Jeux et Automates

Plan Présentation LFCC

Matthieu Boyer

18 décembre 2023

Table des matières

Résumé

Dans ce rapport, on s'intéresse à des manières de représenter des jeux par la théorie des langages formels, en particulier par les automates et par les automates à pile. On présente alors une nouvelle caractérisation de la régularité d'un langage comme sa reconnaissance par une certaine représentation des jeux. Puis, en modifiant cette représentation, on trouve une caractérisation des langages algébriques par les jeux. Enfin, on s'intéresse à une manière de représenter le *Game Design* par des automates en introduisant un délai sur les transitions, et on regarde quelques exemples d'applications.

Introduction

Dans la suite on ne s'intéresse qu'à des jeux à plusieurs joueurs i.e. plus de deux.
Un jeu à plusieurs joueurs est, de manière informelle, une abstraction d'un jeu ressemblant par exemple à la belote : Chaque joueur, à son tour, va choisir, parmi un éventail de coups possibles, celui qu'il souhaite effectuer, modifiant alors l'état du jeu. En reprenant l'exemple de la belote, un coup est une carte de la main du joueur, qui ne sait pas exactement quelles cartes ont ses adversaires, et qui ne peut la jouer que sous certaines conditions, à résoudre dans l'ordre :

1. Soit il est le premier à jouer
2. Soit la carte est de la *bonne* couleur
3. Soit la carte est un atout plus grand que le dernier joué
4. Soit la carte est une coupe (atout lorsqu'un autre couleur est jouée)
5. Soit il ne peut rien jouer d'autre remplissant les conditions précédentes

Il paraît alors raisonnable qu'en limitant les transitions possibles de l'état de jeu selon l'état et selon les règles du jeu, on puisse modéliser un jeu par un automate. Toutefois, le manque d'informations d'un joueur sur les mains de ses adversaires, semble aussi limiter la description directe du jeu avec un caractère non-déterministe.

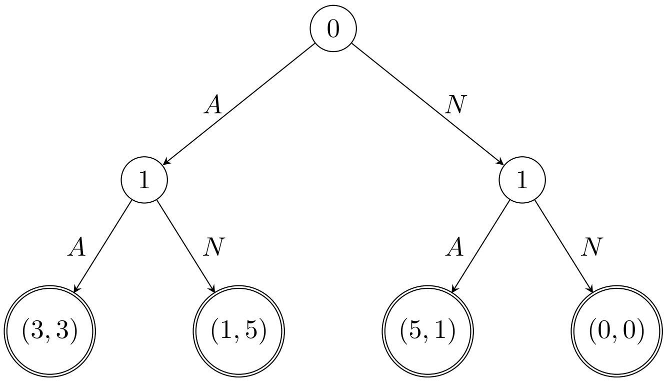
1 Jeux et Automates

1.1 Première définition de Jeu

On introduit d'abord une première définition de jeu :

Définition 1.1.1. *Un jeu est un triplet* $(P, A_i, \succeq_i)$ *où* P *est un ensemble de joueurs,* A_i *est un ensemble d'actions pour le joueur* $i \in P$ *et* $\succeq_i$ *est une relation de préférence pour le joueur* i*.*

Pour le Dilemme du Prisonnier, on a par exemple : $P = \{0, 1\}$, $\forall i, A_i = \{A, N\}$ et $\succeq_i$ peut se décrire sur l'arbre de jeu suivant de manière numérique :



Arbre de Jeu du Dilemme du Prisonnier à information totale.

Ici, chaque noeud interne de l'arbre correspond à un joueur, chaque arête à un coup qu'il peut jouer, c'est-à-dire dans notre cas, choisir d'avouer (A) son crime, ou bien de le nier (N) et les feuilles de l'arbre représentent les résultats, cf. Table 1.

Table 1 – Résultats du Dilemme du Prisonnier

		Prisonnier 0	
		Aveu	Négation
Prisonnier 1	Aveu	$(3, 3)$	$(5, 1)$
	Négation	$(1, 5)$	$(0, 0)$

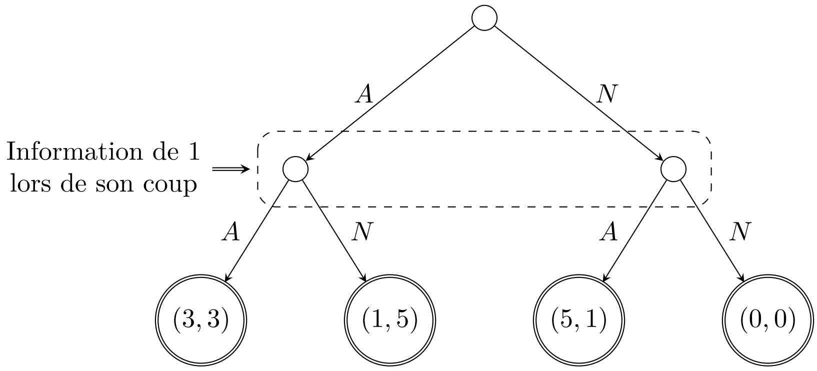
Définition 1.1.2. *On appelle la description d'un jeu à information totale sous forme d'arbre précédente la description extensive de ce jeu.*

Toutefois, d'autre descriptions peuvent être préférables, notamment lorsque l'un des joueurs n'a pas d'information sur les coups des autres joueurs, comme c'est le cas dans certaines variantes du Dilemme du Prisonnier. En effet, on considérait ici que le prisonnier [1] 1 est informé du choix du prisonnier 0, ce qui n'est pas un très bon choix de la part des gêoliers.

