

Analyse Complexe

Ariane Mézard

26 février 2024



Table des matières

I	Fonctions Holomorphes	1
1	Fonctions Analytiques	2
1.1	Séries Entières	2
1.2	Fonctions Analytiques	4
1.3	Détermination du Logarithme	4
2	Théorie de Cauchy	6
2.1	Homotopie et Simple Connexité	6
2.2	Intégrales sur un Chemin	7
2.3	Théorème de Cauchy	8
2.4	Formule de Cauchy	9
2.5	Inégalités de Cauchy, Premières Applications	12
3	Fonctions Holomorphes	13
3.1	Définitions	13
3.2	\mathbb{R} -différentiabilité	14
3.3	Intégrale sur le bord d'un Compact	16
3.4	Formule de Green-Riemann	17
3.5	Analycité des Fonctions Holomorphes	21
4	Propriétés Élémentaires des Fonctions Holomorphes	24
4.1	Théorème d'inversion locale	24

Première partie

Fonctions Holomorphes

1 Fonctions Analytiques

1.1 Séries Entières

Définition 1.1: Série Entière

Une série entière est une série de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ où $z \in \mathbb{C}$ et $a_n \in \mathbb{C}$.
Le domaine de convergence de la série entière est l'ensemble Δ des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels la série converge.

Proposition 1.1: Critère de Cauchy

Soient a_n une suite complexe et $0 < r < r_0$. S'il existe $M > 0$ tel que

$$|a_n| r_0^n \leq M, n \geq 0$$

alors $a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0, r)$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \overline{D}(0, r)$ on a :

$$|a_n z^n| \leq |a_n| r^n \leq M \left(\frac{r}{r_0} \right)^n$$

Comme $0 < r < r_0$, $M \left(\frac{r}{r_0} \right)^n$ est le terme d'une série géométrique convergente. ■

Corollaire 1.1: Rayon de Convergence

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ défini par

$$R = \sup \{ r \geq 0 \text{ tel que la suite } (|a_n| r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ soit bornée} \}$$

Alors le domaine de convergence Δ de la série vérifie :

$$D(0, R) \subseteq \Delta \subseteq \overline{D}(0, R)$$

Définition 1.2: Rayon de Convergence

On appelle le nombre R défini ci-dessus rayon de convergence.

Proposition 1.2: Rayon d'Hadamard

Le rayon de convergence est donné par

$$R = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|a_n|^{1/n}}$$

Avec la convention $1/0 = \infty$

Lemme 1.1: Lemme d'Abel

Soit u_n une suite réelle décroissante vers 0 et v_n une suite complexe telle que les sommes partielles $s_n = \sum_{k=0}^n v_k$ soient bornées. Alors la série $\sum u_n v_n$ converge.

Proposition 1.3: Principe des Zéros Isolés

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Si au moins un des coefficients a_n n'est pas nul, il existe $r \in]0, +\infty[$ tel que f ne s'annule pas pour $|z| \in]0, r[$.

Démonstration. Soit $l = \min\{n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0\}$, on a :

$$f(z) = \sum_{n \geq l} a_n z^n = z^l g(z)$$

avec $g(z) = a_l + a_{l+1}z + \dots$ et $g(0) \neq 0$. ■

Définition 1.3: Dérivée Complexe

Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ admet une dérivée par rapport à la variable complexe au point z_0 si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Cette limite est alors appelée dérivée de f en z_0 .

Proposition 1.4: Dérivée d'une Série Entière

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, les dérivées l -ièmes de f ont pour rayon de convergence R et pour expression :

$$f^{(l)}(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(n+l)!}{n!} a_{n+l} z^n$$

Corollaire 1.2: Primitive

Une série entière $f(z) = \sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ admet sur $D(0, R)$ une primitive complexe

$$F(z) = \sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

Proposition 1.5: S

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $z_0 \in D(0, R)$. La série entière

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n$$

a un rayon de convergence supérieur à $R - |z_0|$ et pour tout $z \in D(z_0, R - |z_0|)$,

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n$$

1.2 Fonctions Analytiques

Définition 1.4: Fonction Analytique

Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est dite analytique si elle est DSE au voisinage de chaque point de U .

Proposition 1.6: Dérivabilité

Une fonction analytique sur un ouvert U de \mathbb{C} admet des dérivées de tous ordres qui sont des fonctions analytiques sur U . De plus, pour tout $z_0 \in U$, f est somme de sa série de Taylor en z_0 sur un voisinage de z_0 .

Corollaire 1.3: Unicité du DSE

Une fonction analytique sur U admet un unique développement en série entière au voisinage de chaque point de U .

Lemme 1.2: Nullité

Si U est connexe et f est analytique sur U , nulle sur un ouvert non-vide de U , alors f est identiquement nulle sur U .

Proposition 1.7: Zéros Isolés

Soit f une fonction analytique sur un ouvert connexe U . Si f n'est pas identiquement nulle, ses zéros sont isolés, i.e. si $z_0 \in U$ avec $f(z_0) = 0$, alors il existe $r > 0$ tel que z_0 soit le seul zéro de f sur $D(z_0, r)$.

Théorème 1.1: Prolongement Analytique

Soit U un ouvert connexe de \mathbb{C} , f, g des fonctions analytiques sur U . Si f, g coïncident sur une partie Σ de U qui a un point d'accumulation dans U , alors elles coïncident sur U .

Définition 1.5: Primitive

Etant donnée une fonction analytique f sur U , une fonction analytique F de U dans \mathbb{C} est dite primitive de f si $F'(z) = f(z)$ sur U .

1.3 Détermination du Logarithme

Définition 1.6: Détermination de l'Argument

Soit $U \subseteq \mathbb{C}^*$ ouvert. Une fonction continue $\arg : U \rightarrow \mathbb{R}$ est dite détermination continue de l'argument sur U si pour tout $z \in U$, $\exp(i \arg(z)) = \frac{z}{|z|}$.

Définition 1.7: Détermination Principale

La détermination continue de l'argument

$$\begin{aligned} \mathbb{C} - \mathbb{R}_- &\longrightarrow]-\pi, \pi[\\ z &\mapsto 2 \arctan \left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right) \end{aligned}$$

en prenant la racine carrée de z appartenant au demi-plan $\Re z > 0$ est appelée détermination principale de l'argument.

Définition 1.8: Logarithme

Soit $U \subseteq \mathbb{C}^*$ ouvert. Une fonction continue $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est dite détermination du logarithme sur U si

$$\forall z \in U, \exp(f(z)) = z$$

Définition 1.9: Détermination Principale du Log

On définit pour $\theta \in \mathbb{R}$ la fonction

$$\log_\theta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_- e^{i\theta}, \log_\theta(w) = \log |w| + i \arg_\theta(w)$$

La fonction \log_0 est appelée détermination principale du logarithme et notée \log .

Proposition 1.8: DSE du Logarithme

\log est DSE sur $D(1, 1)$ et sur $D(0, 1)$ on a

$$\log(1 + z) = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$$

Par conséquent, sur $D(z_0, |z_0|)$,

$$g(z) = \log z_0 + i\theta_0 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{z - z_0}{z_0} \right)^n$$

est une détermination analytique du logarithme.

Proposition 1.9: Analyticité des Déterminations

Il y a équivalence sur un ouvert connexe U de \mathbb{C}^* pour une application continue l entre :

- l est une détermination du logarithme à l'addition d'une constante près
- l est une primitive analytique de $\frac{1}{z}$ sur U .

