Langages Formels, Calculabilité, Complexité

Mickaël Thomazo
Lucas Larroque

5 octobre 2023

Table des matières

Première partie
Cours 1 28/09

1 Langages, Automates, RegExp, Monoïdes finis

Définition 1.0.1. *On appelle* alphabet *un ensemble fini* Σ *de lettres.*
On appelle mot *une suite finie de lettres.*
On appelle langage *un ensemble de mots*

Définition 1.0.2. *On appelle* automate sur l'alphabet Σ *un graphe orienté dont les arêtes sont étiquetées par les lettres de l'alphabet* Σ
Formellement, c'est un quadruplet $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, I, F, \delta)$ *ou :*

- Q *est un ensemble fini d'états*
- Σ *est un alphabet*
- $I \subseteq Q$
- $F \subseteq Q$
- $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$

Un calcul de $\mathcal{A}$ *sur* $w = a_0 \dots a_n$ *est une séquence* $q_0 \dots q_n$ *telle que* $q_0 \in I$, $\forall i \geq 1$, $q_i \in \delta(q_{i-1}, a_i)$
On appelle Langage reconnu par $\mathcal{A}$ *l'ensemble* $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q_0 \dots q_n \text{ calcul de } \mathcal{A} \text{ sur } w \text{ où } q_n \in F\}$
On dit que $\mathcal{A}$ *est déterministe si :*

- $\forall q, a, |\delta(q, a)| \leq 1$

— $|I| = 1$

Définition 1.0.3. *Une expression régulière est de la forme :*
- $a \in \Sigma$
- $\varnothing$
- $r + r$ *(+ désigne l'union :* $L_1 + L_2 = \{w \in L_1 \cup L_2\}$*)*
- $r \cdot r$ *(· désigne la concaténation :* $L_1 \cdot L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1,\ w_2 \in L_2\}$*)*
- r^* *(∗ désigne l'étoile de Kleene,* $L^* = \left\{ \bigodot_{w \in s} w \ \mid\ s \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n \right\}$*)*

Définition 1.0.4 (Automate des Parties)**.** *On pose, si* $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, I, F, \delta)$ *est un automate :*
- $\hat{Q} = 2^Q = \{q_S \mid S \subset Q\}$
- $\hat{I} = \{q_I\}$
- $\hat{F} = \{q_S \mid S \cap F \neq \varnothing\}$
- $\hat{\delta}(q_S, a) = \{q_{S'}\}$ *avec* $S' = \bigcup_{q \in S} \delta(q, a)$

Alors, $\hat{\mathcal{A}} = (\hat{Q}, \Sigma, \hat{I}, \hat{F}, \hat{\delta})$ *est un automate déterministe reconnaissant* $\mathcal{L}(\mathcal{A})$

Démonstration. On procède par double inclusion :
- $(\subset)$ On introduit un calcul de $w \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ sur $\hat{\mathcal{A}}$ et on vérifie par récurrence que son dernier état est final.
- On procède de même pour la réciproque.

■

Définition 1.0.5. *Un monoïde est un magma associatif unifère.*
Un morphisme de monoïde est une application $\varphi : (N, \cdot_N) \to (M, \cdot_M)$ *telle que :*
- $\varphi(1_N) = 1_M$
- $\varphi(n_1 n_2) = \varphi(n_1)\varphi(n_2)$

Un langage L *est reconnu par* $(M, \times)$ *ssi il existe* $P \subset M$ *tel que* $L = \varphi^{-1}(P)$ *où* φ *est un morphisme de* Σ^* *dans* M

Proposition 1.0.1. $L \subseteq \Sigma^*$ *est reconnu par un automate ssi* L *est reconnu par un monoïde fini.*

Démonstration.
- Soit L reconnu par un monoïde fini $(M, \times)$. Soit φ un morphisme tel que $L = \varphi^{-1}(P),\ P \subset M$. On pose $\mathcal{A} = (M, \Sigma, \{1\}, P, \delta)$ où $\delta(q, a) = q \times \varphi(a)$. Alors, $\mathcal{A}$ reconnaît L.
- Soit $\mathcal{A}$, déterministe, complet, reconnaissant L. Pour $a \in \Sigma$, $a \to \varphi_a : q \in Q \mapsto \delta(q, a)$ induit par induction un morphisme de $(\Sigma^*, \cdot)$ dans $(Q^Q, \circ)$. Alors, avec $P = \left\{ f \in Q^Q \ \mid\ f(i) \in F_{\mathcal{A}} \right\}$. On a défini le monoïde des transitions de $\mathcal{A}$.

■

Deuxième partie

Cours 2 - 5/10

2 Lemme de Pompage

Théorème 2.0.1 (Lemme de Pompage/Lemme de l'Etoile)**.** *Si* L *est un langage régulier,* $\exists n \in \mathbb{N}$ $\forall w \in L, |w| \geq n \Rightarrow \exists x, y, z$ *tels que :*
- $w = xyz$
- $|xy| \leq n$
- $y \neq \varepsilon$
- $\forall n \geq 0, xy^n z \in L$

Démonstration. Faire un calcul de $\mathcal{A}$ sur w tel que $|w| \geq n$. Celui-ci passe deux fois par le même état. ■

3 Langages Quotients

3.1 Quotients d'un Langage à Gauche

Définition 3.1.1 (Quotient à Gauche)**.** *Soit* $L, K \subseteq \Sigma^*, u \in \Sigma^*$.
Le quotient à gauche de L *par* u *noté* $u^{-1}L$ *est :* $\{v \in \Sigma^* \mid uv \in L\}$
Le quotient à gauche de L *par* K, $K^{-1}L$ *est* $\bigcup_{u \in K} u^{-1}L$

Proposition 3.1.1.
- $w^{-1}(K + L) = w^{-1}K + w^{-1}L$
- $(wa)^{-1}L = a^{-1}(w^{-1}L)$
- $w^{-1}(KL) = (w^{-1}K \cdot L) + \sum\limits_{u \in L, v \in \Sigma^* w = uv} v^{-1}L$

3.2 Quotient d'un Automate à Gauche

Définition 3.2.1. *On définit le quotient à gauche d'un automate par un mot u comme celui obtenu en remplaçant les états initiaux par les résultats d'un calcul de l'automate sur u.*

Proposition 3.2.1. L *est régulier si et seulement si il a un nombre fini de quotients à gauche.*

Démonstration.
- Un automate reconnaissant L a au plus un quotient par état.
- Posons $A_L = \left(\Sigma, \left\{u^{-1}L \mid u \in \Sigma^*\right\}, I = L = \varepsilon^{-1}L, F =, \delta(w^{-1}L, a) = a^{-1}(w^{-1}L)\right)$
  Par récurrence, le calcul de A_L sur w termine en $w^{-1}L$

■

3.3 Construction de l'Automate Minimal

Définition 3.3.1. *Deux états* q_1, q_2 *sont distingables si :* $\exists w \in \Sigma^*, \delta(q_1, w) \in F, \delta(q_2 \notin F)$.

Proposition 3.3.1. q_1 *et* q_2 *sont distingables s'ils n'ont pas même quotient à gauche. Si* $\delta(q, a)$ *est distingable* $\delta(q^{'}, a)$, $q, q^{'}$ *sont distingables.*
La relation q, q' *sont distingables est une relation d'équivalence.*