

# Le cours d'Ariane Mézard

Ariane Mézard

12 mars 2024



## Table des matières

<b>I</b>	<b>Fonctions Holomorphes</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>Fonctions Analytiques</b>	<b>2</b>
1.1	Séries Entières . . . . .	2
1.2	Fonctions Analytiques . . . . .	4
1.3	Détermination du Logarithme . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Théorie de Cauchy</b>	<b>6</b>
2.1	Homotopie et Simple Connexité . . . . .	6
2.2	Intégrales sur un Chemin . . . . .	7
2.3	Théorème de Cauchy . . . . .	8
2.4	Formule de Cauchy . . . . .	9
2.5	Inégalités de Cauchy, Premières Applications . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Fonctions Holomorphes</b>	<b>13</b>
3.1	Définitions . . . . .	13
3.2	$\mathbb{R}$ -différentiabilité . . . . .	14
3.3	Intégrale sur le bord d'un Compact . . . . .	16
3.4	Formule de Green-Riemann . . . . .	17
3.5	Analycité des Fonctions Holomorphes . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Propriétés Élémentaires des Fonctions Holomorphes</b>	<b>24</b>
4.1	Théorème d'inversion locale . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Propriétés Élémentaires des Fonctions Holomorphes</b>	<b>29</b>
5.1	Théorème d'inversion locale . . . . .	29
5.2	Théorème de l'Application Ouverte . . . . .	30
5.3	Lemme de Schwarz . . . . .	31
5.4	Disque Unité et Inversion Locale Effective . . . . .	32
<b>6</b>	<b>Espaces de Fonctions Holomorphes</b>	<b>34</b>
6.1	Convergence de Suites de Fonctions Holomorphes . . . . .	34
6.2	Théorèmes de Runge . . . . .	35
6.3	Théorème de Montel . . . . .	38
6.4	Compacts de $O(U)$ . . . . .	39

<b>II Fonctions Méromorphes</b>	<b>40</b>
<b>7 Théorème des Résidus</b>	<b>40</b>
7.1 Développement en Séries de Laurent . . . . .	40



## Première partie

# Fonctions Holomorphes

## 1 Fonctions Analytiques

### 1.1 Séries Entières

#### Définition 1.1: Série Entière

Une série entière est une série de la forme  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  où  $z \in \mathbb{C}$  et  $a_n \in \mathbb{C}$ .  
Le domaine de convergence de la série entière est l'ensemble  $\Delta$  des nombres complexes  $z \in \mathbb{C}$  pour lesquels la série converge.

#### Proposition 1.1: Critère de Cauchy

Soient  $a_n$  une suite complexe et  $0 < r < r_0$ . S'il existe  $M > 0$  tel que

$$|a_n| r_0^n \leq M, n \geq 0$$

alors  $a_n z^n$  converge normalement sur  $\overline{D}(0, r)$ .

*Démonstration.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $z \in \overline{D}(0, r)$  on a :

$$|a_n z^n| \leq |a_n| r^n \leq M \left( \frac{r}{r_0} \right)^n$$

Comme  $0 < r < r_0$ ,  $M \left( \frac{r}{r_0} \right)^n$  est le terme d'une série géométrique convergente. ■

#### Corollaire 1.1: Rayon de Convergence

Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  une série entière et  $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  défini par

$$R = \sup \{ r \geq 0 \text{ tel que la suite } (|a_n| r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ soit bornée} \}$$

Alors le domaine de convergence  $\Delta$  de la série vérifie :

$$D(0, R) \subseteq \Delta \subseteq \overline{D}(0, R)$$

#### Définition 1.2: Rayon de Convergence

On appelle le nombre  $R$  défini ci-dessus rayon de convergence.

