

# Algèbre 1

Gaëtan Chenevier

27th December 2023



# Contents

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Ensembles Quotients</b>  | <b>4</b>  |
| 1.1      | Partitions et Relations d'Equivalence . . . . .                                 | 4         |
| 1.2      | Passage au Quotient . . . . .   | 4         |
| 1.3      | Sections et systèmes de représentants . . . . .                                 | 4         |
| 1.4      | Lemme de Zorn . . . . .   | 5         |
| <b>2</b> | <b>Généralités sur les Groupes</b>  | <b>6</b>  |
| 2.1      | Exemples de Groupes . . . . .   | 6         |
| 2.2      | Morphismes . . . . .  | 6         |
| 2.3      | Groupes Cycliques et Monogènes . . . . .  | 7         |
| 2.4      | Théorème de Lagrange . . . . .  | 8         |
| 2.5      | Sous-groupes finis de $k^\times$ et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ . . . . . | 8         |
| 2.6      | Groupes Quotients . . . . .   | 8         |
| <b>3</b> | <b>Groupes Abéliens de Type Fini</b>  | <b>10</b> |
| 3.1      | Caractères . . . . .  | 10        |
| 3.2      | Décomposition de Fourier finie . . . . .  | 10        |
| 3.3      | Structure des groupes abéliens finis . . . . .                                  | 10        |
| 3.4      | Existence . . . . .   | 10        |
| 3.5      | Exemple . . . . .   | 10        |
| 3.6      | Unicité . . . . .   | 11        |
| 3.7      | Groupes Abéliens de Type Fini . . . . .   | 11        |
| <b>4</b> | <b>Groupe Symétrique et Dévissage</b>   | <b>12</b> |
| 4.1      | Actions de Groupes . . . . .  | 12        |
| 4.2      | Groupes Symétriques et Alternés . . . . .                                       | 12        |
| 4.3      | Les suites exactes . . . . .  | 13        |
| 4.4      | Dévissage de $S_n$ . . . . .  | 13        |
| 4.5      | Commutateur et Groupes Dérivés . . . . .  | 13        |
| 4.6      | Dévissage en Produit Semi-Direct . . . . .                                      | 14        |
| <b>5</b> | <b>Groupes et Symétries</b>   | <b>15</b> |
| 5.1      | Sous-groupes Finis de $O(2)$ et $SO(3)$ . . . . .                               | 15        |
| 5.2      | Le Groupe $SP(1)$ . . . . .   | 16        |
| 5.2.1    | L'algèbre des quaternions de Hamilton . . . . .                                 | 16        |
| 5.2.2    | Le groupe $Sp(1)$ . . . . .   | 17        |
| 5.2.3    | L'espace euclidien $\mathbb{H}$ . . . . .                                       | 17        |
| 5.3      | Groupes Linéaires et Simplicité de $PSL_n(k)$ . . . . .                         | 17        |
| 5.3.1    | Transvections . . . . .   | 17        |
| 5.3.2    | Centre et Groupe Dérivé de $SL_n(k)$ . . . . .                                  | 17        |
| 5.3.3    | Le critère de Simplicité d'Iwasawa . . . . .                                    | 17        |
| 5.3.4    | Groupes Linéaires sur les Corps Finis . . . . .                                 | 17        |
| 5.4      | Le groupe $PGL_2(k)$ et quelques (iso)morphismes miraculeux . . . . .           | 18        |
| <b>6</b> | <b>Elements de structures des groupes finis</b>                                 | <b>18</b> |
| 6.1      | $p$ -groupes . . . . .  | 18        |
| 6.2      | Les Théorèmes de Sylow . . . . .  | 19        |
| 6.3      | Le Théorème de Schur-Zassenhaus . . . . .                                       | 19        |
| 6.4      | Théorèmes de Hall . . . . .   | 19        |
| 6.5      | Extensions et Cohomologie . . . . .   | 20        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>7</b> | <b>Arithmétique des Anneaux</b>                                     | <b>21</b> |
| 7.1      | Les anneaux $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ . . . . .                        | 21        |
| 7.2      | Divisibilité . . . . .  | 22        |
| 7.3      | Anneaux Factoriels . . . . .  | 22        |
| <b>8</b> | <b>Modules sur les Anneaux Principaux</b>                           | <b>22</b> |
| 8.1      | Modules sur un Anneau . . . . .                                     | 22        |
| 8.2      | Classes d'équivalence de matrices sur un anneau principal . . . . . | 23        |
| 8.3      | Modules de type fini sur un anneau principal . . . . .              | 23        |
| <b>9</b> | <b>Représentations Linéaires des Groupes Finis</b>                  | <b>24</b> |
| 9.1      | Représentations Linéaires . . . . .                                 | 24        |
| 9.2      | Le point de vue $k[G]$ -modules . . . . .                           | 24        |
| 9.3      | Décomposition en Irréductibles . . . . .                            | 25        |
| 9.4      | Théorie des Caractères . . . . .                                    | 26        |

# 1 Ensembles Quotients

## 1.1 Partitions et Relations d'Equivalence

**Définition 1.1.1.** Une partition d'un ensemble  $X$  est un ensemble de parties non vides de  $X$  de réunion disjointe  $X$ .

**Définition 1.1.2.** On appelle fibre d'une application  $f : X \rightarrow Y$  en  $y \in Y$  l'ensemble  $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$ . Il s'agit d'une partition de  $X$  indexée par  $Y$ . Toute partition de  $X$  s'obtient ainsi.

**Définition 1.1.3.** Une relation d'arité  $n$  sur un ensemble  $X$  est la donnée d'un ensemble  $R \subseteq X^n$ . Une relation binaire  $R$  i.e. une partie de  $X \times X$  est dite d'équivalence si elle est réflexive, transitive et symétrique. On appelle classe de  $R$ -équivalence de  $x$  l'ensemble  $[x]_R = \{y \in X \mid \{x, y\} \in R\}$

**Proposition 1.1.1.** Les classes d'équivalences d'une relation  $R$  sur  $X$  forment une partition de  $X$ .

**Définition 1.1.4.** Si  $R$  est une relation d'équivalence sur  $X$ , le sous-ensemble de  $P(X)$  constitué des classes de  $R$ -équivalence est appelé ensemble quotient de  $X$  par  $R$ , noté  $X/R$ . L'application  $\pi_R : X \rightarrow X/R, x \mapsto [x]_R$  est appelée projection canonique associée à  $R$ . C'est une surjection dont les fibres sont par définition les classes d'équivalences de  $R$ .

**Exemple 1.1.1.** On définit  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  l'ensemble quotient de  $\mathbb{Z}$  pour la relation  $n \mid b - a$ . On note  $\bar{k}$  la classe de  $k$ .

## 1.2 Passage au Quotient

**Théorème 1.2.1** (Propriété Universelle du Quotient). Soient  $f : X \rightarrow Y$  une application et  $R$  une relation d'équivalence sur  $X$ . On suppose que  $f$  est constante sur chaque classe d'équivalence sur  $X$ . Alors, il existe une unique application  $g : X/R \rightarrow Y$  telle que  $g([x]_R) = f(x)$  pour tout  $x \in X$ , i.e. vérifiant  $g \circ \pi_R = f$ .

*Proof.* Par surjectivité de  $\pi_R$ ,  $g$  est unique. De plus, si  $C$  est une classe de  $R$ -équivalence, il y a un sens à poser  $g(C) = f(x)$  car  $C$  est une classe d'équivalence sur laquelle  $f$  est constante. ■

## 1.3 Sections et systèmes de représentants

**Définition 1.3.1.** Une section de  $f : X \rightarrow Y$  est une application  $s : Y \rightarrow X$  telle que  $f \circ s = \text{id}_Y$

**Proposition 1.3.1.**  $f$  possède une section  $\Rightarrow f$  est surjective

**Définition 1.3.2** (Axiome du Choix). Pour tout ensemble  $X$  il existe une application  $\tau : P(X) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow X$  telle que  $\tau(E) \in E$  pour toute partie non vide  $E$  de  $X$ . On appelle  $\tau$  fonction de choix sur  $X$ .

**Proposition 1.3.2.** Les propositions suivantes sont équivalentes à l'axiome du choix (donc fausses):

1. Toute surjection admet une section.
2. Pour toute famille d'ensembles non vides  $\{X_i\}_{i \in I}$ ,  $\pi_{i \in I} X_i$  est non vide.

**Définition 1.3.3.** Un représentant d'une classe de  $R$ -équivalence d'un ensemble  $X$  est un élément de cette classe. Un système de représentants de  $(X, R)$  est la donnée d'une partie de  $X$  contenant un et un seul représentant de chaque classe de  $R$ -équivalence. C'est l'image d'une section de  $\pi_R$ .

**Remarque 1.3.0.1.** Ceci est également équivalent à 1.3.2

## 1.4 Lemme de Zorn

**Définition 1.4.1.** • Une relation d'ordre sur un ensemble  $X$  est une relation binaire  $\leq$  réflexive, transitive et antisymétrique. On dit alors que  $X$  est ordonné.

- L'ordre  $\leq$  est total quand tous deux éléments de  $X$  sont comparables.
- On appelle majorant d'une partie  $Y$  de  $X$ , tout élément  $x \in X$  tel que  $y \leq x$  pour tout  $y \in Y$ . On parle de plus grand élément dans le cas  $Y = X$ .
- $x \in X$  est un élément maximal si le seul  $y \in X$  tel que  $y \leq x$  est  $x$ . Un plus grand élément est nécessairement maximal, et unique s'il existe.
- On appelle  $X$  inductif si tout sous-ensemble totalement ordonné admet un majorant.
- On appelle bon ordre un ordre pour lequel toute partie non vide admet un plus petit élément.

**Théorème 1.4.1** (Lemme de Zorn). Un ensemble ordonné inductif possède au moins un élément maximal. Ceci est équivalent à l'axiome du choix 1.3.2.

**Corollaire 1.4.1.1.** Tout espace vectoriel possède une base.

**Corollaire 1.4.1.2** (Théorème de Zermelo). Tout ensemble peut être muni d'un bon ordre.

*Proof.* C'est équivalent à l'axiome du choix donc faux et les preuves prennent trois plombs. ■

## 2 Généralités sur les Groupes

### 2.1 Exemples de Groupes

**Définition 2.1.1.** Une loi de composition interne est une application  $\star : X \times X \rightarrow X$ .

**Définition 2.1.2** (Groupe). Un groupe est un ensemble  $G$  muni d'une loi de composition associative, unifière et inversible, i.e.:

1.  $\forall (x, y, z) \in G, x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$
2.  $\exists e \in G, \forall x \in G, e \star x = x \star e = x$ .
3.  $\forall x \in G, \exists y \in G, x \star y = y \star x = e$

**Remarque 2.1.0.1.** Le neutre est unique.

**Exemple 2.1.1** (Groupe Symétrique). On note :  $\mathfrak{S}_X = X^X$  le groupe muni de la loi  $\circ$  de composition des applications, appelé groupe symétrique de  $X$ , de neutre  $\text{id}_X$ . L'inverse d'une bijection  $\sigma$  est sa bijection réciproque  $\sigma^{-1}$ . On note  $\mathfrak{S}_n = |1, n|^{1, n!}$  et alors  $|\mathfrak{S}_n| = n!$ .

**Définition 2.1.3.** Un groupe est dit abélien lorsque tous deux éléments commutent.

**Définition 2.1.4.** Une partie  $H$  d'un groupe  $G$  est un sous-groupe de  $G$  lorsque la loi induite par le produit dans  $G$  fait de  $H$  un groupe. On le notera ici  $H \leq G$ .

**Exemple 2.1.2** (Groupes d'ordre  $n$ ). Pour  $n \geq 1$ , on note  $\mu_n$  le sous-groupe de  $\mathbb{C}^\times$  composé des racines  $n$ -ièmes de l'unité. C'est un sous-groupe d'ordre  $n$ . L'application  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mu_n, k \mapsto e^{2ik\pi/n}$  est un isomorphisme de groupe.

