

TD3 Topo

Matthieu Boyer

16 octobre 2023

Table des matières

1	Exercice 1 : Echauffement	2
1.1	Question 1	2
1.1.1	Question a.	2
1.1.2	Question b.	2
1.2	Question 2	2
1.3	Question 3	2
1.4	Question 4	2
1.4.1	Question a.	2
1.4.2	Question b.	2
1.4.3	Question c.	2
1.5	Question 5	2
1.5.1	Question a.	2
1.5.2	Question b.	2
2	Exercice 2 : Topologie Induite	3
2.1	Question 1	3
2.2	Question 2	3
2.2.1	Question a.	3
2.2.2	Question b.	3
2.2.3	Question c.	3
3	Exercice 3 : Séparation et espaces quotients	3
3.1	Question 1	3
3.2	Question 2	3
3.3	Question 3	3
3.3.1	Question a.	3
3.3.2	Question b.	3
4	Exercice 4 : Lemme d’Urysohn	3
4.1	Question 1	3
4.2	Question 2	4
4.3	Question 3	4
4.3.1	Question a.	4
4.3.2	Question b.	4
5	Exercice 5 : Quelques propriétés des espaces produits	4
5.1	Question 1	4
5.2	Question 2	4
5.3	Question 3	4

6	Exo 10 TD4/ TD5	4
6.1	Question 1	4
6.2	Question 2	5
6.3	Question 3	5
6.4	Question 4	5
	6.4.1 Question a.	5
	6.4.2 Question b.	5
	6.4.3 Question c.	5
6.5	Question 5	5

1 Exercice 1 : Echauffement

1.1 Question 1

1.1.1 Question a.

Plus ou moins vrai, $f|_A$ est continue pour la topologie induite/trace

1.1.2 Question b.

Faux, il suffit de prendre la fonction sign qui n'est pas continue sur \mathbb{R} mais qui l'est sur \mathbb{R}^{+*}

1.2 Question 2

Vrai, les singletons sont ouverts

1.3 Question 3

Faux, les singletons ne sont pas ouverts.

1.4 Question 4

1.4.1 Question a.

On a $\pi([0, 1]) = [0, 1]$. Mais $[\cdot]^{-1}([0, 1]) =]-1, 1[$ qui est ouvert.

1.4.2 Question b.

On a $\pi(1) = 1$ et $\pi([0, 1]) = [0, 1]$. Or, ce segment contient un voisinage de 1 : 1. Donc c'est bien un voisinage de 1

1.4.3 Question c.

On ne peut pas séparer -1 et 1 .

1.5 Question 5

1.5.1 Question a.

Faux : $0, -1$ n'est pas ouvert.

1.5.2 Question b.

Faux : 0 est ouvert.

2 Exercice 2 : Topologie Induite

2.1 Question 1

Oui bon ça va hein

2.2 Question 2

2.2.1 Question a.

La fonction j étant croissante de réciproque croissante pour \subset , c'est bien un homéomorphisme.

2.2.2 Question b.

$\overline{\{\omega\}} = Y$ et donc : $\{\{\omega\}\}$ est une base finie de Y .

2.2.3 Question c.

On a $\omega \in U \cap V$

3 Exercice 3 : Séparation et espaces quotients

3.1 Question 1

Si $(x, y) \in (X \times X)/\mathcal{R}$, on a U, V ouverts de X/\mathcal{R} tels que :

$$x \in U, y \in V$$

$$U \cap V = \emptyset$$

Alors, $\{[t] \mid t \in U\}$ (de même pour V) est ouvert. Donc en particulier, \mathcal{R} est fermé.

3.2 Question 2

Si \mathcal{R} est fermée, alors si, $(x, y) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})/\mathcal{R}$ il existe des voisinages disjoints de x et y . Par ouverture de π on obtient bien la séparation de X/\mathcal{R} .

3.3 Question 3

3.3.1 Question a.

- ($i. \Rightarrow ii.$) On considère : $\|\cdot\| : S \mapsto \sup_{x \in S} d(x, F)$. Il est clair que cette application est positive et est nulle si et seulement si $\forall x \in S, x \in \overline{F} = F$ i.e. $S \subset F$. Par les propriétés de d , cette fonction définit bien une norme sur E/F en passant au quotient.
- ($ii. \Rightarrow iii.$) En particulier, E/F est métrisable donc est séparé.
- ($iii. \Rightarrow i.$) Ceci est une conséquence de la question 1.

3.3.2 Question b.

- (\Leftarrow) Si $F = \ker f$ est fermé. En particulier si $U \subset \Im f$ est ouvert, en quotientant par F , puisque E/F est normable, f est continue.
- (\Rightarrow) Si f est continue, il est clair que $\ker f$ est fermé.

4 Exercice 4 : Lemme d'Urysohn

4.1 Question 1

En prenant pour ouverts dans la définition d'un espace normal $f^{-1}([0, 1/3])$ et $f^{-1}([2/3, 1])$, on a bien le résultat.

4.2 Question 2

Si (X, d) est métrique, si F_0, F_1 sont fermés disjoints dans X . En particulier, en prenant un recouvrement d'ouverts le plus petit possible de F_0 et un de F_1 , on a bien le résultat.

4.3 Question 3

4.3.1 Question a.

Déjà, il existe une bijection r de \mathbb{N} dans \mathcal{D} . Ensuite, on peut définir par récurrence la famille G . On suppose que les r_k pour $k < n$ sont déjà définis.

