Católica de Santa Catarina

Apostila de Matemática para os cursos de:
Ciências Contábeis e Administração
Prof.Joable Andrade Alves

Este texto foi elaborado para servir como material de apoio ao ensino da disciplina de Matemática (1ª fase) para os cursos superiores de Ciências Contábeis e Administração.

Alguns tópicos são tratados sem o rigor ou o formalismo das definições e demonstrações matemáticas clássicas. Onde possível, foi dada ênfase a uma abordagem mais prática e de aplicação dos conteúdos.

Sugestões e críticas são bem vindas.

Capa (Criação e Arte): Sandra Maria Simioni

Joable Andrade Alves é engenheiro eletricista (1994), mestre em engenharia elétrica, eletrônica de potência, (1996), formado pela Universidade Federal de Santa Catarina e Especialista em Gestão Estratégica de Custos (2004) formado pela UNERJ - Centro Universitário de Jaraguá do Sul

Desde 1996, trabalha com desenvolvimento de produtos eletrônicos.

Em 1997 passou a fazer parte do quadro de professores da UNERJ onde ministra as disciplinas de Matemática para os cursos de Ciências Contábeis e Administração; Eletroeletrônica Geral para o curso de Tecnologia em Mecânica;Cálculo Numérico e Eletrônica de Potência para o curso de Engenharia Elétrica.

CAPÍTULO 0

Revisão de Matemática Elementar

Neste capítulo faz-se uma revisão dos conceitos básicos da matemática elementar estudados no ensino fundamental e médio. Tais conceitos serão de extrema necessidade para os tópicos futuros.

Sinais

<table>
<tr><th></th><th>Adição</th><th>Subtração</th><th>Multiplicação</th><th>Divisão</th></tr>
<tr><td>+ com +</td><td>+</td><td rowspan="4">requer análise**</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>+ com –</td><td rowspan="3">sinal do maior valor absoluto*</td><td>–</td><td>–</td></tr>
<tr><td>– com +</td><td>–</td><td>–</td></tr>
<tr><td>– com –</td><td>+</td><td>+</td></tr>
</table>

* Na adição, o sinal final será o do número de maior valor absoluto, veja os exemplos:

$$(+10) + (+14) = +24$$
$$(+10) + (-14) = -4$$
$$(-10) + (+14) = +4$$
$$(-10) + (-14) = -24$$

** Na subtração, o sinal final depende da ordem dos números, como mostram os exemplos:

$$(+10) - (+14) = -4$$
$$(+10) - (-14) = +24$$
$$(-10) - (+14) = -24$$
$$(-10) - (-14) = +4$$

A ordem de cálculo:

- Multiplicações e Divisões devem ser efetuadas antes de Adições e Subtrações;
- Parênteses ( ) são prioritários em relação aos colchetes [ ] e estes em relação às chaves { };
- Expoentes e raízes devem ser resolvidos primeiro;
- Deve-se resolver uma Adição ou Subtração antes de uma Multiplicação ou Divisão apenas se estas estiverem entre parênteses, colchetes ou chaves

---

Frações:

$$\frac{a}{b}, \qquad \text{onde } a \text{ é o numerador e } b \text{ é o denominador}$$

Representa uma divisão, portanto existe um equivalente decimal.

- Soma e Subtração: para denominadores iguais, manter o denominador e somar os numeradores, para denominadores diferentes, deve-se tirar o M.M.C;

$$\boxed{\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}}$$

$$\boxed{\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{\left(MMC(b,d) \div b \times a\right) \pm \left(MMC(b,d) \div d \times c\right)}{MMC(b,d)}}$$

- Multiplicação: multiplica-se numeradores e denominadores

$$\boxed{\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}}$$

- Divisão: mantém-se a primeira fração e multiplica-se pelo inverso da 2ª

$$\boxed{\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}}$$

Exercícios sobre frações:

		Resposta em fração	Resposta em decimal
a)	$\frac{1}{2} + \frac{7}{4}$	$\frac{9}{4}$	2.250
b)	$\frac{2}{9} - \frac{3}{7}$	$-\frac{13}{63}$	–0.206
c)	$\frac{3}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{5}$	$\frac{139}{180}$	0.772
d)	$\left(\frac{3}{8} \times \frac{1}{4}\right) \div \frac{3}{5}$	$\frac{5}{32}$	0.156
e)	$\left(\frac{5}{9} \times \frac{1}{10}\right) - \frac{2}{3}$	$-\frac{11}{18}$	–0.611
f)	$\left(\frac{1}{2} \times \frac{4}{1}\right) \div \frac{1}{8}$	16	16
g)	$\left(\frac{7}{9} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{4}{3}$	$\frac{10}{27}$	0.370
h)	$\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{6} - \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{2}{6} + \frac{4}{12} - \frac{2}{16}\right)$	0	0

Potenciação:

$$\boxed{a \times a \times a \ldots\ldots \times a = a^n}$$

$a \rightarrow$ base

$n \rightarrow$ expoente

Regras

1)	$a^m \times a^n = a^{m+n}$
2)	$a^m \div a^n = a^{m-n}$
3)	$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
4)	$\left(a^m\right)^n = a^{m \times n}$
5)	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$
6)	$a^0 = 1$
7)	$a^1 = a$
8)	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\left(\frac{m}{n}\right)}$

Exercícios sobre potenciação:

		Resposta
1)	$5^3 \div 5^{-1}$	625
2)	$7^4 \times 7^{-3}$	7
3)	$\sqrt[7]{2^5}$	1.640
4)	$\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\right)^2 \div 2$	$\frac{1}{128}$
5)	$\left(2^4 + 3^2\right) \div \frac{1}{2}$	50
6)	$\sqrt[7]{5^4}$	2.508
7)	$\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)^{-2}$	16
8)	-4^2	-16
9)	$(-4)^2$	16
10)	$x^2 \times x^3$	x^5
11)	$x^{\frac{1}{2}} \times x^3$	$x^{\frac{7}{2}}$
12)	$\frac{x^2}{x^2 \times x}$	x^{-1}
13)	$\frac{x^2}{x \times \sqrt{x}}$	$x^{\frac{1}{2}}$

Equações do 1° Grau:

$$\boxed{a \cdot x + b = 0} \qquad x \rightarrow \text{incógnita}$$

solução: $$\boxed{x = -\frac{b}{a}}$$

Exercícios sobre equações do 1° Grau:

		Resposta
a)	$x + 1 = 3$	2
b)	$2 \cdot x - 4 = -2$	1
c)	$4 \cdot x + 2 - 1 = 1$	0
d)	$\frac{(x+1)}{(x+4)} = \frac{3}{6}$	2
e)	$\frac{(3 \cdot x + 2)}{(7 \cdot x - 1)} = \frac{11}{20}$	3
f)	$\frac{(x-4)}{(-2 \cdot x + 1)} = -4$	0

Equações do 2° Grau:

$$\boxed{a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0}$$

solução: $$\boxed{x^I, x^{II} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}}$$ Baskara

Exercícios sobre equações do 2° Grau:

		Resposta
a)	$x^2 - 3 \cdot x = 0$	{0,3}
b)	$x^2 + 8 \cdot x = 0$	{–8,0}
c)	$2 \cdot x^2 + 12 \cdot x = 0$	{–6,0}
d)	$x^2 - 25 = 0$	{–5,5}
e)	$2 \cdot x^2 + 5 = x^2 + 9$	{–2,2}
f)	$x^2 + 7 = 3 \cdot x^2 + 9$	{ }
g)	$x^2 - 3 \cdot x + 2 = 0$	{1,2}
h)	$x^2 - 6 \cdot x + 5 = 0$	{1,5}
i)	$x \cdot (x-1) = 3 \cdot (x-1)$	{1,3}
j)	$(x-2)^2 = 3 \cdot x - 2$	{1,6}
k)	$\frac{x^2}{5} + \frac{7}{10} = \frac{(x+1)}{2}$	{½, 2}

Logaritmos:

$$\boxed{\log_b a = x \quad \rightarrow \quad b^x = a}$$

$b \rightarrow$ base

$a \rightarrow$ número que se deseja calcular o logaritmo na base b

$x \rightarrow$ logaritmo

Bases mais comuns:

- 10 (logaritmo decimal - log, tem nas calculadoras científicas)
- 2.718281828 – número “e” (logaritmo natural – ln, tem em todas as calculadoras)

Para calcular, usando a calculadora, qualquer logaritmo em qualquer base, deve-se utilizar uma propriedade dos logaritmos chamada de mudança de base:

$$\boxed{\log_b a = (\log_c a) \div (\log_c b)}$$

$b \rightarrow$ base

$a \rightarrow$ número que se deseja calcular o logaritmo na base b

$c \rightarrow$ base da calculadora (pode ser 10 ou "e")

Exercícios sobre logaritmos:

		Resposta
a)	$\log_5 3$	0.682
b)	$\log 2$	0.301
c)	$\log_2 4$	2
d)	$\log_{\left(\frac{1}{4}\right)} 2$	– 0.5
e)	$\log_5 7$	1.209
f)	$\log_2\left(\frac{1}{2}\right)$	– 1
g)	$\log 4$	0.602
h)	$\ln 5$	1.609
i)	$\log_4(-3)$	$\nexists$
j)	$\log_{\left(\frac{1}{8}\right)} 2$	– 0.333
k)	$\log_3\left(\frac{1}{9}\right)$	– 2
l)	$\ln 8$	2.079
m)	$\log 7$	0.845
n)	$\log_4 16$	2

Unidades de Tempo - Conversões

Considerar o calendário comercial (mês com 30 dias e ano com 360 dias)

1) Transformar em ANOS

		Resposta
a)	2 anos, 9 meses e 12 dias	2.7833...
b)	4 anos, 6 meses e 2 dias	4.5055...
c)	6 anos, 5 meses e 25 dias	6.4861...
d)	1 ano, 8 meses e 15 dias	1.7083...

2) Transformar em ANOS, MESES e DIAS

		Resposta
a)	0.6833	0 anos, 8 meses e 6 dias
b)	0.0778	0 anos, 0 meses e 28 dias
c)	2.9555	2 anos, 11 meses e 14 dias
d)	3.2666	3 anos, 3 meses e 6 dias

3) Somar as horas

		Resposta
a)	0H10M + 0H33M + 0H27M + 0H48M + 0H08M	2H06M
b)	3H10M + 3H15M + 3H20M + 3H30M + 3H40M	16H55M
c)	2H44M + 3H15M + 9H58M + 8H02M + 4H44M	28H43M
d)	2H00M + 5H23M – 3H47M + 6H39M – 4H57M	5H18M

Separadores de casas decimais e separadores de milhar

1ª opção - Pode-se utilizar o ponto "." como separador de milhar e a vírgula "," como separador de casas decimais. Exemplos:

R$ 1.060,45	Mil e sessenta reais, quarenta e cinco centavos;
R$ 3.543.754,95	Três milhões, quinhentos e quarenta e três mil, setecentos e cinqüenta e quatro reais, noventa e cinco centavos;
R$ 65.235.654.707,44	Sessenta e cinco bilhões, duzentos e trinta e cinco milhões, seiscentos e cinqüenta e quatro mil, setecentos e sete reais, quarenta e quatro centavos.

2ª opção - Pode-se utilizar a vírgula "," como separador de milhar e o ponto "." como separador de casas decimais. Exemplos:

R$ 1,060.45	Mil e sessenta reais, quarenta e cinco centavos;
R$ 3,543,754.95	Três milhões, quinhentos e quarenta e três mil, setecentos e cinqüenta e quatro reais, noventa e cinco centavos;
R$ 65,235,654,707.44	Sessenta e cinco bilhões, duzentos e trinta e cinco milhões, seiscentos e cinqüenta e quatro mil, setecentos e sete reais, quarenta e quatro centavos.

CAPÍTULO 1

Funções

Conjuntos Numéricos

Conjunto: conceito primitivo; não necessita, portanto, de definição.

Exemplo: conjunto dos números pares positivos: P = {2,4,6,8,10,12, ... }. Esta forma de representar um conjunto, pela enumeração dos seus elementos, chama-se forma de listagem. O mesmo conjunto também poderia ser representado por uma propriedade dos seus elementos ou seja, sendo x um elemento qualquer do conjunto P acima, poderíamos escrever: P = { x | x é par e positivo } = { 2,4,6, ... }.

Relação de pertinência:
Sendo x um elemento do conjunto A , escrevemos $x \in A$,
onde o símbolo $\in$ significa "pertence a".
Sendo y um elemento que não pertence ao conjunto A , indicamos esse fato com a notação $y \notin A$.

O conjunto que não possui elementos , é denominado conjunto vazio e representado por ϕ .

Subconjunto:
Se todo elemento de um conjunto A também pertence a um conjunto B, então dizemos que A é subconjunto de B e indicamos isto por $A \subset B$.

Conjuntos numéricos fundamentais:

Entendemos por conjunto numérico, qualquer conjunto cujos elementos são números. Existem infinitos conjuntos numéricos, entre os quais, os chamados conjuntos numéricos fundamentais, a saber:

Conjunto dos números naturais
N = {0,1,2,3,4,5,6,... }

Conjunto dos números inteiros
Z = {..., -4,-3,-2,-1,0,1,2,3,... }
Obs: é evidente que $N \subset Z$.

Conjunto dos números racionais
$Q = \{x;\ x = p/q \text{ com } p \in Z\ ,\ q \in Z \text{ e } q \neq 0\ \}$.
Temos então que número racional é aquele que pode ser escrito na forma de uma fração p/q onde p e q são números inteiros, com o denominador diferente de zero.
Lembre-se que não existe divisão por zero!.
São exemplos de números racionais: 2/3, -3/7, 0,001=1/1000, 0,75=3/4, 0,333... = 1/3, 7 = 7/1, etc.

Notas:
a) é evidente que $N \subset Z \subset Q$.
b) toda dízima periódica é um número racional, pois é sempre possível escrever uma dízima periódica na forma de uma fração.
Exemplo: 0,4444... = 4/9

Conjunto dos números irracionais

I = {x; x é uma dízima não periódica}.

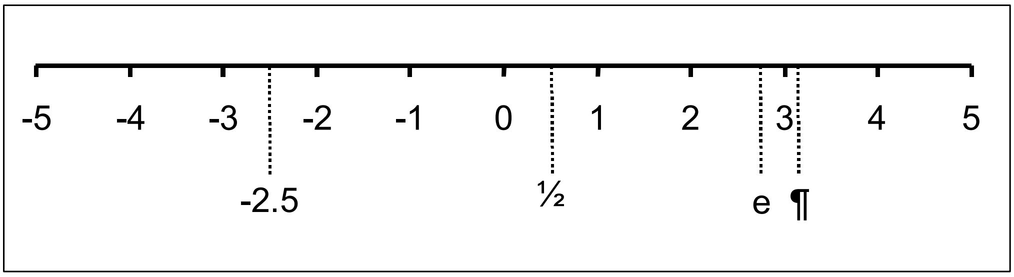
Exemplos de números irracionais:

- π = 3,1415926... (número pi = razão entre o comprimento de qualquer circunferência e o seu diâmetro)
- 2,01001000100001... (dízima não periódica)
- $\sqrt{3}$ = 1,732050807... (raiz não exata).
- número "e"= 2.718281828

Conjunto dos números reais
R = { x; x é racional ou x é irracional}.

<u>Representação Gráfica dos Números Reais:</u>

Os números reais podem ser representados graficamente.



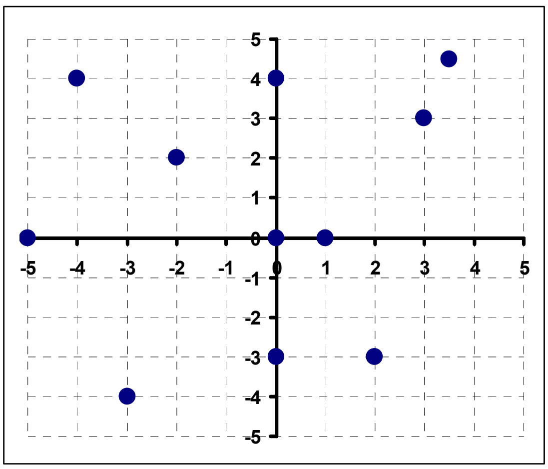
Sistema Cartesiano Ortogonal (S.C.O.):

São duas retas chamadas de eixos. O ponto de intersecção destas retas é chamado de origem. O eixo horizontal é o eixo das abscissas (valores de "x"). O eixo vertical é o eixo das ordenadas (eixo dos "y"). Para se localizar um ponto no S.C.O., dá-se as suas coordenadas, ou seja, o valor da sua abscissa e o valor da sua ordenada.

Exercício: Marcar os seguintes pontos no S.C.O.:

(x, y)	(-5,0)	(0,4)	(0,-3)	(-2,2)	(-3,-4)
(0, 0)	(1,0)	(2, -3)	(3,3)	(-4, 4)	(3.5, 4.5)

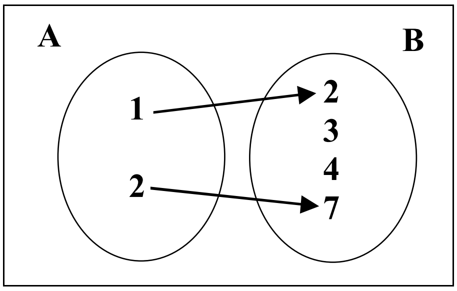
Resposta:



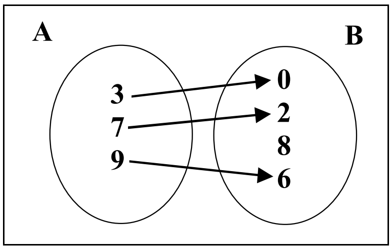
Funções:

Sejam 2 conjuntos A ≠ { } e B ≠ { }, diz-se que F é uma função de A em B se para todo elemento "x" pertencente a A, associa-se um único elemento "y" pertencente a B, tal que o par (x, y) pertence a função F

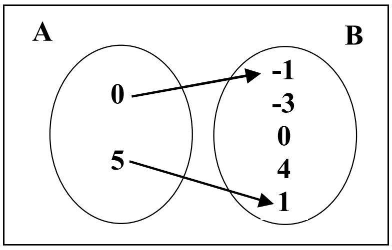
Exemplo:



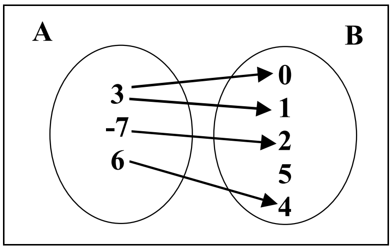
Exercícios – Verificar se as relações entre os conjuntos A e B são funções



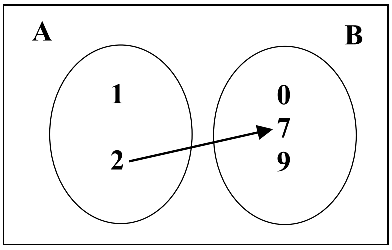
Resp.:_____________



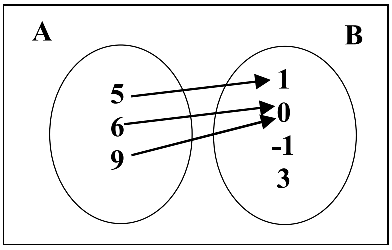
Resp.:_____________



Resp.:_____________

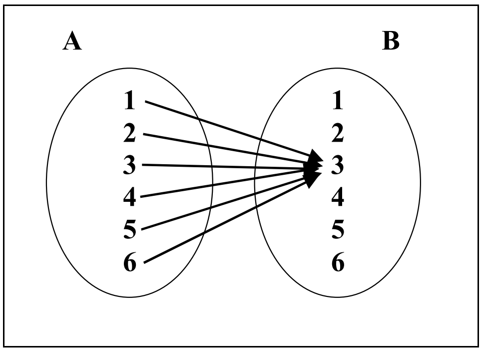


Resp.:_____________



Resp.:_____________

Função Constante



No exemplo acima, para cada valor de "x" o valor de "y" é sempre o mesmo (3).
A função está representada por um diagrama. Poderia ser representada por uma regra:

$\boxed{F(x)=3}$ ou $\boxed{y=3}$

Uma função constante pode sempre ser expressa por:

$\boxed{F(x)=k}$ ou $\boxed{y=k}$

onde "k" é qualquer número real

Os pares ordenados (x,y) formados pelo exemplo acima seriam:

(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)

Se os pontos forem colocados no S.C.O. seria observado o gráfico 1:

Se todos os valores de "x" fossem utilizados (-6, -5.9, -5.8...0...5.7, 5.8, 5.9, 6), o valor de "y" seria constante e igual a 3. Os pontos seriam:

(-6 , 3), (-5.9 , 3), (-5.8, 3)... (0, 3) ...(5.7, 3), (5.8, 3), (5.9, 3), (6 , 3) e se todos os infinitos pontos fossem colocados no S.C.O., obteria-se uma reta, paralela ao eixo "x" e que passa por 3 (conforme mostrado no gráfico 2)

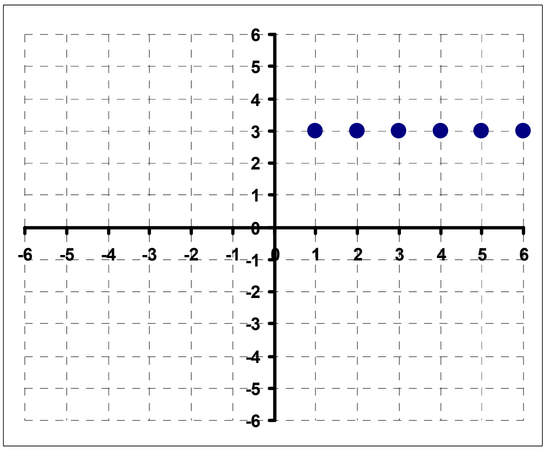


gráfico 1

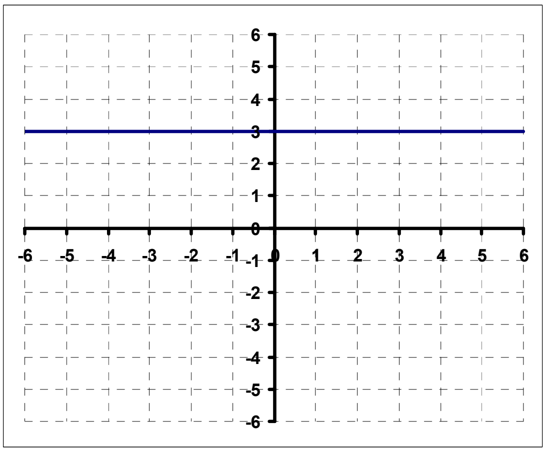
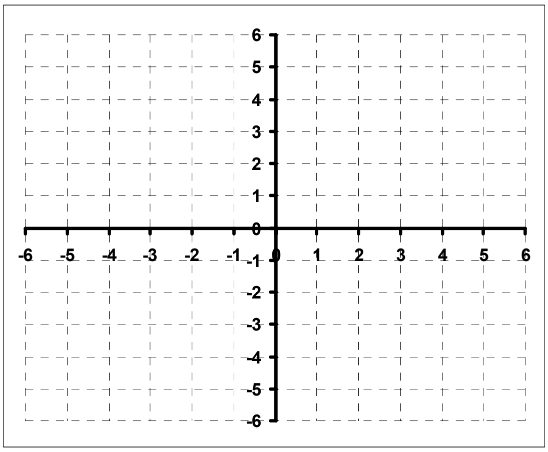


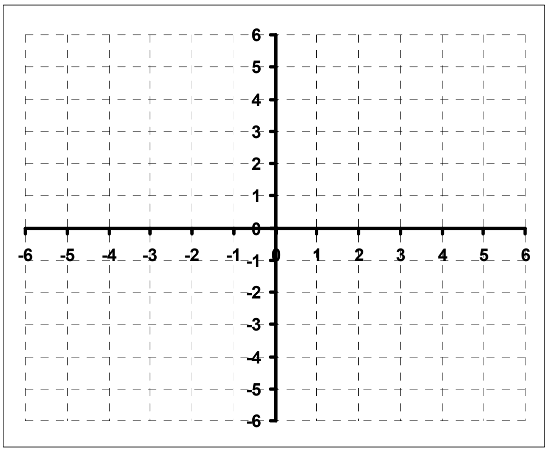
gráfico 2

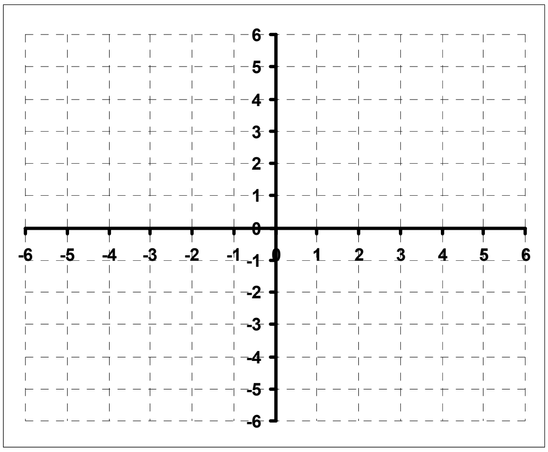
Exercícios sobre Função Constante:

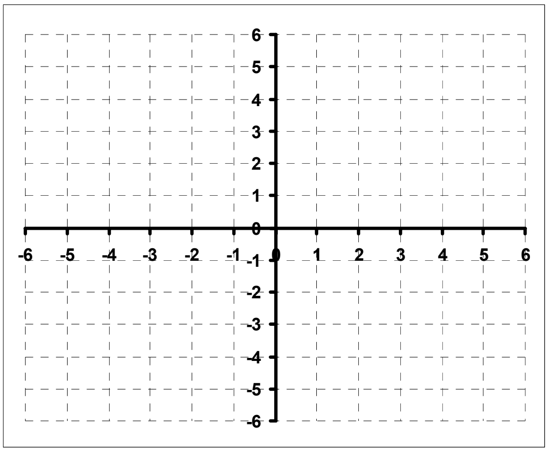
Traçar o gráfico para as funções constantes abaixo:

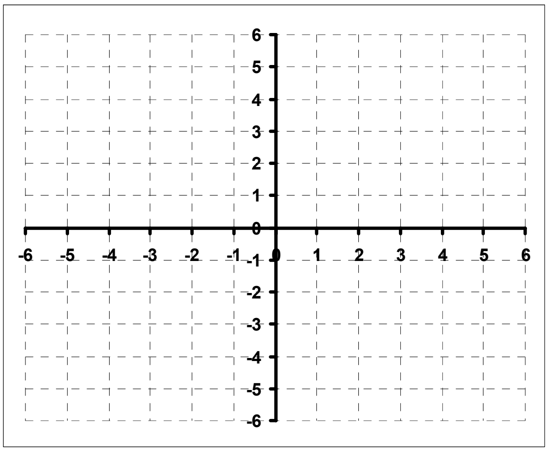
a) $F(x) = 4$
b) $F(x) = -5$
c) $F(x) = \sqrt{2}$
d) $F(x) = \pi$
e) $F(x) = \dfrac{5}{3}$
f) $F(x) = -\dfrac{3}{2}$