**Définition 2.1.5.** Un anneau est un groupe abélien  $(A, +)$  muni d'une loi associative unifière et distributive sur  $+$ , notée  $\times$ . Il est dit commutatif lorsque la loi produit est commutative.

**Définition 2.1.6.** On note  $A^\times$  le groupe des inversibles du monoïde  $(A, \cdot)$ .

**Proposition 2.1.1.** La loi d'un groupe vérifie les propriétés de la loi produit usuelle sur  $\mathbb{R}$ .

**Définition 2.1.7.** On appelle groupe engendré par une partie  $X$  de  $G$  le plus petit sous groupe de  $G$  contenant  $X$ . C'est l'ensemble des produits de puissances d'éléments de  $X$ .

### 2.2 Morphismes

**Définition 2.2.1.** On appelle morphisme une application entre deux groupes qui préserve le produit. On note  $\text{Hom}(G, G')$  l'ensemble des morphismes de  $G$  dans  $G'$ . Ce n'est à priori pas naturellement un groupe si  $G'$  n'est pas abélien.

On dit que  $G$  et  $G'$  sont isomorphes lorsqu'il existe un morphisme bijectif de l'un vers l'autre. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme. On note alors  $G \simeq G'$ .

**Proposition 2.2.1** (Transport de Structure). Si  $G$  est un groupe,  $\varphi : X \rightarrow G$  une bijection, il existe une unique loi de groupe sur  $X$  telle que  $\varphi$  soit un isomorphisme, à savoir  $x \star y = \varphi^{-1}(\varphi(x)\varphi(y))$ . On dit que la loi est déduite de celle de  $G$  par transport de structure via  $\varphi$ .

**Définition 2.2.2.** On appelle automorphisme de  $G$  un isomorphisme de  $G$  dans  $G$ . L'ensemble des automorphismes  $\text{Aut}(G)$  est un sous groupe de  $S_G$ . On appelle automorphisme intérieur associé à  $g \in G$  l'application :  $h \in G \mapsto ghg^{-1}$ .

**Définition 2.2.3.** On appelle noyau d'un morphisme  $\ker(f) = f^{-1}(1) = \{g \in G \mid f(g) = 1\}$ . C'est un sous-groupe de  $G$ .

**Proposition 2.2.2.** Si  $f \in \text{Hom}(G, G')$  :

1.  $H \leq G \Rightarrow f(H) \leq G'$

2.  $H \leq G' \Rightarrow f^{-1}(H) \leq G$  Avec  $\mathcal{A}$  l'ensemble des sous-groupes de  $G$  contenant  $\ker f$  et  $\mathcal{B}$  celui des sous-groupes de  $G'$  inclus dans  $\text{Im} f$ , alors :

3.  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, H \mapsto f(H)$  est une bijection croissante.

**Proposition 2.2.3.** Les fibres non vides de  $f$  sont en bijection avec  $\ker f$ . En particulier :

- $f$  injective  $\Leftrightarrow \ker f = \{1\}$ .
- Si  $G$  est fini,  $|G| = |\text{Im } f| |\ker f|$ .

**Théorème 2.2.1** (Cayley). Tout groupe d'ordre fini  $n$  est isomorphe à un sous-groupe de  $S_n$ .

**Lemme 2.2.2.** Si  $\varphi : X \rightarrow Y$  est bijective, l'application :  $\varphi_{X,Y} : S_X \rightarrow S_Y, \sigma \mapsto \varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1}$  est un isomorphisme de groupes.

**Définition 2.2.4.** Un morphisme d'anneau est un morphisme des groupes additifs et des monoïdes multiplicatifs (en particulier, il envoie 1 sur 1).

## 2.3 Groupes Cycliques et Monogènes

**Proposition 2.3.1.** Les sous-groupes de  $\mathbb{Z}$  sont les  $n\mathbb{Z}$ .

**Proposition 2.3.2.** Si  $g \in G$  est d'ordre fini  $n$ , alors  $\langle g \rangle$  a exactement  $n$  éléments et est isomorphe à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

**Définition 2.3.1.** Un groupe  $G$  est monogène s'il est engendré par un seul élément, appelé générateur. Il est cyclique s'il est fini.

**Corollaire 2.3.0.1.** Un groupe  $G$  est monogène infini si et seulement si il est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ . Il est cyclique d'ordre  $n \geq 1$  si et seulement si isomorphe à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

**Proposition 2.3.3** (Générateurs d'un Groupe Cyclique). • Les générateurs de  $\mathbb{Z}, +$  sont les  $k \in \mathbb{Z}$  tels que  $\mathbb{Z} = k\mathbb{Z}$ , i.e.  $k = \pm 1$ .

- Pour  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $G = \langle g \rangle$  un groupe cyclique d'ordre  $n$ , on a équivalence entre :

1.  $\langle g^k \rangle = G$
2.  $g \in \langle g^k \rangle$
3.  $\exists k' \in \mathbb{Z}, kk' = 1 \text{ mod } n$
4.  $\bar{k} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$
5.  $k \wedge n = 1$

**Corollaire 2.3.0.2.** Un groupe cyclique d'ordre  $n$  a exactement  $\varphi(n)$  générateurs.

**Corollaire 2.3.0.3.** Si  $G$  est cyclique d'ordre  $n$  :  $\text{Aut}(G) = \{g \mapsto g^k \mid k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\}$ . On a alors un isomorphisme de  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$  dans  $\text{Aut}(G)$ .

**Remarque 2.3.0.1.** Si  $g \in G$  est d'ordre fini  $n$ , si  $d \geq 1$ ,  $g^d$  est d'ordre fini  $\frac{n}{n \wedge d}$ .

**Proposition 2.3.4.** Si  $G$  est cyclique d'ordre  $n$ ,  $d \mapsto G_d = \{g^d \mid g \in G\}$  est une bijection de l'ensemble des diviseurs de  $n$  sur l'ensemble des sous-groupes de  $G$ .

**Théorème 2.3.1** (Chinois). Soient  $m, n \in \mathbb{Z}$  premiers entre eux. L'application  $\mathbb{Z} \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}), k \mapsto (k \text{ mod } n, k \text{ mod } m)$  définit un isomorphisme par passage au quotient de par la propriété universelle 1.2.1.

## 2.4 Théorème de Lagrange

**Définition 2.4.1.** Si  $A, B$  sont deux parties d'un groupe,  $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ . Si  $A = \{g\}$ , on le note  $gB$ .

**Lemme 2.4.1.**  $H \leq G \Leftrightarrow (H \neq \emptyset, HH = H, H^{-1} = H)$ .

**Définition 2.4.2.** On pose  $g \sim_H g'$  si  $g' \in gH$ . C'est une relation d'équivalence. On note  $G/H$  son ensemble quotient, et on appelle indice de  $H$  dans  $G$  son cardinal noté  $[G : H]$ .

**Théorème 2.4.2** (Lagrange). ?? Si  $H$  est un sous-groupe de  $G$ ,  $G \sim H \times (G/H)$ . En particulier, si deux des trois ensembles  $G, H, G/H$  sont finis,  $|G| = |H| [G : H]$ .

**Corollaire 2.4.2.1.** • Si  $H$  est un sous-groupe du groupe fini  $G$ ,  $|H| \mid |G|$ .

- Si  $G$  est fini,  $g \in G$ ,  $g^{|G|} = 1$ .
- $n^{p-1} \cong 1 \pmod p$  pour  $n \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{P}$ .
- Tout groupe d'ordre premier  $p$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

**Théorème 2.4.3** (Cauchy). Soit  $G$  un groupe fini,  $p$  un nombre premier divisant  $|G|$ .  $G$  possède un élément d'ordre  $p$ . Si  $G$  est abélien, on peut généraliser immédiatement à tout  $p \in \mathbb{Z}$ .

## 2.5 Sous-groupes finis de $k^\times$ et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$

**Théorème 2.5.1.** Si  $k$  est un corps, tout sous-groupe fini de  $k^\times$  est cyclique.

**Lemme 2.5.2** (Cauchy). Soit  $G$  un groupe,  $x, y$  deux éléments qui commutent d'ordres  $a$  et  $b$  premiers entre eux. Alors,  $xy$  est d'ordre  $ab$ .

**Théorème 2.5.3** (Gauss). Pour  $p$  premier, le groupe  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$  est cyclique.

**Définition 2.5.1.** Un isomorphisme de groupes  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\text{times}} \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$  est appelé un logarithme discret.

**Définition 2.5.2.** Pour un groupe, on note  $G^{(n)}$  le groupe des puissances  $n$ -ièmes.

**Proposition 2.5.1.** Soient  $p \in \mathbb{P}$ ,  $n \geq 1$  et  $m = (p-1) \wedge n$ .

1.  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times, (n)}$  est cyclique d'ordre  $\frac{p-1}{m}$  et égal à  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times, (m)}$
2. Pour  $x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ , on a  $x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times, (n)}$  si et seulement si  $x^{\frac{p-1}{m}} = 1$ , i.e.  $X^{\frac{p-1}{m}}$  a au plus  $\frac{p-1}{m}$  racines dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  et donc ses racines sont exactement les puissances  $n$ -èmes.

**Proposition 2.5.2.** Si  $p$  est premier impair,  $m \geq 1$ , alors  $(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times$  est cyclique. Si  $m \geq 2$ ,  $(\mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{m-2}\mathbb{Z}$

## 2.6 Groupes Quotients

**Définition 2.6.1.** Un sous-groupe  $H$  de  $G$  est dit distingué, noté  $H \triangleleft G$  si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

1.  $gHg^{-1} \subset H, \forall g \in G$
2.  $gHg^{-1} = H, \forall g \in G$
3.  $gH = Hg, \forall g \in G$ .

**Remarque 2.6.0.1.** Tous les sous-groupes d'un groupe abélien sont distingués. Un groupe d'indice 2 dans  $G$  est distingué.

**Définition 2.6.2.** Le normalisateur de  $H$  dans  $G$  est le sous-groupe de  $G$  défini par  $N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ .



**Théorème 2.6.1.** *Soit  $H$  un sous groupe d'un groupe  $G$ .*

1. *Il existe au plus une loi de groupe sur  $G/H$  telle que la projection canonique  $G \rightarrow G/H$  soit une loi de groupe.*
2. *Une telle loi existe si, et seulement si, on a  $H \triangleleft G$ , auquel cas c'est la loi induite par le produit sur  $P(G)$ .*

**Définition 2.6.3.** *Si  $H \triangleleft G$ , le groupe quotient  $G/H$  est la donnée de l'ensemble  $G/H$  muni de son unique loi de groupe telle que la projection canonique est un morphisme de groupes.*

**Définition 2.6.4.** *On pose  $\left(\frac{x}{p}\right) = 1$  si  $x$  est un carré non nul, 0 si  $x$  est nul et  $-1$  sinon.  $x \mapsto \left(\frac{x}{p}\right)$  est un morphisme multiplicatif.*

On va étudier les groupes en cherchant à étudier des groupes plus simples : étant donné un groupe  $G$ , on cherche  $H \subsetneq G$  un groupe distingué non trivial pour étudier  $H$  et  $G/H$ , d'ordres plus petits.

