

Versuchsprotokoll zum Versuch Nr. 102

Drehschwingungen

Johannes Kollek Jean-Marco Alameddine
johannes.kollek@udo.edu jean-marco.alameddine@udo.edu

Durchführung: 19.01.2016

TU Dortmund – Fakultät Physik

1 Theorie

Wenn auf Festkörper Kräfte einwirken, können Volumen- und Gestaltsänderungen eben dieses Körpers auftreten. Die Proportionalitätsfaktoren, welche den Zusammenhang zwischen pro Flächenstück einwirkender Kraft und Volumen- bzw. Gestaltsänderung beschreiben, werden elastische Konstanten genannt. Es findet jedoch eine Kategorisierung der verschiedenen Kräfte in zwei Gruppen statt.

Die erste Gruppe stellt Kräfte dar, welche auf ein Volumenelement wirken. Diese erzeugen eine Änderung des Bewegungszustandes, was in diesem Protokoll nicht weiter behandelt wird.

Die Kräfte, welche von Interesse sind, sind die, die auf die Oberfläche eines Körpers wirken und somit eine Gestaltsänderung hervorrufen. Dabei wird die Kraftbezeichnung zumeist an die Fläche gebunden. Es entsteht der Begriff der Spannung ($[\frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}]$). Es wird weiterhin zwischen der Normalspannung σ , die Spannung die senkrecht an der Oberfläche angreift, und der Schubspannung τ , welche tangential an der Oberfläche wirkt, unterschieden. Die Auswirkungen beider sind an jeder Querschnittsfläche des Körpers nachweisbar.

Wenn der Körper nach der Krafteinwirkung wieder in seinen Ausgangszustand zurückkehrt, ist die Rede von elastischer Deformation. Bei kleinen Auslenkungen besteht ein linearer Zusammenhang zwischen Volumen- bzw. Längenänderung und Druck bzw. Normalspannung, welcher als Hooksches Gesetz bekannt ist. Dieser Auslenkungsvorgang lässt sich leicht am Beispiel eines Atomgitters verstehen, bei dem alle Atome durch elektrostatische Kräfte in eine Gleichgewichtslage r_0 gezwungen werden. Bei gewissen kleinen Auslenkungen, $r_0 \rightarrow r'_0$, kehrt das Atom wieder in seine ursprüngliche Gleichgewichtslage zurück; ein reversibler Prozess. Bei größeren Auslenkungen stellt sich eine neue Ruhelage ein.

Die elastischen Konstanten von Körpern sind im Allgemeinen richtungsabhängig. Es ergeben sich insgesamt einundzwanzig Konstanten. Je höher die innere Symmetrie des Körpers jedoch ist, desto weniger richtungsabhängig ist die Elastizitätseigenschaft und umso eher isotrop ist das untersuchte Material. Im Folgenden werden der Praxis halber nur isotrope Materialien näher untersucht.

Dort sind generell zwei Konstanten relevant. Zum Einen der Schubmodul G , welcher die Gestaltselastizität beschreibt, und zum Anderen der Kompressionsmodul Q , der die Volumenelastizität schildert. Um die Zusammenhänge besser beschreiben zu können, werden zwei zusätzliche Größen eingeführt. Die erste ist der Elastizitätsmodul E , welcher als Proportionalitätsfaktor zwischen relativer Längenänderung und Normalspannung fungiert.

$$\sigma = E \frac{\Delta L}{L} \quad (1)$$

Die zweite ist die Poissonsche Querkontraktionszahl μ , welche die Maßänderungen senkrecht zur Normalspannungsrichtung beschreibt bezogen auf die Breite B und die Länge L des Körpers,

$$\mu = -\frac{\Delta B}{B} \frac{L}{\Delta L}. \quad (2)$$

Zwischen den vier genannten Größen bestehen die beiden Zusammenhänge

$$E = 2G(\mu + 1) \quad (3)$$

und

$$E = 3(1 - 2\mu)Q. \quad (4)$$

1.1 Der Schub- und Elastizitätsmodul

Experimentell kann der Schubmodul G beispielsweise über die durch eine Tangentialspannung τ entstehende Scherung eines Quaders über den Scherungswinkel α , dargestellt in [Abbildung 1](#), bestimmt werden,