Définition 1.10: Détermination

Soit $U \subseteq \mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Une détermination continue de z^α est une application continue g de U dans \mathbb{C} telle qu'il existe une détermination du logarithme $l(z)$ de z telle que $g(z) = \exp^{\alpha l(z)}$.

2 Théorie de Cauchy

2.1 Homotopie et Simple Connexité

Définition 2.1: Chemin

Soit $[a, b]$ un intervalle de \mathbb{R} . Un chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est une application continue. Le point $\gamma(a)$ est appelé origine et le point $\gamma(b)$ est dit extrémité. On orientera par défaut un chemin dans le sens des paramètres croissants. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, le chemin est dit lacet d'origine $\gamma(a)$.

Définition 2.2: Opérations

1. Si γ est constant, son image est réduite à un point. Il est alors appelé chemin (ou lacet) constant.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto e^{2i\pi\alpha t}$ est un chemin dont l'image est une partie du cercle unité $\partial D(0, 1)$. Si $\alpha = n \in \mathbb{Z}^*$, $\gamma([0, 1])$ est le cercle tout entier parcouru n fois.
3. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est un chemin, le chemin opposé

$$\gamma^0 : t \in [a, b] \mapsto \gamma(a + b - t)$$

est γ parcouru en sens inverse.

4. La juxtaposition de γ_1, γ_2 tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ est le chemin $\gamma = \gamma_1 \wedge \gamma_2 : [a, d + b - c] \rightarrow \mathbb{C}$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{pour } a \leq t \leq b \\ \gamma_2(t - b + c) & \text{pour } b \leq t \leq d + b - c \end{cases}$$

Définition 2.3: Homotopie

Soit U un ouvert de \mathbb{C} , $\gamma_i : I \rightarrow U$, $i \in \{1, 2\}$ deux chemins. Une homotopie de γ_1 à γ_2 dans U est une application continue φ de $I \times J$ dans U où $I = [a, b]$ et $J = [c, d]$ sont deux intervalles de \mathbb{R} telle que :

$$\varphi(t, c) = \gamma_1(t) \text{ et } \varphi(t, d) = \gamma_2(t), t \in I$$

Définition 2.4: Simple Connexité

Un espace topologique X connexe par arcs est dit simplement connexe si tout lacet dans X est homotope à un point dans X .

Proposition 2.1

- Un espace topologique est simplement connexe si et seulement si tous les chemins de même extrémités sont homotopes.
- Un ouvert étoilé par rapport à un point est simplement connexe. En particulier, dans \mathbb{C} , le plan, un demi-plan, un disque ouvert, l'intérieur d'un rectangle ou d'un triangle sont simplement connexes.
- Le demi-plan ouvert $\Im z > 0$ auquel nous ôtons un nombre fini de demi-droites fermées $z = t + i\beta_k, t \in]-\infty, \alpha_k]$ est simplement connexe non étoilé.
- \mathbb{C}^* n'est pas simplement connexe car le cercle unité n'est pas homotope à un chemin constant.

2.2 Intégrales sur un Chemin

Dorénavant, les chemins sont supposés \mathcal{C}^1 par morceaux.

Définition 2.5: Equivalence de Chemins

Deux chemins $\gamma_i : I_i \rightarrow \mathbb{C}$ sont dits équivalents s'il existe une bijection croissante $\varphi : I_2 \rightarrow I_1$ continue de réciproque continue et \mathcal{C}^1 par morceaux telle que :

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(\varphi(t)), t \in I_2$$

Définition 2.6: Intégrale le long d'un Chemin

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ continue et $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin avec $\gamma(I) \subseteq U$. Alors, la fonction $t : f(\gamma(t))\gamma'(t)$ est continue par morceaux dans $[a, b]$. On appelle intégrale de f le long du chemin γ :

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) \, dt$$

Définition 2.7: Longueur

La longueur d'un chemin est le réel :

$$long(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt$$

Proposition 2.2: Propriétés

- Si F est une primitive de f , pour tout chemin γ :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

- Si $\gamma_1 \sim \gamma_2$ alors

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

- Si $[Z_0, z_1] \subseteq U$, nous notons $\int_{[z_0, z_1]} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$ où $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto (1-t)z_0 + tz_1$.
- Si $\partial D(z_0, r) \subseteq U$, soit le lacet $\gamma : \theta \in [0, 2\pi] \mapsto z_0 + re^{i\theta}$. On a :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\partial D(z_0, r)} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) ire^{i\theta} d\theta$$

- En séparant parties réelles et imaginaires, $f = P + iQ$ et $\gamma = u + iv$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b ((P \circ \gamma) u' - (Q \circ \gamma) v') dt + i \int_a^b ((Q \circ \gamma) u' + (P \circ \gamma) v') dt \\ &= \int_{\gamma} (P dx - Q dy) + i \int_{\gamma} (P dy + Q dx) \end{aligned}$$

- On a :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma^0} f(z) dz$$

- On a :

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \text{long}(\gamma) \max_{\gamma} |f|$$

2.3 Théorème de Cauchy

Théorème 2.1: de Cauchy

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe et f une fonction analytique dans U . Si γ_1, γ_2 sont deux lacets homotopes dans U , alors

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

En particulier, si U est simplement connexe, l'intégrale sur un lacet de f est nulle.

Théorème 2.2

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe.

1. Toute fonction analytique dans U admet une primitive.
2. Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}^*$ est analytique, alors il existe $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytique tel que $\exp(g) = f$ sur U .

2.4 Formule de Cauchy

Lemme 2.1: Intégrité de l'Indice

Soit $\gamma : I = [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ un lacet et $a \notin \gamma(I)$. Alors

$$j(a, \gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a} \in \mathbb{Z}$$

Démonstration. Pour $t \in [c, d]$ on pose

$$h(t) = \int_c^t \frac{\gamma'(s) ds}{\gamma(s) - a}$$

On a $h'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a}$, sauf en un nombre fini de points de I .

Remarquons que $g(t) = e^{-h(t)} (\gamma(t) - a)$ a pour dérivée

$$g'(t) = -h'(t)e^{-h(t)} (\gamma(t) - a) + \gamma'(t)e^{-h(t)} = 0$$

sauf en un nombre fini de points de I . Comme g est continue, elle est constante et $g(c) = g(d)$. Or, $h(c) = 0$ donc $g(c) = \gamma(c) - a = g(d) = e^{-h(d)} (\gamma(d) - a)$. Mais γ est un lacet, donc $\gamma(c) = \gamma(d)$. Donc $h(d) = 2in\pi$. Donc $j(a, \gamma) = n \in \mathbb{Z}$. ■

Définition 2.8: Indice

L'entier $j(a, \gamma)$ est appelé indice de a par rapport au lacet γ et s'interprète comme le nombre de fois que le lacet tourne autour de a lorsque a est intérieur au lacet.

