Lambda-Calcul et Catégories

Paul-André Mellies

14 octobre 2024

Table des matières

1 Introduction

1.1 Introduction Historique

Le λ-calcul a été introduit dans les années 1930 par Church. Il est en lien avec des questions de linguistique, de logique et de calculabilité.

Définition 1.1 Le λ-calcul est un langage de preuves pour une logique intuitionniste minimale (ou pour la théorie simple des types).

Le λ-calcul non typé a la puissance des machines de Turing.

Définition 1.2 Les catégories sont des structures algébriques (parfois appelées monoïdes à plusieurs objets)

Historiquement, les catégories ont été introduites pour la topologie algébriques dans les années 1940 avec les travaux de Eilenberg et Maclane. Leur objectif était de comprendre les propriétés fondamentales des espaces en s'intéressant aux morphismes entre espaces (les fonctions continues).

Il y a une connexion forte au niveau de la théorie des preuves entre λ-calcul et théorie, qui est très similaire à ce qui s'était passé lors de la définition des algèbres de Boole. Dans ce deuxième cas, Boole montre qu'on peut mettre un ordre partiel sur les formules de la logique classique :

$$\varphi \leq \Psi \text{ si et seulement si } \varphi \Rightarrow \Psi$$

Une algèbre de Boole $(A, \leq, \wedge, \vee, \neg, \top, \bot)$ est un ensemble ordonnée $A, \leq$ muni de fonctions préservant l'ordre $\wedge, \vee$: $A \times A \rightarrow A$:

$$\varphi_1 \leq \Psi_1 \wedge \varphi_2 \leq \Psi_2 \Longrightarrow \varphi_1 \wedge \varphi_2 \leq \Psi_1 \wedge \Psi_2, \varphi_1 \vee \varphi_2 \leq \Psi_1 \vee \Psi_2$$

et d'une fonction inversant l'ordre $\neg : A \times A$:

$$\varphi \leq \Psi \Rightarrow \neg\Psi \leq \neg\varphi$$

vérifiant un certain nombre d'axiomes :

- Associativité :

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3 = \varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3)$$
$$(\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3 = \varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)$$

- Neutralité :

$$\varphi \wedge \top = \top \wedge \varphi = \varphi$$
$$\varphi \vee \bot = \bot \vee \varphi = \varphi$$

- Commutativité :

$$\varphi \wedge \Psi = \Psi \wedge \varphi, \varphi \vee \Psi = \Psi \vee \varphi$$

- Distributivité :

$$\varphi \wedge (\Psi_1 \vee \Psi_2) = (\varphi \wedge \Psi_1) \vee (\varphi \wedge \Psi_2)$$
$$\varphi \vee (\Psi_1 \wedge \Psi_2) = (\varphi \vee \Psi_1) \wedge (\varphi \vee \Psi_2)$$
$$\neg (\varphi \wedge \Psi) = \neg\varphi \vee \neg\Psi, \neg\top = \bot$$

- Idempotence :

$$\varphi = \neg\neg\varphi$$
$$\varphi \wedge \varphi = \varphi, \varphi \vee \varphi = \varphi$$

Dans une algèbre de Boole, $\varphi \wedge \psi$ est le plus grand minorant de φ et de ψ et $\varphi \vee \psi$ est le plus petit majorant de φ et ψ

R On peut définir l'implication dans les algèbres de Boole comme $\varphi \Longrightarrow \psi = \neg\varphi \vee \psi$

On va passer du système des algèbres de Boole ($\varphi \leq \psi$ s'il existe une preuve que φ implique ψ) au système de catégories comme proposé par Lambek.

Définition 1.3 On peut voir une catégorie comme un graphe dont les noeuds sont appelés objets et les arêtes sont appelées morphismes, maps ou flèches. On peut composer les arêtes d'une catégorie, comme pour se déplacer sur le graphe.

Ici on considère une catégorie dont les objets sont des formules logiques, et les morphismes sont des preuves d'implication. Il y a donc des liens très forts entre les catégories obtenues avec des formules et des preuves et celles obtenues par des types et des programmes fonctionnels entre les types. On va ici étudier les catégories à travers leurs représentations : on peut mieux comprendre une catégorie en la représentant comme une famille d'actions au moyen d'un foncteur.

1.2 Notion de Catégorie : Premiers Exemples

Définition 1.4 — Catégorie. Une *catégorie* est décrite par les données suivantes :

0 Une classe [a] d'objets (les noeuds d'un graphe). On appelle les catégories dont les objets définissent un ensemble des *petites catégories*.

1 Pour toute paire d'objets A, B, un ensemble $\mathrm{Hom}(A, B)$ de fonctions de A vers B appelées *morphismes* ou *maps*. On note ceci : $f : A \to B$ ou $A \xrightarrow{f} B$.

2 Pour tous objets A, B, C, une loi de composition $\circ_{A,B,C}$:

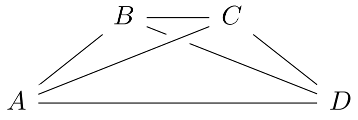
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}(B,C) \times \mathrm{Hom}(A,B) & \to & \mathrm{Hom}(A,C) \\ (g,f) & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

2 Pour tout objet A, une fonction identité $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}(A, A)$

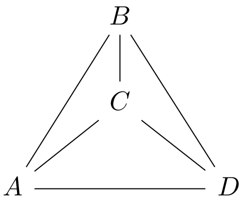
3 Associativité :

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[dr, "h"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[urr, "g\circ f"'] \arrow[rrr, "h\circ(g\circ f)"] & & & D \end{tikzcd}$$

On peut aussi voir la composition comme la couverture de l'aire entre les noeuds du graphe :



ou encore :



3 Neutralité : $f \circ \mathrm{id}_A = f = \mathrm{id}_B \circ f$.

---

[a] propriété non incarnée par un ensemble

R Voir *nerf d'une catégorie* pour voir la notion d'ensemble simplicial.

- **Exemple 1.1** **PoSet** On considère d'abord les ensembles partiellement ordonnés comme des catégories :

Proposition 1.1 Chaque ensemble partiellement ordonné $(A, \leq)$ définit une catégorie dont les objets sont des éléments a, b, c de A avec une map $a \to b$ si et seulement si $a \leq b$ et $\mathrm{Hom}(a, b)$ un singleton si $a \leq b$ et $\varnothing$ sinon.

Démonstration. On doit montrer l'existence d'une identité, d'une loi de composition, et les propriétés d'associativité et de neutralité :

- Par réflexivité de l'ordre : $a \leq a$ et donc $a \xrightarrow{\mathrm{id}_a} a$ existe.
- Par transitivité : si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$ et on peut donc voir la transitivité comme une composition :
- L'associativité et la neutralité découlent immédiatement du fait que chaque $\mathrm{Hom}(a, b)$ contient au plus un élément.

