

Versuchsprotokoll zum Versuch Nr. 204

## **Wärmeleitung von Metallen**

Johannes Kollek	Jean-Marco Alameddine
johannes.kollek@udo.edu	jean-marco.alameddine@udo.edu

Durchführung: 23.01.2016

TU Dortmund – Fakultät Physik

# 1 Zielsetzung

Im Folgenden Experiment wird das Phänomen der Wärmeleitung anhand von mehreren Metallen betrachtet. Dabei soll der zeitliche Temperaturverlauf sowie das Verhalten unter einer periodischen Anregung betrachtet werden. Zudem wird die Wärmeleitfähigkeit mithilfe der Angström-Methode für Aluminium, Messing sowie Edelstahl bestimmt.

## 2 Theorie

### 2.1 Herleitung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung

Existiert an einem Material, beispielsweise einem Metall, eine Temperaturdifferenz zwischen zwei Orten, so findet erfahrungsgemäß ein Temperatúrausgleich statt. Dieser findet in einem Metall in Form der Wärmeleitung statt, bei der vornehmlich die frei beweglichen Elektronen die Wärme transportieren. Dementsprechend besitzen Metalle bekanntermaßen eine bessere Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  als Nicht-Metalle.

Für einen Stab, an dem eine Temperaturdifferenz anliegt, wird die in einer Zeit  $dt$  durch einen Querschnitt  $A$  fließende Wärmemenge  $dQ$  durch das Verhältnis

$$dQ = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial x} dt \quad (1)$$

beschrieben, wobei  $L$  die Länge des betrachteten Stabs beschreibt. Hieraus lässt sich die Wärmestromdichte  $j_w$  als

$$j_w = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2)$$

definieren.

Es wird außerdem die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho_q}{\partial t} + \nabla \vec{j}_w = 0, \quad (3)$$

betrachtet, wobei  $\rho_q$  die spezifische Wärmemenge  $\frac{dQ}{dV}$  pro Volumen bezeichnet. Die Definition der spezifischen Wärmekapazität

$$c = \frac{dQ}{m dT} \quad (4)$$

ergibt, zusammen mit der eindimensionalen Version der Kontinuitätsgleichung, die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (5)$$

Hier beschreibt  $\rho$  nun die Dichte des verwendeten Materials, so dass der Vorfaktor als Materialkonstante

$$\sigma_T = \frac{\kappa}{\rho c} \quad (6)$$

zusammengefasst werden kann. Dieser Wert wird auch als Temperaturleitfähigkeit bezeichnet und gibt Aufschluss darüber, mit welcher Geschwindigkeit ein Temperatúrausgleich stattfindet.

## 2.2 Anregen einer Temperaturwelle durch periodische Wärmeanregung

Das periodische Anregen des Körpers mit Wärme führt zu einer sich im Stab ausbreitenden Temperaturwelle

$$T(x, t) = T_{\max} \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x\right) \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x\right), \quad (7)$$

wobei die Kreisfrequenz

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (8)$$

von der gewählten Periodendauer der Anregung abhängt. Die entstehende Welle weist eine Phasengeschwindigkeit von

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{2\kappa\omega}{\rho c}} \quad (9)$$

auf, wobei die Wellenzahl  $k$  direkt der oben genannten Wellengleichung entnommen werden kann. Aus der Betrachtung der Dämpfung, also dem Amplitudenverhältnis  $A_1$  zu  $A_2$  an zwei verschiedenen Orten mit Abstand  $\Delta x$ , leitet sich die Wärmeleitfähigkeit

$$\kappa = \frac{\rho c (\Delta x)^2}{2\Delta t \ln \frac{A_1}{A_2}} \quad (10)$$

her. Hierbei beschreibt  $\Delta t$  die Zeit, in der die Welle den Abstand  $\Delta x$  zurücklegt.

## 2.3 Funktionsweise des Peltierelementes

Die periodische Anregung des Stabes wird mithilfe eines Peltierelementes durchgeführt. Dessen Funktionsweise basiert auf dem Peltier-Effekt, für den zwei Arten von Halbleitern mit unterschiedlichen Energieniveaus benötigt werden. Durch das alternierende Anordnen dieser Elemente und des Anlegen einer Spannung fließt ein Strom. Um in das jeweils nächste Leitungsband eintreten zu können, muss aufgrund der Energiedifferenzen der

Leitungsbänder ebendiese Energie aufgenommen oder abgegeben werden. Dies führt jeweils zu Abkühlung oder Erwärmung der Umgebung und kann somit zur Wärmung oder Kühlung genutzt werden. Die Umkehrung der Richtung des Wärmetransportes kann einfach durch Umpolung der Spannung erreicht werden.

### 3 Aufbau und Durchführung

#### 3.1 Aufbau

Gearbeitet wird mit einer Grundplatte wie sie in Abbildung 1 zu sehen ist.