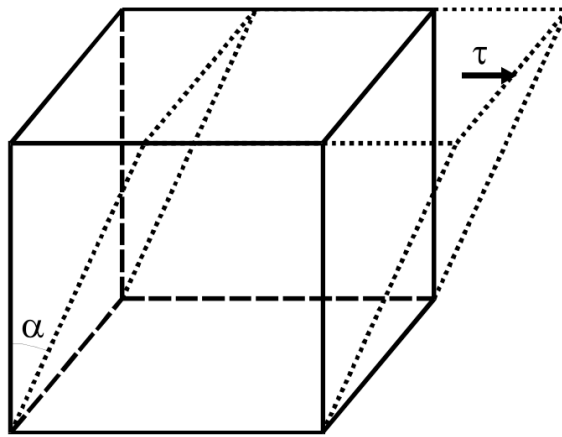


Abbildung 1: Scherung eines Quaders durch eine Tangentialspannung τ . [\[1\]](#)

da in diesem Fall

$$\tau = G\alpha \quad (5)$$

gilt. Weil der Scherungswinkel jedoch schwer zu messen ist, wird der Schubmodul über Torsion bestimmt. Der Probekörper, praktischerweise in Drahtform bzw. dünner zylindrischer Form, wird dabei wie in [Abbildung 2](#) an einem Ende fest eingespannt, während am anderen zwei Kräfte entgegengesetzt so angreifen, dass der Körper verdreht wird.

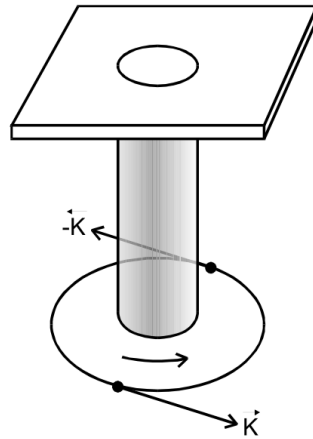


Abbildung 2: Verdrillung des Körpers. [1]

Die Mantelfläche des Körpers schert sich nun unter einem Winkel α . Diesen Sachverhalt verdeutlicht die Abbildung 3.

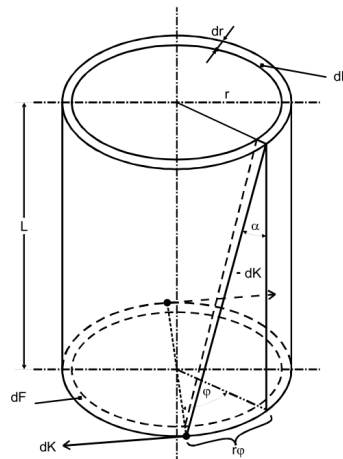


Abbildung 3: Veranschaulichung der Auswirkung der Verdrillung. [1]

Es entsteht ein Drehmoment M , welches mit dem Winkel ϕ über

$$M_T = \frac{\pi R^4 G}{2L} \phi = D \phi \quad (6)$$

den Zusammenhang zum Schubmodul G herstellt. Dabei ist R der Radius des Zylinders und L dessen Länge. Der somit definierte Proportionalitätsfaktor D wird als Richtgröße des Zylinders bezeichnet. Bei diesem Verfahren entsteht aber eine unerwünschte elastische Nachwirkung, welche das nicht instantane Einstellen einer neuen Ruhelage während bzw. nach der Deformation bezeichnet. Um dies zu verhindern wird eine dynamische Methode

gewählt, bei der das Torsionssystem durch eine frei schwingende Kugel (bezogen auf Torsionsschwingungen) der Trägheit θ am nicht eingespannten Ende angehängt wird. Es herrscht nun zusätzlich zum in Gleichung (6) genannten Drehmoment ein neues durch die Trägheit der angehängten Kugel hervorgerufenes Drehmoment. Es folgt die Differentialgleichung

