Le cours d'Ariane Mézard

Ariane Mézard

11 mars 2024

Table des matières

Première partie

Fonctions Holomorphes

1 Fonctions Analytiques

1.1 Séries Entières

Définition 1.1: Série Entière

Une série entière est une série de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ où $z \in \mathbb{C}$ et $a_n \in \mathbb{C}$.
Le domaine de convergence de la série entière est l'ensemble Δ des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels la série converge.

Proposition 1.1: Critère de Cauchy

Soient a_n une suite complexe et $0 < r < r_0$. S'il existe $M > 0$ tel que

$$|a_n|\, r_0^n \leq M, n \geq 0$$

alors $a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0, r)$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \overline{D}(0, r)$ on a :

$$|a_n z^n| \leq |a_n|\, r^n \leq M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$$

Comme $0 < r < r_0$, $M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$ est le terme d'une série géométrique convergente. ■

Corollaire 1.1: Rayon de Convergence

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ défini par

$$R = \sup \left\{ r \geq 0 \text{ tel que la suite } \left(|a_n|\, r^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ soit bornée} \right\}$$

Alors le domaine de convergence Δ de la série vérifie :

$$D(0, R) \subseteq \Delta \subseteq \overline{D}(0, R)$$

Définition 1.2: Rayon de Convergence

On appelle le nombre R défini ci-dessus rayon de convergence.

Proposition 1.2: Rayon d'Hadamard

Le rayon de convergence est donné par

$$R = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|^{1/n}}$$

Avec la convention $1/0 = \infty$

Lemme 1.1: Lemme d'Abel

Soit u_n une suite réelle décroissante vers 0 et v_n une suite complexe telle que les sommes partielles $s_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ soient bornées. Alors la série $\sum u_n v_n$ converge.

Proposition 1.3: Principe des Zéros Isolés

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Si au moins un des coefficients a_n n'est pas nul, il existe $r \in]0, +\infty[$ tel que f ne s'annule pas pour $|z| \in]0, r[$.

Démonstration. Soit $l = \min\{n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0\}$, on a :

$$f(z) = \sum_{n \geq l} a_n z^n = z^l g(z)$$

avec $g(z) = a_l + a_{l+1} z + \dots$ et $g(0) \neq 0$. ∎

Définition 1.3: Dérivée Complexe

Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ admet une dérivée par rapport à la variable complexe au point z_0 si

$$\lim_{z \to u} \frac{f(z_0 + u) - f(z_0)}{u}$$

existe. Cette limite est alors appelée dérivée de f en z_0.

Proposition 1.4: Dérivée d'une Série Entière

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors, pour tout $l \in \mathbb{N}^\star$, les dérivées l-ièmes de f ont pour rayon de convergence R et pour expression :

$$f^{(l)}(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(n+l)!}{n!} a_{n+l} z^n$$

Corollaire 1.2: Primitive

Une série entière $f(z) = \sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ admet sur $D(0, R)$ une primitive complexe

$$F(z) = \sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

Proposition 1.5: S

it $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $z_0 \in D(0, R)$. La série entière

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \omega^n$$

a un rayon de convergence supérieur à $R - |z_0|$ et pour tout $z \in D(z_0, R - |z_0|)$,

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n$$

1.2 Fonctions Analytiques

Définition 1.4: Fonction Analytique

Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est dite analytique si elle est DSE au voisinage de chaque point de U.

Proposition 1.6: Dérivabilité

Une fonction analytique sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ admet des dérivées de tous ordres qui sont des fonctions analytiques sur U. De plus, pour tout $z_0 \in U$, f est somme de sa série de Taylor en z_0 sur un voisinage de z_0.

Corollaire 1.3: Unicité du DSE

Une fonction analytique sur U admet un unique développement en série entière au voisinage de chaque point de U.

Lemme 1.2: Nullité

Si U est connexe et f est analytique sur U, nulle sur un ouvert non-vide de U, alors f est identiquement nulle sur U.

Proposition 1.7: Zéros Isolés

oit f une fonction analytique sur un ouvert connexe U. Si f n'est pas identiquement nulle, ses zéros sont isolés, i.e. si $z_0 \in U$ avec $f(z_0) = 0$, alors il existe $r > 0$ tel que z_0 soit le seul z_0 de f sur $D(z_0, r)$

Théorème 1.1: Prolongement Analytique

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, f, g des fonctions analytiques sur U. Si f, g coincident sur une partie Σ de U qui a un point d'accumulation dans U, alors elles coincident sur U.

Définition 1.5: Primitive

Etant donnée une fonction analytique f sur U, une fonction analytique F de U dans $\mathbb{C}$ est dite primitive de f si $F'(z) = f(z)$ sur U.

1.3 Détermination du Logarithme

Définition 1.6: Détermination de l'Argument

Soit $U \subseteq \mathbb{C}^\star$ ouvert. Une fonction continue $\arg : U \to \mathbb{R}$ est dite détermination continue de l'argument sur U si pour tout $z \in U$, $\exp(i \arg(z)) = \frac{z}{|z|}$

Définition 1.7: Détermination Principale

La détermination continue de l'argument

$$\begin{aligned} \mathbb{C} - \mathbb{R}_- &\longrightarrow \ ]-\pi, \pi[\\ z &\mapsto \ 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{aligned}$$

en prenant la racine carrée de z appartenant au demi-plan $\Re z > 0$ est appelée détermination principale de l'argument.

Définition 1.8: Logarithme

Soit $U \subseteq \mathbb{C}^\star$ ouvert. Une fonction continue $f : U \to \mathbb{C}$ est dite détermination du logarithme sur U si

$$\forall z \in U, \exp(f(w)) = w$$

Définition 1.9: Détermination Principale du Log

On définit pour $\theta \in \mathbb{R}$ la fonction

$$\log_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_- e^{i\theta}, \log_\theta(w) = \log|w| + i \arg_\theta(w)$$

La fonction $\log_0$ est appelée détermination principale du logarithme et notée log.

Proposition 1.8: DSE du Logarithme

log est DSE sur $D(1,1)$ et sur $D(0,1)$ on a

$$\log(1+z) = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$$

Par conséquent, sur $D(z_0, |z_0|)$,

$$g(z) = \log z_0 + i\theta_0 + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{z - z_0}{z_0}\right)^n$$

est une détermination analytique du logarithme.

Proposition 1.9: Analycité des Déterminations

Il y a équivalence sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}^\star$ pour une application continue l entre :

- l est une détermination du logarithme à l'addition d'une constante près
- l est une primitive analytique de $\frac{1}{z}$ sur U.

Définition 1.10: Détermination

Soit $U \subseteq \mathbb{C}^\star$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Une détermination continue de z^α est une application continue g de U dans $\mathbb{C}$ telle qu'il existe une détermination du logarithme $l(z)$ de z telle que $g(z) = \exp^{\alpha l(z)}$.

2 Théorie de Cauchy

2.1 Homotopie et Simple Connexité

Définition 2.1: Chemin

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Un chemin $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ est une application continue. Le point $\gamma(a)$ est appelé origine et le point $\gamma(b)$ est dit extrémité. On orientera par défaut un chemin dans le sens des paramètres croissants. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, le chemin est dit lacet d'origine $\gamma(a)$.

Définition 2.2: Opérations

1. Si γ est constant, son image est réduite à un point. Il est alors appelé chemin (ou lacet) constant.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^\star$, $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto e^{2i\pi\alpha t}$ est un chemin dont l'image est une partie du cercle unité $\partial D(0, 1)$. Si $\alpha = n \in \mathbb{Z}^\star$, $\gamma([0, 1])$ est le cercle tout entier parcouru n fois.
3. Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ est un chemin, le chemin opposé
$$\gamma^0 : t \in [a, b] \mapsto \gamma(a + b - t)$$
est γ parcouru en sens inverse.
4. La juxtaposition de γ_1, γ_2 tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ est le chemin $\gamma = \gamma_1 \wedge \gamma_2 : [a, d + b - c] \to \mathbb{C}$
$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{pour } a \leq t \leq b \\ \gamma_2(t - b + c) & \text{pour } b \leq t \leq d + b - c \end{cases}$$

Définition 2.3: Homotopie

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $\gamma_i : I \to U$, $i \in \{1, 2\}$ deux chemins. Une homotopie de γ_1 à γ_2 dans U est une application continue φ de $I \times J$ dans U où $I = [a, b]$ et $J = [c, d]$ sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ telle que :
$$\varphi(t, c) = \gamma_1(t) \text{ et } \varphi(t, d) = \gamma_2(t), t \in I$$

Définition 2.4: Simple Connexité

Un espace topologique X connexe par arcs est dit simplement connexe si tout lacet dans X est homotope à un point dans X.

Proposition 2.1

- Un espace topologique est simplement connexe si et seulement si tous les chemins de même extrémités sont homotopes.
- Un ouvert étoilé par rapport à un point est simplement connexe. En particulier, dans $\mathbb{C}$, le plan, un demi-plan, un disque ouvert, l'intérieur d'un rectangle ou d'un triangle sont simplement connexes.
- Le demi-plan ouvert $\Im z > 0$ auquel nous ôtons un nombre fini de demi-droites fermées $z = t + i\beta_k$, $t \in]-\infty, \alpha_k]$ est simplement connexe non étoilé.
- $\mathbb{C}^\star$ n'est pas simplement connexe car le cercle unité n'est pas homotope à un chemin constant.

2.2 Intégrales sur un Chemin

Dorénavant, les chemins sont supposés $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Définition 2.5: Equivalence de Chemins

Deux chemins $\gamma_i : I_i \to \mathbb{C}$ sont dits équivalents s'il existe une bijection croissante $\varphi : I_2 \to I_1$ continue de réciproque continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux telle que :

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(\varphi(t)), t \in I_2$$

Définition 2.6: Intégrale le long d'un Chemin

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ continue et $\gamma : I = [a, b] \to \mathbb{C}$ un chemin avec $\gamma(I) \subseteq U$. Alors, la fonction $t : f(\gamma(t))\gamma'(t)$ est continue par morceaux dans $[a, b]$. On appelle intégrale de f le long du chemin γ :

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

Définition 2.7: Longueur

La longueur d'un chemin est le réel :

$$long(\gamma) = \int_a^b \left|\gamma^{'}(t)\right|\,\mathrm{d}t$$

Proposition 2.2: Propriétés

- Si F est une primitive de f, pour tout chemin γ :
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$
- Si $\gamma_1 \sim \gamma_2$ alors
$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$
- Si $[Z_0, z_1] \subseteq U$, nous notons $\int_{[z_0,z_1]} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ où $\gamma : t \in [0,1] \mapsto (1-t)z_0 + tz_1$.
- Si $\partial D(z_0, r) \subseteq U$, soit le lacet $\gamma : \theta \in [0, 2\pi] \mapsto z_0 + re^{i\theta}$. On a :
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial D(z_0,r)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) ire^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$$
- En séparant parties réelles et imaginaires, $f = P + iQ$ et $\gamma = u + iv$, on a :
$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^b ((P\circ\gamma)\,u' - (Q\circ\gamma)\,v')\ \mathrm{d}t + i\int_a^b ((Q\circ\gamma)\,u' + (P\circ\gamma)\,u')\ \mathrm{d}t \\ &= \int_\gamma (P\,\mathrm{d}x - Q\,\mathrm{d}y) + i\int_\gamma (P\,\mathrm{d}y + Q\,\mathrm{d}x)\end{aligned}$$
- On a :
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma^0} f(z)\,\mathrm{d}z$$
- On a :
$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq long(\gamma)\max_\gamma |f|$$

2.3 Théorème de Cauchy

Théorème 2.1: de Cauchy

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe et f une fonction analytique dans U. Si γ_1, γ_2 sont deux lacets homotopes dans U, alors
$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$
En particulier, si U est simplement connexe, l'intégrale sur un lacet de f est nulle.

Théorème 2.2

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe.