■

Réciproquement, une catégorie φ telle que chaque ensemble d'homomorphismes contienne au plus un élément est la même chose qu'un préordre :

$$\begin{tikzcd} a \arrow[loop left, "\mathrm{id}=g\circ f"] \arrow[r, shift left, "f"] & b \arrow[l, shift left, "g"] \arrow[loop right, "f\circ g=\mathrm{id}"] \end{tikzcd}$$

Monoïde On considère maintenant les Monoïdes comme des catégories.

Proposition 1.2 Chaque monoïde (M, m, e) définit une catégorie notée $\mathcal{B}M$ appelée sa suspension avec un seul objet $*$ tel que : $\mathrm{Hom}(*, *) = M$ et $\circ : m, n \mapsto n \cdot m$.

L'associativité et la neutralité de la catégorie $\mathcal{B}M$ sont des conséquences directes de l'associativité et de la neutralité du monoïde.

R En prenant $M = (\mathbb{N}, +, 0)$, la représentation ainsi obtenue des entiers a un lien direct avec la théorie de l'homotopie : c'est le groupe de Poincaré (ou groupe fondamental) d'un espace topologique pointé. Tout espace topologique définit une catégorie dont les objets sont les éléments de l'espace topologique et les flèches sont les chemins, à homotopie près.

Types On considère la catégorie cartésienne fermée des types simples comme objets et des λ-termes simplement typés (module $\beta\eta$-équivalence) comme morphismes :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x:A\models t:B"] \arrow[rr, bend right, "x:A\models a[t/y]:C"'] & B \arrow[r, "y:B\models u:C"] & C \end{tikzcd}$$

$A \xrightarrow{x:A\models t:B} B \xrightarrow{y:B\models u:C} C$ flèche dessous $(x : A \models u[t/y] : C)$ Cette catégorie jouera le rôle en théorie de la démonstration de l'algèbre de Boole des formules

■

2 Catégories Cartésiennes

Définition 2.1 Un produit cartésien de deux objets A et B dans un catégorie φ est la donnée d'un triplet

$$(A \times B, \pi_1 : A \times B \to A, \pi_2 : A \times B \to B)$$

$$\begin{tikzcd} A & & B \\ & A \times B \arrow[ul, "\pi_1"] \arrow[ur, "\pi_2"'] & \end{tikzcd}$$

tel que pour toute paire de flèches : $X \xrightarrow{f} A$ et $X \xrightarrow{g} B$, il existe un et une seule flèche : $h : X \to A \times B$ telle que $f = \pi_1 \circ h, g = \pi_2 \circ h$. Pour $\varphi = Set$, par exemple, $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ et $\pi_1 : (a, b) \mapsto a$ et $h : x \mapsto (fx, gx)$.

■ **Exemple 2.1** Dans une catégorie définie par une relation d'ordre sur $A, \leq$, le produit cartésien de $a, b \in A$ c'est la même chose que la borne inférieure $a \wedge b$ de a et b définie comme le plus grand des minorants de a et b.

$$\begin{tikzcd}
a & & b \\
& a \wedge b \arrow[ul, "\leq"] \arrow[ur, "\leq"'] & \\
& x \arrow[uul, bend left] \arrow[uur, bend right] \arrow[u, dotted, "h"] &
\end{tikzcd}$$

■

Définition 2.2 — Objet Terminal. Un objet terminal $\mathbb{1}$ dans une catégorie $\mathcal{C}$ est un objet tel que pour tout objet A de $\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{1})$ est une singleton.

R Un objet initial est un objet terminal dans la catégorie duale (catégorie ou on renverse les flèches).

Définition 2.3 Une catégorie cartésienne est une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'un produit cartésien $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$ et munie d'un objet terminal.

Définition 2.4 Une paire $\mathbb{I} \xrightarrow{f} \mathbb{J}$ et $\mathbb{J} \xrightarrow{g} \mathbb{I}$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{J}}$ et $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{I}}$ est appelée *isomorphisme*

Proposition 2.1 Deux objets terminaux sont isomorphes. Deux produits cartésiens d'une même paire d'objets sont isomorphes.

Démonstration. Soit $\mathbb{I}, \mathbb{J}$ deux objets terminaux d'une même catégorie. Il existe un unique morphisme f (resp. g) de $\mathbb{I}$ (resp. $\mathbb{J}$) vers $\mathbb{J}$ (resp. $\mathbb{I}$). De même, il existe un unique morphisme $\mathrm{id}_{\mathbb{J}}$ de $\mathbb{J}$ vers lui-même. Le diagramme ci-dessous commute donc :

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{J} & \\
\mathbb{J} \arrow[ur, "\mathrm{id}_{\mathbb{J}}"] \arrow[rr, "g"] & & \mathbb{I} \arrow[ul, "f"']
\end{tikzcd}$$

En particulier, on a bien $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{J}}$. Puisque la situation est symétrique, $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{I}}$ et donc deux objets terminaux sont isomorphes. Si on a deux produits cartésiens $A \times B, A \otimes B$ de deux objets A, B, alors :

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[dr, bend right, "\pi_{A,1}"'] \arrow[drr, "\pi_{B,1}"] & & & A \otimes B \arrow[dll, "\pi_{A,2}"'] \arrow[dl, bend left, "\pi_{B,2}"] \\
& A & B &
\end{tikzcd}$$

En particulier, par définition du produit cartésien, puisqu'il existe deux applications de $A \times B$ vers A, B, il existe une unique application $h_{1,2}$ de $A \times B$ vers $A \otimes B$ telle que $\pi_{A,2} \circ h_{1,2} = \pi_{A,1}$:

$$\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[ddl, bend right, "\pi_{A,1}"'] \arrow[ddr, bend left, "\pi_{B,1}"] \arrow[d, dotted, bend right, "f"'] & \\
& A \otimes B \arrow[dl, "\pi_{A,2}"'] \arrow[dr, "\pi_{B,2}"] \arrow[u, dotted, bend right, "g"'] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

Il suffit donc de montrer que l'identité fait commuter le diagramme pour que avoir $f \circ g = \mathrm{id}_{A \times B}$ et donc le résultat :

$$\begin{tikzcd}
 & & A \\
 & A & \\
A\times B \arrow[r, "f"] \arrow[ru, "\pi_{A,1}"] \arrow[rruu, bend left, "\pi_{A,1}"] \arrow[rrd, bend right, "\pi_{B,1}"'] & A\otimes B \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[u, dashed, "\pi_{A,2}"] & A\times B \arrow[uu, "\pi_{A,1}"] \arrow[d, dashed, "\pi_{B,2}"] \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

On aurait aussi pu construire une catégorie $Span(A, B)$:

- Les objets sont des triplets $\langle f, X, g\rangle$:

$$\begin{tikzcd}
A & & B \\
 & X \arrow[lu, "f"] \arrow[ru, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

- Les flèches sont des $\langle f, X, g\rangle \xrightarrow{h} \langle f', Y, g'\rangle$:

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[ld] \arrow[rd] & \\
A & & B \\
 & X \arrow[lu] \arrow[ru] \arrow[uu, "h"] &
\end{tikzcd}$$