Définition 1.1.3. *On parle de jeu à information imparfaite (par opposition aux jeux à information totale ou jeux extensifs), lorsque le joueur actuel n'a pas d'informations sur les coups des joueurs précédents. On représente ceci en rajoutant sur l'arbre de jeu l'information possédée par un joueur lors de son coup en entourant l'ensemble des positions possibles.*

Dans le cas du Dilemme du Prisonnier, on modifie l'arbre 1.1 comme suit :

1. NDA : *I am not a number ! I am a free man !*



Définition 1.1.4. *Une partie sur un jeu est une suite d'états de ce jeu, ou, de manière équivalente, une suite de coups $s_0 s_1 \dots s_k$ tels que :*

- $\forall i, s_{2i} \in A_0$ *et* $s_{2i+1} \in A_1$.
- $\nexists s_{k+1} \in A_i$ *où* $i = 1$ *si* $k \equiv 0 \mod 2$ *et* $i = 0$ *sinon.*

1.2 Les Automates vus comme des Jeux

Définition 1.2.1. *Si* $A = (Q, \Sigma, \delta, \iota, F)$ *est un automate, on définit* G_A *un jeu à deux joueurs* P_1 *et* P_2*. Dans ce jeu,* P_1 *joue des états de* Q *et* P_2 *joue des lettres de* Σ*. Si* P_1 *joue* $q \in \Sigma$ *alors* P_2 *doit jouer* s *tel que* $\delta(q, s) \neq \varnothing$.

On joue comme suit :

- P_1 joue q_0 l'état initial.
- P_2 doit jouer une lettre $s \in \Sigma$
- La partie se termine lorsque P_1 joue un état de F et que P_2 n'a plus de coup valable.

On va alors pouvoir définir formellement la notion de stratégie d'un joueur sur un tel jeu :

1.3 Information et Déterminisme

- Si A est déterministe, G_A est équivalent à un jeu à information parfaite, ou jeu extensif.
- Réciproquement, si A n'est pas déterministe, on peut d'une meilleure manière définir des ensembles d'informations pour chacun des joueurs récursivement.

1.4 Langage et Stratégies Gagnantes

- Une stratégie gagnante pour P_1 est une stratégie telle que P_1 a joué un état final et P_2 ne peut plus jouer.
- Une stratégie pour P_2 définie par $w \in \Sigma^\star$ est telle que P_2 joue les lettres de w indépendamment de ce que P_1 joue.
- Une stratégie gagnante pour P_2 est une stratégie w de longueur n où P_1 n'a pas de coup valide.
- On note $S(G_A)^n$ l'ensemble de ces stratégies, et $L(A)^n$ l'ensemble des mots de longueur n reconnus par A. Alors, on prouve que $S(G_A)^n = L(A)^n$.

2 Jeux et Grammaires

2.1 Jeux Hors-Contexte

- Définition d'un Jeu par une Grammaire
- Définition de la Victoire d'un Jeu pour un mot (similaire à ce qui précède).

2.2 Jeux et Systèmes à Pile

- Définition d'un Système à Pile comme un automate à pile sans entrée.
- Preuve qu'on peut construire un automate à pile de sorte qu'un joueur gagne le jeu G, w si et seulement si le calcul sur w de l'automate atteint un état *gagnant* et réciproquement, qu'on peut construire un jeu à partir d'un automate à pile.

2.3 Application aux Jeux de Cartes

- Description du Uno par une Grammaire.

3 Game Design et Automates

Je ne sais pas encore exactement à quel point aller loin dans ce sujet.

- Définition des objets par des alphabets
- Représentation du fil du jeu par un automate dont les transitions sont liées aux actions du joueur.

Références

[1] A-Games : using game-like representation for representing finite automatas *Cleyton Slaviero, Edward Hermann Haeusler*

[2] A Card Game Description Language *Jose M. Font, Tobias Mahlmann, Daniel Manrique, and Julian Togelius*

[3] Active Context-Free Games *Anca Muscholl, Thomas Schwentick, and Luc Segoufin*

[4] Computing Game Design with Automata Theory *Noman Sohaib Qureshi, Hassan Mushtaq, Muhammad Shehzad Aslam, Muhammad Ahsan, Mohsin Ali and Muhammad Aqib Atta*

[5] Summary for Context Free Games *Lukáš Holík, Roland Meyer and Sebastian Muskalla*