1. Toute fonction analytique dans U admet une primitive.
2. Si $f : U \to \mathbb{C}^\star$ est analytique, alors il existe $g : U \to \mathbb{C}$ analytique tel que $\exp(g) = f$ sur U.

2.4 Formule de Cauchy

Lemme 2.1: Intégrité de l'Indice

Soit $\gamma : I = [c, d] \to \mathbb{C}$ un lacet et $a \notin \gamma(I)$. Alors

$$j(a, \gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - a} \in \mathbb{Z}$$

Démonstration. Pour $t \in [c, d]$ on pose

$$h(t) = \int_c^t \frac{\gamma'(s)\,\mathrm{d}s}{\gamma(s) - a}$$

On a $h'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}$, sauf en un nombre fini de points de I.
Remarquons que $g(t) = e^{-h(t)}(\gamma(t) - a)$ a pour dérivée

$$g'(t) = -h'(t)e^{-h(t)}(\gamma(t) - a) + \gamma'(t)e^{-h(t)} = 0$$

sauf en un nombre fini de points de I. Comme g est continue, elle est constante et $g(c) = g(d)$.
Or, $h(c) = 0$ donc $g(c) = \gamma(c) - a = g(d) = e^{-h(d)}(\gamma(d) - a)$. Mais γ est un lacet, donc $\gamma(c) = \gamma(d)$.
Donc $h(d) = 2in\pi$. Donc $j(a, \gamma) = n \in \mathbb{Z}$. ■

Définition 2.8: Indice

L'entier $j(a, \gamma)$ est appelé indice de a par rapport au lacet γ et s'interprète comme le nombre de fois que le lacet tourne autour de a lorsque a est intérieur au lacet.

Proposition 2.3: Propriétés

1. Soit $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ des lacets de même origine dont les lacets ne contiennent pas a. Alors,

$$j(a, \gamma^0) = -j(a, \gamma) \text{ et } j(a, \gamma_1 \wedge \gamma_2) = j(a, \gamma_1) + j(a, \gamma_2)$$

2. En appliquant le théorème de Cauchy à la fonction analytique $1/(z - a)$ dans $\mathbb{C} - \{a\}$, nous obtenons $j(a, \gamma_1) = j(a, \gamma_2)$ si γ_1, γ_2 sont homotopes dans $\mathbb{C} - \{a\}$.
3. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe et $\gamma \subset U$. Si $a \notin U$, alors $j(a, \gamma) = 0$.
4. Si γ set un lacet dans $\mathbb{C}$, pour tout ouvert connexe U de $\mathbb{C} - \gamma(I)$, la fonction $z \mapsto j(z, \gamma)$ est constante dans U.
5. Soit $\gamma_n : t \mapsto e^{int}$, on a :

$$j(z_0, \gamma_n) = \begin{cases} n & si\,|z_0| < 1 \\ 0 & si\,|z_0| > 1 \end{cases}$$

Démonstration du point iv. Soit $z \in D(z_0, r) \subseteq U$,

$$j(z, \gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}u}{u - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}u}{u - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}u}{u - z_0} = j(z_0, \gamma)$$

pour $\gamma_1 : t \mapsto \gamma(t) + (z - z_0)$ qui est homotopie à γ via

$$\varphi(t, s) = \gamma(t) + s(z - z_0), 0 \leq s \leq 1$$

Donc $j(\cdot, \gamma)$ est localement constante donc constante sur U connexe. ■

Théorème 2.3: Formule de Cauchy

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe, $\gamma : I \to U$ un lacet dans U. Soit f analytique sur U. Pour tout $w \in U \setminus \gamma(I)$

$$j(w, \gamma) f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w} \, \mathrm{d}z$$

Démonstration. La fonction

$$g : z \in U \mapsto \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & \text{si } z \neq w \\ f'(w) & \text{si } z = w \end{cases}$$

est analytique sur U. En effet pour $r > 0$ assez petit, f admet un développement de Taylor sur $D(w, r) \subseteq U$ et donc pour $z \in D(w, r)$:

$$g(z) = f'(w) + \frac{f''(w)}{2!}(z-w) + \cdot + \frac{f^{(n)}(w)}{n!}(z-w)^{n-1} + \cdot$$

Comme U est simplement connexe, le théorème de Cauchy donne $\int_\gamma g = 0$ et comme $w \notin \gamma(I)$, $\int_\gamma \frac{f(z)-f(w)}{z-w} \, \mathrm{d}z = 0$ c'est à dire :

$$\int_\gamma \frac{f(z) \, \mathrm{d}z}{z-w} = f(w) \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-w} = 2i\pi j(w, \gamma) f(w)$$

■

Corollaire 2.1: Valeur en un point

On a :

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(z)}{z-w} \, \mathrm{d}z, w \in D(z_0, r)$$

Proposition 2.4: Continuité sur un Lacet

Soit $\gamma : I = [c, d] \to \mathbb{C}$ un lacet et $g : \gamma(I) \to \mathbb{C}$ une fonction définie et continue sur $\gamma(I)$. Alors :

$$f(z) = \int_\gamma \frac{g(u) \, \mathrm{d}u}{u-z}$$

est définie et analytique dans $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$.
Précisément, pour tout $w \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$c_n = \int_\gamma \frac{g(u) \, \mathrm{d}u}{(u-w)^{n+1}}$$

nous avons un développement en série entière convergente

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z-w)^n$$

dans tout disque ouvert de centre w et de rayon $r = d(w, \gamma(I))$ et

$$f^{(n)}(w) = n! c_n = n! \int_\gamma \frac{g(u) \, \mathrm{d}u}{(u-w)^{n+1}}$$

Démonstration. Pour tout $u \in \gamma(I), z \in D(w, qr), q \in [0,1]$, la série

$$\frac{1}{u-z} = \frac{1}{u-w} \frac{1}{1-\frac{z-w}{u-w}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-w)^n}{(u-w)^{n+1}}$$

est convergente. Comme $(g \circ \gamma)\, \gamma'$ est continue par morceaux sur $[c,d]$ il existe M tel que

$$|g(\gamma(t))\gamma'(t)| \leq M$$

Donc :

$$\left| g\left(\gamma(t)\right) \gamma'(t) \frac{(z-w)^n}{(\gamma(t)-w)^{n+1}} \right| \leq M \frac{q^n}{r}, t \in [c,d]$$

Finalement, la série sous l'intégrale est normalement convergente et :

$$f(z) = \int_c^d \frac{g(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t}{\gamma(t)-z} = \int_c^d g(\gamma(t))\gamma'(t) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-w)^n}{(\gamma(t)-w)^{n+1}} \right) \mathrm{d}t$$

et donc $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-w)^n$ ∎

Proposition 2.5: Dérivée n-ième

Soit f analytique sur U et γ le bord de $\overline{D}(w,r) \subseteq U$. D'après la formule de Cauchy :

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \frac{f(w+re^{it})}{e^{nit}} \,\mathrm{d}t$$

Corollaire 2.2

1. Soit f analytique sur U. Pour tout $a \in U$, la série de Taylor de f au voisinage de a est convergente et a pour somme $f(z)$ dans le plus grand disque ouvert de centre a contenu dans U
2. Si f est analytique sur $\mathbb{C}$, sa série de Taylor en tout point de $\mathbb{C}$ est convergente sur $\mathbb{C}$.

Démonstration. On applique la formule de Cauchy sur le contour γ d'un disque $D(a,r)$ contenu dans U. Pour $z \in D(a,r), j(z,\gamma) = 1$ et

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}z$$

La proposition 2.4 donne un développement en série entière de f en $z-a$ convergeant sur $D(a,r)$. Par unicité du développement, il s'agit de la série de Taylor. En faisant tendre r vers $d(a, \mathbb{C}-U)$, nous obtenons le résultat annoncé. ∎

Corollaire 2.3: Constance Locale

Supposons U connexe, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{C}$ analytique. Si pour tout $k > 0, f^{(k)}(a) = 0$, alors f est constante sur U.

Démonstration. D'après le corollaire **??**, f est localement somme de sa série de Taylor. Donc f est constante sur un ouvert contenant a. Soit $\Omega = \{w \in U, \forall k > 0, f^{(k)}(w) = 0\}$. Cet ensemble est ouvert, non vide, et fermé. Par connexité de U, $\Omega = U$, $f' = 0$ sur U et f est constante sur U. ∎

Théorème 2.4: Multiplicité

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ analytique non constante au voisinage de $a \in U$. Si $f(a) = 0$, il existe un unique entier $m \geq 1$ et $g : V \to \mathbb{C}$ analytique sur un voisinage V de a tels que

$$f(z) = (z - a)^m \, g(z), g(a) \neq 0, z \in V$$

En particulier, le point a possède un voisinage dans lequel il est l'unique zéro de f.

Démonstration. D'après le corollaire 2.4, si f n'est pas constante dans un voisinage de a, il existe $m \geq 1$ tel $f^{(m)}(a) \neq 0$ et $f'(a) = \ldots = f^{(m-1)}(a) = 0$.
Comme $f(a) = 0$, on peut alors factoriser $(z - a)^m$ dans le développement en série de Taylor de f en a. ■

Définition 2.9: Ordre

L'entier m du théorème précédent est dit ordre de f en a, noté $ord(f, a)$.

2.5 Inégalités de Cauchy, Premières Applications

Proposition 2.6: Inégalités de Cauchy

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ analytique, $\overline{D}(w, r) \subset U, r > 0$. On a, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| f^{(n)}(w) \right| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{z \in \partial D(w,r)} |f(z)|$$

Démonstration. On a :

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \frac{f(w + re^{it})}{e^{nit}} \, \mathrm{d}t$$

On en déduit immédiatement le résultat. ■

Lemme 2.2: Bornitude et Polynomialité

Soit f analytique sur $\mathbb{C}$. Supposons qu'il existe $A, B \geq 0$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq A \left(1 + |z|\right)^B$$

Alors f est un polynôme de degré $\leq B$.

Démonstration. Soit $n \geq \lfloor B \rfloor + 1 > B$. Par les inégalités de Cauchy, puisque

$$\sup_{\partial D(z,r)} |f(z)| \leq A \left(1 + |z| + r\right)^B$$

on a :

$$\left| f^{(n)}(z) \right| \leq \frac{n!}{r^n} A(1 + |z| + r)^B$$

En faisant tendre r vers $+\infty$, par croissance comparée, $f^{(n)}(w) = 0$ pour $n \geq B$. Localement, f étant somme de sa série de Taylor, c'est localement un polynôme de degré au plus B, ce qui est donc le résultat. ■

Théorème 2.5: Liouville

Une fonction analytique bornée sur $\mathbb{C}$ est constante.

Théorème 2.6: d'Alembert-Gauss

Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[z]$ de degré ≥ 1 admet une racine dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. Par l'absurde, si $P(z) = \sum_{i=0}^{d} a_i z^i$ ne s'annule pas, $f = 1/P$ est analytique sur $\mathbb{C}$ et $|f(z)| \sim \frac{1}{|a_d||z|^d}$ tend vers 0 quand $|z|$ tend vers $+\infty$. En particulier, f est bornée sur $\mathbb{C}$ donc constante d'après le théorème de Liouville. Ainsi, $P = 1/f$ est constant, ce uqui est absurde. ∎

Théorème 2.7: Topologie

Les ouverts $\mathbb{C}$ et $D(0,1)$ sont homéomorphes mais pas isomorphes.

3 Fonctions Holomorphes

3.1 Définitions

Définition 3.1: Holomorphie

Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est dite holomorphe en $z_0 \in U$ si la limite

$$\lim_{h \in \mathbb{C} \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existe. On la note $f'(z_0)$.
On définit $\mathcal{O}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes.

Proposition 3.1: Exemples Holomorphe

- Si f est constante, f est holomorphe et $f' = 0$
- Si f est un polynôme, f est holomorphe
- Si f est analytique, f est holomorphe
- $\sin, \cos, \exp, \tan$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$.
- $z \mapsto \bar{z}$ n'est pas holomorphes en aucun point :

  $$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$$

  n'a pas de limite en 0.
- $f(z) = |z|^2$ n'est holomorphe que pour $z = 0$:

  $$\frac{(z+h)\left(\bar{z} + \bar{h}\right) - z\bar{z}}{h} = \frac{h\bar{z} + \bar{h}z + h\bar{h}}{h}$$

  n'a une limite que si $z = 0$.