Alors, $A \times B, \pi_1, \pi_2$ est un produit cartésien dans $\mathcal{C}$ si et seulement si $\langle \pi_1, A \times B, \pi_2\rangle$ est un objet terminal dans $Span(A, B)$. ■

3 La 2-catégorie des catégories, foncteurs et transformations naturelles

3.1 Foncteurs entre Catégories

Définition 3.1 Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ deux catégories. Un foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est la donnée de :

0 Un objet $F(A) \in \mathcal{B}$ pour tout objet A de $\mathcal{A}$.

1 Pour toute paire d'objets $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, une fonction :

$$\begin{array}{rccc} F_{A_1,A_2} : & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A_1, A_2) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(FA_1, FA_2) \\ & f & \mapsto & F(f) \end{array}$$

2 On demande que les équations suivantes soient satisfaites :

- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ où

$$\begin{tikzcd}
 & A_2 \arrow[rd, "g"] & \\
A_1 \arrow[ru, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"] & & A_3
\end{tikzcd}$$

C'est à dire :

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[d, "f"] \arrow[dd, bend left=90, "g\circ f"] & & FA_1 \arrow[d, "Ff"] \arrow[dd, bend left=90, "Fg\circ Ff"] \\
A_2 \arrow[d, "g"] & & FA_2 \arrow[d, "Fg"] \\
A_3 & & FA_3
\end{tikzcd}$$

- Si $A \xrightarrow{\mathrm{id}_A} A$, $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$

Autrement dit, l'image de la composée est égale à la composée des images.

■ **Exemple 3.1**

1. Un foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre catégories de préordre est la même chose qu'une fonction croissante (order preserving).
2. Un foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre catégories à un objet est la même chose qu'un homomorphisme $M \to N$ si $\mathcal{A} = \Sigma M$ et $\mathcal{B} = \Sigma N$.
3. Si M est un monoïde, $\mathcal{A} = \Sigma M$ la catégorie à un objet associée, un foncteur $F : \mathcal{A} \to$ Set la catégorie des ensembles et fonctions est la donnée d'un ensemble X (l'image de M) et d'une action à gauche de M sur X. En effet, puisque chaque élément de M est une flèche de ΣM de l'objet dans lui même, pour tous $m, n \in M$, on a une flèche de $F(*) \to F(*)$ telles que $F(m \cdot n) = F(m) \circ F(n)$. On vérifie alors bien les propriétés d'une action à gauche.

   Similairement, si M est le monoïde libre engendré par un alphabet A, l'action à droite $X \times A^* \to X$ étant une famille de fonctions $\delta_a : X \to X$ pour $a \in A$, i.e. un automate déterministe et total dont l'ensemble des états est X.
4. Soit $\mathbb{G}$ la catégorie à deux objets et quatre morphismes :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[loop right, "\mathrm{id}_1"] \arrow[d, shift right, "t"'] \arrow[d, shift left, "s"] \\
0 \arrow[loop right, "\mathrm{id}_0"]
\end{tikzcd}$$

   Un foncteur $F : \mathbb{G} \to$ Set est une paire d'ensembles $E = F(1)$, $V = F(0)$, et de deux fonctions $F(s), F(t) : E \to V$. En voyant E comme un ensemble d'arêtes et V comme un ensemble de sommets, $F(s)$ peut être vue comme une fonction ∂_0 qui à une arête (x, y) associe x. Rajouter un élément 2 avec deux morphismes vers 1 permettrait de définir des graphes avec des 2-arêtes entre arêtes. En prenant la catégorie des faces d'un triangle on obtiendrait la catégorie des ensembles simpliciaux.

■

3.2 Transformations entre Foncteurs

3.2.1 Transformation

On va essayer de suivre l'intuition selon laquelle la théorie des catégories préserve l'ordre.

$$\begin{tikzcd}
(A, \leq_A) \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\rotatebox{90}{$\leq$}"] & (B, \leq_B)
\end{tikzcd}$$

On a alors $f \leq g \Leftrightarrow \forall a \in A, fa \leq ga$.

On va essayer de généraliser cette définition. On se donne deux foncteurs F, G de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ et on va définir une transformation point à point de F vers G :

Définition 3.2 Une transformation $\theta : F \Rightarrow G$ est une famille $(\theta_A : FA \to GA)_{A \in \mathrm{Obj}\mathcal{A}}$ de flèches de $\mathcal{B}$ indicée par les objets de $\mathcal{A}$. On note ceci :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left=40, "G"{name=U}] \arrow[r, bend right=40, "F"'{name=D}] & \mathcal{B} \arrow[Rightarrow, from=D, to=U, "\theta"]
\end{tikzcd}$$

Définition 3.3 La catégorie $\mathrm{Trans}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ a pour objet les foncteurs $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ et pour flèches les transformations $\theta : F \Rightarrow G$.

- La transformation $\mathrm{id}_F : F \Rightarrow F$ est définie par $\mathrm{id}_F = \left(FA \xrightarrow{\mathrm{id}_{FA}} FA\right)_{A \in \mathrm{Obj}\mathcal{A}}$
- La transformation $\psi \cdot \varphi : F \Rightarrow H$ composée de $\varphi : F \Rightarrow G$ et $\psi : G \Rightarrow H$ telle que : $(\psi \cdot \varphi)_A = \psi_A \circ_{\mathcal{B}} \varphi_A$.

3.2.2 Action à Gauche de Post-Composition

Supposons qu'on ait la situation suivante :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left=40, "G"{name=U}] \arrow[r, bend right=40, "F"'{name=D}] & \mathcal{B} \arrow[r, "H"] \arrow[Rightarrow, from=D, to=U, "\theta"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

où $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ sont des catégories, $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et $H : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ sont des foncteurs et $\theta : F \to G$ est une transformation.

Définition 3.4 La transformation (dite d'action à gauche) $H \circ_L \theta : H \circ F \Rightarrow H \circ G$ est définie par $(H \circ \theta)_A = H(\theta_A) : HFA \to HGA$

Autrement dit, une transformation est la donnée pour tout objet de la catégorie de départ d'une flèche dans la catégorie d'arrivée.

Proposition 3.1 On a alors une série d'équations :

1. On a :

   $$H \circ_L (\psi \cdot \varphi) = (H \circ_L \psi) \cdot (H \circ_L \varphi)$$

   et de même :

   $$H \circ_L \mathrm{Id}_F = \mathrm{Id}_{H \circ F}$$

   Autrement dit :

   $$H \circ_L : \begin{array}{ccc} \mathrm{Trans}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) & \longrightarrow & \mathrm{Trans}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \\ F : \mathcal{A} \to \mathcal{B} & \longmapsto & H \circ F : \mathcal{A} \to \mathcal{C} \\ \begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left=40, "G"{name=U}] \arrow[r, bend right=40, "F"'{name=D}] & \mathcal{B} \arrow[Rightarrow, from=D, to=U, "\theta"] \end{tikzcd} & \longmapsto & \begin{tikzcd}[column sep=large] \mathcal{A} \arrow[r, bend left=40, "H \circ G"{name=U}] \arrow[r, bend right=40, "H \circ F"'{name=D}] & \mathcal{C} \arrow[Rightarrow, from=D, to=U, "H \circ_L \theta"] \end{tikzcd} \end{array}$$

   $H \circ_L -$ est un foncteur. On dit que l'action est fonctorielle.