Proposition 2.3: Propriétés

1. Soit $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ des lacets de même origine dont les lacets ne contiennent pas a . Alors,
$$j(a, \gamma^0) = -j(a, \gamma) \text{ et } j(a, \gamma_1 \wedge \gamma_2) = j(a, \gamma_1) + j(a, \gamma_2)$$
2. En appliquant le théorème de Cauchy à la fonction analytique $1/(z - a)$ dans $\mathbb{C} - \{a\}$, nous obtenons $j(a, \gamma_1) = j(a, \gamma_2)$ si γ_1, γ_2 sont homotopes dans $\mathbb{C} - \{a\}$.
3. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe et $\gamma \subset U$. Si $a \notin U$, alors $j(a, \gamma) = 0$.
4. Si γ est un lacet dans \mathbb{C} , pour tout ouvert connexe U de $\mathbb{C} - \gamma(I)$, la fonction $z \mapsto j(z, \gamma)$ est constante dans U .
5. Soit $\gamma_n : t \mapsto e^{int}$, on a :

$$j(z_0, \gamma_n) = \begin{cases} n & \text{si } |z_0| < 1 \\ 0 & \text{si } |z_0| > 1 \end{cases}$$

Démonstration du point iv. Soit $z \in D(z_0, r) \subseteq U$,

$$j(z, \gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{du}{u - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{du}{u - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{du}{u - z_0} = j(z_0, \gamma)$$

pour $\gamma_1 : t \mapsto \gamma(t) + (z - z_0)$ qui est homotopie à γ via

$$\varphi(t, s) = \gamma(t) + s(z - z_0), 0 \leq s \leq 1$$

Donc $j(\cdot, \gamma)$ est localement constante donc constante sur U connexe. ■

Théorème 2.3: Formule de Cauchy

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe, $\gamma : I \rightarrow U$ un lacet dans U . Soit f analytique sur U . Pour tout $w \in U \setminus \gamma(I)$

$$j(w, \gamma)f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz$$

Démonstration. La fonction

$$g : z \in U \mapsto \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & \text{si } z \neq w \\ f'(w) & \text{si } z = w \end{cases}$$

est analytique sur U . En effet pour $r > 0$ assez petit, f admet un développement de Taylor sur $D(w, r) \subseteq U$ et donc pour $z \in D(w, r)$:

$$g(z) = f'(w) + \frac{f''(w)}{2!}(z-w) + \dots + \frac{f^{(n)}(w)}{n!}(z-w)^{n-1} + \dots$$

Comme U est simplement connexe, le théorème de Cauchy donne $\int_{\gamma} g = 0$ et comme $w \notin \gamma(I)$, $\int_{\gamma} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} dz = 0$ c'est à dire :

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz = f(w) \int_{\gamma} \frac{dz}{z-w} = 2i\pi j(w, \gamma)f(w)$$

■

Corollaire 2.1: Valeur en un point

On a :

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(z)}{z-w} dz, w \in D(z_0, r)$$

Proposition 2.4: Continuité sur un Lacet

Soit $\gamma : I = [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ un lacet et $g : \gamma(I) \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie et continue sur $\gamma(I)$. Alors :

$$f(z) = \int_{\gamma} \frac{g(u) du}{u-z}$$

est définie et analytique dans $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$.

Précisément, pour tout $w \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$c_n = \int_{\gamma} \frac{g(u) du}{(u-w)^{n+1}}$$

nous avons un développement en série entière convergente

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z-w)^n$$

dans tout disque ouvert de centre w et de rayon $r = d(w, \gamma(I))$ et

$$f^{(n)}(w) = n!c_n = n! \int_{\gamma} \frac{g(u) du}{(u-w)^{n+1}}$$

Démonstration. Pour tout $u \in \gamma(I)$, $z \in D(w, qr)$, $q \in [0, 1]$, la série

$$\frac{1}{u-z} = \frac{1}{u-w} \frac{1}{1 - \frac{z-w}{u-w}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-w)^n}{(u-w)^{n+1}}$$

est convergente. Comme $(g \circ \gamma) \gamma'$ est continue par morceaux sur $[c, d]$ il existe M tel que

$$|g(\gamma(t)) \gamma'(t)| \leq M$$

Donc :

$$\left| g(\gamma(t)) \gamma'(t) \frac{(z-w)^n}{(\gamma(t)-w)^{n+1}} \right| \leq M \frac{q^n}{r}, t \in [c, d]$$

Finalement, la série sous l'intégrale est normalement convergente et :

$$f(z) = \int_c^d \frac{g(\gamma(t)) \gamma'(t) dt}{\gamma(t) - z} = \int_c^d g(\gamma(t)) \gamma'(t) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-w)^n}{(\gamma(t)-w)^{n+1}} \right) dt$$

et donc $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-w)^n$ ■

Proposition 2.5: Dérivée n -ième

Soit f analytique sur U et γ le bord de $\overline{D}(w, r) \subseteq U$. D'après la formule de Cauchy :

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \frac{f(w + re^{it})}{e^{nit}} dt$$

Corollaire 2.2

1. Soit f analytique sur U . Pour tout $a \in U$, la série de Taylor de f au voisinage de a est convergente et a pour somme $f(z)$ dans le plus grand disque ouvert de centre a contenu dans U
2. Si f est analytique sur \mathbb{C} , sa série de Taylor en tout point de \mathbb{C} est convergente sur \mathbb{C} .

Démonstration. On applique la formule de Cauchy sur le contour γ d'un disque $D(a, r)$ contenu dans U . Pour $z \in D(a, r)$, $j(z, \gamma) = 1$ et

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dz$$

La proposition 2.4 donne un développement en série entière de f en $z-a$ convergeant sur $D(a, r)$. Par unicité du développement, il s'agit de la série de Taylor. En faisant tendre r vers $d(a, \mathbb{C} - U)$, nous obtenons le résultat annoncé. ■

Corollaire 2.3: Constance Locale

Supposons U connexe, $a \in U$ et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytique. Si pour tout $k > 0$, $f^{(k)}(a) = 0$, alors f est constante sur U .

Démonstration. D'après le corollaire ??, f est localement somme de sa série de Taylor. Donc f est constante sur un ouvert contenant a . Soit $\Omega = \{w \in U, \forall k > 0, f^{(k)}(w) = 0\}$. Cet ensemble est ouvert, non vide, et fermé. Par connexité de U , $\Omega = U$, $f' = 0$ sur U et f est constante sur U . ■

Théorème 2.4: Multiplicité

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytique non constante au voisinage de $a \in U$. Si $f(a) = 0$, il existe un unique entier $m \geq 1$ et $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ analytique sur un voisinage V de a tels que

$$f(z) = (z - a)^m g(z), g(a) \neq 0, z \in V$$

En particulier, le point a possède un voisinage dans lequel il est l'unique zéro de f .

Démonstration. D'après le corollaire 2.4, si f n'est pas constante dans un voisinage de a , il existe $m \geq 1$ tel $f^{(m)}(a) \neq 0$ et $f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0$. Comme $f(a) = 0$, on peut alors factoriser $(z - a)^m$ dans le développement en série de Taylor de f en a . ■

Définition 2.9: Ordre

L'entier m du théorème précédent est dit ordre de f en a , noté $\text{ord}(f, a)$.

2.5 Inégalités de Cauchy, Premières Applications

Proposition 2.6: Inégalités de Cauchy

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytique, $\overline{D}(w, r) \subset U, r > 0$. On a, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| f^{(n)}(w) \right| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{z \in \partial D(w, r)} |f(z)|$$

Démonstration. On a :

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \frac{f(w + re^{it})}{e^{nit}} dt$$

On en déduit immédiatement le résultat. ■

Lemme 2.2: Bornitude et Polynomialité

Soit f analytique sur \mathbb{C} . Supposons qu'il existe $A, B \geq 0$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq A(1 + |z|)^B$$

Alors f est un polynôme de degré $\leq B$.

