

Analyse Complexe

Ariane Mézard

5 février 2024



Table des matières

I Fonctions Holomorphes	1
1 Fonctions Analytiques	1
1.1 Séries Entières	1
1.2 Fonctions Analytiques	3
1.3 Détermination du Logarithme	4
2 Théorie de Cauchy	5
2.1 Homotopie et Simple Connexité	5
2.2 Intégrales sur un Chemin	6
2.3 Théorème de Cauchy	7
2.4 Formule de Cauchy	8

Première partie

Fonctions Holomorphes

1 Fonctions Analytiques

1.1 Séries Entières

Définition 1.1: Série Entière

Une série entière est une série de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ où $z \in \mathbb{C}$ et $a_n \in \mathbb{C}$.
Le domaine de convergence de la série entière est l'ensemble Δ des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels la série converge.

Proposition 1.1: Critère de Cauchy

Soient a_n une suite complexe et $0 < r < r_0$. S'il existe $M > 0$ tel que

$$|a_n| r_0^n \leq M, n \geq 0$$

alors $a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0, r)$.

Corollaire 1.1: Rayon de Convergence

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ défini par

$$R = \sup \{ r \geq 0 \text{ tel que la suite } (|a_n| r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ soit bornée} \}$$

Alors le domaine de convergence Δ de la série vérifie :

$$D(0, R) \subseteq \Delta \subseteq \overline{D}(0, R)$$

Définition 1.2: Rayon de Convergence

On appelle le nombre R défini ci-dessus rayon de convergence.

Proposition 1.2: Rayon d'Hadamard

Le rayon de convergence est donné par

$$R = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|a_n|^{1/n}}$$

Avec la convention $1/0 = \infty$

Lemme 1.1: Lemme d'Abel

Soit u_n une suite réelle décroissante vers 0 et v_n une suite complexe telle que les sommes partielles $s_n = \sum_{k=0}^n v_k$ soient bornées. Alors la série $\sum u_n v_n$ converge.

Proposition 1.3: Principe des Zéros Isolés

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Si au moins un des coefficients a_n n'est pas nul, il existe $r \in]0, +\infty[$ tel que f ne s'annule pas pour $|z| \in]0, r[$.

Définition 1.3: Dérivée Complexe

Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ admet une dérivée par rapport à la variable complexe au point z_0 si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Cette limite est alors appelée dérivée de f en z_0 .

Proposition 1.4: Dérivée d'une Série Entière

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, les dérivées l -ièmes de f ont pour rayon de convergence R et pour expression :

$$f^{(l)}(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(n+l)!}{n!} a_{n+l} z^n$$

Corollaire 1.2: Primitive

Une série entière $f(z) = \sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ admet sur $D(0, R)$ une primitive complexe

$$F(z) = \sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

Proposition 1.5: S

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $z_0 \in D(0, R)$. La série entière

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \omega^n$$

a un rayon de convergence supérieur à $R - |z_0|$ et pour tout $z \in D(z_0, R - |z_0|)$,

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n$$

1.2 Fonctions Analytiques**Définition 1.4: Fonction Analytique**

Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est dite analytique si elle est DSE au voisinage de chaque point de U .

Proposition 1.6: Dérivabilité

Une fonction analytique sur un ouvert U de \mathbb{C} admet des dérivées de tous ordres qui sont des fonctions analytiques sur U . De plus, pour tout $z_0 \in U$, f est somme de sa série de Taylor en z_0 sur un voisinage de z_0 .

Corollaire 1.3: Unicité du DSE

Une fonction analytique sur U admet un unique développement en série entière au voisinage de chaque point de U .

Lemme 1.2: Nullité

Si U est connexe et f est analytique sur U , nulle sur un ouvert non-vide de U , alors f est identiquement nulle sur U .

Proposition 1.7: Zéros Isolés

Soit f une fonction analytique sur un ouvert connexe U . Si f n'est pas identiquement nulle, ses zéros sont isolés, i.e. si $z_0 \in U$ avec $f(z_0) = 0$, alors il existe $r > 0$ tel que z_0 soit le seul zéro de f sur $D(z_0, r)$

Théorème 1.1: Prolongement Analytique

Soit U un ouvert connexe de \mathbb{C} , f, g des fonctions analytiques sur U . Si f, g coïncident sur une partie Σ de U qui a un point d'accumulation dans U , alors elles coïncident sur U .

Définition 1.5: Primitive

Etant donnée une fonction analytique f sur U , une fonction analytique F de U dans \mathbb{C} est dite primitive de f si $F'(z) = f(z)$ sur U .

1.3 Détermination du Logarithme

Définition 1.6: Détermination de l'Argument

Soit $U \subseteq \mathbb{C}^*$ ouvert. Une fonction continue $\arg : U \rightarrow \mathbb{R}$ est dite détermination continue de l'argument sur U si pour tout $z \in U$, $\exp(i \arg(z)) = \frac{z}{|z|}$

Définition 1.7: Détermination Principale

La détermination continue de l'argument

$$\begin{aligned} \mathbb{C} - \mathbb{R}_- &\longrightarrow]-\pi, \pi[\\ z &\mapsto 2 \arctan \left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right) \end{aligned}$$

en prenant la racine carrée de z appartenant au demi-plan $\Re z > 0$ est appelée détermination principale de l'argument.

