

Versuchsprotokoll zum Versuch Nr. 503

Der Millikan-Versuch

Johannes Kollek	Jean-Marco Alameddine
johannes.kollek@udo.edu	jean-marco.alameddine@udo.edu

Durchführung: 21.06.2016

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Kräftegleichgewicht im ausgeschalteten Zustand	3
2.2 Kräftegleichgewicht bei eingeschaltetem Kondensator	3
3 Fehlerrechnung	5
4 Aufbau und Durchführung	6
4.1 Aufbau	6
4.2 Durchführung	7
5 Auswertung	8
5.1 Einfache Bestimmung der Elementarladung	10
5.2 Bestimmung der Elementarladung mit Korrekturfaktor	11
6 Diskussion	13
Literatur	14
7 Anhang	15

1 Zielsetzung

Im Jahre 1910 ist es Robert Millikan gelungen, mithilfe des berühmten Millikan-Versuchs die Elementarladung e_0 möglichst genau zu bestimmen [2]. Dieses Experiment wird im Folgenden durchgeführt.

2 Theorie

Zur Bestimmung der Elementarladung e_0 , welche nur als diskrete Vielfache auftreten kann, werden geladene Öltröpfchen verwendet. Diese befinden sich zwischen den Platten eines Plattenkondensators.

2.1 Kräftegleichgewicht im ausgeschalteten Zustand

Im ausgeschalteten Zustand des Kondensators befindet sich das Öltröpfchen, sobald es sich mit einer konstanten Geschwindigkeit v_0 nach unten bewegt, im Kräftegleichgewicht

$$\vec{F}_g + \vec{F}_R = 0. \quad (1)$$

Hierbei wird die Gravitationskraft durch

$$\vec{F}_g = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_L g \quad (2)$$

mit dem Tröpfchenradius r , der Erdbeschleunigung g und der Dichte von Luft ρ_L beschrieben. Als Reibung wird eine Stokes-Reibung angenommen, welche durch

$$\vec{F}_R = -6\pi r \eta_L v_0 \quad (3)$$

mit der Viskosität von Luft η_L beschrieben wird. Zu beachten ist, dass die Stokes-Reibung in dieser Form nur für den Fall gültig ist, dass das Tröpfchen einen größeren Durchmesser als die mittlere freie Weglänge λ von Luft besitzt. Ansonsten muss die Cunnigham-Korrektur verwendet werden, so dass für die korrigierte Viskosität

$$\tilde{\eta}_L = \eta_L \left(\frac{1}{1 + B \frac{1}{pr}} \right) \quad (4)$$

mit dem Luftdruck p sowie dem Korrekturterm B gilt.

2.2 Kräftegleichgewicht bei eingeschaltetem Kondensator

Sobald der Kondensator eingeschaltet wird, existiert ein elektrisches Feld, welches je nach Polung eine Kraft

$$\vec{F}_e = \pm q \vec{E}$$

auf das Öltröpfchen ausübt. Falls beispielsweise die obere Platte positiv geladen ist, wirkt die Kraft des elektrischen Feldes nach oben, während die Reibungskraft nach unten wirkt. Aus den sich ergebenden Kräftegleichgewichten kann die Ladung zu

$$q = 3\pi\eta_L \sqrt{\frac{9}{4} \frac{\eta_L}{g} \frac{(v_{\text{ab}} - v_{\text{auf}})}{\rho_{\text{oel}} - \rho_{\text{luft}}} \frac{v_{\text{ab}} + v_{\text{auf}}}{E}} \quad (5)$$

bestimmt werden, wobei E die Stärke des elektrischen Feldes, ρ_{oel} die Dichte der verwendeten Öltröpfchen, v_{ab} die gleichmäßige Geschwindigkeit im Kräftegleichgewicht nach unten sowie v_{auf} im Kräftegleichgewicht nach oben ist. Der Radius berechnet sich zu

$$r = \sqrt{\frac{4}{9} \frac{\eta_L (v_{\text{ab}} - v_{\text{auf}})}{g(\rho_{\text{oel}} - \rho_{\text{luft}})}}. \quad (6)$$