**Définition 2.6.5.** *Un groupe  $G$  est dit simple si ses seuls groupes distingués sont  $\{1\}$  et  $G$ .*

**Théorème 2.6.2** (Propriété Universelle des Groupes Quotients). *Si  $H \triangleleft G$ , et si  $f : G \rightarrow G'$  est un morphisme,  $g = f \circ \pi$  est un morphisme de  $G/H$  dans  $G'$  tel que  $g(H) = 1$ .*

**Théorème 2.6.3** (Premier Théorème d'Isomorphisme). *Si  $f$  est un morphisme de  $G$  dans  $G'$ , alors  $f$  induit par passage au quotient un isomorphisme de groupes de  $G/\ker f$  dans  $\text{Im} f$*

**Proposition 2.6.1** (Troisième Théorème d'Isomorphisme). *Soit  $H \triangleleft G$  :*

1.  *$H \mapsto K/H$  induit une bijection croissante entre sous groupes de  $G$  contenant  $H$  et sous groupes de  $G/H$ .*
2. *Dans cette bijection,  $K/H \triangleleft G/H \Leftrightarrow K \triangleleft G$  auquel cas le morphisme naturel  $G/H \rightarrow G/K$  induit un isomorphisme  $(G/H)/(K/H) \rightarrow G/K$ .*

### 3 Groupes Abéliens de Type Fini

#### 3.1 Caractères

**Définition 3.1.1.** Un caractère d'un groupe  $G$  est un morphisme de  $G$  dans  $\mathbb{C}^\times$ .

**Proposition 3.1.1.** Soit  $G = \langle g \rangle$  un groupe cyclique d'ordre  $n$ . Pour  $\zeta \in \mu_n$ , il existe un unique caractère  $\chi_\zeta$  de  $G$  tel que  $\chi_\zeta(g) = \zeta$ . De plus,  $\zeta \mapsto \chi_\zeta$  est un isomorphisme de groupes.

#### 3.2 Décomposition de Fourier finie

**Définition 3.2.1.** Si  $G$  est un groupe fini, on note  $L^2(G)$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions  $G \rightarrow \mathbb{C}$  muni du produit hermitien. C'est un espace de dimension finie  $|G|$ . On note  $\hat{G}$  l'ensemble des caractères de  $G$ . On rappelle que  $\mathbb{C}^\times$  étant abélien,  $\hat{G} = \text{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$

**Théorème 3.2.1.** Soit  $G$  un groupe fini.

1. L'ensemble  $\hat{G}$  est une famille libre et orthonormée de  $L^2(G)$  (Orthogonalité des Caractères)
2. Si  $G$  est abélien,  $\hat{G}$  est une base de  $L^2(G)$ .

**Corollaire 3.2.1.1.** Soit  $G$  abélien fini

1. On a  $|\hat{G}| = |G|$
2. Pour toute fonction  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  on a  $f = \sum_{\chi \in \hat{G}} \langle f, \chi \rangle \chi$

**Proposition 3.2.1.** Soit  $G$  abélien fini,  $H \subset G$  un sous-groupe. Pour tout caractère  $\chi$  de  $H$ , il existe  $\tilde{\chi}$  de  $G$  tel que  $\chi|_H = \tilde{\chi}$

**Définition 3.2.2.** Un groupe abélien  $D$  est divisible si le morphisme de groupes  $x \mapsto x^n$  est surjectif pour tout  $n \geq 1$ .

**Proposition 3.2.2** (Prolongement des Morphismes). Soient  $G, H, D$  des groupes abéliens avec  $D$  divisible,  $H \subset G$  et  $f : H \rightarrow D$  un morphisme de groupes. Alors il existe un morphisme de groupes  $\tilde{f} : G \rightarrow D$  tel que  $\tilde{f}|_H = f$ .

#### 3.3 Structure des groupes abéliens finis

**Théorème 3.3.1.** Soit  $G$  abélien fini, il existe un unique entier  $n \geq 0$  et des uniques entiers  $a_i > 1$  vérifiant  $a_1 \mid a_2 \mid \dots \mid a_n$  et  $G \simeq \prod_{i=1}^n \mathbb{Z}/a_i\mathbb{Z}$ .

**Définition 3.3.1.** L'exposant d'un groupe fini  $G$  est le plus petit entier  $e \geq 1$  vérifiant  $g^e = 1$  pour tout  $g \in G$ . C'est le ppcm des ordres des éléments de  $G$ .

#### 3.4 Existence

**Lemme 3.4.1.** Si  $G$  est abélien fini, il existe un élément d'ordre l'exposant.

**Proposition 3.4.1.** Soit  $G$  un groupe,  $H \leq G, K \leq G$ . On suppose  $H \cap K = 1$ ,  $G = HK$  et enfin  $hk = kh$  pour tout  $h \in H, k \in K$ . L'application produit sur  $H \times K$  définit un isomorphisme de groupes.

De ces deux propositions, on peut prouver la partie existence du théorème.

#### 3.5 Exemple

**Définition 3.5.1.** Soit  $p$  un nombre premier. Un groupe abélien fini est  $p$ -élémentaire si on a  $g^p = 1$  pour tout  $g \in G$ .

**Définition 3.5.2.** On définit  $G^\sharp$  le  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -espace vectoriel dont  $G$  est le groupe additif.

**Proposition 3.5.1.** Soit  $p$  premier,  $G$  abélien fini.  $G$  est  $p$ -élémentaire si et seulement si  $G \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$  pour un certain  $n \geq 1$ . Le nombre minimal de générateurs de  $G$  est  $\dim_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} G^\sharp$ .

### 3.6 Unicité

**Définition 3.6.1.** On note  $\min(G)$  le nombre minimal de générateurs de  $G$ . Il est fini si et seulement si  $G$  est de type fini.

**Proposition 3.6.1.** Supposons qu'on écrit une décomposition de  $G$  comme dans le théorème 3.3.1. On a  $n = \min(G)$

**Définition 3.6.2.** Soit  $G$  abélien. Le sous-ensemble  $G[n] = \{g^n = 1\}$  est un sous groupe de  $G$  appelé  $n$ -torsion de  $G$ .

**Lemme 3.6.1.** Soit  $G$  et  $H$  abéliens et  $n \geq 1$ .

1. On a  $(G \times H)[n] = G[n] \times H[n]$
2. Tout (iso-)morphisme  $G \rightarrow H$  induit un (iso-)morphisme  $G[n] \rightarrow H[n]$ .
3. Supposons  $G$  cyclique d'ordre  $m$  et  $p$  premier. Alors  $G[p] = \{1\}$  sauf si  $p \mid m$  auquel cas  $G[p] \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  et  $G/G[p] \simeq \mathbb{Z}/m/p\mathbb{Z}$ .

### 3.7 Groupes Abéliens de Type Fini

On note ici  $G$  un groupe abélien additif

**Définition 3.7.1.** Soit  $\mathcal{F} = \{g_1, \dots, g_n\}$  une famille d'éléments de  $G$  et

$$f : \mathbb{Z}^n \rightarrow G, (m_i) \mapsto \sum_{i=1}^n m_i g_i$$

On dit que  $\mathcal{F}$  est libre (ou  $\mathbb{Z}$ -libre) si  $f$  est injectif. On dit que  $\mathcal{F}$  est génératrice si  $f$  est surjectif, et est une base si  $f$  est bijectif.

**Définition 3.7.2.** Un groupe abélien est dit libre de rang  $n$  s'il possède une  $\mathbb{Z}$  base à  $n$  éléments, i.e. s'il est isomorphe à  $\mathbb{Z}^n$ . Par conventions,  $\{0\}$  est libre de rang 0.

**Lemme 3.7.1.** Pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $\min(\mathbb{Z}^n) = n$ . En particulier,  $\mathbb{Z}^n \simeq \mathbb{Z}^m \Leftrightarrow n = m$ .

**Définition 3.7.3.** On appelle sous-groupe de torsion de  $G$ , le sous-groupe de  $G$  noté  $G_{\text{tor}} = \{g \in G \mid \exists n \geq 1, ng = 0\}$

**Théorème 3.7.2** (Dirichlet). Si  $G$  est abélien de type fini,  $G_{\text{tor}}$  est fini et il existe un unique  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $G \simeq G_{\text{tor}} \times \mathbb{Z}^n$ .

**Corollaire 3.7.2.1.** Un groupe abélien de type fini sans torsion est libre

**Lemme 3.7.3.** Si  $f : G \rightarrow \mathbb{Z}$  est surjectif,  $G \simeq \mathbb{Z} \times \ker f$ .

**Lemme 3.7.4.** Si  $A, B$  sont deux groupes abéliens avec  $A$  fini et  $B$  libre de rang fini, alors, avec  $G = A \times B : G_{\text{tor}} = A \times \{0\}$  et  $G/G_{\text{tor}} \simeq B$ .

## 4 Groupe Symétrique et Dévissage

### 4.1 Actions de Groupes

**Définition 4.1.1.** Une action de  $G$  sur  $X$  est une application  $\cdot : G \times X \rightarrow X$  vérifiant :  $1 \cdot x = x$  et  $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ .

**Définition 4.1.2.** Soit  $G$  agissant sur  $X$ , et  $x \in X$ .

- $O_x = \{gx \mid g \in G\} \subset X$  est l'orbite de  $x$  sous  $G$ , aussi notée  $Gx$ .
- Le sous-groupe  $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$  est appelé stabilisateur de  $x$  ou groupe d'isotropie de  $x$ , noté  $\text{Stab}_G(x)$ .

**Lemme 4.1.1.** On a :  $G_{gx} = gG_xg^{-1}$ .

**Proposition 4.1.1.** • Les orbites sous  $G$  forment une partition de  $X$ .

- Pour tout  $x \in X$ , on a une bijection  $G/G_x \xrightarrow{\sim} O_x$  envoyant  $gG_x$  sur  $gx$ . En particulier, si  $G$  est fini, on a  $|G| = |G_x| |O_x|$ .

**Corollaire 4.1.1.1.** On note  $x_i$  des représentants des orbites de  $G$  dans  $X$ . On a :

$$|X| = \sum_{i \in I} |O_{x_i}| = \sum_{i \in I} |G| / |G_{x_i}|$$

**Théorème 4.1.2** (Premier Théorème de Sylow). Soit  $G$  fini d'ordre  $p^n m$  avec  $p$  premier et  $m \wedge p = 1$ . Alors  $G$  possède un sous-groupe d'ordre  $p^n$ , appelé un  $p$ -Sylow de  $G$ .

**Définition 4.1.3.** Une action de  $G$  sur  $X$  est transitive si on a  $X \neq \emptyset$  et si  $\forall x, y \in X, \exists g \in G, y = gx$ , i.e. que  $X$  a une et une seule orbite sous l'action de  $G$ .

**Définition 4.1.4.** Le noyau d'une action est le noyau du morphisme  $G \rightarrow S_X$  associé à l'action. C'est un sous-groupe distingué de  $G$ . Une action est dite fidèle si son noyau est  $\{1\}$ .

**Définition 4.1.5.** Une action est libre si on a toujours  $G_x = \{1\}$ .

**Définition 4.1.6.** Deux actions d'un même groupe sur deux ensembles  $X$  et  $Y$  sont isomorphes s'il existe une bijection  $f$  vérifiant  $f(g \cdot x) = g \star f(x)$ .

**Proposition 4.1.2.** Une action transitive  $(X, \cdot)$  est isomorphe à l'action par translations de  $G$  sur  $G/G_x$ .

**Proposition 4.1.3.** Deux actions transitives sont isomorphes si et seulement si elles ont les mêmes stabilisateurs.

### 4.2 Groupes Symétriques et Alternés

**Proposition 4.2.1.** Toute permutation  $\sigma$  de  $S_n$  s'écrit comme un produit de cycles à supports disjoints. L'ordre de  $\sigma$  est alors le ppcm des longueurs des cycles.

**Proposition 4.2.2.** Les transpositions engendrent  $S_n$ .

**Lemme 4.2.1.** Si  $\sigma \in S_n, c = (i_1, \dots, i_k)$  est un  $k$ -cycle :  $\sigma c \sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k))$ .

**Proposition 4.2.3.** • Les  $(i, i+1)$  engendrent  $S_n$ . Ils sont appelés générateurs de Coxeter.

- La transposition  $(1, 2)$  et le cycle  $(12 \dots n)$  engendrent  $S_n$ .  
En particulier,  $\text{min } S_n = 2$ .