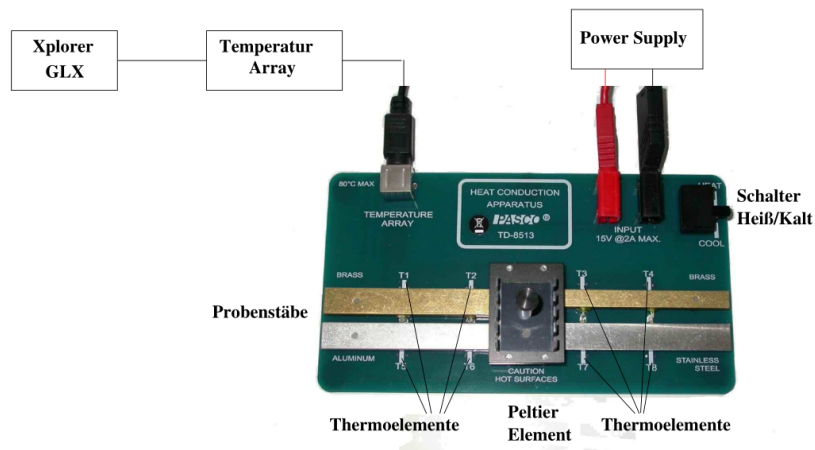


Abbildung 1: Versuchsaufbau zur Untersuchung von Wärmeleitung. [1]

Auf ihr befinden sich vier Probenstäbe, einer aus Aluminium, zwei aus Messing unterschiedlicher Ausdehnung und einer aus Edelstahl. Um diese zu heizen, werden sie einseitig an ein Peltier-Element angeschlossen. Dieses wird an eine Stromquelle angeschlossen. Das Peltier-Element kann bei eingeschalteter Stromquelle je nach Stromrichtung basierend auf dem Peltier-Effekt als Wärmequelle dienen oder der Umgebung Wärme entziehen. Mittels HEAT- und COOL-Kippschalter kann der gewünschte Effekt eingestellt werden. Auf den Probenstäben sind jeweils zwei im Abstand  $\Delta x$  platzierte Thermoelemente, welche alle mit einem Temperaturarray verbunden sind. Über den Xplorer GLX können die Temperaturdaten ausgelesen, geplottet und zum Drucken bereitgestellt werden. Während des Versuchs werden die Probenstäbe über Abdeckkörper aus Schaumstoff hinreichend thermisch isoliert.

## 3.2 Durchführung

### 3.2.1 Statische Methode

Zunächst werden die abgedeckten Probenstäbe über das Peltier-Element aufgeheizt, bis das Thermoelement T7 eine Temperatur von etwa  $T_7 \approx 45^\circ\text{C}$  erreicht. Während dieses Aufheizvorgangs werden alle Temperaturen vom Xplorer GLX aufgenommen. Über ihn werden die Temperaturen  $T_1$  und  $T_4$ , und  $T_5$  und  $T_8$  jeweils gegen die Zeit graphisch dargestellt. Ebenfalls werden die Temperaturdifferenzen  $T_7 - T_8$  und  $T_2 - T_1$  gegen die Zeit abgetragen. Diese Messreihe dient jedoch nur, um qualitative Aussagen über die Wärmeleitfähigkeit der Proben zu gewinnen. Für quantitative Ergebnisse wird das Angström-Verfahren verwendet.

### 3.2.2 Dynamische Methode: Das Angström-Verfahren

Hierzu werden die Probenstäbe, nachdem sie runtergekühlt worden sind, in einer Periode von  $T' = 80\text{ s}$  aufgeheizt und abgekühlt. Dies geschieht über mindestens zehn Perioden. Die Temperaturverläufe des breiten Messingstabes ( $T_1, T_2$ ) und des Aluminiumstabes ( $T_5, T_6$ ) werden nun gegen die Zeit aufgetragen und ausgedruckt. Nach erneutem Kühlen der Proben wird dieses Verfahren mit einer Periode von  $T' = 200\text{ s}$  wiederholt. Diesmal wird der Temperaturverlauf des Edelstahlstabes ( $T_7, T_8$ ) geplottet. Aus diesen Daten kann auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit und somit auf die Wärmeleitfähigkeit der Proben geschlossen werden.

## 4 Auswertung

Die Materialeigenschaften der auf der Grundplatte verbauten Stäbe werden der Versuchsdurchführung entnommen und in Tabelle 1 angegeben.

**Tabelle 1:** Materialeigenschaften der Grundplatte. [1]

Material	$l / \text{cm}$	$b / \text{cm}$	$h / \text{cm}$	$\rho / \text{kg m}^{-3}$	$c / \text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
Messing	9	1.2	0.4	8520	385
Messing	9	0.9	0.4	8520	385
Aluminium	9	1.2	0.4	2800	830
Edelstahl	9	1.2	0.4	8000	400

Zunächst wird die erste Messung, wie in Kapitel 3.2.1 beschrieben, durchgeführt.