$$D\phi + \theta \frac{d^2\phi}{dt^2} = 0. \quad (7)$$

Dessen Lösung

$$\phi(t) = \phi_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right). \quad (8)$$

mit

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\theta}{D}} \quad (9)$$

lautet. Über das Trägheitsmoment θ der Kugel,

$$\theta = \frac{2}{5}m_k R_k^2, \quad (10)$$

folgt schließlich

$$G = \frac{16}{5}\pi \frac{m_k R_k^2 L}{T^2 R^4}. \quad (11)$$

Der Elastizitätsmodul E hingegen wird über die Schallgeschwindigkeit, die im Material herrscht bestimmt, da der Zusammenhang

$$c^2 = \frac{E}{\rho}, \quad (12)$$

mit der Dichte ρ des Materials, besteht. Aus dem Schub- und Elastizitätsmodul lassen sich nun über (3) und (4) der Kompressionsmodul Q und die Poissonsche Querkontraktionszahl μ bestimmen.

1.2 Messung eines magnetischen Momentes

Mit der für die Bestimmung des Schubmoduls beschriebenen, jedoch etwas modifizierten, Methode lässt sich das Dipolmoment m eines Permanentmagneten berechnen. Hierzu wird in die Kugel ein Stabmagnet eingesetzt. Dieser beginnt nun in einem homogenen Magnetfeld \vec{B} sich antiparallel entlang der Feldlinien auszurichten, wie es in Abbildung 4 skizziert ist.

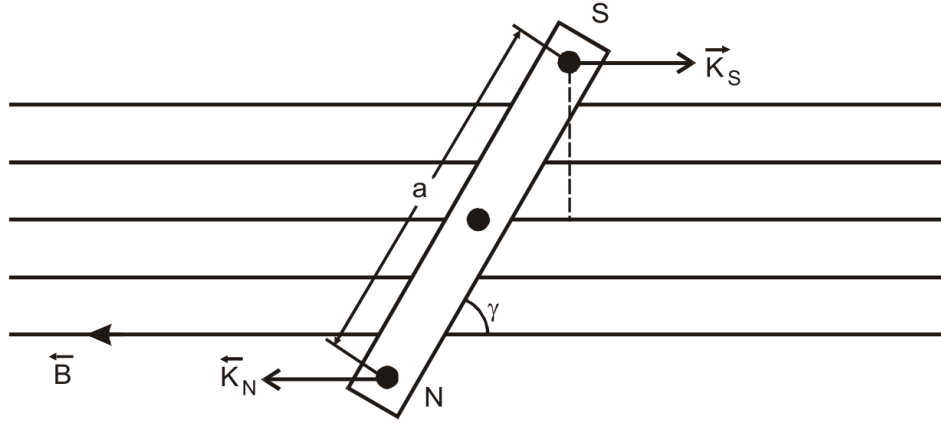


Abbildung 4: Stabmagnet in einem homogenen Magnetfeld. [1]

Für das Dipolmoment m des Stabes gilt

$$\vec{m} = p\vec{a}, \quad (13)$$

mit seiner Polstärke p und dem Polabstand \vec{a} . Beginnt der Stab sich auszurichten, unterliegt er nun einem zusätzlichen Drehmoment M_{mag} , welches durch

$$M_{\text{mag}}^{\vec{}} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (14)$$

beschrieben wird. Wird nun der Betrag davon betrachtet und die Ruhelage des Stabes entlang $\phi = 0$ gesetzt wird, gilt resultierend aus (7)

$$mB \sin \phi D \phi + \theta \frac{d^2 \phi}{dt^2} = 0. \quad (15)$$

Nach einer Kleinwinkelnäherung für den Sinus gilt analog zu (8) der Zusammenhang

$$\phi(t) = \phi_0 \cos \left(\frac{2\pi}{T_m} t \right), \quad (16)$$

mit einer neuen Periodendauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\theta}{mB + D}}. \quad (17)$$

