

Versuchsprotokoll zum Versuch Nr. 104

## **Der Doppler-Effekt**

Johannes Kollek	Jean-Marco Alameddine
johannes.kollek@udo.edu	jean-marco.alameddine@udo.edu

Durchführung: 05.01.2016

TU Dortmund – Fakultät Physik

# 1 Theorie

Der Doppler-Effekt wird beobachtet, wenn sich der Sender einer Welle und dessen Empfänger relativ zueinander bewegen. Der Empfänger jener Welle nimmt diese sobald eine Relativgeschwindigkeit  $v$  vorliegt mit veränderter Frequenz wahr. Die Frequenzänderung  $\Delta\nu$  muss jedoch in Bezug auf zwei Fälle untersucht werden, wenn sich die Welle in einem Medium ausbreitet.

## 1.1 Empfänger bewegt sich relativ zum Ausbreitungsmedium

Die in diesem Fall ruhende Quelle sende die Frequenz  $\nu_0$  aus, welche ohne Relativbewegung des Empfängers auch als solche wahrgenommen wird. Bewegt er sich aber, dann nimmt er je nach Bewegungsrichtung mehr oder weniger Wellenzüge  $\Delta z$  in der Zeit  $\Delta t$  wahr. Es folgt der Zusammenhang

$$\Delta z = \frac{\Delta t v}{\lambda_0}, \quad (1)$$

wobei  $\lambda_0$  der Wellenlänge der ausgesendeten Welle im System des Senders entspricht. An einem ruhenden Empfänger laufen jedoch nur

$$\Delta n = \Delta t \nu_0 \quad (2)$$

Schwingungen vorbei. Insgesamt nimmt er also

$$\Delta n + \Delta z = \Delta t \left( \nu_0 + \frac{v}{\lambda_0} \right) \quad (3)$$

Schwingungen wahr. Die empfangene Frequenz lautet demnach

$$\nu_E = \nu_0 + \frac{v}{\lambda_0} \quad (4)$$

und in Bezug auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$c = \nu_0 \lambda_0 \quad (5)$$

folgt

$$\nu_E = \nu_0 \left( 1 + \frac{v}{c} \right). \quad (6)$$

Die gesuchte Frequenzänderung  $\Delta\nu$  beträgt folglich

$$\Delta\nu = \nu_0 \frac{v}{c}. \quad (7)$$

Für eine Bewegung zum Sender ( $v > 0$ ) ist die empfangene Frequenz  $\nu_E$  also größer als die Senderfrequenz  $\nu_0$ , entsprechend anders herum kleiner.

## 1.2 Sender bewegt sich relativ zum Ausbreitungsmedium

Da der Sender nun in einer Zeit  $\Delta t$  eine gewisse Strecke zurücklegt, erscheint die Wellenlänge, die beim ruhenden Beobachter ankommt, um

$$\Delta\lambda = \frac{v}{\nu_0} \quad (8)$$

verkürzt. Für die wahrgenommene Frequenz folgt entsprechend der Zusammenhang

$$\nu_Q = \frac{c}{\lambda_0 - \Delta\lambda}, \quad (9)$$

bzw.

$$\nu_Q = \nu_0 \frac{1}{1 - v/c}. \quad (10)$$

Wird dieser Ausdruck entwickelt, zeigt sich, dass je nach Art der Bewegung, unterschiedliche Frequenzen beim Beobachter ankommen. Ist der Betrag der Relativgeschwindigkeit sehr viel kleiner als die Ausbreitungsgeschwindigkeit wird der Unterschied zwischen (7) und (10) beliebig klein.

## 1.3 Der Doppler-Effekt bei elektromagnetischen Wellen

Wenn sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit nun der Lichtgeschwindigkeit annähert, muss ein relativistischer Ansatz gewählt werden. Dies führt auf eine wahrgenommene Frequenz von

$$\nu' = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}{1 - v/c_0}. \quad (11)$$

Es besteht nun kein Unterschied mehr, ob sich nun der Sender oder der Empfänger relativ zum Ausbreitungsmedium bewegt. Durch diesen Zusammenhang kann z.B auf eine Relativbewegung zwischen der Erde und Fixsternen oder Galaxien geschlossen werden.