**Définition 4.2.1.** • Une partition de l'entier  $n$  est une suite décroissante  $n_1 \geq \dots \geq n_r$  d'entiers strictement positifs de somme  $n$ .

- Le type de  $\sigma \in S_n$  est la partition de l'entier  $n$  définie par les cardinaux des orbites de  $\sigma$ .

**Proposition 4.2.4.** Deux éléments de  $S_n$  sont conjugués si et seulement si ils ont même type.

**Définition 4.2.2.** Pour  $k \geq 1$  entier,  $G$  agissant sur  $X$  avec  $|X| \geq k$ ,  $G$  agit  $k$ -transitivement sur  $X$  si pour deux  $k$ -uplets d'éléments distincts de  $X$  il existe  $g \in G$  tel que  $gx_i = y_i$  pour tout  $i$ .

**Définition 4.2.3.** La signature de  $\sigma \in S_n$  est :

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{\{i,j\}} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

C'est un morphisme de groupes  $S_n \rightarrow \{\pm 1\}$  valant  $-1$  sur les transpositions. On note  $A_n$  son noyau. C'est un sous-groupe distingué.

**Proposition 4.2.5.** Pour  $n \geq 3$ ,  $A_n$  agit  $(n-2)$ -transitivement sur  $|1, n|$ . Les  $k$ -cycles sont conjugués sous l'action de  $A_n$  pour  $k \in |2, n-2|$ .

### 4.3 Les suites exactes

**Définition 4.3.1.** Une suite de  $n \geq 2$  morphismes de groupes  $(f_1, \dots, f_n)$  est exacte si  $\text{Im } f_i = \ker f_{i+1}$  pour tout  $i$ .

**Définition 4.3.2.** Une suite exacte de la forme  $1 \rightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} K \rightarrow 1$  est une suite exacte courte.

**Proposition 4.3.1.** Il est équivalent de se donner :

- Une suite exacte  $1 \rightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} K \rightarrow 1$
- Un sous-groupe distingué  $H' \subset G$  et des isomorphismes  $i' : H \xrightarrow{\sim} H'$  et  $\pi' : G/H' \xrightarrow{\sim} K$ .

**Définition 4.3.3** (Groupe diédral). Pour  $n \geq 3$ , on définit le groupe diédral  $D_{2n}$  comme le sous-groupe de  $S_n$  engendré par  $(12 \dots n)$  et l'élément  $\tau$  défini par  $\tau(i) = n+1-i$ .

**Définition 4.3.4.** Si  $G, H, K$  sont des groupes donnés,  $G$  est extension de  $K$  par  $H$  s'il existe une suite exacte courte  $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow K \rightarrow 1$ .

### 4.4 Dévissage de $S_n$

**Théorème 4.4.1.** Les seuls sous-groupes distingués de  $S_n$  sont  $\{1\}$ ,  $A_n$ ,  $S_n$  et  $K_4$  dans le cas  $n = 4$ .

**Théorème 4.4.2.** Pour  $n \geq 5$ ,  $A_n$  est simple non abélien.

**Corollaire 4.4.2.1.** • Pour  $n \neq 4$ , toute action de  $A_n$  est fidèle ou triviale.

- Une action transitive de  $S_n$  sur un ensemble à  $m > 2$  éléments est fidèle, sauf peut-être si  $n = 4$  et  $m = 3$  ou  $6$ .

### 4.5 Commutateur et Groupes Dérivés

**Définition 4.5.1.** Le groupe dérivé d'un groupe  $G$  est le sous-groupe  $D(G) = [G, G]$  engendré par les  $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ . On a  $D(G) = \{1\}$  si et seulement si  $G$  est abélien.

**Corollaire 4.5.0.1.**  $D(G)$  est un sous-groupe caractéristique de  $G$ .

**Corollaire 4.5.0.2.** Soit  $G$  un groupe.

- Tout morphisme  $f : G \rightarrow G'$  avec  $G'$  abélien vérifie  $D(G) \subset \ker f$ .
- Pour  $H \triangleleft G$  alors  $G/H$  est abélien si et seulement si,  $D(G) \subset H$ .

**Proposition 4.5.1.** On a :

- $D(S_n) = A_n$
- $D(A_n) = A_n$  pour  $n \geq 5$ .
- $D(A_4) = K_4$  et  $D(A_n) = \{1\}$  pour  $n \leq 3$

**Définition 4.5.2.** Un groupe  $G$  est résoluble s'il existe  $n$  tel que  $D^n(G) = \{1\}$ . Le plus petit  $n$  est appelé classe de résolubilité de  $G$ .

**Proposition 4.5.2.** Si  $G$  est un groupe et  $H \triangleleft G$ ,  $G$  est résoluble si et seulement si  $H$  et  $G/H$  le sont. Alors, la classe de  $G$  est inférieure à la somme des classes de  $H$  et de  $G/H$ .

**Proposition 4.5.3.** Le groupe  $T_n(k)$  est résoluble de classe  $\leq 1 + \lceil \log_2(n) \rceil$ .

## 4.6 Dévissage en Produit Semi-Direct

**Définition 4.6.1.** Si  $H \leq G$ , un complément de  $H$  dans  $G$  est  $K \leq G$  tel que  $G = HK$  et  $H \cap K = \{1\}$

**Remarque 4.6.0.1.** Soit  $N \triangleleft G$ , et  $K$  un complément de  $N$  dans  $G$ . Pour tout  $n, n' \in N$ ,  $k, k' \in K$ , on a :

$$(nk)(n'k') = n(kn'k^{-1})kk' \text{ avec } kn'k^{-1} \in N$$

Autrement dit :

$$(nk)(n'k') = n \text{int}_k(n')kk'$$

La structure de groupe de  $G$  se déduit de celle de  $N$ ,  $K$  et de la connaissance de l'application :  $\alpha : k \in K \mapsto \text{int}_{k|N}$

On se fixe dans la suite deux tels groupes  $N$  et  $K$ , et un morphisme de groupe  $\alpha$  de  $K$  dans  $\text{Aut}(N)$ .

**Définition 4.6.2.** La loi  $\star_\alpha : (N \times K) \times (N \times K) \rightarrow N \times K, (n, k), (n', k') \mapsto (n\alpha_k(n'), kk')$  est une loi de groupe, qui munit  $N \times K$  d'une structure de groupe noté  $N \rtimes_\alpha K$  et appelé produit semi-direct (externe) de  $K$  par  $N$  associé à  $\alpha$ .

**Proposition 4.6.1.** Soit  $G$  un groupe,  $N \triangleleft G$  et  $K$  un complément de  $N$  dans  $G$ . Soit  $\alpha : K \rightarrow \text{Aut}(N), k \mapsto \alpha_k$ . La bijection  $N \times K \rightarrow G, (n, k) \mapsto nk$  est un isomorphisme de groupes :  $N \rtimes_\alpha K \xrightarrow{\sim} G$ . On dit aussi que  $G$  est produit semi-direct interne de  $K$  par  $N$

**Proposition 4.6.2** (Suivi des Isomorphismes). Soit  $G = N \rtimes_\alpha K$ ,  $a : N' \xrightarrow{\sim} N$  et  $b : K' \xrightarrow{\sim} K$  des isomorphismes. La bijection  $N' \times K' \rightarrow G, (n', k') \mapsto a(n')b(k')$  est un isomorphisme de groupes de  $N' \rtimes_{\alpha'} K'$  dans  $G$ , où  $\alpha' : k' \mapsto \alpha_{k'} = a^{-1} \circ \alpha_{b(k')} \circ a$ .

**Proposition 4.6.3.** Un groupe d'ordre  $2p$  avec  $p$  premier impair est soit isomorphe à  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  soit à  $D_{2p}$ .

**Proposition 4.6.4.** Les groupes non abéliens d'ordre  $\leq 8$  sont  $S_3$ ,  $D_8$  et  $H_8$ .

## 5 Groupes et Symétries

### 5.1 Sous-groupes Finis de $O(2)$ et $SO(3)$

. Ici,  $E$  est un espace euclidien de dimension  $n \geq 1$

**Définition 5.1.1.** On définit la réflexion par rapport à  $H$  un hyperplan de  $E$ , l'application  $s_H \in O(E)$  définie par :  $s_H(h + d) = h - d$  où  $h, d \in H \times H^\perp$ . Pour  $v \in E$  non nul, on appelle aussi réflexion de vecteur  $v$  la réflexion  $s_v = s_{v^\perp}$ .

**Théorème 5.1.1** (Cartan-Dieudonné). Tout élément de  $O(E)$  est produit d'au plus  $n$  réflexions. En particulier, tout élément de  $SO(E)$  est produit d'au plus  $n/2$  produits de deux réflexions.

**Remarque 5.1.1.1.**  $SO(2)$  est isomorphe au groupe  $S^1$  des rotations du plan. On peut également montrer que  $O(2) \simeq SO(2) \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  avec  $\alpha_1(g) = g^{-1}$ .

**Corollaire 5.1.1.1.** Tout élément non trivial de  $SO(3)$  possède une et une seule droite fixe dans  $E$ .

**Lemme 5.1.2.** Si  $g \in O(E)$  préserve  $F \subset E$ , il préserve  $F^\perp$ .

**Définition 5.1.2.** Pour  $P \subset E$ , on note  $\text{Iso}(P) = \{g \in O(E) \mid g(P) = P\}$  le sous-groupe des isométries orthogonales de  $P$ .

**Définition 5.1.3.** On note  $\mathcal{P}_m$  un polygone régulier du plan à  $m \geq 3$  côtés centré en 0.

**Proposition 5.1.1.**  $\text{Iso}(\mathcal{P}_m)$  agit sur l'ensemble  $\mathcal{S}$  des sommets de  $\mathcal{P}_m$ , puisque ce sont les points à distance maximale de 0. Cette action définit un morphisme  $f$  qui induit un isomorphisme  $\text{Iso}(\mathcal{P}_m) \xrightarrow{\sim} D_{2m}$ . De plus,  $\text{Iso}^+(\mathcal{P}_m) \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ .

En considérant les groupes d'isométries de figures planes bien choisies, on trouve trois autres classes de conjugaison.

**Proposition 5.1.2.** Soit  $G \leq O(2)$  fini. Alors, soit  $G$  est isomorphe à 1,  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ou  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ , soit il existe un polygone régulier  $\mathcal{P}$  du plan euclidien tel que  $G = \text{Iso}(\mathcal{P})$  ou  $G = \text{Iso}^+(\mathcal{P})$ .

**Remarque 5.1.2.1.** Le groupe des isométries de  $[-1, 1] \times \{0\}$  est isomorphe à  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ , qu'on note parfois  $D_4$ .

**Définition 5.1.4.**  $G \leq O(E)$  est dit irréductible, s'il n'existe aucun sous-espace non-dégénéré stable par  $G$ .

On suppose désormais  $n = 3$ .

**Remarque 5.1.2.2.** Un groupe est irréductible s'il stabilise un plan ou, de manière équivalente, une droite. On a donc un morphisme injectif diagonal :  $O(2) \rightarrow SO(3)$

$$g \mapsto \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & \det g \end{pmatrix}$$

**Définition 5.1.5.** Soit  $P \subset E$  un solide de Platon<sup>1</sup>. On définit ses sommets, ses arêtes et ses faces comme ses parties extrémales de dimension 0, 1 et 2 :

$$\forall x, y \in P, ]x, y[ \cap F \neq \emptyset \Rightarrow [x, y] \subset F$$

L'action de  $\text{Iso}(P)$  préserve l'ensemble  $\mathcal{S}$  des sommets, celui  $\mathcal{A}$  des arêtes et celui  $\mathcal{F}$  des faces. On note que l'action de  $\text{Iso}(P)$  sur  $\mathcal{S}$  engendre  $E$ . Notons que dès que  $-1 \in \text{Iso}(P)$ ,  $\text{Iso}(P) = \{\pm 1\} \times \text{Iso}^+(P)$ .

