UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CURSO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO

JEAN ALVES ROCHA

TRABALHO DO PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

EXERCÍCIO DA DISCIPLINA DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

CORNÉLIO PROCÓPIO
2021

Exercício 1

1-Uma variável aleatória tem função densidade de probabilidade dada por:

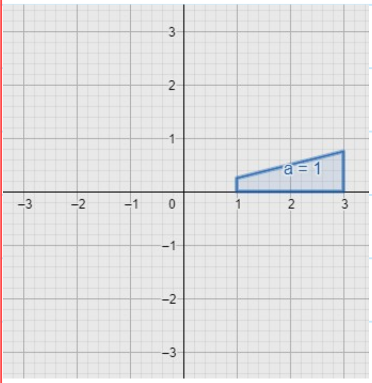
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x & \text{, se } 1 \leq x \leq 3; \\ 0 & \text{, c.c.} \end{cases}$$

a) Verifique se ela satisfaz as condições para ser uma função densidade;
b) Faça o gráfico da função;
c) Determine P(X>2) e P(0<X<3/2);

a) Condição é $\int_a^b f(x)\,dx = 1$

$$\int_1^3 \frac{x}{4}\,dx \rightsquigarrow \frac{x^2}{8}\Big|_1^3 \Rightarrow \frac{3^2}{8} - \frac{1^2}{8} = \boxed{1}$$

b)



c) $P(x>2)$ e $P(0 \leq x \leq 3/2)$

$$\frac{x^2}{8}\Big|_2^3 \Rightarrow \frac{3^2}{8} - \frac{2^2}{8} = \boxed{5/8}$$

$$\frac{x^2}{8}\Big|_1^{3/2} \Rightarrow \frac{1}{8}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1\right) = \boxed{\frac{5}{32}}$$

Exercício 2

2- Suponha que $f(x) = 0,5x - 1$ para $2 < x < 4$. Determine:

a) $P(X<2,5)$

b) $P(X>3)$

c) Determine a média e a variância;

(a)
$$\int_2^{5/2} 0,5x-1 \, dx \Rightarrow \frac{0,5x^2}{2} - x \Big|_2^{5/2} \Rightarrow \frac{1}{4}x^2 - x \Big|_2^{5/2}$$

$$\left[\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{5}{2}\right] - \left[\frac{1}{4}\cdot 2^2 - 2\right] = \boxed{0,0625}$$

(b)
$$\frac{1}{4}x^2 - x \Big|_3^4 \Rightarrow \left[\frac{4^2}{4} - 4\right] - \left[\frac{3^2}{4} - 3\right] = \boxed{0,75}$$

(c) μ e σ^2

$\mu = E(x)$

$$E(x) = \int_a^b x \cdot f(x) \, dx$$

$$E(x) = \int_2^4 x \cdot \left[\frac{1}{2}x - 1\right] dx \Rightarrow \int_2^4 \frac{x^2}{2} - x \, dx$$

$$\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} \Big|_2^4 \Rightarrow \left[\frac{4^3}{6} - \frac{4^2}{2}\right] - \left[\frac{2^3}{6} - \frac{2^2}{2}\right] = \boxed{\frac{10}{3}} \rightarrow E(x)$$

$\rightarrow$ média

$$\int_2^4 x^2 f(x) \, dx = E(x^2) \Rightarrow \int_2^4 \frac{x^3}{2} - x^2 \, dx$$

$$\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{3} \Big|_2^4 \Rightarrow \left[\frac{4^4}{8} - \frac{4^3}{3}\right] - \left[\frac{2^4}{8} - \frac{2^3}{3}\right] = \boxed{\frac{34}{3}} \; E(x^2)$$

$$VAR(x) = \frac{34}{3} - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \boxed{0,22}$$

Exercício 3

3- Suponha que a função densidade de probabilidade de X é:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{, se } 1 \leq x \leq 2; \\ 0 & \text{, c.c.} \end{cases}$$

a) Encontre o valor da constante c

b) Desenhe o gráfico da função densidade de probabilidade;

c) Determine a P (X > 3/2).

a

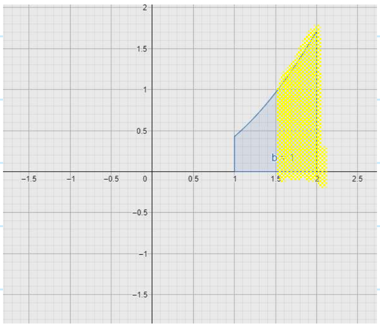
$$f(x) = c.x^2 \qquad 1 \leq x \leq 2$$

$$\int_a^b cx^2\,dx = 1$$

$$c\int_a^b x^2\,dx \rightsquigarrow c.\frac{x^3}{3}\Big|_1^2 \qquad \frac{2^3.c}{3} - \frac{c\,1^3}{3} = 1$$