2 Aufbau und Durchführung

2.1 Aufbau

2.1.1 Aufbau zur Bestimmung des Schubmodules

Zur Überprüfung der Theorie wird experimentell der Schubmodul G eines Torsionsdrahtes bestimmt. Hierzu wird dieser Draht aufgehangen, wobei das obere Ende fest an einem

Justierrad eingespannt und das untere Ende an einer Kugel befestigt ist. Durch kurzzeitiges Auslenken aus der Ruheposition mithilfe des Justierrades kann der Torsionsdraht in eine, für kleine Winkel, harmonische Rotationsschwingung versetzt werden. Deswegen werden im Folgenden nur Auslenkungen im Bereich $\leq 40^\circ$ betrachtet. Der Aufbau ist in Abbildung 5 skizziert.

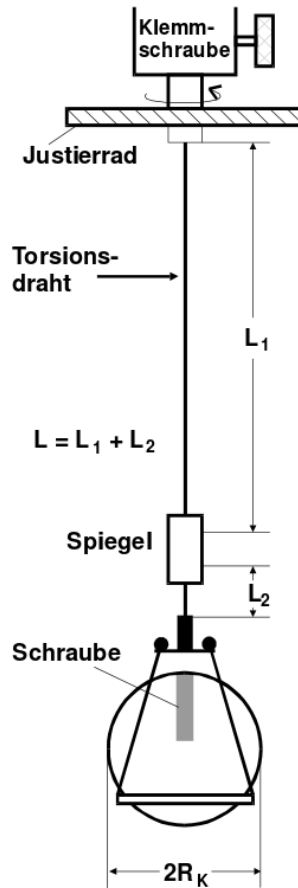


Abbildung 5: Messapparatur zur Bestimmung des Schubmoduls eines Torsionsdrahtes.
[1]

Zwischen dem Torsionsdraht und der Kugelaufhängung befindet sich ein Spiegel, welcher für die Messung der Periodendauer T der Schwingung benötigt wird. Wie in Abbildung 6 dargestellt, wird ein Lichtstrahl mithilfe eines Spaltes und einer Sammellinse fokussiert und in Höhe des Spiegels auf den Torsionsdraht gerichtet.

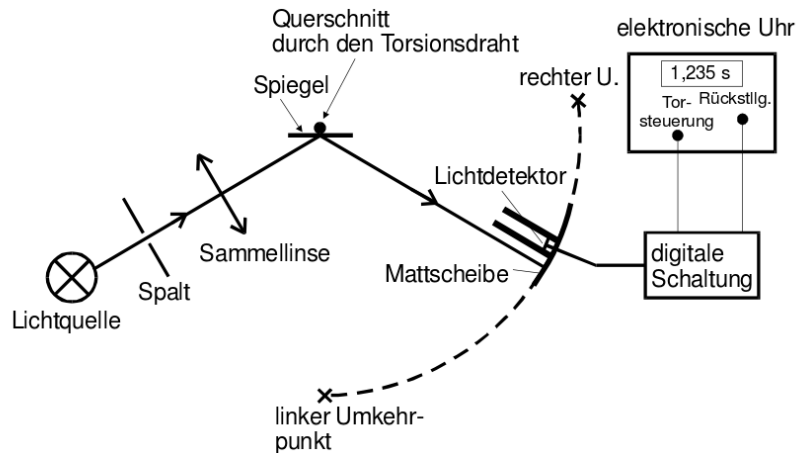


Abbildung 6: Bestimmung der Periodendauer T der Schwingung des Torsionsdrahtes mithilfe eines Lichtdetektors. [1]