• LE TÉTRAÈDRE RÉGULIER  $T$  : En regardant l'action sur les sommets, on obtient :

**Proposition 5.1.3.**  $\text{Iso}(T) \simeq S_4$  et  $\text{Iso}^+(T) \simeq A_4$ .

---

<sup>1</sup>polyèdre régulier

Le déterminant sur  $\text{Iso}(T)$  correspond à la signature sur  $S_4$ . En regardant de plus les paires d'arêtes orthogonales, on fournit un morphisme  $\text{Iso}(T) \rightarrow S_3$ .

- LE CUBE ou HEXAÈDRE RÉGULIER  $C$  : En regardant l'action sur les paires de sommets, on obtient :

**Proposition 5.1.4.**  $\text{Iso}^+(C) \simeq S_4$  et  $\text{Iso}(C) = \{\pm 1\} \times \text{Iso}^+(C)$ .

En considérant l'action sur les paires de faces opposées, on retrouverait un morphisme  $S_4 \rightarrow S_3$ .

- L'OCTAÈDRE RÉGULIER  $O$  : En regardant les centres des faces, on trouve un cube  $C$  appelé cube dual et dont les centres des faces sont les sommets d'un nouvel octaèdre  $O'$ . On en déduit que :

**Proposition 5.1.5.**  $\text{Iso}(O) = \text{Iso}(C) = \text{Iso}(O')$

- LE DODÉCAÈDRE RÉGULIER  $D$  : En regardant l'action sur les sommets, et en regardant les triplets de diarête<sup>2</sup> deux à deux orthogonales, on obtient :

**Proposition 5.1.6.**  $\text{Iso}^+(D) \simeq A_5$  et on conclut car  $-1 \in \text{Iso}(P)$ .

- L'ICOSAÈDRE RÉGULIER  $I$  : On vérifie comme pour le cube que le dual de  $I$  est un dodécaèdre et que l'on a :

**Proposition 5.1.7.**  $\text{Iso}(I) = \text{Iso}(D)$ .

En regardant l'action sur les faces opposées, on retrouve l'action sur les pentagones mystiques.

**Théorème 5.1.3** (Klein). *Tout sous-groupe fini irréductible de  $SO(3)$  est le groupe des isométries directes d'un solide de Platon, et donc isomorphe à  $A_4, S_4$  ou  $A_5$ .*

**Lemme 5.1.4** (Burnside-Frobenius). *Soit  $G$  fini agissant sur un ensemble fini  $X$ . On note  $r$  le nombre de  $G$ -orbites dans  $X$  et pour  $g \in G$  on note  $\text{Fix}(g)$  l'ensemble des points fixes de  $g$  dans  $X$ . On a alors :*

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$$

**Lemme 5.1.5.** *Si  $G \leq SO(3)$  est fini, soit  $X \subset S^2$  l'ensemble des pôles<sup>3</sup> des éléments non triviaux de  $G$ , soient  $x_1, \dots, x_r$  des représentants des orbites de  $G$  dans  $X$  et  $n_i = |G_{x_i}|$  triés dans l'ordre croissant. Alors, on a soit  $r = 2$ ,  $|X| = 2$  et  $G = G_{x_1} = G_{x_2}$  soit  $r = 3$  et  $|G|$  et les  $n_i$  sont données par :*

| $ G $ | $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | $ O_{x_1} $ | $ O_{x_2} $ | $ O_{x_3} $ | $ X $  |
|-------|-------|-------|-------|-------------|-------------|-------------|--------|
| $2m$  | 2     | 2     | $m$   | $m$         | $m$         | 2           | $2m+2$ |
| 12    | 2     | 3     | 3     | 6           | 4           | 4           | 14     |
| 24    | 2     | 3     | 4     | 12          | 8           | 6           | 26     |
| 60    | 2     | 3     | 5     | 30          | 20          | 12          | 60     |

## 5.2 Le Groupe $SP(1)$

### 5.2.1 L'algèbre des quaternions de Hamilton

**Définition 5.2.1.** *On se place dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  et considère :*

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } K = IJ = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

---

<sup>2</sup>couples d'arêtes parallèles

<sup>3</sup>couples de points fixes



On définit alors  $\mathbb{H} = \text{Vect}_{1,I,J,K}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

On définit de plus :

$$t(q) = \text{Tr}(q), n(q) = \det q \text{ et } q^\star = {}^t\bar{q} = t(q)1 - q \in \mathbb{H}$$

**Proposition 5.2.1.**  $\mathbb{H}$  est un corps gauche de centre  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 5.2.2** (Cayley - Hamilton). Par théorème de Cayley-Hamilton sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  :  $q^2 t(q)q + n(q)1 = 0$  ce qui ici vaut :

$$qq^\star = q^\star q = n(q)1$$

### 5.2.2 Le groupe $Sp(1)$

**Définition 5.2.2.** On pose  $Sp(1) = \{q \in \mathbb{H} \mid n(q) = 1\}$ . C'est un sous-groupe de  $\mathbb{H}^\times$

**Remarque 5.2.0.1.** L'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{H} \\ (t, x, y, z) &\mapsto t + xI + yJ + zK \end{aligned}$$

identifie la sphère unité euclidienne  $S^3$  à  $Sp(1)$ , ce qui munit  $S^3$  d'une loi de groupe non commutative par transfert de structure. On sait que  $S^1$  et  $S^3$  sont les deux seules sphères euclidiennes que l'on peut munir d'une loi de groupe topologique.

**Remarque 5.2.0.2.**  $Sp(1)$  s'identifie à  $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$  de  $SL_2(\mathbb{C})$ .

**Proposition 5.2.3.** Par décomposition polaire :  $\mathbb{H}^\times = \mathbb{R}_{>0} \times Sp(1)$

**Proposition 5.2.4.** L'élément  $-1$  est l'unique élément d'ordre 2 de  $Sp(1)$

**Proposition 5.2.5.** Un élément  $q \in Sp(1)$  est d'ordre  $m > 2$  si et seulement si  $t(q) = 2 \cos(2k/m)$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  et  $k \wedge m = 1$

### 5.2.3 L'espace euclidien $\mathbb{H}$

**Définition 5.2.3.** On définit sur  $\mathbb{H}$  un produit scalaire réel par  $\langle \cdot \rangle q, q' = \frac{1}{2}t(q^\star q')$

**Proposition 5.2.6.** L'application  $Sp(1) \times Sp(1) \rightarrow O(\mathbb{H})$  qui à  $(q_1, q_2) \mapsto L_{q_1}R_{q_2}$  est un morphisme d'image  $SO(\mathbb{H})$  et de noyau  $\langle (-1, -1) \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  où  $L_q$  désigne la translation à gauche par  $q$  et  $R_q$  la translation à droite.

**Proposition 5.2.7.** L'application  $Sp(1) \rightarrow SO(\mathbb{H}^0)$ ,  $q \mapsto \text{int}_{q|_{\mathbb{H}^0}}$  ou  $\mathbb{H}^0 = 1^\perp = \{q \in \mathbb{H} \mid t(q) = 0\}$ .

## 5.3 Groupes Linéaires et Simplicité de $PSL_n(k)$

### 5.3.1 Transvections

### 5.3.2 Centre et Groupe Dérivé de $SL_n(k)$

### 5.3.3 Le critère de Simplicité d'Iwasawa

### 5.3.4 Groupes Linéaires sur les Corps Finis

**Lemme 5.3.1.** Soit  $k$  un corps fini de cardinal  $q$ . Alors,

$$|GL_n(k)| = \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n q^{i-1}$$

**Corollaire 5.3.1.1.**

$$|SL_n(k)| = \frac{|GL_n(k)|}{q-1}$$

**Corollaire 5.3.1.2.**  $\mu_n(k)$  est cyclique d'ordre  $n \wedge q-1$  et donc :  $|PSL_n(k)| = \frac{|SL_n(k)|}{n \wedge (q-1)}$

**Définition 5.3.1.** On pose  $PGL_n(k) = GL_n(k)/k^\times I_n$ . Ce groupe agit fidèlement sur  $P^{n-1}(k) = \{\text{droites de } k^n\}$ .

## 5.4 Le groupe $PGL_2(k)$ et quelques (iso)morphismes miraculeux

**Définition 5.4.1.** On appelle  $\hat{P}(k)$  l'ensemble des droites de  $k^2$ . On définit  $\hat{k} = k \sqcup \{\infty\}$ . On définit :

$$\beta : \begin{cases} \hat{k} & \longrightarrow & \hat{P}(k) \\ x \in k & \longmapsto & k \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \\ \infty & \longmapsto & k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

**Proposition 5.4.1.**  $\beta$  est une bijection. Si on se donne une matrice  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  de  $GL_2(k)$  envoie le point  $x \in \hat{k}$  sur :

$$g.x = \beta^{-1}(g\beta(x)) = \frac{ax+b}{cx+d} \in \hat{k}$$

**Définition 5.4.2.** Les bijections de  $\hat{k}$  de la forme  $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$  sont appelées homographies. Elles forment un sous-groupe de  $S_{\hat{k}}$  isomorphe à  $PGL_2(k)$ .

**Proposition 5.4.2.** Pour tout triplet  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Il existe une et une seule homographie  $g \in PGL_2(k)$  telle que  $(g(\alpha), g(\beta), g(\gamma)) = (0, 1, \infty)$

**Proposition 5.4.3.** Pour  $p$  premier, l'action fidèle de  $PGL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  induit un morphisme injectif de dans  $S_{p+1}$ .

**Corollaire 5.4.0.1.** Comme  $(p+1)! = (p+1)p(p-1)(p-2)!$ , le morphisme de la proposition ci-dessus induit des isomorphismes  $PGL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq S_3$  et  $PGL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \simeq S_4$ . Les morphismes naturels :

$$PSL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \leftarrow SL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow GL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow PGL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

De même,  $PSL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \simeq A_4$ .

**Proposition 5.4.4.** Tout sous-groupe d'indice 2 de  $S_n$  est isomorphe à  $A_n$ . Tout sous-groupe d'indice  $n$  de  $S_n$  est isomorphe à  $S_{n-1}$ .

**Corollaire 5.4.0.2.**  $PGL_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \simeq S_5$  et  $A_n \simeq PSL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  si et seulement si  $n = p = 5$ .

**Remarque 5.4.0.1.** Parmi les groupes simples de la forme  $A_n$  et  $PSL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  on a seulement :

$$A_5 \simeq PSL_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}), PSL_2(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \simeq PSL_3(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \text{ et } PSL_4(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq A_8$$

Pour des corps plus généraux :

$$A_5 \simeq PSL_2(\mathbb{F}_4), A_6 \simeq PSL_2(\mathbb{F}_9)$$

**Théorème 5.4.1.**  $PSL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  agit transitivement sur un ensemble à  $p$  éléments si et seulement si  $p \leq 11$ .

## 6 Elements de structures des groupes finis

### 6.1 $p$ -groupes

On fixe  $p \in \mathcal{P}$

**Définition 6.1.1.** Un  $p$ -groupe est un groupe fini d'ordre  $p^n, n \geq 0$ .

**Proposition 6.1.1.** Un sous-groupe d'un  $p$ -groupe est un  $p$ -groupe. Un produit fini de  $p$ -groupes est un  $p$ -groupe. Un  $p$ -sous-groupe d'un groupe  $G$  est un sous-groupe de  $G$  qui est un  $p$ -groupe. Si  $G$  est fini quelconque,  $p \mid |G|$ , les  $p$ -Sylow de  $G$  sont des  $p$ -sous-groupes.

**Définition 6.1.2.** Le sous-groupe unipotent supérieur  $U_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  des matrices triangulaires supérieures de diagonale égale à 1 est d'ordre  $p^{\frac{n(n-1)}{2}}$ .