# 2 Aufbau und Durchführung

## 2.1 Aufbau

Im vorliegenden Versuchsaufbau wird ein kleiner Wagen mit Rollen betrachtet, welcher sich auf einer Schiene befindet. Mithilfe eines befestigten Seils, verbunden mit einem Synchronmotor, kann dieser Wagen die Strecke in zehn verschiedenen konstanten Geschwindigkeitseinstellungen vorwärts oder rückwärts zurücklegen. Auf dem Wagen kann ein Lautsprecher befestigt werden, welcher Töne wiedergeben kann. Diese werden mithilfe eines frequenzstabilen Generators erzeugt.

Am Ende der Strecke befindet sich ein Mikrophon, welches eine Signalspannung erzeugt,

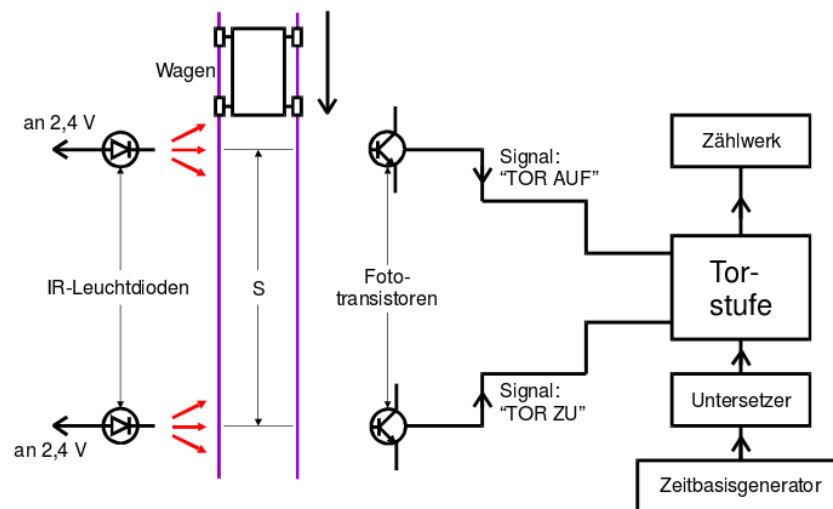
die im Folgenden zur Betrachtung der aufgenommenen Wellen verwendet werden kann. Zudem sind zwei Lichtschranken vorhanden, die an der Schiene montiert werden können und somit das Durchfahren des Wagens registrieren können. Sie funktionieren, indem eine Infrarot-Lichtquelle einen konstanten Lichtstrahl auf einen gegenüberliegenden Phototransistor sendet. Sobald die Verbindungsstrecke zwischen beiden Elementen unterbrochen wird, bricht der Strom im Transistor zusammen. Dieser Impuls kann ebenfalls im Weiteren verwendet werden.

Um die genannten Impulse verarbeiten zu können, sind mehrere Bauteile mit logischen Funktionen vorhanden. Diese können die Impulse des Mikrophons sowie der Lichtschranke jedoch nur als TTL-Signale verarbeiten, so dass diese zunächst durch einen Schmitt-Trigger umgewandelt werden müssen.

## 2.2 Durchführung

### 2.2.1 Bestimmung der Wagengeschwindigkeiten

Die zehn verschiedenen Wagengeschwindigkeiten können, da es sich um lineare Bewegungen handelt, mit dem Weg-Zeit-Gesetz bestimmt werden. Der Aufbau ist in Abbildung 1 dargestellt. Mithilfe eines Maßbandes wird die Strecke zwischen zwei an der Strecke mon-