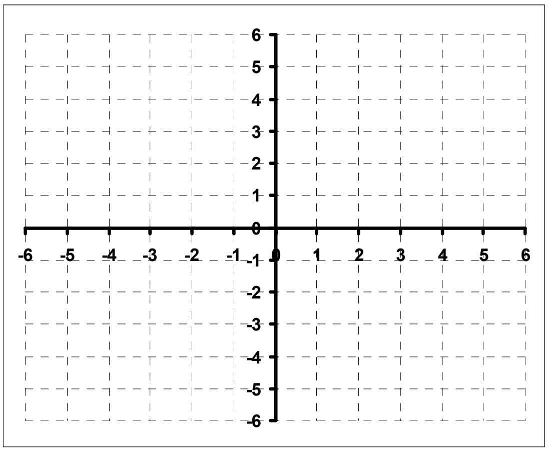










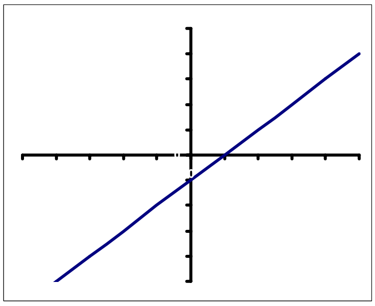


Função do 1°Grau

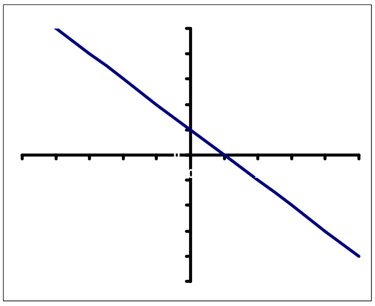
É toda função que pode ser escrita como:

$\boxed{F(x) = a \cdot x + b}$, onde $\begin{array}{l} a \rightarrow \textit{coeficiente angular} \\ b \rightarrow \textit{coeficiente linear} \end{array}$

Gráfico:



a > 0 - crescente



a < 0 - decrescente

"Zero" ou "Raiz" da função: é o valor de "x" para o qual F(x) é igual a zero
Obs.: F(x) é o mesmo que "y".

$$\boxed{F(x) = a \cdot x + b}$$

$$\boxed{0 = a \cdot x_Z + b}$$

$$\boxed{x_Z = -\frac{b}{a}}$$

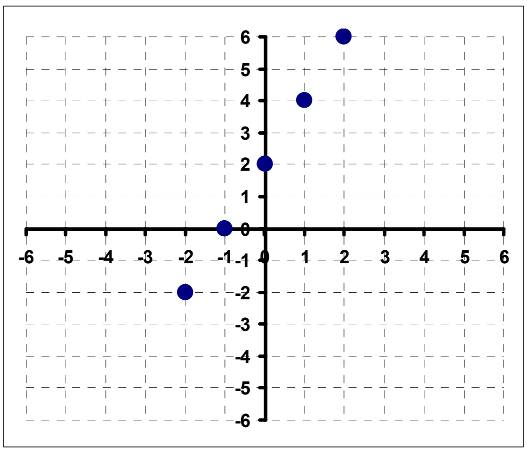
Exemplo: Fazer o gráfico de $y = 2 \cdot x + 2$

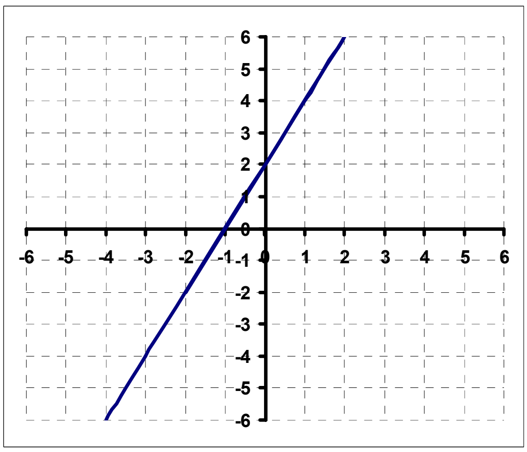
Montar uma tabela com valores atribuídos para "x" e calcular os respectivos valores para "y"

X	Y
-2	-2
-1	0
0	2
1	4
2	6

$$\boxed{x_Z = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{2} = -1}$$

Marcar os pontos no S.C.O., ligar os pontos para obter a reta desejada



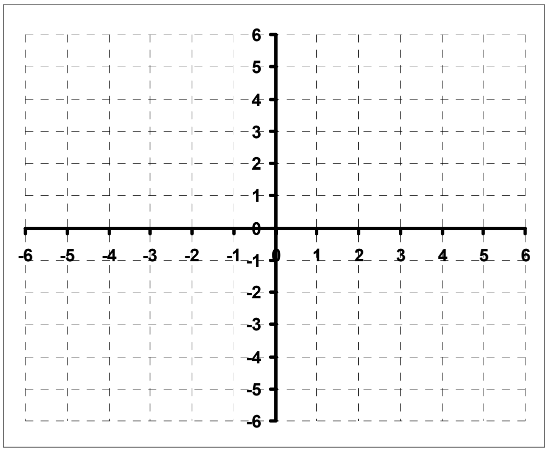


Exercícios sobre Função do 1°Grau: Traçar o gráfico para as funções abaixo:

a) $y = 3 \cdot x + 1$

$x_Z = -\dfrac{b}{a} =$ ______

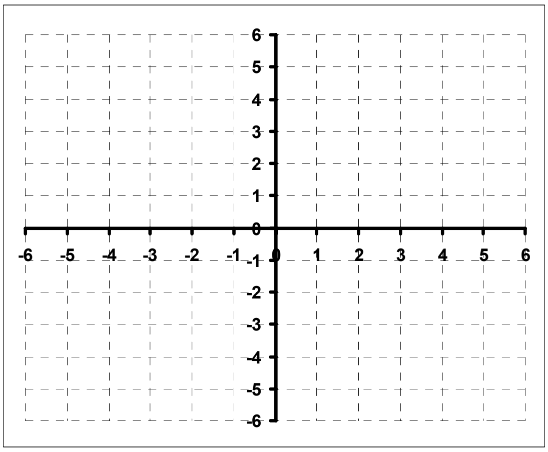
X	Y
-2	
-1	
0	
1	
2	



b) $y = x$

$x_Z = -\dfrac{b}{a} =$ ______

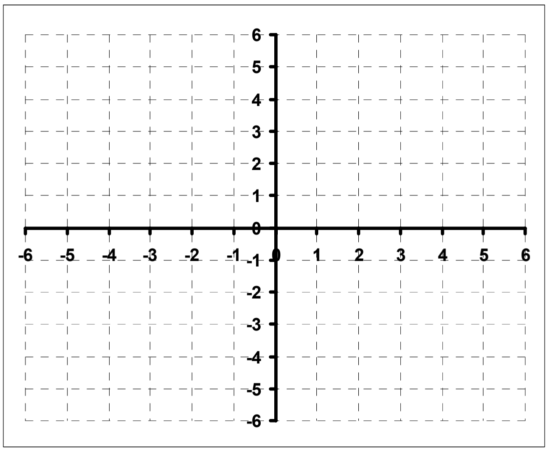
X	Y
-2	
-1	
0	
1	
2	



c) $y = -x$

$x_Z = -\dfrac{b}{a} =$ ______

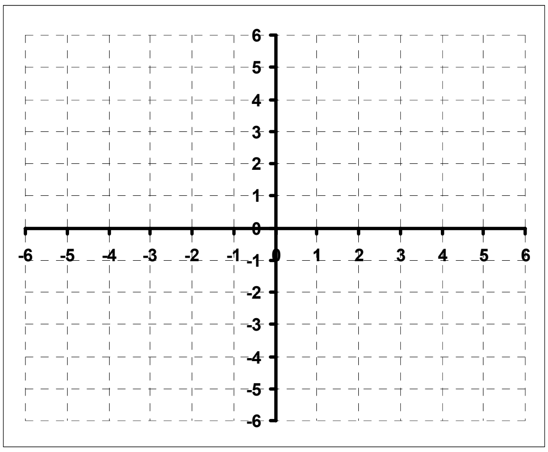
X	Y
-2	
-1	
0	
1	
2	



d) $y = 2 \cdot x$

$x_Z = -\dfrac{b}{a} =$ ______

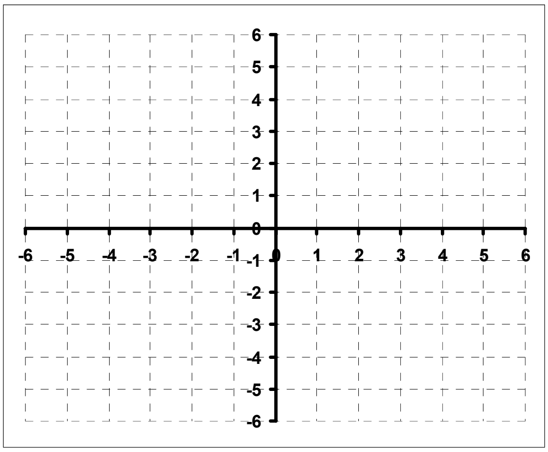
X	Y
-2	
-1	
0	
1	
2	



e) $y = -4 \cdot x$

$x_Z = -\dfrac{b}{a} = $ ______

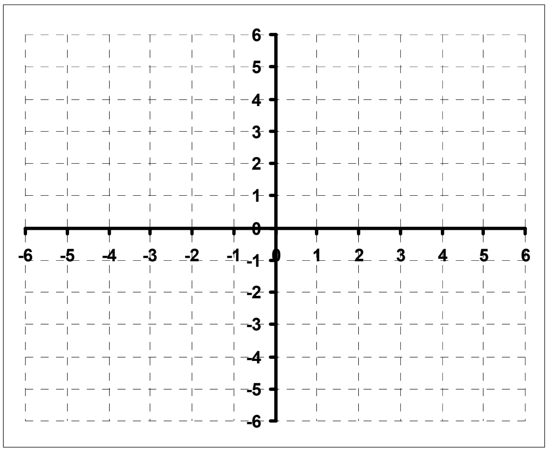
X	Y
-2	
-1	
0	
1	
2	



f) $y = -x + 2$

$x_Z = -\dfrac{b}{a} = $ ______

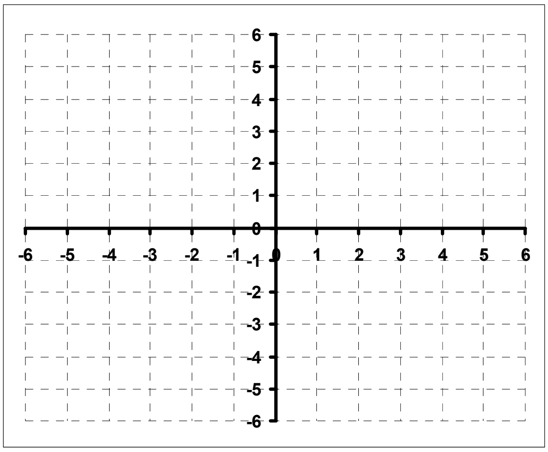
X	Y
-2	
-1	
0	
1	
2	



g) $y = -2 \cdot x + 3$

$x_Z = -\dfrac{b}{a} = $ ______

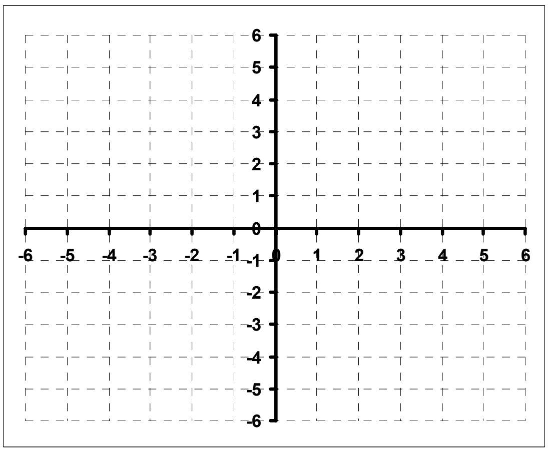
X	Y
-2	
-1	
0	
1	
2	



h) $y = x + 4$

$x_Z = -\dfrac{b}{a} = $ ______

X	Y
-2	
-1	
0	
1	
2	



i) O Sr. João gasta R$ 20,00 por dia. Represente a função de gastos acumulados e faça o Gráfico para 10 dias.

j) O Sr. João tem R$ 200,00 no banco. Sendo que gasta R$ 20,00 por dia represente a função Saldo Bancário. Faça o gráfico para 12 dias. A partir de qual dia a conta ficará negativa?

Aplicações da Função do 1° Grau

Funções de Custo, Receita e Lucro

Seja "x" a quantidade produzida de um produto, o custo total de produção depende de "x" . Então pode-se dizer que o custo de produção é uma função da quantidade produzida de um produto. Custos que não dependem da quantidade produzida (aluguel, seguros, salários e outros) são somados e definem o que se chama de custo fixo (CF). A parcela do custo que depende de "x" é chamada de custo variável (CV). Então o custo total (CT) será:

$$\boxed{CT(x) = CF + CV(x)}$$

A receita é o produto de "x" pelo preço de venda e será indicada pela letra R. A função lucro é definida como a diferença entre a receita e o custo:

$$\boxed{L(x) = R(x) - CT(x)}$$

Exemplo:

Uma firma de serviços de fotocópias tem um custo fixo mensal de R$ 1200,00 e custos variáveis mensais de R$ 0,06 por folha que reproduz. Expresse a função custo total em função do número "x" de páginas copiadas por mês. Expresse, também, a função lucro. Se os consumidores pagam R$ 0,12 por folha, qual o número mínimo de folhas que a firma tem que reproduzir para não ter prejuízo?

Função Custo Total:___________________

Função Lucro:________________________

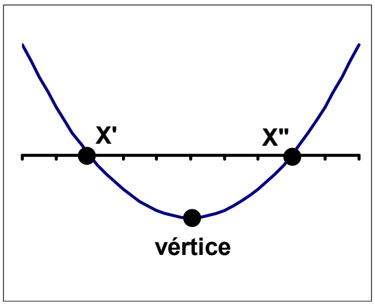
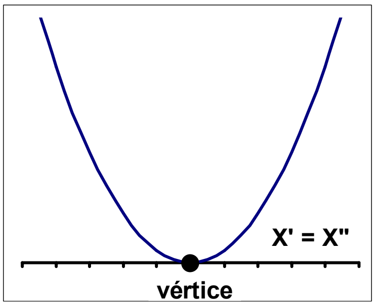
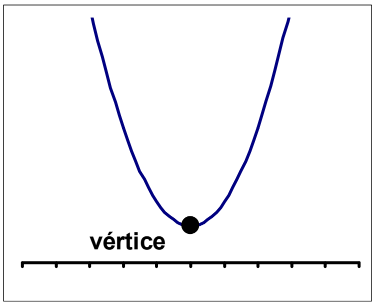
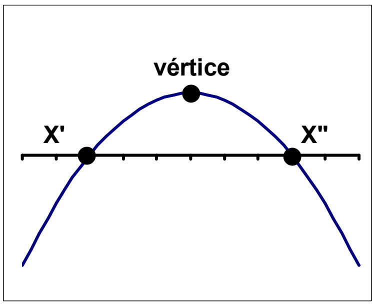
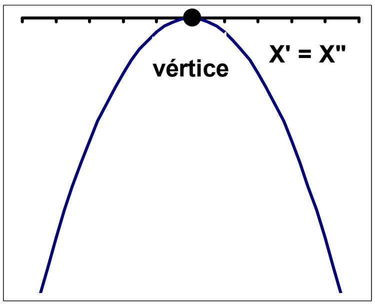
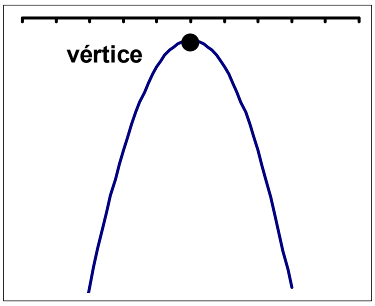
Nº mínimo de Folhas:__________________

Função do 2° Grau (Quadrática)

É toda função que pode ser escrita como:

$$\boxed{F(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c}, \quad \text{onde} \qquad a \neq 0$$

O gráfico de uma função do 2º Grau é uma figura chamada: Parábola. Esta figura apresenta-se de maneiras distintas dependendo dos valores de “a”, “b” e “c”

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Para obter o gráfico de uma função do 2º Grau e visualizar a parábola é necessário atribuir valores para “x” de tal forma que, com os valores de “y” calculados e marcando-se os pontos definidos pelos pares ordenados (x,y), seja possível observar o ponto do vértice e as raízes (x’ e x”) quando estas existirem. Nem sempre é fácil escolher os valores de “x” adequados. A seguir, apresenta-se um procedimento para a obtenção do esboço do gráfico.

Passos

1) Observar o sinal de “a” e Δ para verificar qual das 6 opções será o gráfico;
2) Calcular as raízes (também chamadas de zeros) da função (x’ e x”) usando Baskara:

$$\boxed{x^I, x^{II} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}} \quad \text{e} \quad \boxed{\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c}$$

3) Calcular as coordenadas do ponto do vértice usando as seguintes fórmulas:

$$\boxed{x_V = -\frac{b}{2 \cdot a}} \quad \text{e} \quad \boxed{y_V = -\frac{\Delta}{4 \cdot a}}$$

4) Marcar o ponto onde a parábola “corta” o eixo y. Este ponto é sempre o (0, c).

Exemplo:

Seja a função $\boxed{y = x^2 - 2 \cdot x - 3}$, traçar o esboço da parábola.

Solução:

Uma alternativa é escolher uma faixa de valores para "x", calcular os valores de "y" e marcar os pontos no S.C.O. (tente!)

A outra maneira de se obter um esboço razoável do gráfico é seguindo os passos descritos anteriormente:

1. Observar o sinal de "a" e Δ para verificar qual das 6 opções será o gráfico:

$$\boxed{\begin{array}{l} a = 1, \\ b = -2, \\ c = -3 \end{array}} \text{ e } \boxed{\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16}$$

como "a" > 0 e Δ > 0, a parábola terá a concavidade voltada para cima e a mesma "cortará" o eixo x em 2 pontos distintos

2. Calcular as raízes (também chamadas de zeros) da função (x' e x") usando Baskara:

x' = -1 e x" = 3

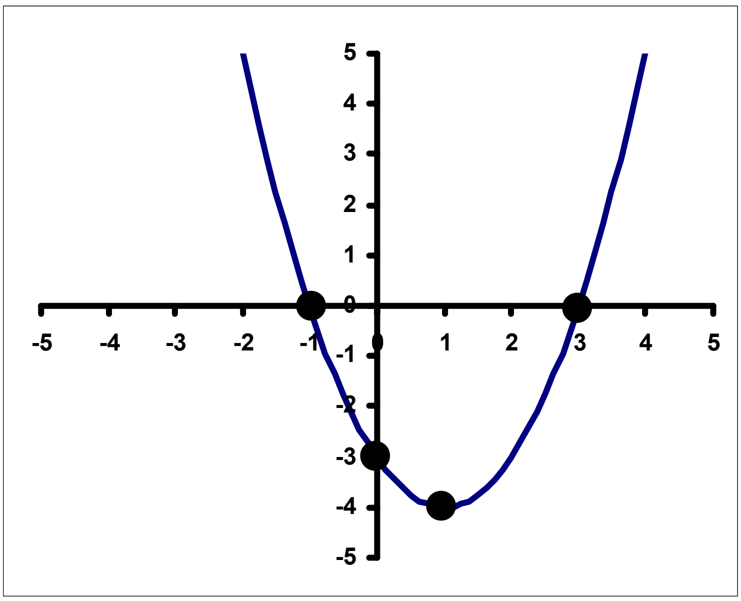
3. Calcular as coordenadas do ponto do vértice usando as seguintes fórmulas:

$$\boxed{x_V = -\frac{b}{2 \cdot a} = -\frac{(-2)}{2 \cdot 1} = 1} \text{ e } \boxed{y_V = -\frac{\Delta}{4 \cdot a} = -\frac{16}{4 \cdot 1} = -4}$$

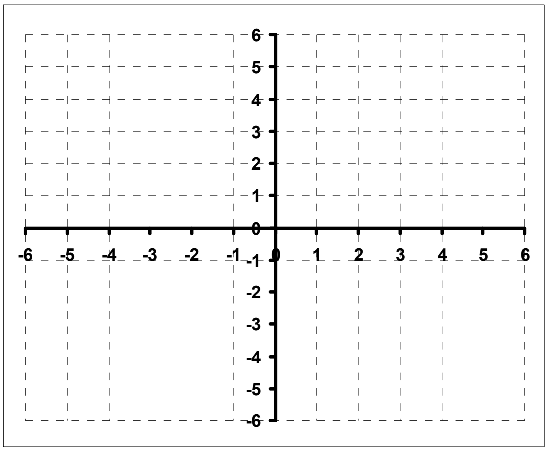
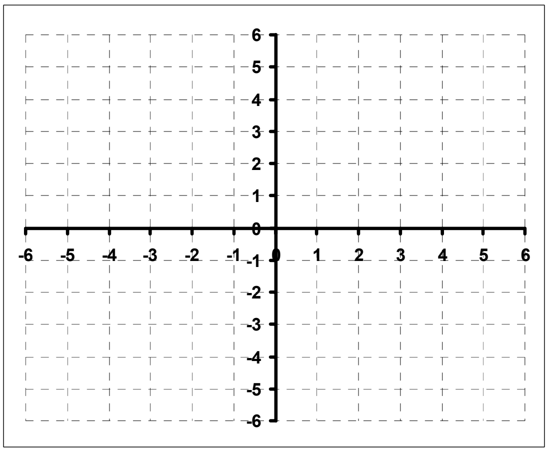
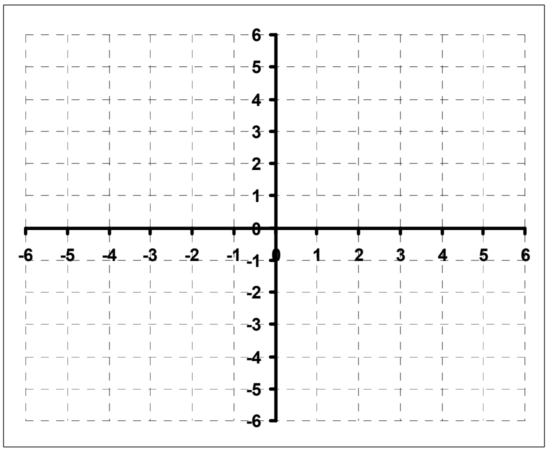
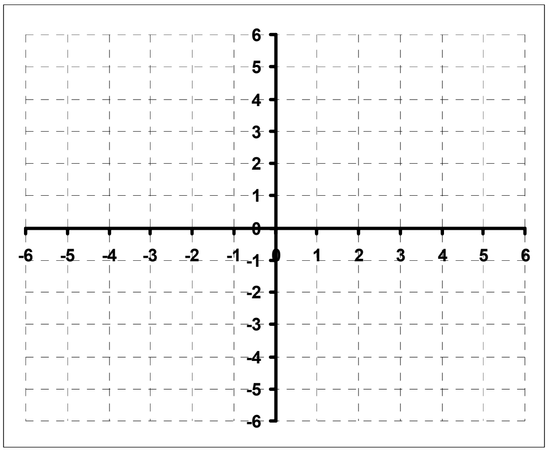
4. Marcar o ponto onde a parábola "corta" o eixo y. Este ponto é sempre o (0, c).

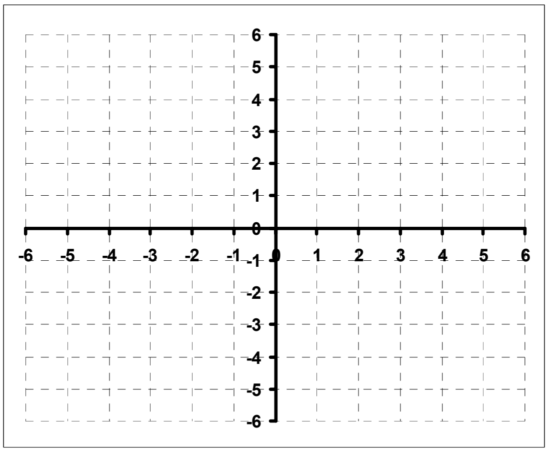
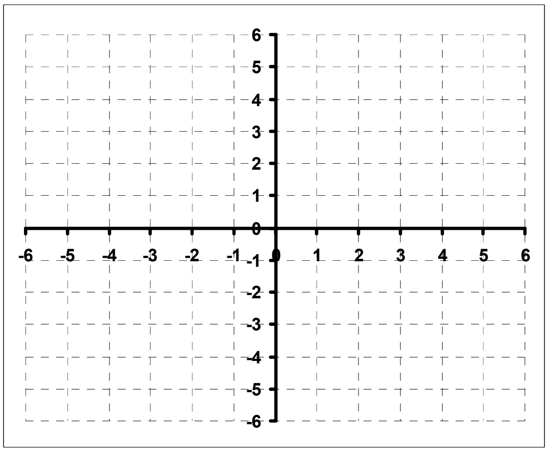
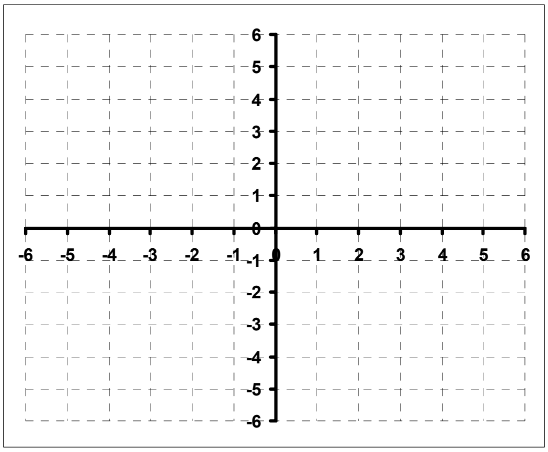
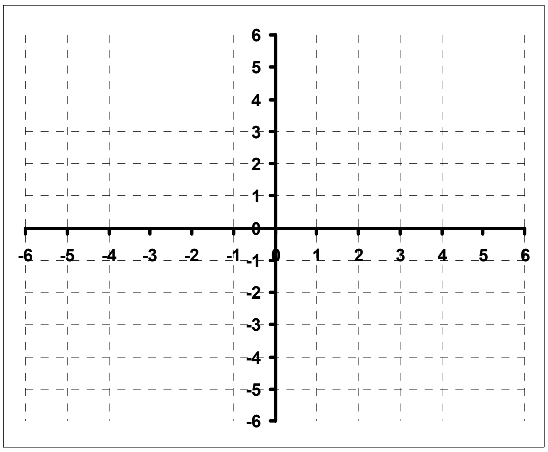
(0, -3).