**Proposition 6.1.2.** Soit  $P$  un  $p$ -groupe agissant sur un ensemble fini  $X$ . On note  $\text{Fix}X = \{x \in X \mid gx = x \forall g\}$ . Alors,  $|X| \equiv |\text{Fix}X| \pmod{p}$ .

**Proposition 6.1.3.** Pour tout  $p$ -groupe  $P \subset GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ , il existe  $g \in GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  tel que  $gPg^{-1}$  est inclus dans  $U_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ .

**Corollaire 6.1.0.1.** Tout  $p$ -groupe fini est isomorphe à un sous-groupe de  $U_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  pour  $n$  assez grand.

**Proposition 6.1.4.** Si  $P$  est un  $p$ -groupe non trivial, son centre est non trivial.

**Corollaire 6.1.0.2.** Un groupe d'ordre  $p^2$  est abélien, donc isomorphe à  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$  ou  $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ .

**Remarque 6.1.0.1.** Il existe des groupes d'ordre  $p^3$  non-abéliens, comme le  $p$ -groupe  $U_3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  appelé Groupe de Heisenberg.

**Corollaire 6.1.0.3.** Les  $p$ -groupes sont résolubles.

## 6.2 Les Théorèmes de Sylow

Rappel : Si  $|G| = p^\alpha m$  avec  $p \nmid m = 1$ , un  $p$ -sylow de  $G$  est un  $p$ -sous-groupe de  $G$  de cardinal  $p^\alpha$ .

**Théorème 6.2.1** (Sylw). Soient  $G$  un groupe fini et  $p$  premier divisant  $|G|$  :

1.  $G$  possède des  $p$ -Sylow.
2. Tout  $p$ -sous-groupe de  $G$  est inclus dans un  $p$ -Sylow de  $G$ .
3. Deux  $p$ -Sylow de  $G$  sont conjugués (en particulier, isomorphes.)

**Lemme 6.2.2** (Alignement des  $p$ -Sylow). Soient  $G$  un groupe fini,  $H \leq G$  et  $p \nmid |H|$  premier. Si  $P$  est un  $p$ -Sylow de  $G$ , il existe  $g \in G$  tel que  $gPg^{-1} \cap H$  est un  $p$ -Sylow de  $H$ .

**Définition 6.2.1.** On notera  $n_p(G)$  le nombre de  $p$ -Sylow de  $G$  et  $\text{Syl}_p(G)$  l'ensemble des  $p$ -Sylow de  $G$ .

**Corollaire 6.2.2.1.** On a :  $n_p(G) = 1 \Leftrightarrow G$  possède un  $p$ -Sylow distingué.

**Théorème 6.2.3** (3ème Théorème de Sylow). Soit  $G$  un groupe fini de cardinal  $p^\alpha m$ . On a :  $n_p(G) \mid m$  et  $n_p(G) \equiv 1 \pmod{p}$

**Lemme 6.2.4** (Fratini). Soient  $G$  un groupe fini,  $N \triangleleft G$ ,  $P$  un  $p$ -Sylow de  $N$  et  $N_G(P)$  le normalisateur de  $P$  dans  $G$ . On a  $G = NN_G(P)$ .

## 6.3 Le Théorème de Schur-Zassenhaus

**Théorème 6.3.1** (Schur-Zassenhaus). Soient  $G$  un groupe fini d'ordre  $mn$  avec  $m \wedge n = 1$  et possédant  $N \triangleleft G$  d'ordre  $n$ . Alors  $N$  admet un complément dans  $G$  (nécessairement d'ordre  $m$ ).

**Lemme 6.3.2.** Le cas particulier où  $N$  est abélien du théorème implique le cas général.

## 6.4 Théorèmes de Hall

**Théorème 6.4.1** (P.Hall). Soit  $G$  un groupe fini résoluble. Si  $|G| = mn, m \wedge n = 1$ , alors  $G$  possède un sous groupe d'ordre  $m$ .

**Théorème 6.4.2** (P.Hall). Soit  $G$  un groupe fini d'ordre  $d$ . Si pour toute factorisation  $d = mn$  avec  $m \wedge n = 1$ ,  $G$  possède un sous-groupe d'ordre  $m$ , alors  $G$  est résoluble.

## 6.5 Extensions et Cohomologie

Si  $A$  et  $G$  sont fixés, on veut classifier les suites exactes courtes :

$$1 \rightarrow A \xrightarrow{i} \tilde{G} \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1 \quad (1)$$

Etant donné une telle sec est-ce que  $i(A)$  admet un complément dans  $\tilde{G}$ ?

**Lemme 6.5.1.** *Soit une extension comme ci-dessus. Il y a équivalence entre :*

1.  $i(A)$  admet un complément dans  $\tilde{G}$
2.  $\pi$  admet une section ensembliste qui est un morphisme de groupes.

**Définition 6.5.1.** *On dit que la suite exacte courte est scindée si les conditions équivalentes du lemme précédent sont satisfaites.*

**Théorème 6.5.2** (Schur-Zassenhaus). *Toute extension de  $G$  par  $A$  avec  $|G| \wedge |A| = 1$  est scindée*

Dans la suite, on suppose que  $A$  est abélien.

**Définition 6.5.2.** *Un  $G$ -module est la donnée d'un groupe abélien  $(A, +)$  muni d'une action de  $G$  sur  $A$  vérifiant  $g(a + b) = ga + gb$  ou, ce qui revient au même, telle que le morphisme  $G \rightarrow S_A$  associé soit à valeurs dans  $\text{Aut}(A)$ .*

**Proposition 6.5.1.** *La donnée de la suite exacte courte 1 munit le groupe abélien  $A$  d'une structure de  $G$ -module par :*

$$g.a = i^{-1}(\tilde{g}i(a)\tilde{g}^{-1})$$

où  $\tilde{g} \in \tilde{G}$  est un relevé de  $g$  par  $\pi$ .

**Exemple 6.5.1** (Extensions Centrales). *Une extension 1 de  $G$  par  $A$  est dite centrale si  $i(A) \subseteq Z(\tilde{G})$ .*

On fixe une extension 1 de  $G$  par  $A$ , et on considère une section ensembliste  $s : G \rightarrow \tilde{G}$ . Il existe un unique élément  $c(g, g')$  dans  $A$  tel que :

$$s(g)s(g') = i(c(g, g'))s(gg')$$

On remarque qu'alors  $s$  est un morphisme si et seulement si  $c = \text{Ob}(s)$  est nulle.

**Lemme 6.5.3.** *Soient  $s$  une section ensembliste de  $\pi$  et  $c = \text{Ob}(s)$ . On a :*

$$g.c(g'g'') - c(gg', g'') + c(g, g'g'') - c(g, g') = 0, \quad \forall g, g', g'' \in G$$

**Définition 6.5.3.** *Si  $A$  est un  $G$ -module, on note  $Z^2(G, A)$  l'ensemble des fonctions vérifiant l'identité du lemme précédent. Une telle fonction est appelée 2-cocycle de  $G$  à valeurs dans  $A$ .*

Une autre section de  $\pi$  que  $s$  est de la forme  $s_\varepsilon : g \mapsto i(\varepsilon(g))s(g)$  où  $\varepsilon$  est une fonction arbitraire de  $G$  dans  $A$ . Les deux 2-cocycles  $c = \text{Ob}(s)$  et  $c_\varepsilon = \text{Ob}(s_\varepsilon)$  sont alors liés par :

$$c_\varepsilon(g, g') = c(g, g') + g.\varepsilon(g') - \varepsilon(gg') + \varepsilon(g)$$

**Définition 6.5.4.** *Si  $A$  est un  $G$ -module, on note  $B^2(G, A)$  l'ensemble des fonctions  $\partial\varepsilon : G \times G \rightarrow A$  de la forme  $g, g' \mapsto g.\varepsilon(g') - \varepsilon(gg') + \varepsilon(g)$  avec  $\varepsilon : G \rightarrow A$ . Une telle fonction  $f$  est appelée 2-cobord de  $G$  à valeurs dans  $A$ .*

**Définition 6.5.5.** *Pour tout  $G$ -module  $A$ , le groupe  $B^2(G, A)$  est un sous-groupe de  $Z^2(G, A)$  et on définit le 2-ème groupe de cohomologie de  $G$  à valeurs dans  $A$  comme le groupe abélien quotient :*

$$H^2(G, A) = Z^2(G, A)/B^2(G, A)$$

**Proposition 6.5.2.** *Si  $s$  est une section de  $\pi$ , la classe de  $Ob(s)$  ne dépend pas du choix de la section  $s$ . On la note  $[E]$  et on l'appelle classe de cohomologie associée à 1. La sec 1 est scindée si, et seulement si sa classe  $[E]$  est nulle.*

**Théorème 6.5.4** (Schur-Zassenhaus, Cohomologique). *Soient  $G$  un groupe et  $A$  un  $G$ -module :*

1. *Si  $G$  est fini, alors  $|G|x = 0$  pour tout  $x \in H^2(G, A)$*
2. *Si  $A$  est fini, alors  $|A|x = 0$  pour tout  $x \in H^2(G, A)$*

*En particulier, si  $G$  et  $A$  sont finis avec  $|G| \wedge |A| = 1$ , on a  $H^2(G, A) = 0$ .*

**Proposition 6.5.3.** *Pour tout  $G$ -module  $A$  et  $x \in H^2(G, A)$ , il existe une extension de  $G$  par  $A$  vérifiant  $[E] = x$ .*

**Proposition 6.5.4.** *Soient  $A$  un  $G$ -module et  $E_k = (\tilde{G}_k, i_k, \pi_k)$  pour  $k = 1, 2$  deux extensions de  $G$  par le même  $G$ -module  $A$ . On a  $[E_1] = [E_2]$  si et seulement si il existe un isomorphisme  $\varphi : \tilde{G}_1 \rightarrow \tilde{G}_2$  vérifiant  $\varphi \circ i_1 = i_2$  et  $\pi_2 \circ \varphi = \pi_1$*

**Corollaire 6.5.4.1.** *Soit  $A$  un  $G$ -module, l'application  $(E) \mapsto [E]$  induit une bijection entre l'ensemble  $\mathcal{E}(G, A)$  des classes d'isomorphisme d'extensions de  $G$  par le  $G$ -module  $A$  et l'ensemble  $H^2(G, A)$ .*

**Théorème 6.5.5** (Schur). *Considérons  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  comme  $A_n$ -module trivial. On a, pour  $n \geq 4$  :*

$$H^2(A_{n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

## 7 Arithmétique des Anneaux

### 7.1 Les anneaux $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$

On fixe dans la suite un entier  $d \in \mathbb{Z}$  non carré<sup>4</sup> dans  $\mathbb{Z}$ .

**Définition 7.1.1.** *On définit, pour  $z = x + y\sqrt{d}$  :*

$$\begin{cases} \bar{z} = x - y\sqrt{d} & \text{le conjugué de } z \\ T(z) = z + \bar{z} = 2x & \text{la trace de } z \\ N(z) = z\bar{z} = x^2 - dy^2 & \text{la norme de } z \end{cases}$$

*On a donc :  $z^2 - T(z)z + N(z) = 0$ , c'est l'identité de Cayley-Hamilton*

**Lemme 7.1.1.** 1.  *$z \mapsto \bar{z}$  est un automorphisme*

2.  *$\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$  est le corps des fractions de  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$*

3.  *$N : \mathbb{Q}[\sqrt{d}]^\times \mapsto \mathbb{Q}^\times$  est un morphisme de groupes et  $N(\mathbb{Z}[\sqrt{d}]) \subseteq \mathbb{Z}$ .*

**Lemme 7.1.2.** *On a  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times = \{z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \mid N(z) = \pm 1\}$*

**Corollaire 7.1.2.1.** *On a  $\mathbb{Z}[i]^\times = \{\pm 1, \pm i\}$  et  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times = \{\pm 1\}$  pour  $d < -1$ .*

**Remarque 7.1.2.1.** *On appelle équation de Pell-Fermat l'équation  $x^2 - dy^2 = 1$  pour  $d > 0$ .*

**Proposition 7.1.1.** *Soit  $d > 0$  non carré. Tout élément  $> 1$  de  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$  est de la forme  $x + y\sqrt{d}$  avec  $x, y \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ . De plus il existe un plus petit tel élément  $\eta_d$  appelé unité fondamentale de  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ , et on a  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times = \langle -1, \eta_d \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$*

---

<sup>4</sup>  $z$  négatif convient

## 7.2 Divisibilité

**Définition 7.2.1.** Pour un anneau  $A$  commutatif intègre, si  $a, b \in A$ , on a  $a \mid b$  s'il existe  $c \in A$  tel que  $b = ac$ . Les diviseurs de 1 sont appelés les unités de  $A$ .

