Analyse Complexe

Ariane Mézard

6 février 2024

Table des matières

Première partie
Fonctions Holomorphes

1 Fonctions Analytiques

1.1 Séries Entières

Définition 1.1: Série Entière

Une série entière est une série de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ où $z \in \mathbb{C}$ et $a_n \in \mathbb{C}$.
Le domaine de convergence de la série entière est l'ensemble Δ des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels la série converge.

Proposition 1.1: Critère de Cauchy

Soient a_n une suite complexe et $0 < r < r_0$. S'il existe $M > 0$ tel que

$$|a_n| \, r_0^n \leq M, n \geq 0$$

alors $a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0, r)$.

Corollaire 1.1: Rayon de Convergence

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ défini par

$$R = \sup \left\{ r \geq 0 \text{ tel que la suite } \left(|a_n| \, r^n \right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ soit bornée} \right\}$$

Alors le domaine de convergence Δ de la série vérifie :

$$D(0, R) \subseteq \Delta \subseteq \overline{D}(0, R)$$

Définition 1.2: Rayon de Convergence

On appelle le nombre R défini ci-dessus rayon de convergence.

Proposition 1.2: Rayon d'Hadamard

Le rayon de convergence est donné par

$$R = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|^{1/n}}$$

Avec la convention $1/0 = \infty$

Lemme 1.1: Lemme d'Abel

Soit u_n une suite réelle décroissante vers 0 et v_n une suite complexe telle que les sommes partielles $s_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ soient bornées. Alors la série $\sum u_n v_n$ converge.

Proposition 1.3: Principe des Zéros Isolés

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Si au moins un des coefficients a_n n'est pas nul, il existe $r \in]0, +\infty[$ tel que f ne s'annule pas pour $|z| \in]0, r[$.

Définition 1.3: Dérivée Complexe

Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ admet une dérivée par rapport à la variable complexe au point z_0 si

$$\lim_{z\to u} \frac{f(z_0 + u) - f(z_0)}{u}$$

existe. Cette limite est alors appelée dérivée de f en z_0.

Proposition 1.4: Dérivée d'une Série Entière

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors, pour tout $l \in \mathbb{N}^\star$, les dérivées l-ièmes de f ont pour rayon de convergence R et pour expression :

$$f^{(l)}(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(n+l)!}{n!} a_{n+l} z^n$$

Corollaire 1.2: Primitive

Une série entière $f(z) = \sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ admet sur $D(0, R)$ une primitive complexe

$$F(z) = \sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

Proposition 1.5: S

it $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $z_0 \in D(0, R)$. La série entière

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)\omega^n$$

a un rayon de convergence supérieur à $R - |z_0|$ et pour tout $z \in D(z_0, R - |z_0|)$,

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n$$

1.2 Fonctions Analytiques

Définition 1.4: Fonction Analytique

Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est dite analytique si elle est DSE au voisinage de chaque point de U.

Proposition 1.6: Dérivabilité

Une fonction analytique sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ admet des dérivées de tous ordres qui sont des fonctions analytiques sur U. De plus, pour tout $z_0 \in U$, f est somme de sa série de Taylor en z_0 sur un voisinage de z_0.

Corollaire 1.3: Unicité du DSE

Une fonction analytique sur U admet un unique développement en série entière au voisinage de chaque point de U.

Lemme 1.2: Nullité

Si U est connexe et f est analytique sur U, nulle sur un ouvert non-vide de U, alors f est identiquement nulle sur U.

Proposition 1.7: Zéros Isolés

oit f une fonction analytique sur un ouvert connexe U. Si f n'est pas identiquement nulle, ses zéros sont isolés, i.e. si $z_0 \in U$ avec $f(z_0) = 0$, alors il existe $r > 0$ tel que z_0 soit le seul z_0 de f sur $D(z_0, r)$

Théorème 1.1: Prolongement Analytique

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, f, g des fonctions analytiques sur U. Si f, g coincident sur une partie Σ de U qui a un point d'accumulation dans U, alors elles coincident sur U.

