

Versuchsprotokoll zum Versuch Nr. 402

Dispersionsmessungen am Glasprisma

Johannes Kollek	Jean-Marco Alameddine
johannes.kollek@udo.edu	jean-marco.alameddine@udo.edu

Durchführung: 07.06.2016

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
2	Fehlerrechnung	5
3	Aufbau und Durchführung	6
3.1	Aufbau	6
3.2	Durchführung	7
3.3	Bestimmung des Winkels der Prismaecke	7
3.4	Bestimmung des Brechwinkels der Spektrallinien	7
4	Auswertung	8
4.1	Bestimmung des Winkels der Prismaecke	8
4.2	Bestimmung der Brechungsindices	8
4.3	Zuordnung einer Dispersionskurve	8
4.4	Bestimmung der Abbeschen Zahl	9
4.5	Bestimmung des Auflösungsvermögen des Prismas	10
4.6	Bestimmung einer Absorptionsstelle	11
5	Diskussion	12
	Literatur	13
6	Messdaten	14

1 Theorie

Als Dispersion wird in der Optik die Abhängigkeit des Brechungsindex n von der Wellenlänge des Lichts bezeichnet. Dabei ist der Brechungsindex definiert als

$$n = \frac{v_1}{v_2}, \quad (1)$$

also als Quotient der Ausbreitungsgeschwindigkeiten in zwei angrenzenden Medien. Das Verhalten eines Lichtstrahles an einer solchen Grenzfläche kann unter Verwendung des Huygenschen Prinzips beschrieben werden. Dieses besagt, dass von jedem Punkt einer Wellenfront eine neue, kugelförmige Welle ausgeht. Aus elementargeometrischen Überlegungen folgt hieraus, dass das Snelliussche Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = n \quad (2)$$

gilt. Hierbei beschreibt α den Winkel zwischen dem Lot der Grenzfläche und dem einfallenden Strahl sowie β den Winkel zwischen dem Lot der Grenzfläche und dem transmittierten Strahl. Zudem beschreiben v_1 und v_2 die dort vorhandenen Ausbreitungsgeschwindigkeiten.

Im Allgemeinen ist der Brechungsindex $n(\lambda)$ jedoch, wie oben bereits erwähnt, eine komplexe, von der Wellenlänge abhängige Größe. Um diesen Zusammenhang herzuleiten, wird die Wechselwirkung zwischen dem elektrischen Feld des Lichts und den Ladungen in der Materie betrachtet. Sie wird durch eine lineare, nicht homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung beschrieben, bei der die Kraft des E-Feldes auf die Ladungen, eine lineare rücktreibende Kraft ($\propto a_h$) durch die Auslenkung aus der Ruhelage sowie ein geschwindigkeitsabhängiger Reibungsterm ($\propto f_h$) berücksichtigt werden. Die Lösung dieser Differentialgleichung ergibt für die Polarisation \vec{P}_h den Ausdruck

$$\vec{P}_h = \frac{1}{\omega_h^2 - \omega^2 + i \frac{f_h}{m_h} \omega} \frac{N_h q_h^2}{m_h} \vec{E}_0 \exp(i\omega t) \quad (3)$$

beschrieben. Dabei steht m_h für die Teilchenmasse, q_h für die Teilchenladung, N_h für die Teilchenanzahl pro Volumeneinheit und $\omega_h^2 = \frac{a_h}{m_h}$ für die Resonanzfrequenz des Systems. Unter Verwendung des Zusammenhangs

$$\vec{P} = (\epsilon - 1)\epsilon_0 \vec{E} \quad (4)$$

mit der Dielektrizitätszahl ϵ sowie der Maxwellschen Relation

$$n^2 = \epsilon \quad (5)$$

kann der im Allgemeinen komplexe Ausdruck \tilde{n} erhalten werden. Dessen Imaginärteil beschreibt die Dämpfung des Lichts, welche jedoch für den hier betrachteten Bereich außerhalb der Resonanzfrequenz vernachlässigt werden kann. In diesem Fall vereinfacht sich der Realteil von \tilde{n} , welcher den oben beschriebenen geometrischen Zusammenhang beschreibt, zu

$$n^2(\lambda) = 1 + \sum \frac{N_h q_h^2}{4\pi^2 c^2 \epsilon_0 m_h} \frac{\lambda^2 \lambda_h^2}{\lambda^2 - \lambda_h^2}. \quad (6)$$