Démonstration. Soit $n \geq [B] + 1 > B$. Par les inégalités de Cauchy, puisque

$$\sup_{\partial D(z, r)} |f(z)| \leq A(1 + |z| + r)^B$$

on a :

$$\left| f^{(n)}(z) \right| \leq \frac{n!}{r^n} A(1 + |z| + r)^B$$

En faisant tendre r vers $+\infty$, par croissance comparée, $f^{(n)}(w) = 0$ pour $n \geq B$. Localement, f étant somme de sa série de Taylor, c'est localement un polynôme de degré au plus B , ce qui est donc le résultat. ■

Théorème 2.5: Liouville

Une fonction analytique bornée sur \mathbb{C} est constante.

Théorème 2.6: d'Alembert-Gauss

Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[z]$ de degré ≥ 1 admet une racine dans \mathbb{C} .

Démonstration. Par l'absurde, si $P(z) = \sum_{i=0}^d a_i z^i$ ne s'annule pas, $f = 1/P$ est analytique sur \mathbb{C} et $|f(z)| \sim \frac{1}{|a_d||z|^d}$ tend vers 0 quand $|z|$ tend vers $+\infty$. En particulier, f est bornée sur \mathbb{C} donc constante d'après le théorème de Liouville. Ainsi, $P = 1/f$ est constant, ce qui est absurde. ■

Théorème 2.7: Topologie

Les ouverts \mathbb{C} et $D(0, 1)$ sont homéomorphes mais pas isomorphes.

3 Fonctions Holomorphes

3.1 Définitions

Définition 3.1: Holomorphicité

Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est dite holomorphe en $z_0 \in U$ si la limite

$$\lim_{h \in \mathbb{C} \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existe. On la note $f'(z_0)$.

On définit $\mathcal{O}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes.

Proposition 3.1: Exemples Holomorphe

- Si f est constante, f est holomorphe et $f' = 0$
- Si f est un polynôme, f est holomorphe
- Si f est analytique, f est holomorphe
- \sin, \cos, \exp, \tan sont holomorphes sur \mathbb{C} .
- $z \mapsto \bar{z}$ n'est pas holomorphe en aucun point :

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$$

n'a pas de limite en 0.

- $f(z) = |z|^2$ n'est holomorphe que pour $z = 0$:

$$\frac{(z+h)(\bar{z}+\bar{h}) - z\bar{z}}{h} = \frac{h\bar{z} + \bar{h}z + h\bar{h}}{h}$$

n'a une limite que si $z = 0$.

3.2 \mathbb{R} -différentiabilité

Définition 3.2: Forme Différentielle

Une 1-forme différentielle sur Ω est une application $\alpha : \Omega \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.
En particulier, les $dx_i \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ qui à $a \mapsto dx_i(a) = a_i$ permettent d'écrire :

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) dx_i$$

où $\alpha_i : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. On a alors :

$$\alpha(x)(a) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) dx_i(a)$$

On dit que α est de classe \mathcal{C}^k si et seulement si tous les α_i sont de classe \mathcal{C}^k .

Définition 3.3: \mathbb{R} Différentiabilité

Une fonction f d'un ouvert connexe Ω de \mathbb{R}^n est dite \mathbb{R} -différentiable sur Ω si et seulement si il existe une 1-forme différentielle $df : \Omega \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ telle que

$$f(z+h) = f(z) + df(z)(h) + o(h)$$

On pose $dx f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i$.

Dans la suite on travaille dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ et pour $h \in \mathbb{C}$, on note $h = k + il = (k, l)$ et pour $z \in U = \Omega$, $z = x + iy = (x, y)$.

Proposition 3.2: Différentielle dans une base

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ différentiable de différentielle $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$. On a $\forall z \in U$:

$$d_z f = \frac{\partial f}{\partial x}(z) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z) dy$$

En $h = k + il$:

$$d_z f(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(z)k + \frac{\partial f}{\partial y}(z)l$$

On définit

$$dz = dx + i dy \text{ et } d\bar{z} = dx - i dy$$

On a alors :

$$df = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\bar{z}$$

ce qu'on écrit aussi :

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

On a par ailleurs

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$$

Proposition 3.3: Exemples

1. Si $f(z) = z$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. A l'inverse, $\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0$.
2. Pour $P(x, y) = \sum_{0 \leq \alpha, \beta \leq d} c_{\alpha, \beta} x^\alpha y^\beta$. En notant $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, on a :

$$P(z) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha, \beta} z^\alpha \bar{z}^\beta$$

où on a

$$a_{\alpha, \beta} = \frac{1}{\alpha! \beta!} \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} P(0)$$

On retrouve que P est holomorphe si on a $a_{\alpha, \beta} = 0$ pour $\beta \geq 1$.

Théorème 3.1: Lien \mathbb{C} -dérivabilité et \mathbb{R} -différentiabilité

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. On a équivalence entre :

1. $f \in \mathcal{O}(U)$
2. f est \mathbb{R} -différentiable sur U et $d_z f$ est \mathbb{C} -linéaire pour tout $z \in U$
3. f est \mathbb{R} -différentiable sur U et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ pour tout $z \in U$

Démonstration. $i \Rightarrow ii$ $f(z+h) = f(z) + hf'(z) + o(h) \Rightarrow f$ est \mathbb{R} -différentiable en z et $d_z f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ qui à $h \mapsto hf'(z)$ est \mathbb{C} -linéaire.

$ii \Rightarrow iii$ On a :

$$\begin{aligned} d_z f(h) &= \frac{\partial f}{\partial z}(z) dz(h) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) d\bar{z}(h) \\ &= \frac{\partial f}{\partial z}(z)h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)\bar{h} \\ d_z f(h) &= \frac{\partial f}{\partial z}h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\bar{h} \end{aligned}$$

On a alors : $d_z f(ih) = \frac{\partial f}{\partial z}ih - i\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\bar{h}$. Mais $d_z f$ est \mathbb{C} -linéaire par hypothèse. Donc :

$$d_z f(ih) = i d_z f(h) = i \frac{\partial f}{\partial z}h + i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\bar{h}$$

Ainsi : $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

$iii \Rightarrow i$ On a :

$$d_z f(h) = \frac{\partial f}{\partial z}h$$

D'où

$$f(z+h) = f(z) + \frac{\partial f}{\partial z}h + o(h)$$

Ainsi :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

et f est holomorphe en z . ■

Proposition 3.4: Équations de Cauchy-Riemann

On note $f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ où $P, Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est holomorphe, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

i.e.

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Ce sont les équations de Cauchy-Riemann.

Démonstration. On a :

$$d_z f(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) dx(h) + \frac{\partial f}{\partial y}(z) dy(h) = f'(z)h = f'(z)(k + il)$$

On obtient

$$f'(z)(k + il) = \frac{\partial f}{\partial x}(z)k + \frac{\partial f}{\partial y}(z)l$$

et donc :

$$\begin{cases} f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) \\ if'(z) = \frac{\partial f}{\partial y}(z) \end{cases}$$

On obtient ainsi la première égalité en identifiant.

On réécrit ceci avec $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

■

Proposition 3.5: Constance sur un Connexe

Si f est holomorphe sur U connexe on a équivalence entre :

- f est constante sur U
- $\Re f$ l'est
- $\Im f$ l'est
- $|f|$ l'est
- \bar{f} est holomorphe

3.3 Intégrale sur le bord d'un Compact

Définition 3.4: Classe du Bord d'un Compact

Soit K un compact de \mathbb{R}^2 . K est dit à bord compact de classe \mathcal{C}^1 par morceaux si pour tout élément $z_0 \in \partial K$, il existe des coordonnées (u, v) associées à un repère affine de \mathbb{R}^2 d'origine z_0 orienté positivement par rapport à l'orientation canonique de \mathbb{R}^2 et un rectangle ouvert $R = \{-\delta < u < \delta\} \times \{-\eta < v < \eta\}$ tel que :

$$K \cap R = \{(u, v) \in R, v \geq h(u)\}$$

où h est une fonction réelle \mathcal{C}^1 par morceaux sur $[-\delta, \delta]$ avec $h(0) = 0$ et $\sup |h| < \eta$.