Définition 1.5: Primitive

Etant donnée une fonction analytique f sur U, une fonction analytique F de U dans $\mathbb{C}$ est dite primitive de f si $F'(z) = f(z)$ sur U.

1.3 Détermination du Logarithme

Définition 1.6: Détermination de l'Argument

Soit $U \subseteq \mathbb{C}^\star$ ouvert. Une fonction continue $\arg : U \to \mathbb{R}$ est dite détermination continue de l'argument sur U si pour tout $z \in U$, $\exp(i \arg(z)) = \frac{z}{|z|}$

Définition 1.7: Détermination Principale

La détermination continue de l'argument

$$\begin{aligned} \mathbb{C} - \mathbb{R}_- &\longrightarrow \;]-\pi, \pi[\\ z &\mapsto \; 2 \arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right) \end{aligned}$$

en prenant la racine carrée de z appartenant au demi-plan $\Re z > 0$ est appelée détermination principale de l'argument.

Définition 1.8: Logarithme

Soit $U \subseteq \mathbb{C}^\star$ ouvert. Une fonction continue $f : U \to \mathbb{C}$ est dite détermination du logarithme sur U si

$$\forall z \in U, \exp(f(w)) = w$$

Définition 1.9: Détermination Principale du Log

On définit pour $\theta \in \mathbb{R}$ la fonction

$$\log_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_- e^{i\theta}, \log_\theta(w) = \log|w| + i \arg_\theta(w)$$

La fonction $\log_0$ est appelée détermination principale du logarithme et notée log.

Proposition 1.8: DSE du Logarithme

log est DSE sur $D(1,1)$ et sur $D(0,1)$ on a

$$\log(1+z) = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$$

Par conséquent, sur $D(z_0, |z_0|)$,

$$g(z) = \log z_0 + i\theta_0 + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{z-z_0}{z_0}\right)^n$$

est une détermination analytique du logarithme.

Proposition 1.9: Analycité des Déterminations

Il y a équivalence sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}^\star$ pour une application continue l entre :

- l est une détermination du logarithme à l'addition d'une constante près
- l est une primitive analytique de $\frac{1}{z}$ sur U.

Définition 1.10: Détermination

Soit $U \subseteq \mathbb{C}^\star$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Une détermination continue de z^α est une application continue g de U dans $\mathbb{C}$ telle qu'il existe une détermination du logarithme $l(z)$ de z telle que $g(z) = \exp^{\alpha l(z)}$.

2 Théorie de Cauchy

2.1 Homotopie et Simple Connexité

Définition 2.1: Chemin

Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Un chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ est une application continue. Le point $\gamma(a)$ est appelé origine et le point $\gamma(b)$ est dit extrémité. On orientera par défaut un chemin dans le sens des paramètres croissants. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, le chemin est dit lacet d'origine $\gamma(a)$.

Définition 2.2: Opérations

1. Si γ est constant, son image est réduite à un point. Il est alors appelé chemin (ou lacet) constant.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^\star$, $\gamma : t \in [0,1] \mapsto e^{2i\pi\alpha t}$ est un chemin dont l'image est une partie du cercle unité $\partial D(0,1)$. Si $\alpha = n \in \mathbb{Z}^\star$, $\gamma([0,1])$ est le cercle tout entier parcouru n fois.
3. Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ est un chemin, le chemin opposé

$$\gamma^0 : t \in [a,b] \mapsto \gamma(a+b-t)$$

   est γ parcouru en sens inverse.
4. La juxtaposition de γ_1, γ_2 tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ est le chemin $\gamma = \gamma_1 \wedge \gamma_2 : [a, d+b-c] \to \mathbb{C}$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{pour } a \leq t \leq b \\ \gamma_2(t-b+c) & \text{pour } b \leq t \leq d+b-c \end{cases}$$