Unter der Annahme, dass nur eine Absorptionsstelle λ_1 existiert, kann nun zwischen zwei Fällen unterschieden werden: Bei der Betrachtung von Wellenlängen $\lambda \gg \lambda_1$ kann die Dispersionsrelation als Darstellung

$$n^2(\lambda) = A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2} + \frac{A_4}{\lambda^4} + \dots \quad (7)$$

entwickelt werden. Diese Entwicklung entspricht einer positiven Krümmung der Dispersionskurve, das heißt einer Linkskrümmung. Im anderen Fall, also $\lambda \ll \lambda_1$, kann die Entwicklung der Dispersionsrelation als

$$n^2(\lambda) = 1 - A_2\lambda^2 - A_4\lambda^4 - \dots \quad (8)$$

geschrieben werden. Hier wird also von einer negativen Krümmung, also einer nach rechts gekrümmten Dispersionskurve ausgegangen.

2 Fehlerrechnung

Im folgenden Kapitel werden die wichtigsten Formeln der Fehlerrechnung aufgelistet, welche für die folgende Versuchsauswertung benötigt werden. Der Mittelwert berechnet sich zu

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (9)$$

Der Fehler des Mittelwertes berechnet sich zu

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} . \quad (10)$$

Die Schätzung der Standardabweichung berechnet sich zu

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} . \quad (11)$$

Für die Fehlerrechnung wird bei allen folgenden Rechnungen das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n\right)^2} \quad (12)$$

für eine Funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, bei der die Größen x_1, x_2, \dots, x_n voneinander unabhängig sind, verwendet.

Bei der linearen Regressionsrechnung gilt mit den Parametern m und b und der Ausgleichsgerade $y = mx + b$ der Zusammenhang:

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad b = \bar{y} - m\bar{x} . \quad (13)$$

Dabei sind x_i und y_i linear abhängige Messgrößen. Der Fehler dieser Parameter errechnet sich zudem zu

$$\sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)} \quad \sigma_b^2 = \frac{\sigma^2 \bar{x}^2}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)} \quad (14)$$

3 Aufbau und Durchführung

3.1 Aufbau

Zur Untersuchung des Brechungsindex in Abhängigkeit der Wellenlänge wird ein Prismen-Spektralapparat verwendet, wie er in Abbildung 1 dargestellt ist.

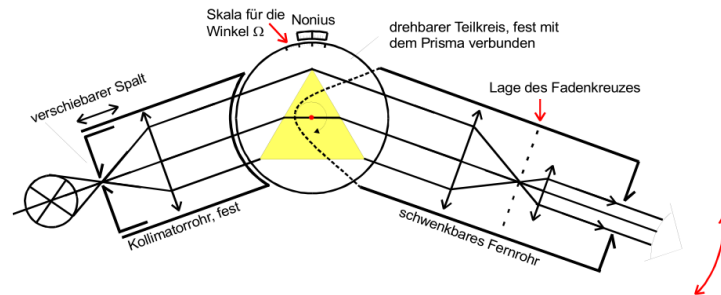


Abbildung 1: Darstellung des verwendeten Spektralapparates. [1]

Prinzipiell besteht dieser aus einem Glasprisma, welches sich im Zentrum eines zweiarmigen Goniometers befindet. Am Anfang des linken Armes, der im Versuch fest steht, befindet sich eine Quecksilber-Cadmium-Dampfampe. Das Lichtbündel passiert ein Spalt-/Linsensystem, sodass ein aufgeweiteter Strahl entsteht. Dieser wandert weiter auf das drehbare Mittelstück, auf dem sich das Prisma befindet. Es ist mit einer Winkelskala zusätzlich Nonius versehen. Das gebrochene Licht kann daraufhin mit dem zweiten schwenkbaren Arm aufgefangen werden. Durch ein Linsensystem mit eingebautem Fadenkreuz können somit die Spektrallinien angepeilt werden.

4 Auswertung

4.1 Bestimmung des Winkels der Prismaecke

Zunächst wird, wie in der Durchführung angegeben, der dort beschriebene Winkel ϕ ermittelt. Aus geometrischen Überlegungen ergibt sich dieser Winkel aus

$$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_l - \varphi_r) \quad (15)$$

wobei φ_l und φ_r die in Abbildung 2 dargestellten Winkel sind. Es werden die Werte

$$\begin{aligned}\varphi_l &= 345,9^\circ, \\ \varphi_r &= 237,5^\circ\end{aligned}$$

gemessen, woraus sich ein Winkel von

$$\varphi = 54,2^\circ$$

ergibt. Aufgrund der Kenntnis des realen Winkels wird im folgenden nicht mit dem gemessenen Wert, sondern mit einem Wert von $\varphi = 60^\circ$ weitergerechnet.