**Abbildung 1:** Aufbau zur Bestimmung der Wagengeschwindigkeiten. [1]

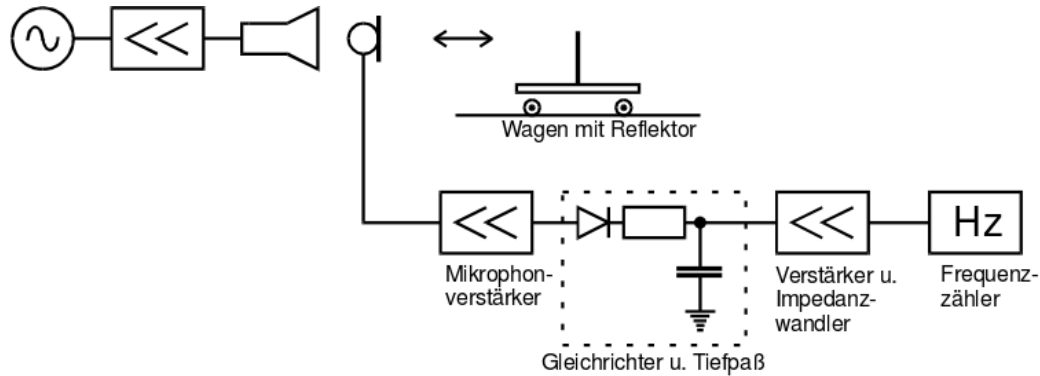
tierten Lichtschranken gemessen. Ein Zeitbasisgenerator liefert nun konstante Impuls im zeitlichen Abstand von  $1\mu\text{s}$ . Mithilfe eines dekadischen Untersetzers wird das Signal nun so verändert, dass die Häufigkeit der Impulse dem zeitlichen Rahmen des Experimentes angepasst wird. Hier sollen nur alle  $10^{-4}\text{s}$  zeitliche Impulse abgegeben werden.

Sobald der Wagen die erste Lichtschranke passiert, wird dieser Impuls von einer bistabilen Kippstufe registriert. Dieser speichert diesen Impuls und behält ihn solange, bis durch



### 2.2.3 Bestimmung der Frequenzdifferenz mithilfe der Schwebungsmethode

Um die Frequenzdifferenz zwischen der Ruhefrequenz sowie der von einem ruhenden Empfänger aufgenommenen Frequenz zu ermitteln, wird die Schwebungsmethode verwendet. Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 3 skizziert. Der Lautsprecher wird neben dem



**Abbildung 3:** Aufbau zur Bestimmung der Frequenzdifferenz mithilfe der Schwebungsmethode. [1]

Mikrophon am Ende der Schiene befestigt und in Richtung des Wagens ausgerichtet. Auf dem Wagen wird nun eine Metallplatte als Reflektor befestigt, welche die einfallenden Wellen in Richtung des Mikrophons reflektiert. Dementsprechend nimmt dieses sowohl die einfallenden Wellen, die direkt aus dem Lautsprecher stammen, als auch die Wellen, die von der Platte reflektiert werden, auf. Das aufgenommene Signal wird angemessen stark verstärkt, durch einen Gleichrichter mit Tiefpass sowie durch einen Impedanzwandler geleitet. Die Frequenzmessung mithilfe dieses Signals folgt analog zu dem in Kapitel 2.2.2 durchgeführten Vorgehen.

### 2.2.4 Bestimmung der Schallgeschwindigkeit

Zudem kann die Schallgeschwindigkeit mithilfe der Kenntnis der Ruhefrequenz  $\nu_0$  und der Wellenlänge  $\lambda$  bestimmt werden. Der dazugehörige Versuchsaufbau ist in Abbildung 4 dargestellt. Der Lautsprecher und ein Mikrophon werden hier auf einem Präzisionsschlitten mit Skala befestigt. Das vom Mikrophon aufgenommene Signal wird verstärkt und auf den Y-Eingang eines Oszillographen gegeben. Auf den X-Eingang wird die in den Lautsprecher eingespeiste Spannung gegeben, so dass man die Lissajous-Figuren betrachten kann. Der Wagen wird nun auf dem Schlitten verschoben, bis sich eine Gerade als Lissajous-Figur ergibt, die Phasenverschiebung also ein Vielfaches von  $\frac{\pi}{2}$  beträgt. Die einzelnen Abstände zwischen diesen Punkten werden gemessen.