3.2 $\mathbb{R}$-différentiabilité

Définition 3.2: Forme Différentielle

Une 1-forme différentielle sur Ω est une application $\alpha : \Omega \to Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.
En particulier, les $\mathrm{d}x_i \in Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ qui à $a \mapsto \mathrm{d}x_i(a) = a_i$ permettent d'écrire :

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\,\mathrm{d}x_i$$

où $\alpha_i : \Omega \to \mathbb{C}$. On a alors :

$$\alpha(x)(a) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\,\mathrm{d}x_i(a)$$

On dit que α est de classe $\mathcal{C}^k$ si et seulement si tous les α_i sont de classe $\mathcal{C}^k$.

Définition 3.3: $\mathbb{R}$ Différentiabilité

Une fonction f d'un ouvert connexe Ω de $\mathbb{R}^n$ est dite $\mathbb{R}$-différentiable sur Ω si et seulement si il existe une 1-forme différentielle $\mathrm{d}f : \Omega \to Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ telle que

$$f(z+h) = f(z) + \mathrm{d}f(z)(h) + o(h)$$

On pose $\mathrm{d}_x f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x_i$.

Dans la suite on travaille dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ et pour $h \in \mathbb{C}$, on note $h = k + il = (k, l)$ et pour $z \in U = \Omega, z = x + iy = (x, y)$.

Proposition 3.2: Différentielle dans une base

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ différentiable de différentielle $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$. On a $\forall z \in U$:

$$\mathrm{d}_z f = \frac{\partial f}{\partial x}(z)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(z)\,\mathrm{d}y$$

En $h = k + il$:

$$\mathrm{d}_z f(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(z)k + \frac{\partial f}{\partial y}(z)l$$

On définit

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y \text{ et } \mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}x - i\,\mathrm{d}y$$

On a alors :

$$\mathrm{d}f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}\bar{z}$$

ce qu'on écrit aussi :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z}$$

On a par ailleurs

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$$

Proposition 3.3: Exemples

1. Si $f(z) = z$, $\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} = 1$ et $\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0$. A l'inverse, $\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0$.
2. Pour $P(x, y) = \sum_{0 \leq \alpha, \beta \leq d} c_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta$. En notant $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, on a :
$$P(z) = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta$$
où on a
$$a_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\alpha!\beta!} \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial z^\alpha \partial z^\beta} P(0)$$
On retrouve que P est holomorphe si on a $a_{\alpha,\beta} = 0$ pour $\beta \geq 1$.

Théorème 3.1: Lien $\mathbb{C}$-dérivabilité et $\mathbb{R}$-différentiabilité

Soit $f : U \to \mathbb{C}$. On a équivalence entre :
1. $f \in \mathcal{O}(U)$
2. f est $\mathbb{R}$-différentiable sur U et $\mathrm{d}_z f$ est $\mathbb{C}$-linéaire pour tout $z \in U$
3. f est $\mathbb{R}$-différentiable sur U et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ pour tout $z \in U$

Démonstration. $i \Rightarrow ii$ $f(z+h) = f(z) + hf'(z) + o(h) \implies f$ est $\mathbb{R}$-différentiable en z et $\mathrm{d}_z f$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ qui à $h \mapsto hf'(z)$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

$ii \Rightarrow iii$ On a :
$$\begin{aligned} \mathrm{d}_z f(h) =& \frac{\partial f}{\partial z}(z)\,\mathrm{d}z(h) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)\,\mathrm{d}\bar{z}(h) \\ =& \frac{\partial f}{\partial z}(z)h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)\bar{h} \\ \mathrm{d}_z f(h) =& \frac{\partial f}{\partial z}h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\bar{h} \end{aligned}$$
On a alors : $\mathrm{d}_z f(ih) = \frac{\partial f}{\partial z} ih - i\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\bar{h}$. Mais $\mathrm{d}_z f$ est $\mathbb{C}$-linéaire par hypothèse. Donc :
$$\mathrm{d}_z f(ih) = i\,\mathrm{d}_z f(h) = i\frac{\partial f}{\partial z}h + i\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\bar{h}$$
Ainsi : $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

$iii \Rightarrow i$ On a :
$$\mathrm{d}_z f(h) = \frac{\partial f}{\partial z}h$$
D'où
$$f(z+h) = f(z) + \frac{\partial f}{\partial z}h + o(h)$$
Ainsi :
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\partial f}{\partial z}$$
et f est holomorphe en z.

■

Proposition 3.4: Équations de Cauchy-Riemann

On note $f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$ où $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si f est holomorphe, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

i.e.

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} &= 0 \end{cases}$$

Ce sont les équations de Cauchy-Riemann.

Démonstration. On a :

$$\mathrm{d}_z f(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(z)\,\mathrm{d}x(h) + \frac{\partial f}{\partial y}(z)\,\mathrm{d}y(h) = f'(z)h = f'(z)(k+il)$$

On obtient

$$f'(z)(k+il) = \frac{\partial f}{\partial x}(z)k + \frac{\partial f}{\partial y}(z)l$$

et donc :

$$\begin{cases} f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) \\ if'(z) = \frac{\partial f}{\partial y}(z) \end{cases}$$

On obtient ainsi la première égalité en identifiant.
On réécrit ceci avec $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} &= 0 \end{cases}$$

■

Proposition 3.5: Constance sur un Connexe

Si f est holomorphe sur U connexe on a équivalence entre :

- f est constante sur U
- $\Re f$ l'est
- $\Im f$ l'est
- $|f|$ l'est
- $\bar{f}$ est holomorphe

3.3 Intégrale sur le bord d'un Compact

Définition 3.4: Classe du Bord d'un Compact

Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$. K est dit à bord compact de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux si pour tout élément $z_0 \in \partial K$, il existe des coordonnées (u,v) associées à un repère affine de $\mathbb{R}^2$ d'origine z_0 orienté positivement par rapport à l'orientation canonique de $\mathbb{R}^2$ et un rectangle ouvert $R = \{-\delta < u < \delta\} \times \{-\eta < v < \eta\}$ tel que :

$$K \cap R = \{(u,v) \in R, v \geq h(u)\}$$

où h est une fonction réelle $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[-\delta, \delta]$ avec $h(0) = 0$ et $\sup|h| < \eta$.

Définition 3.5: Orientation du Bord

Soit K un compact à bord de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On appelle orientation canonique du bord l'orientation donnée par les arcs $u \mapsto (u, h(u))$ avec u croissant.

Lemme 3.1: Existence de l'Orientation

La définition a du sens.

Lemme 3.2: Recoupement de Rectangles

Soit R, R' des rectangles ouverts tels que $\partial K \cap R \cap R' \neq \varnothing$.
On définit

$$K \cap R = \{(u, v) \in R, v \geq h(u)\}$$

et

$$K \cap R')\, \{(u', v') \in R', v' \geq l(u')\}$$

Alors, les orientations sur $\partial K \cap R \cap R'$ coïncident.

Démonstration. Soit $z_0 \in \partial K \cap R \cap R'$. h et l sont $\mathcal{C}^1$ par morceaux. En évitant un nombre fini de points de $\partial K \cap R \cap R'$ on peut supposer h et l $\mathcal{C}^1$ en z_0. Autrement dit, le bord admet une tangente en z_0. On a deux repères affines orientés (z_0, e_1, e_2) et (z_0, e_1', e_2') qui génèrent des coordonnées (u, v) et (u', v'). Quitte à remplacer h par $h(u) - h'(0)u$ on peut supposer que $h'(0) = l'(0) = 0$. Ainsi, e_1 et e_1' sont colinéaires. Puisqu'on a supposé que (e_1, e_2) et (e_1', e_2') sont orientés positivement par rapport à l'orientation canonique de $\mathbb{R}^2$ et puisque e_2 et e_2' doivent être dans le même sens (i.e. à l'intérieur du compact), on a bien le fait que e_1 et e_1' sont dans le même sens.
Finalement, les orientations sur $\partial K \cap R \cap R'$ coïncident. ■

3.4 Formule de Green-Riemann

Soit $p, n \in \mathbb{N}^*$. On note $\Lambda^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ le $\mathbb{R}$-ev des formes p-linéaires alternées sur $\mathbb{R}^n$. Toute forme $S \in \Lambda^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ s'écrit de manière unique

$$S = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} c_{i_1, \ldots, i_p}\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

Définition 3.6: Produit Extérieur

Pour $S \in \Lambda^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n), T \in \Lambda^q_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ on définit le produit extérieur de S et T noté $S \wedge T \in \Lambda^{p+q}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ comme :

$$S \wedge T\,(v_1, \ldots, v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) S(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) T(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)})$$

Proposition 3.6: Exemples

La paire $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ forme une base de $\Lambda^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$. Les seuls produits extérieurs à considérer sont :

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y = 0, \quad \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x$$

De plus, $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ est la forme bilinéaire alternée déterminant dans la base canonique.

Définition 3.7: 2-forme différentielle

Une 2-forme différentielle β sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ est une application continue de U dans $\Lambda^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$: $\beta = w(x,y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ pour w continue.

Définition 3.8: Intégrale d'une 2-forme

Soit $\beta = w(x,y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ une 2-forme différentielle sur U. On définit :

$$\int_U \beta = \int_U w(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Définition 3.9: Différentielle d'une Différentielle

Soit $\alpha = u(x,y)\,\mathrm{d}x + v(x,y)\,\mathrm{d}y$ une 1-forme différentielle $\mathcal{C}^1$ sur U. La différentielle $\mathrm{d}\alpha$ de α est la 2-forme différentielle

$$\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}y = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

Proposition 3.7: Exemples

1. Soit α une 1-forme différentielle sur U et $f : U \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors

$$\mathrm{d}(f\alpha) = \mathrm{d}f \wedge \alpha + f\,\mathrm{d}\alpha$$

2. Si on écrit la 1-forme différentielle $\mathcal{C}^1$ $\alpha = f\,\mathrm{d}z + g\,\mathrm{d}\bar{z}$ on a :

$$\mathrm{d}(f\,\mathrm{d}z + g\,\mathrm{d}\bar{z}) = (\partial_z g - \partial_{\bar{z}} f)\ \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = -2i\,(\partial_z - \partial_{\bar{z}} f)\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

En particulier, si $\alpha = f\,\mathrm{d}z$ avec f holomorphe, alors $\partial_{\bar{z}} f = 0$ et $\mathrm{d}\alpha = 0$.