Définition 2.3: Homotopie

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $\gamma_i : I \to U$, $i \in \{1, 2\}$ deux chemins. Une homotopie de γ_1 à γ_2 dans U est une application continue φ de $I \times J$ dans U où $I = [a, b]$ et $J = [c, d]$ sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ telle que :

$$\varphi(t, c) = \gamma_1(t) \text{ et } \varphi(t, d) = \gamma_2(t), t \in I$$

Définition 2.4: Simple Connexité

Un espace topologique X connexe par arcs est dit simplement connexe si tout lacet dans X est homotope à un point dans X.

Proposition 2.1

- Un espace topologique est simplement connexe si et seulement si tous les chemins de même extrémités sont homotopes.
- Un ouvert étoilé par rapport à un point est simplement connexe. En particulier, dans $\mathbb{C}$, le plan, un demi-plan, un disque ouvert, l'intérieur d'un rectangle ou d'un triangle sont simplement connexes.
- Le demi-plan ouvert $\Im z > 0$ auquel nous ôtons un nombre fini de demi-droites fermées $z = t + i\beta_k$, $t \in]-\infty, \alpha_k]$ est simplement connexe non étoilé.
- $\mathbb{C}^\star$ n'est pas simplement connexe car le cercle unité n'est pas homotope à un chemin constant.

2.2 Intégrales sur un Chemin

Dorénavant, les chemins sont supposés $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Définition 2.5: Equivalence de Chemins

Deux chemins $\gamma_i : I_i \to \mathbb{C}$ sont dits équivalents s'il existe une bijection croissante $\varphi : I_2 \to I_1$ continue de réciproque continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux telle que :

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(\varphi(t)), t \in I_2$$

Définition 2.6: Intégrale le long d'un Chemin

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ continue et $\gamma : I = [a, b] \to \mathbb{C}$ un chemin avec $\gamma(I) \subseteq U$. Alors, la fonction $t : f(\gamma(t))\gamma'(t)$ est continue par morceaux dans $[a, b]$. On appelle intégrale de f le long du chemin γ :

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

Définition 2.7: Longueur

La longueur d'un chemin est le réel :

$$long(\gamma) = \int_a^b \left|\gamma^{'}(t)\right|\,\mathrm{d}t$$

Proposition 2.2: Propriétés

- Si F est une primitive de f, pour tout chemin γ :
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$
- Si $\gamma_1 \sim \gamma_2$ alors
$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$
- Si $[Z_0, z_1] \subseteq U$, nous notons $\int_{[z_0,z_1]} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ où $\gamma : t \in [0,1] \mapsto (1-t)z_0 + tz_1$.
- Si $\partial D(z_0, r) \subseteq U$, soit le lacet $\gamma : \theta \in [0, 2\pi] \mapsto z_0 + re^{i\theta}$. On a :
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial D(z_0,r)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) ire^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$$
- En séparant parties réelles et imaginaires, $f = P + iQ$ et $\gamma = u + iv$, on a :
$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^b \left((P\circ\gamma)\,u' - (Q\circ\gamma)\,v'\right)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \left((Q\circ\gamma)\,u' + (P\circ\gamma)\,u'\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_\gamma (P\,\mathrm{d}x - Q\,\mathrm{d}y) + i\int_\gamma (P\,\mathrm{d}y + Q\,\mathrm{d}x)\end{aligned}$$
- On a :
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma^0} f(z)\,\mathrm{d}z$$
- On a :
$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq long(\gamma)\max_\gamma |f|$$

2.3 Théorème de Cauchy

Théorème 2.1: de Cauchy

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe et f une fonction analytique dans U. Si γ_1, γ_2 sont deux lacets homotopes dans U, alors
$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$
En particulier, si U est simplement connexe, l'intégrale sur un lacet de f est nulle.

Théorème 2.2

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe.