## 4.1 Qualitative Beschreibung des Temperaturverlaufes

In Abbildung 2 wird der zeitliche Verlauf für  $T_1$  und  $T_4$  dargestellt, in 3 der zeitliche Verlauf von  $T_5$  und  $T_8$ .

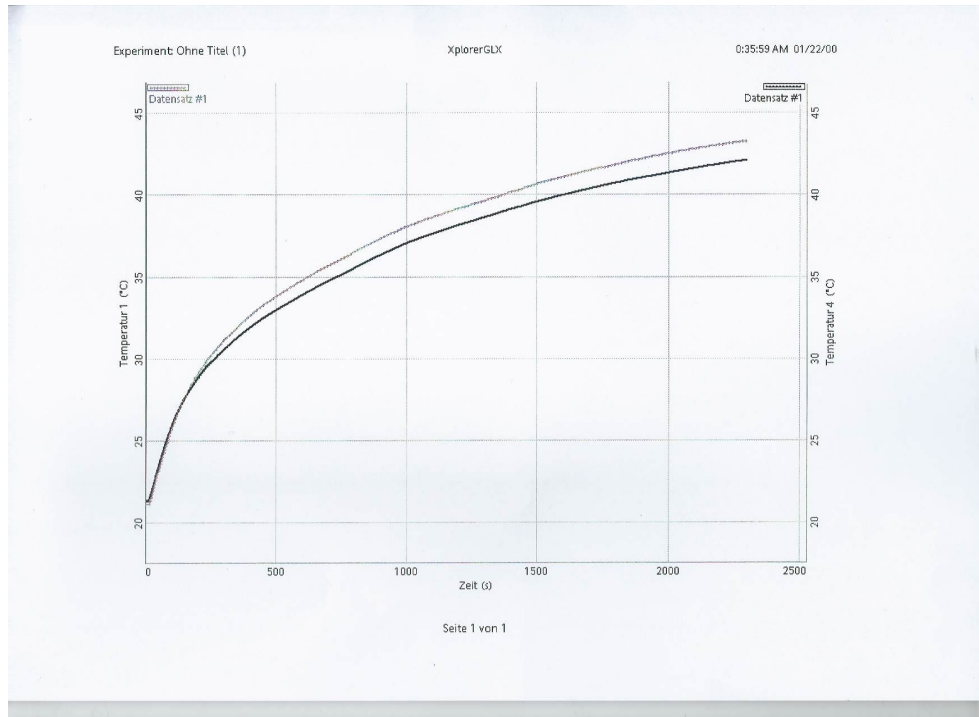
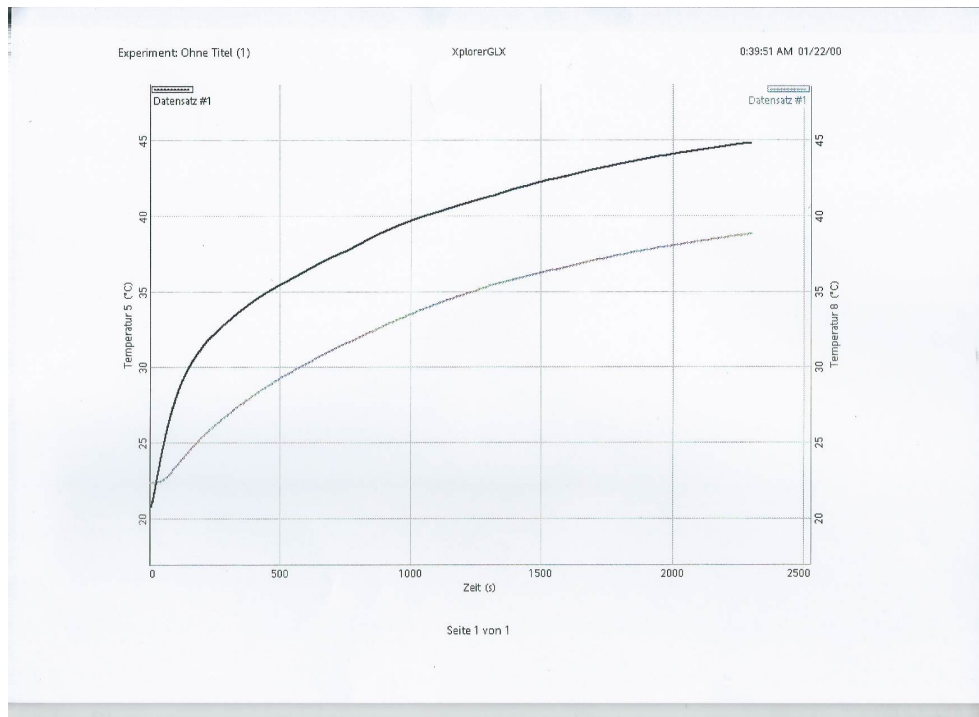


Abbildung 2: Zeitlicher Temperaturverlauf von  $T_1$  und  $T_4$ .