4.2 Bestimmung der Brechungsindices

Die Brechungsindices werden, wie in der Durchführung beschrieben, bestimmt. Zunächst wird dabei die Richtungsänderung η des Strahls berechnet, welche sich elementargeometrisch aus dem Wert

$$\eta = 180^\circ - (\Omega_l - \Omega_r) \quad (16)$$

ergibt. Hierbei beschreiben Ω_l und Ω_r die in der Durchführung erwähnten Winkel, die sich aus den beiden symmetrischen Messungen ergeben. Aus weiteren geometrischen Überlegungen sowie unter Verwendung von (2) bestimmt sich der Brechungsindex n zu

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\eta + \varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}. \quad (17)$$

Es ergeben sich für die Spektrallinien der verschiedenen Wellenlängen λ die in Tabelle 1 angegebenen Werte. Die Wellenlängen werden für Quecksilber dem Versuchsaufbau sowie für Cadmium der Literatur [2] entnommen.

4.3 Zuordnung einer Dispersionskurve

In der Theorie werden die beiden Möglichkeiten (7) und (8) als mögliche Entwicklungen einer Dispersionsrelation angegeben. Für beide Varianten wird die Summe der Abweichungsquadrate in 2. Ordnung zu

$$s_n^2 = \frac{1}{z-2} \sum (n^2 - A_0 - \frac{A_2}{\lambda_i^2})^2$$

Tabelle 1: Messdaten zur Bestimmung der Brechungsindices.

λ / nm	$\Omega_l / ^\circ$	$\Omega_r / ^\circ$	η / rad	n
643,8	117,6	351,0	-0932	1,672
579,1	117,3	351,2	-0941	1,676
546,1	117,1	351,3	-0946	1,679
508,6	116,7	351,8	-0962	1,688
480,0	116,5	352,1	-0970	1,692
467,8	116,4	352,3	-0976	1,695
435,8	115,9	352,7	-0991	1,703
404,7	115,3	353,2	-1011	1,713

für die erste Variante bzw. zu

$$s_{n'}^2 = \frac{1}{z-2} \sum (n^2 - A'_0 + A'_2 \lambda_i^2)^2$$

für die zweite Variante berechnet, wobei über die z Messwertpaare summiert wird. Diese Werte geben einen Anhaltspunkt für die Übereinstimmung der Messwerte mit dem Fit. Es ergeben sich Abweichungsquadrate von

$$s_n^2 = (0,7 \pm 2,2) \cdot 10^{-3},$$
$$s_{n'}^2 = 0,0299 \pm 0,0061.$$

Dementsprechend eignet sich die Dispersionsrelation mit einer positiven Krümmung besser für die vorliegenden Messdaten.

In 4. Ordnung werden mithilfe von SciPy in Python die Fitparameter für die Funktion (7) bestimmt. Es ergeben sich die Parameter

$$A_0 = 2,71 \pm 0,02,$$
$$A_2 = (2,98 \pm 0,78) \cdot 10^{-14} \text{ m}^2,$$
$$A_4 = (0,001\,13 \pm 0,000\,92) \cdot 10^{-27} \text{ m}^4,$$

sowie eine Fitfunktion, die zusammen mit den Messdaten in Abbildung 4 dargestellt ist.

4.4 Bestimmung der Abbeschen Zahl

Die abbesche Zahl ist definiert als

$$\nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}, \quad (18)$$

wobei n_i den Brechungsindex für die Wellenlänge der jeweiligen Fraunhofscher Linie [1] bezeichnet. Diese sind gegeben als

$$\lambda_C = 656 \text{ nm},$$
$$\lambda_D = 589 \text{ nm},$$
$$\lambda_F = 486 \text{ nm}.$$