2. On a :

   $$(H' \circ H) \circ_L \theta = H' \circ_L (H \circ_L \theta)$$

   et de même :

   $$\mathrm{Id}_{\mathcal{B}} \circ_L \theta = \theta$$

Démonstration. 1. La première propriété est immédiate par la composition des foncteurs.

2. On a :

$$\begin{aligned}((H' \circ H) \circ_L \theta)_{A \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{A}} =& H' \circ H \left(\theta_A : FA \to GA\right)\\ =& H'\left(H\theta_A\right)\\ =& H' \circ \left(H \circ \theta_A\right)\\ =& \left(H' \circ_L \left(H \circ_L \theta\right)\right)_{A \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{A}}\end{aligned}$$

D'où la deuxième propriété.

■

3.2.3 Action à droite de Pré-Composition

On suppose qu'on à :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "H"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "G"{name=U}] \arrow[r, bend right, "F"'{name=D}] & \mathcal{C} \arrow[Rightarrow, from=D, to=U, "\theta"] \end{tikzcd}$$

Ceci permet de définir une transformation, dite d'action à droite :

Définition 3.5 La transformation (d'action à droite) $\theta \circ_R H : F \circ H \Rightarrow G \circ H$ est définie par : $(\theta \circ_R H)_{C \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}} = \theta_{HC}$.

Proposition 3.2 $\circ_H$ définit un foncteur :

$$\mathrm{Trans}\left(\mathcal{A}, \mathcal{B}\right) \longrightarrow \mathrm{Trans}\left(\mathcal{A}, \mathcal{C}\right)$$

Si on a :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "H"] & \mathcal{A} \arrow[r, bend left=50, "G"{name=G}] \arrow[r, "F"{description, name=F}] \arrow[r, bend right=50, "E"'{name=E}] & \mathcal{B} \arrow[Rightarrow, from=F, to=G, "\theta_2"] \arrow[Rightarrow, from=E, to=F, "\theta_1"] \end{tikzcd}$$

Alors $(\theta_2 \circ_R H) \cdot (\theta_1 \circ_R H) = (\theta_2 \cdot \theta_1) \circ_R H$ De même, on a :

$$\mathrm{id}_F \circ_R H = \mathrm{id}_{F \circ H}$$

Proposition 3.3 Les actions à gauche et à droite sont compatibles au sens où :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}' \arrow[r, "H_{\mathcal{A}'}"] & \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "G"{name=U}] \arrow[r, bend right, "F"'{name=D}] & \mathcal{B} \arrow[r, "H_{\mathcal{B}}"] & \mathcal{B}' \arrow[Rightarrow, from=D, to=U, "\theta"] \end{tikzcd}$$

En particulier :

$$\left(H_{\mathcal{B}} \circ_L \theta\right) \circ_R H_{\mathcal{A}} = H_{\mathcal{B}} \circ_L \left(\theta \circ_R H_{\mathcal{A}}\right)$$

cette transformation étant définie en $A' \in \mathrm{Obj}\mathcal{A}'$ par :

$$H_{\mathcal{B}}\left(\theta_{H_{\mathcal{A}}A'}\right) : H_{\mathcal{B}}FH_{\mathcal{A}}A' \to H_{\mathcal{B}}GH_{\mathcal{A}}A'$$

Ces équations assurent que tout diagramme de la forme :/

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}''' \arrow[r] & \mathcal{A}'' \arrow[r] & \mathcal{A}' \arrow[r, "H_{\mathcal{A}'}"] & \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "G"{name=U}] \arrow[r, bend right, "F"'{name=D}] & \mathcal{B} \arrow[r, "H_{\mathcal{B}}"] & \mathcal{B}' \arrow[r] & \mathcal{B}'' \arrow[r] & \mathcal{B}''' \arrow[Rightarrow, from=D, to=U, "\theta"] \end{tikzcd}$$

définit une transformation de manière unique.

Proposition 3.4 Toutefois, si on se donne deux transformations :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left, "G_1"{name=U1}] \arrow[r, bend right, "F_1"'{name=D1}] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "G_2"{name=U2}] \arrow[r, bend right, "F_2"'{name=D2}] & \mathcal{C}
\arrow[from=D1, to=U1, Rightarrow, "\theta_1"]
\arrow[from=D2, to=U2, Rightarrow, "\theta_2"]
\end{tikzcd}$$

on a deux manières de composer, qui donnent en général des transformations différentes.

$$\begin{tikzcd}
G_2 \circ G_1 & & G_2 \circ G_1 \\
F_2 \circ G_1 \arrow[u, Rightarrow, "\theta_2 \circ_R G_1"] & & G_2 \circ F_1 \arrow[u, Rightarrow, "G_2 \circ_L \theta_1"] \\
F_2 \circ F_1 \arrow[u, Rightarrow, "F_2 \circ_L \theta_1"] & & F_2 \circ F_2 \arrow[u, Rightarrow, "\theta_2 \circ_R F_1"]
\end{tikzcd}$$

Démonstration. On considère les catégories $\mathcal{A} = \mathbb{1}$ à un élément, $\mathcal{B}$ définie par :

$$\begin{tikzcd}
1 \\
0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

et $\mathcal{C}$ définie par le diagramme non commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "g'"] \arrow[dr, phantom, "\neq"] & d \\
a \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"'] & c \arrow[u, "f'"']
\end{tikzcd}$$

On considère alors le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[rr, bend left, "G_2"{name=U2}] & & b \arrow[r, "g'"] & d \\
\mathbb{1} \arrow[ur, bend left, "G_1"{name=U1}] \arrow[dr, bend right, "F_1"'{name=D1}] & & & & \\
 & 0 \arrow[uu, "j"] \arrow[rr, bend right, "F_2"'{name=D2}] & & a \arrow[uu, "g"] \arrow[r, "f"'] & c \arrow[uu, "f'"'] \\
\mathcal{A} & \mathcal{B} & & \mathcal{C} &
\arrow[from=D1, to=U1, Rightarrow, "\theta_1"]
\arrow[from=D2, to=U2, Rightarrow, "\theta_2"]
\end{tikzcd}$$

On pose :

$$\theta_1(\mathbb{1}) = j$$
$$F_2(0) = a, G_2(0) = c$$
$$F_2(j) = g, G_2(j) = f'$$
$$\theta_2(0) = f, \theta_2(1) = g'$$

■

Les propriétés et équations des actions définissent une sesquicatégorie des catégories, foncteurs et transformations.

Définition 3.6 Une transformation $\theta : F \Rightarrow G$ est dite naturelle lorsque le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
GA \arrow[r, "Gf"] & GA' \\
FA \arrow[u, "\theta_A"] \arrow[r, "Ff"'] & FA' \arrow[u, "\theta_{A'}"']
\end{tikzcd}$$

pour toute flèche f de la catégorie $\mathcal{A}$.