1. Toute fonction analytique dans U admet une primitive.
2. Si $f : U \to \mathbb{C}^\star$ est analytique, alors il existe $g : U \to \mathbb{C}$ analytique tel que $\exp(g) = f$ sur U.

2.4 Formule de Cauchy

Lemme 2.1: Intégrité de l'Indice

Soit $\gamma : I = [c, d] \to \mathbb{C}$ un lacet et $a \notin \gamma(I)$. Alors

$$j(a, \gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - a} \in \mathbb{Z}$$

Démonstration. Pour $t \in [c, d]$ on pose

$$h(t) = \int_c^t \frac{\gamma'(s)\,\mathrm{d}s}{\gamma(s) - a}$$

On a $h'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}$, sauf en un nombre fini de points de I.
Remarquons que $g(t) = e^{-h(t)}\left(\gamma(t) - a\right)$ a pour dérivée

$$g'(t) = -h'(t)e^{-h(t)}\left(\gamma(t) - a\right) + \gamma'(t)e^{-h(t)} = 0$$

sauf en un nombre fini de points de I. Comme g est continue, elle est constante et $g(c) = g(d)$.
Or, $h(c) = 0$ donc $g(c) = \gamma(c) - a = g(d) = e^{-h(d)}(\gamma(d) - a)$. Mais γ est un lacet, donc $\gamma(c) = \gamma(d)$.
Donc $h(d) = 2in\pi$. Donc $j(a, \gamma) = n \in \mathbb{Z}$. ■

Définition 2.8: Indice

L'entier $j(a, \gamma)$ est appelé indice de a par rapport au lacet γ et s'interprète comme le nombre de fois que le lacet tourne autour de a lorsque a est intérieur au lacet.

Proposition 2.3: Propriétés

1. Soit $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ des lacets de même origine dont les lacets ne contiennent pas a. Alors,

$$j(a, \gamma^0) = -j(a, \gamma) \text{ et } j(a, \gamma_1 \wedge \gamma_2) = j(a, \gamma_1) + j(a, \gamma_2)$$

2. En appliquant le théorème de Cauchy à la fonction analytique $1/(z - a)$ dans $\mathbb{C} - \{a\}$, nous obtenons $j(a, \gamma_1) = j(a, \gamma_2)$ si γ_1, γ_2 sont homotopes dans $\mathbb{C} - \{a\}$.
3. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe et $\gamma \subset U$. Si $a \notin U$, alors $j(a, \gamma) = 0$.
4. Si γ set un lacet dans $\mathbb{C}$, pour tout ouvert connexe U de $\mathbb{C} - \gamma(I)$, la fonction $z \mapsto j(z, \gamma)$ est constante dans U.
5. Soit $\gamma_n : t \mapsto e^{int}$, on a :

$$j(z_0, \gamma_n) = \begin{cases} n & si\,|z_0| < 1 \\ 0 & si\,|z_0| > 1 \end{cases}$$

Démonstration du point iv. Soit $z \in D(z_0, r) \subseteq U$,

$$j(z, \gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}u}{u - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}u}{u - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}u}{u - z_0} = j(z_0, \gamma)$$

pour $\gamma_1 : t \mapsto \gamma(t) + (z - z_0)$ qui est homotopie à γ via

$$\varphi(t, s) = \gamma(t) + s(z - z_0), 0 \leq s \leq 1$$

Donc $j(\cdot, \gamma)$ est localement constante donc constante sur U connexe. ■

Théorème 2.3: Formule de Cauchy

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe, $\gamma : I \to U$ un lacet dans U. Soit f analytique sur U. Pour tout $w \in U \setminus \gamma(I)$

$$j(w,\gamma)f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w} \,\mathrm{d}z$$