Durch den sich mitrotierenden Spiegel wird der Strahl auf eine Photodiode geworfen. Somit kann eine bestimmte, feste Auslenkung des Drahtes anhand eines elektrischen Stromes registriert werden. Um nun eine Periodendauer der Schwingung zeitlich zu bestimmen, wird das elektronische Signal so umgewandelt, dass es mithilfe von digitalen TTL-Bausteinen verarbeitet werden kann. Sobald die Schwingung eine Phase das erste Mal durchläuft, wird ein erster Lichtstrahl registriert. Dieser Impuls dient als Startzeitpunkt der Messung. Nach der Umkehrung der Bewegung durchläuft der Lichtstrahl den Sensor das zweite Mal, dieser Impuls soll ohne Bedeutung sein. Schlussendlich durchläuft der Lichtstrahl den Sensor ein drittes Mal, die Schwingung befindet sich wieder in der gleichen Phase wie zum Anfang und hat eine gesamte Periodendauer durchlaufen. Dieser dritte Impuls wird dementsprechend als Endzeitpunkt der Messung verwendet. Mithilfe der TTL-Bausteine, insbesondere eines RS-Flip-Flops und einer monostabilen Kippstufe, wird eine Schaltung so realisiert, dass zwischen dem Startimpuls sowie Endimpuls kontinuierliche Zeitimpulse an eine elektronische Uhr geliefert werden. An dieser kann somit die Periodendauer abgelesen werden.

2.1.2 Aufbau zur Bestimmung des magnetischen Momentes eines Permamagneten bzw. des Erdmagnetfeldes

In der aufgehängten Kugel befindet sich ein fest eingebauter Permanentmagnet. Dieser kann durch das Drehen in der Kugel der Versuchsdurchführung entsprechend ausgerichtet werden. Zudem befindet sich um die aufgehängte Kugel ein Helmholtzspulenpaar, welches ein annähernd homogenes Magnetfeld erzeugen kann. Die Stärke des Magnetfeldes kann durch das Justieren der Stromstärke eingestellt werden.

2.2 Durchführung

Zunächst wird die Länge L_1 des genutzten Torsionsdrahtes zur Aufhängung mithilfe eines Bandmaßes sowie dessen Durchmesser d mithilfe einer Mikrometerschraube bestimmt. Hierzu werden jeweils drei beziehungsweise fünf Messungen durchgeführt. Zudem wird der Abstand vom Reflexionsspiegel zur Kugelaufhängung, L_2 , drei mal gemessen. Die weiteren Eigenschaften wie Kugelmasse m_k , Kugeldurchmesser d_k sowie Trägheitsmoment der Kugelhalterung I_h werden am Versuchsaufbau abgelesen. Ebenso werden die Eigenschaften des Helmholtzspulenpaars wie Windungszahl n , Radius r_s sowie Maximalstrom abgelesen.

Zudem wird der zuvor defekte Versuchsaufbau in einer heroischen Tat durch das Neujustieren des Lichtdetektors wieder in den Zustand der Funktionsfähigkeit gebracht. Eine Heldentat, von der noch Generationen von Physikern erzählen werden.

2.2.1 Bestimmung des Schubmoduls

Zunächst wird der Schubmodul anhand der Periodendauer T bestimmt. Die Kugel wird so positioniert, dass der Stabmagnet vertikal ausgerichtet ist und das Erdmagnetfeld einen minimalen Einfluss auf die Messung hat. Mithilfe des Justierrades wird der Aufbau zu Schwingungen angeregt. Es werden die Periodendauern für zehn Messungen notiert.

2.2.2 Bestimmung des Erdmagnetfeldes

Es soll nun anhand der veränderten Periodendauer T_2 auf die Stärke des Erdmagnetfeldes geschlossen werden. Der Stabmagnet wird in Nord-Süd-Richtung ausgerichtet, dementsprechend ist der Einfluss des Erdmagnetfeldes maximal. Auch hier wird das System zu Schwingungen angeregt, es werden die Periodendauern für zehn Messungen notiert.