**Proposition 1.2: Rayon d'Hadamard**

Le rayon de convergence est donné par

$$R = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|a_n|^{1/n}}$$

Avec la convention  $1/0 = \infty$

**Lemme 1.1: Lemme d'Abel**

Soit  $u_n$  une suite réelle décroissante vers 0 et  $v_n$  une suite complexe telle que les sommes partielles  $s_n = \sum_{k=0}^n v_k$  soient bornées. Alors la série  $\sum u_n v_n$  converge.

**Proposition 1.3: Principe des Zéros Isolés**

Soit  $f(z) = \sum a_n z^n$  la somme d'une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ . Si au moins un des coefficients  $a_n$  n'est pas nul, il existe  $r \in ]0, +\infty[$  tel que  $f$  ne s'annule pas pour  $|z| \in ]0, r[$ .

*Démonstration.* Soit  $l = \min\{n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0\}$ , on a :

$$f(z) = \sum_{n \geq l} a_n z^n = z^l g(z)$$

avec  $g(z) = a_l + a_{l+1}z + \dots$  et  $g(0) \neq 0$ . ■

**Définition 1.3: Dérivée Complexe**

Une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  admet une dérivée par rapport à la variable complexe au point  $z_0$  si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Cette limite est alors appelée dérivée de  $f$  en  $z_0$ .

**Proposition 1.4: Dérivée d'une Série Entière**

Soit  $f(z) = \sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ . Alors, pour tout  $l \in \mathbb{N}^*$ , les dérivées  $l$ -ièmes de  $f$  ont pour rayon de convergence  $R$  et pour expression :

$$f^{(l)}(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(n+l)!}{n!} a_{n+l} z^n$$

**Corollaire 1.2: Primitive**

Une série entière  $f(z) = \sum a_n z^n$  de rayon de convergence  $R > 0$  admet sur  $D(0, R)$  une primitive complexe

$$F(z) = \sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

**Proposition 1.5: S**

Soit  $f(z) = \sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ . Soit  $z_0 \in D(0, R)$ . La série entière

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \omega^n$$

a un rayon de convergence supérieur à  $R - |z_0|$  et pour tout  $z \in D(z_0, R - |z_0|)$ ,

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n$$

**1.2 Fonctions Analytiques****Définition 1.4: Fonction Analytique**

Une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  est dite analytique si elle est DSE au voisinage de chaque point de  $U$ .

**Proposition 1.6: Dérivabilité**

Une fonction analytique sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$  admet des dérivées de tous ordres qui sont des fonctions analytiques sur  $U$ . De plus, pour tout  $z_0 \in U$ ,  $f$  est somme de sa série de Taylor en  $z_0$  sur un voisinage de  $z_0$ .

**Corollaire 1.3: Unicité du DSE**

Une fonction analytique sur  $U$  admet un unique développement en série entière au voisinage de chaque point de  $U$ .

**Lemme 1.2: Nullité**

Si  $U$  est connexe et  $f$  est analytique sur  $U$ , nulle sur un ouvert non-vide de  $U$ , alors  $f$  est identiquement nulle sur  $U$ .

**Proposition 1.7: Zéros Isolés**

Soit  $f$  une fonction analytique sur un ouvert connexe  $U$ . Si  $f$  n'est pas identiquement nulle, ses zéros sont isolés, i.e. si  $z_0 \in U$  avec  $f(z_0) = 0$ , alors il existe  $r > 0$  tel que  $z_0$  soit le seul zéro de  $f$  sur  $D(z_0, r)$ .

**Théorème 1.1: Prolongement Analytique**

Soit  $U$  un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$ ,  $f, g$  des fonctions analytiques sur  $U$ . Si  $f, g$  coïncident sur une partie  $\Sigma$  de  $U$  qui a un point d'accumulation dans  $U$ , alors elles coïncident sur  $U$ .

**Définition 1.5: Primitive**

Etant donnée une fonction analytique  $f$  sur  $U$ , une fonction analytique  $F$  de  $U$  dans  $\mathbb{C}$  est dite primitive de  $f$  si  $F'(z) = f(z)$  sur  $U$ .