Die Brechungsindices werden der Fitfunktion entnommen, so dass sich für das hier verwendete Glasprisma ein Wert von

$$\nu = 25 \pm 6$$

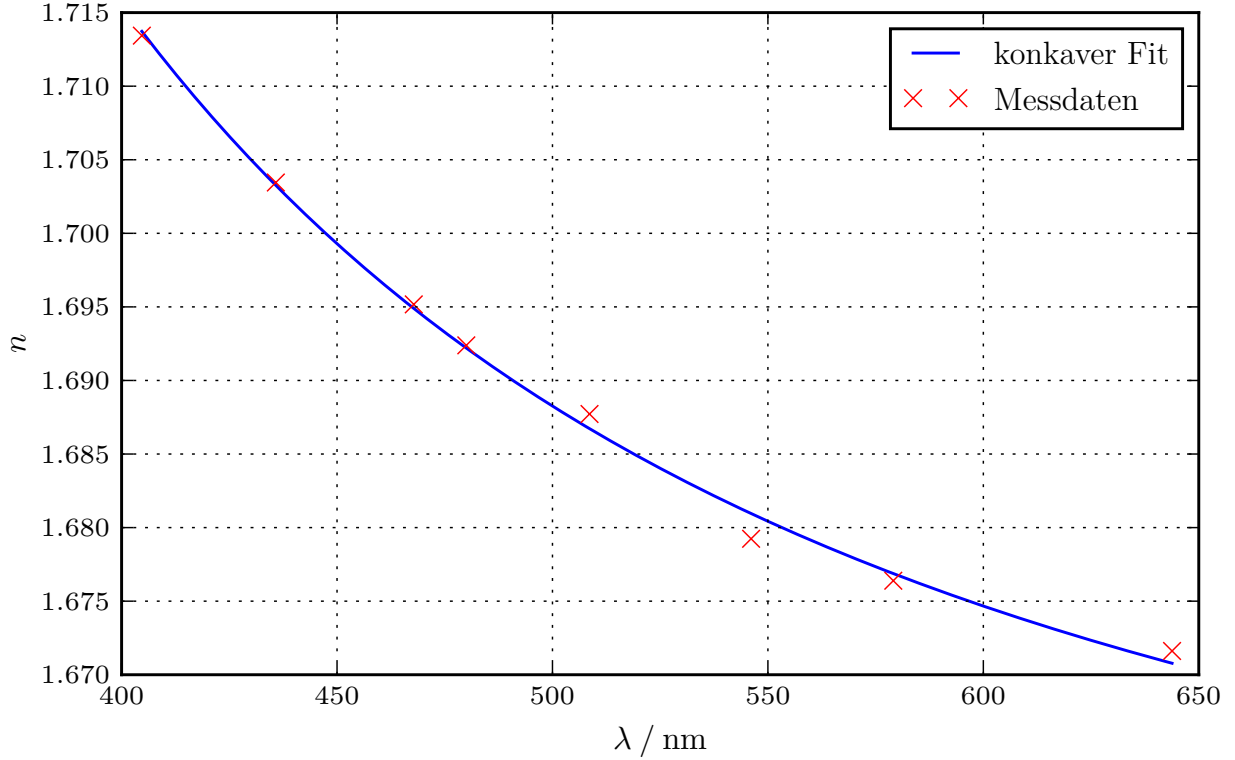


Abbildung 4: Fit einer konkaven Dispersionskurve in 4. Ordnung.

ergibt. Da die abbesche Zahl kleiner als 50 ist, handelt es sich beim Prisma um optisches Flintglas. Dieses ist durch einen hohen Brechungsindex gekennzeichnet und eignet sich dementsprechend gut zur Verwendung in Prismen.

4.5 Bestimmung des Auflösungsvermögens des Prismas

Das Auflösungsvermögen des Prismas ist definiert als

$$A = \frac{\bar{\lambda}}{\Delta\lambda}$$

mit dem Wellenlängenunterschied von zwei Spektrallinien $\Delta\lambda$ sowie der gemittelten Wellenlänge $\bar{\lambda}$. Das Auflösungsvermögen ist dementsprechend ein Maß dafür, bei welcher Differenz zweier Spektrallinien eine Unterteilung dieser mit dem benutzten Prisma möglich ist. Mithilfe der Betrachtung der Beugung an dem Prisma ist dies genau dann möglich, wenn das Hauptmaximum der Beugung der ersten Spektrallinie mindestens hinter dem ersten Minimum der zweiten Spektrallinie liegt. Aus geometrischen Überlegungen, Berücksichtigung der Interferenzeffekte sowie geometrischen Näherungen ergibt sich das Auflösungsvermögen aus