Com as informações obtidas, esboçar o gráfico:



<u>Exercícios sobre Função do 2°Grau</u>: Traçar o gráfico para as funções abaixo:

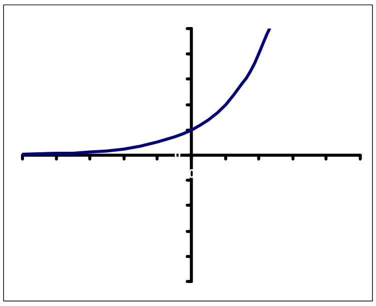
a) $y = x^2 - x - 2$	$a =$ ______ $b =$ ______ $c =$ ______ $\Delta =$ ______ $x^I =$ ______ $x^{II} =$ ______ $x_V =$ ______ $y_V =$ ______ $(0,c) = (0,\_)$	
b) $y = x^2 - 4 \cdot x$	$a =$ ______ $b =$ ______ $c =$ ______ $\Delta =$ ______ $x^I =$ ______ $x^{II} =$ ______ $x_V =$ ______ $y_V =$ ______ $(0,c) = (0,\_)$	
c) $y = 2 \cdot x^2 + 6 \cdot x$	$a =$ ______ $b =$ ______ $c =$ ______ $\Delta =$ ______ $x^I =$ ______ $x^{II} =$ ______ $x_V =$ ______ $y_V =$ ______ $(0,c) = (0,\_)$	
d) $y = -x^2 - x + 2$	$a =$ ______ $b =$ ______ $c =$ ______ $\Delta =$ ______ $x^I =$ ______ $x^{II} =$ ______ $x_V =$ ______ $y_V =$ ______ $(0,c) = (0,\_)$	

e) $y = \dfrac{-x^2}{5} + 5$	$a =$ _______ $b =$ _______ $c =$ _______ $\Delta =$ _______ $x^I =$ _______ $x^{II} =$ _______ $x_V =$ _______ $y_V =$ _______ $(0, c) = (0, \_)$	
f) $y = -2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 2$	$a =$ _______ $b =$ _______ $c =$ _______ $\Delta =$ _______ $x^I =$ _______ $x^{II} =$ _______ $x_V =$ _______ $y_V =$ _______ $(0, c) = (0, \_)$	
g) $y = x^2 - 4 \cdot x + 4$	$a =$ _______ $b =$ _______ $c =$ _______ $\Delta =$ _______ $x^I =$ _______ $x^{II} =$ _______ $x_V =$ _______ $y_V =$ _______ $(0, c) = (0, \_)$	
h) $y = 2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 4$	$a =$ _______ $b =$ _______ $c =$ _______ $\Delta =$ _______ $x^I =$ _______ $x^{II} =$ _______ $x_V =$ _______ $y_V =$ _______ $(0, c) = (0, \_)$	

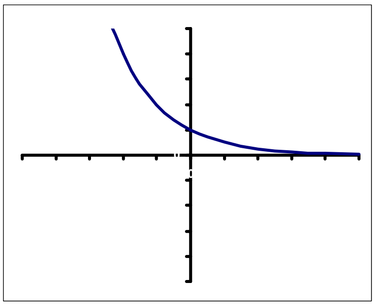
Função Exponencial

É toda função que pode ser escrita como: $\boxed{F(x)=a^{(k\cdot x)}}$, onde $a>0$ e $a\neq 1$

Gráfico:



a > 1 - crescente



0 < a < 1 - decrescente

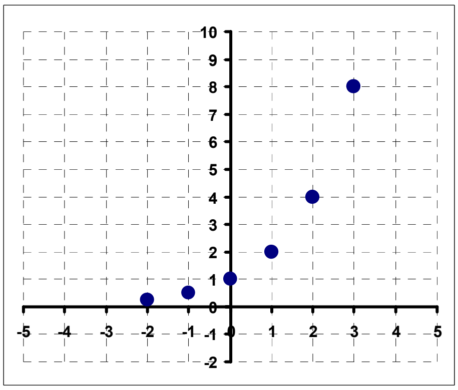
Exemplo 1: Fazer o gráfico de $y=2^x$

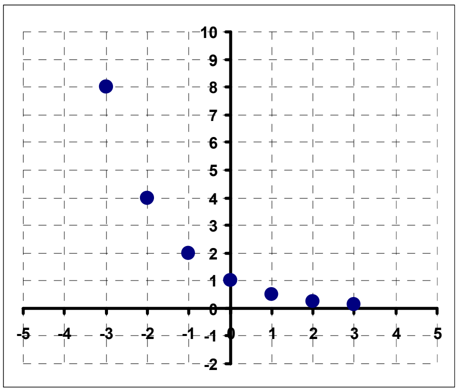
Exemplo 2: Fazer o gráfico de $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

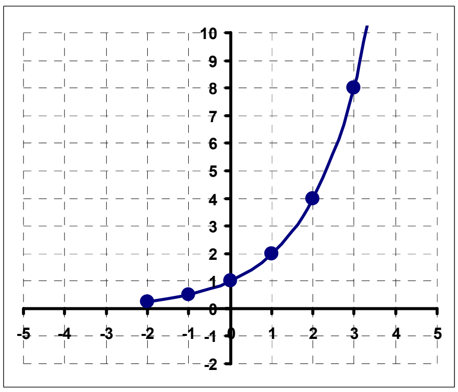
Montar uma tabela com valores atribuídos para "x" e calcular os respectivos valores para "y"

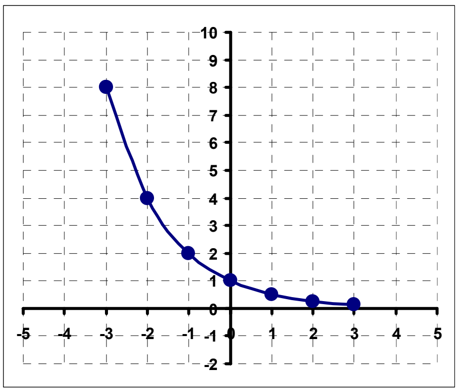
X	Y
-2	0.25
-1	0.50
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16

X	Y
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	0.5
2	0.25
3	0.125





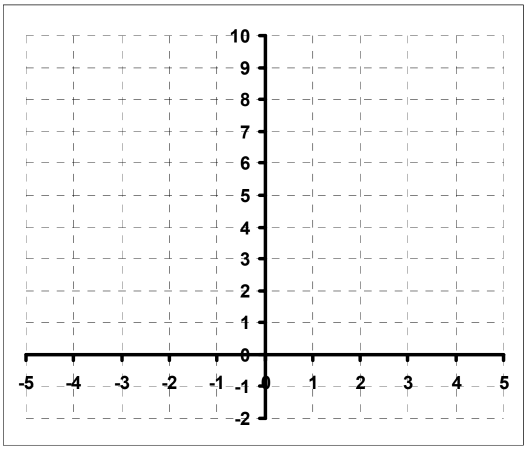




<u>Exercícios sobre Função Exponencial</u>: Traçar o gráfico para as funções abaixo:

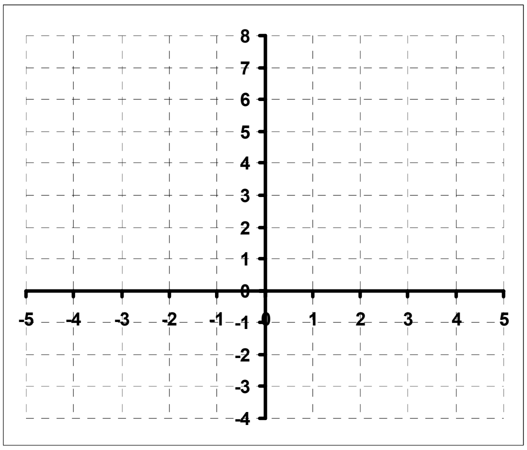
a) $y = 3^x + 2$

X	Y
-5	
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	



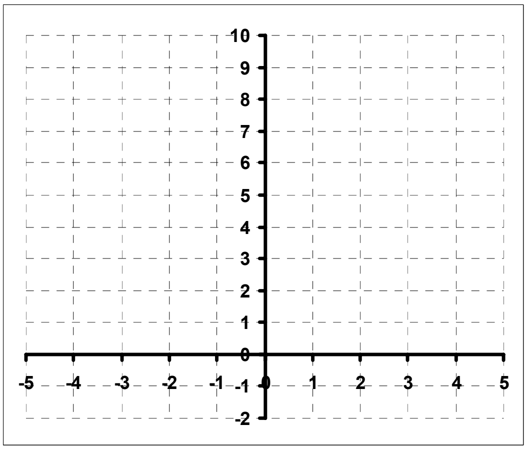
b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$

X	Y
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	
5	



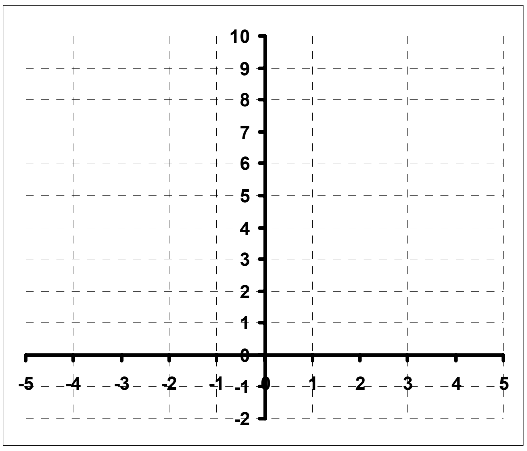
c) $y = 4 \cdot 2^x - 1$

X	Y
-5	
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	



d) $y = 2 \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^x + 2$

X	Y
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	
5	

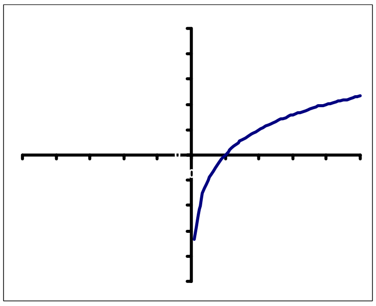


Função Logarítmica

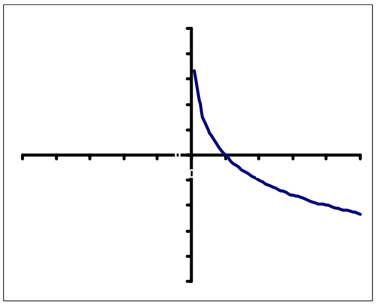
É toda função que pode ser escrita como:

$\boxed{F(x)=\log_a(x)}$, onde $a>0$, $a\neq 1$ e $x>0$

Gráfico:



a > 1 - crescente



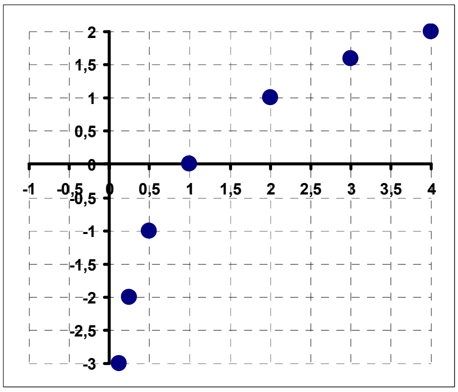
0 < a < 1 - decrescente

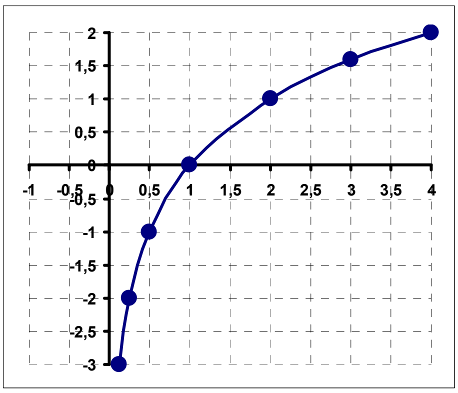
Exemplo 1: Fazer o gráfico de $y=\log_2(x)$

Exemplo 2: Fazer o gráfico de $y=\log_{\left(\frac{1}{2}\right)}(x)$

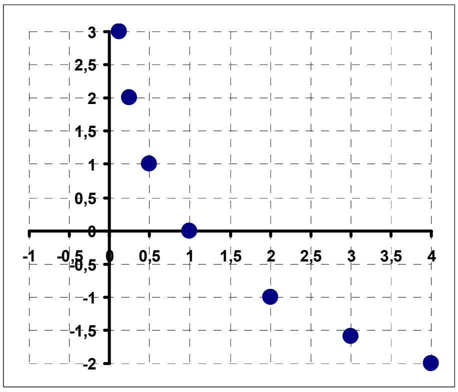
Montar uma tabela com valores atribuídos para "x" e calcular os respectivos valores para "y"

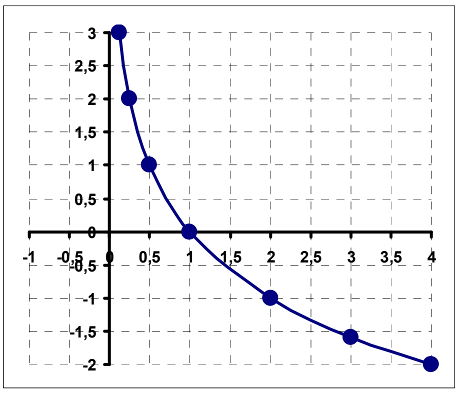
X	Y
0.125	-3
0.25	-2
0.5	-1
1	0
2	1
3	1.585
4	2





X	Y
0.125	3
0.25	2
0.5	1
1	0
2	-1
3	-1.585
4	-2

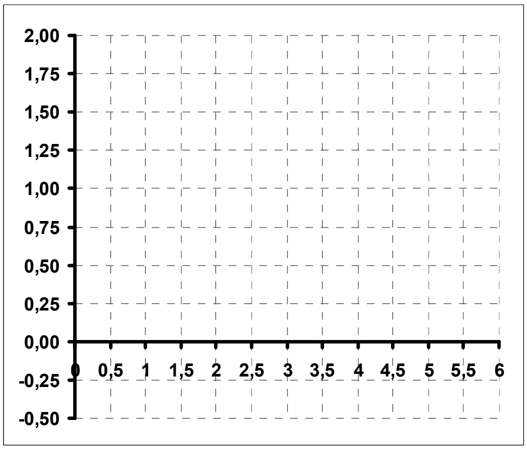




Exercícios sobre Função Logarítmica: Traçar o gráfico para as funções abaixo:

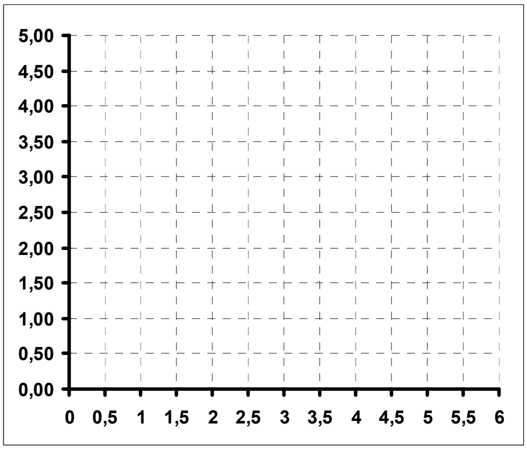
a) $y = \log(x) + 1$

X	Y
0.1	
1	
2	
3	
4	
5	
6	



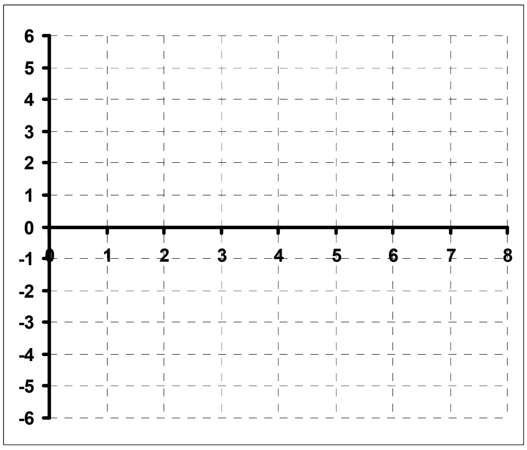
b) $y = 2 \cdot \ln(x) + 1$

X	Y
1	
2	
e	
3	
4	
5	
6	



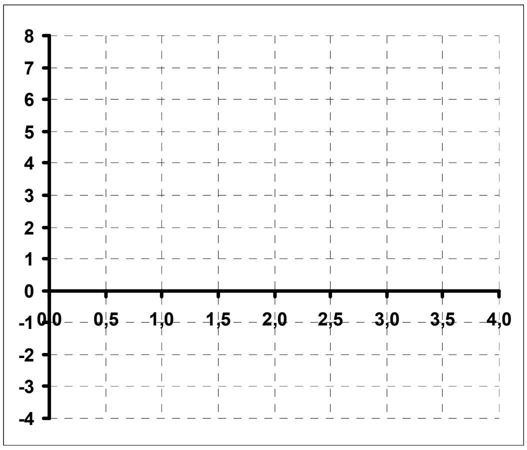
c) $y = 4 \cdot \log_{\left(\frac{1}{4}\right)}(x)$

X	Y
1/6	
1/4	
1	
2	
3	
4	
8	



d) $y = 4 \cdot \log_3(2 \cdot x)$

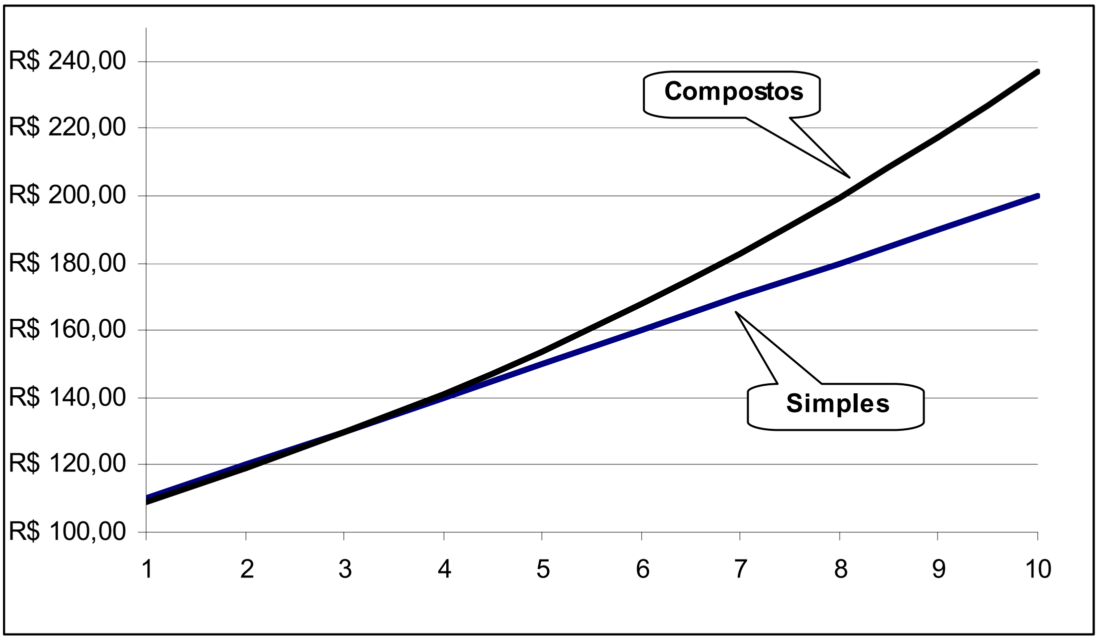
X	Y
1/6	
1/2	
1	
3/2	
2	
3	
4	



Aplicação de Função Exponencial e Função Logarítmica

Considere um empréstimo de R$ 100,00 em duas propostas distintas. A primeira a juros simples com uma taxa de 10 % ao mês e a segunda a juros compostos a uma taxa de 9 % ao mês. Este empréstimo deve ser pago em uma parcela única que pode ser efetuada a até o 5º mês após o recebimento do dinheiro. Vamos ver qual seria a evolução do montante a ser pago (capital inicial + juros) mês a mês nas duas situações.

	Juros Simples 10 %	**Juros Compostos 9 %**
1º) Mês	R$ 110,00	R$ 109,00
2º) Mês	R$ 120,00	R$ 118,81
3º) Mês	R$ 130,00	R$ 129,50
4º) Mês	R$ 140,00	R$ 141,16
5º) Mês	R$ 150,00	R$ 153,86
6º) Mês	R$ 160,00	R$ 167,71
7º) Mês	R$ 170,00	R$ 182,80
8º) Mês	R$ 180,00	R$ 199,26
9º) Mês	R$ 190,00	R$ 217,19
10º) Mês	R$ 200,00	R$ 236,74



O gráfico acima mostra que o montante comporta-se como uma função do 1º Grau no sistema de juros simples e como uma função exponencial no sistema de juros compostos.

Notação financeira:

P.V.	→	Valor presente (capital inicial)
i	→	Taxa de juros (%)
n	→	Prazo da operação
Int	→	Valor do Juros
F.V.	→	Valor futuro (montante)

Fórmulas:

	Juros Simples	Juros Compostos
P.V.	$\dfrac{Int}{i \cdot n}$	$\dfrac{F.V}{(1+i)^n}$
i	$\dfrac{Int}{P.V. \cdot n}$	$\left(\dfrac{F.V.}{P.V.}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} - 1$
n	$\dfrac{Int}{P.V. \cdot i}$	$\dfrac{\ln\left(\dfrac{F.V.}{P.V.}\right)}{\ln(1+i)}$
Int	$P.V. \cdot i \cdot n$	$P.V. \cdot \left[(1+i)^n - 1\right]$
F.V.	$P.V. \cdot (1 + i \cdot n)$	$P.V. \cdot (1+i)^n$

Nas questões seguintes considerar o sistema de juros compostos

1) O Capital de R$ 3.200,00 produziu o montante de R$ 3.500,00 em um ano. Considerando a capitalização mensal, qual é a taxa mensal de juros?

R.: 0,7496 % ao mês

2) O Capital de R$ 22.000,00 aplicado à taxa de 22 % ao ano, produziu o montante de R$ 29.645,75. Quanto tempo ficou aplicado?

R.: 1 ano e meio (1,5 anos)

3) Um capital de R$ 500,00, aplicado à taxa de 4 % ao mês, rendeu de juros R$ 157,97. Quanto tempo este capital ficou aplicado?

R.: 7 meses

4) Um capital de R$ 6.200,00 foi aplicado à taxa de 1 % ao mês, sendo o prazo desta aplicação de 2 anos, seis meses e quinze dias, qual o valor do montante resgatado?

R.: R$ 8.398,34

5) Um capital de R$ 1.000,00 foi aplicado à taxa de 8.5 % ao ano, sendo o prazo desta aplicação de 15 meses, qual o valor do montante resgatado?

R.: R$ 1.107,36

6) Uma aplicação produziu o montante de R$ 2.805,10. Sabendo que à taxa foi de 7 % ao ano, sendo o prazo desta aplicação de 5 anos, qual o valor do capital inicial?

R.: R$ 2.000,00

Exercícios Adicionais

Nos exercícios seguintes considerar o sistema de juros compostos. Usar 2 casas após a vírgula para a resposta final. Nos cálculos intermediários, recomenda-se utilizar todas as casas da calculadora.

1) O Capital de R$ 5.700,00 produziu o montante de R$ 9.500,00 em um ano. Considerando a capitalização mensal, qual é a taxa mensal de juros?

R.: 4,3488 %

2) O Capital de R$ 12.000,00 aplicado à taxa de 14 % ao ano, produziu o montante de R$ 30.027,23. Quanto tempo ficou aplicado?

R.: 7,00 anos

3) Um capital de R$ 1.000,00, aplicado à taxa de 9 % ao mês, rendeu de juros R$ 411,58. Quanto tempo este capital ficou aplicado?

R.: 4 meses

4) Um capital de R$ 4.800,00 foi aplicado à taxa de 0,5 % ao mês, sendo o prazo desta aplicação de 3 anos, cinco meses e dez dias, qual o valor do montante resgatado?

R.: R$ 5898,91

5) Um capital de R$ 2.000,00 foi aplicado à taxa de 8.5 % ao ano, sendo o prazo desta aplicação de 19 meses, qual o valor do montante resgatado?

R.: R$ 2275,76

6) Uma aplicação produziu o montante de R$ 711,66. Sabendo que à taxa foi de 4 % ao ano, sendo o prazo desta aplicação de 9 anos, qual o valor do capital inicial?

R.: R$ 500,00

7) O Capital de R$ 6.700,00 produziu o montante de R$ 19.500,00 em um ano. Considerando a capitalização mensal, qual é a taxa mensal de juros?

R.: 9,3109 %

8) O Capital de R$ 1.200,00 aplicado à taxa de 17 % ao ano, produziu o montante de R$ 1.642,68. Quanto tempo ficou aplicado?

R.: 2 anos

9) Um capital de R$ 2.000,00, aplicado à taxa de 6 % ao mês, rendeu de juros R$ 382,03. Quanto tempo este capital ficou aplicado?

R.: 3 meses

10) Um capital de R$ 2.400,00 foi aplicado à taxa de 0,7 % ao mês, sendo o prazo desta aplicação de 4 anos, cinco meses e vinte dias, qual o valor do montante resgatado?

R.: R$ 3489,74

11) Um capital de R$ 3.000,00 foi aplicado à taxa de 7.5 % ao ano, sendo o prazo desta aplicação de 17 meses, qual o valor do montante resgatado?

R.: R$ 3323,66

12) Uma aplicação produziu o montante de R$ 394,78. Sabendo que à taxa foi de 4 % ao ano, sendo o prazo desta aplicação de 7 anos, qual o valor do capital inicial?

R.: R$ 300,00

CAPÍTULO 2

Limites – Noções Básicas

Limites - Noção Intuitiva

Sejam as seguintes sucessões numéricas:

		Esta seqüência vai para...
a)	1, 2, 3, 4, 5, 6...	
b)	$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}...$	
c)	2, 1, 0, -1, -2, -3, -4...	
d)	$1, \frac{3}{2}, 3, \frac{7}{11}, -14, 8, 0...$	
e)	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}...$	

Limites de Funções Contínuas

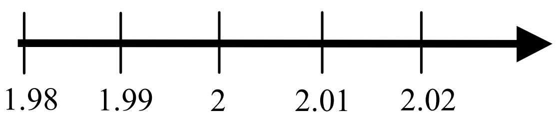
Exemplo 1: Seja a função $y = 2 \cdot x + 1$
Problema: Fazer o "x" se aproximar de um número (2 por exemplo).
O que se quer observar? Para qual valor o "y" está se aproximando?

Pela esquerda (-) (valores menores que 2)

X	Y
1.5	
1.6	
1.9	
1.99	
1.999	

Pela direita (+) (valores maiores que 2)

X	Y
2.5	
2.3	
2.1	
2.01	
2.001	



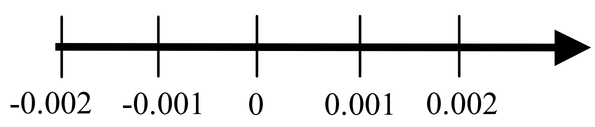
Note que tanto pela esquerda como pela direita, fez-se o "x" aproximar-se o número 2 (conforme pedia o problema) porém sem nunca atingi-lo. Pois bem, para que valor o "y" se aproximou quando "x" se aproximou de 2 pela esquerda? E pela direita?