Définition 1.8: Logarithme

Soit $U \subseteq \mathbb{C}^*$ ouvert. Une fonction continue $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est dite détermination du logarithme sur U si

$$\forall z \in U, \exp(f(z)) = z$$

Définition 1.9: Détermination Principale du Log

On définit pour $\theta \in \mathbb{R}$ la fonction

$$\log_\theta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} + i\theta, \log_\theta(w) = \log |w| + i \arg_\theta(w)$$

La fonction \log_0 est appelée détermination principale du logarithme et notée \log .

Proposition 1.8: DSE du Logarithme

\log est DSE sur $D(1, 1)$ et sur $D(0, 1)$ on a

$$\log(1 + z) = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$$

Par conséquent, sur $D(z_0, |z_0|)$,

$$g(z) = \log z_0 + i\theta_0 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{z - z_0}{z_0} \right)^n$$

est une détermination analytique du logarithme.

Proposition 1.9: Analyticit  des Déterminations

Il y a équivalence sur un ouvert connexe U de \mathbb{C}^* pour une application continue l entre :

- l est une détermination du logarithme à l'addition d'une constante près
- l est une primitive analytique de $\frac{1}{z}$ sur U .

Définition 1.10: Détermination

Soit $U \subseteq \mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Une détermination continue de z^α est une application continue g de U dans \mathbb{C} telle qu'il existe une détermination du logarithme $l(z)$ de z telle que $g(z) = \exp^{\alpha l(z)}$.

2 Théorie de Cauchy

2.1 Homotopie et Simple Connexité

Définition 2.1: Chemin

Soit $[a, b]$ un intervalle de \mathbb{R} . Un chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est une application continue. Le point $\gamma(a)$ est appelé origine et le point $\gamma(b)$ est dit extrémité. On orientera par défaut un chemin dans le sens des paramètres croissants. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, le chemin est dit lacet d'origine $\gamma(a)$.

Définition 2.2: Opérations

1. Si γ est constant, son image est réduite à un point. Il est alors appelé chemin (ou lacet) constant.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto e^{2i\pi\alpha t}$ est un chemin dont l'image est une partie du cercle unité $\partial D(0, 1)$. Si $\alpha = n \in \mathbb{Z}^*$, $\gamma([0, 1])$ est le cercle tout entier parcouru n fois.
3. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est un chemin, le chemin opposé

$$\gamma^0 : t \in [a, b] \mapsto \gamma(a + b - t)$$

est γ parcouru en sens inverse.

4. La juxtaposition de γ_1, γ_2 tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ est le chemin $\gamma = \gamma_1 \wedge \gamma_2 : [a, d + b - c] \rightarrow \mathbb{C}$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{pour } a \leq t \leq b \\ \gamma_2(t - b + c) & \text{pour } b \leq t \leq d + b - c \end{cases}$$

Définition 2.3: Homotopie

Soit U un ouvert de \mathbb{C} , $\gamma_i : I \rightarrow U$, $i \in \{1, 2\}$ deux chemins. Une homotopie de γ_1 à γ_2 dans U est une application continue φ de $I \times J$ dans U où $I = [a, b]$ et $J = [c, d]$ sont deux intervalles de \mathbb{R} telle que :

$$\varphi(t, c) = \gamma_1(t) \text{ et } \varphi(t, d) = \gamma_2(t), t \in I$$

Définition 2.4: Simple Connexité

Un espace topologique X connexe par arcs est dit simplement connexe si tout lacet dans X est homotope à un point dans X .

Proposition 2.1

- Un espace topologique est simplement connexe si et seulement si tous les chemins de même extrémités sont homotopes.
- Un ouvert étoilé par rapport à un point est simplement connexe. En particulier, dans \mathbb{C} , le plan, un demi-plan, un disque ouvert, l'intérieur d'un rectangle ou d'un triangle sont simplement connexes.
- Le demi-plan ouvert $\Im z > 0$ auquel nous ôtons un nombre fini de demi-droites fermées $z = t + i\beta_k$, $t \in]-\infty, \alpha_k]$ est simplement connexe non étoilé.
- \mathbb{C}^* n'est pas simplement connexe car le cercle unité n'est pas homotope à un chemin constant.

2.2 Intégrales sur un Chemin

Dorénavant, les chemins sont supposés \mathcal{C}^1 par morceaux.