### 1.3 Détermination du Logarithme

#### Définition 1.6: Détermination de l'Argument

Soit  $U \subseteq \mathbb{C}^*$  ouvert. Une fonction continue  $\arg : U \rightarrow \mathbb{R}$  est dite détermination continue de l'argument sur  $U$  si pour tout  $z \in U$ ,  $\exp(i \arg(z)) = \frac{z}{|z|}$

#### Définition 1.7: Détermination Principale

La détermination continue de l'argument

$$\begin{aligned} \mathbb{C} - \mathbb{R}_- &\longrightarrow ]-\pi, \pi[ \\ z &\mapsto 2 \arctan \left( \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right) \end{aligned}$$

en prenant la racine carrée de  $z$  appartenant au demi-plan  $\Re z > 0$  est appelée détermination principale de l'argument.

#### Définition 1.8: Logarithme

Soit  $U \subseteq \mathbb{C}^*$  ouvert. Une fonction continue  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  est dite détermination du logarithme sur  $U$  si

$$\forall z \in U, \exp(f(z)) = z$$

#### Définition 1.9: Détermination Principale du Log

On définit pour  $\theta \in \mathbb{R}$  la fonction

$$\log_\theta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} - e^{i\theta}, \log_\theta(w) = \log |w| + i \arg_\theta(w)$$

La fonction  $\log_0$  est appelée détermination principale du logarithme et notée  $\log$ .

#### Proposition 1.8: DSE du Logarithme

$\log$  est DSE sur  $D(1, 1)$  et sur  $D(0, 1)$  on a

$$\log(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$$

Par conséquent, sur  $D(z_0, |z_0|)$ ,

$$g(z) = \log z_0 + i\theta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left( \frac{z - z_0}{z_0} \right)^n$$

est une détermination analytique du logarithme.

#### Proposition 1.9: Analyticité des Déterminations

Il y a équivalence sur un ouvert connexe  $U$  de  $\mathbb{C}^*$  pour une application continue  $l$  entre :

- $l$  est une détermination du logarithme à l'addition d'une constante près
- $l$  est une primitive analytique de  $\frac{1}{z}$  sur  $U$ .

### Définition 1.10: Détermination

Soit  $U \subseteq \mathbb{C}^*$  et  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Une détermination continue de  $z^\alpha$  est une application continue  $g$  de  $U$  dans  $\mathbb{C}$  telle qu'il existe une détermination du logarithme  $l(z)$  de  $z$  telle que  $g(z) = \exp^{\alpha l(z)}$ .

## 2 Théorie de Cauchy

### 2.1 Homotopie et Simple Connexité

#### Définition 2.1: Chemin

Soit  $[a, b]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Un chemin  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  est une application continue. Le point  $\gamma(a)$  est appelé origine et le point  $\gamma(b)$  est dit extrémité. On orientera par défaut un chemin dans le sens des paramètres croissants. Si  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , le chemin est dit lacet d'origine  $\gamma(a)$ .

#### Définition 2.2: Opérations

1. Si  $\gamma$  est constant, son image est réduite à un point. Il est alors appelé chemin (ou lacet) constant.
2. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ,  $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto e^{2i\pi\alpha t}$  est un chemin dont l'image est une partie du cercle unité  $\partial D(0, 1)$ . Si  $\alpha = n \in \mathbb{Z}^*$ ,  $\gamma([0, 1])$  est le cercle tout entier parcouru  $n$  fois.
3. Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  est un chemin, le chemin opposé

$$\gamma^0 : t \in [a, b] \mapsto \gamma(a + b - t)$$

est  $\gamma$  parcouru en sens inverse.