	Pela esquerda (-) (valores menores que 2)	Pela direita (+) (valores maiores que 2)	No ponto
Pergunta:	$\lim\limits_{x \to 2^-} (2 \cdot x + 1)$	$\lim\limits_{x \to 2^+} (2 \cdot x + 1)$	$\lim\limits_{x \to 2} (2 \cdot x + 1)$
Como se lê:	Qual é o <u>limite lateral pela esquerda</u> da função $y = 2 \cdot x + 1$ quando o “x” aproxima-se de 2?	Qual é o <u>limite lateral pela direita</u> da função $y = 2 \cdot x + 1$ quando o “x” aproxima-se de 2?	Qual é o <u>limite</u> da função $y = 2 \cdot x + 1$ quando o “x” aproxima-se de 2?
A resposta:	Analisando os resultados obtidos na tabela, conclui-se que a resposta é: 5	Analisando os resultados obtidos na tabela, conclui-se que a resposta é: 5	<u>Como os limites laterais são iguais</u> (tanto pela direita como pela esquerda) o limite no ponto será: 5

Exemplo 2: Seja a função $y = \dfrac{1}{x}$

Fazer o “x” se aproximar do número 0 (zero)
Para qual valor o “y” está se aproximando?

Pela esquerda (-) (valores menores que 0)		Pela direita (+) (valores maiores que 0)	
X	Y	X	Y
-0.1		0.1	
-0.05		0.05	
-0.01		0.01	
-0.005		0.005	
-0.001		0.001	



Note que tanto pela esquerda como pela direita, fez-se o “x” aproximar-se o número 0 (conforme pedia o problema) porém sem nunca atingi-lo. Para que valor o “y” se aproximou quando “x” se aproximou de 0 pela esquerda? E pela direita?

	Pela esquerda (-) (valores menores que 0)	Pela direita (+) (valores maiores que 0)	No ponto
Pergunta:	$\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x}\right)$	$\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)$	$\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x}\right)$
Como se lê:	Qual é o limite lateral pela esquerda da função $y = \frac{1}{x}$ quando o "x" aproxima-se de 0?	Qual é o limite lateral pela direita da função $y = \frac{1}{x}$ quando o "x" aproxima-se de 0?	Qual é o limite da função $y = \frac{1}{x}$ quando o "x" aproxima-se de 0?
A resposta:	Analisando os resultados obtidos na tabela, conclui-se que a resposta é: $-\infty$	Analisando os resultados obtidos na tabela, conclui-se que a resposta é: $+\infty$	Como os limites laterais são diferentes o limite no ponto não existe $\nexists$

Propriedades dos Limites:

a)	$\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$
b)	$\lim\limits_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$
c)	$\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$
d)	$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$
e)	$\lim\limits_{x \to a} f(x)^m = \left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right)^m$
f)	$\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$
g)	$\lim\limits_{x \to a} \log(f(x)) = \log\left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right)$

Algumas contas com o "número" ∞ e com um número que tende (aproxima-se) de 0 (zero)

a)	$+\infty+1=$	j)	$+\infty-\infty=$
b)	$+\infty-5=$	k)	$-\infty+\infty=$
c)	$-\infty-3=$	l)	$\frac{+\infty}{+5}=$
d)	$-\infty+6=$	m)	$\frac{-\infty}{+9}=$
e)	$2\cdot(+\infty)=$	n)	$\frac{+\infty}{-7}=$
f)	$5\cdot(-\infty)=$	o)	$\frac{-\infty}{-10}=$
g)	$(-4)\cdot(+\infty)=$	p)	$2^{+\infty}=$
h)	$(-7)\cdot(-\infty)=$	q)	$\frac{1}{+\infty}=$
i)	$(+\infty)\cdot(+\infty)=$	r)	$\frac{-5}{+\infty}=$

s)	$(+\infty)\cdot(-\infty)=$	aa)	$\frac{-\infty}{+\infty}=$
t)	$(-\infty)\cdot(-\infty)=$	ab)	$\frac{+\infty}{-\infty}=$
u)	$+\infty+\infty=$	ac)	$\frac{-\infty}{-\infty}=$
v)	$-\infty-\infty=$	ad)	$\frac{1}{0}=$
w)	$\frac{1}{-\infty}=$	ae)	$\frac{1}{0^-}=$
x)	$2^{-\infty}=$	af)	$\frac{1}{0^+}=$
y)	$\frac{+\infty}{+\infty}=$	ag)	$\frac{-3}{0^-}=$
z)	$\frac{0}{0}=$	ah)	$\frac{-5}{0^+}=$

De forma geral, para calcular um limite de uma função basta fazer:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=f(a)}$$

A resposta encontrada pode ser um número (positivo, negativo ou zero) ou infinito e este será o limite da função. Quando a resposta encontrada resulta em uma indeterminação (zero dividido por zero, infinito dividido por infinito, mais infinito menos infinito) faz-se necessário o estudo dos limites à direta e à esquerda para saber qual é o limite no ponto.

Exemplo - Calcule o limite:

$$\boxed{\lim_{x\to 3} (3\cdot x+4)}$$

Solução:

Deve-se atribuir o valor para o qual o "x" está tendendo (3 para este exemplo) na função e efetuar o cálculo. A resposta para este limite será:

$$\boxed{\lim_{x\to 3} (3\cdot x+4)=13}$$

Exercícios – calcular os limites:

		Resposta
1)	$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 + 3 \cdot x}{3 \cdot x + 1} \right)$	$\frac{10}{7}$
2)	$\lim_{x \to \left(\frac{3}{4}\right)} \left(\frac{2 \cdot x^3 + \sqrt{x^3} + 4}{\sqrt[3]{x + 1}} \right)$	4.558
3)	$\lim_{x \to \left(\frac{7}{5}\right)} \left(\frac{7 \cdot x^2 + \sqrt[3]{x} + 2}{4 \cdot x^2 + \sqrt{x}} \right)$	1.866
4)	$\lim_{x \to 9} \left(\frac{8 \cdot x^2 + 5 \cdot x - \sqrt{x}}{9 \cdot x - 7 \cdot x^2} \right)$	-1.419
5)	$\lim_{x \to \frac{5}{4}} \left(\frac{\sqrt{3 \cdot x^4} + 12 + x^3}{\sqrt[3]{x + 2}} \right)$	11.247
6)	$\lim_{x \to -1} \left(\frac{5 \cdot x - x^2}{4 + x + x^3} \right)$	-3

Indeterminações

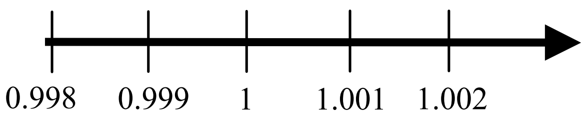
Quando se substitui o valor para o qual o "x" está tendendo na função e o resultado é uma indeterminação, é possível sair desta indeterminação e achar o valor correto do limite através de técnicas algébricas. Este procedimento pode exigir, em alguns casos, um conhecimento sólido de álgebra. Sugere-se o método das aproximações pela esquerda e pela direita para resolver os problemas de indeterminação.

Indeterminação do Tipo $\frac{0}{0}$

Exemplo: $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2 + 2 \cdot x - 3}{x^2 - 1} \right)$

Fazendo-se a substituição do "1" no lugar do "x" e efetuando-se a conta, surge a indeterminação $\frac{0}{0}$, e esta <u>não é a resposta</u> do limite. Para achar o valor do limite deve-se analisar os limites laterais, fazendo o "x" aproximar-se do número "1"

Pela esquerda (-) (valores menores que 1)		Pela direita (+) (valores maiores que 1)	
X	Y	X	Y
0.7		1.5	
0.8		1.2	
0.9		1.1	
0.99		1.01	
0.999		1.001	



A resposta: <u>Como os limites laterais são iguais</u> (tanto pela direita como pela esquerda) o limite no ponto será "2", então:

$$\boxed{\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2 + 2 \cdot x - 3}{x^2 - 1} \right) = 2}$$

Exercícios – calcular os limites:

		Limite Lateral-Esquerda		Limite Lateral-Direita		Resposta
		X	Y	X	Y	
a)	$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)$	1.7		2.5		4
		1.8		2.2		
		1.9		2.1		
		1.99		2.01		
		1.999		2.001		
		X	Y	X	Y	
b)	$\lim_{x \to 3} \left(\frac{x-3}{x^2-9}\right)$	2.7		3.5		0.166
		2.8		3.2		
		2.9		3.1		
		2.99		3.01		
		2.999		3.001		
		X	Y	X	Y	
c)	$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2-4}{x^2-3\cdot x+2}\right)$	1.7		2.5		4
		1.8		2.2		
		1.9		2.1		
		1.99		2.01		
		1.999		2.001		
		X	Y	X	Y	
d)	$\lim_{x \to -1} \left(\frac{x^2-1}{x^2+3\cdot x+2}\right)$	-1.5		-0.7		-2
		-1.2		-0.8		
		-1.1		-0.9		
		-1.01		-0.99		
		-1.001		-0.999		
		X	Y	X	Y	
e)	$\lim_{x \to 5} \left(\frac{x^2-6\cdot x+5}{x^2-7\cdot x+10}\right)$	4.7		5.5		1.333
		4.8		5.2		
		4.9		5.1		
		4.99		5.01		
		4.999		5.001		
		X	Y	X	Y	
f)	$\lim_{x \to -2} \left(\frac{x^3-3\cdot x+2}{x^2-4}\right)$	-2.5		-1.7		-2.25
		-2.2		-1.8		
		-2.1		-1.9		
		-2.01		-1.99		
		-2.001		-1.999		

Indeterminações do Tipo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ou $(+\infty-\infty)$

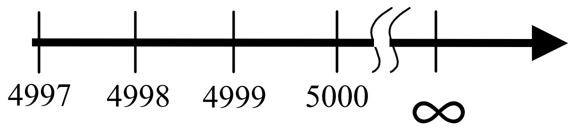
Exemplo 1: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{10 \cdot x^2 + x}{1 + 2 \cdot x^2} \right)$

Fazendo-se a substituição do "∞" no lugar do "x" e efetuando-se a conta, surge a indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$, e esta <u>não é a resposta</u> do limite. Para achar o valor do limite deve-se analisar o limite lateral <u>apenas</u> pela esquerda (pois não se pode ficar a direita do ∞ sendo que não existe número maior do que o próprio!)

Pela esquerda (-) (valores menores que ∞)	Pela direita (+) (valores maiores que ∞)

X	Y
10	
100	
500	
1000	
5000	

X	Y
?	
?	
?	
?	
?	



A resposta: Analisando os valores de "y" quando "x" cresce, chega-se a conclusão que:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{10 \cdot x^2 + x}{1 + 2 \cdot x^2} \right) = 5$$

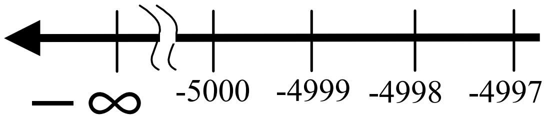
Exemplo 2: $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{9 \cdot x^2 + x}{2 \cdot x + 3 \cdot x^2} \right)$

Fazendo-se a substituição do "$-\infty$" no lugar do "x" e efetuando-se a conta, surge a indeterminação $\left(\frac{\infty - \infty}{-\infty + \infty} \right)$, e esta <u>não é a resposta</u> do limite. Para achar o valor do limite deve-se analisar o limite lateral <u>apenas</u> pela direita (pois não se pode ficar a esquerda do $-\infty$ sendo que não existe número menor do que o próprio!)

Pela esquerda (-) (valores menores que $-\infty$)	Pela direita (+) (valores maiores que $-\infty$)

X	Y
?	
?	
?	
?	
?	

X	Y
-10	
-100	
-500	
-1000	
-5000	



A resposta: Analisando os valores de “y” quando “x” decresce, chega-se a conclusão que:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{9 \cdot x^2 + x}{2 \cdot x + 3 \cdot x^2} \right) = 3$$

<u>Exercícios – calcular os limites:</u>

		Limite Lateral X	Limite Lateral Y	R.
a)	$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 7} \right)$	10		1
		20		
		50		
		90		
		100		
b)	$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2 \cdot x^2 + x + 8}{x - 1} \right)$	-10		$-\infty$
		-20		
		-50		
		-90		
		-100		
c)	$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3 + 2 \cdot x^2}{x^4 - 7 \cdot x^3 + 5} \right)$	10		0
		20		
		50		
		90		
		100		

		Limite Lateral X	Limite Lateral Y	R.
d)	$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^4 + 2 \cdot x + 1}{3 \cdot x^4 + x} \right)$	-10		0.333
		-20		
		-50		
		-90		
		-100		
e)	$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3 + 2 \cdot x^2}{8 - x^2} \right)$	-10		$+\infty$
		-20		
		-50		
		-90		
		-100		
f)	$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3 \cdot x^3 - 5 \cdot x}{x^4 + 8 \cdot x + 3} \right)$	10		0
		20		
		50		
		90		
		100		

Exercícios de reforço

Para calcular os limites deve-se primeiro substituir o valor do “x” na função e calcular o limite. Somente é necessário o uso das tabelas de aproximação quando o calculo resultou em uma indeterminação. Nos exercícios abaixo, as várias situações ocorrem.

		R.
a)	$\lim_{x \to 7} (10)$	10
b)	$\lim_{x \to 3} (-9)$	-9
c)	$\lim_{x \to 5^-} \left[4 + \frac{3}{(5-x)}\right]$	$+\infty$
d)	$\lim_{x \to 5^+} \left[4 + \frac{3}{(5-x)}\right]$	$-\infty$
e)	$\lim_{x \to 5} \left[4 + \frac{3}{(5-x)}\right]$	$\nexists$
f)	$\lim_{x \to -\infty} \left(x^3\right)$	$-\infty$
g)	$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^3 + 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 12}{x^2 + x - 6}\right)$	4
h)	$\lim_{x \to 4} \left(\frac{4^x + x^2}{5 \cdot x}\right)$	13.6
i)	$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{5 \cdot x^2 + 10 \cdot x^3 + x}{1 + x + 2 \cdot x^3}\right)$	5
j)	$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x + 3 \cdot x^2 - 2}{-2 \cdot x^3 + x}\right)$	0
k)	$\lim_{x \to -3^+} \left[4 + \frac{1}{(x+3)}\right]$	$+\infty$

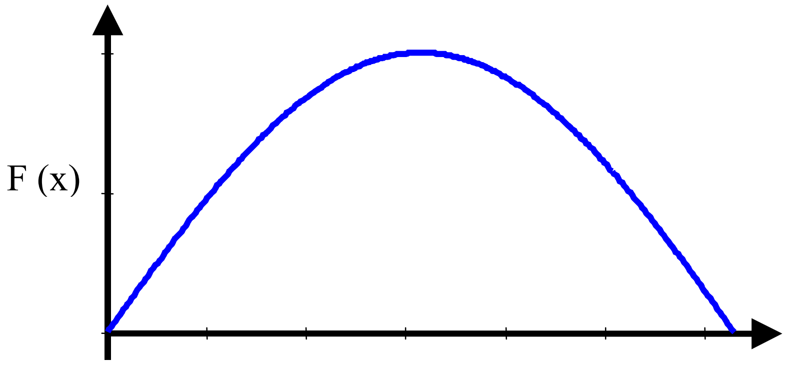
		R.
l)	$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} + 8\right)$	$+\infty$
m)	$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} + 5\right)$	$+\infty$
n)	$\lim_{x \to -3} \left(\frac{x^3 + 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 12}{x^2 + x - 6}\right)$	-1
o)	$\lim_{x \to 2} \left(\ln(x) + 6^x\right)$	36.693
p)	$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{5 \cdot x^2 + 8 \cdot x^3 + x}{1 + x + 2 \cdot x^3}\right)$	4
q)	$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$	$+\infty$
r)	$\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$	$+\infty$
s)	$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$	$+\infty$
t)	$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$	$-\infty$
u)	$\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$	$-\infty$
v)	$\lim_{x \to -5^-} \left[4 - \frac{3}{(-5-x)}\right]$	$-\infty$

CAPÍTULO 3

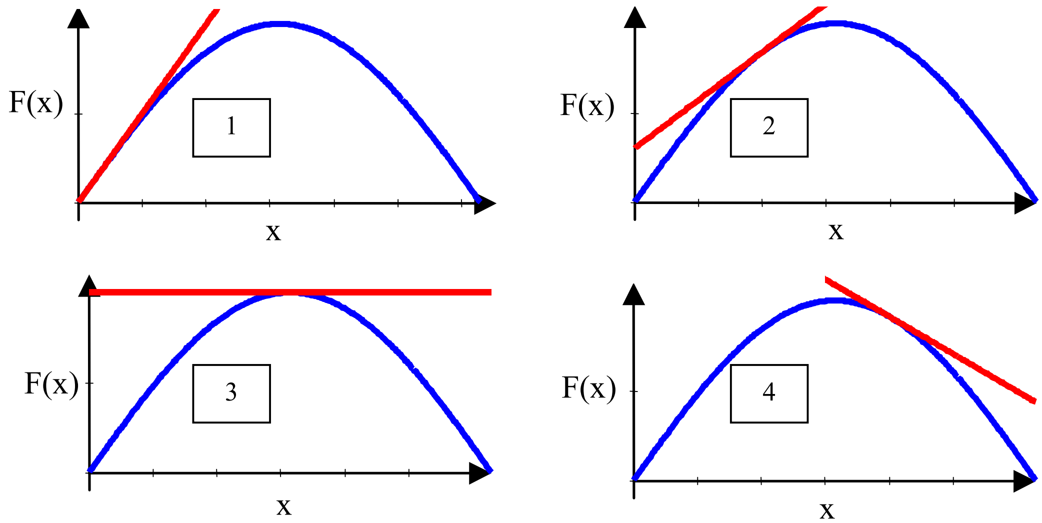
Derivadas

1 Introdução

Observe o gráfico abaixo, ele representa uma função:



Agora, imagine uma reta que desliza sobre esta curva, encostando em apenas um ponto da mesma. Observe as figuras seguintes para entender melhor:



Definição: A inclinação (ou coeficiente angular) da reta tangente à curva em um determinado ponto (**X1,Y1**) desta curva é o valor da derivada da função representada pela curva, para este ponto (**X1,Y1**).

Observa-se, nas figuras anteriores, que a inclinação da curva varia. Examinemos:

Figura	Inclinação
1	**Positiva e de máximo valor**
2	**Positiva, porém de valor menor**
3	**Zero**
4	**Negativa**

Pode-se tirar algumas conclusões da análise anterior:

1. Quando uma função cresce (quando se aumenta **x**, **y** aumenta também) a sua derivada é positiva;
2. Quando uma função decresce (quando se aumenta **x**, **y** diminui) a sua derivada é negativa;
3. Quando uma função está crescendo ou decrescendo e atinge o seu máximo (positivo ou negativo) o valor da derivada neste ponto é igual a zero.

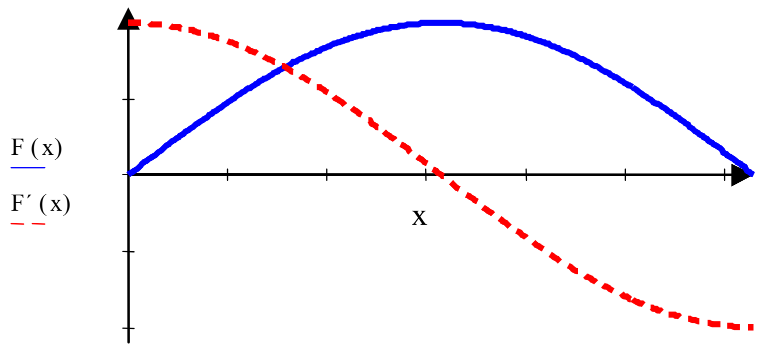
Definição da derivada em um ponto (X1, Y1):

$$\boxed{F'(X1) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{F(X1+\Delta X) - F(X1)}{\Delta X}\right)}$$

2 Regras de Derivação

Como observou-se na seção anterior, a derivada de uma função varia, ou pode variar, dependendo do ponto **x** onde deseja-se conhecer a derivada. Ou seja, a derivada de uma função é, também, uma **função,** uma vez que o seu valor depende de **x**.

Na figura abaixo, podemos comprovar a afirmação anterior, nela estão representadas a função já vista na seção anterior e, também, o valor da sua derivada para todos os pontos da função.



Obs.: A derivada de uma função qualquer ***f(x)*** é comumente representada por ***f´(x)***. Observe o uso do apóstrofo.

Existem algumas regras que permitem determinar as derivadas das funções de maneira bem simples.

A. Derivada de uma função constante: Se c é uma constante e $f(x) = c$ para todo x, então:

   $\boxed{f'(x) = 0}$.

   Ex.: Seja $f(x) = 5$, então : $f'(x) = 0$

B. Derivada de um monômio qualquer (Regra da Potência): Se n é um número real e

   $f(x) = x^n$, então $\boxed{f'(x) = n.\, x^{n-1}}$.

   Ex.1: Seja $f(x) = x^5$, então: $f'(x) = 5.\, x^4$

   Ex.2: Seja $f(x) = x$, então: $f'(x) = 1.\, x^{1-1} = 1.\, x^0 = 1$

   Ex.3: Seja $f(x) = x^{10}$, então: $f'(x) = 10.\, x^9$

C. Derivada do Produto de uma Constante por uma Função: Sejam $f(x)$ uma função, c uma constante e g(x) tal que g(x) = c.f(x). Se f´(x) existe, então: $\boxed{g'(x) = c.f'(x)}$

Ex.: Seja $f(x) = 8.x^2$, então : $f'(x) = 8.(2)\ x^{2-1} = 16.\ x$

D. Derivada de uma Soma: Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções e $h(x)$ a função definida por $h(x) = f(x) + g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então: $\boxed{h'(x) = f'(x) + g'(x)}$

Ex.1: Seja $f(x) = 3.x^4 + 8.x + 5$, então: $f'(x) = 3.\ (4.x^3) + 8.\ 1 + 0 = 12.x^3 + 8$

Ex.2: Seja $g(x) = 9.x^5 - 4.x^2 + 2.x + 7$, então:

$$g'(x) = 9.\ (5.x^4) - 4.\ (2.x) + 2.\ (1.\ x^{1-1}) + 0 = 45.x^4 - 8.x + 2$$

E. Derivada de um Produto: Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções e $h(x)$ a função definida por $h(x) = f(x)\ .\ g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então:

$$\boxed{h'(x) = f(x).\ g'(x) + f'(x).g(x)}$$

Ex.: Seja $f(x) = (2.x^3 - 1).(x^4 + x^2)$, então:

$$f'(x) = (2.x^3 - 1).(4.x^3 + 2.x) + (6.x^2).\ (x^4 + x^2)$$

F. Derivada de um Quociente: Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções e $h(x)$ a função definida por $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, onde $g(x) \neq 0$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então:

$$\boxed{h'(x) = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}}$$

Ex.: Seja $f(x) = \dfrac{2.x^4 - 3}{x^2 - 5.x + 3}$, então:

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 5.x + 3).(4.2.x^3 - 0) - (2.x^4 - 3).(2.x - 5)}{(x^2 - 5.x + 3)^2}$$

3 Exercícios. Encontrar a derivada das seguintes funções, aplicando as regras de derivação

1)	$f(x) = 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 10$	7)	$f(x) = \dfrac{2 \cdot x + 4}{3 \cdot x - 1}$
2)	$f(x) = 14 - \dfrac{1}{2} \cdot x^{-3}$	8)	$f(t) = \dfrac{t - 1}{t + 1}$
3)	$f(x) = (2 \cdot x + 1) \cdot \left(3 \cdot x^2 + 6\right)$	9)	$f(x) = \dfrac{3}{x^4} + \dfrac{5}{x^5}$
4)	$f(x) = (7 \cdot x - 1) \cdot (x + 4)$	10)	$f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot x^4 + \dfrac{2}{x^6}$
5)	$f(x) = \left(3 \cdot x^5 - 1\right) \cdot \left(2 - x^4\right)$	11)	$f(t) = \dfrac{3 \cdot t^2 + 5 \cdot t - 1}{t - 1}$
6)	$f(x) = (x + 1) \cdot (x - 1)$	12)	$f(x) = \dfrac{4 - x}{5 - x^2}$

4 Derivadas das Funções Exponenciais e Logarítmicas

4.1 Derivada de uma função Exponencial**:** Se $f(x) = a^{k.x}$, $(a > 0 \text{ e } \neq 1,\ k \in \Re)$ então

$$\boxed{f'(x) = a^{(k.x)}.k\,.\ln(a)}$$

Ex.: Seja $f(x) = 3^{2.x}$, então : $f'(x) = 3^{2.x}.(2).\ ln(3)$

4.2 Derivada de uma função Logarítmica**:** Se $f(x) = log_a\ k.x$, $(a > 0 \text{ e } \neq 1,\ k \in \Re)$ então

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{x.\ln(a)}} \qquad (a > 0 \text{ e } \neq 1)$$

Ex.: Seja $f(x) = = log_3\ 2.x$, então : $f'(x) = \dfrac{1}{x.\ln(3)}$

4.3 Derivada de uma função Logarítmica Natural (caso especial)**:** Se $f(x) = ln(\ k.x)$, $(a > 0 \text{ e } \neq 1,\ k \in \Re)$ então

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{x}} \qquad (a > 0 \text{ e } \neq 1)$$

Ex.: Seja $f(x) = = ln\ (2.x)$, então : $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

5 Exercícios - Calcular as derivadas das seguintes funções:

a) $y = 5.\ \ln\ (x)$	b) $y = 10^{x}$
c) $y = 2.\ln\ (x) + 2^{x} + 1$	d) $y = \dfrac{x^3}{3} - 6.\ln\ (x)$

6 Derivadas de Funções Compostas

Seja a função composta h, tal que h = v (u(x)) então a sua derivada h´ será:

$$\boxed{h' = v'\ (u(x))\ .\ u'(x)}$$

Exemplo: Seja $h(x) = (2.x + 3)^4$

Pode-se chamar $u(x) = 2.x + 3$ e reescrever a função $h(x) = (u(x))^4$

então $\boldsymbol{h'(x) = 4.(\ 2.x + 3)^3\ .\ 2 \Rightarrow \quad h'(x) = 8.(\ 2.x + 3)^3}$

7 Exercícios - Calcular as derivadas das seguintes funções compostas:

a) $y = (x^2 - 1)^5$	b) $y = 3.(1 - 3.x\ )^4$
c) $y = \sqrt{2 + x^2}$	d) $y = \sqrt{\left(\dfrac{2 + x^2}{x + 1}\right)}$

8 Derivadas Sucessivas

Seja uma função f(x), a sua derivada f ’(x) também é uma função, pode-se então pensar na derivada da função f ´(x).

Definição: Seja f(x) uma função derivável. Se f ´(x) também for derivável, então a sua derivada é chamada de derivada segunda de f(x) e é representada por f ´´(x).

Ex.: Seja $f(x) = 3.x^2 + 8.x + 1$,

então: $\boldsymbol{f'(x) = 6.x + 8}$ e

$\boldsymbol{f''(x) = 6}$

Se f ´´(x) é uma função derivável, sua derivada, representada por f ´´´(x) é chamada derivada terceira de f(x) e assim por diante.