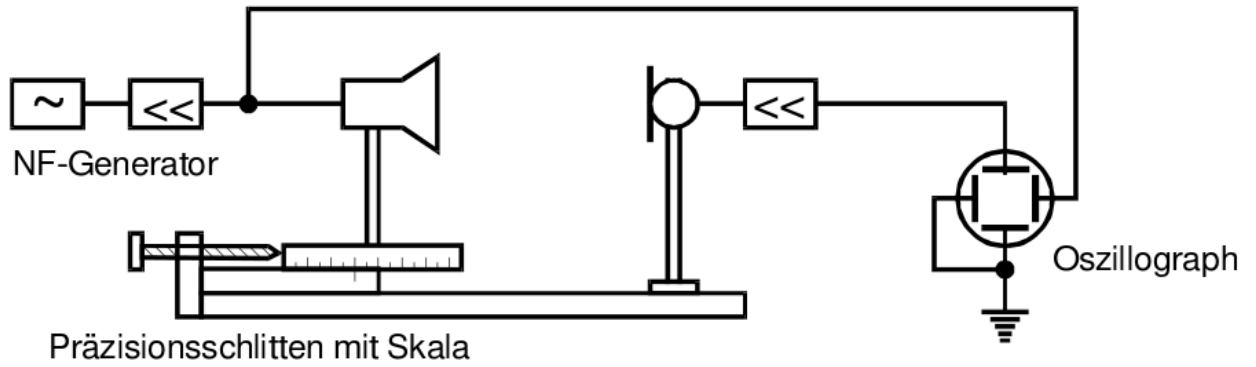


Abbildung 4: Aufbau zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit. [1]

### 3 Auswertung

#### 3.1 Bestimmung der Wagensgeschwindigkeit

Zunächst wird die Wagensgeschwindigkeit bei den zehn verschiedenen Gangeinstellungen des Wagens, wie in Kapitel 2.2.1 beschrieben, bestimmt. Die Weglänge wird mithilfe eines Maßbandes zu

$$s = (43.8 \pm 0.1) \text{ cm}$$

bestimmt. Der jeweilige nominelle Wert für  $t$  wird aus dem Mittelwert der fünf Einzelmessungen bestimmt. Der Mittelwert berechnet sich dabei mithilfe der Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (12)$$

Der Fehler der Zeit wird mittels der Standardabweichung aus den fünf Einzelwerten bestimmt. Die Standardabweichung berechnet sich dabei nach

$$s = \sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (13)$$

Unter der Annahme einer linearen Bewegung wird die Geschwindigkeit nun mit dem Weg-Zeit-Gesetz berechnet. Für die Fehlerrechnung wird bei der vorliegenden Rechnung und bei allen folgenden Rechnungen das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n\right)^2} \quad (14)$$

für eine Funktion  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , bei der die Größen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  voneinander unabhängig sind, verwendet. Es ergeben sich hieraus die in Tabelle 1 angegebenen Werte.

**Tabelle 1:** Wagengeschwindigkeiten

Gang	$v[\text{cm s}^{-1}]$	$\Delta v[\text{cm s}^{-1}]$
6.0	5.10	0.01
12.0	10.22	0.03
18.0	15.27	0.11
24.0	20.46	0.05
30.0	25.55	0.07
36.0	30.71	0.07
42.0	35.87	0.10
48.0	41.10	0.11
54.0	46.25	0.13
60.0	51.43	0.15

### 3.2 Bestimmung der Ruhefrequenz

Als nächstes wird die Ruhefrequenz  $\nu_0$ , wie in der Durchführung in Kapitel 2.2.2 beschrieben, bestimmt. Dazu werden in einem Zeitintervall von  $t = 10 \text{ s}$  die im Empfänger aufgenommenen Schwingungen gemessen. Es werden 7 Messungen durchgeführt, dessen Mittelwert und Standardabweichung sich zu

$$\nu_0 = (20\,741.40 \pm 0.06) \text{ s}^{-1}$$

ergeben und somit der Ruhefrequenz entsprechen.

### 3.3 Bestimmung der Schallgeschwindigkeit

Die Schallgeschwindigkeit wird, wie in Kapitel beschrieben, mittels eines Präzisionsschlitten bestimmt. Es werden dabei jeweils die Werte zwischen zwei benachbarten Extrema gleicher Phase verglichen. Der sich aus Mittelwert sowie Standardabweichung ergebene Wert für  $\lambda_0$ , der Wellenlänge der Ruhefrequenz, ergibt sich zu

$$\lambda_0 = (17.4 \pm 0.6) \text{ mm}$$

sowie der Kehrwert der Wellenlänge zu

$$\frac{1}{\lambda_0} = (0.057 \pm 0.002) \text{ mm}^{-1}$$

Aus der Formel 5 sowie dem zuvor bestimmten Wert der Ruhefrequenz ergibt sich eine Schallgeschwindigkeit von