2.2.3 Bestimmung des magnetischen Moments eines Permanentmagneten

Im letzten Versuchsaufbau wird die Helmholtzspule eingeschaltet und die Kugel so ausgerichtet, dass der Permanentmagnet in seiner Ruhestellung parallel zu den Feldlinien des Magnetfeldes der Spule steht. Für fünf verschiedene Stromstärken, bzw. verschiedene Magnetfeldstärken, werden jeweils fünf Messungen der Periodendauer durchgeführt.

3 Auswertung

3.1 Bestimmung der Proportionalitätsfaktoren des Torsionsdrahtes

Zunächst muss die Apparatur vermessen werden. Die Messergebnisse werden in Tabelle 1 und 2 präsentiert.

Tabelle 1: Radius des Torsionsfadens.

$r[\mu\text{m}]$
97.5
101.5
99.5
101.5
97.0

Tabelle 2: Länge des Torsionsfadens oberhalb/unterhalb des Spiegels.

$L_1[\text{cm}]$	$L_2[\text{cm}]$
55.4	5.0
55.3	4.9
55.4	5.0

Diese Werte werden nun gemittelt, wobei sich der Mittelwert nach

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (18)$$

und die Standardabweichung nach

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (19)$$

berechnet. Dementsprechend ergeben sich die gemittelten Apparaturdaten von

$$\begin{aligned} L_1 &= (55.35 \pm 0.04) \text{ cm}, \\ L_2 &= (4.97 \pm 0.05) \text{ cm}, \\ r &= (99 \pm 2) \mu\text{m}. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung dieser Daten kann, wie in Kapitel 2.2.1 beschrieben, der Schubmodul bestimmt werden. Die dazu gemessenen Periodendauern sind in Tabelle 3 dargestellt.

Tabelle 3: Messung der Periodendauer zur Bestimmung des Schubmodules.

$T_1[\text{s}]$
18.738
18.726
18.735
18.716
18.735
18.734
18.726
18.730
18.725
18.735

Nach Formel (11) aus der Theorie lässt sich somit der Schubmodul errechnen. Dabei muss neben dem Trägheitsmoment der Kugel, welches sich nach (10) berechnet, das Trägheitsmoment der Kugelhalterung berücksichtigt werden, welches dem Versuchsaufbau nach

$$\theta_{\text{Halierung}} = 22.8 \text{ g cm}^2$$

abgelesen wird. Mit

$$\theta = \theta_{\text{Kugel}} + \theta_{\text{Halierung}}$$

als Gesamtträgheitsmoment des Aufbaus bestimmt sich das Schubmodul zu

$$G = 8\pi\theta \frac{L}{T^2 R^4}.$$

Mit dem aus den Messwerten gemittelten T , der Fadenlänge $L_1 + L_2$ sowie dem Versuchsaufbau entnommenen Radius R der Kugel

$$R = (25.28 \pm 0.10) \text{ mm}$$

ergibt sich ein Schubmodul von

$$G = (59 \pm 5) \text{ GPa}.$$

Für die Fehlerrechnung wird bei dieser Rechnung und bei allen folgenden Rechnungen das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n\right)^2} \quad (20)$$

für eine Funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, bei der die Größen x_1, x_2, \dots, x_n voneinander unabhängig sind, verwendet. Mit dem vorgegebenen Elastizitätsmodul von

$$E = 210.0 \text{ GN m}^{-2}.$$

und Formel (3) ergibt sich die Poissonsche Querkontraktionszahl zu

$$\mu = 0.8 \pm 0.1.$$

Hieraus folgt zudem aus der Formel (4) der Kompressionsmodul zu

$$Q = (-130 \pm 66) \text{ GPa}.$$

3.2 Bestimmung des magnetischen Momentes eines Stabmagneten

Wie in der Durchführung in Kapitel 2.2.3 beschrieben, soll das magnetische Moment eines in der Kugel verbauten Permanentmagneten bestimmt werden. Die Ergebnisse für die fünf Messungen sind in Tabelle 4 dargestellt.