4. La juxtaposition de  $\gamma_1, \gamma_2$  tels que  $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$  est le chemin  $\gamma = \gamma_1 \wedge \gamma_2 : [a, d + b - c] \rightarrow \mathbb{C}$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{pour } a \leq t \leq b \\ \gamma_2(t - b + c) & \text{pour } b \leq t \leq d + b - c \end{cases}$$

#### Définition 2.3: Homotopie

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $\gamma_i : I \rightarrow U$ ,  $i \in \{1, 2\}$  deux chemins. Une homotopie de  $\gamma_1$  à  $\gamma_2$  dans  $U$  est une application continue  $\varphi$  de  $I \times J$  dans  $U$  où  $I = [a, b]$  et  $J = [c, d]$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$  telle que :

$$\varphi(t, c) = \gamma_1(t) \text{ et } \varphi(t, d) = \gamma_2(t), t \in I$$

#### Définition 2.4: Simple Connexité

Un espace topologique  $X$  connexe par arcs est dit simplement connexe si tout lacet dans  $X$  est homotope à un point dans  $X$ .

### Proposition 2.1

- Un espace topologique est simplement connexe si et seulement si tous les chemins de même extrémités sont homotopes.
- Un ouvert étoilé par rapport à un point est simplement connexe. En particulier, dans  $\mathbb{C}$ , le plan, un demi-plan, un disque ouvert, l'intérieur d'un rectangle ou d'un triangle sont simplement connexes.
- Le demi-plan ouvert  $\Im z > 0$  auquel nous ôtons un nombre fini de demi-droites fermées  $z = t + i\beta_k, t \in ]-\infty, \alpha_k]$  est simplement connexe non étoilé.
- $\mathbb{C}^*$  n'est pas simplement connexe car le cercle unité n'est pas homotope à un chemin constant.

## 2.2 Intégrales sur un Chemin

Dorénavant, les chemins sont supposés  $\mathcal{C}^1$  par morceaux.

### Définition 2.5: Equivalence de Chemins

Deux chemins  $\gamma_i : I_i \rightarrow \mathbb{C}$  sont dits équivalents s'il existe une bijection croissante  $\varphi : I_2 \rightarrow I_1$  continue de réciproque continue et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux telle que :

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(\varphi(t)), t \in I_2$$

### Définition 2.6: Intégrale le long d'un Chemin

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  continue et  $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  un chemin avec  $\gamma(I) \subseteq U$ . Alors, la fonction  $t : f(\gamma(t))\gamma'(t)$  est continue par morceaux dans  $[a, b]$ . On appelle intégrale de  $f$  le long du chemin  $\gamma$  :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt$$

### Définition 2.7: Longueur

La longueur d'un chemin est le réel :

$$long(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

### Proposition 2.2: Propriétés

- Si  $F$  est une primitive de  $f$ , pour tout chemin  $\gamma$  :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

- Si  $\gamma_1 \sim \gamma_2$  alors

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

- Si  $[Z_0, z_1] \subseteq U$ , nous notons  $\int_{[z_0, z_1]} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$  où  $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto (1-t)z_0 + tz_1$ .
- Si  $\partial D(z_0, r) \subseteq U$ , soit le lacet  $\gamma : \theta \in [0, 2\pi] \mapsto z_0 + re^{i\theta}$ . On a :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\partial D(z_0, r)} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) ire^{i\theta} d\theta$$

- En séparant parties réelles et imaginaires,  $f = P + iQ$  et  $\gamma = u + iv$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b ((P \circ \gamma) u' - (Q \circ \gamma) v') dt + i \int_a^b ((Q \circ \gamma) u' + (P \circ \gamma) v') dt \\ &= \int_{\gamma} (P dx - Q dy) + i \int_{\gamma} (P dy + Q dx) \end{aligned}$$

- On a :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma^0} f(z) dz$$

- On a :

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \text{long}(\gamma) \max_{\gamma} |f|$$

## 2.3 Théorème de Cauchy

### Théorème 2.1: de Cauchy

Soit  $U \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert connexe et  $f$  une fonction analytique dans  $U$ . Si  $\gamma_1, \gamma_2$  sont deux lacets homotopes dans  $U$ , alors

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

En particulier, si  $U$  est simplement connexe, l'intégrale sur un lacet de  $f$  est nulle.