**Abbildung 3:** Zeitlicher Temperaturverlauf von  $T_5$  und  $T_8$ .

Für Abbildung 2 fällt auf, dass beide Graphen eine ähnliche Form aufweisen. Nach erst ca. 200 s bildet sich eine Temperaturdifferenz, die nach ungefähr 500 s konstant 1 K beträgt. Die Graphen wachsen bis zum Ende der Messung in einer identischen Form weiter. Diese Ähnlichkeiten lassen sich darauf zurückführen, dass es sich um das gleiche Material, nämlich Messing handelt. Die Unterschiede werden durch die verschiedenen Ausmaße verursacht.

Für Abbildung 3 fällt auf, dass der Graph von  $T_5$  eine zu Beginn stärkere Steigung aufweist als der Graph von  $T_8$ . Nach einiger Zeit stellt sich eine annähernd konstante Temperaturdifferenz von ca. 6 K ein, welche bis zum Ende der Messung bestehen bleibt. Grund hierfür ist, dass es sich beim ersten Material um Aluminium handelt, welches scheinbar eine bessere Wärmeleitfähigkeit als das andere Material, nämlich Edelstahl, besitzt.

Betrachtet man genauer die Temperaturen, welche für die verschiedenen Messpunkte nach 700 s auftreten, so erhält man

$$\begin{aligned} T_1 &= 35.70^\circ\text{C} \text{ (Messing)}, \\ T_4 &= 34.73^\circ\text{C} \text{ (Messing)}, \\ T_5 &= 37.26^\circ\text{C} \text{ (Aluminium)}, \\ T_8 &= 31.14^\circ\text{C} \text{ (Edelstahl)}. \end{aligned}$$

Diese Werte führen zu der Annahme, dass die beste Wärmeleitfähigkeit bei Aluminium

vorliegt, gefolgt von Messing, wobei hier die Wärmeleitfähigkeit von den Maßen abhängt. Die geringste Wärmeleitfähigkeit kann dem Edelstahl zugeordnet werden.

## 4.2 Bestimmung des Wärmestroms

Der Wärmestrom, der zu einem bestimmten Zeitpunkt fließt, kann nach Gleichung 1 berechnet werden. Es werden dafür die Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$ , also von Messing betrachtet. Die Temperaturdifferenzen können der Abbildung 4 entnommen werden, die weiteren Größen sind

$$\begin{aligned}\Delta x &= 0.03\text{m} \\ A &= 0.00005\text{m}^2 \\ \kappa_{\text{Messing}} &= 120\text{W m}^{-1}\text{K}^{-1}\end{aligned}$$

wobei  $\Delta x$ , der Abstand der Messstellen, am Aufbau abgelesen wird, der Querschnitt  $A$  aus Tabelle 1 errechnet und  $\kappa_{\text{Messing}}$  der Literatur entnommen wird. Es ergeben sich somit die in Tabelle 2 angegebenen Wärmeströme für die jeweiligen Messzeiten.

**Tabelle 2:** Wärmeströme für Messing.

$t / \text{s}$	$\frac{\Delta Q}{\Delta t} / \text{W}$
10	-0.06
50	-0.56
200	-0.42
300	-0.36
500	-0.32

Zuletzt werden die Temperaturdifferenzen zwischen dem Ende sowie dem Anfang des Stabes gegen die Zeit abgetragen. Es ergibt sich für Messing der in Abbildung 4 dargestellte Graph, für Edelstahl der in Abbildung 5 dargestellte Graph.



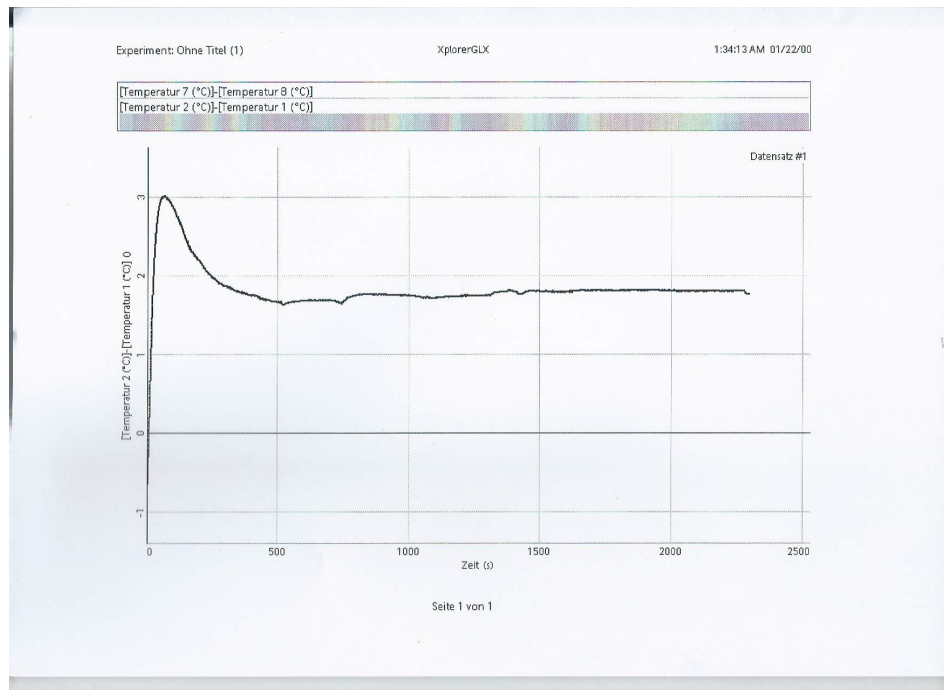


Abbildung 4: Zeitlicher Verlauf der Temperaturdifferenz von  $T_2$  zu  $T_1$ .