$$c = (361.8 \pm 12.9) \text{ m s}^{-1},$$



### 3.4 Bestimmung der Frequenzdifferenzen

Im Folgenden wird der Wagen in Bewegung gesetzt und die Frequenzdifferenzen, wie in Kapitel 2.2.2 beschrieben, bestimmt. Für die zehn zuvor bestimmten Geschwindigkeiten werden die Anzahl der am Empfänger erreichten Schwingungen notiert. Der betrachtete Zeitraum beträgt wiederum  $t = 10$  s. Aus den 5 Einzelmessungen wird jeweils ein Mittelwert sowie eine Standardabweichung gebildet. Dementsprechend ergeben sich die in Tabelle 2 angegebenen Differenzfrequenzen  $\nu_{\text{diff}}$  zu den jeweiligen Geschwindigkeiten  $v$ , wobei die gemessenen Frequenzen im Vergleich zu den zuvor bestimmten Ruhefrequenzen betrachtet werden. Obwohl theoretisch 10 Geschwindigkeiten möglich sind, können bei

**Tabelle 2:** Frequenzdifferenzen durch Doppler-Effekt.

$v[\text{cm s}^{-1}]$	$\Delta v[\text{cm s}^{-1}]$	$\nu_{\text{diff}}[\text{Hz}]$	$\Delta \nu_{\text{diff}}[\text{Hz}]$
30.713	0.074	19.00	0.49
25.547	0.072	15.80	0.40
20.457	0.050	12.600	0.063
15.27	0.11	9.80	0.40
10.216	0.025	6.600	0.063
5.100	0.014	3.600	0.063
-5.100	0.014	-2.60	0.40
-10.216	0.025	-5.80	0.49
-15.27	0.11	-8.60	0.40
-20.457	0.050	-11.80	0.49
-25.547	0.072	-15.00	0.49
-30.713	0.074	-17.60	0.40
-35.87	0.10	-22.4	3.0

der Vorwärtsbewegung jeweils nur die ersten sieben sowie bei der Rückwärtsbewegung nur die ersten sechs Geschwindigkeiten betrachtet werden. Grund dafür ist, dass der Empfänger bei zu großer Distanz zum Lautsprecher keine zuverlässigen Werte mehr liefern kann.

Die berechneten Frequenzen können gegen die Geschwindigkeit aufgetragen werden. Es ergibt sich ein linearer Zusammenhang, welcher linear an die Funktion

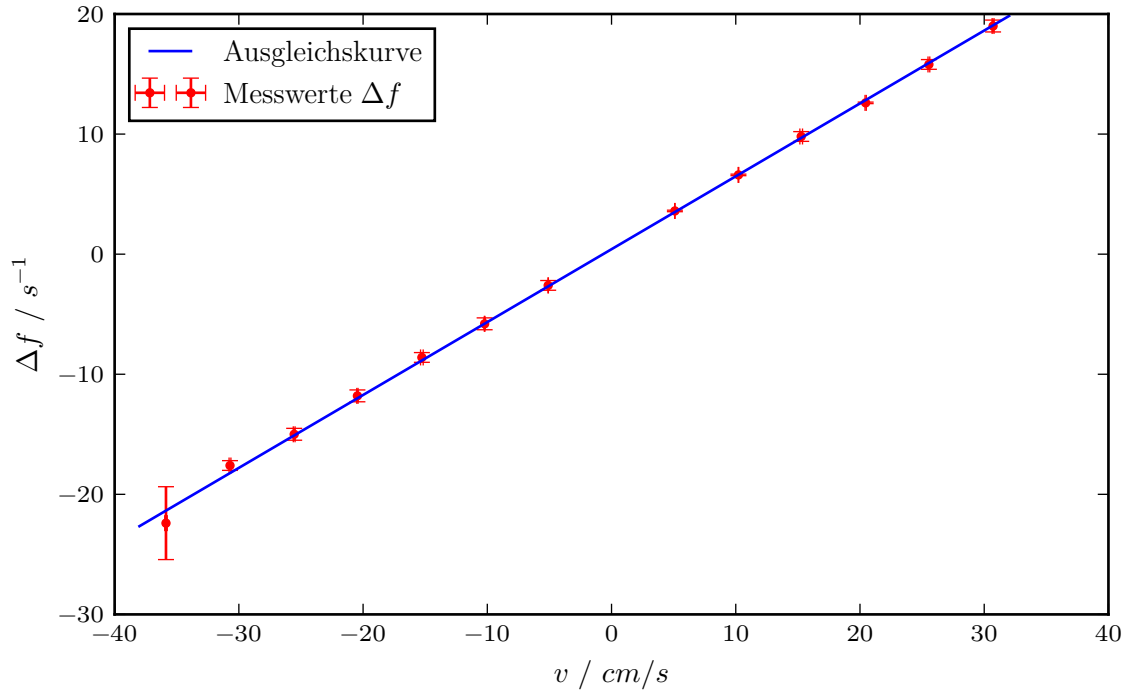
$$y = mx + b$$

gefittet wird. Der Fit wird dabei in Python mit SciPy erstellt. Es ergeben sich für die Ausgleichsgerade die Parameter