Définition 3.5: Orientation du Bord

Soit K un compact à bord de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. On appelle orientation canonique du bord l'orientation donnée par les arcs $u \mapsto (u, h(u))$ avec u croissant.

Lemme 3.1: Existence de l'Orientation

La définition a du sens.

Lemme 3.2: Recouvrement de Rectangles

Soit R, R' des rectangles ouverts tels que $\partial K \cap R \cap R' \neq \emptyset$.

On définit

$$K \cap R = \{(u, v) \in R, v \geq h(u)\}$$

et

$$K \cap R' = \{(u', v') \in R', v' \geq l(u')\}$$

Alors, les orientations sur $\partial K \cap R \cap R'$ coïncident.

Démonstration. Soit $z_0 \in \partial K \cap R \cap R'$. h et l sont \mathcal{C}^1 par morceaux. En évitant un nombre fini de points de $\partial K \cap R \cap R'$ on peut supposer h et l \mathcal{C}^1 en z_0 . Autrement dit, le bord admet une tangente en z_0 . On a deux repères affines orientés (z_0, e_1, e_2) et (z_0, e'_1, e'_2) qui génèrent des coordonnées (u, v) et (u', v') . Quitte à remplacer h par $h(u) - h'(0)u$ on peut supposer que $h'(0) = l'(0) = 0$. Ainsi, e_1 et e'_1 sont colinéaires. Puisqu'on a supposé que (e_1, e_2) et (e'_1, e'_2) sont orientés positivement par rapport à l'orientation canonique de \mathbb{R}^2 et puisque e_2 et e'_2 doivent être dans le même sens (i.e. à l'intérieur du compact), on a bien le fait que e_1 et e'_1 sont dans le même sens. Finalement, les orientations sur $\partial K \cap R \cap R'$ coïncident. ■

3.4 Formule de Green-Riemann

Soit $p, n \in \mathbb{N}^*$. On note $\Lambda_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{R}^n)$ le \mathbb{R} -ev des formes p -linéaires alternées sur \mathbb{R}^n . Toute forme $S \in \Lambda_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{R}^n)$ s'écrit de manière unique

$$S = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} c_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

Définition 3.6: Produit Extérieur

Pour $S \in \Lambda_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{R}^n), T \in \Lambda_{\mathbb{R}}^q(\mathbb{R}^n)$ on définit le produit extérieur de S et T noté $S \wedge T \in \Lambda_{\mathbb{R}}^{p+q}(\mathbb{R}^n)$ comme :

$$S \wedge T(v_1, \dots, v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) S(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) T(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)})$$

Proposition 3.6: Exemples

La paire (dx, dy) forme une base de $\Lambda_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{C})$. Les seuls produits extérieurs à considérer sont :

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0, \quad dx \wedge dy = -dy \wedge dx$$

De plus, $dx \wedge dy$ est la forme bilinéaire alternée déterminant dans la base canonique.

Définition 3.7: 2-forme différentielle

Une 2-forme différentielle β sur un ouvert U de \mathbb{C} est une application continue de U dans $\Lambda_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{C})$: $\beta = w(x, y) dx \wedge dy$ pour w continue.

Définition 3.8: Intégrale d'une 2-forme

Soit $\beta = w(x, y) dx \wedge dy$ une 2-forme différentielle sur U . On définit :

$$\int_U \beta = \int_U w(x, y) dx dy$$

Définition 3.9: Différentielle d'une Différentielle

Soit $\alpha = u(x, y) dx + v(x, y) dy$ une 1-forme différentielle \mathcal{C}^1 sur U . La différentielle $d\alpha$ de α est la 2-forme différentielle

$$d\alpha = du \wedge dx + dv \wedge dy = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

Proposition 3.7: Exemples

1. Soit α une 1-forme différentielle sur U et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^1 . Alors

$$d(f\alpha) = df \wedge \alpha + f d\alpha$$

2. Si on écrit la 1-forme différentielle \mathcal{C}^1 $\alpha = f dz + g d\bar{z}$ on a :

$$d(f dz + g d\bar{z}) = (\partial_z g - \partial_{\bar{z}} f) dz \wedge d\bar{z} = -2i (\partial_z - \partial_{\bar{z}} f) dx \wedge dy$$

En particulier, si $\alpha = f dz$ avec f holomorphe, alors $\partial_{\bar{z}} f = 0$ et $d\alpha = 0$.

Lemme 3.3: Formule de Green-Riemann sur un rectangle

Soit K un compact de \mathbb{C} à bord de classe \mathcal{C}^1 par morceaux orienté canoniquement. Soit $\alpha = u(x, y) dx + v(x, y) dy$ une forme 1-différentielle de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert de K à support dans un rectangle $R = [-\delta, \delta] \times [-\eta, \eta] \subseteq K$. Alors

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_K d\alpha \text{ i.e. } \int_{\partial K} u(x, y) dx + v(x, y) dy = \int_K \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$$

Démonstration. Comme K est compact, $R \subseteq \overset{\circ}{K}$ ou bien $\partial K \cap R$ est le graphe d'une fonction h et $K \cap R$ est la partie située à l'intérieur du graphe. Supposons $R \subseteq \overset{\circ}{K}$, alors $u = v = 0$ sur ∂R et

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) dx = v(\delta, y) - v(-\delta, y) = 0$$

$$\int_{-\eta}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dy = u(x, \eta) - u(x, -\eta) = 0$$

et

$$\int_K d\alpha = \int_R d\alpha = \int_{-\delta \leq x \leq \delta, -\eta \leq y \leq \eta} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

Puisque le support de α ne rencontre pas ∂K on a $\int_{\partial K} \alpha = 0 = \int_K d\alpha$.
Si $K \cap R = \{(x, y) \in R \mid y \leq h(x)\}$, alors

$$\begin{aligned} \int_K d\alpha &= \int_{K \cap R} d\alpha = \int_{-\delta}^{\delta} dx \int_{h(x)}^{\eta} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{h(x)}^{\eta} v(x, y) dx \right) + v(x, h(x))h'(x) - (u(x, \eta) - u(x, h(x))) \right) dx \\ &= \int_{h(\delta), \eta} v(\delta, y) dy - \int_{h(-\delta)}^{\eta} v(-\delta, y) dy + \int_{-\delta}^{\delta} (v(x, h(x))h'(x) + u(x, h(x))) dx \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} (v(x, h(x))h'(x) + u(x, h(x))) dx \end{aligned}$$

car $u(x, \eta) = v(\delta, y) = v(-\delta, y) = 0$. Par ailleurs, comme $\partial K \cap R$ est paramétré par $y = h(x)$,

$$\int_{\partial K \cap R} \alpha = \int_{\partial K \cap R} u(x, y) dx + v(x, y) dy = \int_{-\delta}^{\delta} (v(x, h(x))h'(x) + u(x, h(x))) dx$$

Le support de α est inclus dans R . Nous concluons donc :

$$\int_K d\alpha = \int_{\partial K} \alpha$$

■

Définition 3.10: Partition de l'unité

Soit K un compact de \mathbb{C} recouvert par un nombre fini d'ouverts U_i . Une partition de l'unité de classe \mathcal{C}^1 subordonnée au recouvrement U_i est une famille φ_i de fonctions de K dans $[0, 1]$ de classe \mathcal{C}^1 à support dans U_i telles que $\sum \varphi_i(x) = 1$ pour tout $x \in K$.