Démonstration. La fonction

$$g : z \in U \mapsto \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & \text{si } z \neq w \\ f'(w) & \text{si } z = w \end{cases}$$

est analytique sur U. En effet pour $r > 0$ assez petit, f admet un développement de Taylor sur $D(w,r) \subseteq U$ et donc pour $z \in D(w,r)$:

$$g(z) = f'(w) + \frac{f''(w)}{2!}(z-w) + \cdot + \frac{f^{(n)}(w)}{n!}(z-w)^{n-1} + \cdot$$

Comme U est simplement connexe, le théorème de Cauchy donne $\int_\gamma g = 0$ et comme $w \notin \gamma(I)$, $\int_\gamma \frac{f(z)-f(w)}{z-w} \,\mathrm{d}z = 0$ c'est à dire :

$$\int_\gamma \frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{z-w} = f(w) \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-w} = 2i\pi j(w,\gamma)f(w)$$

■

Corollaire 2.1: Valeur en un point

On a :

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(z)}{z-w} \,\mathrm{d}z, w \in D(z_0,r)$$

Proposition 2.4: Continuité sur un Lacet

Soit $\gamma : I = [c,d] \to \mathbb{C}$ un lacet et $g : \gamma(I) \to \mathbb{C}$ une fonction définie et continue sur $\gamma(I)$. Alors :

$$f(z) = \int_\gamma \frac{g(u)\,\mathrm{d}u}{u-z}$$

est définie et analytique dans $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$.
Précisément, pour tout $w \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$c_n = \int_\gamma \frac{g(u)\,\mathrm{d}u}{(u-w)^{n+1}}$$

nous avons un développement en série entière convergente

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z-w)^n$$

dans tout disque ouvert de centre w et de rayon $r = d(w, \gamma(I))$ et

$$f^{(n)}(w) = n! c_n = n! \int_\gamma \frac{g(u)\,\mathrm{d}u}{(u-w)^{n+1}}$$

Démonstration. Pour tout $u \in \gamma(I), z \in D(w, qr), q \in [0,1]$, la série

$$\frac{1}{u-z} = \frac{1}{u-w}\frac{1}{1-\frac{z-w}{u-w}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-w)^n}{(u-w)^{n+1}}$$

est convergente. Comme $(g \circ \gamma)\,\gamma'$ est continue par morceaux sur $[c,d]$ il existe M tel que

$$|g(\gamma(t))\gamma'(t)| \leq M$$

Donc :

$$\left| g\left(\gamma(t)\right)\gamma'(t)\frac{(z-w)^n}{(\gamma(t)-w)^{n+1}} \right| \leq M\frac{q^n}{r}, t \in [c,d]$$

Finalement, la série sous l'intégrale est normalement convergente et :

$$f(z) = \int_c^d \frac{g(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t}{\gamma(t)-z} = \int_c^d g(\gamma(t))\gamma'(t)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-w)^n}{(\gamma(t)-w)^{n+1}}\right)\mathrm{d}t$$

et donc $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-w)^n$ ∎

Proposition 2.5: Dérivée n-ième

Soit f analytique sur U et γ le bord de $\overline{D}(w,r) \subseteq U$. D'après la formule de Cauchy :

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}\frac{f(w+re^{it})}{e^{nit}}\,\mathrm{d}t$$

Corollaire 2.2

1. Soit f analytique sur U. Pour tout $a \in U$, la série de Taylor de f au voisinage de a est convergente et a pour somme $f(z)$ dans le plus grand disque ouvert de centre a contenu dans U
2. Si f est analytique sur $\mathbb{C}$, sa série de Taylor en tout point de $\mathbb{C}$ est convergente sur $\mathbb{C}$.

Démonstration. On applique la formule de Cauchy sur le contour γ d'un disque $D(a,r)$ contenu dans U. Pour $z \in D(a,r), j(z,\gamma) = 1$ et

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}z$$

La proposition 2.4 donne un développement en série entière de f en $z-a$ convergeant sur $D(a,r)$. Par unicité du développement, il s'agit de la série de Taylor. En faisant tendre r vers $d(a, \mathbb{C}-U)$, nous obtenons le résultat annoncé. ∎

Corollaire 2.3: Constance Locale

Supposons U connexe, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{C}$ analytique. Si pour tout $k > 0, f^{(k)}(a) = 0$, alors f est constante sur U.

