 \pm 0.2$$

Aus dem bereits genannten Zusammenhang (14) ergibt sich die Verdampfungswärme  $L$  nun zu

$$L = -m \cdot R = (19\,231 \pm 572) \frac{\text{J}}{\text{mol}},$$



wobei für  $R$  der Wert  $8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$  genutzt wird. [4] Aus dem allgemeinen Zusammenhang für die Verdampfungswärme (13) kann nun der Massendurchsatz bestimmt werden:

**Tabelle 4:** Massendurchsatz.

$t[\text{s}]$	$T_2[\text{K}]$	$\frac{dm}{dt}[\text{mol s}^{-1}]$
420	$14.9 \pm 0.1$	$0.0137 \pm 0.0005$
840	$19.5 \pm 0.1$	$0.0103 \pm 0.0004$
1260	$5.7 \pm 0.1$	$0.0068 \pm 0.0003$
1680	$3.5 \pm 0.1$	$0.0034 \pm 0.0003$

#### 4.4 Kompressorleistung

Um die Wärmemenge als Kondensationswärme an das Reservoir  $R_1$  abgeben zu können, komprimiert der Kompressor  $K$  das Gas, so dass es flüssig wird. Für die mechanische Kompressorleistung  $P_{\text{mech}}$  ergibt sich

$$P_{\text{mech}} = \frac{1}{\kappa - 1} \left( p_b \sqrt{\frac{p_a}{p_b}} - p_a \right) \frac{1}{\rho} \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot M \cdot 10^{-3}. \quad (15)$$

$\kappa$  ist der Adiabatenkoeffizient des Mediums, für  $\text{Cl}_2\text{F}_2\text{C}$  durch  $\kappa = 1.14$  gegeben [1],  $p_a$  und  $p_b$  die Drücke bei denen der Kompressor arbeitet,  $\rho$  die Dichte des Gases unter  $p_a$ ,  $\frac{\Delta m}{\Delta t}$  der Massendurchsatz und  $M$  die Molmasse des Mediums, für  $\text{Cl}_2\text{F}_2\text{C}$  durch  $M = 120.91 \text{ g mol}^{-1}$  gegeben [5]. Der Faktor  $10^{-3}$  wurde ergänzt, um den Massendurchsatz in SI-Einheiten umzurechnen.

Um die Dichte  $\rho$  zu bestimmen, wird der Zusammenhang

$$\frac{p_i}{\rho_i T_i} = \frac{p_0}{\rho_0 T_0} \quad (16)$$

verwendet, wobei  $\rho_0 = 5.51 \text{ g l}^{-1}$  die Dichte des Transportmediums bei  $T_0 = 0^\circ\text{C}$  und  $p_0 = 1 \text{ bar}$  ist [1]. Hieraus können die Dichten  $\rho_i$  für alle Messzeitpunkte berechnet werden. Für den Fehler der Kompressorleistung wurde dabei die Fehlerformel

$$\Delta P_{\text{mech}} = \sqrt{\left( \frac{\partial P_{\text{mech}}}{\partial p_a} \Delta p_a \right)^2 + \left( \frac{\partial P_{\text{mech}}}{\partial p_b} \Delta p_b \right)^2 + \left( \frac{\partial P_{\text{mech}}}{\partial \dot{m}} \Delta \dot{m} \right)^2} \quad (17)$$

verwendet,  $\dot{m}$  beschreibt hierbei den Massendurchsatz.

**Tabelle 5:** Kompressorleistung.

$t[\text{s}]$	$\rho[\text{g l}^{-1}]$	$P_{\text{mech}}[\text{J s}^{-1}]$
420	$23.0 \pm 1.0$	$14.4 \pm 1.4$
840	$20.2 \pm 1.1$	$18.3 \pm 1.4$
1260	$19.4 \pm 1.1$	$14.8 \pm 1.1$
1680	$18.8 \pm 1.1$	$8.4 \pm 0.9$

## 5 Diskussion

Auffällig bei der Auswertung ist vor allem der deutliche Unterschied zwischen  $v_{\text{ideal}}$  und  $v_{\text{real}}$ , wie man der Tabelle 2 entnehmen kann. Die Abweichung von ca. 82% lässt sich auf verschiedene Faktoren zurückführen, dessen Ursprünge im Versuchsaufbau liegen.