**Définition 7.2.2.** On dit que  $a, b \in A$  sont associés noté  $a \sim b$  si  $b \mid a$  et  $a \mid b$ .

**Lemme 7.2.1.** Pour  $a, b \in A$ ,  $a \sim b \Leftrightarrow \exists u \in A^\times, a = bu$

**Définition 7.2.3.** Un élément non nul  $\pi \in A$  est dit irréductible si ce n'est pas une unité et si pour tout  $a, b \in A$ ,  $\pi = ab$  implique  $a \in A^\times$  ou  $b \in A^\times$ .

**Définition 7.2.4.** Un élément non nul  $\pi \in A$  est dit premier si ce n'est pas une unité et s'il satisfait la propriété d'Euclide-Gauss :

$$\forall a, b \in A, \pi \mid ab \implies \pi \mid a \text{ ou } \pi \mid b$$

## 7.3 Anneaux Factoriels

**Définition 7.3.1.** On convient qu'un produit vide dans un anneau vaut 1 et aussi que l'on a  $a^0 = 1$  pour tout  $a \in A$ . On choisit un ensemble arbitraire  $\mathcal{P}$  de représentants des éléments irréductibles pour la relation d'association.

**Définition 7.3.2.** 1. On dit que  $A$  a la propriété de factorisation (**PF**) si tout élément de  $A \setminus \{0\}$  est un produit fini d'éléments irréductibles et d'une unité.

2. On dit que  $A$  est factoriel si pour tout  $a \in A \setminus \{0\}$ , il existe un unique  $u \in A^\times$  et une unique fonction  $(\nu_\pi(a)) \in \mathbb{N}^{(\mathcal{P})}$

**Exemple 7.3.1.** 1.  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{K}[X]$  sont factoriels

2. Les  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  sont (**PF**)

3. L'anneau  $H(\mathbb{C})$  des séries entières convergentes sur  $\mathbb{C}$  est intègre par le principe des zéros isolés. On peut montrer que les unités de  $H(\mathbb{C})$  sont exactement les fonctions qui ne s'annulent pas sur  $\mathbb{C}$  et ses irréductibles sont les associés des  $z - a, a \in \mathbb{C}$ . Mais certains éléments de  $H(\mathbb{C})$  comme  $\sin(\pi z)$  ont une infinité de zéros donc l'anneau  $H(\mathbb{C})$  ne vérifie pas (**PF**).

**Proposition 7.3.1.** Supposons que  $A$  satisfait (**PF**). Alors,  $A$  est factoriel si et seulement si tout irréductible de  $A$  est premier.

**Lemme 7.3.1.** Les pgcd et ppcm existent dans un anneau factoriel.

## 8 Modules sur les Anneaux Principaux

### 8.1 Modules sur un Anneau

**Définition 8.1.1.** Soit  $A$  un anneau. Un  $A$ -module est la donnée d'un groupe abélien  $(M, +)$  et d'une application  $A \times M \rightarrow M$  telle que pour tout  $a, a' \in A, m, m' \in M$  :

1.  $a.(m + m') = a.m + a.m'$
2.  $(a + a').m = a.m + a'.m$
3.  $a.(a'.m) = (a.a')m$
4.  $1.m = m$

**Proposition 8.1.1.** Soient  $A$  un anneau et  $M$  un groupe abélien. Il est équivalent de se donner une structure de  $A$ -module sur  $M$  et un morphisme d'anneaux  $A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ .

**Définition 8.1.2.** Soient  $A$  un anneau et  $M$  un  $A$ -module. Un sous-module de  $M$  est un sous-groupe  $N \subseteq M$  tel que  $an \in N$  pour tout  $a \in A, n \in N$ .

**Définition 8.1.3.** Soient  $M$  et  $N$  des  $A$ -modules. Un morphisme de  $M$  vers  $N$  aussi appelé application  $A$ -linéaire est une application  $f : M \rightarrow N$  telle que  $f(m + m') = f(m) + f(m')$  et  $f(am) = af(m)$ .

**Définition 8.1.4.** Un  $A$ -module  $M$  est dit monogène si on a  $M = Am$  pour un certain  $m$ .

**Définition 8.1.5.** Un  $A$ -module est de type fini s'il possède une famille finie génératrice. Un  $A$ -module est dit libre de rang  $n$  s'il possède une base à  $n$  éléments.

**Théorème 8.1.1.** Supposons  $A$  commutatif non nul. Les  $A$ -modules  $A^n$  et  $A^m$  sont isomorphes si et seulement si on a  $n = m$ . En particulier, toutes les bases d'un  $A$ -module libre de rang fini ont même cardinal.

## 8.2 Classes d'équivalence de matrices sur un anneau principal

Dans la suite,  $A$  est un anneau commutatif et  $n \geq 1$  un entier.

**Définition 8.2.1.** On définit  $GL_n(A) = M_n(A)^\times$  et

$$\begin{aligned} \det : M_n(A) &\rightarrow A \\ (m_{i,j}) &\mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n m_{\sigma(j),j} \end{aligned}$$

**Lemme 8.2.1.** Pour tout anneau commutatif  $A$  et tout  $M, N \in M_n(A)$  on a :

$$\det MN = \det M \det N \text{ et } M^t \text{Co}(M) = {}^t \text{Co}(M) M = \det M I_n$$

**Proposition 8.2.1.** Pour tout anneau commutatif  $A$  on a :

$$GL_n(A) = \{M \in M_n(A) \mid \det M \in A^\times\}$$

**Théorème 8.2.2** (Forme Normale de Smith). Soient  $A$  un anneau principal, et  $M \in M_{p,q}(A)$  avec  $p, q \geq 1$  et  $r = \min(p, q)$ . Il existe  $P \in GL_p(A), Q \in GL_q(A)$  et  $a_1, \dots, a_r \in A$  avec  $a_1 \mid \dots \mid a_r$  et

$$PMQ = \begin{matrix} & a_1 & & & \\ & & a_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_r \end{matrix}$$

On appelle les éléments  $a_i$  non nuls, uniques modulo  $A^\times$ , les facteurs invariants de la matrice  $M$ .

**Définition 8.2.2.** On note  $SL_n(A)$  le noyau du morphisme  $\det$ . C'est un sous-groupe distingué de  $GL_n(A)$ .

**Définition 8.2.3.** Soit  $M \in M_{p,q}(A)$  et  $k \in \mathbb{Z}$ . Le contenu d'ordre de  $k$  de  $M$  est l'idéal  $c_k(M)$  de  $A$  engendré par les mineurs de taille  $k$  de  $M$  avec les conventions  $c_k(M) = A$  pour  $k \leq 0$  et  $c_k(M) = \{0\}$ .

**Lemme 8.2.3.** Soient  $A$  un anneau commutatif ainsi que  $M, N \in M_{p,q}(A)$  deux matrices équivalentes. Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  on a  $c_k(M) = c_k(N)$

## 8.3 Modules de type fini sur un anneau principal

**Théorème 8.3.1.** Soient  $E$  et  $F$  des  $A$ -modules et  $u : E \rightarrow F$  une application  $A$ -linéaire. On suppose  $A$  principal,  $E$  et  $F$  libres sur  $A$  de rangs respectifs  $q$  et  $p$ . On pose  $r = \min p, q$ . Alors, il existe une base  $e = (e_1, \dots, e_q)$  de  $E$  et une  $f = (f_1, \dots, f_p)$  de  $F$  et des éléments  $a_1, \dots, a_r$  de  $A$  avec  $a_1 \mid \dots \mid a_r$  vérifiant :

$$u(f_i) = a_i e_i \text{ pour } i \leq r \text{ et } u(f_i) = 0 \text{ pour } i > r$$

**Théorème 8.3.2.** Soient  $A$  un anneau principal,  $M$  un  $A$ -module libre de rang fini  $m$  et  $N$  un sous-module de  $M$ . Il existe une base  $e_1, \dots, e_m$  de  $M$ , un entier  $0 \leq p \leq m$  et des éléments  $a_1, \dots, a_p \in A$  non nuls tels que :

- $a_1 e_1, \dots, a_p e_p$  est une base de  $N$ .
- $a_1 \mid \dots \mid a_p$

En particulier,  $N$  est libre sur  $A$  de rang  $p \leq n$ .

**Théorème 8.3.3.** Soient  $A$  un anneau principal et  $M$  un  $A$ -module de type fini. Il existe un unique entier  $r \geq 0$  appelé rang de  $M$ , un unique entier  $n \geq 0$  et des éléments non nuls  $a_1, \dots, a_n \in A$  uniques modulo association avec :

$$M \simeq A^r \bigoplus A/a_1 A \bigoplus \dots \bigoplus A/a_n A, a_1 \mid \dots \mid a_n \text{ et } a_1 \notin A^\times$$

**Théorème 8.3.4.** Soient  $k$  un corps et  $V$  un  $k$ -ev de dimension finie :

1. Pour tout endomorphisme  $u$  de  $V$ , il existe un unique entier  $s \leq \dim V$  et une unique suite de polynômes  $P_1, \dots, P_s \in k[X]$  unitaires de degré  $\geq 1$  avec  $P_1 \mid \dots \mid P_s$  tels que dans une base  $e$  convenable de  $V$  on ait :

$$Mat_e(u) = \begin{pmatrix} C(P_1) & & \\ & \ddots & \\ & & C(P_s) \end{pmatrix}$$

On appelle ces polynômes les invariants de similitude de  $u$ .

2. Deux endomorphismes sont conjugués si et seulement si ils ont même invariants de similitudes.

## 9 Représentations Linéaires des Groupes Finis

### 9.1 Représentations Linéaires

**Définition 9.1.1.** Une représentation  $k$ -linéaire de  $G$  est la donnée d'un  $k$ -espace vectoriel  $V$  et d'un morphisme  $\rho : G \rightarrow GL(V)$ .

La dimension ou le degré de  $V, \rho$  est la dimension de  $V$ . Il est équivalent de se donner une représentation de  $G$  sur  $V$  et une action de  $G$  sur  $V$  telle que  $L_g$  est  $k$ -linéaire.

**Définition 9.1.2.** Deux représentations  $k$ -linéaires de  $G$  de même dimension sont isomorphes ou équivalentes s'il existe des bases  $e_1$  et  $e_2$  de  $V_1$  et  $V_2$  telles que  $\rho_1^{e_1} = \rho_2^{e_2}$  où  $\rho^e$  est l'application qui à  $g \in G$  associe la matrice dans la base  $e$  de  $\rho(g)$ .

**Définition 9.1.3.** Si  $G$  agit sur  $X$ , la représentation ci-dessus de  $G$  sur  $kX$  est appelée représentation de permutation associée. Dans la base  $(e_x)$  de  $kX$ , la matrice de chaque  $\rho(g)$  a un unique coefficient non nul égal à 1 sur chaque colonne et sur chaque ligne.

### 9.2 Le point de vue $k[G]$ -modules

**Définition 9.2.1.** Une  $k$ -algèbre est un  $k$ -espace vectoriel muni d'une loi de composition  $\mu$   $k$ -bilineaire qui fait de  $A, +, \mu$  un anneau. Un morphisme de  $k$ -algèbres est un morphisme d'anneaux  $k$ -linéaire.