Démonstration. D'après le corollaire 2.4, f est localement somme de sa série de Taylor. Donc f est constante sur un ouvert contenant a. Soit $\Omega = \{w \in U, \forall k > 0, f^{(k)}(w) = 0\}$. Cet ensemble est ouvert, non vide, et fermé. Par connexité de U, $\Omega = U$, $f' = 0$ sur U et f est constante sur U. ∎

Théorème 2.4: Multiplicité

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ analytique non constante au voisinage de $a \in U$. Si $f(a) = 0$, il existe un unique entier $m \geq 1$ et $g : V \to \mathbb{C}$ analytique sur un voisinage V de a tels que

$$f(z) = (z-a)^m g(z), g(a) \neq 0, z \in V$$

En particulier, le point a possède un voisinage dans lequel il est l'unique zéro de f.

Démonstration. D'après le corollaire 2.4, si f n'est pas constante dans un voisinage de a, il existe $m \geq 1$ tel $f^{(m)}(a) \neq 0$ et $f'(a) = \ldots = f^{(m-1)}(a) = 0$.
Comme $f(a) = 0$, on peut alors factoriser $(z-a)^m$ dans le développement en série de Taylor de f en a. ∎

Définition 2.9: Ordre

L'entier m du théorème précédent est dit ordre de f en a, noté $ord(f, a)$.

2.5 Inégalités de Cauchy, Premières Applications

Proposition 2.6: Inégalités de Cauchy

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ analytique, $\overline{D}(w, r) \subset U, r > 0$. On a, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|f^{(n)}(w)\right| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{z \in \partial D(w,r)} |f(z)|$$

Démonstration. On a :

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \frac{f(w + re^{it})}{e^{nit}} \,\mathrm{d}t$$

On en déduit immédiatement le résultat. ∎

Lemme 2.2: Bornitude et Polynomialité

Soit f analytique sur $\mathbb{C}$. Supposons qu'il existe $A, B \geq 0$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq A\left(1 + |z|\right)^B$$

Alors f est un polynôme de degré $\leq B$.

Démonstration. Soit $n \geq \lfloor B \rfloor + 1 > B$. Par les inégalités de Cauchy, puisque

$$\sup_{\partial D(z,r)} |f(z)| \leq A\left(1 + |z| + r\right)^B$$

on a :

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \frac{n!}{r^n} A(1 + |z| + r)^B$$

En faisant tendre r vers $+\infty$, par croissance comparée, $f^{(n)}(w) = 0$ pour $n \geq B$. Localement, f étant somme de sa série de Taylor, c'est localement un polynôme de degré au plus B, ce qui est donc le résultat. ∎

Théorème 2.5: Liouville

Une fonction analytique bornée sur $\mathbb{C}$ est constante.

Théorème 2.6: d'Alembert-Gauss

Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[z]$ de degré ≥ 1 admet une racine dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. Par l'absurde, si $P(z) = \sum_{i=0}^{d} a_i z^i$ ne s'annule pas, $f = 1/P$ est analytique sur $\mathbb{C}$ et $|f(z)| \sim \frac{1}{|a_d||z|^d}$ tend vers 0 quand $|z|$ tend vers $+\infty$. En particulier, f est bornée sur $\mathbb{C}$ donc constante d'après le théorème de Liouville. Ainsi, $P = 1/f$ est constant, ce uqui est absurde. ■

Théorème 2.7: Topologie

Les ouverts $\mathbb{C}$ et $D(0,1)$ sont homéomorphes mais pas isomorphes.

Démonstration. Oui. ■