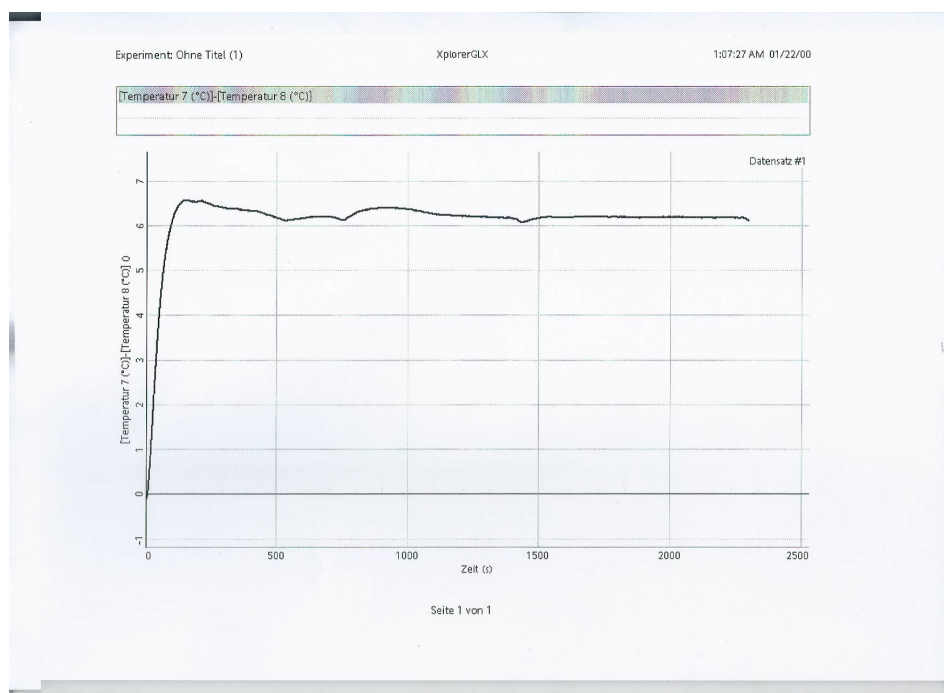


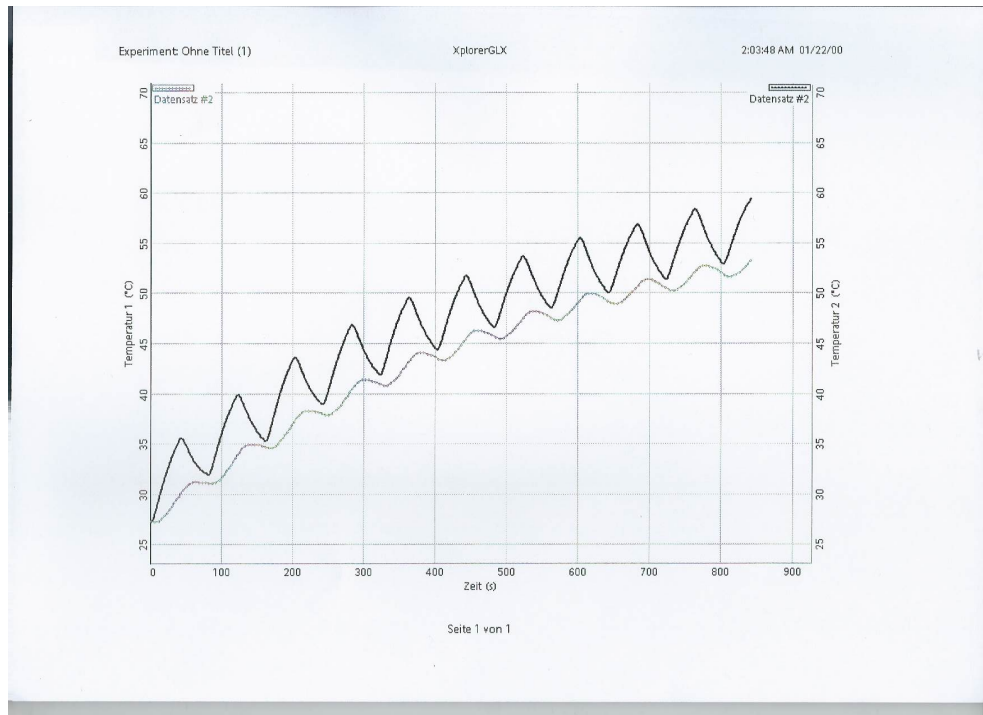
Abbildung 5: Zeitlicher Verlauf der Temperaturdifferenz von  $T_7$  zu  $T_8$ .