Mit der Korrektur beträgt die Ladung somit

$$q_{\text{kor}} = q_0 \left(1 + \frac{B}{pr}\right)^{-\frac{2}{3}}. \quad (7)$$

3 Fehlerrechnung

Im folgenden Kapitel werden die wichtigsten Formeln der Fehlerrechnung aufgelistet, welche für die folgende Versuchsauswertung benötigt werden. Der Mittelwert berechnet sich zu

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (8)$$

Der Fehler des Mittelwertes berechnet sich zu

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} . \quad (9)$$

Die Schätzung der Standardabweichung berechnet sich zu

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} . \quad (10)$$

Für die Fehlerrechnung wird bei allen folgenden Rechnungen das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n\right)^2} \quad (11)$$

für eine Funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, bei der die Größen x_1, x_2, \dots, x_n voneinander unabhängig sind, verwendet.

Bei der linearen Regressionsrechnung gilt mit den Parametern m und b und der Ausgleichsgerade $y = mx + b$ der Zusammenhang:

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad b = \bar{y} - m\bar{x} . \quad (12)$$

Dabei sind x_i und y_i linear abhängige Messgrößen. Der Fehler dieser Parameter errechnet sich zudem zu

$$\sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)} \quad \sigma_b^2 = \frac{\sigma^2 \bar{x}^2}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)} \quad (13)$$

4 Aufbau und Durchführung

4.1 Aufbau

Der Versuchsaufbau zum Millikan-Versuch ist in Abbildung 1 wiedergegeben



Abbildung 1: Schematische Ansicht des Versuchsaufbaus von oben. [3]

Den Kern des Aufbaus bildet die Millikan-Kammer. Es handelt sich hierbei um einen Plattenkondensator senkrecht zur Erdanziehungskraft, was über eine integrierte Libelle überprüft wird. Er ist oben mit einer Öffnung versehen, welche einen Zugang zwischen die beiden Kondensatorplatten ermöglicht. Diese werden von einer regelbaren Spannung gespeist, wobei die Orientierung des Feldes über einen Kippschalter geändert werden kann. Über einen Thermowiderstand kann die Temperatur innerhalb der Millikan-Kammer abgelesen werden. Die Kammer wird mit Öltröpfchen über einen Zerstäuber durch den Zugang der Kammer befüllt. Diese können über Ionisierung der umgebenen Luft durch ein Alpha-Präparat, welches über einen weiteren Kippschalter an die Kammer gekoppelt werden kann, negativ geladen werden. Zur Beobachtung der Öltröpfchen sind zusätzlich eine Lichtquelle und ein Kamera-Linsensystem an der Kammer angebracht. Das Linsensystem ist einstellbar und am Ende mit einer Skala versehen. Das aufgenommene Bild ist auf einem Schirm beobachtbar.

4.2 Durchführung

Zuerst wird über die Libelle überprüft, ob der Versuch senkrecht zur Erdanziehungskraft steht. Ist dies gegeben, wird die Millikan-Kammer mit Öltröpfchen bestäubt. Danach wird ein Öltröpfchen auf dem Bildschirm angepeilt, welches zwei Kriterien erfüllt. Es muss erstens sinken und zweitens negativ geladen sein. Ob das Teilchen geladen ist, wird durch wiederholtes umpolen der Kondensatorplatten bestimmt. Gibt es kein geladenes Teilchen, wird die Luft durch das Freigeben des Alpha-Präparates ionisiert. Ist ein geeignetes Tröpfchen gefunden, wird einmalig dessen Sinkzeit über eine festgelegte Strecke gemessen. Danach wird dessen Aufsteigezeit mit entgegen des Schwerfeldes gepolter Kondensatorplatten aufgenommen. Das Feld wird umgepolt und es wird erneut die Sinkzeit gemessen. Dies wird für ein Teilchen, solange es fokussiert ist, so oft wie möglich wiederholt. Dies wird so häufig es geht für viele Teilchen unter verschiedenen Kondensatorspannungen durchgeführt. Währenddessen wird die Temperatur notiert, unter die die Messreihen aufgenommen werden.