Ex.: Seja $f(x) = 3.x^5 + 8.x^2$,

então: $\boldsymbol{f'(x) = 15.x^4 + 16.x}$,

$\boldsymbol{f''(x) = 60.x^3 + 16}$,

$\boldsymbol{f'''(x) = 180.x^2}$,

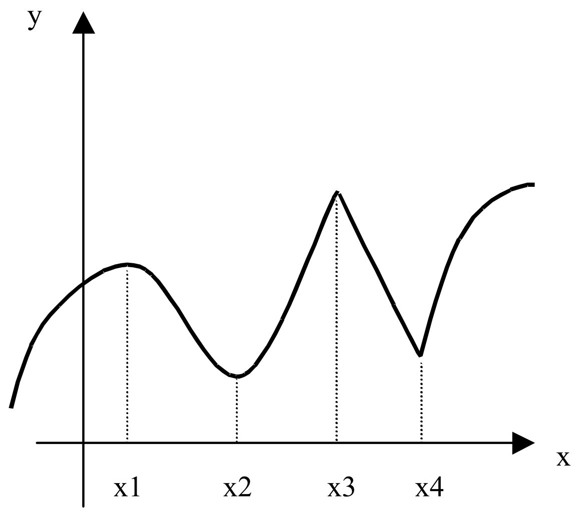
$\boldsymbol{f^{iv}(x) = 360.x}$,

$\boldsymbol{f^{v}(x) = 360}$,

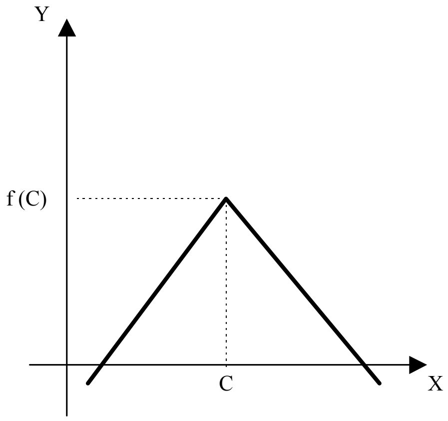
$\boldsymbol{f^{vi}(x) = 0}$

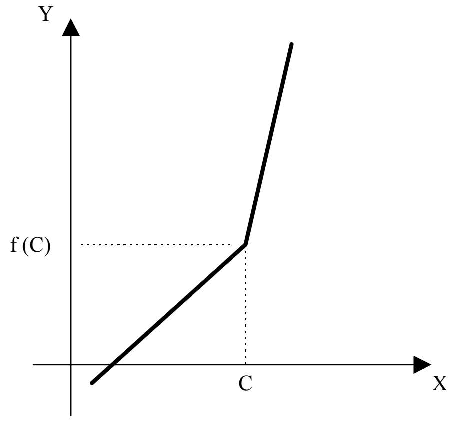
9 Máximos e Mínimos

A figura seguinte mostra o gráfico de uma função f(x), onde se apresentam os pontos onde x1, x2, x3 e x4 são as abscissas. Esses pontos são chamados de pontos extremos da função. Os valores f(x1) e f(x3) são chamados máximos relativos e f(x2) e f(x4) são chamados mínimos relativos.



Observe os gráficos abaixo:





Nota-se que nos pontos de coordenadas (C, f (C)) o valor da derivada é indefinido (a reta tangente à curva, nestes pontos, poderia ter qualquer inclinação, por isso, diz-se que a derivada não existe nestes pontos).

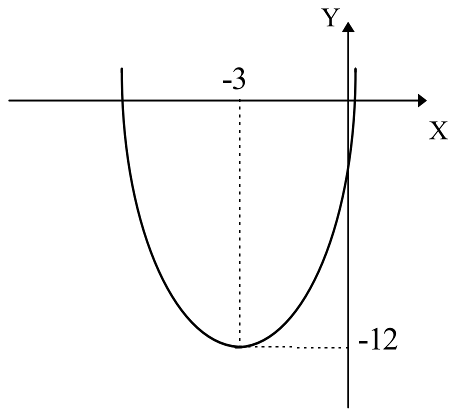
Uma <u>condição necessária</u> para a existência de um máximo ou mínimo de uma função é que este ponto tenha derivada igual a zero ou que e derivada não exista.

Atenção: Esta é uma condição <u>necessária</u>, mas não <u>suficiente</u>.

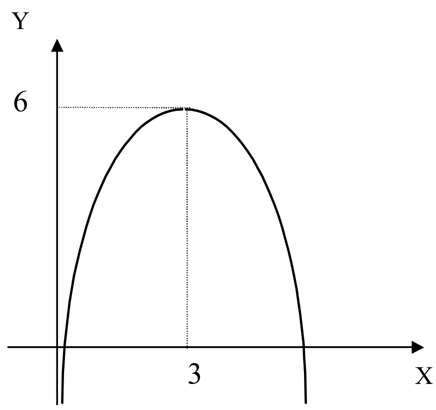
É interessante observar que uma função definida em um dado intervalo pode admitir diversos pontos extremos (máximos ou mínimos) relativos. O maior dos máximos relativos é chamado de <u>máximo absoluto</u>. Da mesma maneira, o menor dos mínimos relativos é chamado de mínimo absoluto.

Observe as funções abaixo:

1) $f(x) = x^2 + 6x - 3$
Ponto de mínimo absoluto em x = -3 [f (-3) = -12]



2) $f(x) = -x^2 + 6x – 3$
Ponto de máximo absoluto em x = 3 [f (3) = 6]



Critério da Derivada 2ª para determinação de máximos e mínimos de uma função

Seja f (x) uma função derivável e um valor de abscissa c tal que f ´(c) = 0, então, com certeza, este é um ponto extremo. Para saber se este é um ponto de máximo ou mínimo, pode-se utilizar o Critério da Derivada 2ª:

i) Se $f''(c) < 0$, f (x) tem um valor de máximo relativo em c.
ii) Se $f''(c) > 0$, f (x) tem um valor de mínimo relativo em c.

Exemplo:
Seja a função $f(x) = x^2 + x - 2$

Sabe-se que esta função tem um valor de máximo ou de mínimo quando a sua derivada for igual a zero, então o primeiro passo para se achar este ponto é derivar a função dada:

f´(x) = 2. x + 1, esta função é a derivada de f (x)

Agora, deve-se descobrir qual o valor da abscissa para a qual esta derivada torna-se igual a zero,

$$0 = 2.x + 1 \quad \Rightarrow \quad x = -\tfrac{1}{2}$$

Substituindo o valor encontrado (***x = -½***) em f (x), acha-se f (***-½***) = ***-9 /4***.

Então o ponto (-1/2, -9/4) da função, pode ser um ponto de máximo ou mínimo, pode-se usar então, o Critério da Derivada 2ª para descobrir:

$f''(x) = 2$ e $f''(-1/2) = 2 > 0$, então este é um ponto de mínimo da função.

10 Exercícios

- Quais os possíveis pontos de máximos e mínimos para as funções dadas abaixo nos respectivos intervalos dados:

  a) $y = 10.x + 5,\ x \in \Re$
  b) $y = -4.x + 5,\ 0 \le x \le 1$
  c) $y = 1 - x^2,\ x \in \Re$
  d) $y = 7.x^2 - 6.x + 3,\ x \in \Re$
  e) $y = (x - 2).(x + 4),\ x \in \Re$
  f) $y = [(x^3 \div 3)] - [(7.x^2) \div 2] + 12.x + 20,\ x \in \Re$
  g) $y = x^3 + 4,\ x \in \Re$

- O lucro de um fabricante com a venda de certos objetos pode ser representado pela seguinte função: L(x) = 400. (15-x) . (x-2), onde x é o preço unitário de venda. Calcule o preço ótimo de venda.

11 Exercícios de Reforço

Nas questões 1 a 12, calcule o valor das derivadas, para os respectivos valores de **x** indicados. As questões 13 e 14 têm enunciado próprio.

1)	$f(x)=\dfrac{2.x^5-6.x}{x^2-4.x+5}$	$f'(2)=$ R.: 154	2)	$f(x)=\dfrac{3.x^4-x^2}{x^3}$	$f'(-1)=$ R.: 4
3)	$f(x)=\dfrac{2}{7}$	$f'(4)=$ R.: 0	4)	$f(x)=\dfrac{2.x}{3}+7.x^3$	$f'(-5)=$ R.: 525.667
5)	$f(x)=\left(x^3-3x^2\right)\cdot\left(2.x^6-2.x\right)$	$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=$ R.: 3.195	6)	$f(x)=2.\log_3(2.x)+3.x^4$	$f'(2)=$ R.: 96.910
7)	$f(x)=3^{(2.x)}+1$	$f'\left(\dfrac{2}{3}\right)=$ R.: 9.507	8)	$f(x)=6.\ln(x)+8^2+5.x^0$	$f'(2)=$ R.: 3
9)	$f(x)=\left(5^{(2.X)}-3\right).\left(3.x-5.x^2\right)$	$f'(1)=$ R.: -314.944	10)	$f(x)=\sqrt[3]{x^4}+\log(5.x)$	$f'(2)=$ R.: 1.897
11)	$f(x)=3.\ln(x)+8^x+\sqrt{6}$	$f'\left(\dfrac{1}{3}\right)=$ R.: 13.159	12)	$f(x)=\dfrac{2.x}{7}+6.x^{-2}$	$f'(1)=$ R.: -11.714
13)	Um fabricante produz ***x*** toneladas de uma liga metálica. O lucro ***P*** , em reais, obtido pela produção é expresso pela função: **$P(x) = 12000.x - 15.x^2$** Quantas toneladas devem ser produzidas para maximizar o lucro? Resp.: 400 toneladas Dica: A derivada em um ponto de máximo ou mínimo para a função acima é igual a zero. Para saber se o ponto é de máximo ou mínimo, usar o critério da segunda derivada.		14)	Uma montadora adquire motores elétricos para instalar em seus produtos. A gerência dessa montadora estima que o custo **C** em unidades monetárias por motor, nos próximos anos será $C(t)=9.(17.t + 13)^{4/3}$, onde **t** é o tempo em anos. Qual será a taxa de variação instantânea do custo em relação ao tempo após 3 anos? Resp.: 816 unidades monetárias / ano Dica: A taxa de variação instantânea é obtida derivando a função. A função acima é uma função composta.	

CAPÍTULO 4

Integrais

1 Introdução

Seja F(x) uma função conhecida. Propõe-se o seguinte desafio: Descobrir uma função G(x) tal que a derivada de G(x), ou seja, G´(x), será igual a F(x).
Exemplos:

	F(x)	G(x) ?
a)	1	
b)	2.x	
c)	$3.x^2$	
d)	x^2	

Achar esta função G(x) pode ser entendido com "fazer a operação inversa" da derivada.

Na verdade não existe uma única solução G(x), existem várias soluções pois uma constante arbitrária *C* somada a cada função G(x) formaria uma função diferente mas que também seria resposta para o problema (uma vez que quando calcula-se a derivada da função, esta constante se anularia)

Estas possíveis soluções G(x) são chamadas de *primitivas* de F(x). As primitivas de uma função diferem apenas da constante arbitrária *C*.

2 Integral Indefinida

Chama-se de integral indefinida de F(x) a qualquer primitiva da mesma somada a uma constante arbitrária *C* qualquer. Indica-se, matematicamente, esta operação da seguinte maneira:

$$\boxed{\int F(x) \cdot dx = G(x) + C}$$

O símbolo da operação (um "esse" estilizado) vem da interpretação geométrica da integral que pode ser entendida como a **somatória** das inúmeras áreas abaixo da curva da função, com bases muito pequenas (*dx*). Esta interpretação geométrica não será considerada pois não tem aplicações relevantes nas áreas econômicas. Assume-se que o símbolo "$\int$" seguido da função e do "*dx*" é apenas um indicativo de que se deseja realizar a operação de integração de uma função.

<u>Aplicações nas áreas econômicas</u> :

Cálculos estatísticos (valores médios, probabilidades, etc);

Quando são conhecidas as taxas de variação instantâneas e deseja-se descobrir a função primitiva.

3 Regras de Integração

Assim como na *derivação*, na *integração* existe uma regra específica para cada tipo de função. As regras para as funções mais comumente encontradas nas áreas econômicas são dadas a seguir:

A. **Integral de uma função constante: Se *k* é uma constante e *f(x) = k* para todo *x*, então:**

$$\boxed{\int k \cdot dx = k \cdot x + C}$$

Ex.: Seja *f(x) = 5*, então : $\int 5 \cdot dx = 5 \cdot x + C$

B. Integral de um monômio qualquer (Regra da Potência): Se *n* é um número real (diferente de –1)
Dada a função $f(x) = x^n$, então:

$$\boxed{\int x^n \cdot dx = \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)} + C}$$

Ex.1: Seja $f(x) = x^2$, então: $\int x^2 \cdot dx \;=\; \frac{x^{(2+1)}}{(2+1)} + C \;=\; \frac{x^3}{3} + C$

Ex.2: Seja $f(x) = x^{-3}$, então: $\int x^{-3} \cdot dx \;=\; \frac{x^{(-3+1)}}{(-3+1)} + C \;=\; \frac{x^{-2}}{(-2)} + C$

Ex.3: Seja $f(x) = \sqrt{x}$, então: $\int \sqrt{x} \cdot dx \;=\; \int x^{0,5} \cdot dx \;=\; \frac{x^{(0,5+1)}}{(0,5+1)} + C \;=\; \frac{x^{1,5}}{1,5} + C$

C. Integral da função monômio para *n* igual a –1. Dada a função $f(x) = x^{-1}$, a sua integral será:

$$\boxed{\int x^{-1} \cdot dx = \ln(x) + C}$$

Ex.1: Seja $f(x) = x^{-1}$, então: $\int x^{-1} \cdot dx \;= \ln(x) + C$

Ex.2: Seja $f(x) = \frac{1}{x}$, então: $\int \frac{1}{x} \cdot dx = \int x^{-1} \cdot dx = \ln(x) + C$

D. Integral de uma função exponencial: Seja *f(x)* uma função exponencial dada por: $F(x) = a^{(k \cdot x)}$ (com $a > 0$ e $a \neq 1$), então a sua integral será:

$$\boxed{\int a^{(k \cdot x)} \cdot dx = \frac{a^{(k \cdot x)}}{k \cdot \ln(a)} + C}$$

Ex.1: Seja $f(x) = 3^{(4.x)}$, então: $\int 3^{(4 \cdot x)} \cdot dx = \dfrac{3^{(4 \cdot x)}}{4 \cdot \ln(3)} + C$

Ex.2: Seja $f(x) = 5^{(-2.x)}$, então: $\int 5^{(-2 \cdot x)} \cdot dx = \dfrac{5^{(-2 \cdot x)}}{(-2) \cdot \ln(5)} + C$

E. Integral de uma função logarítmica natural: Seja *f(x)* uma função logarítmica natural dada por: $F(x) = \ln(k \cdot x)$, então a sua integral será:

$$\boxed{\int \ln(k \cdot x) \cdot dx = \{\, [x \cdot \ln(k \cdot x)] - x \,\} + C}$$

Ex.1: Seja $f(x) = \ln(x)$, então: $\int \ln(x) \cdot dx = \{\, [x \cdot \ln(x)] - x \,\} + C$

Ex.2: Seja $f(x) = \ln(3.x)$, então: $\int \ln(3 \cdot x) \cdot dx = \{\, [x \cdot \ln(3 \cdot x)] - x \,\} + C$

4 Propriedades da Integral

1) $$\boxed{\int [f(x) \pm g(x)] \cdot dx = \int f(x) \cdot dx \ \pm \ \int g(x) \cdot dx}$$

onde f(x) e g(x) são duas funções quaisquer.

2) $$\boxed{\int k \cdot f(x) \cdot dx = k \cdot \int f(x) \cdot dx}$$

onde k é um número real.

5 Integral Definida

A operação descrita a seguir:

$$\boxed{\int F(x)\cdot dx = G(x) + C}$$

é a **Integral Indefinida** da função F(x), cujo resultado será G(x) + C, tal como foi visto. Chama-se de **Integral Definida** de F(x) entre os limites de integração "**a**" e "**b**" ao seguinte cálculo:

$$\boxed{\int_a^b F(x)\cdot dx = G(b) - G(a)}$$

Ex.1: Seja $f(x) = x^2$, então:

$$\int_2^4 x^2 \cdot dx \;=\; \frac{x^3}{3} + C = \left[\frac{(4)^3}{3} + C\right] - \left[\frac{(2)^3}{3} + C\right] = \left[\frac{64}{3} + C\right] - \left[\frac{8}{3} + C\right] = 18{,}6666...$$

Ex.2: Seja $f(x) = 4^{(2.x)}$, então:

$$\int_1^3 4^{(2\cdot x)}\cdot dx \;=\; \frac{4^{(2\cdot x)}}{2\cdot \ln(4)} + C = \left[\frac{4^{(2\cdot 3)}}{2\cdot \ln(4)} + C\right] - \left[\frac{4^{(2\cdot 1)}}{2\cdot \ln(4)} + C\right] =$$

$$\left[\frac{4096}{2\cdot(1{,}386...)} + C\right] - \left[\frac{16}{2\cdot(1{,}386...)} + C\right] = 1471{,}5489...$$

6 Exercícios - Calcule as integrais definidas

1)	$\int_{3}^{5} \left(x^2 + 2\cdot\sqrt{x}\right) dx$	R.: 40,646	**2)**	$\int_{1}^{4} \left[3\cdot\ln(x) + 2^{(3\cdot x)}\right] dx$	R.: 1973,548
3)	$\int_{1}^{3} \left(\frac{x\cdot\sqrt{x}}{3\cdot x}\right) dx$	R.: 0,932	**4)**	$\int_{2}^{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$	R.: 3,023
5)	$\int_{3}^{6} \frac{1}{3\cdot x} dx$	R.: 0,231	**6)**	$\int_{7}^{8} \left(2^x + \ln(x) - 3\right) dx$	R.: 183,679
7)	$\int_{1}^{7} 4 dx$	R.: 24	**8)**	$\int_{6}^{9} \sqrt[5]{x^7} dx$	R.: 50,562
9)	$\int_{7}^{7} x^2 dx$	R.: 0	**10)**	$\int_{1}^{2} \left[2 + 3\cdot x + \ln(x) - 4^{(2\cdot x)}\right] dx$	R.: -79,675
11)	$\int_{4}^{7} \left(\frac{2\cdot x^4 + 5\cdot x}{\sqrt{x^3}}\right) dx$	R.: 451,882	**12)**	$\int_{1}^{2} \left[\frac{5^{(2\cdot x)}}{10}\right] dx$	R.: 18,640
13)	$\int_{1}^{3} \left(\frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{6}{x^3}\right) dx$	R.: 7,531	**14)**	$\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{7}{3}} \left(\frac{2}{x} + 4\cdot\ln(x) + 2^x\right) dx$	R.: 9,809
15)	$\int_{3}^{4} \left(4^3 + \ln(e) + 1\right) dx$	R.: 66	**16)**	$\int_{1}^{5} \left[\frac{x\cdot x^{\left(\frac{3}{4}\right)}\cdot\sqrt{x^3}}{2\cdot x}\right] dx$	R.: 28,603
17)	$\int_{3}^{7} \left(\frac{3\cdot x + 4\cdot\sqrt{x} - 5}{x^2}\right) dx$	R.: 3,185	**18)**	$\int_{-4}^{4} (5\cdot x + 2) dx$	R.: 16

Católica de Santa Catarina

Apostila de Matemática para os cursos de:
Ciências Contábeis e Administração
Prof.Joable Andrade Alves

Exercícios Resolvidos – Juros Compostos (pág. 25 da apostila)

1)	O Capital de R$ 3.200,00 produziu o montante de R$ 3.500,00 em um ano. Considerando a capitalização mensal, qual é a taxa mensal de juros?	R.: 0,7496 % ao mês

$PV = 3200.00$

$FV = 3500.00$

$n = 1$ ano

$i = ?$

Fórmula da Taxa:

$$i = \left(\frac{FV}{PV}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} - 1$$

Como a questão pede a taxa MENSAL, é necessário transformar o prazo em MESES:

1 ano = 12 meses

$$i = \left(\frac{3500.00}{3200.00}\right)^{\left(\frac{1}{12}\right)} - 1$$

$$i = (1.09375)^{(0.083333)} - 1$$

$$i = 1.007496 - 1$$

$$i = 0.007496$$

Como a taxa é dada em percentual, deve-se multiplicar o resultado por 100

$$i = 0.7496 \cdot \%$$

2)	O Capital de R$ 22.000,00 aplicado à taxa de 22 % ao ano, produziu o montante de R$ 29.645,75. Quanto tempo ficou aplicado?	R.: 1 ano e meio (1,5 anos)

$PV = 22000.00$

$FV = 29645.75$

$i = 22\%$ ao ano

n = ?

Fórmula do Prazo:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{FV}{PV}\right)}{\ln(1 + i)} \rightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{29645.75}{22000.00}\right)}{\ln\left(1 + \frac{22}{100}\right)}$$

$$n = \frac{\ln(1.347534)}{\ln(1 + 0.22)} \rightarrow n = \frac{\ln(1.347534)}{\ln(1.22)}$$

$$n = \frac{0.298276}{0.198851} \rightarrow n = 1.499997$$

Arredondando: $n = 1.5$ anos

3)	Um capital de R$ 500,00, aplicado à taxa de 4 % ao mês, rendeu de juros R$ 157,97. Quanto tempo este capital ficou aplicado?	R.: 7 meses

$PV = 500.00$

$FV = 500 + 157.97$

$i = 4\%$ ao mês

n = ?

Fórmula do Prazo:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{FV}{PV}\right)}{\ln(1+i)} \rightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{657.97}{500}\right)}{\ln\left(1+\frac{4}{100}\right)}$$

$$n = \frac{\ln(1.31594)}{\ln(1+0.04)} \rightarrow n = \frac{\ln(1.31594)}{\ln(1.04)}$$

$$n = \frac{0.274551}{0.039221} \rightarrow n = 7.000102$$

Arredondando: $n = 7$ meses

4)	Um capital de R$ 6.200,00 foi aplicado à taxa de 1 % ao mês, sendo o prazo desta aplicação de 2 anos, seis meses e quinze dias, qual o valor do montante resgatado?	R.: R$ 8.398,34

$PV = 6200.00$

i = 1 % ao mês

n = 2 anos, seis meses e quinze dias

FV = ?

Como a taxa é dada ao mês, deve-se transformar o prazo em MESES !!

n = 2 anos, seis meses e quinze dias

2 anos = 24 meses

seis meses = 6 meses

quinze dias = $\frac{15}{30}$ = 0.5 meses

n = 24+ 6+ 0.5 = 30.5 meses

Fórmula do Montante:

$$FV = PV \cdot (1 + i)^n$$

$$FV = 6200.00 \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{30.5}$$

$$FV = 6200.00 \cdot (1.01)^{30.5}$$

$$FV = 6200.00 \cdot (1.354571)$$

$$FV = 8398.34$$

5)	Um capital de R$ 1.000,00 foi aplicado à taxa de 8.5 % ao ano, sendo o prazo desta aplicação de 15 meses, qual o valor do montante resgatado?	R.: R$ 1.107,36

$PV = 1000.00$

i = 8.5 % ao ano

n = 15 meses

FV = ?

Como a taxa é dada ao ano deve-se transformar o prazo em anos !!

n = 15 meses

15 meses = $\frac{15}{12} = 1.25$ anos

n = 1.25 anos

Fórmula do Montante:

$$FV = PV\cdot(1 + i)^{n}$$

$$FV = 1000.00\cdot\left(1 + \frac{8.5}{100}\right)^{1.25}$$

$$FV = 1000.00\cdot(1 + 0.085)^{1.25}$$

$$FV = 1000.00\cdot(1.085)^{1.25}$$

$$FV = 1000.00\cdot(1.107356)$$

$$FV = 1107.36$$

6)	Uma aplicação produziu o montante de R$ 2.805,10. Sabendo que à taxa foi de 7 % ao ano, sendo o prazo desta aplicação de 5 anos, qual o valor do capital inicial?	R.: R$ 2.000,00

$$FV = 2805.10$$

i = 7 % ao ano

n = 5 anos

PV = ?

Fórmula do Capital Inicial:

$$PV = \frac{FV}{(1 + i)^{n}}$$

$$PV = \frac{2805.10}{\left(1 + \frac{7}{100}\right)^{5}}$$

$$PV = \frac{2805.10}{(1 + 0.07)^{5}}$$

$$PV = \frac{2805.10}{(1.07)^{5}}$$

$$PV = \frac{2805.10}{1.402552}$$

$$PV = 1999.99715$$

Arredondando:

$$PV = 2000.00$$

Juros Compostos - Exercícios Adicionais (pág. 26 da apostila)

1)	O Capital de R$ 5.700,00 produziu o montante de R$ 9.500,00 em um ano. Considerando a capitalização mensal, qual é a taxa mensal de juros?	R.: 4,3488 %

$PV = 5700.00$

$FV = 9500.00$

$n = 1$ ano

i = ?

Fórmula da Taxa:

$$i = \left(\frac{FV}{PV}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} - 1$$

Como a questão pede a taxa MENSAL, é necessário transformar o prazo em MESES:

1 ano = 12 meses

$$i = \left(\frac{9500.00}{5700.00}\right)^{\left(\frac{1}{12}\right)} - 1$$

$$i = (1.666667)^{(0.083333)} - 1$$

$$i = 1.043488 - 1$$

$$i = 0.043488$$

Como a taxa é dada em percentual, deve-se multiplicar o resultado por 100

$$i = 4.3488 \cdot \%$$

2)	O Capital de R$ 12.000,00 aplicado à taxa de 14 % ao ano, produziu o montante de R$ 30.027,23. Quanto tempo ficou aplicado?	R.: 7,00 anos

$PV = 12000.00$

$FV = 30027.23$

$i = 14 \cdot \%$ ao ano

n = ?

Fórmula do Prazo:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{FV}{PV}\right)}{\ln(1 + i)} \rightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{30027.23}{12000.00}\right)}{\ln\left(1 + \frac{14}{100}\right)}$$

$$n = \frac{\ln(2.502269)}{\ln(1 + 0.14)} \rightarrow n = \frac{\ln(2.502269)}{\ln(1.14)}$$

$$n = \frac{0.917198}{0.131028} \rightarrow n = 7.000015$$

Arredondando: $n = 7$ anos

3)	Um capital de R$ 1.000,00, aplicado à taxa de 9 % ao mês, rendeu de juros R$ 411,58. Quanto tempo este capital ficou aplicado?	R.: 4 meses

$$PV = 1000.00$$

$$FV = 1000 + 411.58$$

$i = 9\%$ ao mês

n = ?

Fórmula do Prazo:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{FV}{PV}\right)}{\ln(1 + i)} \rightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{1411.58}{1000.00}\right)}{\ln\left(1 + \frac{9}{100}\right)}$$

$$n = \frac{\ln(1.41158)}{\ln(1 + 0.09)} \rightarrow n = \frac{\ln(1.41158)}{\ln(1.09)}$$

$$n = \frac{0.34471}{0.086178} \rightarrow n = 3.999977$$

Arredondando: $n = 4$ meses

4)	Um capital de R$ 4.800,00 foi aplicado à taxa de 0,5 % ao mês, sendo o prazo desta aplicação de 3 anos, cinco meses e dez dias, qual o valor do montante resgatado?	R.: R$ 5898,91

$PV = 4800.00$

i = 0.5 % ao mês

n = 3 anos 5 meses e 10 dias

FV = ?