Beide Graphen zeigen zu Beginn eine Temperaturdifferenz von 0 K auf, welche innerhalb der nächsten ca. 100 s bis auf 6.5 K für Edelstahl bzw. 3 K Kelvin für Messing ansteigt. Beim Messing ist hier ein starker Peak zu betrachten, im weiteren Verlauf sinkt die Temperaturdifferenz wieder auf ein bis zum Ende der Messung konstantes Niveau von ca. 1.7 K ab. Im Gegensatz dazu befindet sich beim Edelstahl nach Erreichen des Peaks kein drastischer Abfall der Temperaturdifferenz, die Temperaturdifferenz nimmt nur leicht ab und bleibt auf einer konstanten Temperatur von ca. 6.3 K. Dieses Verhalten ist ein Indiz für die bessere Wärmeleitfähigkeit von Messing, da sich hier ein besserer Temperatursausgleich bei gleicher Erwärmung einstellt.

## 4.3 Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit mittels Angström-Messverfahren

### 4.3.1 Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit für Messing

Es wird eine Messung mittels dynamischer Methode, wie in Kapitel 3.2.2 beschrieben, durchgeführt. Für die Messung ergibt sich der in Abbildung 6 dargestellte Graph.



**Abbildung 6:** Zeitlicher Verlauf der Temperaturen für  $T_1$  und  $T_2$  bei periodischer Erwärmung nach der Angström-Methode.

Aus diesem Graphen können die Amplituden sowie zeitlichen Lagen der Maxima bestimmt werden. Die Amplituden werden hierbei bestimmt, indem die Amplitudendifferenz von

einem Maximum und seinem jeweiligen zugehörigen Minimum genommen und halbiert wird. Die Werte sind in Tabelle 3 angegeben.

**Tabelle 3:** Maxima der Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$ .

$A_1$ / K	$A_2$ / K	$t_1$ / s	$t_2$ / s
4.20	2.00	44	62
3.40	1.95	123	146
4.15	1.85	205	223
3.95	1.75	238	297
3.85	1.60	326	383
3.55	1.60	444	460
3.45	1.35	523	539
3.55	1.40	605	618
3.35	1.15	683	697
3.50	1.30	739	778

Nach Formel (10) wird hieraus für jede Amplitude die Wärmeleitfähigkeit bestimmt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 4 dargestellt.

**Tabelle 4:** Einzelne Ergebnisse der Wärmeleitfähigkeit für Messing.

$\kappa_{\text{Messing}} / \text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$
110.53
115.44
101.50
30.73
29.49
115.76
98.33
122.03
98.61
38.22

Diese Werte werden nun gemittelt, wobei sich der Mittelwert nach

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (11)$$

und die Standardabweichung nach

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (12)$$

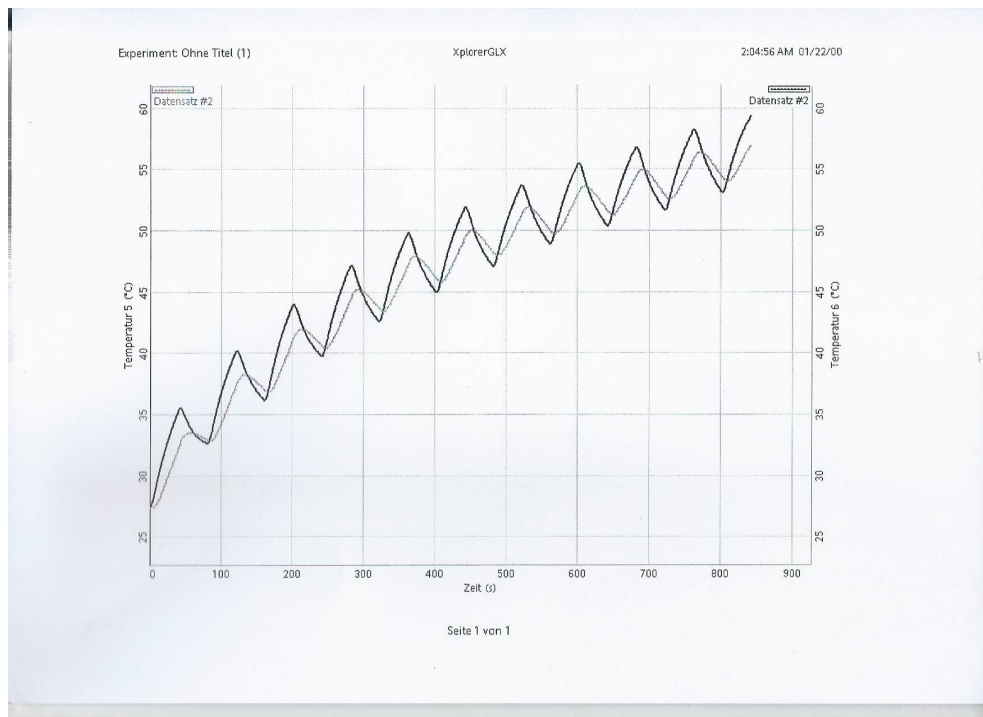
berechnet.