Lemme 3.3: Formule de Green-Riemann sur un rectangle

Soit K un compact de $\mathbb{C}$ à bord de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux orienté canoniquement. Soit $\alpha = u(x,y)\,\mathrm{d}x + v(x,y)\,\mathrm{d}y$ une forme 1-différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de K à support dans un rectangle $R = [-\delta, \delta] \times [-\eta, \eta] \subseteq K$. Alors

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_K \mathrm{d}\alpha \text{ i.e. } \int_{\partial K} u(x,y)\,\mathrm{d}x + v(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_K \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Démonstration. Comme K est compact, $R \subseteq \mathring{K}$ ou bien $\partial K \cap R$ est le graphe d'une fonction h et $K \cap R$ est la partie située à l'intérieur du graphe.
Supposons $R \subseteq \mathring{K}$, alors $u = v = 0$ sur ∂R et

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x = v(\delta, y) - v(-\delta, y) = 0$$

$$\int_{-\eta}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}y = u(x, \eta) - u(x, -\eta) = 0$$

et

$$\int_K \mathrm{d}\alpha = \int_R \mathrm{d}\alpha = \int_{-\delta \le x \le \delta, -\eta \le y \le \eta} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

Puisque le support de α ne rencontre pas ∂K on a $\int_{\partial K} \alpha = 0 = \int_K \mathrm{d}\alpha$.
Si $K \cap R = \{(x, y) \in R \mid y \leq h(x)\}$, alors

$$\begin{aligned}
\int_K \mathrm{d}\alpha = \int_{K\cap R} \mathrm{d}\alpha = \int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{d}x \int_{h(x)}^{\eta} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \mathrm{d}y \\
= \int_{-\delta}^{\delta} \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{h(x)}^{\eta} v(x,y)\,\mathrm{d}x\right) + v(x,h(x))h'(x) - (u(x,\eta) - u(x,h(x)))\right) \mathrm{d}x \\
= \int_{h(\delta),\eta} v(\delta, y)\,\mathrm{d}y - \int_{h(-\delta)}^{\eta} v(-\delta,y)\,\mathrm{d}y + \int_{-\delta}^{\delta} (v(x,h(x))h'(x) + u(x,h(x)))\,\mathrm{d}x \\
= \int_{-\delta}^{\delta} (v(x,h(x))h'(x) + u(x,h(x)))\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

car $u(x,\eta) = v(\delta, y) = v(-\delta, y) = 0$. Par ailleurs, comme $\partial K \cap R$ est paramétré par $y = h(x)$,

$$\int_{\partial K\cap R} \alpha = \int_{\partial K \cap R} u(x,y)\,\mathrm{d}x + v(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\delta}^{\delta} (v(x,h(x))h'(x) + u(x,h(x)))\,\mathrm{d}x$$

Le support de α est inclus dans R. Nous concluons donc :

$$\int_K \mathrm{d}\alpha = \int_{\partial K} \alpha$$

■

Définition 3.10: Partition de l'unité

Soit K un compact de $\mathbb{C}$ recouvert par un nombre fini d'ouverts U_i. Une partition de l'unité de classe $\mathcal{C}^1$ subordonnée au recouvrement U_i est une famille φ_i de fonctions de K dans $[0,1]$ de classe $\mathcal{C}^1$ à support dans U_i telles que $\sum \varphi_i(x) = 1$ pour tout $x \in K$.

Lemme 3.4: Unité sur un Voisinage

Soit $z \in U$. Il existe V un voisinage de z avec $\overline{V} \subseteq U$ et une fonction $\mathcal{C}^1$ φ_U à support dans U valant 1 sur V.

Démonstration. Soit $r > r' > 0$ tel que $D(z, r') \subset D(z, r) \subset U$. On définit les fonctions $\mathcal{C}^\infty$

$$f_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_r(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t^2 - r^2}} & \text{si } |t| < r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$g_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g_r(s) = \frac{\int_{-\infty}^{s} f_r(t)\,\mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{\infty} f_r(t)\,\mathrm{d}t}$$

En particulier :

$$g_r(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq -r \\ 1 & \text{si } s \geq r \end{cases}$$

Alors, $V = D(z, r')$ et $\varphi_U(w) = f_r\left(r + \frac{2r}{r - r'}(r' - |w - z|)\right)$ conviennent. ■

Lemme 3.5: Existence d'une Partition

Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ un compact et (U_i) un recouvrement fini par des ouverts de K. Il existe une partition de l'unité $\mathcal{C}^1$ subordonnée au recouvrement U_i

Démonstration. Pour tout $z \in K \setminus U_j$ il existe i tel que $z \in U_i$. Par le lemme 3.4 on constuit ψ_z^j de classe $\mathcal{C}^1$ qui vaut 1 sur un voisinage ouvert W_z^j de z et dont le support est dans l'ouvert $U_i \cap (K \setminus U_j)$. Le support de ψ_z^j est un fermé de K donc est compact.
On obtient donc un recouvrement ouvert W_z^j du compact $K \setminus U_j$ donc on extrait un sous-recouvrement fini $\left\{W_{z_1}^j, \dots, W_{z_{j_l}}^j\right\}$.
On procède de même pour tout $j \leq n$. En réindexant on obtient une famille finie $(\psi_l)_{1 \leq l \leq N}$ de fonctions dont l'union des supports recouvre K, i.e. pour tout $z \in K$, il existe l tel que $\psi_l(z) > 0$. On pose alors

$$\psi = \sum \psi_l \text{ et pour } l \leq N, \rho_l = \frac{\psi_l}{\psi}$$

Ainsi, ρ_l est une partition de l'unité de classe $\mathcal{C}^1$ de K telle que pour tout l il existe $1 \leq i \leq n$ tel que le support de ρ_l soit inclus dans U_i. ∎

Théorème 3.2: Formule de Green-Riemann

Soit K un compact de $\mathbb{C}$ à bord de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux orienté canoniquement. Soit α une 1-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de K. On a alors

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_K \mathrm{d}\alpha$$

Démonstration. Comme K est compact, il est recouvert par un nombre fini de rectangles ouverts R_j qui vérifient $R_j \subseteq \mathring{K}$ ou $\partial(K \cap R_j)$ est le graphe d'une fonction h_j et $K \cap R_j$ est la partie située à l'intérieur du graphe. Soit (χ_j) une partition de l'unité subordonnée au recouvrement R_j. Écrivons $\alpha = \sum \alpha_j$ où les 1-formes différentielles $\alpha_j = \chi_j \alpha$ sont de classes $\mathcal{C}^1$ à support dans R_j. On se ramène alors au cas du lemme 3.3 ∎

Théorème 3.3: Cauchy

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, K un compact à bord de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux inclus dans U, avec l'orientation canonique du bord. Alors pour toute fonction holomorphe de classe $\mathcal{C}^1$ sur K nous avons

$$\int_{\partial K} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Démonstration. On applique la formule de Green-Riemann 3.2 à $\alpha = f(z)\,\mathrm{d}z$, 1-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$. On a $\mathrm{d}\alpha = -\partial_{\bar{z}} f\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = 0$. ∎

Corollaire 3.1: Analycité Holomorphe $\mathcal{C}^1$

Soit f holomorphe de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U. Alors f est analytique sur U.

Démonstration. Soit $\overline{D}(w, r) \subseteq U$ et γ le lacet $t \mapsto w + re^{it}$. Pour $\lambda \leq 1$, on pose

$$g(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z + \lambda(u - z))}{u - z}\,\mathrm{d}u = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z + \lambda\left(w + re^{it} - z\right)\right)}{w + re^{it} - z} e^{it}\,\mathrm{d}t$$

Ainsi, g est continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ de dérivée

$$g'(\lambda) = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'\left(z + \lambda\left(w + re^{it} - z\right)\right) e^{it}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2i\pi\lambda} f\left(z + \lambda\left(w + re^{it} - z\right)\right)\right]_{t=0}^{2\pi} = 0$$

Donc g est constante avec

$$g(1) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)\,\mathrm{d}u}{u - z} \text{ et } g(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)\,\mathrm{d}u}{u - z} = f(z)$$

D'où, par la proposition 2.4, f est analytique ∎

3.5 Analycité des Fonctions Holomorphes

Lemme 3.6: Goursat

Soient $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et T un triangle inclus dans U. Pour tout fonction holomorphe sur U

$$\int_{\partial T} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Démonstration. Nous décopons T en quatre triangles T_i dont les sommets sont ceux de T et les milieux des côtés de T. Nous orientons les arêtes opposées des triangles T_k de telle façon que

$$I = \int_{\partial T} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial T_k} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Il existe donc un indice k avec $\left|\int_{\partial T_k} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \geq |I|/4$. De cette façon, nous construisons une suite de triangles emboîtés $T_0' = T, T_1' = T_k$ avec $diamT_n' = diamT/2^n$ et $\left|\int_{\partial T_n'} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \geq |I|/4^n$. L'intersection des triangles emboîtés T_n' est réduite à un point z_0. Comme f est holomorphe en z_0 :

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)\varepsilon(z)$$

avec $\varepsilon(z)$ qui tend vers 0 quand z tend vers z_0. On a ainsi :

$$\left|\int_{\partial T_n'} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{\partial T_n'} (z - z_0)\varepsilon(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \mathrm{long}(\partial T_n') \sup_{\partial T_n'} |z - z_0|\,|\varepsilon(z)|$$

et donc

$$\left|\int_{\partial T_n'} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq 3\,(\mathrm{diam}T_n')^2 \sup_{\partial T_n'} |\varepsilon(z)|$$

Donc $|I| \leq 4^n \left|\int_{\partial T_n'} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq 3\,(\mathrm{diam}T_n)^2 \sup_{\partial T_n'} |\varepsilon(z)|$ et donc $I = 0$. ■

Théorème 3.4: Goursat

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ ouvert et K un compact à bord de classe $\mathcal{C}^1$ avec l'orientation canonique du bord. Pour toute fonction holomorphe sur U on a :

$$\int_{\partial K} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Démonstration. On approche K par des compacts à bords polygonaux. Notons $\delta = d(K, \mathbb{C}\backslash U) > 0$. Paramétrons δK par un nombre fini d'arcs $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Pour chaque tel arc $\gamma : [a, b] \to U$, soit une subdivision $a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = b$ telle que $|\gamma(\tau_{j+1}) - \gamma(\tau_j)| \leq \varepsilon \leq \delta/2$. Chaque segment $[\gamma(\tau_{j+1}), \gamma(\tau_j)] \subset U$. Pour ε assez petit, la réunion de ces segments constitue le bord d'un compact K_ε à bord polygonal. $K_\varepsilon = \cup_i T_i$ est réunion de triangles adjacents et le lemme de Goursat 3.6 implique

$$\int_{\partial K_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}(z) = \sum_i \int_{\partial T_i} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

D'après la proposition , on a bien :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial K_\varepsilon} = \int_{\partial K} f(z)\,\mathrm{d}z$$

D'où le résultat. ■

Théorème 3.5: Formule de Cauchy

Soit f holomorphe sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{C}$ et K un compact à bord orienté $\mathcal{C}^1$ par morceaux inclus dans U. Alors, pour tout $z \in K$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(\omega)}{\omega - z} \, \mathrm{d}\omega$$

Démonstration. Soit $r > 0$ tel que $\overline{D(z,r)} \subset \mathring{K}$. On note $K_r = K \setminus D(z,r)$. K_r est un compact à bord orienté $\mathcal{C}^1$ par morceaux dont le bord est $\partial K_r = \partial K \cup \partial D^-(z,r)$ où ∂D^- signifie que ce cercle a l'orientation opposée à celle obtenue comme bord de $\overline{D(z,r)}$. La fonction $g(\omega) = f(\omega)/(\omega - z)$ et holomorphe sur $U \setminus \{z\}$. Le théorème de Goursat 4.5 appliqué à g sur le compact $K_r \subseteq U \setminus \{z\}$ donne

$$\int_{\partial K} \frac{f(\omega)}{\omega - z} \, \mathrm{d}\omega - \int_{\partial D(z,r)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} \, \mathrm{d}\omega = 0$$

En posant $\omega = z + re^{it}$ on a :

$$\int_{\partial D(z,r)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} \, \mathrm{d}\omega = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} \, \mathrm{d}t = i \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) \, \mathrm{d}t$$

et cette dernière intégrale tend vers $2i\pi f(z)$ lorsque r tend vers 0 par continuité de f au point z. ∎

Théorème 3.6: Équivalence Holomorphie-Analycité

Soit $f : U \to \mathbb{C}$. f est holomorphe sur U si et seulement si elle est analytique.