### Théorème 2.2

Soit  $U \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert simplement connexe.

1. Toute fonction analytique dans  $U$  admet une primitive.
2. Si  $f : U \rightarrow \mathbb{C}^*$  est analytique, alors il existe  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  analytique tel que  $\exp(g) = f$  sur  $U$ .



## 2.4 Formule de Cauchy

### Lemme 2.1: Intégrité de l'Indice

Soit  $\gamma : I = [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  un lacet et  $a \notin \gamma(I)$ . Alors

$$j(a, \gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a} \in \mathbb{Z}$$

*Démonstration.* Pour  $t \in [c, d]$  on pose

$$h(t) = \int_c^t \frac{\gamma'(s) ds}{\gamma(s) - a}$$

On a  $h'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a}$ , sauf en un nombre fini de points de  $I$ .

Remarquons que  $g(t) = e^{-h(t)} (\gamma(t) - a)$  a pour dérivée

$$g'(t) = -h'(t)e^{-h(t)} (\gamma(t) - a) + \gamma'(t)e^{-h(t)} = 0$$

sauf en un nombre fini de points de  $I$ . Comme  $g$  est continue, elle est constante et  $g(c) = g(d)$ . Or,  $h(c) = 0$  donc  $g(c) = \gamma(c) - a = g(d) = e^{-h(d)} (\gamma(d) - a)$ . Mais  $\gamma$  est un lacet, donc  $\gamma(c) = \gamma(d)$ . Donc  $h(d) = 2i\pi n$ . Donc  $j(a, \gamma) = n \in \mathbb{Z}$ . ■

### Définition 2.8: Indice

L'entier  $j(a, \gamma)$  est appelé indice de  $a$  par rapport au lacet  $\gamma$  et s'interprète comme le nombre de fois que le lacet tourne autour de  $a$  lorsque  $a$  est intérieur au lacet.

### Proposition 2.3: Propriétés

1. Soit  $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$  des lacets de même origine dont les lacets ne contiennent pas  $a$ . Alors,

$$j(a, \gamma^0) = -j(a, \gamma) \text{ et } j(a, \gamma_1 \wedge \gamma_2) = j(a, \gamma_1) + j(a, \gamma_2)$$

2. En appliquant le théorème de Cauchy à la fonction analytique  $1/(z - a)$  dans  $\mathbb{C} - \{a\}$ , nous obtenons  $j(a, \gamma_1) = j(a, \gamma_2)$  si  $\gamma_1, \gamma_2$  sont homotopes dans  $\mathbb{C} - \{a\}$ .
3. Soit  $U \subset \mathbb{C}$  un ouvert simplement connexe et  $\gamma \subset U$ . Si  $a \notin U$ , alors  $j(a, \gamma) = 0$ .
4. Si  $\gamma$  est un lacet dans  $\mathbb{C}$ , pour tout ouvert connexe  $U$  de  $\mathbb{C} - \gamma(I)$ , la fonction  $z \mapsto j(z, \gamma)$  est constante dans  $U$ .
5. Soit  $\gamma_n : t \mapsto e^{int}$ , on a :

$$j(z_0, \gamma_n) = \begin{cases} n & \text{si } |z_0| < 1 \\ 0 & \text{si } |z_0| > 1 \end{cases}$$

*Démonstration du point iv.* Soit  $z \in D(z_0, r) \subseteq U$ ,

$$j(z, \gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{du}{u - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{du}{u - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{du}{u - z_0} = j(z_0, \gamma)$$

pour  $\gamma_1 : t \mapsto \gamma(t) + (z - z_0)$  qui est homotopie à  $\gamma$  via

$$\varphi(t, s) = \gamma(t) + s(z - z_0), 0 \leq s \leq 1$$

Donc  $j(\cdot, \gamma)$  est localement constante donc constante sur  $U$  connexe. ■