Lemme 3.4: Unité sur un Voisinage

Soit $z \in U$. Il existe V un voisinage de z avec $\overline{V} \subseteq U$ et une fonction \mathcal{C}^1 φ_U à support dans U valant 1 sur V .

Démonstration. Soit $r > r' > 0$ tel que $D(z, r') \subset D(z, r) \subset U$. On définit les fonctions \mathcal{C}^∞

$$f_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_r(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t^2 - r^2}} & \text{si } |t| < r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$g_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g_r(s) = \frac{\int_{-\infty}^s f_r(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} f_r(t) dt}$$

En particulier :

$$g_r(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq -r \\ 1 & \text{si } s \geq r \end{cases}$$

Alors, $V = D(z, r')$ et $\varphi_U(w) = f_r\left(r + \frac{2r}{r-r'}(r' - |w - z|)\right)$ conviennent. ■

Lemme 3.5: Existence d'une Partition

Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ un compact et (U_i) un recouvrement fini par des ouverts de K . Il existe une partition de l'unité \mathcal{C}^1 subordonnée au recouvrement U_i

Démonstration. Pour tout $z \in K \setminus U_j$ il existe i tel que $z \in U_i$. Par le lemme 3.4 on construit ψ_z^j de classe \mathcal{C}^1 qui vaut 1 sur un voisinage ouvert W_z^j de z et dont le support est dans l'ouvert $U_i \cap (K \setminus U_j)$. Le support de ψ_z^j est un fermé de K donc est compact.

On obtient donc un recouvrement ouvert W_z^j du compact $K \setminus U_j$ donc on extrait un sous-recouvrement fini $\{W_{z_1}^j, \dots, W_{z_{j_l}}^j\}$.

On procède de même pour tout $j \leq n$. En réindexant on obtient une famille finie $(\psi_l)_{1 \leq l \leq N}$ de fonctions dont l'union des supports recouvre K , i.e. pour tout $z \in K$, il existe l tel que $\psi_l(z) > 0$. On pose alors

$$\psi = \sum \psi_l \text{ et pour } l \leq N, \rho_l = \frac{\psi_l}{\psi}$$

Ainsi, ρ_l est une partition de l'unité de classe \mathcal{C}^1 de K telle que pour tout l il existe $1 \leq i \leq n$ tel que le support de ρ_l soit inclus dans U_i . ■

Théorème 3.2: Formule de Green-Riemann

Soit K un compact de \mathbb{C} à bord de classe \mathcal{C}^1 par morceaux orienté canoniquement. Soit α une 1-forme différentielle de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert de K . On a alors

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_K d\alpha$$

Démonstration. Comme K est compact, il est recouvert par un nombre fini de rectangles ouverts R_j qui vérifient $R_j \subseteq \mathring{K}$ ou $\partial(K \cap R_j)$ est le graphe d'une fonction h_j et $K \cap R_j$ est la partie située à l'intérieur du graphe. Soit (χ_j) une partition de l'unité subordonnée au recouvrement R_j . Écrivons $\alpha = \sum \alpha_j$ où les 1-formes différentielles $\alpha_j = \chi_j \alpha$ sont de classes \mathcal{C}^1 à support dans R_j . On se ramène alors au cas du lemme 3.3 ■

Théorème 3.3: Cauchy

Soit U un ouvert de \mathbb{C} , K un compact à bord de classe \mathcal{C}^1 par morceaux inclus dans U , avec l'orientation canonique du bord. Alors pour toute fonction holomorphe de classe \mathcal{C}^1 sur K nous avons

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 0$$

Démonstration. On applique la formule de Green-Riemann 3.2 à $\alpha = f(z) dz$, 1-forme différentielle de classe \mathcal{C}^1 . On a $d\alpha = -\partial_{\bar{z}} f dz \wedge d\bar{z} = 0$. ■

Corollaire 3.1: Analyticité Holomorphe \mathcal{C}^1

Soit f holomorphe de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert U . Alors f est analytique sur U .

Démonstration. Soit $\overline{D}(w, r) \subseteq U$ et γ le lacet $t \mapsto w + re^{it}$. Pour $\lambda \leq 1$, on pose

$$g(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z + \lambda(u - z))}{u - z} du = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \lambda(w + re^{it} - z))}{w + re^{it} - z} e^{it} dt$$

Ainsi, g est continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ de dérivée

$$g'(\lambda) = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(z + \lambda(w + re^{it} - z)) e^{it} dt = \left[\frac{1}{2i\pi\lambda} f(z + \lambda(w + re^{it} - z)) \right]_{t=0}^{2\pi} = 0$$

Donc g est constante avec

$$g(1) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(u) du}{u - z} \text{ et } g(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z) du}{u - z} = f(z)$$

D'où, par la proposition 2.4, f est analytique ■

3.5 Analycité des Fonctions Holomorphes

Lemme 3.6: Goursat

Soient $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et T un triangle inclus dans U . Pour tout fonction holomorphe sur U

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0$$

Démonstration. Nous décopons T en quatre triangles T_i dont les sommets sont ceux de T et les milieux des côtés de T . Nous orientons les arêtes opposées des triangles T_k de telle façon que

$$I = \int_{\partial T} f(z) dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\partial T_k} f(z) dz$$

Il existe donc un indice k avec $\left| \int_{\partial T_k} f(z) dz \right| \geq |I|/4$. De cette façon, nous construisons une suite de triangles emboîtés $T'_0 = T, T'_1 = T_k$ avec $\text{diam} T'_n = \text{diam} T / 2^n$ et $\left| \int_{\partial T'_n} f(z) dz \right| \geq |I|/4^n$. L'intersection des triangles emboîtés T'_n est réduite à un point z_0 . Comme f est holomorphe en z_0 :

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)\varepsilon(z)$$

avec $\varepsilon(z)$ qui tend vers 0 quand z tend vers z_0 . On a ainsi :

$$\left| \int_{\partial T'_n} f(z) dz \right| = \left| \int_{\partial T'_n} (z - z_0)\varepsilon(z) dz \right| \leq \text{long}(\partial T'_n) \sup_{\partial T'_n} |z - z_0| |\varepsilon(z)|$$

et donc

$$\left| \int_{\partial T'_n} f(z) dz \right| \leq 3 (\text{diam} T'_n)^2 \sup_{\partial T'_n} |\varepsilon(z)|$$

Donc $|I| \leq 4^n \left| \int_{\partial T'_n} f(z) dz \right| \leq 3 (\text{diam} T_n)^2 \sup_{\partial T'_n} |\varepsilon(z)|$ et donc $I = 0$. ■

Théorème 3.4: Goursat

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ ouvert et K un compact à bord de classe \mathcal{C}^1 avec l'orientation canonique du bord. Pour toute fonction holomorphe sur U on a :

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 0$$

Démonstration. On approche K par des compacts à bords polygonaux. Notons $\delta = d(K, \mathbb{C} \setminus U) > 0$. Paramétrons δK par un nombre fini d'arcs \mathcal{C}^1 par morceaux. Pour chaque tel arc $\gamma : [a, b] \rightarrow U$, soit une subdivision $a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = b$ telle que $|\gamma(\tau_{j+1}) - \gamma(\tau_j)| \leq \varepsilon \leq \delta/2$. Chaque segment $[\gamma(\tau_{j+1}), \gamma(\tau_j)] \subset U$. Pour ε assez petit, la réunion de ces segments constitue le bord d'un compact K_ε à bord polygonal. $K_\varepsilon = \cup_i T_i$ est réunion de triangles adjacents et le lemme de Goursat 3.6 implique

$$\int_{\partial K_\varepsilon} f(z) dz = \sum_i \int_{\partial T_i} f(z) dz = 0$$