Démonstration. On a déjà l'implication analycité holomorphie. Supposons f holomorphe sur U et $\overline{D}(z_0, r) \subset U$. Pour $z \in D(z_0, r)$, la formule de Cauchy 4.6 donne

$$f(z)) \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} \, \mathrm{d}\omega$$

Or

$$\frac{1}{\omega - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\omega - z_0)^{n+1}}$$

De plus, pour $\omega = z_0 + re^{it}$,

$$\left| \frac{(z - z_0)^n}{(\omega - z_0)^{n+1}} \right| = \frac{1}{r} \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^n, \text{ avec } |z - z_0|/r < 1$$

Par convergence normale pour $t \in [0, 2\pi]$, on obtient :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0,r)} f(\omega) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\omega - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}\omega \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\omega)}{2i\pi (\omega - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}\omega \, (z - z_0)^n \\ &= \sum a_n (z - z_0)^n \end{aligned}$$

et la série entière ci-dessus converge normalement sur les compacts de $D(z_0, r)$. ∎

Corollaire 3.2: Classe des Dérivées

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Toute fonction holomorphe sur U est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U. Précisément, pour tout $K \subset U$ compact à bord de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et pour tout $z \in \mathring{K}$ nous avons :

1. $\forall n \geq 0, \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z) = f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{n+1}} \, \mathrm{d}\omega$
2. $\forall n \geq 0, \forall m \geq 0, \frac{\partial^{n+m} f}{\partial z^n \partial \bar{z}^m}(z) = 0.$

En particulier, une fonction holomorphe f admet des dérivées complexes $f^{(n)}$ d'ordre n arbitraire et les dérivées $f^{(n)}$ sont holomorphes.

Théorème 3.7: Morera

Soit f une fonction continue sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Nous supposons que $\int_{\partial T} f(z) \, \mathrm{d}z = 0$ pour tout triangle T inclus dans U. Alors f est holomorphe sur U.

Démonstration. Soit $z_0 \in U$ et $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r) \subset U$. Pour $z \in D(z_0, r)$, on pose

$$F(z) = \int_{[z_0, z]} f(\omega) \, \mathrm{d}\omega$$

Soit $z \in D(z_0, r)$ et $h \neq 0$ tel que $z + h \in D(z_0, r)$. Comme le triangle de sommets $z_0, z, z+h$ est inclus dans $D(z_0, r)$, nous avons

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(\omega) \, \mathrm{d}\omega = \int_0^1 f(z + th) \, \mathrm{d}t$$

Comme f est continue au point z,

$$\lim_{h \in \mathbb{C}^*, h \to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z)$$

Ainsi F est holomorphe sur $D(z_0, r)$ donc analytique d'après le théorème 4.7 et sa dérivée $f = F'$ l'est donc aussi. ∎

Corollaire 3.3: Γ

La fonction Γ

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} \, \mathrm{d}t$$

est holomorphe pour $\Re s > 0$.

Démonstration. L'intégrale converge en $t = 0$ car $\left|t^{s-1} e^{-t}\right| \leq t^{\Re s - 1}$. À s fixé pour $t \in \mathbb{R}_+$ grand,

$$\left|t^{s-1} e^{-t}\right| = t^{\Re s - 1} e^{-t} \leq e^{t/2} e^{-t} = e^{-t/2}$$

Donc $\Gamma(s)$ est bien définie pour $\Re s > 0$. Soit $\gamma : [0, 1] \to \{s, \Re s > 0\}$ la courbe décrivant un triangle. Alors, d'après le théorème de Fubini

$$\int_\gamma \Gamma(s) \, \mathrm{d}s = \int_\gamma \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}s = \int_0^{+\infty} \left(\int_\gamma t^{s-1} \, \mathrm{d}s \right) e^{-t} \, \mathrm{d}t = 0$$

Ainsi, en appliquant le théorème de Morera 4.8, la fonction Γ est holomorphe sur le demi-plan $\Re s > 0$. ∎

4 Propriétés Élémentaires des Fonctions Holomorphes

4.1 Théorème d'inversion locale

Théorème 4.1: Inversion Locale

Si $f \in \mathcal{O}(U)$, $a \in U, f'(a) \neq 0$, alors, $\exists V$ voisinage ouvert de a inclus dans U sur lequel f est biholomorphe sur $f(V)$ ouvert.

Démonstration. Comme $f \in \mathcal{O}(U)$, f est $\mathbb{R}$-différentiable. Donc il existe un voisinage V ouvert de U contenant a sur lequel $f_{|V} : V \to f(V)$ est un difféomorphisme. Alors, $\mathrm{d}_{f(z)}(f^{-1}) = (d_z f)^{-1}$ et donc $f^{-1} \in \mathcal{O}(U)$. ■

Idée des Séries Majorantes.

- On suppose d'abord $a = 0, f(a) = 0, f'(a) = 1$. On a

$$f(z) = z - \sum_{n \geq 2} a_n z^n, z \in D(0,r)$$

On veut résoudre $f(z) = \omega = z - \sum_{n\geq 2} a_n z^n$ i.e. $z = \omega + \sum_{n \geq 2} a_n z^n$. Mais, $\sum_{n\geq 2} a_n z^n = \mathcal{O}(w^2)$:

$$z = \omega + \sum_{n \geq 2} a_n \left(\omega + \mathcal{O}(\omega^2)\right)^n = \omega + a_2\omega^2 + \mathcal{O}(\omega^3)$$

On peut alors réinjecter :

$$z = \omega + a_2\omega^2 + \left(2a_2^2 + a_3\right)\omega^3 + \mathcal{O}(\omega^4)$$

et ainsi de suite :

$$z = \omega + \sum_{n=2}^{N} P_n(a_2, \ldots, a_n)\omega^n + \mathcal{O}(\omega^{N+1})$$

où les $P_n \in \mathbb{N}[X_2, \ldots, X_n]$.

- Montrons maintenant que cette série converge lorsque $N \to \infty$. On sait que la série $\sum a_n z^n$ converge sur $D(0,r)$. Pour $r' < r$, $|a_n r'^n| \to 0$. Donc il existe $M > 0$ tel que $|a_n| \leq M^n$. Or,

$$z = \omega + \sum_{n=2}^{+\infty} P_n\left(M^2, \ldots, M^n\right)\omega^n$$

est solution de :

$$\begin{aligned}\omega =& z - \sum_{n\geq 2} M^n z^n \\ =& z - \left(\frac{1}{1 - Mz} - 1 - Mz\right)\end{aligned}$$

Donc

$$(1 - Mz)\,\omega = z(1 - Mz) - 1 + 1 - Mz + Mz(1 - Mz)$$

C'est à dire :

$$z^2\left(M + M^2\right) + z\left(-M\omega - 1\right) + \omega = 0$$

ou

$$z = \frac{(M\omega + 1) - \sqrt{(1 + M\omega)^2 - 4\omega\left(M + M^2\right)}}{2(M + M^2)}$$

On prend ici pour $\sqrt{\cdot}$ la détermination holomorphe de $()^{1/2}$ qui existe sur $D(1,1)$ et pour laquelle $\sqrt{1} = 1$ de sorte que pour $\omega = 0$, $z = 0$.

La série définissant $\sqrt{\cdot}$ converge alors sur $D(0, R)$ où $R = \frac{1}{(1+\sqrt{2})M+4M^2}$. En effet, alors, on a

$$\left|M^2\omega^2\right| \leq M^2 |\omega| R \leq \frac{M^2 |\omega|}{(1+\sqrt{2})\, M} = \left(\sqrt{2}-1\right) M |\omega|$$

et donc

$$\left|\left(2M+4M^2\right)\omega - M^2\omega^2\right| \leq \left(2M+4M^2\right)|\omega| + \left|M^2\omega^2\right| \leq \left(\left(1+\sqrt{2}\right) M + 4M^2\right)|w| < 1$$

D'où la convergence de $g(\omega) = \omega + \sum_{n\geq 2} P_n(a_2, \ldots, a_n)\, \omega^n$ sur $D(0, R)$. et $g(D(0, R)) \subset D(0, 1/M)$.

- Par identification de la série entière en zéro et principe du prolongement analytique, nous avons $f \circ g(\omega) = \omega$ pour $\omega \in D(0, R)$. De plus, par construction, g est injective sur $W = D(0, R)$ et l'image $\omega = f(z)$ atteint surjectivement W sur $g(W) \subseteq D(0, 1/M) \cap f^{-1}(W)$. Prenons V la composante connexe de 0 dans $D(0, 1/M) \cap f^{-1}(W)$. Alors $f(V) \subset W$ et $g(W) \subset V$. V, W sont ouverts et $f_{|V} \circ g_{|W} = id_W$. Par connexité de V et prolongement analytique, $g_{|W} \circ f_{|V} = id_V$.

■

Théorème 4.2: Pré-Application Ouverte

Soit $f \in \mathcal{O}(U)$ non constante au voisinage de $a \in U$, $f(a) = 0$ et

$$m = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid f^{(k)}(a) \neq 0\}$$

Il existe alors un voisinage ouvert V de a, un voisinage ouvert W de 0 et un biholomorphisme $\varphi : V \to W$ tel que φ envoie a sur 0 et $f(z) = f(a) + \varphi(z)^m$.

Démonstration. D'après le théorème 2.4 il existe $U' \subseteq U$ un voisinage de a et $g \in \mathcal{O}(U')$ tels que pour tout $z \in U'$

$$f(z) - f(a) = \alpha(z-a)^m g(z)$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $g(a) = 1$.
Soit $V = \{z \in U' \mid |g(z) - 1| < 1\}$. C'est un voisinage de a sur lequel $\exp \frac{1}{m} \log(g(z))$ existe.
On a alors

$$\forall z \in V', f(z) = f(a) + (\varphi(z))^m$$

où

$$\varphi(z) = \alpha_m(z-a) \exp\left(\frac{1}{m} \log(g(z))\right)$$

où $\alpha_m^m = \alpha$. Alors, $\varphi \in \mathcal{O}(V')$ avec $\varphi(a) = 0$ et $\varphi'(a) = 1$. Par théorème d'inversion locale 5.1, on a un voisinage $V \subset V'$ de a sur lequel φ est un biholomorphisme. ■

Corollaire 4.1: Solutions d'une Équation

Soit $f \in \mathcal{O}(U)$ non constante au voisinage de $a \in U$ et

$$m = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid f^{(k)}(a) \neq 0\}$$

. Alors, $\exists r, \rho \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\forall \omega \in D(f(a), \rho) \setminus \{f(a)\}$ l'équation $f(z) = \omega$ a exactement m solutions dans $D(a, r)$.

Démonstration. On écrit par le théorème 5.2 précédent $f(z) = \omega = f(a) + \varphi(z)^m$ où $\varphi : V \to W$ est tel que $\varphi(a) = 0$. On suppose $\varphi(z) = (\omega - f(a))^{1/m}$ pour une certaine détermination de l'exponentielle. On prend r tel que $D(a, r) \subset V$. $\varphi(D(a, r))$ est un ouvert de W voisinage de 0.

Il existe un ρ' tel que $D(0,\rho')$ est inclus dans $\varphi(D(a,r))$. Alors, pour tout $\omega \in D(f(a),\rho'^m)$, $(\omega - f(a))^{1/m} \in D(0,\rho')$. Mézalor, $e^{2ik\pi/m}(w-f(a))^{1/m}$ sont dans $D(0,\rho')$. On obtient alors

$$z_k = \varphi^{-1}\left(e^{2ik\pi/m}(\omega - f(a))^{1/m}\right) \in D(a,r)$$

.
Les z_k sont solutions de $f(z)=\omega$ et donc il y en a bien exactement m.
De même, l'équation $f(z)=f(a)$ n'a qu'une solution $z=a$ dans $D(a,r)$ de multiplicité m. ■

Théorème 4.3: Application Ouverte

Une fonction holomorphe non constante sur un ouvert U connexe est une application ouverte.

Démonstration. Par le corollaire 5.1, tout point $z_0 \in U$ admet un voisinage $V_{z_0} \subset U$ tel que $f(V_{z_0}) = D(f(z_0),\rho(z_0))$. Ainsi, $f(U) = \cup D(f(z_0),\rho(z_0))$ est ouvert. ■

Théorème 4.4: Théorème d'Inversion Gloable

Soit U un ouvert connexe et $f \in \mathcal{O}(U)$ injective. Alors :

1. $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$
2. f' ne s'annule pas sur U
3. $f: U \to f(U)$ est un biholomorphisme

Démonstration.