### Théorème 2.3: Formule de Cauchy

Soit  $U \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert simplement connexe,  $\gamma : I \rightarrow U$  un lacet dans  $U$ . Soit  $f$  analytique sur  $U$ . Pour tout  $w \in U \setminus \gamma(I)$

$$j(w, \gamma)f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz$$

*Démonstration.* La fonction

$$g : z \in U \mapsto \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & \text{si } z \neq w \\ f'(w) & \text{si } z = w \end{cases}$$

est analytique sur  $U$ . En effet pour  $r > 0$  assez petit,  $f$  admet un développement de Taylor sur  $D(w, r) \subseteq U$  et donc pour  $z \in D(w, r)$  :

$$g(z) = f'(w) + \frac{f''(w)}{2!}(z-w) + \dots + \frac{f^{(n)}(w)}{n!}(z-w)^{n-1} + \dots$$

Comme  $U$  est simplement connexe, le théorème de Cauchy donne  $\int_{\gamma} g = 0$  et comme  $w \notin \gamma(I)$ ,  $\int_{\gamma} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} dz = 0$  c'est à dire :

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz = f(w) \int_{\gamma} \frac{dz}{z-w} = 2i\pi j(w, \gamma)f(w)$$

■

### Corollaire 2.1: Valeur en un point

On a :

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(z)}{z-w} dz, w \in D(z_0, r)$$

### Proposition 2.4: Continuité sur un Lacet

Soit  $\gamma : I = [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  un lacet et  $g : \gamma(I) \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction définie et continue sur  $\gamma(I)$ . Alors :

$$f(z) = \int_{\gamma} \frac{g(u) du}{u-z}$$

est définie et analytique dans  $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ .

Précisément, pour tout  $w \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et

$$c_n = \int_{\gamma} \frac{g(u) du}{(u-w)^{n+1}}$$

nous avons un développement en série entière convergente

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z-w)^n$$

dans tout disque ouvert de centre  $w$  et de rayon  $r = d(w, \gamma(I))$  et

$$f^{(n)}(w) = n!c_n = n! \int_{\gamma} \frac{g(u) du}{(u-w)^{n+1}}$$

*Démonstration.* Pour tout  $u \in \gamma(I)$ ,  $z \in D(w, qr)$ ,  $q \in [0, 1]$ , la série

$$\frac{1}{u-z} = \frac{1}{u-w} \frac{1}{1 - \frac{z-w}{u-w}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-w)^n}{(u-w)^{n+1}}$$

est convergente. Comme  $(g \circ \gamma) \gamma'$  est continue par morceaux sur  $[c, d]$  il existe  $M$  tel que

$$|g(\gamma(t)) \gamma'(t)| \leq M$$

Donc :

$$\left| g(\gamma(t)) \gamma'(t) \frac{(z-w)^n}{(\gamma(t)-w)^{n+1}} \right| \leq M \frac{q^n}{r}, t \in [c, d]$$

Finalement, la série sous l'intégrale est normalement convergente et :

$$f(z) = \int_c^d \frac{g(\gamma(t)) \gamma'(t) dt}{\gamma(t) - z} = \int_c^d g(\gamma(t)) \gamma'(t) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-w)^n}{(\gamma(t)-w)^{n+1}} \right) dt$$

et donc  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-w)^n$  ■

#### Proposition 2.5: Dérivée $n$ -ième

Soit  $f$  analytique sur  $U$  et  $\gamma$  le bord de  $\overline{D}(w, r) \subseteq U$ . D'après la formule de Cauchy :

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \frac{f(w + re^{it})}{e^{nit}} dt$$

#### Corollaire 2.2

1. Soit  $f$  analytique sur  $U$ . Pour tout  $a \in U$ , la série de Taylor de  $f$  au voisinage de  $a$  est convergente et a pour somme  $f(z)$  dans le plus grand disque ouvert de centre  $a$  contenu dans  $U$
2. Si  $f$  est analytique sur  $\mathbb{C}$ , sa série de Taylor en tout point de  $\mathbb{C}$  est convergente sur  $\mathbb{C}$ .

