Álgebra Lineal
Ejercicios sobre bases y dimensión

1. Hallar todos los valores de k tales que el conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$ sea linealmente dependiente:

   (a) $\{(1,2,0),(1,k,-1),(1,-2,1)\}$
   (b) $\{(1,0,-2),(1,3,7),(1,2,k^2)\}$
   (c) $\{(-1,0,-1),(2,1,2),(1,1,k)\}$

2. Hallar todos los valores de k tales que el conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$ sea linealmente independiente:

   (a) $\{(2,-3,1),(-4,6,-2),(k,1,2)\}$
   (b) $\{(k,1,0),(1,0,k),(1+k,1,k)\}$
   (c) $\{(1,0,4),(1,3,7),(1,2,k)\}$

3. Sea $\mathcal{P}_2$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 2. Para cada conjunto de polinomios de $\mathcal{P}_2$ determinar si es linealmente dependiente o independiente. Si el conjunto es linealmente dependiente escribir un elemento del conjunto como combinación lineal de los restantes.

   (a) $\{x^2+1,\ x-2,\ x+3\}$
   (b) $\{3x+1,\ 3x^2+1,\ 2x^2+x+1\}$
   (c) $\{x^2-4,\ 5x^2-5x-6,\ 3x^2-5x+2\}$

4. Sea $M_{2\times 2}$ el espacio vectorial de las matrices de tamaño 2×2. Para cada conjunto de matrices en $M_{2\times 2}$ determinar si es linealmente dependiente o independiente. Si el conjunto es linealmente dependiente escribir un elemento del conjunto como combinación lineal de los restantes.

   a) $\left\{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11 & 2 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}\right\}$

   b) $\left\{\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\right\}$

5. Mostrar que cada uno de los siguientes conjuntos de vectores en $\mathbb{R}^3$ forman una base de $\mathbb{R}^3$ y determinar las coordenadas del vector $(-1,1,2)$ en cada base:

   (a) $\{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\}$
   (b) $\{(-3,4,2),(7,-1,3),(1,1,8)\}$

6. Encuentre una base para los subespacios de $\mathbb{R}^4$ generados por cada conjunto de vectores dado.

   (a) $\{(1,1,0,1),(0,1,1,1),(-2,1,3,1)\}$
   (b) $\{(1,1,-1,0),(2,-1,-1,0),(3,0,-2,0)\}$
   (c) $\{(1,-1,0,1),(1,1,1,1),(2,0,1,2),(0,-2,-1,0)\}$

7. Completar una base para $\mathbb{R}^3$ a partir de cada conjunto de vectores dado, y usando vectores distintos a los canónicos:

   (a) $\{(1,2,1),(0,1,0)\}$

   (b) $\{(1,2,-3)\}$

8. Hallar los escalares λ_1 y λ_2 para que los vectores $\vec{u}_1=(-1,5,4)$ y $\vec{u}_2=(\lambda_1,-2,-2)$ generen el mismo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ que generan los vectores $\vec{v}_1=(5,1,0)$ y $\vec{v}_2=(\lambda_2,3,2)$

9. Sea $T=gen\,\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores
   $\vec{u}=(1,1,1,0)$, $\vec{v}=(0,1,1,1)$ y $\vec{w}=(1,1,0,0)$.

   (a) Mostrar que $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ son linealmente independientes y por tanto forman una base para T.

   (b) Determinar una condición para cualquier vector $\vec{h}=(a,b,c,d)$ de T.

   (c) Mostrar que $\vec{h}=(1,5,3,4)\in T$ y hallar los escalares $\lambda,\ \beta,\ \gamma$ tales que $\vec{h}=\lambda\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}$.

   (d) Muestre que $\vec{h}=(1,2,3,4)$ no es elemento de T y que por tanto ninguna elección de los escalares $\lambda,\ \beta,\ \gamma$ hace que $\vec{h}=\lambda\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}$.

10. Sea $W=\{(1,2,0,3),(0,-1,2,1)\}$. Hallar el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por W, $T=genW$. ¿Para qué valores de k se verifica que $(2,k,-2,5)$ es elemento de T?

11. Sea W el conjunto de matrices 2×2 antisimétricas, es decir

$$W=\left\{A=\begin{bmatrix}0 & -b\\ b & 0\end{bmatrix}\ :\ b\in\mathbb{R}\right\}$$

    Mostrar que W es un subespacio de $M_{2\times 2}$ y hallar una base para el espacio.