Como a taxa é dada ao mês deve-se transformar o prazo em meses !!

n = 3 anos, 5 meses e dez dias

3 anos = 36 meses

5 meses = 5 meses

dez dias = $\frac{10}{30}$ = 0.333... meses

n = 36+ 5+ 0.333... = 41.333... meses

Fórmula do Montante:

$$FV = PV \cdot (1 + i)^{n}$$

$$FV = 4800.00 \cdot \left(1 + \frac{0.5}{100}\right)^{41.3333333}$$

$$FV = 4800.00 \cdot (1 + 0.005)^{41.3333333}$$

$$FV = 4800.00 \cdot (1.005)^{41.3333333}$$

$$FV = 4800.00 \cdot (1.22894)$$

$$FV = 5898.91$$

5)	Um capital de R$ 2.000,00 foi aplicado à taxa de 8.5 % ao ano, sendo o prazo desta aplicação de 19 meses, qual o valor do montante resgatado?	R.: R$ 2275,76

$PV = 2000.00$

i = 8.5 % ao ano

n = 19 meses

FV = ?

Como a taxa é dada ao ano deve-se transformar o prazo em anos !!

$n = \frac{19}{12}$ n = $1.583333...$ anos

Fórmula do Montante:

$$FV = PV \cdot (1 + i)^n$$

$$FV = 2000.00 \cdot \left(1 + \frac{8.5}{100}\right)^{1.583333...}$$

$$FV = 2000.00 \cdot (1 + 0.085)^{1.583333...}$$

$$FV = 2000.00 \cdot (1.085)^{1.583333...}$$

$$FV = 2000.00 \cdot (1.137882)$$

$$FV = 2275.76$$

6)	Uma aplicação produziu o montante de R$ 711,66. Sabendo que a taxa foi de 4 % ao ano, sendo o prazo desta aplicação de 9 anos, qual o valor do capital inicial?	R.: R$ 500,00

$$FV = 711.66$$

i = 4 % ao ano

n = 9 anos

PV = ?

Fórmula do Capital Inicial:

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$$

$$PV = \frac{711.66}{\left(1 + \frac{4}{100}\right)^9}$$

$$PV = \frac{711.66}{(1+0.04)^9}$$

$$PV = \frac{711.66}{(1.04)^9}$$

$$PV = \frac{711.66}{1.423312}$$

$$PV = 500.00281$$

Arredondando:

$$PV = 500.00$$

7)	O Capital de R$ 6.700,00 produziu o montante de R$ 19.500,00 em um ano. Considerando a capitalização mensal, qual é a taxa mensal de juros?	R.: 9,3108 %

$PV = 6700.00$

$FV = 19500.00$

$n = 1$ ano

$i = ?$

Fórmula da Taxa:

$$i = \left(\frac{FV}{PV}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} - 1$$

Como a questão pede a taxa MENSAL, é necessário transformar o prazo em MESES:

1 ano = 12 meses

$$i = \left(\frac{19500.00}{6700.00}\right)^{\left(\frac{1}{12}\right)} - 1$$

$$i = (2.910448)^{(0.083333)} - 1$$

$$i = 1.093108 - 1$$

$$i = 0.093108$$

Como a taxa é dada em percentual, deve-se multiplicar o resultado por 100

$$i = 9.3108 \cdot \%$$

8)	O Capital de R$ 1.200,00 aplicado à taxa de 17 % ao ano, produziu o montante de R$ 1.642,68. Quanto tempo ficou aplicado?	R.: 2 anos

$PV = 1200.00$

$FV = 1642.68$

$i = 17\%$ ao ano

n = ?

Fórmula do Prazo:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{FV}{PV}\right)}{\ln(1 + i)} \rightarrow \quad n = \frac{\ln\left(\frac{1642.68}{1200.00}\right)}{\ln\left(1 + \frac{17}{100}\right)}$$

$$n = \frac{\ln(1.3689)}{\ln(1 + 0.17)} \rightarrow \quad n = \frac{\ln(1.3689)}{\ln(1.17)}$$

$$n = \frac{0.314007}{0.157004} \rightarrow \quad n = 1.999994$$

Arredondando: $n = 2$ anos

9)	Um capital de R$ 2.000,00, aplicado à taxa de 6 % ao mês, rendeu de juros R$ 382,03. Quanto tempo este capital ficou aplicado?	R.: 3 meses

$PV = 2000.00$

$FV = 2000 + 382.03$

$i = 6\%$ ao mês

n = ?

Fórmula do Prazo:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{FV}{PV}\right)}{\ln(1+i)} \rightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{2382.03}{2000.00}\right)}{\ln\left(1+\frac{6}{100}\right)}$$

$$n = \frac{\ln(1.191015)}{\ln(1+0.06)} \rightarrow n = \frac{\ln(1.191015)}{\ln(1.06)}$$

$$n = \frac{0.174806}{0.058269} \rightarrow n = 2.999983$$

Arredondando: $n = 3$ meses

10)	Um capital de R$ 2.400,00 foi aplicado à taxa de 0,7 % ao mês, sendo o prazo desta aplicação de 4 anos, cinco meses e vinte dias, qual o valor do montante resgatado?	R.: R$ 3489,74

$PV = 2400.00$

i = 0.7 % ao mês

n = 4 anos 5 meses e 20 dias

FV = ?

Como a taxa é dada ao mês deve-se transformar o prazo em meses !!

n = 4 anos 5 meses e 20 dias

4 anos = 48 meses

5 meses = 5 meses

20 dias = $\frac{20}{30}$ = 0.6666... meses

n = 48+ 5+ 0.6666... = 53.6666... meses

Fórmula do Montante:

$$FV = PV \cdot (1 + i)^{n}$$

$$FV = 2400.00\left(1 + \frac{0.7}{100}\right)^{53.6666666}$$

$$FV = 2400.00(1 + 0.007)^{53.6666666}$$

$$FV = 2400.00(1.007)^{53.6666666}$$

$$FV = 2400.00(1.454058)$$

$$FV = 3489.74$$

11)	Um capital de R$ 3.000,00 foi aplicado à taxa de 7.5 % ao ano, sendo o prazo desta aplicação de 17 meses, qual o valor do montante resgatado?	R.: R$ 3323,66

$PV = 3000.00$

i = 7.5 % ao ano

n = 17 meses

FV = ?

Como a taxa é dada ao ano deve-se transformar o prazo em anos !!

$n = \frac{17}{12}$ n = $1.416666...$ anos

Fórmula do Montante:

$$FV = PV\cdot(1 + i)^{n}$$

$$FV = 3000.00\cdot\left(1 + \frac{7.5}{100}\right)^{1.41666666}$$

$$FV = 3000.00\cdot(1 + 0.075)^{1.41666666}$$

$$FV = 3000.00\cdot(1.075)^{1.41666666}$$

$$FV = 3000.00\cdot(1.107887)$$

$$FV = 3323.66$$

12)	Uma aplicação produziu o montante de R$ 394,78. Sabendo que à taxa foi de 4 % ao ano, sendo o prazo desta aplicação de 7 anos, qual o valor do capital inicial?	R.: R$ 300,00

$FV = 394.78$

i = 4 % ao ano

n = 7 anos

PV = ?

Fórmula do Capital Inicial:

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$$

$$PV = \frac{394.78}{\left(1+\frac{4}{100}\right)^7}$$

$$PV = \frac{394.78}{(1+0.04)^7}$$

$$PV = \frac{394.78}{(1.04)^7}$$

$$PV = \frac{394.78}{1.315932}$$

$$PV = 300.000304$$

Arredondando:

$$PV = 300.00$$

Exercícios Resolvidos – Limites (pág. 32 da apostila)

1)	$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 + 3 \cdot x}{3 \cdot x + 1} \right)$	$\frac{10}{7}$

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 + 3 \cdot x}{3 \cdot x + 1} \right)$$

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{2^2 + 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 + 1} \right)$$

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{4 + 6}{6 + 1} \right)$$

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{10}{7} \right)$$

$$\frac{10}{7}$$

2)	$\lim_{x \to \left(\frac{3}{4}\right)} \left(\frac{2 \cdot x^3 + \sqrt{x^3} + 4}{\sqrt[3]{x+1}}\right)$	4.558

$$\lim_{x \to \left(\frac{3}{4}\right)} \left(\frac{2 \cdot x^3 + \sqrt{x^3} + 4}{\sqrt[3]{x+1}}\right)$$

$$\lim_{x \to (0.75)} \left(\frac{2 \cdot x^3 + \sqrt{x^3} + 4}{\sqrt[3]{x+1}}\right)$$

$$\lim_{x \to (0.75)} \left[\frac{2 \cdot (0.75)^3 + \sqrt{(0.75)^3} + 4}{\sqrt[3]{(0.75) + 1}}\right]$$

$$\lim_{x \to (0.75)} \left[\frac{2 \cdot (0.421875) + \sqrt{0.421875} + 4}{\sqrt[3]{1.75}}\right]$$

$$\lim_{x \to (0.75)} \left[\frac{0.84375 + 0.6495191 + 4}{1.75^{\left(\frac{1}{3}\right)}}\right]$$

$$\lim_{x \to (0.75)} \left[\frac{0.84375 + 0.6495191 + 4}{1.75^{(0.333...)}}\right]$$

$$\lim_{x \to (0.75)} \left(\frac{5.4932691}{1.2050711}\right)$$

$$\lim_{x \to (0.75)} (4.5584606)$$

4.5584606

3)	$\lim\limits_{x \to \left(\frac{7}{5}\right)} \left(\dfrac{7 \cdot x^2 + \sqrt[3]{x} + 2}{4 \cdot x^2 + \sqrt{x}}\right)$	1.866

$$\lim_{x \to \left(\frac{7}{5}\right)} \left(\frac{7 \cdot x^2 + \sqrt[3]{x} + 2}{4 \cdot x^2 + \sqrt{x}}\right)$$

$$\lim_{x \to (1.4)} \left[\frac{7 \cdot (1.4)^2 + \sqrt[3]{(1.4)} + 2}{4 \cdot (1.4)^2 + \sqrt{(1.4)}}\right]$$

$$\lim_{x \to (1.4)} \left[\frac{7 \cdot (1.96) + 1.4^{\left(\frac{1}{3}\right)} + 2}{4 \cdot (1.4)^2 + \sqrt{(1.4)}}\right]$$

$$\lim_{x \to (1.4)} \left[\frac{7 \cdot (1.96) + 1.4^{(0.333...)} + 2}{4 \cdot (1.96) + 1.183216}\right]$$

$$\lim_{x \to (1.4)} \left(\frac{13.72 + 1.1186889 + 2}{7.84 + 1.183216}\right)$$

$$\lim_{x \to (1.4)} \left(\frac{16.8386889}{9.023216}\right)$$

$$\lim_{x \to (1.4)} (1.8661516)$$

$$1.8661516$$

4)	$\lim_{x \to 9}\left(\frac{8\cdot x^2 + 5\cdot x - \sqrt{x}}{9\cdot x - 7\cdot x^2}\right)$	-1.419

$$\lim_{x \to 9}\left(\frac{8\cdot x^2 + 5\cdot x - \sqrt{x}}{9\cdot x - 7\cdot x^2}\right)$$

$$\lim_{x \to 9}\left(\frac{8\cdot 9^2 + 5\cdot 9 - \sqrt{9}}{9\cdot 9 - 7\cdot 9^2}\right)$$

$$\lim_{x \to 9}\left(\frac{8\cdot 81 + 45 - 3}{81 - 7\cdot 81}\right)$$

$$\lim_{x \to 9}\left(\frac{648 + 45 - 3}{81 - 567}\right)$$

$$\lim_{x \to 9}\left(\frac{648 + 45 - 3}{81 - 567}\right)$$

$$\lim_{x \to 9}\left(\frac{690}{-486}\right)$$

$$\lim_{x \to 9}(-1.4197531)$$

$$-1.4197531$$

5)	$\lim\limits_{x \to \frac{5}{4}} \left(\dfrac{\sqrt{3 \cdot x^4 + 12} + x^3}{\sqrt[3]{x+2}} \right)$	11.247

$$\lim_{x \to \left(\frac{5}{4}\right)} \left(\frac{\sqrt{3 \cdot x^4 + 12} + x^3}{\sqrt[3]{x+2}} \right)$$

$$\lim_{x \to (1.25)} \left[\frac{\sqrt{3 \cdot (1.25)^4 + 12} + (1.25)^3}{\sqrt[3]{(1.25) + 2}} \right]$$

$$\lim_{x \to (1.25)} \left[\frac{\sqrt{3 \cdot (2.44140625) + 12} + (1.953125)}{\sqrt[3]{3.25}} \right]$$

$$\lim_{x \to (1.25)} \left[\frac{\sqrt{7.32421875 + 12} + (1.953125)}{3.25^{\left(\frac{1}{3}\right)}} \right]$$

$$\lim_{x \to (1.25)} \left[\frac{\sqrt{7.32421875 + 12} + 1.953125}{3.25^{(0.333...)}} \right]$$

$$\lim_{x \to (1.25)} \left[\frac{2.70632939 + 12 + 1.953125}{3.25^{(0.333...)}} \right]$$

$$\lim_{x \to (1.25)} \left(\frac{16.65945439}{1.48124803} \right)$$

$$\lim_{x \to (1.25)} (11.246904)$$

11.246904

6)	$\lim_{x \to -1} \left(\frac{5 \cdot x - x^2}{4 + x + x^3} \right)$	-3

$$\lim_{x \to (-1)} \left(\frac{5 \cdot x - x^2}{4 + x + x^3} \right)$$

$$\lim_{x \to (-1)} \left[\frac{5 \cdot (-1) - (-1)^2}{4 + (-1) + (-1)^3} \right]$$

$$\lim_{x \to (-1)} \left[\frac{-5 - (1)}{4 + (-1) + (-1)} \right]$$

$$\lim_{x \to (-1)} \left(\frac{-5 - 1}{4 - 1 - 1} \right)$$

$$\lim_{x \to (-1)} \left(\frac{-6}{2} \right)$$

$$\lim_{x \to (-1)} (-3)$$

$$-3$$

Limites - Exercícios de reforço (pág. 37 da apostila)

a)	$\lim_{x \to 7} (10)$	R.: 10
O limite de uma função constante é o próprio valor da função constante		

b)	$\lim_{x \to 3} (-9)$	R.: -9
O limite de uma função constante é o próprio valor da função constante		

c)	$\lim_{x \to 5^-} \left[4 + \frac{3}{(5-x)}\right]$	R.: $+\infty$

Deve-se fazer o "x" aproximar-se do número 5, pela esquerda, ou seja, por valores menores que 5

$x = 4.5$

$$\left[4 + \frac{3}{(5-4.5)}\right] \rightarrow \left(4 + \frac{3}{0.5}\right) \rightarrow (4+6) = 10$$

$x = 4.9$

$$\left[4 + \frac{3}{(5-4.9)}\right] \rightarrow \left(4 + \frac{3}{0.1}\right) \rightarrow (4+30) = 34$$

$x = 4.99$

$$\left[4 + \frac{3}{(5-4.99)}\right] \rightarrow \left(4 + \frac{3}{0.01}\right) \rightarrow (4+300) = 304$$

$x = 4.999$

$$\left[4 + \frac{3}{(5-4.999)}\right] \rightarrow \left(4 + \frac{3}{0.001}\right) \rightarrow (4+3000) = 3004$$

Conclusão: Quanto mais se aproxima o valor de "x" do número 5, maior fica o valor da função, conclui-se então que este valor vai para o infinito positivo.

d)	$\lim\limits_{x \to 5^+} \left[4 + \dfrac{3}{(5 - x)}\right]$	R.: $-\infty$

Deve-se fazer o "x" aproximar-se do número 5, pela direita ou seja,
por valores maiores que 5

$x = 5.5$

$$\left[4 + \frac{3}{(5 - 5.5)}\right] \rightarrow \left(4 + \frac{3}{-0.5}\right) \rightarrow (4 - 6) = -2$$

$x = 5.1$

$$\left[4 + \frac{3}{(5 - 5.1)}\right] \rightarrow \left(4 + \frac{3}{-0.1}\right) \rightarrow (4 - 30) = -26$$

$x = 5.01$

$$\left[4 + \frac{3}{(5 - 5.01)}\right] \rightarrow \left(4 + \frac{3}{-0.01}\right) \rightarrow (4 - 300) = -296$$

$x = 5.001$

$$\left[4 + \frac{3}{(5 - 5.001)}\right] \rightarrow \left(4 + \frac{3}{-0.001}\right) \rightarrow (4 - 3000) = -2996$$

Conclusão: Quanto mais se aproxima o valor de "x" do número 5, menor fica o valor da função, conclui-se então que este valor vai para o infinito negativo

e)	$\lim\limits_{x \to 5} \left[4 + \dfrac{3}{(5 - x)}\right]$	R.: $\nexists$

Ao substituir o número 5 na função, aparecerá uma divisão por zero (que é proibida em matemática!). Para resolver esta questão, deve-se calcular os limites laterais à esquerda e à direita de 5. Isto já foi feito nas questões “c” e “d”. Como os limites laterais são diferentes, o limite no ponto não existe.

f)	$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3\right)$	R.: $-\infty$

Deve-se fazer o "x" aproximar-se do número infinito negativo, ou seja, deve-se fazer o número "x" diminuir cada vez mais,

$x = -10$

$$\left(x^3\right) \rightarrow (-10)^3 \rightarrow -1000$$

$x = -50$

$$\left(x^3\right) \rightarrow (-50)^3 \rightarrow -125000$$

$x = -100$

$$\left(x^3\right) \rightarrow (-100)^3 \rightarrow -1000000$$

Conclusão: fazendo-se o valor de "x" diminuir, o valor da função também diminu tendendo ao infinito negativo

g)	$\lim_{x \to 2} \left(\dfrac{x^3 + 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 12}{x^2 + x - 6} \right)$	R.: 4

Substituir o "x" por 2 na função e efetuar os cálculos.

$x = 2$

$$\left(\frac{x^3 + 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 12}{x^2 + x - 6} \right) \rightarrow \left(\frac{2^3 + 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 12}{2^2 + 2 - 6} \right) \rightarrow \left(\frac{8 + 3 \cdot 4 - 8 - 12}{4 + 2 - 6} \right)$$

$$\left(\frac{8 + 12 - 8 - 12}{4 + 2 - 6} \right) \rightarrow \left(\frac{0}{0} \right)$$

O resultado é uma indeterminação do tipo zero dividido por zero. Neste caso, para descobrir o valor do limite, deve-se fazer o "x" tender ao número 2 pela esquerda e pela direita..

g)	Continuação....	R.: 4

Pela ESQUERDA

$x = 1.9$

$$\left(\frac{1.9^3 + 3\cdot 1.9^2 - 4\cdot 1.9 - 12}{1.9^2 + 1.9 - 6}\right) \to \left(\frac{6.859 + 3\cdot 3.61 - 7.6 - 12}{3.61 + 1.9 - 6}\right)$$

$$\left(\frac{6.859 + 10.83 - 7.6 - 12}{3.61 + 1.9 - 6}\right) \to \left(\frac{-1.911}{-0.49}\right) = 3.9$$

$x = 1.99$

$$\left(\frac{1.99^3 + 3\cdot 1.99^2 - 4\cdot 1.99 - 12}{1.99^2 + 1.99 - 6}\right) \to \left(\frac{7.880599 + 3\cdot 3.9601 - 7.96 - 12}{3.9601 + 1.99 - 6}\right)$$

$$\left(\frac{7.880599 + 11.8803 - 7.96 - 12}{3.9601 + 1.99 - 6}\right) \to \left(\frac{-0.199101}{-0.0499}\right) = 3.99$$

Pela DIREITA

$x = 2.1$

$$\left(\frac{2.1^3 + 3\cdot 2.1^2 - 4\cdot 2.1 - 12}{2.1^2 + 2.1 - 6}\right) \to \left(\frac{9.261 + 3\cdot 4.41 - 8.4 - 12}{4.41 + 2.1 - 6}\right)$$

$$\left(\frac{9.261 + 13.23 - 8.4 - 12}{4.41 + 2.1 - 6}\right) \to \left(\frac{2.091}{0.51}\right) = 4.1$$

$x = 2.01$

$$\left(\frac{2.01^3 + 3\cdot 2.01^2 - 4\cdot 2.01 - 12}{2.01^2 + 2.01 - 6}\right) \to \left(\frac{8.120601 + 3\cdot 4.0401 - 8.04 - 12}{4.0401 + 2.01 - 6}\right)$$

$$\left(\frac{8.120601 + 12.1203 - 8.04 - 12}{4.0401 + 2.01 - 6}\right) \to \left(\frac{0.200901}{0.0501}\right) = 4.01$$

Tanto pela esquerda como pela direita, a função está tendendo a 4

h)	$\lim_{x \to 4} \left(\frac{4^x + x^2}{5 \cdot x} \right)$	R.: 13.6

Substituir o "x" por 4 na função e efetuar os cálculos.

$x = 4$

$$\left(\frac{4^x + x^2}{5 \cdot x} \right) \rightarrow \left(\frac{4^4 + 4^2}{5 \cdot 4} \right) \rightarrow \left(\frac{256 + 16}{20} \right) \rightarrow \left(\frac{272}{20} \right) = 13.6$$

i)	$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{5 \cdot x^2 + 10 \cdot x^3 + x}{1 + x + 2 \cdot x^3} \right)$	R.: 5

Deve-se fazer o "x" aproximar-se do número infinito negativo, ou seja, deve-se fazer o número "x" diminuir cada vez mais,

$x = -10$

$$\left(\frac{5 \cdot x^2 + 10 \cdot x^3 + x}{1 + x + 2 \cdot x^3} \right) \rightarrow \left[\frac{5 \cdot (-10)^2 + 10 \cdot (-10)^3 + (-10)}{1 + (-10) + 2 \cdot (-10)^3} \right]$$

$$\left[\frac{5 \cdot 100 + 10 \cdot (-1000) + (-10)}{1 + (-10) + 2 \cdot (-1000)} \right] \rightarrow \left(\frac{500 - 10000 - 10}{1 - 10 - 2000} \right)$$

$$\left(\frac{500 - 10000 - 10}{1 - 10 - 2000} \right) \rightarrow \left(\frac{-9510}{-2009} \right) = 4.73369835739$$

i)	Continuação....	R.: 5

$x = -100$

$$\left(\frac{5 \cdot x^2 + 10 \cdot x^3 + x}{1 + x + 2 \cdot x^3}\right) \rightarrow \left[\frac{5 \cdot (-100)^2 + 10 \cdot (-100)^3 + (-100)}{1 + (-100) + 2 \cdot (-100)^3}\right]$$

$$\left[\frac{5 \cdot 10000 + 10 \cdot (-1000000) + (-100)}{1 + (-100) + 2 \cdot (-1000000)}\right] \rightarrow \left(\frac{50000 - 10000000 - 100}{1 - 100 - 2000000}\right)$$

$$\left(\frac{-9950100}{-2000099}\right) = 4.97480374721$$

$x = -500$

$$\left(\frac{5 \cdot x^2 + 10 \cdot x^3 + x}{1 + x + 2 \cdot x^3}\right) \rightarrow \left[\frac{5 \cdot (-500)^2 + 10 \cdot (-500)^3 + (-500)}{1 + (-500) + 2 \cdot (-500)^3}\right]$$

$$\left[\frac{5 \cdot 250000 + 10 \cdot (-125000000) + (-500)}{1 + (-500) + 2 \cdot (-125000000)}\right] \rightarrow \left[\frac{1250000 + (-1250000000) + (-500)}{1 + (-500) + (-250000000)}\right]$$

$$\left(\frac{1250000 - 1250000000 - 500}{1 - 500 - 250000000}\right) \rightarrow \left(\frac{-1248750500}{-250000499}\right) = 4.99499203$$

Conclusão: fazendo-se o valor de "x" diminuir, o valor da função tende para o número 5

j)	$\lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{x + 3 \cdot x^2 - 2}{-2 \cdot x^3 + x} \right)$	R.: 0

Deve-se fazer o "x" aproximar-se do número infinito positivo ou seja, deve-se fazer o número "x" aumentar cada vez mais

$x = 10$

$$\left(\frac{x + 3 \cdot x^2 - 2}{-2 \cdot x^3 + x} \right) \rightarrow \left(\frac{10 + 3 \cdot 10^2 - 2}{-2 \cdot 10^3 + 10} \right) \rightarrow \left(\frac{10 + 3 \cdot 100 - 2}{-2 \cdot 1000 + 10} \right)$$

$$\left(\frac{10 + 300 - 2}{-2000 + 10} \right) \rightarrow \left(\frac{308}{-1990} \right) = -0.15477386935$$

$x = 100$

$$\left(\frac{x + 3 \cdot x^2 - 2}{-2 \cdot x^3 + x} \right) \rightarrow \left(\frac{100 + 3 \cdot 100^2 - 2}{-2 \cdot 100^3 + 100} \right) \rightarrow \left(\frac{100 + 3 \cdot 10000 - 2}{-2 \cdot 1000000 + 100} \right)$$

$$\left(\frac{100 + 30000 - 2}{-2000000 + 100} \right) \rightarrow \left(\frac{30098}{-1999900} \right) = -0.01504975249$$

$x = 500$

$$\left(\frac{x + 3 \cdot x^2 - 2}{-2 \cdot x^3 + x} \right) \rightarrow \left(\frac{500 + 3 \cdot 500^2 - 2}{-2 \cdot 500^3 + 500} \right) \rightarrow \left(\frac{500 + 3 \cdot 250000 - 2}{-2 \cdot 125000000 + 500} \right)$$

$$\left(\frac{500 + 750000 - 2}{-250000000 + 500} \right) \rightarrow \left(\frac{750498}{-249999500} \right) = -0.003001998$$

Conclusão: fazendo-se o valor de "x" aumentar o valor da função tende para o número 0 (zero)

k)	$\lim_{x \to -3^+} \left[4 + \frac{1}{(x+3)} \right]$	R.: $+\infty$

Deve-se fazer o "x" aproximar-se do número -3, pela direita ou seja,
por valores maiores que -3

$x = -2.9$

$$\left[4 + \frac{1}{(x+3)}\right] \rightarrow \left[4 + \frac{1}{(-2.9+3)}\right] \rightarrow \left(4 + \frac{1}{0.1}\right) \rightarrow (4 + 10) = 14$$

$x = -2.99$

$$\left[4 + \frac{1}{(x+3)}\right] \rightarrow \left[4 + \frac{1}{(-2.99+3)}\right] \rightarrow \left(4 + \frac{1}{0.01}\right) \rightarrow (4 + 100) = 104$$

$x = -2.999$

$$\left[4 + \frac{1}{(x+3)}\right] \rightarrow \left[4 + \frac{1}{(-2.999+3)}\right] \rightarrow \left(4 + \frac{1}{0.001}\right) \rightarrow (4 + 1000) = 1004$$

$x = -2.9999$

$$\left[4 + \frac{1}{(x+3)}\right] \rightarrow \left[4 + \frac{1}{(-2.9999+3)}\right] \rightarrow \left(4 + \frac{1}{0.0001}\right) \rightarrow (4 + 10000) = 10004$$

Conclusão: Quanto mais se aproxima o valor de "x" do número -3, maior fica o
valor da função, conclui-se então que este valor vai para o infinito positivo

I)	$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} + 8\right)$	R.: $+\infty$

Deve-se fazer o "x" aproximar-se do número 0, pela direita ou seja, por valores maiores que 0

$x = 0.1$

$$\left(\frac{1}{x} + 8\right) \rightarrow \left(\frac{1}{0.1} + 8\right) \rightarrow (10 + 8) = 18$$

$x = 0.01$

$$\left(\frac{1}{x} + 8\right) \rightarrow \left(\frac{1}{0.01} + 8\right) \rightarrow (100 + 8) = 108$$

$x = 0.001$

$$\left(\frac{1}{x} + 8\right) \rightarrow \left(\frac{1}{0.001} + 8\right) \rightarrow (1000 + 8) = 1008$$

Conclusão: Quanto mais se aproxima o valor de "x" do número 0, maior fica o valor da função, conclui-se então que este valor vai para o infinito positivo

m)	$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} + 5\right)$	R.: $+\infty$

Deve-se fazer o "x" aproximar-se do número 0, pela direita ou seja, por valores maiores que 0

$x = 0.1$

$$\left(\frac{1}{x} + 5\right) \rightarrow \left(\frac{1}{0.1} + 5\right) \rightarrow (10 + 5) = 15$$

$x = 0.01$

$$\left(\frac{1}{x} + 5\right) \rightarrow \left(\frac{1}{0.01} + 5\right) \rightarrow (100 + 5) = 105$$

$x = 0.001$

$$\left(\frac{1}{x} + 5\right) \rightarrow \left(\frac{1}{0.001} + 5\right) \rightarrow (1000 + 5) = 1005$$

Conclusão: Quanto mais se aproxima o valor de "x" do número 0, maior fica o valor da função, conclui-se então que este valor vai para o infinito positivo

n)	$\lim_{x \to -3} \left(\dfrac{x^3 + 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 12}{x^2 + x - 6} \right)$	R.: -1

Substituir o "x" por -3 na função e efetuar os cálculos.