Définition 3.7 — Catégorie des Transformations Naturelles. La transformation id_F est naturelle :

$$\mathrm{id}_F : F \Rightarrow F, (\mathrm{id}_F) = \mathrm{id}_{FA}$$

On note $\mathrm{Nat}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et dont les flèches sont les transforamtions naturelles.

Proposition 3.5 La composée verticale de deux transformations naturelles est une transformation naturelle :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend left=60, "H"] \arrow[r, bend right=60, "F"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\varphi\Uparrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\psi\Uparrow"] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
HA \arrow[r, "Hf"] & HA' \\
GA \arrow[u, "\psi_A"] \arrow[r, "Gf"] & GA' \arrow[u, "\psi_{A'}"'] \\
FA \arrow[u, "\varphi_A"] \arrow[r, "Ff"] & FA' \arrow[u, "\varphi_{A'}"']
\end{tikzcd}$$

■

Proposition 3.6 Les actions à gauche et à droite d'un foncteur préservent la naturalité des transformations.

Démonstration. Tout foncteur $H : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ définit un foncteur

$$H \circ_L : \mathrm{Nat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \to \mathrm{Nat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}')$$

Tout foncteur $H : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ définit un foncteur

$$\circ_R H : \mathrm{Nat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \to \mathrm{Nat}(\mathcal{A}', \mathcal{B})$$

■

Proposition 3.7 Si θ_1, θ_2 sont des transformations naturelles :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left=50, "G_1"] \arrow[r, bend right=50, "F_1"'] \arrow[r, phantom, "\theta_1\Uparrow"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left=50, "G_2"] \arrow[r, bend right=50, "F_2"'] \arrow[r, phantom, "\theta_2\Uparrow"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

"Higher pasting diagram"

alors les transformations naturelles "θ_1 puis θ_2" et "θ_2 puis θ_1" coïncident.

■ **Vocabulaire 3.1** $\theta_2 \circ \theta_1$ désigne la transformation naturelle obtenue de la composition horizontale de transformations naturelles

Définition 3.8 Une 2-catégoprie est une sesquicatégorie où la loi 3.7 est satisfaite.

Théorème 3.1 Les catégories, foncteurs et tranformations naturelles définissent une 2-catégorie.

■ **Exemple 3.2** On réétudie la catégorie $\mathbb{G}$:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[loop left, "\mathrm{id}_1"] \arrow[d, shift right, "t"'] \arrow[d, shift left, "s"] & & \\
& \mathbb{G} \arrow[r, bend left, "G"{name=U}] \arrow[r, bend right, "F"'{name=D}] \arrow[Rightarrow, from=D, to=U, "\theta"] & \mathrm{Set} \\
0 \arrow[loop left, "\mathrm{id}_0"] & &
\end{tikzcd}$$

Ici, F et G définissent deux graphes $\langle F\rangle$ et $\langle G\rangle$.

$$\text{L'ensemble des sommets de } \langle F\rangle \ FV \xrightarrow{\theta_V} GV \text{ L'ensemble des sommets de } \langle G\rangle$$

$$\text{L'ensemble des arêtes de } \langle F\rangle \ FE \xrightarrow{\theta_E} GE \text{ L'ensemble des arêtes de } \langle G\rangle$$

Une transformation $\theta \in \mathrm{Trans}\,(\mathbb{G}, \mathrm{Set})$ définit deux fonctions.

Proposition 3.8 Un homomorphisme de graphe :

$$\langle F\rangle \to \langle G\rangle$$

est la même chose qu'une transformation naturelle :

$$\theta : F \Rightarrow G$$

Démonstration. On a deux diagrammes :

$$\begin{tikzcd}
FE \arrow[r, "\theta_E"] \arrow[d, "Fs"] \arrow[dr, phantom, "1"] & GE \arrow[d, "Gs"] & & FE \arrow[r, "\theta_E"] \arrow[d, "Ft"] \arrow[dr, phantom, "2"] & GE \arrow[d, "Gt"] \\
FV \arrow[r, "\theta_V"] & GV & & FV \arrow[r, "\theta_V"] & GV
\end{tikzcd}$$

Le fait que 1 et 2 commutent signifie que *l'image de la source est la source de l'image.* ■

■

4 Diagrammes de Corde pour 2-Catégories

4.1 2-Catégories

Définition 4.1 Le produit $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ de deux catégories est la catégorie dont les objets sont les paires d'objets, les flèches sont les paires de flèches et la composition se fait point à point :

Définition 4.2 — Définition équivalente de 2-catégorie. Une 2-catégorie $\mathcal{W}$ est la donnée :

0 D'une classe d'objets (ou 0-cellules)

1 Pour toute paire d'objets A, B d'une catégorie $\mathrm{Hom}\,(A, B)$ Notation :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f", ""{name=U, below}] \arrow[r, bend right, "g"', ""{name=D}] & B \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\theta"] \end{tikzcd}$$

2 Pour tout triplet d'objets A, B, C un foncteur :

$$\mathrm{Hom}\,(A, B) \times \mathrm{Hom}\,(B, C) \to \mathrm{Hom}\,(A, C)$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "f", ""{name=U1, below}] \arrow[r, bend right, "g"', ""{name=D1}] & \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "f'", ""{name=U2, below}] \arrow[r, bend right, "g'"', ""{name=D2}] & \mathcal{C} \arrow[r, phantom, "\longmapsto"] & A \arrow[r, bend left, "f' \circ f", ""{name=U3, below}] \arrow[r, bend right, "g' \circ g"', ""{name=D3}] & C \arrow[Rightarrow, from=U1, to=D1, "f"] \arrow[Rightarrow, from=U2, to=D2, "\varphi'"] \arrow[Rightarrow, from=U3, to=D3, "\varphi' \circ \varphi"] \end{tikzcd}$$

2 Une identité $\mathrm{id}_A : A \to A$

3 Associativité et Neutralité :

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Hom}(C, D) \times \mathrm{Hom}(B, C) \times \mathrm{Hom}(A, B) \arrow[dl, "\circ_{BCD} \times \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(A,B)}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(C,D)} \times \circ_{ABC}"] & \\ \mathrm{Hom}(B, D) \times \mathrm{Hom}(A, B) \arrow[dr, "\circ_{ABD}"'] & & \mathrm{Hom}(C, D) \times \mathrm{Hom}(A, C) \arrow[dl, "\circ_{ACD}"] \\ & \mathrm{Hom}(A, D) & \end{tikzcd}$$

Un objet f de $\mathrm{Hom}(A, B)$ est appelé une flèche ou 1-cellule et notée $f : A \to B$. Une flèche $\theta : f \to g$ de $\mathrm{Hom}(A, B)$ est appelée 2-cellule et notée :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f", ""{name=U, below}] \arrow[r, bend right, "g"', ""{name=D}] & B \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\theta"] \end{tikzcd}$$