1. D'après le théorème de l'application ouverte 5.3, f, injective donc non constante, est ouverte donc $f(U)$ est ouverte et f est une bijection continue ouverte de U dans $f(U)$, i.e., un homéomorphisme.
2. Supposons qu'il existe z_0 pour lequel $f'(z_0)=0$. Dans le théorème 5.1, on a un entier $m \geq 2$ et donc f n'est pas injective au voisinage de z_0 ce qui est absurde. Donc f' ne s'annule pas sur U.
3. D'après les deux premiers points et le théorème 5.1 d'inversion locale, f^{-1} est holomorphe sur $f(U)$ et $f: U \to f(U)$ est un biholomorphisme.

■

Théorème 4.5: Goursat

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ ouvert et K un compact à bord de classe $\mathcal{C}^1$ avec l'orientation canonique du bord. Pour toute fonction holomorphe sur U on a :

$$\int_{\partial K} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Démonstration. On approche K par des compacts à bords polygonaux. Notons $\delta = d(K, \mathbb{C}\backslash U) > 0$. Paramétrons δK par un nombre fini d'arcs $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Pour chaque tel arc $\gamma : [a,b] \to U$, soit une subdivision $a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = b$ telle que $|\gamma(\tau_{j+1}) - \gamma(\tau_j)| \leq \varepsilon \leq \delta/2$. Chaque segment $[\gamma(\tau_{j+1}), \gamma(\tau_j)] \subset U$. Pour ε assez petit, la réunion de ces segments constitue le bord d'un compact K_ε à bord polygonal. $K_\varepsilon = \cup_i T_i$ est réunion de triangles adjacents et le lemme de Goursat 3.6 implique

$$\int_{\partial K_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}(z) = \sum_i \int_{\partial T_i} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

D'après la proposition , on a bien :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial K_\varepsilon} = \int_{\partial K} f(z)\,\mathrm{d}z$$

D'où le résultat. ■

Théorème 4.6: Formule de Cauchy

Soit f holomorphe sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{C}$ et K un compact à bord orienté $\mathcal{C}^1$ par morceaux inclus dans U. Alors, pour tout $z \in K$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(\omega)}{\omega - z} \, \mathrm{d}\omega$$

Démonstration. Soit $r > 0$ tel que $\overline{D(z,r)} \subset \mathring{K}$. On note $K_r = K \setminus D(z,r)$. K_r est un compact à bord orienté $\mathcal{C}^1$ par morceaux dont le bord est $\partial K_r = \partial K \cup \partial D^-(z,r)$ où ∂D^- signifie que ce cercle a l'orientation opposée à celle obtenue comme bord de $\overline{D(z,r)}$. La fonction $g(\omega) = f(\omega)/(\omega - z)$ et holomorphe sur $U \setminus \{z\}$. Le théorème de Goursat 4.5 appliqué à g sur le compact $K_r \subseteq U \setminus \{z\}$ donne

$$\int_{\partial K} \frac{f(\omega)}{\omega - z} \, \mathrm{d}\omega - \int_{\partial D(z,r)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} \, \mathrm{d}\omega = 0$$

En posant $\omega = z + re^{it}$ on a :

$$\int_{\partial D(z,r)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} \, \mathrm{d}\omega = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} \, \mathrm{d}t = i \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) \, \mathrm{d}t$$

et cette dernière intégrale tend vers $2i\pi f(z)$ lorsque r tend vers 0 par continuité de f au point z. ■

Théorème 4.7: Équivalence Holomorphie-Analycité

Soit $f : U \to \mathbb{C}$. f est holomorphe sur U si et seulement si elle est analytique.

Démonstration. On a déjà l'implication analycité holomorphie. Supposons f holomorphe sur U et $\overline{D}(z_0, r) \subset U$. Pour $z \in D(z_0, r)$, la formule de Cauchy 4.6 donne

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} \, \mathrm{d}\omega$$

Or

$$\frac{1}{\omega - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\omega - z_0)^{n+1}}$$

De plus, pour $\omega = z_0 + re^{it}$,

$$\left| \frac{(z - z_0)^n}{(\omega - z_0)^{n+1}} \right| = \frac{1}{r} \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^n, \text{ avec } |z - z_0|/r < 1$$

Par convergence normale pour $t \in [0, 2\pi]$, on obtient :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0,r)} f(\omega) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\omega - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}\omega = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\omega)}{2i\pi (\omega - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}\omega \, (z - z_0)^n = \sum a_n (z - z_0)^n$$

et la série entière ci-dessus converge normalement sur les compacts de $D(z_0, r)$. ■

Corollaire 4.2: Classe des Dérivées

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Toute fonction holomorphe sur U est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U. Précisément, pour tout $K \subset U$ compact à bord de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et pour tout $z \in \mathring{K}$ nous avons :

1. $\forall n \geq 0, \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z) = f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{n+1}} \, \mathrm{d}\omega$
2. $\forall n \geq 0, \forall m \geq 0, \frac{\partial^{n+m} f}{\partial z^n \partial \bar{z}^m}(z) = 0$.

En particulier, une fonction holomorphe f admet des dérivées complexes $f^{(n)}$ d'ordre n arbitraire et les dérivées $f^{(n)}$ sont holomorphes.

Théorème 4.8: Morera

Soit f une fonction continue sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Nous supposons que $\int_{\partial T} f(z) \, \mathrm{d}z = 0$ pour tout triangle T inclus dans U. Alors f est holomorphe sur U.

Démonstration. Soit $z_0 \in U$ et $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r) \subset U$. Pour $z \in D(z_0, r)$, on pose

$$F(z) = \int_{[z_0, z]} f(\omega) \, \mathrm{d}\omega$$

Soit $z \in D(z_0, r)$ et $h \neq 0$ tel que $z + h \in D(z_0, r)$. Comme le triangle de sommets $z_0, z, z + h$ est inclus dans $D(z_0, r)$, nous avons

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(\omega) \, \mathrm{d}\omega = \int_0^1 f(z + th) \, \mathrm{d}t$$

Comme f est continue au point z,

$$\lim_{h \in \mathbb{C}^*, h \to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z)$$

Ainsi F est holomorphe sur $D(z_0, r)$ donc analytique d'après le théorème 4.7 et sa dérivée $f = F'$ l'est donc aussi. ∎

Corollaire 4.3: Γ

La fonction Γ

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} \, \mathrm{d}t$$

est holomorphe pour $\Re s > 0$.

Démonstration. L'intégrale converge en $t = 0$ car $\left| t^{s-1} e^{-t} \right| \leq t^{\Re s - 1}$. À s fixé pour $t \in \mathbb{R}_+$ grand,

$$\left| t^{s-1} e^{-t} \right| = t^{\Re s - 1} e^{-t} \leq e^{t/2} e^{-t} = e^{-t/2}$$

Donc $\Gamma(s)$ est bien définie pour $\Re s > 0$. Soit $\gamma : [0, 1] \to \{s, \Re s > 0\}$ la courbe décrivant un triangle. Alors, d'après le théorème de Fubini

$$\int_\gamma \Gamma(s) \, \mathrm{d}s = \int_\gamma \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}s = \int_0^{+\infty} \left(\int_\gamma t^{s-1} \, \mathrm{d}s \right) e^{-t} \, \mathrm{d}t = 0$$

Ainsi, en appliquant le théorème de Morera 4.8, la fonction Γ est holomorphe sur le demi-plan $\Re s > 0$. ∎

5 Propriétés Élémentaires des Fonctions Holomorphes

5.1 Théorème d'inversion locale

Théorème 5.1: Inversion Locale

Si $f \in \mathcal{O}(U)$, $a \in U, f'(a) \neq 0$, alors, $\exists V$ voisinage ouvert de a inclus dans U sur lequel f est biholomorphe sur $f(V)$ ouvert.

Démonstration. Comme $f \in \mathcal{O}(U)$, f est $\mathbb{R}$-différentiable. Donc il existe un voisinage V ouvert de U contenant a sur lequel $f_{|V} : V \to f(V)$ est un difféomorphisme. Alors, $\mathrm{d}_{f(z)}(f^{-1}) = (d_z f)^{-1}$ et donc $f^{-1} \in \mathcal{O}(U)$. ■

Idée des Séries Majorantes. **??**

- On suppose d'abord $a = 0, f(a) = 0, f'(a) = 1$. On a

$$f(z) = z - \sum_{n \geq 2} a_n z^n, z \in D(0, r)$$

  On veut résoudre $f(z) = \omega = z - \sum_{n \geq 2} a_n z^n$ i.e. $z = \omega + \sum_{n \geq 2} a_n z^n$. Mais, $\sum_{n \geq 2} a_n z^n = \mathcal{O}(w^2)$:

$$z = \omega + \sum_{n \geq 2} a_n \left(\omega + \mathcal{O}(\omega^2)\right)^n = \omega + a_2 \omega^2 + \mathcal{O}(\omega^3)$$

  On peut alors réinjecter :

$$z = \omega + a_2 \omega^2 + \left(2a_2^2 + a_3\right) \omega^3 + \mathcal{O}(\omega^4)$$

  et ainsi de suite :

$$z = \omega + \sum_{n=2}^{N} P_n(a_2, \ldots, a_n) \omega^n + \mathcal{O}(\omega^{N+1})$$

  où les $P_n \in \mathbb{N}[X_2, \ldots, X_n]$.

- Montrons maintenant que cette série converge lorsque $N \to \infty$. On sait que la série $\sum a_n z^n$ converge sur $D(0, r)$. Pour $r' < r$, $|a_n r'^n| \to 0$. Donc il existe $M > 0$ tel que $|a_n| \leq M^n$. Or,

$$z = \omega + \sum_{n=2}^{+\infty} P_n \left(M^2, \ldots, M^n\right) \omega^n$$

  est solution de :

$$\begin{aligned} \omega =& z - \sum_{n \geq 2} M^n z^n \\ =& z - \left(\frac{1}{1 - Mz} - 1 - Mz\right) \end{aligned}$$

  Donc

$$(1 - Mz)\, \omega = z(1 - Mz) - 1 + 1 - Mz + Mz(1 - Mz)$$

  C'est à dire :

$$z^2 \left(M + M^2\right) + z\left(-M\omega - 1\right) + \omega = 0$$

  ou

$$z = \frac{(M\omega + 1) - \sqrt{(1 + M\omega)^2 - 4\omega\left(M + M^2\right)}}{2(M + M^2)}$$

  On prend ici pour $\sqrt{\cdot}$ la détermination holomorphe de $()^{1/2}$ qui existe sur $D(1, 1)$ et pour laquelle $\sqrt{1} = 1$ de sorte que pour $\omega = 0$, $z = 0$.

La série définissant $\sqrt{\cdot}$ converge alors sur $D(0,R)$ où $R=\frac{1}{(1+\sqrt{2})M+4M^2}$. En effet, alors, on a

$$\left|M^2\omega^2\right| \leq M^2\left|\omega\right| R \leq \frac{M^2\left|\omega\right|}{(1+\sqrt{2})\, M} = \left(\sqrt{2}-1\right) M\left|\omega\right|$$

et donc

$$\left|\left(2M+4M^2\right)\omega - M^2\omega^2\right| \leq \left(2M+4M^2\right)\left|\omega\right| + \left|M^2\omega^2\right| \leq \left(\left(1+\sqrt{2}\right)M+4M^2\right)\left|w\right| < 1$$

D'où la convergence de $g(\omega)=\omega+\sum_{n\geq 2} P_n\left(a_2,\ldots,a_n\right)\omega^n$ sur $D(0,R)$. et $g(D(0,R)) \subset D(0,1/M)$.

- Par identification de la série entière en zéro et principe du prolongement analytique, nous avons $f\circ g(\omega)=\omega$ pour $\omega\in D(0,R)$. De plus, par construction, g est injective sur $W=D(0,R)$ et l'image $\omega=f(z)$ atteint surjectivement W sur $g(W)\subsetneq D(0,1/M)\cap f^{-1}(W)$. Prenons V la composante connexe de 0 dans $D(0,1/M)\cap f^{-1}(W)$. Alors $f(V)\subset W$ et $g(W)\subset V$. V,W sont ouverts et $f_{|V}\circ g_{|W}=id_W$. Par connexité de V et prolongement analytique, $g_{|W}\circ f_{|V}=id_V$.