Zunächst war die Isolierung der Reservoirs an sich unzureichend und etwas marode. Wir konnten die Wärme bzw. die Kälte an den Behältern deutlich erfühlen. Dieses Isolierungsproblem führte zu einer äußeren Erwärmung von  $R_2$ , sowie einer äußeren Abkühlung von  $R_1$ , somit zu Energieverlust. Dasselbe Phänomen konnten wir auch an den Kupferrohren wahrnehmen. Außerdem ließ sich der Deckel der Behälter auf Grund der nicht ausreichend befestigten Halterungsplattformen nicht richtig anpassen. Dies führte zu zusätzlichem Wärmeaustausch mit der Umgebung.

Ein anderes Problem liegt in der nicht richtig umgesetzten Kompressorleistung (124.77 W im Vergleich zu den berechneten Werten in Tabelle 4). Zusätzlich komprimiert der Kompressor das Medium nur annähernd adiabatisch.

Abschließend wollen wir noch erwähnen, dass die ideale Güteziffer von einem reversiblen Carnot-Prozess ausgeht, welcher in dieser Form nicht realisiert werden kann. Trotz dieser Rahmenbedingungen konnten wir durch das Experiment gute und aussagekräftige Werte gewinnen.

## 6 Anhang

$t/\text{min}$	$T_1/^{\circ}\text{C}$	$P_0/\text{bar}$	$T_2/^{\circ}\text{C}$	$P_a/\text{bar}$	$P/w$
0	20.8	5.5	21.3	5.3	0
1	21.6	6	21.0	4.8	125
2	22.9	6.3	19.8	4.8	125
3	24.3	6.5	18.7	4.8	125
4	25.6	6.9	17.5	4.8	125
5	27.0	7	16.6	4.7	125
6	28.3	7.3	15.7	4.6	125
7	29.6	7.5	14.9	4.4	125
8	30.9	7.8	14.1	4.3	123
9	32.1	8.0	13.3	4.2	122
10	33.2	8.2	12.4	4.1	122
11	34.3	8.5	11.7	4.0	122
12	35.4	8.8	10.9	4.0	124
13	36.4	9.0	10.3	3.9	124
14	37.5	9.2	9.5	3.8	125
15	38.4	9.5	8.9	3.8	125
16	39.3	9.6	8.3	3.75	125
17	40.3	<del>10.0</del> 9.8	7.7	3.7	125
18	41.2	10.0	7.2	3.7	125
19	42.0	10.2	6.7	3.6	125
20	42.8	10.5	6.2	3.6	125
21	43.7	10.6	5.7	3.6	125
22	44.5	10.9	5.3	3.6	125
23	45.2	11.0	5.0	3.55	125
24	46.0	11.2	4.6	3.5	125
25	46.8	11.5	4.3	3.5	126
26	47.5	11.5	4.0	3.5	126

Wärmekapazität  
des Reservoirs:  
 $750 \text{ J/K}$

Dampfdruckkurvenwerte:  
 $P_a = 17.5 \text{ bar}$   
 $P_0 = 18 \text{ bar}$

A.F.

Abbildung 4: Originaldaten Seite 1.

27	48,2	11,8	3,8	3,5	126
28	48,9	12,0	3,5	3,45	128
29	49,6	12,0	3,3	3,45	126
30	50,2	12,2	3,2	3,4	126

t/min	P <sub>10</sub>	P <sub>70</sub>
0	17,5	18,0
5	27,0	14,0
10	35,0	9,0
15	40,0	7,0
20	44,0	5,0
25	47,0	4,0
30	50,0	3,0

AF.

Abbildung 5: Originaldaten Seite 2.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung, Versuch Nr. 206*. 2015.
- [2] K. Lecher. *Taschenbuch der Wasserwirtschaft: mit 170 Tabellen*. Parey, 2001, S. 5. ISBN: 9783826384936. URL: <https://books.google.de/books?id=sbPvheoPYboC>.
- [3] TU Dortmund. *Versuchsanleitung, Versuch Nr. 203*. 2015.
- [4] Codata. In: (2015). URL: <http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?r>.
- [5] pubchem. In: (2015). URL: <http://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/compound/dichlorodifluoromethane#section=Top>.