On pose alors $U_n = F_0 \cup \bigcup_{k < n, r_k < r_n} \overline{G_{r_k}}$. C'est un fermé, inclus dans l'ouvert : $V_n = F_1^c \cap$

$$\bigcap_{k < n, r_k > r_n} G_{r_k}.$$

Puisque X est normal, il existe donc un ouvert G_{r_n} tel que : $U_n \subset G_{r_n}$ et $\overline{G_{r_n}} \subset V_n$.

On a bien défini une famille de fermés $(G_x)_{x \in \mathcal{D}}$ qui convient.

4.3.2 Question b.

Il est clair que f est bien définie, à valeurs dans $0, 1$. De plus, il est aussi clair que : $f(F_0) = 0$ puisque $\forall x \in F_0, x \in G_1$ et $x \in F_0$.

Ensuite, si $x \in F_1, x \notin G_1 \subset F_1^c$. Donc $f(F_1) = 1$.

Enfin, par densité des nombres dyadiques, il est clair que f est continue.

5 Exercice 5 : Quelques propriétés des espaces produits

5.1 Question 1

Bah oui. 'fin, c'est trivial quoi.

5.2 Question 2

Faites un effort svp.

5.3 Question 3

- (\Leftarrow) Si I est dénombrable, le résultat est direct en prenant pour métrique l'infimum des métriques
- (\Rightarrow) Sinon, si I n'est pas dénombrable, supposons qu'il y ait une métrique d qui induit la topologie produit sur X . En particulier, si on pose se donne une famille croissante C de parties finies de I , $O_{i,n} = \prod_{k \in C_i} B_{X_k}(x_k, 1/n)$, les $O_{i,n}$ sont ouverts donc sont des ouverts pour d . Mais alors, en faisant tendre i vers l'infini, on n'obtient plus des ouverts, ce qui contredit l'existence de d .

6 Exo 10 TD4/ TD5

6.1 Question 1

On peut appliquer la propriété universelle à $K = Y$, $f = j_x$. On dispose d'une unique fonction continue \hat{f} telle que $\hat{f} \circ \iota_X = j_X$. On a alors de même une fonction continue \hat{g} en inversant les rôles de \hat{X} et Y . En appliquant la propriété universelle à $K = \hat{X}$ et $f = \iota_X$ on dispose d'une unique application continue telle que $\hat{h} \circ \iota_X = \iota_X$. Par unicité, $\hat{h} = \text{id}$. Comme $\hat{g} \circ \hat{f}$ convient aussi, on a bien le résultat.

6.2 Question 2

- ι_X est continue
- Soit x, y deux points distincts. $\{y\}$ est fermé car X est séparé. Puisque X est de Tychonoff, il existe $f : X \rightarrow [0, 1]$ continue qui envoie x sur 0 et y sur 1. On applique la propriété universelle à f , pour $K = [0, 1]$. On dispose de $\hat{f} : \hat{X} \rightarrow [0, 1]$ continue telle que $f(\iota_X(x)) = 0$ et $f(\iota_X(y)) = 1$ donc ι_X est injective, et donc bijective sur son image.
- Soit $F \subset X$ un fermé. Soit $x \in X \setminus F$. Montrons que $\iota_X(x) \in U \subset X \setminus \iota_X(F)$. Puisque X est de Tychonoff, il existe f de X dans $[0, 1]$ continue telle que $f(x) = 0$ et $f^{-1}(F) = \{1\}$. Par propriété universelle, il existe \hat{f} continue telle que $\hat{f} \circ \iota_X = f$. Remarquons alors que $\hat{f}^{-1}([0, 1/2])$ est un ouvert par continuité de \hat{f} . De plus, $\iota_X(x)$ est dans cet ouvert, et $\iota_X(F) \cap \hat{f}^{-1}([0, 1/2]) = \emptyset$ d'où le résultat. Donc ι_X est ouverte et donc sa réciproque est continue. Finalement, on a bien le résultat.

6.3 Question 3

Théorème de Tychonoff

6.4 Question 4

6.4.1 Question a.

Si on a $I(x) = I(y)$, en particulier, leurs images par toute application continue de X dans $[0, 1]$ sont égales. Donc en particulier, x et $\{y\}$ sont pas séparables et donc, puisque X est de Tychonoff, on a le résultat.

6.4.2 Question b.

Soit $U = \prod_{g \in C_X} O_g$ un ouvert avec $O_g = [0, 1]$ sauf en $g_1, \dots, g_n \in C_X$ où $O_{g_i} = U_i$ ouvert de $[0, 1]$. On a alors :

$$\begin{aligned} I(x) \in U &\Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n, I(x)(g_i) \in U_i \\ &\Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n, g_i(x) \in U_i \end{aligned}$$

Ainsi : $I^{-1}(U) = \bigcap_{i=1}^n g_i^{-1}(U_i)$ qui est un ouvert par continuité de g_i .

6.4.3 Question c.

Si F est un fermé de X , $x \notin F$. Puisque X est de Tychonoff, il existe f de X dans $[0, 1]$ continue telle que $f(x) = 0$ et $f^{-1}(F) = \{1\}$. Alors, on a $I(x)(f) = 0$ et $\forall y \in F, I(y)(f) = \{1\}$. On a donc, en particulier, $U \cap I(F) = \emptyset$ où $U = [0, 1/2[\times [0, 1]^{C_X \setminus \{f\}}$ et donc I est ouverte.

6.5 Question 5