■ **Exemple 4.1 — Espaces Topologiques.** Si on définit sur $\mathcal{T}op$ la flèche $\theta : f \to g$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f", ""{name=U, below}] \arrow[r, bend right, "g"', ""{name=D}] & B \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\theta"] \end{tikzcd}$$

comme une fonction continue : $\theta : [0, 1] \times A \to B$ telle que :

$$\forall a \in A, \begin{cases} \theta\,(0, a) & = f(a) \\ \theta\,(1, a) & = g(a) \end{cases}$$

on définit une 2-catégorie. ■

R Une transformation naturelle $\theta : f \to g$ de $\mathrm{Hom}(A, B)$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f", ""{name=U, below}] \arrow[r, bend right, "g"', ""{name=D}] & B \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\theta"] \end{tikzcd}$$

est la même chose qu'un foncteur :

$$A \times \ \xrightarrow{H} B$$

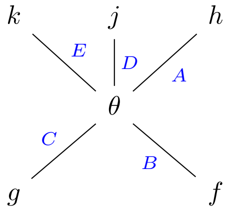
où $\ = (0 \to 1)$ telle que : $H\,(-, 0) = F$ et $H\,(-, 1) = G$.

4.2 Diagrammes de Cordes

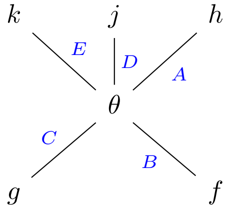
L'idée fondamentale derrière les diagrammes 2-catégoriques : On représente une 2-cellule comme le sommet

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[r, "g"] \arrow[dd, Rightarrow, "\theta"] & C \\
A \arrow[ur, bend left, "f"] \arrow[dr, bend right, "h"'] & & \\
 & D \arrow[r, "j"'] & E \arrow[uu, bend right, "k"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
k \circ j \circ h \\
g \circ f \arrow[u, Rightarrow, "\theta"']
\end{tikzcd}$$



C'est le dual de poincaré du diagramme précédent.

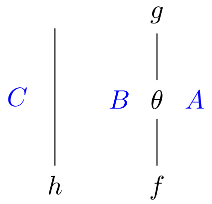


- θ dimension 2 donne un noeud de dimension 0
- f, g dimension 1 donnent de cordes de dimension 1
- A, B dimension 0 donnent des zones de dimension 2.

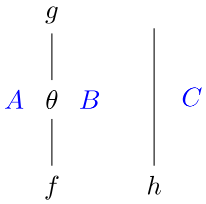
Pour représenter l'action à gauche :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left, "G", ""{name=U, below}] \arrow[r, bend right, "F"', ""{name=D, above}] \arrow[Rightarrow, from=D, to=U, "\theta"] & \mathcal{B} \arrow[r, "H"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

On donne le diagramme de cordes suivant :

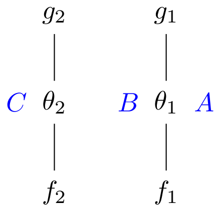


Pour ce qui est de l'action à droite, de manière similaire :



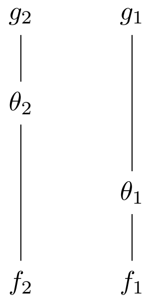
Pour la bimoustache :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left, "f_1", ""{name=U1, below}] \arrow[r, bend right, "g_1"', ""{name=D1, above}] \arrow[Rightarrow, from=U1, to=D1, "\theta_1"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "f_2", ""{name=U2, below}] \arrow[r, bend right, "g_2"', ""{name=D2, above}] \arrow[Rightarrow, from=U2, to=D2, "\theta_2"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$



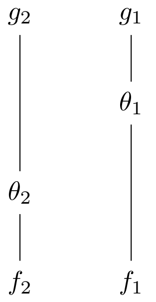
Ainsi, la composition verticale (composition dans $\mathrm{Hom}(A, C)$) peut se représenter en diagramme de cordes :

Le diagramme :



est une représentation de « θ_1 puis θ_2 »

Le diagramme :



est une représentation de « θ_2 puis θ_1 »

5 λ-Calcul Simplement Typé

L'idée du λ-calcul introduit par Church est de définir un calcul symbolique des fonctions. On se donne un ensemble infini Var de variables. On définit les termes du λ-calcul de manière inductive : Si x est une variable, c'est un lambda terme. Si M, N sont des lambdas termes, MN ou $App(M, N)$ (la composition de fonction) est un lambda-terme. Si $x \in Var$ et M est un lambda terme, $\lambda x.M$ est la fonction qu'on écrirait $x \mapsto M(x)$.

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{E} & ::= & x \in Var & \textit{(Variables)} \\ & \mid & App(E, E) & \textit{(Application)} \\ & \mid & \lambda x.E & \textit{(Évaluation)} \end{array}$$

Table 1 – Termes du λ-calcul

Une des difficultés de cette explication est l'α-conversion, que nous devrons définir de telle sorte à identifier des λ-termes tels que $\lambda x.x$ et $\lambda y.y$.

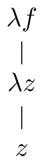
5.1 La notion d'occurence

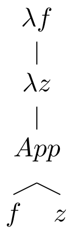
Définition 5.1 Une occurence est un mot sur l'alphabet $\{\mathtt{fun}, \mathtt{arg}, \mathtt{body}\}$.

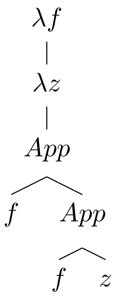
Définition 5.2 On définit l'ensemble $Occ(M)$ des occurences d'un λ-terme M par induction structurelle sur M :

$$\begin{array}{lll} Occ(x) & ::= & \{\varepsilon\} \\ Occ(App(M, N)) & ::= & \{\varepsilon\} \sqcup \{\mathtt{fun}.o \mid o \in Occ(M)\} \sqcup \{\mathtt{arg}.o \mid o \in Occ(N)\} \\ Occ(\lambda x.M) & ::= & \{\varepsilon\} \sqcup \{\mathtt{body}.o \mid o \in Occ(M)\} \end{array}$$

■ **Exemple 5.1 — Codage des Entiers de Church.** Les trois arbres ci-dessous sont les représentations dans le codage des entiers de Church de 0, de 1 et de 2.







Pour 2, on a par exemple :

$$Occ(M) = \{\varepsilon, \texttt{body}, \texttt{bodybody}, \texttt{bodybodyfun}, \texttt{bodybodyarg}\}$$

■

Définition 5.3 On définit $VarOcc(M)$ l'ensemble des occurences de variables :

$$\begin{array}{lll} VarOcc(x) & ::= & \{\varepsilon\} \\ VarOcc(App(M,N)) & ::= & \texttt{fun}.VarOcc(M) + \texttt{arg}.VarOcc(N) \\ VarOcc(\lambda x.M) & ::= & \texttt{arg}.VarOcc(M) \end{array}$$

Proposition 5.1 $VarOcc(M)$ coïncide avec l'ensemble des mots maximaux pour l'ordre préfixe dans $Occ(M)$.