■

5.2 Théorème de l'Application Ouverte

Théorème 5.2: Pré-Application Ouverte

Soit $f\in\mathcal{O}(U)$ non constante au voisinage de $a\in U$, $f(a)=0$ et

$$m=\min\{k\in\mathbb{N}^* \mid f^{(k)}(a)\neq 0\}$$

Il existe alors un voisinage ouvert V de a, un voisinage ouvert W de 0 et un biholomorphisme $\varphi: V\to W$ tel que φ envoie a sur 0 et $f(z)=f(a)+\varphi(z)^m$.

Démonstration. D'après le théorème 2.4 il existe $U'\subseteq U$ un voisinage de a et $g\in\mathcal{O}(U')$ tels que pour tout $z\in U'$

$$f(z)-f(a)=\alpha(z-a)^m g(z)$$

avec $\alpha\in\mathbb{C}^*$ et $g(a)=1$.
Soit $V=\{z\in U' \mid |g(z)-1|<1\}$. C'est un voisinage de a sur lequel $\exp\frac{1}{m}\log(g(z))$ existe.
On a alors

$$\forall z\in V', f(z)=f(a)+(\varphi(z))^m$$

où

$$\varphi(z)=\alpha_m(z-a)\exp\left(\frac{1}{m}\log(g(z))\right)$$

où $\alpha_m^m=\alpha$. Alors, $\varphi\in\mathcal{O}(V')$ avec $\varphi(a)=0$ et $\varphi'(a)=1$. Par théorème d'inversion locale 5.1, on a un voisinage $V\subset V'$ de a sur lequel φ est un biholomorphisme. ■

Corollaire 5.1: Solutions d'une Équation

Soit $f\in\mathcal{O}(U)$ non constante au voisinage de $a\in U$ et

$$m=\min\{k\in\mathbb{N}^* \mid f^{(k)}(a)\neq 0\}$$

. Alors, $\exists r,\rho\in\mathbb{R}_+^*$ tels que $\forall\omega\in D(f(a),\rho)\setminus\{f(a)\}$ l'équation $f(z)=\omega$ a exactement m solutions dans $D(a,r)$.

Démonstration. On écrit par le théorème 5.2 précédent $f(z) = \omega = f(a) + \varphi(z)^m$ où $\varphi : V \to W$ est tel que $\varphi(a) = 0$. On suppose $\varphi(z) = (\omega - f(a))^{1/m}$ pour une certaine détermination de l'exponentielle. On prend r tel que $D(a,r) \subset V$. $\varphi(D(a,r))$ est un ouvert de W voisinage de 0. Il existe un ρ' tel que $D(0,\rho')$ est inclus dans $\varphi(D(a,r))$. Alors, pour tout $\omega \in D(f(a),\rho'^m)$, $(\omega - f(a))^{1/m} \in D(0,\rho')$. Mézalor, $e^{2ik\pi/m}(w - f(a))^{1/m}$ sont dans $D(0,\rho')$. On obtient alors

$$z_k = \varphi^{-1}\left(e^{2ik\pi/m}(\omega - f(a))^{1/m}\right) \in D(a,r)$$

.

Les z_k sont solutions de $f(z) = \omega$ et donc il y en a bien exactement m.

De même, l'équation $f(z) = f(a)$ n'a qu'une solution $z = a$ dans $D(a,r)$ de multiplicité m. ■

Théorème 5.3: Application Ouverte

Une fonction holomorphe non constante sur un ouvert U connexe est une application ouverte.

Démonstration. Par le corollaire 5.1, tout point $z_0 \in U$ admet un voisinage $V_{z_0} \subset U$ tel que $f(V_{z_0}) = D(f(z_0),\rho(z_0))$. Ainsi, $f(U) = \cup D(f(z_0),\rho(z_0))$ est ouvert. ■

Théorème 5.4: Théorème d'Inversion Gloable

Soit U un ouvert connexe et $f \in \mathcal{O}(U)$ injective. Alors :

1. $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$
2. f' ne s'annule pas sur U
3. $f : U \to f(U)$ est un biholomorphisme

Démonstration.

1. D'après le théorème de l'application ouverte 5.3, f, injective donc non constante, est ouverte donc $f(U)$ est ouverte et f est une bijection continue ouverte de U dans $f(U)$, i.e., un homéomorphisme.
2. Supposons qu'il existe z_0 pour lequel $f'(z_0) = 0$. Dans le théorème 5.1, on a un entier $m \geq 2$ et donc f n'est pas injective au voisinage de z_0 ce qui est absurde. Donc f' ne s'annule pas sur U.
3. D'après les deux premiers points et le théorème 5.1 d'inversion locale, f^{-1} est holomorphe sur $f(U)$ et $f : U \to f(U)$ est un biholomorphisme.

■

5.3 Lemme de Schwarz

Théorème 5.5: Principe du Maximum

Soit $f \in \mathcal{O}(U)$

1. Si $|f|$ admet une maximum local en un point $a \in U$, alors f est constante sur la composante connexe contenant a.
2. Pour tout $K \subset U$

$$\max_K |f| = \max_{\partial K} |f|, \max_K \Re f = \max_{\partial K} \Re f, \max_K \Im f = \max_{\partial K} \Im f$$

Démonstration.

1. Supposons f non constante sur la composante connexe U_0 de U contenant a avec $|f(a)| = \sup_U |f| = \sup_{U_0} |f|$. D'après le théorème de l'application ouverte, f est ouverte sur U_0. L'image $f(U_0)$ est un voisinage de $f(a)$ donc contient des points de module strictement supérieur à $|f(a)|$.

2. Si $\max_{\partial K} \Re f < \max_K \Re f$, il existe $z_0 \in \mathring{K}$ avec $\Re f(z_0) = \max_K \Re f$. Soit U_0 une composante connexe de z_0 dans $\mathring{K}$ et f non constante dans U_0. Alors $f(U_0)$ est un ouvert qui contient $f(z_0)$ et qui est contenue dans le demi-plan $\{w \mid \Re w \leq \Re f(z_0)\}$. Donc f est constante sur U_0 et $\Re f_{|\partial U_0} = \Re f(z_0)$ par continuité de f. Or

$$\varnothing \neq \partial U_0 \subset \partial \mathring{K} = \overline{\mathring{K}} \setminus \mathring{K} \subseteq \overline{K} \setminus \mathring{K} = \partial K$$

ainsi, $\max_K \Re f = \Re f(z_0)$ est atteint sur ∂K. Les cas $|f|$ et $\Im f$ sont analogues.

■

Théorème 5.6: Lemme de Schwarz

Soit f holomorphe sur $D(0,1)$ avec $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq 1$ sur $D(0,1)$. Alors, on a

$$\forall z \in D(0,1), |f(z)| \leq |z| \text{ et } |f'(0)| \leq 1$$

De plus si

$$\exists z_0 \in D(0,1) \setminus \{0\}, |f(z_0)| = |z_0| \text{ ou } |f'(0)| = 1$$

alors f est une rotation : $f(z) = az$ pour $a \in \mathbb{C}, |a| = 1$.

Démonstration. L'application $g(z) = f(z)/z$ est holomorphe sur $D(0,1)$ et vérifie $g(0) = f'(0)$. En appliquant le principe du maximum à la fonction g sur $D(0,r), r < 1$, on obtient :

$$\sup_{D(0,r)} |g| = \sup_{\partial D(0,r)} |g| = \sup_{\partial D(0,r)} |f| / r \leq 1/r$$

En faisant tendre r vers 1, nous obtenons

$$\sup_{D(0,1)} |g| \leq 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} |f(z)| \leq |z| & \forall z \in D(0,1) \setminus \{0\} \\ |f'(0)| \leq 1 \end{cases}$$

De plus, si $\exists z_0 \in D(0,1) \setminus \{0\}$, $|f(z_0)| = |z_0|$ ou si $|g(0)| = |f'(0)| = 1$, alors $|g|$ admet un maximum local en z_0 ou 0 donc $g = a$ est constante avec $|a| = 1$. ■

Corollaire 5.2: Point Fixe

Soit $f : D(0,1) \to D(0,1)$ holomorphe, $f \neq \mathrm{Id}$. Alors f a au plus un point fixe.

Démonstration. Supposons que nous ayons $a \neq b \in D(0,1)$ avec $f(a) = a$ et $f(b) = b$.
Si $a = 0, f(0) = 0, f(b) = b$, le lemme de Schwarz montre que $f = e^{i\theta} z$ et comme $f(b) = b$, $f = \mathrm{Id}$.
On peut donc supposer $a \neq 0$. Posons $\varphi_\alpha(z)$ [1] $= \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ et

$$g = \varphi_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} \text{ et } \lambda = \varphi_\alpha(b) \neq 0$$

Ainsi, $g : D(0,1) \to D(0,1)$ avec deux points fixes $g(0) = 0, g(\lambda) = \lambda$. Donc $g = \mathrm{Id} = f$. Absurde. ■

5.4 Disque Unité et Inversion Locale Effective

Définition 5.1: Automorphisme

Un automorphisme de U est une bijection holomorphe de U dans U. On note $\mathrm{Aut}\, U$ l'ensemble des automorphismes de U.

1. C'est la fonction du jour !

On rappelle que le groupe unitaire de signature (n, m) est le groupe des matrices préservant une forme hermitienne de signature (n, m). Il est isomorphe au groupe $U(n, m)$ préservant la forme hermitienne diagonale de signature (n, m) :

$$U(n,m) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{n+m}(\mathbb{C}) \;\middle|\; \begin{array}{l} AA* - BB* = I_n \\ DD* - CC* = I_m \\ AC* = BD* \end{array} \right\}$$

Théorème 5.7: Automorphisme du Disque Unité

$$\mathrm{Aut}\, D(0,1) = \left\{ \varphi_\alpha : z \longmapsto e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{C}, |a| < 1 \right\} = \mathrm{PSU}(1,1)$$

Démonstration. • Nous vérifions que $\varphi_\alpha \in \mathrm{Aut}\, D$. Soit $f \in \mathrm{Aut}\, D$. On note $a = f(0)$. On a $\varphi_\alpha \circ f(0) = 0$ et pour tout $z \in D$, $|\varphi_\alpha \circ f(z)| < 1$. Le lemme de Schwarz 5.6 implique alors que $g = \varphi_\alpha \circ f$ vérifie $|g(z)| \leq |z|$ et de même $\left|g^{-1}(z)\right| \leq |z|$ donc $|g(z)| = |z|$ pour $z \in D$. Donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $g(z) = e^{i\theta} z$.

• L'application :

$$\varphi_\alpha \longmapsto \frac{1}{1-|a|^2} \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & -\alpha e^{i\theta/2} \\ -\bar{\alpha} e^{-i\theta/2} & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$$

induit un automorphisme

$$\mathrm{Aut}\, D \to \mathrm{PSU}(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ \overline{A} & \overline{B} \end{pmatrix} \;\middle|\; |A|^2 - |B|^2 = 1 \right\} / \pm \mathrm{Id}$$

■

Corollaire 5.3: Schwarz-Pick

Soit $f : D(0,1) \to D(0,1)$ holomorphe. Pour $z \in D(0,1)$ on a :

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}$$

avec égalité si et seulement si $f \in \mathrm{Aut}\, D(0,1)$.