Hieraus folgt eine mittlere Wärmeleitfähigkeit von

$$\kappa_{\text{Messing}} = (86 \pm 36) \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

#### 4.3.2 Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit für Aluminium

Ein analoges Vorgehen wird nun für Aluminium durchgeführt. Der bei dieser Messung entstandene Graph ist in Abbildung 7 dargestellt.



**Abbildung 7:** Zeitlicher Verlauf der Temperaturen für  $T_5$  und  $T_6$  bei periodischer Erwärmung nach der Angström-Methode.

Für diesen Graphen werden die Amplituden sowie die zeitliche Lage der Amplituden zu der in Tabelle 5 angegebenen Werte bestimmt. Hieraus ergeben sich die in 6 angeführten Werte für die Wärmeleitfähigkeit von Aluminium. Gemittelt ergibt sich eine Wärmeleitfähigkeit von

$$\kappa_{\text{Aluminium}} = (216 \pm 75) \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

**Tabelle 5:** Maxima der Temperaturen  $T_5$  und  $T_6$ .

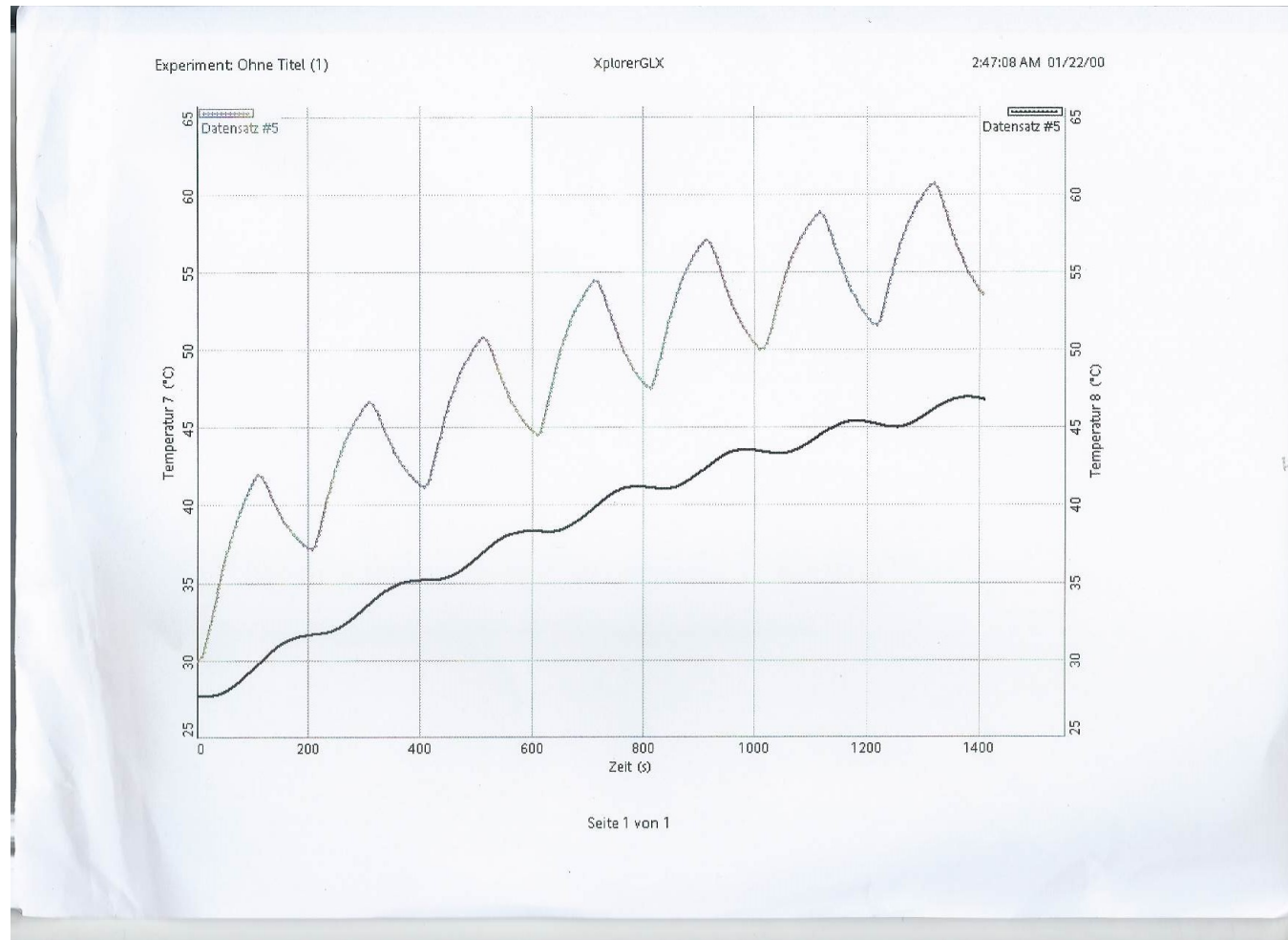
$A_5 / \text{K}$	$A_6 / \text{K}$	$t_5 / \text{s}$	$t_6 / \text{s}$
4.10	3.10	41	55
3.65	2.50	123	132
3.80	2.50	202	212
3.70	2.45	285	292
3.40	2.00	362	374
3.40	2.05	441	451
3.10	1.80	518	530
5.55	1.90	604	609
8.10	1.80	683	689
8.10	2.60	762	769