Définition 5.4 On définit $LamOcc(M)$ l'ensemble des occurences d'un lieur λ dans M.

$$\begin{array}{llll} LamOcc(x) & ::= & \varnothing & \\ LamOcc(App(M,N)) & ::= & \texttt{fun}.LamOcc(M) + \texttt{arg}.LamOcc(N) & \\ LamOcc(\lambda x.M) & ::= & \texttt{body}.LamOcc(M) & (+) \\ \{\varepsilon\} & & & \end{array}$$

6 TD 1

6.1 Catégories et Foncteurs

1. On a le tableau suivant :

Catégorie	**Objets**	**Flèches**
SET	Ensembles	Fonctions
TOP	Espaces Topologiques	Fonctions Continues
VECT	Espaces Vectoriels	Applications Linéaires
GRP	Groupes	Morphismes

2. Un foncteur est un morphisme entre catégories.
3. La catégorie CAT est la catégorie dont les objets sont des catégories et les flèches sont des foncteurs

6.2 Catégories Cartésiennes

Question 3, 4, 5 Voir la preuve de 2.1.

Question 6 On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[d, dotted, "h"] \arrow[ldd, bend right] \arrow[rdd, bend left, "\mathrm{id}_A"] & \\
& \mathbb{1}\times A \arrow[ld] \arrow[rd, "\pi_A"] \arrow[dd, "\pi_A"] & \\
\mathbb{1} & & A \arrow[ld, bend left, "\mathrm{id}_A"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Donc $\pi_A \circ h = \mathrm{id}_A$.

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{1}\times A \arrow[d, "\pi_A"] \arrow[ldd, bend right, "\pi_A"'] \arrow[rdd, bend left, "\pi_1"] & \\
& A \arrow[ld, "\mathrm{id}_A"] \arrow[d, "h"] & \\
A & \mathbb{1}\times A \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_1"] & \mathbb{1}
\end{tikzcd}$$

De même pour $A \times \mathbb{1}$, par symétrie. On peut par ailleurs procéder de même que pour les produits cartésiens pour montrer que $A \times \mathbb{1} \simeq \mathbb{1} \times A$.

Question 7 On montre que $B \times A$ vérifie les propriétés de produit cartésien pour A et B :

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[ld, "g"] \arrow[rd, "f"] \arrow[d, dotted, "h"] & \\
B & B \times A \arrow[l, "\pi_B"] \arrow[r, "\pi_A"] & A
\end{tikzcd}$$

Question 8 On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
& & (A\times B)\times C \arrow[ld, "\pi_{A\times B}"'] \arrow[rrdd, "\pi_C"] \arrow[rddd, dashed, "\pi_{B\times C}"] & & \\
& A\times B \arrow[ld, "\pi_A"] \arrow[rd, "\pi_B"] & & & \\
A & & B & & C \\
& & & B\times C \arrow[lu, "\pi_B"] \arrow[ru, "\pi_C"'] & \\
& & A\times(B\times C) \arrow[lluu, "\pi_A"] \arrow[luuu, dashed, "\pi_{A\times B}"] \arrow[ru, "\pi_{B\times C}"] & &
\end{tikzcd}$$

On a donc un morphisme de $(A \times B) \times C \to B$ et un morphisme $(A \times B) \times C \to C$. Il existe donc un (unique) morphisme $(A \times B) \times C \to B \times C$ (faisant commuter le diagramme idoine). On a maintenant deux morphismes depuis $(A \times B) \times C$:

- un vers A
- un vers $B \times C$

On peut donc trouver un (unique) morphisme h :$(A \times B) \times C \to A \times (B \times C)$ (faisant toujours commuter le diagramme idoine). On construit de la même façon $\tilde{h} : A \times (B \times C) \to (A \times B) \times C$. On vérifie de façon similaire à la question précédente que $h \circ \tilde{h} = \mathrm{id}$ et $\tilde{h} \circ h = id$. Donc $(A \times B) \times C \simeq A \times (B \times C)$.

Question 9 On notera $A + B$ le coproduit de A et B. Il doit faire le diagramme commuter :

$$\begin{tikzcd}
& C & \\
A \arrow[ru, "f"] \arrow[r, "i_A"'] & A \bigsqcup B \arrow[u, dashed, "h"] & B \arrow[lu, "g"'] \arrow[l, "i_2"]
\end{tikzcd}$$

On remarque notamment que $A + B$ est un coproduit de A et B dans $\mathcal{C}$ si et seulement si $A + B$ est un produit de A et B dans $\mathcal{C}^{op}$. En prenant pour $A + B$ (si $A, B \in \text{Set}$) l'ensemble abstrait défini à isomorphisme près par :

$$\{(A, a) \mid a \in A\} \cup \{(B, b) \mid b \in B\}$$

avec i_A et i_B les inclusions. On a bien le résultat puisque si $f : A \to C$ et $g : B \to C$, la fonction $h : (A, x) \mapsto f(x); (B, y) \mapsto g(y)$ est unique car entièrement définie sur $A + B$. Formellement c'est l'union disjointe.

Question 10 L'objet terminal de Rel est l'ensemble vide. En effet, on a toujours une unique relation entre X et l'ensemble vide : la relation vide. Il est clair que $\text{Rel}^{op} = \text{Rel}$. L'union disjointe est le produit cartésien. On prend comme projection $\pi_A = \{((A, e), e) \mid e \in A\}$

Question 11 On prend pour objet terminal l'espace vectoriel nul. On prend comme produit cartésien la somme directe disjointe sur les bases. Par le même raisonnement que précédemment, on a le résultat.

Question 12 L'objet terminal est la catégorie triviale avec un objet et un morphisme. On définit le produit de cartésien par des couples d'objet et dont les flèches sont des couples de fonctions. La projection est alors similaire à celle de Set.

Question 13 De la même manière que précédemment, en considérant des couples de morphisme du produit cartésien de l'origine dans le produit cartésien de l'image. On a le résultat par propriété fondamentale.

7 TD 2

7.1 Produits Fibrés

Définition 7.1 Un diagramme commutatif dans $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & Y \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"] & Z
\end{tikzcd}$$

est un pullback, tiré en arrière ou produit fibré de X et Y au dessus de Z quand pour tout diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[rrd, bend left, "q_2"] \arrow[rdd, bend right, "q_1"'] & & \\
& & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

il existe un unique morphisme $h : Q \to P$ tel que le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[rrd, bend left, "q_2"] \arrow[rdd, bend right, "q_1"'] \arrow[rd, dashed, "h"] & & \\
& P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Question 1 On propose pour P l'ensemble des couples (x, y) dont les composantes sont dans les mêmes fibres, i.e., $P = \left\{(x, y) \in \hat{X} \times \hat{Y} \mid f(x) = g(y)\right\}$ où $\hat{X}$ est un système de représentants des classes d'équivalence définies par les fibres de X sous f Les projections sont alors les projections sur la première et la deuxième composante.