Définition 2.5: Equivalence de Chemins

Deux chemins $\gamma_i : I_i \rightarrow \mathbb{C}$ sont dits équivalents s'il existe une bijection croissante $\varphi : I_2 \rightarrow I_1$ continue de réciproque continue et \mathcal{C}^1 par morceaux telle que :

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(\varphi(t)), t \in I_2$$

Définition 2.6: Intégrale le long d'un Chemin

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ continue et $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin avec $\gamma(I) \subseteq U$. Alors, la fonction $t : f(\gamma(t))\gamma'(t)$ est continue par morceaux dans $[a, b]$. On appelle intégrale de f le long du chemin γ :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt$$

Définition 2.7: Longueur

La longueur d'un chemin est le réel :

$$long(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

Proposition 2.2: Propriétés

- Si F est une primitive de f , pour tout chemin γ :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

- Si $\gamma_1 \sim \gamma_2$ alors

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

- Si $[Z_0, z_1] \subseteq U$, nous notons $\int_{[z_0, z_1]} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$ où $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto (1-t)z_0 + tz_1$.
- Si $\partial D(z_0, r) \subseteq U$, soit le lacet $\gamma : \theta \in [0, 2\pi] \mapsto z_0 + re^{i\theta}$. On a :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\partial D(z_0, r)} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) ire^{i\theta} d\theta$$

- En séparant parties réelles et imaginaires, $f = P + iQ$ et $\gamma = u + iv$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b ((P \circ \gamma) u' - (Q \circ \gamma) v') dt + i \int_a^b ((Q \circ \gamma) u' + (P \circ \gamma) v') dt \\ &= \int_{\gamma} (P dx - Q dy) + i \int_{\gamma} (P dy + Q dx) \end{aligned}$$

- On a :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma^0} f(z) dz$$

- On a :

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \text{long}(\gamma) \max_{\gamma} |f|$$

2.3 Théorème de Cauchy

Théorème 2.1: de Cauchy

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe et f une fonction analytique dans U . Si γ_1, γ_2 sont deux lacets homotopes dans U , alors

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

En particulier, si U est simplement connexe, l'intégrale sur un lacet de f est nulle.

Théorème 2.2

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe.

1. Toute fonction analytique dans U admet une primitive.
2. Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}^*$ est analytique, alors il existe $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytique tel que $\exp(g) = f$ sur U .

2.4 Formule de Cauchy

Lemme 2.1: Intégrité de l'Indice

Soit $\gamma : I = [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ un lacet et $a \notin \gamma(I)$. Alors

$$j(a, \gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a} \in \mathbb{Z}$$

Démonstration. Pour $t \in [c, d]$ on pose

$$h(t) = \int_c^t \frac{\gamma'(s) ds}{\gamma(s) - a}$$

On a $h'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a}$, sauf en un nombre fini de points de I .

Remarquons que $g(t) = e^{-h(t)} (\gamma(t) - a)$ a pour dérivée

$$g'(t) = -h'(t)e^{-h(t)} (\gamma(t) - a) + \gamma'(t)e^{-h(t)} = 0$$

sauf en un nombre fini de points de I . Comme g est continue, elle est constante et $g(c) = g(d)$. Or, $h(c) = 0$ donc $g(c) = \gamma(c) - a = g(d) = e^{-h(d)} (\gamma(d) - a)$. Mais γ est un lacet, donc $\gamma(c) = \gamma(d)$. Donc $h(d) = 2in\pi$. Donc $j(a, \gamma) = n \in \mathbb{Z}$. ■

Définition 2.8: Indice

L'entier $j(a, \gamma)$ est appelé indice de a par rapport au lacet γ et s'interprète comme le nombre de fois que le lacet tourne autour de a lorsque a est intérieur au lacet.

Proposition 2.3: Propriétés

1. Soit $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ des lacets de même origine dont les lacets ne contiennent pas a . Alors,

$$j(a, \gamma^0) = -j(a, \gamma) \text{ et } j(a, \gamma_1 \wedge \gamma_2) = j(a, \gamma_1) + j(a, \gamma_2)$$

2. En appliquant le théorème de Cauchy à la fonction analytique $1/(z - a)$ dans $\mathbb{C} - \{a\}$, nous obtenons $j(a, \gamma_1) = j(a, \gamma_2)$ si γ_1, γ_2 sont homotopes dans $\mathbb{C} - \{a\}$.
3. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe et $\gamma \subset U$. Si $a \notin U$, alors $j(a, \gamma) = 0$.
4. Si γ est un lacet dans \mathbb{C} , pour tout ouvert connexe U de $\mathbb{C} - \gamma(I)$, la fonction $z \mapsto j(z, \gamma)$ est constante dans U .
5. Soit $\gamma_n : t \mapsto e^{int}$, on a :

$$j(z_0, \gamma_n) = \begin{cases} n & \text{si } |z_0| < 1 \\ 0 & \text{si } |z_0| > 1 \end{cases}$$

Démonstration du point iv. Soit $z \in D(z_0, r) \subseteq U$,

$$j(z, \gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{du}{u - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{du}{u - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{du}{u - z_0} = j(z_0, \gamma)$$

pour $\gamma_1 : t \mapsto \gamma(t) + (z - z_0)$ qui est homotopie à γ via

$$\varphi(t, s) = \gamma(t) + s(z - z_0), 0 \leq s \leq 1$$

Donc $j(\cdot, \gamma)$ est localement constante donc constante sur U connexe. ■

Théorème 2.3: Formule de Cauchy

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe, $\gamma : I \rightarrow U$ un lacet dans U . Soit f analytique sur U . Pour tout $w \in U \setminus \gamma(I)$

$$j(w, \gamma)f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - w} \mathrm{d}z$$