$$\frac{8c}{3} - \frac{c}{3} = 1 \rightsquigarrow \frac{1}{3}.7c = 1 \Rightarrow \boxed{c = 3/7}$$

b



c $P(X > 3/2)$

$$\frac{3}{7}\int_{3/2}^{2} x^2 \rightsquigarrow \frac{3x^3}{21}\Big|_{3/2}^{2} \rightsquigarrow \frac{3 \times 2^3}{21} - \frac{3}{21}.\left(\frac{3}{2}\right)^3$$

$$P(X > 3/2) = \boxed{0{,}66}$$

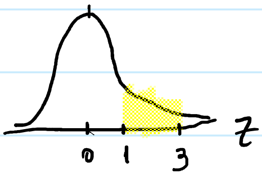
Exercício 4

4- Considere pacientes sofrendo de determinada doença e são submetidos a um tratamento intensivo cujo tempo de cura foi modelado por uma função de densidade de probabilidade normal, com média de 15 dias e desvio padrão de 2 dias. Qual é a proporção de doentes que demora mais do que 17 dias para se recuperar?

$\mu = 15$ dias

$\sigma = 2$ dias

$$\frac{x - \mu}{\sigma} = z$$



$$\frac{17 - 15}{2} = z \Rightarrow z = 1$$

$P(x > 17) = P(0 \leq z \leq 3) - P(0 \leq z \leq 1)$

$P(x > 17) = 0{,}4990 - 0{,}3413$

$P(x > 17) = \boxed{0{,}1577}$

Exercício 5

5- A largura de uma linha para a fabricação de semicondutores tem supostamente uma distribuição normal, com média de 0,6 micrômetro e um desvio padrão de 0,06.
a) Qual é a probabilidade da largura da linha ser maior que 0, 74 micrômetro?
b) Qual é a probabilidade da largura da linha estar entre 0, 61 e 0, 70 micrômetro?
c) Qual o valor da largura da linha, para uma probabilidade maior que 90%?

$\mu = 0,6$ $\qquad P(X > 0,74)$

$\sigma = 0,06$

$$Z = \frac{0,74 - 0,6}{0,06} = \frac{7}{3} \simeq 2,33$$

$$\frac{X - \mu}{\sigma} = Z$$

a) $P(X > 0,74) = P(0 \leq Z \leq 3) - P(0 \leq Z \leq 7/3)$

$P(X > 0,74) = 0,4990 - 0,4901$

$P(X > 0,74) = \boxed{0,0098}$

b) $P(0,61 \leq X \leq 0,70)$

$Z < 0$

$$Z = \frac{0,61 - 0,6}{0,06}$$

$Z = 0,17$

$Z > 1$

$$Z = \frac{0,7 - 0,6}{0,06}$$

$Z = 1,67$

$P(0,17 \leq Z \leq 1,67) = 0,0675 + 0,4525$

$P(0,17 \leq Z \leq 1,67) = \boxed{0,52}$

c) $x = ?$

$Z = 1,28$

$$1,28 = \frac{x - 0,6}{0,06} \Rightarrow x = \boxed{0,6768}$$

↳ Está no limite de 90%

x_{max}

$$3 = \frac{x - 0,6}{0,06} \qquad \boxed{x_{máx} = 0,78}$$

↳ máxima altura

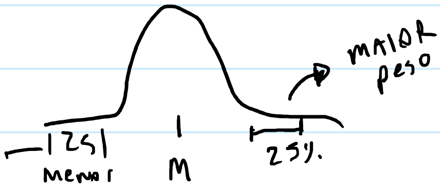
R = De 0,6768 a 0,78, que equivalem a respectivamente 90% e 100% maiores que 90%.

Exercício 6

6- Uma clínica de emagrecimento recebe pacientes adultos com peso seguindo uma distribuição normal com média de 130 kg e desvio padrão de 20kg. Para efeito de determinar o tratamento mais adequado, os 25% pacientes de menor peso são classificados como “sobrepeso”, enquanto os 25% de maior peso de “obesos”. Determine os valores que delimitam cada uma dessas classificações.

$\mu = 130 kg$

$\sigma = 20 kg$



→ 25%

Tabela → 0,2518 → $z = 0{,}68$

$$\frac{x - 130}{20} = -0{,}68 \qquad\qquad 0{,}68 = \frac{x - 130}{20}$$

$x = 143{,}6$ Kg

$x = 116{,}4$ Kg

6) Delimitadores para:Sobrepeso =116,6 e Obeso=143,40

Exercício 7

7- A durabilidade de um tipo de pneu é descrita por uma variável aleatória Normal de média 60.000 km e desvio padrão de 8.300 km. Considere as seguintes questões:

a) Se o fabricante garante os pneus pelos primeiros 48.000 km, qual a proporção de pneus que deverão ser trocados pela garantia?

b) O que aconteceria com a proporção do item (a), se a garantia fosse para os primeiros 45.000 km?

c)Qual deveria ser a garantia (em km) de tal forma a assegurar que o fabricante trocaria sob garantia no máximo 2% dos pneus?