$$c = (0.607 \pm 0.005) \text{ cm}^{-1},$$

$$b = (0.4 \pm 0.1) \text{ s}^{-1}.$$

Der Parameter entspricht  $c$  dabei laut Formel 7 näherungsweise  $\frac{\nu_0}{c}$ . Der sich ergebende Plot ist in Abbildung 5 dargestellt.



**Abbildung 5:** Frequenzdifferenz in Abhängigkeit der Relativgeschwindigkeit.

### 3.5 Bestimmung der Frequenzdifferenzen mittels Schwebungsmethode

Zudem können die Frequenzdifferenzen mithilfe der in Kapitel 2.2.3 beschriebenen Schwebungsmethode erfasst werden. Es können für die ersten fünf Geschwindigkeiten jeweils drei Messwerte aufgenommen werden, es wird nur die Rückwärtsbewegung der Reflexionsplatte betrachtet. Aus den drei Werten wird wiederum ein Mittelwert und eine Standardabweichung gebildet. Die Ergebnisse für die Frequenzdifferenz  $\nu_{\text{diff}}$  wird mit den dazugehörigen Geschwindigkeiten in Tabelle 3 dargestellt. Bei den Geschwindigkeiten ist zu beachten, dass durch die Bewegung der Reflexionsplatte eine effektive Geschwindigkeit in die Frequenzdifferenz eingeht, welche dem doppelten der realen Wagensgeschwindigkeit entspricht. Es ergeben sich Werte, für die eine lineare Ausgleichsrechnung analog zur vorherigen Rechnung durchgeführt wird. Hierbei ergeben sich die Fitparameter zu

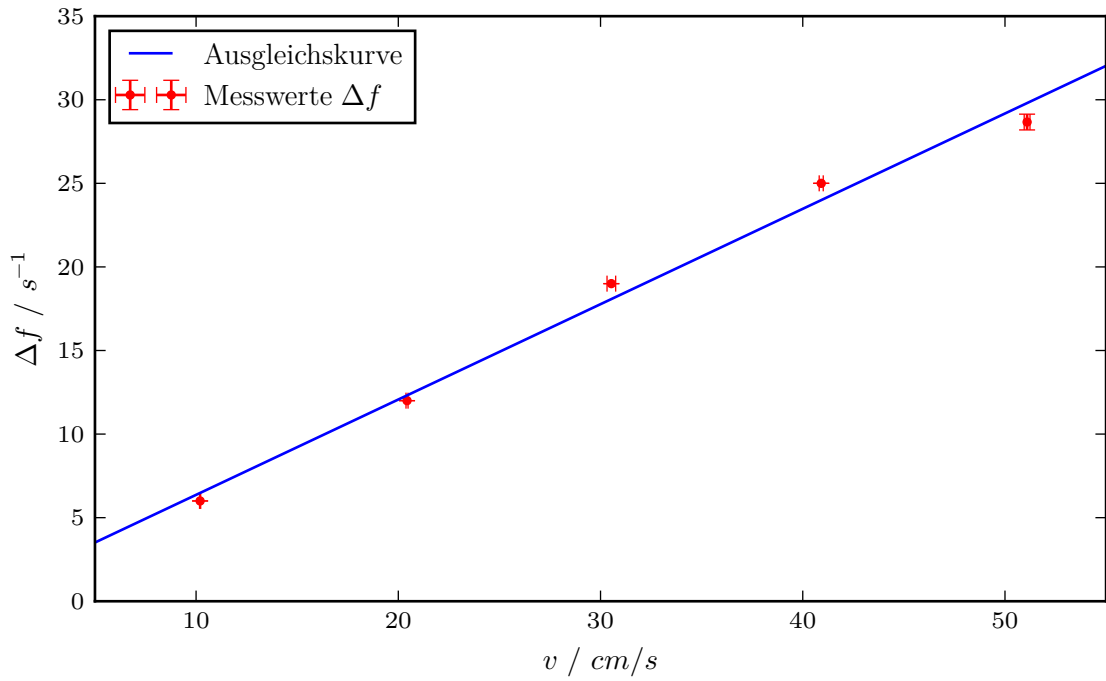
$$c = (0.57 \pm 0.03) \text{ cm}^{-1},$$