Tabelle 4: Periodendauern zur Bestimmung des magnetischen Moments des Permanentmagneten.

$T_1[\text{s}]$	$T_2[\text{s}]$	$T_3[\text{s}]$	$T_4[\text{s}]$	$T_5[\text{s}]$
16.782	15.636	14.661	13.723	12.896
16.779	15.635	14.632	13.706	12.886
16.774	15.634	14.612	13.694	12.871
16.775	15.618	14.602	13.686	12.857
16.768	15.609	14.596	13.673	12.838
$I_1 = 0.2 \text{ A}$	$I_2 = 0.4 \text{ A}$	$I_3 = 0.6 \text{ A}$	$I_4 = 0.8 \text{ A}$	$I_5 = 1.0 \text{ A}$

Dabei werden die Messungen bei den jeweils dabei angegebenen Stromstärke für die Helmholtzspulen durchgeführt. Diese erzeugt bei gegebenen Strom I , Windungsanzahl N sowie Spulendurchmesser R ein homogenes Magnetfeld von

$$B = \mu_0 \frac{8IN}{\sqrt{125}R}. \quad (21)$$

Die Apparaturwerte werden dem Versuchsaufbau zu

$$N = 390$$

$$R = 78 \text{ mm}$$

entnommen. Es werden nun die jeweils erzeugten Magnetfelder B gegen den dazugehörigen gemittelten Wert von $T(-2)$ abgetragen. Es ergibt sich der in Abbildung 7 angegebene Plot.

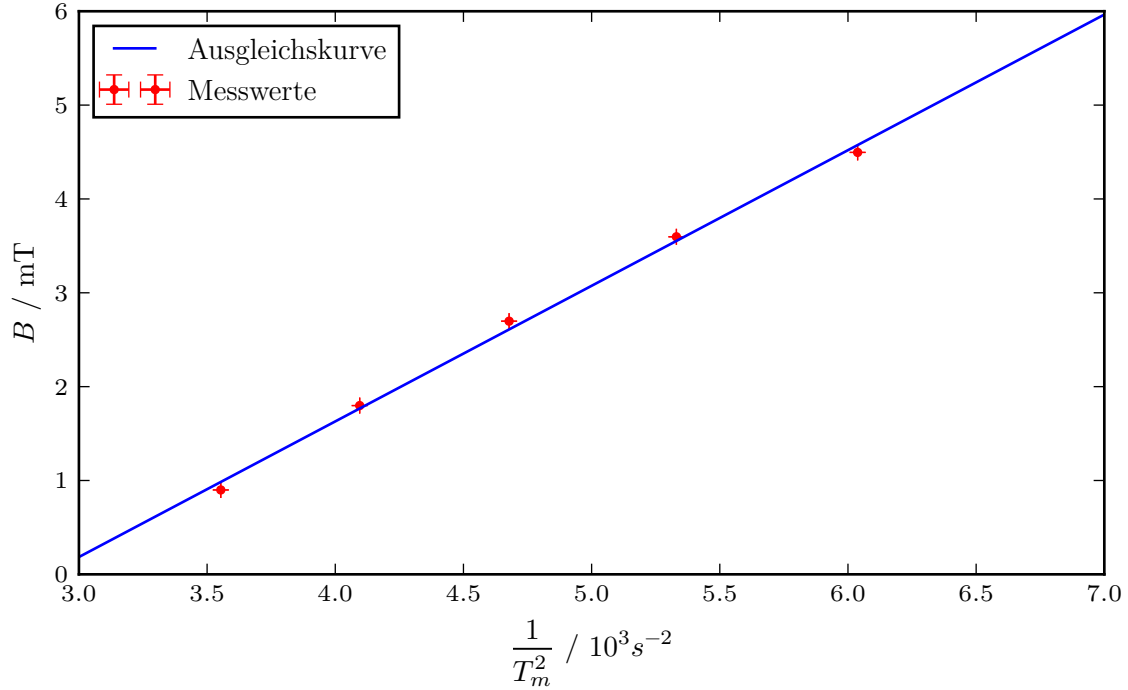


Abbildung 7: Reziproke quadratische Periodendauer in Abhängigkeit vom Magnetfeld.