$$A = b \frac{dn}{d\lambda} \quad (19)$$

mit der Basisbreite b des Prismas. Diese wird hier als $b = 3$ cm angenommen. Aus der Ableitung der Fitfunktion (8) ergeben sich für die Wellenlängen der Fraunhoferlinien λ_C und λ_F die Auflösungsvermögen

$$\begin{aligned} A_C &= 2227 \pm 561, \\ A_F &= 6074 \pm 1668. \end{aligned}$$

4.6 Bestimmung einer Absorptionsstelle

Die Absorptionsstelle wird mit Hilfe von Gleichung (6) und den Parametern des Fits nach der Formel

$$\lambda_i = \sqrt{\frac{A_2}{A_0 - 1}} \quad (20)$$

auf einen Wert von

$$\lambda_i = (132 \pm 17) \text{ nm},$$

bestimmt.

5 Diskussion

Der bestimmte Wert für den Winkel des Prismas lautet

$$\varphi = 54,2^\circ.$$

Dieser könnte vom wahren Wert weit abweichen, da das verwendete Prisma angebrochene Kanten hat. Um Folgefehler zu vermeiden wurde für die darauffolgenden Rechnungen nicht der gemessene Wert, sondern der Wert $\varphi = 60^\circ$ verwendet.

Die Dispersionskurve wird nach der ersten Methode (7) mit einem geringen Fehler und den Parametern

$$\begin{aligned}A_0 &= 2,71 \pm 0,02, \\A_2 &= (2,98 \pm 0,78) \cdot 10^{-14} \text{ m}^2, \\A_4 &= (0,001\,13 \pm 0,000\,92) \cdot 10^{-27} \text{ m}^4\end{aligned}$$

angenähert.

Für die Abbesche Zahl ergibt sich ein Wert von

$$\nu = 25 \pm 6,$$

welcher auf Flintglas schließen lässt. Es wird gekennzeichnet mit der Eigenschaft einen hohen Brechungsindex zu haben.

Des Weiteren beträgt die Auflösung der beiden Fraunhoferlinien

$$\begin{aligned}A_C &= 2227 \pm 561, \\A_F &= 6074 \pm 1668.\end{aligned}$$

Die Absorptionslinie befindet sich laut Berechnung bei einer Wellenlänge von

$$\lambda_i = (132 \pm 17) \text{ nm}.$$

Da sie im UV-Bereich liegt, sollte sie richtig bestimmt worden sein. Jedoch handelt es sich hierbei nur um eine Näherung, durchgeführt mit gefitteten Parametern, welche auf einem kleinen Messintervall basieren. Daher sollte die Gültigkeit des Wertes nicht zu hoch eingeschätzt werden.

Literatur

- [1] TU Dortmund - Fachbereich Physik. *Anfängerpraktikum Anleitung zu Versuch Nr. 402*. 7. Juni 2016. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V402.pdf>.
- [2] National Institute of Standards und Technology. *Basic Atomic Spectroscopic Data*. 7. Juni 2016. URL: http://physics.nist.gov/PhysRefData/Handbook/Tables/cadmiumtable2_a.htm.

6 Messdaten

Q-Bühnen

	$\varphi_p = 345,9^\circ$	$\varphi_r = 237,5^\circ$	$\Rightarrow \varphi = 54,2^\circ$
	φ_p	φ_r	φ
(1660)	rot: $117,6^\circ$	351°	$-53,4$
(1575/577)	gelb: $117,3^\circ$	$351,2^\circ$	$-53,9$
(576,1)	grün: $117,1^\circ$	$351,3^\circ$	$-53,2$
(1575/577)	blau: $116,7^\circ$	$351,8^\circ$	$-53,1$
(1575/577)	schwarz: $116,5^\circ$	$352,1^\circ$	$-53,6$
(1575/577)	weiß: $116,4^\circ$	$352,3^\circ$	$-53,9$
(1575/577)	rot: $115,9^\circ$	$352,6^\circ$	$-56,4$
(1575/577)	gelb: $115,3^\circ$	$352,7^\circ$	$-53,2$
(1575/577)	grün: $115,3^\circ$	$352,7^\circ$	$-53,2$
(1575/577)	blau: $115,3^\circ$	$352,7^\circ$	$-53,2$
(1575/577)	schwarz: $115,3^\circ$	$352,7^\circ$	$-53,2$
(1575/577)	weiß: $115,3^\circ$	$352,7^\circ$	$-53,2$

FK

Abbildung 5: Originaldaten.