D'après la proposition , on a bien :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial K_\varepsilon} f(z) dz = \int_{\partial K} f(z) dz$$

D'où le résultat. ■

Théorème 3.5: Formule de Cauchy

Soit f holomorphe sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{C}$ et K un compact à bord orienté \mathcal{C}^1 par morceaux inclus dans U . Alors, pour tout $z \in K$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega$$

Démonstration. Soit $r > 0$ tel que $\overline{D(z, r)} \subset \overset{\circ}{K}$. On note $K_r = K \setminus D(z, r)$. K_r est un compact à bord orienté \mathcal{C}^1 par morceaux dont le bord est $\partial K_r = \partial K \cup \partial D^-(z, r)$ où ∂D^- signifie que ce cercle a l'orientation opposée à celle obtenue comme bord de $\overline{D(z, r)}$. La fonction $g(\omega) = f(\omega)/(\omega - z)$ est holomorphe sur $U \setminus \{z\}$. Le théorème de Goursat 3.4 appliqué à g sur le compact $K_r \subseteq U \setminus \{z\}$ donne

$$\int_{\partial K} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega - \int_{\partial D(z, r)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega = 0$$

En posant $\omega = z + re^{it}$ on a :

$$\int_{\partial D(z, r)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt$$

et cette dernière intégrale tend vers $2i\pi f(z)$ lorsque r tend vers 0 par continuité de f au point z . ■

Théorème 3.6: Équivalence Holomorphie-Analytité

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. f est holomorphe sur U si et seulement si elle est analytique.

Démonstration. On a déjà l'implication analytité holomorphie. Supposons f holomorphe sur U et $\overline{D(z_0, r)} \subset U$. Pour $z \in D(z_0, r)$, la formule de Cauchy 3.5 donne

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega$$

Or

$$\frac{1}{\omega - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\omega - z_0)^{n+1}}$$

De plus, pour $\omega = z_0 + re^{it}$,

$$\left| \frac{(z - z_0)^n}{(\omega - z_0)^{n+1}} \right| = \frac{1}{r} \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^n, \text{ avec } |z - z_0|/r < 1$$

Par convergence normale pour $t \in [0, 2\pi]$, on obtient :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0, r)} f(\omega) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\omega - z_0)^{n+1}} d\omega = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\omega)}{2i\pi (\omega - z_0)^{n+1}} d\omega (z - z_0)^n = \sum a_n (z - z_0)^n$$

et la série entière ci-dessus converge normalement sur les compacts de $D(z_0, r)$. ■

Corollaire 3.2: Classe des Dérivées

Soit U un ouvert de \mathbb{C} . Toute fonction holomorphe sur U est de classe \mathcal{C}^∞ sur U .
Précisément, pour tout $K \subset U$ compact à bord de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et pour tout $z \in \overset{\circ}{K}$ nous avons :

1. $\forall n \geq 0, \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z) = f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{n+1}} d\omega$
2. $\forall n \geq 0, \forall m \geq 0, \frac{\partial^{n+m} f}{\partial z^n \partial \bar{z}^m}(z) = 0$.

En particulier, une fonction holomorphe f admet des dérivées complexes $f^{(n)}$ d'ordre n arbitraire et les dérivées $f^{(n)}$ sont holomorphes.

Théorème 3.7: Morera

Soit f une fonction continue sur un ouvert U de \mathbb{C} . Nous supposons que $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$ pour tout triangle T inclus dans U . Alors f est holomorphe sur U .

Démonstration. Soit $z_0 \in U$ et $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r) \subset U$. Pour $z \in D(z_0, r)$, on pose

$$F(z) = \int_{[z_0, z]} f(\omega) d\omega$$

Soit $z \in D(z_0, r)$ et $h \neq 0$ tel que $z + h \in D(z_0, r)$. Comme le triangle de sommets $z_0, z, z + h$ est inclus dans $D(z_0, r)$, nous avons

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(\omega) d\omega = \int_0^1 f(z+th) dt$$

Comme f est continue au point z ,

$$\lim_{h \in \mathbb{C}^*, h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z)$$

Ainsi F est holomorphe sur $D(z_0, r)$ donc analytique d'après le théorème 3.6 et sa dérivée $f = F'$ l'est donc aussi. ■

Corollaire 3.3: Γ

La fonction Γ

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$$

est holomorphe pour $\Re s > 0$.

Démonstration. L'intégrale converge en $t = 0$ car $|t^{s-1} e^{-t}| \leq t^{\Re s - 1}$. À s fixé pour $t \in \mathbb{R}_+$ grand,

$$|t^{s-1} e^{-t}| = t^{\Re s - 1} e^{-t} \leq e^{t/2} e^{-t} = e^{-t/2}$$

Donc $\Gamma(s)$ est bien définie pour $\Re s > 0$. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \{s, \Re s > 0\}$ la courbe décrivant un triangle. Alors, d'après le théorème de Fubini

$$\int_\gamma \Gamma(s) ds = \int_\gamma \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt ds = \int_0^{+\infty} \left(\int_\gamma t^{s-1} ds \right) e^{-t} dt = 0$$

Ainsi, en appliquant le théorème de Morera 3.7, la fonction Γ est holomorphe sur le demi-plan $\Re s > 0$. ■

4 Propriétés Élémentaires des Fonctions Holomorphes

4.1 Théorème d'inversion locale

Théorème 4.1: Inversion Locale

Si $f \in \mathcal{O}(U)$, $a \in U$, $f'(a) \neq 0$, alors, $\exists V$ voisinage ouvert de a inclus dans U sur lequel f est biholomorphe sur $f(V)$ ouvert.

Démonstration. Comme $f \in \mathcal{O}(U)$, f est \mathbb{R} -différentiable. Donc il existe un voisinage V ouvert de U contenant a sur lequel $f|_V : V \rightarrow f(V)$ est un difféomorphisme. Alors, $d_{f(z)}(f^{-1}) = (d_z f)^{-1}$ et donc $f^{-1} \in \mathcal{O}(U)$. ■

Idée des Séries Majorantes. • On suppose d'abord $a = 0$, $f(a) = 0$, $f'(a) = 1$. On a

$$f(z) = z - \sum_{n \geq 2} a_n z^n, z \in D(0, r)$$

On veut résoudre $f(z) = \omega = z - \sum_{n \geq 2} a_n z^n$ i.e. $z = \omega + \sum_{n \geq 2} a_n z^n$. Mais, $\sum_{n \geq 2} a_n z^n = \mathcal{O}(\omega^2)$:

$$z = \omega + \sum_{n \geq 2} a_n (\omega + \mathcal{O}(\omega^2))^n = \omega + a_2 \omega^2 + \mathcal{O}(\omega^3)$$

On peut alors réinjecter :

$$z = \omega + a_2 \omega^2 + (2a_2^2 + a_3) \omega^3 + \mathcal{O}(\omega^4)$$

et ainsi de suite :

$$z = \omega + \sum_{n=2}^N P_n(a_2, \dots, a_n) \omega^n + \mathcal{O}(\omega^{N+1})$$

où les $P_n \in \mathbb{N}[X_2, \dots, X_n]$.