$\mu = 60000$

$\sigma = 8300$

a

$$Z = \frac{48000 - 60000}{8300} = -1,45 \Rightarrow P(X = 48000) = 0,4265$$

$$P(X \leq 48000) = 0,5 - 0,4265 = \boxed{0,074}$$

b

$$Z = \frac{45000 - 60000}{8300} = -1,81 \Rightarrow P(X = 45000) =$$

$$P(X \leq 45000) = 0,5 - 0,4649 = \boxed{0,035}$$

c No máx 2%

$$Z = 2,06 \qquad Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$-2,06 = \frac{x - 60000}{8300} \Rightarrow \boxed{x = 42.902 \text{ Km}}$$

Esse é o mais próximo de até 2%, pois é o 0,4803 da tabela.

Exercício 8

8-Um plantação de leguminosas conta com um sistema automático de irrigação que auxilia o crescimento das plantas. A altura das plantas duas semanas depois de germinar é distribuída normalmente com uma média de 2,5 cm e um desvio padrão de 0,5 cm. Determine:

a) Qual é a probabilidade da altura da planta ser maior do que 2,25 cm?

b) Qual é a probabilidade da altura da planta estar entre 2,0 e 3,0 cm?

c) Que altura é excedida por 90% das plantas?

$\mu = 2,5$

$\sigma = 0,5$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \rightarrow z = \frac{2,25 - 2,5}{0,5}$$

$z = -0,5$

a)

$P(X \geq 2,25) = P(-0,5 \leq z \leq 3)$

$P(X \geq 2,25) = 0,5 + 0,1915$

$P(X \geq 2,25) = \boxed{0,6915}$

b) $X \in [2, 3]$

$z < 0$

$$z = \frac{2 - 2,5}{0,5}$$

$z = -1$

$z > 0$

$$z = \frac{3 - 2,5}{0,5}$$

$z = 1$

$P(-1 \leq z \leq 1) = 2 \times 0,3413$

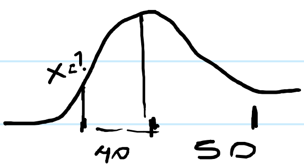
$P(-1 \leq z \leq 1) = \boxed{0,6826}$

c)

$z = ?$

$z = 1,28$

$P(z = 1,28) = 0,3997$



$$-1,28 = \frac{x - 2,5}{0,5}$$

$\boxed{x = 1,86}$

Exercício 9

9-A espessura de um recobrimento laminado de uma superfície de madeira é normalmente distribuído, com uma média de 5mm e um desvio padrão de 0,2 mm. Determine:
a)Qual é a probabilidade da espessura do recobrimento ser maior que 5,5 milímetros?
b)Se as especificações requerem que a espessura esteja entre 4,5 e 5,5 milimetros, que porporção de recobrimentos não esta dentro das especificações?
c)A espessura de recobrimento de 95% das amostras esta abaixo de que valor?

$\mu = 5\,mm$

$\sigma = 0,2$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

a) $P(x > 5,5) = ?$

$$z = \frac{5,5 - 5}{0,2}$$

$z = 2,5$

$P(x > 5,5) = P(2,5 < z)$

$P(x > 5,5) = 0,5 - 0,4938$

$P(x > 5,5) = \boxed{0,0062}$

b) $P(\text{Fora}) = 1 - P(4,5 \leq x \leq 5,5)$

$$z = \frac{4,5 - 5}{0,2} \qquad z = \frac{5,5 - 5}{0,2}$$

$z = -2,5 \qquad z = 2,5$

$P(\text{Fora}) = 1 - 2 \times P(z = 2,5)$

$P(\text{Fora}) = 1 - 2 \times 0,4938$ → $\boxed{0,9876}$ Está no recomendado.

$P(\text{Fora}) = 0,0124$

Isso aqui não está dentro do recomendado.

c) $z = ?$

$z = 1,64$

$$1,64 = \frac{x - 5}{0,2}$$

$\boxed{x = 5,33\ mm}$

$\boxed{x = 5{,}33 \text{ cm}}$

Exercício 10

10) Pacientes acometidos pelo coronavírus e que desenvolvem a forma grave da doença (pneumonia aguda), são submetidos a um tratamento intensivo de intubação em unidades de terapia intensiva (UTI), cujo tempo de cura foi modelado por uma densidade normal de média 15 dias e desvio padrão de 2 dias. Para critérios de gestão hospitalar, qual a proporção de doentes que demora mais do que 17 dias para sair da UTI?

$\mu = 15$

$\sigma = 2$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$z = \frac{17 - 15}{2}$$

$z = 1$

↳ tabela

↳ 0,3413

$P(x > 17) = 1 - 0,5 - 0,3413$

$P(x > 17) = \boxed{0,16}$