$$b = (1 \pm 1) \text{ s}^{-1}.$$

Der Parameter  $c$  entspricht wiederum laut Formel 7 näherungsweise  $\frac{\nu_0}{c}$ . Die dargestellten Werte mit Ausgleichsgerade sind in Abbildung 6 dargestellt.

**Tabelle 3:** Frequenzdifferenzen durch Doppler-Effekt mithilfe der Schwebungsmethode.

$v[\text{cm s}^{-1}]$	$\Delta v[\text{cm s}^{-1}]$	$\nu_{\text{diff}}[\text{Hz}]$	$\Delta\nu_{\text{diff}}[\text{Hz}]$
51.09	0.14	28.67	0.47
40.91	0.10	25.00	0
30.53	0.21	19.00	0
20.431	0.051	12.00	0
10.199	0.028	6.00	0



**Abbildung 6:** Frequenzdifferenz in Abhängigkeit der Relativgeschwindigkeit aus Schwebungsmethode.

## 4 Diskussion

Zunächst soll der nominelle Unterschied der Formeln 7 und 10, also der Relativbewegung vom Empfänger zum Sender bzw. umgekehrt betrachtet werden. Betrachtet man die Ruhfrequenz

$$\nu_0 = (20\,741.40 \pm 0.06) \text{ s}^{-1},$$

die der Literatur [2] entnommene Schallgeschwindigkeit bei Raumtemperatur

$$c = 342.2 \text{ m s}^{-1}$$

sowie die maximale Wagengeschwindigkeit  $v_{\max}$ , so ergibt sich ein sehr kleine Abweichung der beiden Formeln von

$$\Delta nu = 0.05 \text{ s}^{-1}.$$

Dementsprechend kann der Unterschied beider Formeln vernachlässigt und für beide Fälle einen linearen Zusammenhang annehmen.

Wird der experimentell bestimmte Wert der Schallgeschwindigkeit von

$$c = (361.8 \pm 12.9) \text{ m s}^{-1}$$

mit dem oben genannten Literaturwert, so ergibt sich eine Abweichung von

$$\Delta c = 5.43 \text{ \%}.$$

Der Literaturwert befindet sich jedoch nicht im Fehlerintervall.

Mithilfe der beiden Plots kann ein linearer Zusammenhang zwischen der Relativgeschwindigkeit und der Frequenzdifferenz bestätigt werden. Der in Kapitel 3.4 mittels linearer Regression berechnete Wert von

$$\frac{\nu_0}{c} = (0.607 \pm 0.005) \text{ cm}^{-1}$$

entspricht dem aus Formel 7 bestimmten Theoriewert

$$\frac{\nu_0}{c} = 60.611 \text{ m s}^{-1}.$$

Zusammen mit der zuvor bestimmten Ruhfrequenz folgt hier eine Schallgeschwindigkeit von

$$c = (341.7 \pm 2.9) \text{ m s}^{-1}.$$

Diese weist eine Abweichung zum Literaturwert von

$$\Delta c = 0.43 \text{ \%}$$

auf.

Der mittels Schwebungsmethode gemessene Wert von

$$\frac{\nu_0}{c} = (0.57 \pm 0.03) \text{ cm}^{-1}$$

weicht zwar stärker von dem Theoriewert ab, jener liegt dennoch weiterhin im Fehlerintervall. Aus diesem Wert lässt sich wiederum die Schallgeschwindigkeit zu

$$c = (364 \pm 21) \text{ m s}^{-1}$$

ableiten, die Abweichung zum Literaturwert beträgt

$$\Delta c = 5.97 \text{ \%}.$$

Die hier vorhandene stärkere Abweichung lässt sich damit erklären, dass bei dieser Messung weniger Messwerte aufgenommen werden konnten.