$x = -3$

$$\left(\frac{x^3 + 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 12}{x^2 + x - 6} \right) \rightarrow \left[\frac{(-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 - 4 \cdot (-3) - 12}{(-3)^2 + (-3) - 6} \right] \rightarrow \left[\frac{-27 + 3 \cdot 9 + 12 - 12}{9 + (-3) - 6} \right].$$

$$\left(\frac{-27 + 27 + 12 - 12}{9 - 3 - 6} \right) \rightarrow \left(\frac{0}{0} \right)$$

O resultado é uma indeterminação do tipo zero dividido por zero. Neste caso, para descobrir o valor do limite, deve-se fazer o "x" tender ao número -3 pela esquerda e pela direita..

Pela ESQUERDA

$x = -3.1$

$$\left[\frac{(-3.1)^3 + 3 \cdot (-3.1)^2 - 4 \cdot (-3.1) - 12}{(-3.1)^2 + (-3.1) - 6} \right] \rightarrow \left[\frac{-29.791 + 3 \cdot 9.61 + 12.4 - 12}{9.61 + (-3.1) - 6} \right]$$

$$\left(\frac{-29.791 + 3 \cdot 9.61 + 12.4 - 12}{9.61 - 3.1 - 6} \right) \rightarrow \left(\frac{-0.561}{0.51} \right) = -1.1$$

$x = -3.01$

$$\left[\frac{(-3.01)^3 + 3 \cdot (-3.01)^2 - 4 \cdot (-3.01) - 12}{(-3.01)^2 + (-3.01) - 6} \right] \rightarrow \left[\frac{-27.270901 + 3 \cdot 9.0601 + 12.04 - 12}{9.0601 + (-3.01) - 6} \right]$$

$$\left(\frac{-27.270901 + 27.1803 + 12.04 - 12}{9.0601 - 3.01 - 6} \right) \rightarrow \left(\frac{-0.050601}{0.0501} \right) = -1.01$$

n)	Continuação....	R.: -1

Pela DIREITA

$$x = -2.9$$

$$\left[\frac{(-2.9)^3 + 3\cdot(-2.9)^2 - 4\cdot(-2.9) - 12}{(-2.9)^2 + (-2.9) - 6}\right] \rightarrow \left[\frac{-24.389 + 3\cdot 8.41 + 11.6 - 12}{8.41 + (-2.9) - 6}\right]$$

$$\left(\frac{-24.389 + 25.23 + 11.6 - 12}{8.41 - 2.9 - 6}\right) \rightarrow \left(\frac{0.441}{-0.49}\right) = -0.9$$

$$x = -2.99$$

$$\left[\frac{(-2.99)^3 + 3\cdot(-2.99)^2 - 4\cdot(-2.99) - 12}{(-2.99)^2 + (-2.99) - 6}\right] \rightarrow \left[\frac{-26.730899 + 3\cdot 8.9401 + 11.96 - 12}{8.9401 + (-2.99) - 6}\right] .$$

$$\left(\frac{-26.730899 + 26.8203 + 11.96 - 12}{8.9401 - 2.99 - 6}\right) \rightarrow \left(\frac{0.049401}{-0.0499}\right) = -0.99$$

Tanto pela esquerda como pela direita, a função está tendendo a: -1

o)	$\lim\limits_{x \to 2} \left(\ln(x) + 6^x\right)$	R.: 36.693

Substituir o "x" por 2 na função e efetuar os cálculos.

$$x = 2$$

$$\left(\ln(x) + 6^x\right) \rightarrow \left(\ln(2) + 6^2\right) \rightarrow 0.69314718 + 36 = 36.6931472$$

p)	$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{5 \cdot x^2 + 8 \cdot x^3 + x}{1 + x + 2 \cdot x^3} \right)$	R.: 4

Deve-se fazer o "x" aproximar-se do número infinito positivo ou seja,
deve-se fazer o número "x" aumentar cada vez mais

$x = 10$

$$\left(\frac{5 \cdot x^2 + 8 \cdot x^3 + x}{1 + x + 2 \cdot x^3} \right) \to \left(\frac{5 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^3 + 10}{1 + 10 + 2 \cdot 10^3} \right) \to \left(\frac{5 \cdot 100 + 8 \cdot 1000 + 10}{1 + 10 + 2 \cdot 1000} \right)$$

$$\left(\frac{500 + 8000 + 10}{1 + 10 + 2000} \right) \to \left(\frac{8510}{2011} \right) = 4.2317255097$$

$x = 100$

$$\left(\frac{5 \cdot x^2 + 8 \cdot x^3 + x}{1 + x + 2 \cdot x^3} \right) \to \left(\frac{5 \cdot 100^2 + 8 \cdot 100^3 + 100}{1 + 100 + 2 \cdot 100^3} \right) \to \left(\frac{5 \cdot 10000 + 8 \cdot 1000000 + 100}{1 + 100 + 2 \cdot 1000000} \right)$$

$$\left(\frac{5 \cdot 10000 + 8000000 + 100}{1 + 100 + 2000000} \right) \to \left(\frac{8050100}{2000101} \right) = 4.0248467452$$

$x = 500$

$$\left(\frac{5 \cdot x^2 + 8 \cdot x^3 + x}{1 + x + 2 \cdot x^3} \right) \to \left(\frac{5 \cdot 500^2 + 8 \cdot 500^3 + 500}{1 + 500 + 2 \cdot 500^3} \right) \to \left(\frac{5 \cdot 250000 + 8 \cdot 125000000 + 500}{1 + 500 + 2 \cdot 125000000} \right)$$

$$\left(\frac{1250000 + 1000000000 + 500}{1 + 500 + 250000000} \right) \to \left(\frac{1001250500}{250000501} \right) = 4.004993974$$

Conclusão: fazendo-se o valor de "x" aumentar o valor da função tende para o número 4 .

q)	$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)$	R.: $+\infty$

Deve-se fazer o "x" aproximar-se do número 0, pela direita ou seja, por valores maiores que 0

$x = 0.1$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \rightarrow \left(\frac{1}{0.1} + \frac{1}{0.1^2} \right) \rightarrow \left(10 + \frac{1}{0.01} \right) \rightarrow (10 + 100) = 110$$

$x = 0.01$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \rightarrow \left(\frac{1}{0.01} + \frac{1}{0.01^2} \right) \rightarrow \left(100 + \frac{1}{0.0001} \right) \rightarrow (100 + 10000) = 10100$$

$x = 0.001$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \rightarrow \left(\frac{1}{0.001} + \frac{1}{0.001^2} \right) \rightarrow \left(1000 + \frac{1}{0.000001} \right) \rightarrow (1000 + 1000000) = 1001000$$

Conclusão: Quanto mais se aproxima o valor de "x" do número 0, maior fica o valor da função, conclui-se então que este valor vai para o infinito positivo

r)	$\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$	R.: $+\infty$

Deve-se fazer o "x" aproximar-se do número 0, pela esquerda ou seja, por valores menores que 0

$x = -0.1$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \rightarrow \left[\frac{1}{(-0.1)} + \frac{1}{(-0.1)^2}\right] \rightarrow \left(-10 + \frac{1}{0.01}\right)$$

$$\left(-10 + \frac{1}{0.01}\right) \rightarrow (-10 + 100) = 90$$

$x = -0.01$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \rightarrow \left[\frac{1}{(-0.01)} + \frac{1}{(-0.01)^2}\right] \rightarrow \left(-100 + \frac{1}{0.0001}\right)$$

$$\left(-100 + \frac{1}{0.0001}\right) \rightarrow (-100 + 10000) = 9900$$

$x = -0.001$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \rightarrow \left[\frac{1}{(-0.001)} + \frac{1}{(-0.001)^2}\right] \rightarrow \left(-1000 + \frac{1}{0.000001}\right)$$

$$\left(-1000 + \frac{1}{0.000001}\right) \rightarrow (-1000 + 1000000) = 999000$$

Conclusão: Quanto mais se aproxima o valor de "x" do número 0, maior fica o valor da função, conclui-se então que este valor vai para o infinito positivo

s)	$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$	R.: $+\infty$

Ao substituir o número 0 na função, aparecerá uma divisão por zero (que é proibida em matemática!). Para resolver esta questão, deve-se calcular os limites laterais à esquerda e à direita de 0. Isto já foi feito nas questões "q" e "r". Como os limites laterais são iguais, o limite no ponto existe e tem o mesmo valor encontrado nos limites lateriais.

t)	$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$	R.: $-\infty$

Deve-se fazer o "x" aproximar-se do número 0, pela direita ou seja, por valores maiores que 0

$x = 0.1$

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \rightarrow \left(\frac{1}{0.1} - \frac{1}{0.1^2}\right) \rightarrow \left(10 - \frac{1}{0.01}\right) \rightarrow (10 - 100) = -90$$

$x = 0.01$

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \rightarrow \left(\frac{1}{0.01} - \frac{1}{0.01^2}\right) \rightarrow \left(100 - \frac{1}{0.0001}\right) \rightarrow (100 - 10000) = -9900$$

$x = 0.001$

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \rightarrow \left(\frac{1}{0.001} - \frac{1}{0.001^2}\right) \rightarrow \left(1000 - \frac{1}{0.000001}\right) \rightarrow (1000 - 1000000) = -999000$$

Conclusão: Quanto mais se aproxima o valor de "x" do número 0, menor fica o valor da função, conclui-se então que este valor vai para o infinito negativo

u)	$\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$	R.: $-\infty$

Deve-se fazer o "x" aproximar-se do número 0, pela esquerda ou seja, por valores menores que 0

$x = -0.1$

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \rightarrow \left[\frac{1}{(-0.1)} - \frac{1}{(-0.1)^2}\right] \rightarrow \left(-10 - \frac{1}{0.01}\right)$$

$$\left(-10 - \frac{1}{0.01}\right) \rightarrow (-10 - 100) = -110$$

$x = -0.01$

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \rightarrow \left[\frac{1}{(-0.01)} - \frac{1}{(-0.01)^2}\right] \rightarrow \left(-100 - \frac{1}{0.0001}\right)$$

$$\left(-100 - \frac{1}{0.0001}\right) \rightarrow (-100 - 10000) = -10100$$

$x = -0.001$

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \rightarrow \left[\frac{1}{(-0.001)} - \frac{1}{(-0.001)^2}\right] \rightarrow \left(-1000 - \frac{1}{0.000001}\right)$$

$$\left(-1000 - \frac{1}{0.000001}\right) \rightarrow (-1000 - 1000000) = -1001000$$

Conclusão: Quanto mais se aproxima o valor de "x" do número 0, menor fica o valor da função, conclui-se então que este valor vai para o infinito negativo

v)	$\lim\limits_{x \to -5^-} \left[4 - \dfrac{3}{(-5 - x)}\right]$	R.: $-\infty$

Deve-se fazer o "x" aproximar-se do número -5, pela esquerda, ou seja, por valores menores que -5

$x = -5.5$

$$\left[4 - \frac{3}{[-5 - (-5.5)]}\right] \rightarrow \left[4 - \frac{3}{(-5 + 5.5)}\right] \rightarrow \left(4 - \frac{3}{0.5}\right) \rightarrow (4 - 6) = -2$$

$x = -5.1$

$$\left[4 - \frac{3}{[-5 - (-5.1)]}\right] \rightarrow \left[4 - \frac{3}{(-5 + 5.1)}\right] \rightarrow \left(4 - \frac{3}{0.1}\right) \rightarrow (4 - 30) = -26$$

$x = -5.01$

$$\left[4 - \frac{3}{[-5 - (-5.01)]}\right] \rightarrow \left[4 - \frac{3}{(-5 + 5.01)}\right] \rightarrow \left(4 - \frac{3}{0.01}\right) \rightarrow (4 - 300) = -296$$

$x = -5.001$

$$\left[4 - \frac{3}{[-5 - (-5.001)]}\right] \rightarrow \left[4 - \frac{3}{(-5 + 5.001)}\right] \rightarrow \left(4 - \frac{3}{0.001}\right) \rightarrow (4 - 3000) = -2996$$

Conclusão: Quanto mais se aproxima o valor de "x" do número -5, menor fica o valor da função, conclui-se então que este valor vai para o infinito negativo

Derivadas - Exercícios de Reforço – (pág. 45 da apostila)

1)	$f(x)=\dfrac{2.x^5-6.x}{x^2-4.x+5}$	$f'(2)=$ R.: 154

Função QUOCIENTE $\dfrac{D\cdot N'-N\cdot D'}{D^2}$

$N = 2\cdot x^5 - 6\cdot x$ $\qquad D = x^2 - 4\cdot x + 5$

$N' = 10\cdot x^4 - 6$ $\qquad D' = 2\cdot x - 4$

$$F'(x) = \frac{\left(x^2-4\cdot x+5\right)\cdot\left(10\cdot x^4-6\right)-\left(2\cdot x^5-6\cdot x\right)\cdot(2\cdot x-4)}{\left(x^2-4\cdot x+5\right)^2}$$

$$F'(2) = \frac{\left(2^2-4\cdot 2+5\right)\cdot\left(10\cdot 2^4-6\right)-\left(2\cdot 2^5-6\cdot 2\right)\cdot(2\cdot 2-4)}{\left(2^2-4\cdot 2+5\right)^2}$$

$$F'(2) = \frac{(4-8+5)\cdot(10\cdot 16-6)-(2\cdot 32-12)\cdot(4-4)}{(4-8+5)^2}$$

$$F'(2) = \frac{(1)\cdot(160-6)-(64-12)\cdot(0)}{(1)^2}$$

$$F'(2) = \frac{(1)\cdot(154)-(52)\cdot(0)}{1}$$

$$F'(2) = \frac{154-0}{1}$$

$$F'(2) = 154$$

2)	$f(x) = \dfrac{3.x^4 - x^2}{x^3}$	$f'(-1) =$ R.: 4

Função QUOCIENTE $\dfrac{D \cdot N' - N \cdot D'}{D^2}$

$N = 3 \cdot x^4 - x^2$ $D = x^3$

$N' = 12 \cdot x^3 - 2 \cdot x$ $D' = 3 \cdot x^2$

$$F'(x) = \frac{\left(x^3\right) \cdot \left(12 \cdot x^3 - 2 \cdot x\right) - \left(3 \cdot x^4 - x^2\right) \cdot \left(3 \cdot x^2\right)}{\left(x^3\right)^2}$$

$$F'(-1) = \frac{\left[(-1)^3\right] \cdot \left[12 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)\right] - \left[3 \cdot (-1)^4 - (-1)^2\right] \cdot \left[3 \cdot (-1)^2\right]}{\left[(-1)^3\right]^2}$$

$$F'(-1) = \frac{(-1) \cdot (-12 + 2) - (3 - 1) \cdot (3)}{1}$$

$$F'(-1) = \frac{(-1) \cdot (-10) - (2) \cdot (3)}{1}$$

$$F'(-1) = \frac{10 - 6}{1}$$

$$F'(-1) = 4$$

3)	$f(x) = \frac{2}{7}$	$f'(4) =$ R.: 0

Função Constante (não tem "x" !)

A derivada de uma função constante é sempre ZERO.

$$F'(4) = 0$$

4)	$f(x) = \frac{2.x}{3} + 7.x^3$	$f'(-5) =$ R.: 525.667

$$F(x) = (0.6666...) \cdot x + 7 \cdot x^3$$

$$F(x) = (0.6666...) \cdot x^1 + 7 \cdot x^3$$

Tanto a primeira como a segunda, são funções MONÔMIO
A derivada, será:

$$F'(x) = (1) \cdot (0.6666...) \cdot x^{(1-1)} + (3) \cdot 7 \cdot x^{(3-1)}$$

$$F'(x) = (0.6666...) \cdot x^0 + 21 \cdot x^2$$

Lembrando que: $x^0 = 1$

$$F'(x) = (0.6666...) + 21 \cdot x^2$$

$$F'(-5) = (0.6666...) + 21 \cdot (-5)^2$$

$$F'(-5) = (0.6666...) + 21 \cdot 25$$

$$F'(-5) = (0.6666...) + 525$$

$$F'(-5) = 525.666666...$$

5)	$f(x)=(x^3-3x^2)\cdot(2.x^6-2.x)$	$f'\left(\frac{1}{2}\right)=$ R.: 3.195

Função PRODUTO $[\ (1a)\cdot(d2a) + (d1\,a)\cdot(2a)\ ]$

$1a = (x^3 - 3\cdot x^2)$ $2a = (2\cdot x^6 - 2\cdot x)$

$d1a = (3\cdot x^2 - 6\cdot x)$ $d2a = (12\cdot x^5 - 2)$

$$F'(x) = [\ (1a)\cdot(d2a) + (d1\,a)\cdot(2a)\ ]$$

$$F'(x) = \left[\ (x^3 - 3\cdot x^2)\cdot(12\cdot x^5 - 2) + (3\cdot x^2 - 6\cdot x)\cdot(2\cdot x^6 - 2\cdot x)\ \right]$$

$$F'\left(\frac{1}{2}\right) = \left[\ (x^3 - 3\cdot x^2)\cdot(12\cdot x^5 - 2) + (3\cdot x^2 - 6\cdot x)\cdot(2\cdot x^6 - 2\cdot x)\ \right]$$

$$F'(0.5) = \left[\ (0.5^3 - 3\cdot 0.5^2)\cdot(12\cdot 0.5^5 - 2) + (3\cdot 0.5^2 - 6\cdot 0.5)\cdot(2\cdot 0.5^6 - 2\cdot 0.5)\ \right]$$

$$F'(0.5) = [\ (0.125 - 3\cdot 0.25)\cdot(12\cdot 0.03125 - 2) + (3\cdot 0.25 - 6\cdot 0.5)\cdot(2\cdot 0.015625 - 2\cdot 0.5)\ ]$$

$$F'(0.5) = [\ (0.125 - 0.75)\cdot(0.375 - 2) + (0.75 - 3)\cdot(0.03125 - 1)\ ]$$

$$F'(0.5) = [\ (-0.625)\cdot(-1.625) + (-2.25)\cdot(-0.969)\ ]$$

$$F'(0.5) = (1.015625 + 2.18025)$$

$$F'(0.5) = 3.195875$$

6)	$f(x) = 2.\log_3(2.x) + 3.x^4$	f'(2) = R.: 96.910

função LOGARÍTMICA somada a uma função MONÔMIO

$$F'(x) = 2\cdot\left(\frac{1}{x\cdot\ln(3)}\right) + 12\cdot x^3$$

$$F'(2) = 2\cdot\left(\frac{1}{2\cdot\ln(3)}\right) + 12\cdot 2^3$$

$$F'(2) = 2\cdot\left(\frac{1}{2\cdot 1.098612}\right) + 12\cdot 8$$

$$F'(2) = 2\cdot\left(\frac{1}{2.197224}\right) + 96$$

$$F'(2) = 2\cdot(0.4551197) + 96$$

$$F'(2) = 0.9102394 + 96$$

$$F'(2) = 96.9102394$$

7)	$f(x) = 3^{(2.x)} + 1$	$f'\left(\frac{2}{3}\right) =$ R.: 9.507

função EXPONENCIAL somada a uma função CONSTANTE

$$F'(x) = 3^{(2\cdot x)}\cdot(2)\cdot\ln(3) + 0$$

$$F'\left(\frac{2}{3}\right) = 3^{(2\cdot x)}\cdot(2)\cdot\ln(3)$$

$$F'(0.6666....) = 3^{(2\cdot 0.6666....)}\cdot(2)\cdot\ln(3)$$

$$F'(0.6666....) = 3^{(1.333...)}\cdot(2)\cdot 1.0986123$$

$$F'(0.6666....) = (4.3267487)\cdot(2.1972246)$$

$$F'(0.6666....) = 9.5068387$$

8)	$f(x) = 6.\ln(x) + 8^2 + 5.x^0$	$f'(2) =$ R.: 3

função LOGARÍTMICA NATURAL (CASO ESPECIAL) somada a duas funções CONSTANTES

Lembrando que: $x^0 = 1$

$$F(x) = 6 \cdot \ln(x) + 64 + 5$$

$$F'(x) = 6 \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + 0 + 0$$

$$F'(2) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$F'(2) = 6 \cdot (0.5)$$

$$F'(2) = 3$$

9)	$f(x)=\left(5^{(2.X)}-3\right).\left(3.x-5.x^2\right)$	$f'(1)=$ R.: -314.944

Função PRODUTO $[\,(1a)\cdot(d2a)+(d1\,a)\cdot(2a)\,]$

$1a = \left[5^{(2\cdot x)}-3\right]$ $2a = \left(3\cdot x-5\cdot x^2\right)$

$d1a = \left[5^{(2\cdot x)}\cdot 2\cdot \ln(5)-0\right]$ $d2a = (3-10\cdot x)$

$$F'(x) = [\,(1a)\cdot(d2a)+(d1\,a)\cdot(2a)\,]$$

$$F'(x) = \left[5^{(2\cdot x)}-3\right]\cdot(3-10\cdot x)+\left[5^{(2\cdot x)}\cdot 2\cdot \ln(5)\right]\cdot\left(3\cdot x-5\cdot x^2\right)$$

$$F'(1) = \left[5^{(2\cdot 1)}-3\right]\cdot(3-10\cdot 1)+\left[5^{(2\cdot 1)}\cdot 2\cdot \ln(5)\right]\cdot\left(3\cdot 1-5\cdot 1^2\right)$$

$$F'(1) = \left[5^{(2)}-3\right]\cdot(3-10)+\left[5^{(2)}\cdot 2\cdot \ln(5)\right]\cdot(3-5\cdot 1)$$

$$F'(1) = (25-3)\cdot(3-10)+(25\cdot 2\cdot \ln(5))\cdot(3-5)$$

$$F'(1) = (22)\cdot(-7)+(50\cdot \ln(5))\cdot(-2)$$

$$F'(1) = -154+[50\cdot(1.6094379)]\cdot(-2)$$

$$F'(1) = -154+(80.471895)\cdot(-2)$$

$$F'(1) = -154+(-160.94379)$$

$$F'(1) = -154-160.94379$$

$$F'(1) = -314.94379$$

10)	$f(x) = \sqrt[3]{x^4} + \log(5.x)$	$f'(2) =$ R.: 1.897

função MONÔMIO somada a função LOGARÍTMICA

$$F(x) = x^{\left(\frac{4}{3}\right)} + \log(5 \cdot x)$$

$$F(x) = x^{1.333...} + \log(5 \cdot x)$$

$$F'(x) = 1.333... \cdot x^{(1.333... - 1)} + \frac{1}{x \cdot \ln(10)}$$

$$F'(x) = 1.333... \cdot x^{(0.333...)} + \frac{1}{x \cdot \ln(10)}$$

$$F'(2) = 1.333... \cdot 2^{(0.333...)} + \frac{1}{2 \cdot \ln(10)}$$

$$F'(2) = 1.333... \cdot (1.259921) + \frac{1}{2 \cdot (2.3025851)}$$

$$F'(2) = 1.6798947 + \frac{1}{4.6051702}$$

$$F'(2) = 1.6798947 + 0.2171472$$

$$F'(2) = 1.8970419$$

11)	$f(x) = 3.\ln(x) + 8^x + \sqrt{6}$	$f'\left(\frac{1}{3}\right) =$ R.: 13.159

função LOGARÍTMICA NATURAL (CASO ESPECIAL) somada a uma função EXPONENCIAL e somada a uma função CONSTANTE

$$F(x) = 3 \cdot \ln(x) + 8^x + \sqrt{6}$$

$$F'(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + 8^x \cdot 1 \cdot \ln(8) + 0$$

$$F'\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + 8^x \cdot 1 \cdot \ln(8)$$

$$F'(0.333...) = 3 \cdot \left(\frac{1}{0.333...}\right) + 8^{0.333...} \cdot 1 \cdot \ln(8)$$

$$F'(0.333...) = 3 \cdot (3) + 2 \cdot 1 \cdot \ln(8)$$

$$F'(0.333...) = 9 + 2 \cdot 1(2.0794415)$$

$$F'(0.333...) = 9 + 2 \cdot (2.0794415)$$

$$F'(0.333...) = 9 + 4.158883$$

$$F'(0.333...) = 13.158883$$

12)	$f(x)=\dfrac{2.x}{7}+6.x^{-2}$	$f'(1)=$ R.: -11.714

$$F(x) = (0.2857143...)\cdot x^{1} + 6\cdot x^{-2}$$

Tanto a primeira como a segunda, são funções MONÔMIO
A derivada, será:

$$F'(x) = (1)\cdot(0.2857143...)\cdot x^{(1-1)} + (-2)\cdot 6\cdot x^{(-2-1)}$$

$$F'(x) = (1)\cdot(0.2857143...)\cdot x^{(0)} + (-12)\cdot x^{(-3)}$$

Lembrando que: $x^{0} = 1$

$$F'(x) = 0.2857143 + (-12)\cdot x^{(-3)}$$

$$F'(1) = 0.2857143 + (-12)\cdot x^{(-3)}$$

$$F'(1) = 0.2857143 + (-12)\cdot 1^{(-3)}$$

$$F'(1) = 0.2857143 + (-12)\cdot 1$$

$$F'(1) = 0.2857143 - 12$$

$$F'(1) = -11.7142857$$

13)	Um fabricante produz ***x*** toneladas de uma liga metálica. O lucro ***P*** , em reais, obtido pela produção é expresso pela função: **P(x) = 12000.x - 15.x²** Quantas toneladas devem ser produzidas para maximizar o lucro? Dica: A derivada em um ponto de máximo ou mínimo para a função acima é igual a zero. Para saber se o ponto é de máximo ou mínimo, usar o critério da segunda derivada	R.: 400 toneladas