5 Auswertung

Zur Bestimmung der Ladung der Öltröpfchen werden Messungen für die Kondensatorspannungen

$$\begin{aligned}U_1 &= 190 \text{ V}, \\U_2 &= 302 \text{ V}, \\U_3 &= 250 \text{ V}\end{aligned}$$

durchgeführt. Die Temperaturen der Messapparatur bestimmen sich aus den gemessenen Werten des Thermowiderstandes unter Verwendung der in Abbildung 2 angegebenen Tabelle zu

$$\begin{aligned}R_1 &= 1,71 \text{ M}\Omega, \\T_1 &= 32^\circ\text{C}, \\R_2 &= 1,67 \text{ M}\Omega, \\T_2 &= 33^\circ\text{C}.\end{aligned}$$

Bei der Betrachtung der Werte fällt auf, dass vereinzelt eine starke Abweichung der Messzeiten

T[°C]	R [MΩ]	T[°C]	R [MΩ]	T[°C]	R [MΩ]
10	3.239	20	2.300	30	1.774
11	3.118	21	2.233	31	1.736
12	3.004	22	2.169	32	1.700
13	2.897	23	2.110	33	1.666
14	2.795	24	2.053	34	1.634
15	2.700	25	2.000	35	1.603
16	2.610	26	1.950	36	1.574
17	2.526	27	1.902	37	1.547
18	2.446	28	1.857	38	1.521
19	2.371	29	1.815	39	1.496

Abbildung 2: Thermistor-Widerstandstabelle [3].

während einer einzigen Messreihe aufgetreten ist. Diese Messwerte können dementsprechend nicht verwendet werden. Zudem werden die Messwerte verworfen, wenn die Bedingung

$$v_{\text{ab}} - v_{\text{auf}} = 2v_0$$

nicht erfüllt wird. Somit werden die in den Tabellen 1 bis 6 angegebenen Messwerte verwendet.

Tabelle 1: Messung 1 bei U_1 , T_1 .

$t_{\text{auf}} / \text{s}$	t_{ab} / s
5,81	4,13
6,26	3,89

Von diesen Zeiten wird für jede Messreihe, also für jedes betrachtete Teilchen, der Mittelwert gebildet. Die betrachtete Strecke beträgt jeweils $s = 1 \text{ mm}$, woraus sich mit den gemittelten Zeiten die Geschwindigkeiten v_{ab} und v_{auf} ergeben.

Tabelle 2: Messung 2 bei U_1, T_1 .

$t_{\text{auf}} / \text{s}$	t_{ab} / s
15,81	7,64
16,10	8,18

Tabelle 3: Messung 3 bei T_1, U_1 .

$t_{\text{auf}} / \text{s}$	t_{ab} / s
6,84	4,30
6,64	4,89

Tabelle 4: Messung 4 bei U_2, T_1 .

$t_{\text{auf}} / \text{s}$	t_{ab} / s
6,15	4,35
6,24	4,07
5,41	4,64

Tabelle 5: Messung 5 bei U_2, T_1 .

$t_{\text{auf}} / \text{s}$	t_{ab} / s
9,12	5,46
9,12	6,83

Tabelle 6: Messung 6 bei U_3, T_2 .