On a donc une unique définition du morphisme h en considérant si $q \in Q$, $h(q) \in f^{-1}(f(q_1(q))) \cap \hat{X} \times g^{-1}(g(q_2(q))) \cap \hat{Y}$

Question 2 et 3 Ajouter un morphisme $Q \to Y''$ crée un diagramme commutatif avec les bords bas et droit de (c). Le carré au dessus de (a) ainsi créé a un morphisme vers Y' qui, puisque Y' est un pullback pour Y et X' au dessus de X, créé un diagramme carré commutant au dessus de $X'' \to X' \to X$ et $Y \to X$.

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[rrrd, bend left, "a"] \arrow[rrd, bend left, "h'"] \arrow[rd, dashed, "h"] \arrow[rd, dashed, "h''"'] \arrow[rdd, bend right, "b"'] \arrow[rrdd, bend right=60, "f' \circ b"'] & & & \\
& Y'' \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "g''"'] & Y' \arrow[r, "p"] \arrow[d, shift left, "g'"] \arrow[d, shift right] & Y \arrow[d, "g"'] \\
& X'' \arrow[r, "f'"'] & X' \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

Finalement, le carré de gauche est un pullback si et seulement si le grand carré est un pullback.

Question 4 On considère l'ensemble $X = \{1\}$ et l'ensemble $Y = \{1, 2\}$ ainsi que les fonctions $i : 1 \in X \mapsto 1 \in Y$ et $p : y \in Y \mapsto 1 \in X$. Alors :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & X \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "i"] & X \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
X \arrow[r, "i"] & Y \arrow[r, "p"] & X
\end{tikzcd}$$

et donc on a le résultat.

7.2 Monomorphismes et Épimorphismes

Question 1 Trivial, je le ferai faire à un sup en khôlle.

Question 2 Trivial, je le ferai faire à un autre sup en khôlle.

Question 3 Si on a :

$$\forall a, b : X \to A, f \circ a = f \circ b \Rightarrow a = b$$
$$\forall a, b : X \to B, g \circ a = g \circ b \Rightarrow a = b$$

En particulier, pour tous $a, b : X \to A$:

$$\begin{aligned}
g \circ f \circ a = g \circ f \circ b &\Longrightarrow g \circ (f \circ a) = g \circ (f \circ b) \\
\text{(Par propriété de } g\text{)} &\Longrightarrow f \circ a = f \circ b \\
\text{(Par propriété de } f\text{)} &\Longrightarrow a = b
\end{aligned}$$

On procède de même pour les épimorphismes.

Question 4 Si m est un mono, le résultat est clair puisqu'alors toutes les flèches telles que $m \circ q_1 = m \circ q_2 = m \circ \mathrm{id} \circ h$ induisent $q_1 = q_2 = \mathrm{id} \circ h = h$.

Réciproquement, si on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[rd, dashed, "h"] \arrow[rrd, bend left, "q_2"] \arrow[rdd, bend right, "q_1"'] & & \\
& A \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & A \arrow[d, "m"] \\
& A \arrow[r, "m"'] & B
\end{tikzcd}$$

en particulier, $h = q_1$ et $h = q_2$ conviennent, donc $q_1 = q_2$ par unicité de h. Comme de plus, puisque le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & A \arrow[d, "m"] \\
A \arrow[r, "m"'] & B
\end{tikzcd}$$

est un pullback, on a le diagramme précédent dès que $m \circ q_2 = m \circ q_1$ et donc m est un mono.

Question 5 Si on a le pullback suivant, on suppose que m est un monomorphisme :

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "p"] \arrow[d, "m'"'] & U \arrow[d, "m"] \\
B \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

Soit Q un objet et $h, h' : Q \to V$ telles que $m' \circ h = m' \circ h'$.

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[rd, dashed, "h"] \arrow[rd, dashed, "h'"'] & & \\
& V \arrow[r, "p"] \arrow[d, "m'"'] & U \arrow[d, "m"] \\
& B \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

En posant $q_1 = m' \circ h', q_2 = p \circ h$, on a un pullback : il existe une unique application l telle que : $m \circ p \circ l = m \circ q_2$ et $f \circ m' \circ l = f \circ q_1$. $l = h'$ et $l = h$ conviennent, donc $h = h'$.

7.3 Catégories Quotients et Catégories Sous-Objets

Question 1 It is clear that the arrow $\mathrm{id}_{(X,f)} : (X, f) \to (X, f)$ defined by the morphism $\mathrm{id}_X : X \to X$ is an identity in $\mathcal{C}/A$. Clearly, since the following diagram commutes, the composition is associative :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h_1"] \arrow[rd, "a"'] & Y \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "b"] & Z \arrow[ld, "c"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Thus, $\mathcal{C}/A$ is a category.

Question 2 We have the above commutative diagram if and only if $g \circ p_2 = f \circ p_1$ i.e. if and only if there exists $u : P \to Z$ such that the following diagram commutes :

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] \arrow[rd, "u"] & Y \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"] & Z
\end{tikzcd}$$

This is exactly equivalent to the fact that the two diagrams below commute :

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "p_2"] \arrow[rd, "u"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
& Z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P \arrow[d, "p_1"] \arrow[rd, "u"] & \\
X \arrow[r, "f"] & Z
\end{tikzcd}$$

That is, there is a diagram in $\mathcal{C}/Z$:

$$\begin{tikzcd}
& (P,u) \arrow[ld, "p_1"'] \arrow[rd, "p_2"] & \\
(X,f) & & (Y,g)
\end{tikzcd}$$

Moreover, if the first diagram is a pullback, if O is an object in $\mathcal{C}$ and $q_1 : O \to X$ and $q_2 : O \to Y$ make the following diagramm commute :

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[rrd, bend left, "q_2"] \arrow[rd, dashed, "h"] \arrow[rdd, bend right, "q_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] \arrow[rd, "u"] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"] & Z
\end{tikzcd}$$

then in particular, in $\mathcal{C}/Z$:

$$\begin{tikzcd}
& (O,m) \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[ldd, bend right, "q_1"'] \arrow[rdd, bend left, "q_2"] & \\
& (P,u) \arrow[ld, "p_1"'] \arrow[rd, "p_2"] & \\
(X,f) & & (Y,g)
\end{tikzcd}$$

Thus, the first diagram defines a pullback if and only if the second diagram defines a cartesian product. In particular, pullbacks are defined up to isomorphism, since we can translate the existence of two pullbacks as the existence of two cartesian products and retranslate back the isomorphism.

Question 3 Since n is a mono, if we have :

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "h_1", "h_2"'] \arrow[rd, "m"'] & & V \arrow[ld, "n"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

then $n \circ h_1 = m = n \circ h_2$ and thus $h_1 = h_2$.

Question 4 We have a preorder on monos defined as : $i \leq j$ if and only if there exists k such that $i = jk$. Thus, seeing that monos are injective functions, there is an arrow from U to V if and only if $|U| \leq |V|$, thus, up to isomorphism : there is an arrow from U to V if and only if $U \subseteq V$.

Question 5 We have, for all $m : U \to A$ in $Sub(A)$:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "p"] \arrow[d, "m'"'] & U \arrow[d, "m"] \\
B \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

<++>