**Tabelle 6:** Einzelne Ergebnisse der Wärmeleitfähigkeit für Aluminium.

$\kappa_{\text{Aluminium}} / \text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$
267.18
307.05
249.77
362.41
164.24
206.71
160.32
195.12
115.88
131.47

### 4.3.3 Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit für Edelstahl

Als letztes soll die Wärmeleitfähigkeit für Edelstahl bestimmt werden, wobei in diesem Fall eine veränderte Periodendauer der periodischen Erwärmung verwendet wird. Der Graphen für die Temperaturen an den Messtellen zeigt Abbildung 8



**Abbildung 8:** Zeitlicher Verlauf der Temperaturen für  $T_7$  und  $T_8$  bei periodischer Erwärmung nach der Angström-Methode.

Hier werden die Amplituden zu den in Tabelle 7 angegebenen Messwerten abgelesen. Hieraus ergeben sich die in Tabelle 8 angegebenen Werte für die Wärmeleitfähigkeit. Somit kann auf einen gemittelten Wert von

$$\kappa_{\text{Edelstahl}} = (5.5 \pm 1.5) \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

**Tabelle 7:** Maxima der Temperaturen  $T_7$  und  $T_8$ .

$A_7 / \text{K}$	$A_8 / \text{K}$	$t_7 / \text{s}$	$t_8 / \text{s}$
6.00	0.15	112	200
4.70	0.05	312	400
4.85	0.10	512	596
4.95	0.15	716	788
5.70	0.10	916	984
4.80	0.15	1120	1180
4.60	0.25	1320	1380

**Tabelle 8:** Einzelne Ergebnisse der Wärmeleitfähigkeit für Edelstahl.

$\kappa_{\text{Edelstahl}} / \text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$
4.44
3.60
4.42
5.72
5.24
6.92
8.24

geschlossen werden.

## 5 Diskussion

Die qualitativen Ergebnisse der Wärmeleitfähigkeit stimmen bei der statischen Methode mit den Erwartungen überein. Bei der Angström Methode ergeben sich jedoch starke Abweichungen in den Ergebnissen der einzelnen Messungen, welche sich in einem dementsprechend hohen Fehler spiegeln. Die ermittelten Messwerte betragen

$$\begin{aligned}\kappa_{\text{Messing}} &= (86 \pm 36) \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1} \\ \kappa_{\text{Aluminium}} &= (216 \pm 75) \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}, \\ \kappa_{\text{Edelstahl}} &= (5.5 \pm 1.5) \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}.\end{aligned}$$

Im Vergleich hierzu können Literaturwerte von

$$\begin{aligned}\kappa_{\text{Messing, lit}} &= 120 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}, \\ \kappa_{\text{Aluminium, lit}} &= 236 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}, \\ \kappa_{\text{Edelstahl, lit}} &= 15 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1},\end{aligned}$$

gefunden werden. Die Abweichungen der jeweiligen Messerte zu den Theoriewerten betragen folgendermaßen

$$\begin{aligned}\Delta\kappa_{\text{Messing}} &= 28\% \\ \Delta\kappa_{\text{Aluminium}} &= 8\%, \\ \Delta\kappa_{\text{Edelstahl}} &= 63\%.\end{aligned}$$

Das Ablesen der Maxima und Minima stellte sich als problematisch dar: Da die Messwerte für die dynmischen Messungen nicht abgelesen werden konnten, mussten diese manuell anhand vom Graphen bestimmt werden. Dies führt zu merklichen Defiziten bei der Genauigkeit der Daten. Zudem hat es sich bei der Messung für Edelstahl als schwierig erwiesen, die Amplituden für die Temperaturen von  $T_g$  bei der Edelstahlmessung zu bestimmen, da es sich annähernd um stationäre Stellen handelt, so dass das Bestimmen einer Amplitude nicht genau möglich war.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *V204: Wärmeleitung von Metallen*. 2015. URL: <http://129.217.224.2/HOME/PAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/Waermeleitf.pdf>.