$t_{\text{auf}} / \text{s}$	t_{ab} / s
3,83	2,58
3,29	2,87
3,44	2,95
3,46	2,87

5.1 Einfache Bestimmung der Elementarladung

Die daraus nach Formel (5) resultierenden Ladungen sind in Tabelle 7 dargestellt. Dabei wird die Beziehung

$$E = \frac{U}{d}, \quad (14)$$

welche für das elektrische Feld E eines Plattenkondensators gilt, ausgenutzt. Die verwendeten Konstanten sind aus [1], [3] entnommen und betragen

$$\begin{aligned} \rho_{\text{Oel}} &= 886 \text{ kg m}^{-3}, \\ \rho_{\text{Luft}} &= 1,1644 \text{ kg m}^{-3}, \\ g &= 9,81 \text{ m s}^{-1}, \\ d &= (7,6250 \pm 0,0051) \text{ mm}, \end{aligned}$$

wobei die Viskosität n von Luft je nach Temperatur aus dem Diagramm 3 entnommen wird. Zudem wird der Fehler der Ladungen nach Formel (11) angegeben.

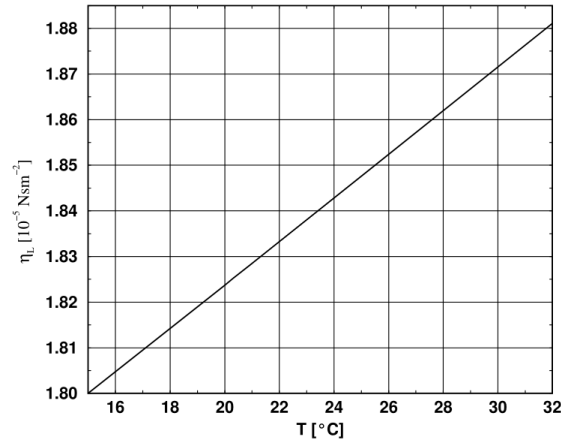


Abbildung 3: Viskosität von Luft [3].

Tabelle 7: Berechnete Ladungen aus den ausgewählten Geschwindigkeiten v_{ab} und v_{auf} .

Messung	$q / 10^{-19} \text{ C}$	$\Delta q / 10^{-19} \text{ C}$
1	18,847	1,250
2	7,494	0,425
3	15,119	2,108
4	9,727	0,992
5	6,198	1,472
6	20,233	2,102

Zusätzlich sind die Ergebnisse der Ladungen in Abbildung 4 graphisch dargestellt.

Wird nun der größte gemeinsame Teiler dieser Werte bestimmt, so ergibt sich ein ermittelter Wert für die Elementarladung von

$$e_0 = 1,849 \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

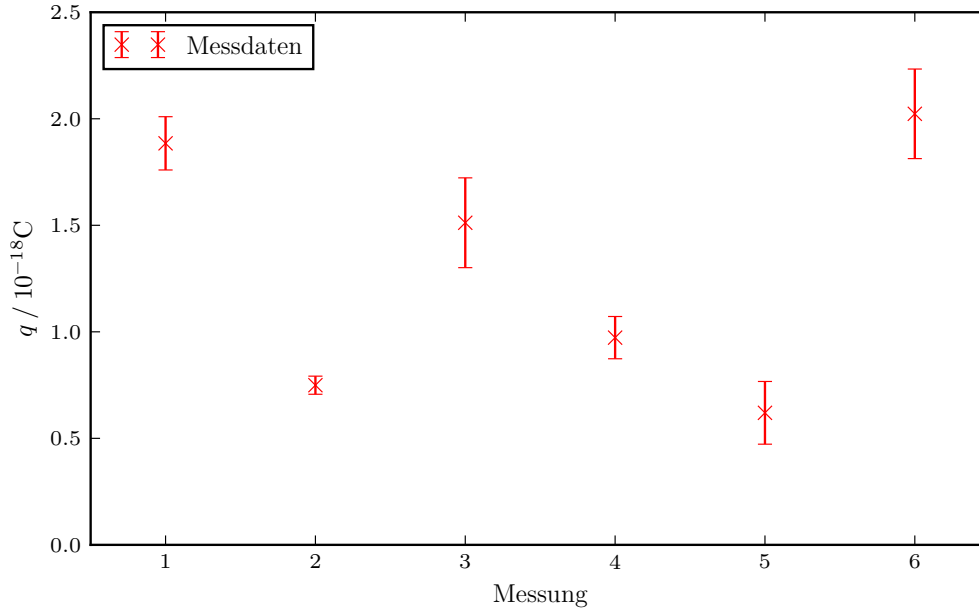


Abbildung 4: Ermittelte Ladungen aus Tabelle 7.