## 5 Anhang

V104

Geschwindigkeit:  $s = 43.8 \text{ cm} \pm 0.1 \text{ cm}$

$U/\text{mm}$	$t/\text{ms}$	$t/\text{ms}$	$t/\text{ms}$
6	47106	85647	85844
12	44217	42900	42940
18	42197	28579	28625
24	40692	21393	21391
30	3466	17130	17131
36	8546	14251	14265
42	/	12185	12239
48	/	10652	10689
54	/	9488	9446
60	/	8517	8500
6	85975	85958	86015
12	42816	42857	42862
18	29066	28578	28595
24	21410	21421	21441
30	17109	17173	17182
36	14275	14245	14269
42	12198	12229	12209
48	10644	10644	10662
54	9469	9464	9481
60	8498	8523	8543

Abbildung 7: Originaldaten Teil 1.

Rechfrequenz: $t = 10s$						
Frequenz: $207$						
Zahl der Schreibungen:						
	207	414		207	415	
	207	046		207	414	
	207	151				
	207	414				
	207	413				
[rückwärts]						
	$U_{\text{max}}$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
6:	20739	20739	20738	20739	20739	
12:	20736	20736	20735	20736	20735	
18:	20733	20733	20733	20732	20733	
24:	20730	20729	20730	20729	20730	
30:	20727	20727	20726	20726	20726	
36:	20724	20723	20724	20724	20724	
42:	20721	20720	20713	20721	20720	
[vorwärts]						
	$U_{\text{max}}$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
6:	20745	20745	20745	20745	20745	
12:	20748	20748	20748	20748	20748	
18:	20751	20752	20751	20751	20751	
24:	20754	20754	20754	20754	20754	
30:	20758	20757	20757	20757	20757	
36:	20761	20760	20760	20761	20760	
42:						

Abbildung 8: Originaldaten Teil 2.

$d_{\text{mm}}$	[Fuknals]		[Schwingsmessung]	
$U/m$	$\Delta t_1$	$d_2$	$d_3$	
6	6	6	6	
12	12	12	12	
18	19	19	19	
24	25	25	25	
30	29	28	29	

Messung der Schwinggeschwindigkeit:

<del>0,34 mm</del>	↗ 0,034 mm
<del>0,905 mm</del>	↗ 0,909 cm
<del>1,857 mm</del>	↗ 1,858 cm
↗	↗ 7,694 cm
	↗ 3,528 cm
	↗ 4,393 cm

**AF.**  
 05.01.

Abbildung 9: Originaldaten Teil 3.



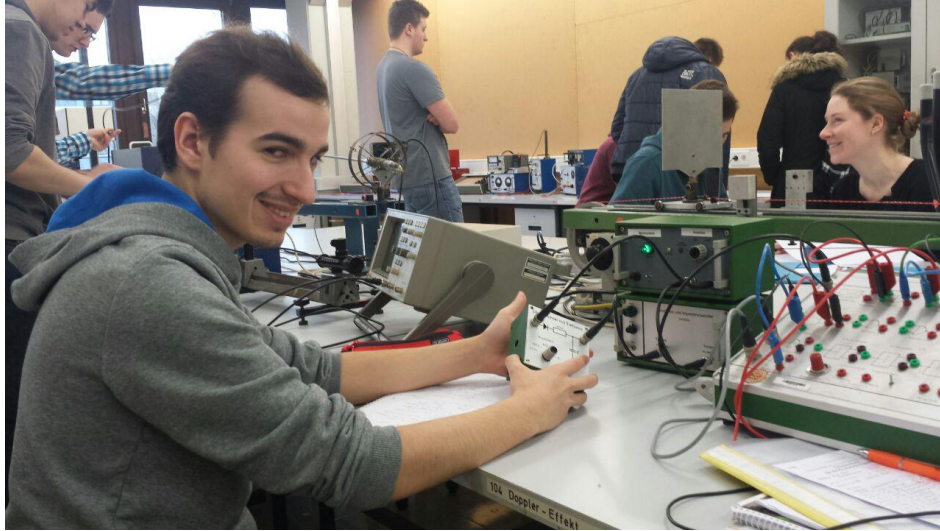


Abbildung 10: Dokumentation der Versuchsdurchführung.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung, Versuch Nr. 104*. 2015. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V104.pdf>.
- [2] D.C. Giancoli. *Physik: Lehr- und Übungsbuch*. 2010. URL: <https://books.google.de/books?id=b1If3HCpDy8C>.