A função lucro é dada por:

$$P(x) = 12000 \cdot x - 15 \cdot x^2$$

Como a derivada em um ponto de máximo ou mínimo é sempre igual a zero, basta derivar a função lucro, igualar a ZERO e isolar o valor de "x":

$$P'(x) = 12000 - 30 \cdot x$$

$$0 = 12000 - 30 \cdot x$$

$$x = \frac{-12000}{-30}$$

$x = 400$ **toneladas**

Sabe-se que é um ponto de máximo pois, de acordo com a teoria de máximos e mínimos, aplicando-se a segunda derivada na função, se o resultado for positivo, trata-se de um ponto de mínimo, se o resultado for negativo, trata-se de um ponto de máximo:

$$P'(x) = 12000 - 30 \cdot x$$

$P''(x) = -30$ **valor da derivada segunda negativo, ponto de Máximo**

14)	Uma montadora adquire motores elétricos para instalar em seus produtos. A gerência dessa montadora estima que o custo **C** em unidades monetárias por motor, nos próximos anos será $C(t)=9.(17.t + 13)^{4/3}$, onde **t** é o tempo em anos. Qual será a taxa de variação instantânea do custo em relação ao tempo após 3 anos? Dica: A taxa de variação instantânea é obtida derivando a função. A função acima é uma função composta.	R.: 816 unidades monetárias / ano

$$C(t) = 9\cdot(17\cdot t + 13)^{\frac{4}{3}}$$

$$C(t) = 9\cdot(17\cdot t + 13)^{1.333...}$$

Trata-se de uma função COMPOSTA:

$u = 17\cdot t + 13$ **função INTERNA:**

$$u' = 17$$

$v = 9\cdot u^{1.333...}$ **função EXTERNA:**

$$v' = (1.333...)\cdot 9\cdot u^{(1.333...-1)}$$

$$v' = 12\cdot u^{0.333...}$$

A derivada de uma função COMPOSTA é:

$$C' = u'\cdot v'$$

$$C' = 17\cdot\left(12\cdot u^{0.333...}\right)$$

Mas, como $u = 17\cdot t + 13$ **então:**

$$C'(t) = 17\cdot\left[\ 12\cdot(17\cdot t + 13)^{0.333...}\ \right]$$

14)	Continuação...	R.: 816 unidades monetárias / ano

substituindo t = 3 (anos)

$$C'(3) = 17 \cdot \left[12 \cdot (17 \cdot 3 + 13)^{0.333...} \right]$$

$$C'(3) = 17 \cdot \left[12 \cdot (51 + 13)^{0.333...} \right]$$

$$C'(3) = 17 \cdot \left[12 \cdot (64)^{0.333...} \right]$$

$$C'(3) = 17 \cdot (12 \cdot 4)$$

$$C'(3) = 17 \cdot (48)$$

$$C'(3) = 816$$

Integrais - Exercícios Resolvidos – (pág. 50 da apostila)

1)	$\int_3^5 \left(x^2 + 2\cdot\sqrt{x}\right) dx$	R.: 40,646

$$\int x^2\,dx + \int 2\cdot\sqrt{x}\,dx$$

$$\int x^2\,dx + \int 2\cdot x^{0.5}\,dx$$

$$\int x^2\,dx + 2\cdot\int x^{0.5}\,dx$$

$$\frac{x^3}{3} + 2\cdot\left(\frac{x^{1.5}}{1.5}\right)$$

$$\left[\frac{x^3}{3} + 2\cdot\left(\frac{x^{1.5}}{1.5}\right)\right] - \left[\frac{x^3}{3} + 2\cdot\left(\frac{x^{1.5}}{1.5}\right)\right]$$

$$\left[\frac{5^3}{3} + 2\cdot\left(\frac{5^{1.5}}{1.5}\right)\right] - \left[\frac{3^3}{3} + 2\cdot\left(\frac{3^{1.5}}{1.5}\right)\right]$$

$$\left[\frac{125}{3} + 2\cdot\left(\frac{11.1803399}{1.5}\right)\right] - \left[\frac{27}{3} + 2\cdot\left(\frac{5.1961524}{1.5}\right)\right]$$

$$[\,41.6666667 + 2\cdot(7.4535599)\,] - [\,9 + 2\cdot(3.4641016)\,]$$

$$(41.6666667 + 14.9071198) - (9 + 6.9282032)$$

$$(56.5737865) - (15.9282032) = 40.6455833$$

2)	$\int_{1}^{4} \left[3\cdot\ln(x) + 2^{(3\cdot x)}\right] dx$	R.: 1973,548

$$\int 3\cdot\ln(x)\ dx + \int 2^{(3\cdot x)}\ dx$$

$$3\cdot\int \ln(x)\ dx + \int 2^{(3\cdot x)}\ dx$$

$$3\cdot(x\cdot\ln(x) - x) + \frac{2^{(3\cdot x)}}{3\cdot\ln(2)}$$

$$\left[3\cdot(4\cdot\ln(4) - 4) + \frac{2^{(3\cdot 4)}}{3\cdot\ln(2)}\right] - \left[3\cdot(1\cdot\ln(1) - 1) + \frac{2^{(3\cdot 1)}}{3\cdot\ln(2)}\right]$$

$$\left[3\cdot[4\cdot(1.3862944) - 4] + \frac{2^{(12)}}{3\cdot(0.6931472)}\right] - \left[3\cdot(1\cdot 0 - 1) + \frac{2^{(3)}}{3\cdot(0.6931472)}\right]$$

$$\left[3\cdot[4\cdot(1.3862944) - 4] + \frac{4096}{2.0794416}\right] - \left[3\cdot(1\cdot 0 - 1) + \frac{8}{2.0794416}\right]$$

$$[3\cdot(5.5451776 - 4) + 1969.7595739] - [3\cdot(0 - 1) + 3.8471867]$$

$$[3\cdot(1.5451776) + 1969.7595739] - [3\cdot(-1) + 3.8471867]$$

$$(4.6355328 + 1969.7595739) - (-3 + 3.8471867)$$

$$(1974.3951067) - (0.8471867) = 1973.54792$$

3)	$\int_{1}^{3} \left(\frac{x\cdot\sqrt{x}}{3\cdot x}\right) dx$	R.: 0,932

$$\int \left(\frac{x\cdot\sqrt{x}}{3\cdot x}\right) dx \rightarrow \int \left(\frac{x\cdot x^{0.5}}{3\cdot x}\right) dx$$

$$\int \left(\frac{x^{1.5}}{3\cdot x}\right) dx \rightarrow \int \left(\frac{x^{0.5}}{3}\right) dx$$

$$\frac{1}{3}\cdot\int \left(x^{0.5}\right) dx \rightarrow \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x^{1.5}}{1.5}\right)$$

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x^{1.5}}{1.5}\right)$$

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3^{1.5}}{1.5}\right) - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1^{1.5}}{1.5}\right)$$

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5.1961524}{1.5}\right) - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{1.5}\right)$$

$$\frac{1}{3}\cdot(3.4641016) - \frac{1}{3}\cdot(0.6666667)$$

$$0.3333333\cdot(3.4641016) - 0.3333333\cdot(0.6666667)$$

$$1.1547004 - 0.2222222 = 0.9324782$$

4)	$\int_{2}^{4} \left(\frac{1}{x}+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right) dx$	R.: 3,023

$$\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{3}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$\int x^{-1}\,dx + \int 3\cdot x^{-1}\,dx + \int x^{-2}\,dx$$

$$\int x^{-1}\,dx + 3\cdot\int x^{-1}\,dx + \int x^{-2}\,dx$$

$$\ln(x) + 3\cdot\ln(x) + \frac{x^{-1}}{-1}$$

$$\left(\ln(4) + 3\cdot\ln(4) + \frac{4^{-1}}{-1}\right) - \left(\ln(2) + 3\cdot\ln(2) + \frac{2^{-1}}{-1}\right)$$

$$\left[1.3862944 + 3\cdot(1.3862944) + \frac{0.25}{-1}\right] - \left[0.6931472 + (3\cdot 0.6931472) + \frac{0.5}{-1}\right]$$

$$(1.3862944 + 4.1588832 - 0.25) - (0.6931472 + 2.0794416 - 0.5)$$

$$(5.2951776) - (2.2725888) = 3.0225888$$

5)	$\int_{3}^{6} \frac{1}{3 \cdot x} \, dx$	R.: 0,231

$$\int \frac{1}{3 \cdot x} \, dx \rightarrow \int \frac{x^{-1}}{3} \, dx$$

$$\frac{1}{3} \cdot \int x^{-1} \, dx$$

$$\frac{1}{3} \cdot \ln(x)$$

$$\frac{1}{3} \cdot \ln(6) - \frac{1}{3} \cdot \ln(3)$$

$$\frac{1}{3} \cdot 1.7917595 - \frac{1}{3} \cdot 1.0986123$$

$$(0.3333333) \cdot (1.7917595) - (0.3333333) \cdot (1.0986123)$$

$$0.5972531 - 0.3662041 = 0.231049$$

6)	$\int_{7}^{8} \left(2^x + \ln(x) - 3\right) dx$	R.: 183,679

$$\int 2^x\,dx + \int \ln(x)\,dx - \int 3\,dx$$

$$\frac{2^x}{1\cdot\ln(2)} + (x\cdot\ln(x) - x) - 3\cdot x$$

$$\left[\frac{2^8}{1\cdot\ln(2)} + (8\cdot\ln(8) - 8) - 3\cdot 8\right] - \left[\frac{2^7}{1\cdot\ln(2)} + (7\cdot\ln(7) - 7) - 3\cdot 7\right]$$

$$\left[\frac{256}{0.6931472} + [8\cdot(2.0794415) - 8] - 24\right] - \left[\frac{128}{0.6931472} + [7\cdot(1.9459101) - 7] - 21\right]$$

$$[369.3299201 + (16.635532 - 8) - 24] - [184.6649601 + (13.6213707 - 7) - 21]$$

$$(369.3299201 + 8.635532 - 24) - (184.6649601 + 6.6213707 - 21)$$

$$(353.9654521) - (170.2863308) = 183.6791213$$

7)	$\int_{1}^{7} 4\,dx$	R.: 24

$$\int 4\,dx$$

$$4 \cdot x$$

$$4 \cdot (7) - 4 \cdot (1)$$

$$28 - 4 = 24$$

8)	$\int_{6}^{9} \sqrt[5]{x^7}\,dx$	R.: 50,562

$$\int \sqrt[5]{x^7}\,dx \rightarrow \int x^{\left(\frac{7}{5}\right)}\,dx$$

$$\int x^{1.4}\,dx$$

$$\frac{x^{2.4}}{2.4}$$

$$\left(\frac{x^{2.4}}{2.4}\right) - \left(\frac{x^{2.4}}{2.4}\right)$$

$$\left(\frac{9^{2.4}}{2.4}\right) - \left(\frac{6^{2.4}}{2.4}\right)$$

$$\left(\frac{195.0661995}{2.4}\right) - \left(\frac{73.7162104}{2.4}\right)$$

$$(81.2775831) - (30.7150877) = 50.5624954$$

9)	$\int_{7}^{7} x^2 dx$	R.: 0

$$\int x^2\,dx$$

$$\frac{x^3}{3}$$

$$\frac{7^3}{3} - \frac{7^3}{3}$$

$$114.3333333 - 114.3333333 = 0$$

10)	$\int_1^2 \left[2+3\cdot x+\ln(x)-4^{(2\cdot x)}\right]dx$	R.: -79,675

$$\int 2\,dx+\int 3\cdot x\,dx+\int \ln(x)\,dx-\int 4^{(2\cdot x)}\,dx$$

$$\int 2\,dx+3\cdot\int x\,dx+\int \ln(x)\,dx-\int 4^{(2\cdot x)}\,dx$$

$$2\cdot x+3\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)+(x\cdot\ln(x)-x)-\frac{4^{(2\cdot x)}}{2\cdot\ln(4)}$$

$$\left[2\cdot 2+3\cdot\left(\frac{2^2}{2}\right)+(2\cdot\ln(2)-2)-\frac{4^{(2\cdot 2)}}{2\cdot\ln(4)}\right]-\left[2\cdot 1+3\cdot\left(\frac{1^2}{2}\right)+(1\cdot\ln(1)-1)-\frac{4^{(2\cdot 1)}}{2\cdot\ln(4)}\right]$$

$$\left[4+3\cdot\left(\frac{4}{2}\right)+[2\cdot(0.6931472)-2]-\frac{4^{(4)}}{2\cdot(1.3862944)}\right]-\left[2+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+(1\cdot 0-1)-\frac{4^{(2)}}{2\cdot(1.3862944)}\right]$$

$$\left[4+3\cdot(2)+(1.3862944-2)-\frac{256}{2.7725888}\right]-\left[2+3\cdot(0.5)+(0-1)-\frac{16}{2.7725888}\right]$$

$$(4+6-0.6137056-92.33248)-(2+1.5-1-5.77078)$$

$$(-82.9461856)-(-3.27078)=-79.6754056$$

11)	$\displaystyle\int_{4}^{7} \left(\frac{2\cdot x^4 + 5\cdot x}{\sqrt{x^3}}\right) dx$	R.: 451,882

$$\int \left(\frac{2\cdot x^4 + 5\cdot x}{\sqrt{x^3}}\right) dx \rightarrow \int \left(\frac{2\cdot x^4}{\sqrt{x^3}}\right) dx + \int \left(\frac{5\cdot x}{\sqrt{x^3}}\right) dx$$

$$\int \left[\frac{2\cdot x^4}{x^{\left(\frac{3}{2}\right)}}\right] dx + \int \left[\frac{5\cdot x}{x^{\left(\frac{3}{2}\right)}}\right] dx$$

$$\int \left(\frac{2\cdot x^4}{x^{1.5}}\right) dx + \int \left(\frac{5\cdot x}{x^{1.5}}\right) dx \rightarrow 2\cdot\int \left(\frac{x^4}{x^{1.5}}\right) dx + 5\cdot\int \left(\frac{x}{x^{1.5}}\right) dx$$

$$2\cdot\int x^{2.5}\, dx + 5\cdot\int x^{-0.5}\, dx$$

$$2\cdot\left(\frac{x^{3.5}}{3.5}\right) + 5\cdot\left(\frac{x^{0.5}}{0.5}\right)$$

$$\left[2\cdot\left(\frac{7^{3.5}}{3.5}\right) + 5\cdot\left(\frac{7^{0.5}}{0.5}\right)\right] - \left[2\cdot\left(\frac{4^{3.5}}{3.5}\right) + 5\cdot\left(\frac{4^{0.5}}{0.5}\right)\right]$$

$$\left[2\cdot\left(\frac{907.4926997}{3.5}\right) + 5\cdot\left(\frac{2.6457513}{0.5}\right)\right] - \left[2\cdot\left(\frac{128}{3.5}\right) + 5\cdot\left(\frac{2}{0.5}\right)\right]$$

$$[\,2\cdot(259.2836285\,) + 5\cdot(5.2915026\,)\,] - [\,2\cdot(36.5714286\,) + 5\cdot(4)\,]$$

$$(518.567257 + 26.457513\,) - (73.1428572 + 20)$$

$$(545.02477\,) - (93.1428572\,) = 451.8819128$$

12)	$\displaystyle\int_{1}^{2} \left[\frac{5^{(2\cdot x)}}{10}\right] dx$	R.: 18,640

$$\int \left[\frac{5^{(2\cdot x)}}{10}\right] dx$$

$$\frac{1}{10}\cdot\int 5^{(2\cdot x)}\ dx$$

$$\frac{1}{10}\cdot\left[\frac{5^{(2\cdot x)}}{2\cdot \ln(5)}\right]$$

$$\frac{1}{10}\cdot\left[\frac{5^{(2\cdot 2)}}{2\cdot \ln(5)}\right] - \frac{1}{10}\cdot\left[\frac{5^{(2\cdot 1)}}{2\cdot \ln(5)}\right]$$

$$\frac{1}{10}\cdot\left[\frac{5^{(4)}}{2\cdot(1.6094379)}\right] - \frac{1}{10}\cdot\left[\frac{5^{(2)}}{2\cdot(1.6094379)}\right]$$

$$\frac{1}{10}\cdot\left[\frac{625}{2\cdot(1.6094379)}\right] - \frac{1}{10}\cdot\left[\frac{25}{2\cdot(1.6094379)}\right]$$

$$\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{625}{3.2188758}\right) - \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{25}{3.2188758}\right)$$

$$\frac{1}{10}\cdot(194.1671685) - \frac{1}{10}\cdot(7.7666867)$$

$$(0.1)\cdot(194.1671685) - (0.1)\cdot(7.7666867)$$

$$19.4167169 - 0.7766687 = 18.6400482$$

13)	$\int_1^3 \left(\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right)dx$	R.: 7,531

$$\int \frac{2}{x}\,dx + \int \frac{4}{x^2}\,dx + \int \frac{6}{x^3}\,dx$$

$$\int 2\cdot x^{-1}\,dx + \int 4\cdot x^{-2}\,dx + \int 6\cdot x^{-3}\,dx$$

$$2\cdot\int x^{-1}\,dx + 4\cdot\int x^{-2}\,dx + 6\cdot\int x^{-3}\,dx$$

$$2\cdot(\ln(x)) + 4\cdot\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) + 6\cdot\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)$$

$$\left[2\cdot(\ln(3)) + 4\cdot\left(\frac{3^{-1}}{-1}\right) + 6\cdot\left(\frac{3^{-2}}{-2}\right)\right] - \left[2\cdot(\ln(1)) + 4\cdot\left(\frac{1^{-1}}{-1}\right) + 6\cdot\left(\frac{1^{-2}}{-2}\right)\right]$$

$$\left[2\cdot(1.0986123) + 4\cdot\left(\frac{0.3333333}{-1}\right) + 6\cdot\left(\frac{0.1111111}{-2}\right)\right] - \left[2\cdot(0) + 4\cdot\left(\frac{1}{-1}\right) + 6\cdot\left(\frac{1}{-2}\right)\right] \ .$$

$$[\,2.1972246 + 4\cdot(-0.3333333) + 6\cdot(-0.0555556)\,] - [\,0 + 4\cdot(-1) + 6\cdot(-0.5)\,]$$

$$(2.1972246 - 1.3333332 - 0.3333336) - (0 - 4 - 3)$$

$$(0.5305578) - (-7) = 7.5305578$$

14)	$$\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{7}{3}} \left(\frac{2}{x} + 4\cdot\ln(x) + 2^x\right) dx$$	R.: 9,809

$$\int \frac{2}{x}\,dx + \int 4\cdot\ln(x)\,dx + \int 2^x\,dx \rightarrow \int 2\cdot x^{-1}\,dx + \int 4\cdot\ln(x)\,dx + \int 2^x\,dx$$

$$2\cdot\int x^{-1}\,dx + 4\cdot\int \ln(x)\,dx + \int 2^x\,dx$$

$$2\cdot\ln(x) + 4\cdot(x\cdot\ln(x) - x) + \frac{2^x}{1\cdot\ln(2)}$$

$$\left[2\cdot\ln\left(\frac{7}{3}\right) + 4\cdot\left(\frac{7}{3}\cdot\ln\left(\frac{7}{3}\right) - \frac{7}{3}\right) + \frac{2^{\left(\frac{7}{3}\right)}}{1\cdot\ln(2)}\right] - \left[2\cdot\ln\left(\frac{2}{3}\right) + 4\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\ln\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}\right) + \frac{2^{\left(\frac{2}{3}\right)}}{1\cdot\ln(2)}\right]$$

$$\left[2\cdot\ln\left(\frac{7}{3}\right) + 4\cdot\left(\frac{7}{3}\cdot\ln\left(\frac{7}{3}\right) - \frac{7}{3}\right) + \frac{2^{\left(\frac{7}{3}\right)}}{1\cdot\ln(2)}\right]$$

$$\left[2\cdot\ln(2.3333333) + 4\cdot(2.3333333\cdot\ln(2.3333333) - 2.3333333) + \frac{2^{(2.3333333\ )}}{1\cdot\ln(2)}\right]$$

$$\left[2\cdot(0.8472978) + 4\cdot[2.3333333\cdot(0.8472978) - 2.3333333] + \frac{5.0396841}{0.6931472}\right]$$

$$[1.6945956 + 4\cdot(1.9770282 - 2.3333333) + 7.2707271]$$

$$[1.6945956 + 4\cdot(-0.3563051) + 7.2707271]$$

$$(1.6945956 - 1.4252204 + 7.2707271)$$

$$(1.6945956 - 1.4252204 + 7.2707271) = 7.5401023$$

Continua na próxima página

Continuação da questão 14

$$\left[2\cdot\ln\left(\frac{2}{3}\right)+4\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\ln\left(\frac{2}{3}\right)-\frac{2}{3}\right)+\frac{2^{\left(\frac{2}{3}\right)}}{1\cdot\ln(2)}\right]$$

$$\left[2\cdot\ln(0.6666667)+4\cdot(0.6666667\cdot\ln(0.6666667)-0.6666667)+\frac{2^{(0.6666667)}}{1\cdot\ln(2)}\right]$$

$$\left[2\cdot(-0.4054651)+4\cdot[0.6666667\cdot(-0.4054651)-0.6666667]+\frac{1.5874011}{0.6931472}\right]$$

$$[-0.8109302+4\cdot(-0.2703101-0.6666667)+2.2901356]$$

$$[-0.8109302+4\cdot(-0.9369768)+2.2901356]$$

$$(-0.8109302-3.7479072+2.2901356)$$

$$(-0.8109302-3.7479072+2.2901356)=-2.2687018$$

$$\left[2\cdot\ln\left(\frac{7}{3}\right)+4\cdot\left(\frac{7}{3}\cdot\ln\left(\frac{7}{3}\right)-\frac{7}{3}\right)+\frac{2^{\left(\frac{7}{3}\right)}}{1\cdot\ln(2)}\right]=7.5401032$$

$$\left[2\cdot\ln\left(\frac{2}{3}\right)+4\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\ln\left(\frac{2}{3}\right)-\frac{2}{3}\right)+\frac{2^{\left(\frac{2}{3}\right)}}{1\cdot\ln(2)}\right]=-2.2687015$$

$$7.5401032-(-2.2687015)=9.8088047$$

15)	$\int_{3}^{4} \left(4^3 + \ln(e) + 1\right) dx$	R.: 66

$$\int 4^3\, dx + \int \ln(e)\, dx + \int 1\, dx$$

$$\int 64\, dx + \int \ln(2.7182818)\, dx + \int 1\, dx$$

$$\int 64\, dx + \int 1\, dx + \int 1\, dx$$

$$64 \cdot x + 1 \cdot x + 1 \cdot x$$

$$66 \cdot x$$

$$66 \cdot (4) - 66 \cdot (3) = 66$$

16)	$\int_1^5 \left[\frac{x\cdot x^{\left(\frac{3}{4}\right)}\cdot\sqrt{x^3}}{2\cdot x}\right]dx$	R.: 28,603

$$\int \left[\frac{x\cdot x^{\left(\frac{3}{4}\right)}\cdot\sqrt{x^3}}{2\cdot x}\right]dx \rightarrow \int \left[\frac{x\cdot x^{(0.75)}\cdot x^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{2\cdot x}\right]dx$$

$$\int \left[\frac{x\cdot x^{(0.75)}\cdot x^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{2\cdot x}\right]dx \rightarrow \int \left[\frac{x\cdot x^{(0.75)}\cdot x^{(1.5)}}{2\cdot x}\right]dx$$

$$\int \frac{x^{(3.25)}}{2\cdot x}\,dx \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\int \frac{x^{(3.25)}}{x}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\cdot\int x^{2.25}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x^{3.25}}{3.25}\right)$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5^{3.25}}{3.25}\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1^{3.25}}{3.25}\right)$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{186.9185977}{3.25}\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3.25}\right)$$

$$\frac{1}{2}\cdot(57.5134147) - \frac{1}{2}\cdot(0.3076923)$$

$$(0.5)(57.5134147) - (0.5)\cdot(0.3076923)$$

$$28.7567073 - 0.1538461 = 28.6028612$$

17)	$\int_{3}^{7}\left(\frac{3\cdot x+4\cdot\sqrt{x}-5}{x^{2}}\right)dx$	R.: 3,185

$$\int\left(\frac{3\cdot x+4\cdot\sqrt{x}-5}{x^{2}}\right)dx$$

$$\int\frac{3\cdot x}{x^{2}}\,dx+\int\frac{4\cdot\sqrt{x}}{x^{2}}\,dx-\int\frac{5}{x^{2}}\,dx$$

$$3\cdot\int\frac{x}{x^{2}}\,dx+4\cdot\int\frac{\sqrt{x}}{x^{2}}\,dx-\int 5\cdot x^{-2}\,dx$$

$$3\cdot\int x^{-1}\,dx+4\cdot\int\frac{x^{0.5}}{x^{2}}\,dx-5\cdot\int x^{-2}\,dx$$

$$3\cdot\int x^{-1}\,dx+4\cdot\int x^{-1.5}\,dx-5\cdot\int x^{-2}\,dx$$

$$3\cdot\ln(x)+4\cdot\left(\frac{x^{-0.5}}{-0.5}\right)-5\cdot\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)$$

$$\left[3\cdot\ln(7)+4\cdot\left(\frac{7^{-0.5}}{-0.5}\right)-5\cdot\left(\frac{7^{-1}}{-1}\right)\right]-\left[3\cdot\ln(3)+4\cdot\left(\frac{3^{-0.5}}{-0.5}\right)-5\cdot\left(\frac{3^{-1}}{-1}\right)\right]$$

$$\left[3\cdot(1.9459101)+4\cdot\left(\frac{0.3779645}{-0.5}\right)-5\cdot\left(\frac{0.1428571}{-1}\right)\right]-\left[3\cdot(1.0986123)+4\cdot\left(\frac{0.5773503}{-0.5}\right)-5\cdot\left(\frac{0.3333333}{-1}\right)\right].$$

$$[\,5.8377303+4\cdot(-0.755929)-5\cdot(-0.1428571)\,]-[\,3.2958369+4\cdot(-1.1547006)-5\cdot(-0.3333333)\,]$$

$$(5.8377303-3.023716+0.7142855)-(3.2958369-4.6188024+1.6666665)$$

$$(3.5282998)-(0.343701)=3.1845958$$

18)	$\int_{-4}^{4} (5 \cdot x + 2)\,dx$	R.: 16

$$\int 5 \cdot x\,dx + \int 2\,dx$$

$$5 \cdot \int x\,dx + \int 2\,dx$$

$$5 \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right) + 2 \cdot x$$

$$\left[5 \cdot \left(\frac{4^2}{2}\right) + 2 \cdot (4)\right] - \left[5 \cdot \left[\frac{(-4)^2}{2}\right] + 2 \cdot (-4)\right]$$

$$\left[5 \cdot \left(\frac{16}{2}\right) + 8\right] - \left[5 \cdot \left(\frac{16}{2}\right) - 8\right]$$

$$[5 \cdot (8) + 8] - [5 \cdot (8) - 8]$$

$$(40 + 8) - (40 - 8)$$

$$(48) - (32) = 16$$

Católica de Santa Catarina

Apostila de Matemática para os cursos de:
Ciências Contábeis e Administração
Prof.Joable Andrade Alves