Die Berechnung erfolgt mithilfe eines im Python implementierten, dem Problem angepassten euklidischen Algorithmus (vgl. Abbildung 6).

Die Avogadro-Konstante wird durch die Formel

$$N_a = \frac{F}{e_0}, \quad (15)$$

mit der Faraday-Konstante $F = 96\,485,3365 \text{ C mol}^{-1}$ [1], beschrieben. Dadurch wird die Avogadro-Konstante auf

$$N_a = 5,219 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

bestimmt.

5.2 Bestimmung der Elementarladung mit Korrekturfaktor

Um die Ladungen nach Formel (7) zu bestimmen, muss zunächst der Radius r des Tröpfchens bekannt sein. Jener wird über die Formel (6), mit den wie zuvor auch verwendeten Parametern, ermittelt. Die Radien, und die nach 11 berechneten Fehler der in der Messreihe verwendeten Öltröpfchen, sind in Tabelle 8 einzusehen.

Mit den Parametern aus [3], [4]

$$B = 6,17 \cdot 10^{-3} \text{ Torr cm},$$

$$p = 1013,25 \cdot 10^2 \text{ Pa}$$

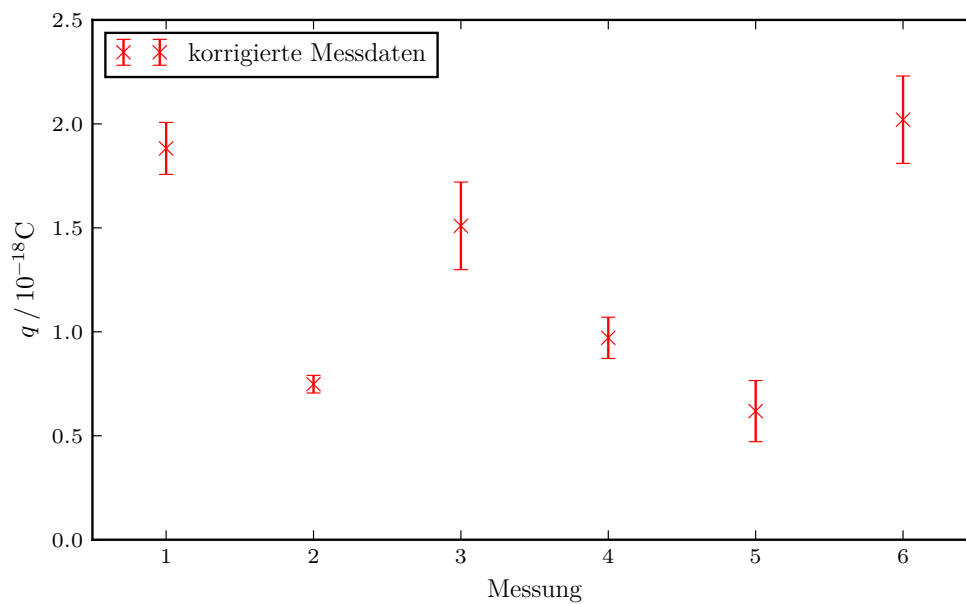
ergeben sich die somit neu bestimmten Ladungen in Tabelle 9, welche auch in Abbildung 5 graphisch dargestellt sind.

Tabelle 8: Radien der Öltröpfchen.

Messung	$r / 10^{-7} \text{ m}$	$\Delta r / 10^{-7} \text{ m}$
1	6,386	0,370
2	5,574	0,190
3	5,810	0,593
4	5,460	0,511
5	5,086	0,869
6	5,832	0,581

Tabelle 9: korrigierte Ladungen.