On construit une  $k$ -algèbre sur le  $k$ -ev  $kG$  en la munissant de  $\mu$  qui dans la base des  $e_g$  est donnée par  $e_g e_h = e_{gh}$ .

**Définition 9.2.2.** Soient  $k$  un corps et  $G$  un groupe. La  $k$ -algèbre d'espace sous-jacent  $kG$  s'appelle l'algèbre du groupe  $G$  à coefficients dans  $k$  et est notée  $k[G]$ . Sa dimension comme  $k$ -ev est  $|G|$ .

**Proposition 9.2.1.** Il est équivalent de se donner une représentation  $k$ -linéaire de  $G$  et un  $k[G]$  module :



1. Si  $V$  est un  $k[G]$ -module, il existe une unique représentation  $k$ -linéaire de  $G$  sur le  $k$ -ev sous-jacent à  $V$  notée  $\rho_V$  et telle que  $\rho_V(g)(v) = g.v$ . On l'appelle représentation associée à  $V$ .
2. Si  $V, \rho$  est une représentation  $k$ -linéaire de  $G$ , il existe une unique structure de  $k[G]$ -module sur  $V$  étendant celle de  $k$ -espace vectoriel et vérifiant  $g.v = \rho(g)(v)$ . On l'appelle  $k[G]$ -module associé à  $V, \rho$ , et on le note en général simplement  $V$ .

**Définition 9.2.3.** Si  $V_1, V_2$  sont des  $k[G]$ -modules, on note  $\text{Hom}_{k[G]}(V_1, V_2)$  le  $k$ -ev des applications  $k[G]$ -linéaires de  $V_1$  vers  $V_2$ .

**Proposition 9.2.2.** Deux  $k[G]$  modules  $U$  et  $V$  de dimension finie sont isomorphes si et seulement si les représentations associées le sont.

### 9.3 Décomposition en Irréductibles

**Définition 9.3.1.** Soit  $V$  un  $k[G]$ -module. Un sous- $k$ -ev  $W \subseteq V$  est dit  $G$ -invariant si on a  $g.w \in W$  pour tout  $w \in W, g \in G$ , i.e. si c'est un sous-module de  $V$ . Soient  $e = (e_1, \dots, e_{p+q})$  où  $e_1, \dots, e_p$  est une base de  $W$ . Alors  $W$  est  $G$ -invariant si et seulement si :

$$\text{Mat}_e \rho_V(g) = \begin{bmatrix} \star_p & \star \\ 0 & \star_q \end{bmatrix}, \forall g \in G$$

**Définition 9.3.2.** Soit  $V$  un  $k[G]$ -module. On dit que  $V$  est irréductible (ou simple) si on a  $V \neq 0$  et si les seuls sous-modules de  $V$  sont  $\{0\}$  et  $V$ .

**Proposition 9.3.1.** Si  $k$  est algébriquement clos,  $G$  abélien et  $V$  un  $k[G]$ -module irréductible de dimension finie. Alors  $V$  est de dimension 1.

**Proposition 9.3.2.** Un  $k[G]$ -module  $V$  non nul est irréductible si et seulement si  $k[G]v = V$  pour tout  $v \neq 0$  dans  $V$ .

**Proposition 9.3.3.** Tout  $k[G]$ -module irréductible est de dimension  $\leq |G|$ .

**Proposition 9.3.4.** Les seuls sous-modules de la représentation de permutation naturelle de  $S_n$  sur  $k^n$  sont  $\{0\}, \text{Vect}(1, 1, \dots, 1), H = \{\sum_i x_i = 0\}, V$ . En outre on a :

$$V = H \oplus D \iff n \in k^\times$$

**Définition 9.3.3.** Un  $k[G]$ -module  $V$  est semi-simple s'il se décompose en somme directe de sous-modules irréductibles.

**Proposition 9.3.5.** Soit  $V$  un  $k[G]$ -module de dimension finie. Il y a équivalence entre :

1.  $V$  est semi-simple
2.  $V$  est somme de sous-modules irréductibles
3. Pour tout sous-module  $W$  de  $V$ , il existe une sous-module  $S$  de  $V$  vérifiant  $V = W \oplus S$ .
4. Tout sous-module de  $V$  est semi-simple.

**Théorème 9.3.1.** On suppose  $G$  fini et  $|G|$  dans  $k^\times$ . Alors tout  $k[G]$ -module de dimension finie est semi-simple.

**Lemme 9.3.2.** Soient  $U$  et  $V$  deux  $k[G]$ -modules irréductibles.

1. Toute application  $k[G]$ -linéaire de  $U$  dans  $V$  est soit nulle soit un isomorphisme.
2. Si de plus  $k$  est algébriquement clos, et si  $U$  est de dimension finie, les applications  $k[G]$ -linéaires  $U \rightarrow U$  sont les homothéties.

**Proposition 9.3.6.** Soit  $V$  un  $k[G]$ -module semi-simple de dimension finie. On suppose donnée une décomposition  $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$  et pour tout  $i$  un  $k[G]$ -module irréductible de dimension finie  $S_i$  tels que :

1.  $V_i \subseteq V$  est un sous-module isomorphe à  $S_i^{\oplus n_i}$
2.  $S_i \not\simeq S_{i'}$  si  $i \neq i'$ .

Alors, pour tout sous-module irréductible  $S$  de  $V$ , il existe un unique  $i \in I$  tel que  $S \simeq S_i$  et on a  $S \subseteq V_i$ .

## 9.4 Théorie des Caractères

**Théorème 9.4.1.** Soit  $h$  le nombre de classes de conjugaison du groupe fini  $G$ .

1. A isomorphisme près, il existe  $h$   $\mathbb{C}[G]$ -modules irréductibles.
2. Leurs dimensions  $n_i$  vérifient :  $\sum_i n_i^2 = |G|$ .

**Définition 9.4.1.** Soient  $V$  un  $\mathbb{C}[G]$ -module de dimension finie et  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  le morphisme associé. Le caractère de  $V$  est la fonction  $G \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g \mapsto \text{Tr}(\rho(g))$ . On le note  $\chi_V$ . En particulier  $\chi_V(1) = \dim V$ .

**Définition 9.4.2.** Une fonction est dite centrale si elle est constante sur les classes de conjugaison de  $G$ .

**Proposition 9.4.1.** Pour tout  $\mathbb{C}[G]$ -module  $V$  de dimension finie,  $\chi_V$  est centrale sur  $G$ . De plus si  $U \simeq V$ , on a  $\chi_U = \chi_V$ .

**Proposition 9.4.2.** Soient  $U, V$  des  $\mathbb{C}[G]$ -modules de dimension finie et  $W = U \oplus V$ . On a  $\chi_W = \chi_U + \chi_V$ .

**Définition 9.4.3.** L'espace  $\text{Hom}_k(U, V)$  des applications  $k$ -linéaires est muni d'une structure naturelle de  $k[G]$ -module en posant :

$$(g \cdot \varphi)(x) = g \cdot \varphi(g^{-1} \cdot x)$$

On note  $\text{Hom}(U, V)$  ce module. Dans le cas  $V = k$  on pose aussi  $U^\vee = \text{Hom}(U, k)$  et on parle de représentation duale ou contragrédiente de  $U$ .

**Proposition 9.4.3.** Soient  $U, V$  des  $\mathbb{C}[G]$ -modules de dimension finie.

1. Pour  $W = \text{Hom}(U, V)$  on a  $\chi_W(g) = \chi_U(g^{-1})\chi_V(g)$
2. En particulier :  $\chi_{U^\vee}(g) = \chi_U(g)^{-1}$

**Proposition 9.4.4.** Soit  $g \in G$  d'ordre  $d$  et  $V$  un  $\mathbb{C}[G]$  module de dimension  $n$ . Alors  $\rho_V(g)$  est diagonalisable et  $\chi_V(g)$  est somme de  $n$  racines  $d$ -èmes de l'unité. De plus,  $\chi_{V^\vee} = \overline{\chi_V}$ .

**Corollaire 9.4.1.1.** Si  $\chi, \chi'$  sont des caractères, il en va de même de  $\chi + \chi', \chi\chi', \overline{\chi}$ .

**Définition 9.4.4.** Si  $V$  est un  $\mathbb{C}[G]$ -module, on pose :

$$V^G = \{v \in V \mid g \cdot v = v \forall g \in G\}$$

C'est le plus grand sev de  $V$  sur lequel  $G$  agit trivialement.

**Lemme 9.4.2.** Si  $V$  est un  $\mathbb{C}[G]$ -module de dimension finie:

$$\dim V^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g)$$

De manière équivalente, sur  $L^2(G)$  muni du produit hermitien :

$$\langle f, f' \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \overline{f'(g)}$$

on a :  $\dim V^G = \langle \chi_V, 1 \rangle$

**Théorème 9.4.3.** Soient  $U, V$  deux  $\mathbb{C}[G]$ -modules irréductibles. On a :

$$\langle \chi_U, \chi_V \rangle \begin{cases} 1 & \text{si } U \simeq V \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Corollaire 9.4.3.1.** Soit  $U$  un  $\mathbb{C}[G]$ -module de dimension finie. On suppose :  $U \simeq \bigoplus_{i=1}^r S_i^{\oplus n_i}$  où les  $S_i$  sont des  $\mathbb{C}[G]$ -modules irréductibles deux à deux non isomorphes et les  $n_i$  sont des entiers positifs. Alors on a :  $n_i = \langle \chi_U, \chi_{S_i} \rangle$  pour tout  $i$ .

**Corollaire 9.4.3.2.** Si  $U$  et  $V$  sont des  $\mathbb{C}[G]$ -modules de dimension finie on a :

$$U \simeq V \iff \chi_U = \chi_V$$

**Définition 9.4.5.** Un caractère de  $G$  est une fonction  $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$  de la forme  $\chi = \chi_V$  pour un certain  $V$   $\mathbb{C}[G]$ -module de dimension finie. La fonction  $\chi$  détermine uniquement  $V$  à isomorphisme près. On dit que  $\chi$  est irréductible si  $V$  l'est. On note  $\text{Car}G$  l'ensemble des caractères de  $G$  et  $\text{Irr}G \subseteq \text{Car}G$  le sous-ensemble des caractères irréductibles.

**Corollaire 9.4.3.3.** Soit  $\chi \in \text{Car}G$ . On a  $\chi \in \text{Irr}G \iff \langle \chi, \chi \rangle = 1$ .

**Corollaire 9.4.3.4.** Tout  $\mathbb{C}[G]$  module irréductible  $S$  apparaît dans la décomposition en irréductibles de la représentation régulière  $\mathbb{C}G$  et ce avec une multiplicité  $\dim S$ . En particulier il n'y a qu'un nombre fini de  $\mathbb{C}[G]$ -modules irréductibles à isomorphisme près et leurs dimensions  $n_i$  vérifient  $\sum_i n_i^2 = |G|$ .

**Définition 9.4.6.** On note  $L^2(G)_{\text{cent}}$  le sev de  $L^2(G)$  des fonctions centrales.

**Lemme 9.4.4.**  $L^2(G)_{\text{cent}}$  a pour base les fonctions caractéristiques des classes de conjugaison de  $G$ . En particulier,  $\dim L^2(G)_{\text{cent}} = h$ .

**Théorème 9.4.5.** Les caractères irréductibles forment une base orthonormée de  $L^2(G)_{\text{cent}}$ .

**Lemme 9.4.6.** Soient  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  et  $z \sum_{g \in G} f(g)g \in \mathbb{C}[G]$ . Alors  $z \in Z(\mathbb{C}[G]) \iff f$  centrale.

**Définition 9.4.7.** Soit  $S$  un  $\mathbb{C}[G]$ -module et  $z \in Z(\mathbb{C}[G])$ . L'application  $m_z : v \in S \mapsto z.v \in S$  est  $\mathbb{C}[G]$ -linéaire.