Démonstration. La dérivée de $\varphi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z} \in \mathrm{Aut}\, D$ vérifie :

$$\varphi_\alpha'(z) = \frac{1-|\alpha|^2}{(1-\bar{\alpha}z)^2}, \varphi_\alpha'(0) = 1-|\alpha|^2, |\varphi_\alpha'(\alpha)| = \frac{1}{1-|\alpha|^2}$$

Soit $z_0 \in D$ et $g = \varphi_{f(z_0)} \circ f \circ \varphi_{-z_0}$. On a $g(0) = 0$ et $g : D \to D$. Le lemme de Schwarz 5.6 implique que $|g(z)| \leq |z|$ et $|g'(0)| \leq 1$. L'inégalité attendue résulte de

$$g'(0) = \varphi_{f(z_0)}(f(z_0)) f'(z_0) \varphi_{-z_0}'(0) = \frac{1}{1-|f(z_0)|^2} f'(z_0)(1-|z_0|)^2$$

Le cas d'égalité correspond à $|g'(0)| = 1$. Alors g et donc f sont des automorphismes de D. ■

Théorème 5.8: Bloch-Landau

Soit $f \in \mathcal{O}(D(z_0, r))$ telle que $f'(z_0) \neq 0$. Alors il existe $U \subset D(z_0, r)$ tel que $f_{|U}$ est un biholomorphisme de U sur $f(U) = D(\omega_0, R)$ disque de rayon $R \geq \frac{r}{12} |f'(z_0)|$.

Démonstration. Quitte à considérer la restriction de f et à remplacer f par $f(z_0 + rz)$ on peut considérer définie au voisinage du disque fermé $\overline{D}(0,1)$. On pose

$$m = \sup_{z \in \overline{D}(0,1)} \left(1 - |z|^2\right) |f'(z)| \geq |f'(0)|$$

La valeur m est atteinte en $\alpha \in D(0,1)$ et alors $m = \left(1 - |\alpha|^2\right) |f'(\alpha)|$. Posons $h = f \circ \varphi_{-\alpha}$. On a :

$$h(0) = f(\alpha), h'(0) = f'(\alpha)\varphi_{-\alpha}(0) = \left(1 - |\alpha|^2\right) f'(\alpha), |h'(0)| = m \geq |f'(0)|$$

De plus, pour $|z| < 1$, d'après le corollaire de Schwarz-Pick 5.3 :

$$\left(1 - |z|^2\right) |h'(z)| = \frac{\left(1 - |z|^2\right) |\varphi'_{-a}(z)|}{1 - |\varphi_{-\alpha}(z)|^2} \left(1 - |\varphi_{-\alpha}(z)|^2\right) |f'(\varphi_{-\alpha}(z))| \leq m$$

Quitte à remplacer h par $\frac{1}{h'(0)}(h - h(0))$, on peut supposer $h(0) = 0$ et $m = h'(0) = 1$. Donc :

$$|h'(z)| \leq \frac{1}{1 - |z|^2}, z \in D(0,1)$$

Le rayon de convergence du développement en série entière [2]

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$$

est supérieur à 1 et les inégalités de Cauchy appliquées à h' sur le disque $D(0,\rho)$ donnent

$$h^{(n)}(\omega) = \frac{(n-1)!}{2\pi\rho^{n-1}} \int_0^{2\pi} \frac{h'(\omega + re^{it})}{e^{i(n-1)t}} \mathrm{d}t \text{ et } n\,|a_n| \leq \frac{1}{(1-\rho^2)\rho^{n-1}}$$

Or, $\rho \mapsto (1-\rho^2)\rho^{n-1}$ atteint son maximum en $\rho = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$. Pour ce ρ, on obtient :

$$|a_n| \leq \frac{n+1}{2n} \left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^{(n-1)/2}$$

et pour $M = 3^{3/4}/2$, $|a_n| \leq M^n$ si $n \geq 2$.
En reprenant la preuve du théorème d'inversion locale par la méthode des séries majorantes 5.1, on obtient que h est un biholomorphisme d'un ouvert U sur le disque $D(0,R)$ avec :

$$R = \frac{1}{\left(1 + \sqrt{2}\right) M + 4M^2} > \frac{1}{12}$$

■

6 Espaces de Fonctions Holomorphes

6.1 Convergence de Suites de Fonctions Holomorphes

On dit qu'une suite converge localement de manière uniforme lorsque

$$\forall x \in U, \exists r_x > 0, f_n \xrightarrow[D(x,r_x)]{\text{CU}} f$$

La convergence uniforme localement est équivalente à la convergence uniforme sur tout compact.

Démonstration. $\Leftarrow$ K étant compact, on le recouvre par un nombre fini de disques.

2. DONC DE TAYLOR

$\Rightarrow$ En considérant un disque fermé inclus dans l'ouvert, on a convergence sur ce disque. ■

On rappelle que si $\sum f_n$ converge uniformément sur un compact et que les f_n sont holomorphes, $\sum f_n \in \mathcal{O}(K)$.

Théorème 6.1: Weierstrass

Soit $f_n \in \mathcal{O}(U)$, $f_n \xrightarrow[\forall K \subset U]{\text{CU}} f$. Alors, $f \in \mathcal{O}(U)$ et $\forall l \in \mathbb{N}, f_n^{(l)} \xrightarrow[\forall K \subset U]{\text{CU}} f^{(l)}$.

Démonstration. On considère $\overline{D(a,r)} \subset U$. On a :

$$f_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f_n(\omega)}{\omega - z} \, \mathrm{d}\omega$$

On échange limite et intégrale par convergence uniforme et on obtient les formules de Cauchy pour f. ■

6.2 Théorèmes de Runge

On cherche une suite de polynôme convergeant vers une fonction holomorphe.

Théorème 6.2: Runge - 1

Soit $f \in \mathcal{O}(D(z_0, R))$, $K \subseteq D(z_0, R)$. Alors, si $\varepsilon > 0$, il existe $P_\varepsilon \in \mathbb{C}[z]$ tel que

$$\max_K |f - P_\varepsilon| < \varepsilon$$

Démonstration. On suppose d'abord $z_0 = 0$. On pose $f(z) = \sum a_n z^n$ sur $D(0, R)$, on note R' son rayon de convergence. Par la formule d'Hadamard :

$$\frac{1}{R'} = \limsup |a_n|^{1/n}$$

Pour $\delta > 0$, il existe $N(\delta)$ tel que $|a_n|^{1/n} \leq 1/R' + \delta$. On choisit r assez petit pour que $0 < R - r < d(K, \mathbb{C} \setminus D(0, R))$. ■

Lemme 6.1: Approximation Rationnelle

Soit K un compact inclus dans U ouvert de $\mathbb{C}$. Pour $\gamma : [0,1] \to U \setminus K$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$. Nous notons

$$F_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $P, Q \in \mathbb{C}[Z]$ avec Q sans zéro dans K tels que

$$\max_{z \in K} \left| F_\gamma(z) - \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \varepsilon$$

Démonstration. Idée : La fonction

$$H : \begin{array}{rcl} K \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (z,t) & \longmapsto & \frac{1}{2i\pi} \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} \gamma'(t) \end{array}$$

est continue sur le compact $K \times [0,1]$ donc uniformément continue. Par conséquent

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, |t_1 - t_2| \leq \delta(\varepsilon) \Longrightarrow |H(z,t_1) - H(z,t_2)| \leq \varepsilon, \forall z \in K$$

Ainsi, pour n tel que $1/n \le \delta(\varepsilon)$,

$$\left| F_{\gamma(z)} - \sum_{k=0}^{n-1} H(z,k/n)\frac{1}{n} \right| \le \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} |H(z,t) - H(z,k/n)| \,\mathrm{d}t \le \varepsilon$$

En posant

$$\frac{P}{Q} = \sum_{k=0}^{n-1} H(z,k/n)\frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2i\pi}\frac{f(\gamma(k/n))}{\gamma(k/n)-z}\gamma'(k/n)1/n$$

on obtient une fraction rationnelle qui approche F_γ sur K avec $Q(z) = \prod_{k=0}^{n-1}(\gamma(k/n) - z) \in \mathbb{C}[z]$. ■

Théorème 6.3: Runge - 2 - Rationelle Edition

Soit $K \subseteq U$ un compact. Toute fonction $f \in \mathcal{O}(U)$ peut-être approchée uniformément sur K par des fractions rationnelles sans pôle sur K :

$$\forall f \in \mathcal{O}(U), \forall \varepsilon > 0, \exists P, Q \in \mathbb{C}[z] \text{telsque} \max_{z\in K} \left| f(z) - \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \le \varepsilon$$

Démonstration.

- Construction d'un contour de K. Soit $\alpha \in \left]0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ et

$$\delta = \alpha d(K, \mathbb{C} \setminus U) > 0$$

Pour $k, l \in \mathbb{Z}$, nous notons le carré plein fermé de côté δ :

$$\overline{\Pi}_{k,l} = \{x + iy \in \mathbb{C} | k\delta \le x \le (k+1)\delta, l\delta \le y \le (l+1)\delta\}$$

et $\Pi_{k,l} = \mathring{\overline{\Pi}}_{k,l}$ le carré plein ouvert. Nous avons le pavage

$$\mathbb{C} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \bigcup_{l\in\mathbb{Z}} \overline{\Pi}_{k,l}$$

Nous notons $\overline{\Pi}_1, \ldots, \overline{\Pi}_J$ la collection de tous les $\overline{\Pi}_{k,l}$ d'intersection non nulle avec K et $\gamma_1, \ldots, \gamma_H$ les segments de longueur δ qui appartiennent au bord d'un unique $\overline{\Pi}_j$ sans appartenir à deux bords de deux carrés adjacents. Quitte à translater K et réduire δ, on peut supposer que K contient au moins un point à l'intérieur de chaque carré.
Pour tout j, il existe $z_j \in \Pi_j \cap K$. On a :

$$|z_j - w| \le \sqrt{2}\delta \Rightarrow w \in \overline{\Pi}_j$$

Or, $\delta < \alpha d(K, \mathbb{C} \setminus U)$ donc

$$\sqrt{2}\delta < d(K, \mathbb{C} \setminus U)$$

Par conséquent, $\overline{\Pi}_j \subseteq \overline{D}(z_j, \sqrt{2}\delta) \subseteq U$ et

$$\bigcup_j \overline{\Pi}_j \subseteq U \text{ et } \bigcup_{1\le h\le H} \gamma_h \subseteq U$$

De plus, pour tout $1 \le h \le H$, $\gamma_h \cap K = \varnothing$. Sinon, si $z \in \gamma_h \cap K$, il existe deux carrés adjacents tel que $\gamma_h = \overline{\Pi}_{k(h),l(h)} \cap \overline{\Pi}_{k'(h),l'(h)}$. Comme z appartient à chacun d'eux, les carrés $\overline{\Pi}_{k(h),l(h)}$ et $\overline{\Pi}_{k'(h),l'(h)}$ appartiennent tous deux à la collection des $\overline{\Pi}_i$. Donc γ_h est un bord commun à deux carrés de la collection ce qui est exclu.

- Pour tout $z \in K \setminus \bigcup_{j=1}^{J} \delta\Pi_j$, il existe un unique $j(z)$ avec $z \in \Pi_{j(z)}$. Pour tout $j' \ne j(z)$,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\delta\Pi_{j'}} \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w = 0$$

et
$$f(z) = \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{2i\pi} \int_{\delta\Pi_j} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

- Si $z \in K \setminus \bigcup_{j=1}^{J} \delta\Pi_j$, on a, par définitions des γ_h, les contributions des autres bords des $\delta\Pi_j$ s'annulant deux à deux :
$$f(z) = \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{2i\pi} \int_{\delta\Pi_j} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \sum_{h=1}^{H} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_h} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$
Comme $\gamma_h \cap K = \varnothing$, les intégrales $\int_{\gamma_h} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$ sont continues par rapport à $z \in K$. L'égalité précédente est donc encore satisfaite pour $z \in K \cap \bigcup_{j=1}^{J} \delta\Pi_j$.
D'après le lemme précédent 6.1, pour tout $1 \leq h \leq H$, il existe $P_h, Q_h \in \mathbb{C}[z]$, Q_h sans zéros dans K avec
$$\sup_{z \in K} \left| F_{\gamma_h}(z) - \frac{P_h(z)}{Q_h(z)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{H}$$
Posons alors $Q = \prod_{h=1}^{H} Q_h \in \mathbb{C}[z]$ et
$$P = Q \prod_{h=1}^{H} \frac{P_h}{Q_h} \in C[z]$$
On obtient alors :
$$\left| f(z) - \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \varepsilon$$

■