- Montrons maintenant que cette série converge lorsque $N \rightarrow \infty$. On sait que la série $\sum a_n z^n$ converge sur $D(0, r)$. Pour $r' < r$, $|a_n r'^n| \rightarrow 0$. Donc il existe $M > 0$ tel que $|a_n| \leq M^n$. Or,

$$z = \omega + \sum_{n=2}^{+\infty} P_n(M^2, \dots, M^n) \omega^n$$

est solution de :

$$\begin{aligned} \omega &= z - \sum_{n \geq 2} M^n z^n \\ &= z - \left(\frac{1}{1 - Mz} - 1 - Mz \right) \end{aligned}$$

Donc

$$(1 - Mz) \omega = z(1 - Mz) - 1 + 1 - Mz + Mz(1 - Mz)$$

C'est à dire :

$$z^2 (M + M^2) + z(-M\omega - 1) + \omega = 0$$

ou

$$z = \frac{(M\omega + 1) - \sqrt{(1 + M\omega)^2 - 4\omega(M + M^2)}}{2(M + M^2)}$$

On prend ici pour $\sqrt{\cdot}$ la détermination holomorphe de $()^{1/2}$ qui existe sur $D(1, 1)$ et pour laquelle $\sqrt{1} = 1$ de sorte que pour $\omega = 0$, $z = 0$.

La série définissant $\sqrt{\cdot}$ converge alors sur $D(0, R)$ où $R = \frac{1}{(1+\sqrt{2})M+4M^2}$. En effet, alors, on a

$$|M^2\omega^2| \leq M^2|\omega|R \leq \frac{M^2|\omega|}{(1+\sqrt{2})M} = (\sqrt{2}-1)M|\omega|$$

et donc

$$|(2M+4M^2)\omega - M^2\omega^2| \leq (2M+4M^2)|\omega| + |M^2\omega^2| \leq \left((1+\sqrt{2})M+4M^2\right)|\omega| < 1$$

D'où la convergence de $g(\omega) = \omega + \sum_{n \geq 2} P_n(a_2, \dots, a_n)\omega^n$ sur $D(0, R)$. et $g(D(0, R)) \subset D(0, 1/M)$.

- Par identification de la série entière en zéro et principe du prolongement analytique, nous avons $f \circ g(\omega) = \omega$ pour $\omega \in D(0, R)$. De plus, par construction, g est injective sur $W = D(0, R)$ et l'image $\omega = f(z)$ atteint surjectivement W sur $g(W) \subseteq D(0, 1/M) \cap f^{-1}(W)$. Prenons V la composante connexe de 0 dans $D(0, 1/M) \cap f^{-1}(W)$. Alors $f(V) \subset W$ et $g(W) \subset V$. V, W sont ouverts et $f|_V \circ g|_W = id_W$. Par connexité de V et prolongement analytique, $g|_W \circ f|_V = id_V$. ■

Théorème 4.2: Pré-Application Ouverte

Soit $f \in \mathcal{O}(U)$ non constante au voisinage de $a \in U$, $f(a) = 0$ et

$$m = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid f^{(k)}(a) \neq 0\}$$

Il existe alors un voisinage ouvert V de a , un voisinage ouvert W de 0 et un biholomorphisme $\varphi : V \rightarrow W$ tel que φ envoie a sur 0 et $f(z) = f(a) + \varphi(z)^m$.

Démonstration. D'après le théorème 2.4 il existe $U' \subseteq U$ un voisinage de a et $g \in \mathcal{O}(U')$ tels que pour tout $z \in U'$

$$f(z) - f(a) = \alpha(z-a)^m g(z)$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $g(a) = 1$.

Soit $V = \{z \in U' \mid |g(z) - 1| < 1\}$. C'est un voisinage de a sur lequel $\exp \frac{1}{m} \log(g(z))$ existe.

On a alors

$$\forall z \in V', f(z) = f(a) + (\varphi(z))^m$$

où

$$\varphi(z) = \alpha_m(z-a) \exp\left(\frac{1}{m} \log(g(z))\right)$$

où $\alpha_m^m = \alpha$. Alors, $\varphi \in \mathcal{O}(V')$ avec $\varphi(a) = 0$ et $\varphi'(a) = 1$. Par théorème d'inversion locale 4.1, on a un voisinage $V \subset V'$ de a sur lequel φ est un biholomorphisme. ■

Corollaire 4.1: Solutions d'une Équation

Soit $f \in \mathcal{O}(U)$ non constante au voisinage de $a \in U$ et

$$m = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid f^{(k)}(a) \neq 0\}$$

. Alors, $\exists r, \rho \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\forall \omega \in D(f(a), \rho) \setminus \{f(a)\}$ l'équation $f(z) = \omega$ a exactement m solutions dans $D(a, r)$.

Démonstration. On écrit par le théorème 4.2 précédent $f(z) = \omega = f(a) + \varphi(z)^m$ où $\varphi : V \rightarrow W$ est tel que $\varphi(a) = 0$. On suppose $\varphi(z) = (\omega - f(a))^{1/m}$ pour une certaine détermination de l'exponentielle. On prend r tel que $D(a, r) \subset V$. $\varphi(D(a, r))$ est un ouvert de W voisinage de 0.

Il existe un ρ' tel que $D(0, \rho')$ est inclus dans $\varphi(D(a, r))$. Alors, pour tout $\omega \in D(f(a), \rho'^m)$, $(\omega - f(a))^{1/m} \in D(0, \rho')$. Mézamor, $e^{2ik\pi/m} (\omega - f(a))^{1/m}$ sont dans $D(0, \rho')$. On obtient alors

$$z_k = \varphi^{-1} \left(e^{2ik\pi/m} (\omega - f(a))^{1/m} \right) \in D(a, r)$$

Les z_k sont solutions de $f(z) = \omega$ et donc il y en a bien exactement m .

De même, l'équation $f(z) = f(a)$ n'a qu'une solution $z = a$ dans $D(a, r)$ de multiplicité m . ■

Théorème 4.3: Application Ouverte

Une fonction holomorphe non constante sur un ouvert U connexe est une application ouverte.

Démonstration. Par le corollaire 4.1, tout point $z_0 \in U$ admet un voisinage $V_{z_0} \subset U$ tel que $f(V_{z_0}) = D(f(z_0), \rho(z_0))$. Ainsi, $f(U) = \cup D(f(z_0), \rho(z_0))$ est ouvert. ■

Théorème 4.4: Théorème d'Inversion Globale

Soit U un ouvert connexe et $f \in \mathcal{O}(U)$ injective. Alors :

1. $f(U)$ est un ouvert de \mathbb{C}
2. f' ne s'annule pas sur U
3. $f : U \rightarrow f(U)$ est un biholomorphisme

Démonstration. 1. D'après le théorème de l'application ouverte 4.3, f , injective donc non constante, est ouverte donc $f(U)$ est ouverte et f est une bijection continue ouverte de U dans $f(U)$, i.e., un homéomorphisme.

2. Supposons qu'il existe z_0 pour lequel $f'(z_0) = 0$. Dans le théorème 4.1, on a un entier $m \geq 2$ et donc f n'est pas injective au voisinage de z_0 ce qui est absurde. Donc f' ne s'annule pas sur U .

3. D'après les deux premiers points et le théorème 4.1 d'inversion locale, f^{-1} est holomorphe sur $f(U)$ et $f : U \rightarrow f(U)$ est un biholomorphisme. ■