Messung	$q / 10^{-19} / \text{ C}$	$\Delta q / 10^{-19} \text{ C}$
1	18,820	1,250
2	7,482	0,425
3	15,096	2,107
4	9,711	0,992
5	6,187	1,471
6	20,201	2,102

**Abbildung 5:** Korrigierte Ladungen.

Nach analogem Vorgehen ergibt sich eine Elementarladung von

$$e_{0,\text{neu}} = 1,858 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

und die Avogadro-Konstante beträgt für die korrigierte Ladung

$$N_{a,\text{neu}} = 5,194 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

6 Diskussion

In diesem Protokoll werden drei signifikante Stellen angegeben, da es sich bei den zu Untersuchenden Größen um sehr bekannte und zudem recht große, beziehungsweise kleine Größen handelt. Die Ergebnisse des Versuches sind in Tabelle 10 wiedergegeben, wobei die Literaturwerte [1]

$$e_{0,\text{lit}} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{C},$$
$$N_{\text{a,lit}} = 6,022 \cdot 10^{23} \text{mol}^{-1}$$

betragen. Die Abweichungen sind recht groß, jedoch tragbar im Anbetracht des Versuchs, bei dem

Tabelle 10: Ergebnisse des Versuchs.

Methode	$e_0 / 10^{-19} \text{C}$	$\Delta e_0 / \%$	$N_a / 10^{23} \text{mol}^{-1}$	$\Delta N_a / \%$
1	1,849	15	5,219	13
2	1,858	16	5,194	14

nicht zuletzt zwischenmenschliche Reaktionszeit zu einer Unsicherheitsquelle gehört, begründet darin, dass eine Person die Teilchenbewegung steuert, während die andere nach Anweisung der ersten Person die Zeit stoppen muss.

Eine weitere Fehlerquelle ist, dass der Apparat nicht ausreichend windgeschützt ist. So sorgt der kleinste Windstoß, ausgelöst beispielsweise durch passierende Mitpraktikanten, für eine Verfälschung der Messwerte.

Eine Verbesserung der Werte kann mit mehreren Messreihen gewährleistet werden. Die Schwierigkeit des Versuchs liegt aber darin, ein Teilchen zu finden, welches alle Anforderungen 4.2 erfüllt und dieses für mehrere Messwerte im Auge zu behalten. Erschwerend kommt hinzu, dass auch ein gefundenes Teilchen beispielsweise durch Kollisionen, Luftstößen oder anderen Faktoren während einer Messreihe seine Geschwindigkeit ändert, was den Großteil der durchgeführten Messungen unbrauchbar gemacht hat.

Alles in allem ist der Versuch, entgegen der Erwartungen der Experimentatoren, geglückt.

Literatur

- [1] *chemie.de*. Juni 2016. URL: <http://www.chemie.de/>.
- [2] Jearl Walker David Halliday Robert Resnick. *Physik*. Weinheim: WILEY-VCH, 2005.
- [3] *TU Dortmund - Fachbereich Physik : Anfängerpraktikum Anleitung zu Versuch Nr. 503*. <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/Millikan.pdf>. Juni 2016.
- [4] *Uni-Frankfurt*. Juni 2016. URL: https://elearning.physik.uni-frankfurt.de/data/FB13-PhysikOnline/lm_data/lm_324/daten/kap_17/node31.htm.

7 Anhang

```
1 def Euklid(q,max):
2     gcd=q[0]
3     for i in range(1,len(q)):
4         n=0
5         while abs(gcd-q[i])>1e-19 and n <= max:
6             if gcd > q[i]:
7                 gcd = gcd - q[i]
8             else:
9                 q[i] = q[i] - gcd
10            n = n+1
11     return gcd
```

Abbildung 6: Euklidischer Algorithmus für reelle Zahlen.