Für die daraus folgenden Daten wird ein linearer Fit an die Funktion

$$y = mx + b$$

erstellt. Dieser wird von SciPy in Python mithilfe der Methode der kleinsten Quadrate durchgeführt. Es ergeben sich die Parameter

$$b_{\text{fit}} = (-4.2 \pm 0.2) \text{ T},$$

$$m_{\text{fit}} = (1.45 \pm 0.05) \text{ kg A}^{-1}.$$

Anhand von Gleichung (17) lässt sich das magnetische Moment m nun aus dem Fit als

$$m = \frac{4\pi\theta}{m_{\text{fit}}} \quad (22)$$

identifizieren, so dass man einen Wert von

$$m = (0.0037 \pm 0.0001) \text{ A m}^2$$

erhält.

3.3 Bestimmung der Stärke des Erdmagnetfeldes

Wie in der Durchführung im Kapitel 2.2.2 beschrieben lässt sich mithilfe des vorhandenen Aufbaus das Erdmagnetfeld näherungsweise bestimmen. Die dazu bestimmten Periodendauern sind in Tabelle 5 angegeben.

Tabelle 5: Messung der Periodendauer zur Bestimmung des Erdmagnetfeldes.

$T_1[\text{s}]$
18.120
18.114
18.114
18.097
18.118
18.105
18.111
18.081
18.077
18.082

Aus Formel (17) folgt dementsprechend das Magnetfeld der Erde zu

$$B = \frac{4\pi^2\theta}{T^2m} - \frac{D}{m}. \quad (23)$$

Aus den gemittelten Periodendauern sowie unter Kenntnis von m , D und θ , welche in den vorherigen Versuchsteilen bestimmt werden, folgt für das Erdmagnetfeld

$$B_{\text{Erde}} = (291 \pm 12) \mu\text{T}.$$

4 Diskussion

Der ermittelte Schubmodul beträgt $G = (59 \pm 5) \text{ GPa}$. Der echte Referenzwert beträgt jedoch $G_{\text{echt}} = 82 \text{ GPa}$. Es zeigt sich demnach eine Abweichung von $\Delta G = 28 \%$.

Das Problem ist, dass die gemessenen Periodendauern nur kleine statistische Abweichungen zeigen. Dadurch müsste der Schubmodul passend bestimmt sein. Daraus lässt sich schließen, dass die Methode, mit der der Modul bestimmt wurde nicht passend ist. Bei der Bestimmung der anderen Elastizitätskonstanten geht nun leider der fehlerhaft bestimmte Schubmodul ein. Es folgt bei der Querkontraktionszahl eine Abweichung zur echten $\mu_{\text{echt}} = 0.3$ von $\Delta\mu = 174 \%$. Diese hohe Abweichung erklärt den negativen Kompressionsmodul, welcher aus der vorher ermittelten Querkontraktionszahl bestimmt wird.

Das ermittelte Magnetfeld der Erde, $B_{\text{Erde}} = (291 \pm 12) \mu\text{T}$, ist um ungefähr den Faktor Zehn zu groß. Dies liegt jedoch nicht nur an dem fehlerhaften Schubmodul, welches die Richtgröße beeinflusst, sondern zusätzlich an den gemessenen Periodendauern. Diese weisen nämlich keine statistischen Schwankungen auf, aber einen deutlichen Trend nach unten. Der Torsionsfaden ist zu weit ausgelenkt worden, sodass die Zeiten von der Amplitude abhängig sind. Dies ist ein systematischer Fehler, der hätte vermieden werden können.

Zuletzt steht die Frage offen, ob dieser Versuchsaufbau wirklich dazu geeignet ist, die Elastizitätskonstanten zu bestimmen.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch zum Literaturverzeichnis*. 2015. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V102.pdf>.