12. Sea S el conjunto de matrices 2×2 simétricas, es decir

$$S=\left\{A=\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}\ :\ a,\ b,\ c\in\mathbb{R}\right\}$$

    Mostrar que S es un subespacio de $M_{2\times 2}$ y hallar una base para el espacio.

13. Sea V un espacio vectorial real y sean $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ tres vectores en V linealmente independientes. Determinar los valores de los escalares c_1, c_2 y c_3 tales que el vector $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3$ en V, también se pueda escribir como: $\mathbf{v}=(2c_2-c_1)\mathbf{v}_1+(c_3-c_2)\mathbf{v}_2+(c_2-1)\mathbf{v}_3$

14. Sea V un espacio vectorial real, y sean $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ tres vectores en V linealmente independientes. Deteminar si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes o linealmente independientes:

    (a) $\{\mathbf{u},\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}\}$

    (b) $\{2\mathbf{u}+\mathbf{v},2\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w},2\mathbf{u}+2\mathbf{v}+\mathbf{w}\}$

    (c) $\{\mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{w}-\mathbf{u},\mathbf{w}-\mathbf{v}\}$

    (d) $\{2\mathbf{u}+2\mathbf{w},\mathbf{u}+\mathbf{v}+2\mathbf{w},2\mathbf{v}+2\mathbf{w}\}$

    (e) $\{\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{u}-2\mathbf{v}+\mathbf{w}\}$

15. Sea V un espacio vectorial real, y sea $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ un conjunto linealmente independiente en V. Sean $\mathbf{u}_1 = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$, y $\mathbf{v}_1 = c\mathbf{u} + d\mathbf{v}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, vectores en V. Demostrar que si $ad - bc \neq 0$ entonces $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1\}$ es linealmente independiente.

16. Determinar si la afirmación es verdadera o falsa. En cualquier caso explicar por qué. Si es falsa la explicación se puede argumentar por medio de un ejemplo.

    (a) ( ) Tres vectores en $\mathbb{R}^3$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.

    (b) ( ) Si A y B son subconjuntos linealmente independientes de un mismo espacio vectorial entonces $A \cup B$ es linealmente independiente.

    (c) ( ) Sean A una matriz 3×3 y x_1 un vector no nulo que es solución del sistema $Ax = 0$, entonces $\det A = 0$.

    (d) ( ) Todo conjunto que contenga al vector nulo de un espacio vectorial es linealmente independiente.

    (e) ( ) Todo conjunto de cinco vectores en $\mathbb{R}^4$ es linealmente dependiente.

    (f) ( ) Para todo $k \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{(k^2, 0, 1),\ (0, k, 2),\ (1, 0, 1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

    (g) ( ) Si V es un espacio de dimensión n y S es un conjunto con $n + 1$ vectores de V que genera a V, entonces S es linealmente dependiente.

    (h) ( ) El espacio vectorial de todos los vectores (a, b, c) en $\mathbb{R}^3$ tales que $b = a + c$ tiene dimensión $n = 1$.

    (i) ( ) El espacio vectorial de todos los vectores (a, b, c) en $\mathbb{R}^3$ tales que $b = a$ tiene dimensión $n = 2$.

    (j) ( ) Sean A y B subconjuntos de un mismo espacio vectorial tales que $A \subset B$, entonces si B es linealmente dependiente A también es linealmente dependiente.

    (k) ( ) Sean A y B subconjuntos de un mismo espacio vectorial tales que $A \subset B$, entonces si B es linealmente independiente A también es linealmente independiente.

    (l) ( ) Sean A y B subconjuntos de un mismo espacio vectorial tales que $A \subset B$, entonces si A es linealmente dependiente B también es linealmente dependiente.

Referencias

[1] García, O., Villegas, J.A. y Castaño, J.I. (2012) Álgebra lineal. Fondo Editorial Universidad EAFIT. Medellín.

[2] Grossman, S. (1996). Álgebra Lineal con Aplicaciones. 5ta. Ed. McGraw-Hill. México.

[3] Hill, R. (1996). Álgebra Lineal Elemental con Aplicaciones. Prentice Hall. México.

[4] Kolman, B. (1999). Álgebra Lineal con Aplicaciones y Matlab. 6ta. Ed. Prentice Hall. México.

[5] Lay, D. (1999). Álgebra Lineal y sus Aplicaciones. 2a. Ed. Prentice Hall, México.