*Démonstration.* On applique la formule de Cauchy sur le contour  $\gamma$  d'un disque  $D(a, r)$  contenu dans  $U$ . Pour  $z \in D(a, r)$ ,  $j(z, \gamma) = 1$  et

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dz$$

La proposition 2.4 donne un développement en série entière de  $f$  en  $z-a$  convergeant sur  $D(a, r)$ . Par unicité du développement, il s'agit de la série de Taylor. En faisant tendre  $r$  vers  $d(a, \mathbb{C} - U)$ , nous obtenons le résultat annoncé. ■

#### Corollaire 2.3: Constance Locale

Supposons  $U$  connexe,  $a \in U$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  analytique. Si pour tout  $k > 0$ ,  $f^{(k)}(a) = 0$ , alors  $f$  est constante sur  $U$ .

*Démonstration.* D'après le corollaire ??,  $f$  est localement somme de sa série de Taylor. Donc  $f$  est constante sur un ouvert contenant  $a$ . Soit  $\Omega = \{w \in U, \forall k > 0, f^{(k)}(w) = 0\}$ . Cet ensemble est ouvert, non vide, et fermé. Par connexité de  $U$ ,  $\Omega = U$ ,  $f' = 0$  sur  $U$  et  $f$  est constante sur  $U$ . ■

### Théorème 2.4: Multiplicité

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  analytique non constante au voisinage de  $a \in U$ . Si  $f(a) = 0$ , il existe un unique entier  $m \geq 1$  et  $g : V \rightarrow \mathbb{C}$  analytique sur un voisinage  $V$  de  $a$  tels que

$$f(z) = (z - a)^m g(z), g(a) \neq 0, z \in V$$

En particulier, le point  $a$  possède un voisinage dans lequel il est l'unique zéro de  $f$ .

*Démonstration.* D'après le corollaire 2.4, si  $f$  n'est pas constante dans un voisinage de  $a$ , il existe  $m \geq 1$  tel  $f^{(m)}(a) \neq 0$  et  $f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0$ . Comme  $f(a) = 0$ , on peut alors factoriser  $(z - a)^m$  dans le développement en série de Taylor de  $f$  en  $a$ . ■

### Définition 2.9: Ordre

L'entier  $m$  du théorème précédent est dit ordre de  $f$  en  $a$ , noté  $\text{ord}(f, a)$ .

## 2.5 Inégalités de Cauchy, Premières Applications

### Proposition 2.6: Inégalités de Cauchy

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  analytique,  $\overline{D}(w, r) \subset U, r > 0$ . On a, pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\left| f^{(n)}(w) \right| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{z \in \partial D(w, r)} |f(z)|$$

*Démonstration.* On a :

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \frac{f(w + re^{it})}{e^{nit}} dt$$

On en déduit immédiatement le résultat. ■

### Lemme 2.2: Bornitude et Polynomialité

Soit  $f$  analytique sur  $\mathbb{C}$ . Supposons qu'il existe  $A, B \geq 0$  tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq A(1 + |z|)^B$$

Alors  $f$  est un polynôme de degré  $\leq B$ .

*Démonstration.* Soit  $n \geq [B] + 1 > B$ . Par les inégalités de Cauchy, puisque

$$\sup_{\partial D(z, r)} |f(z)| \leq A(1 + |z| + r)^B$$

on a :

$$\left| f^{(n)}(z) \right| \leq \frac{n!}{r^n} A(1 + |z| + r)^B$$

En faisant tendre  $r$  vers  $+\infty$ , par croissance comparée,  $f^{(n)}(w) = 0$  pour  $n \geq B$ . Localement,  $f$  étant somme de sa série de Taylor, c'est localement un polynôme de degré au plus  $B$ , ce qui est donc le résultat. ■

### Théorème 2.5: Liouville

Une fonction analytique bornée sur  $\mathbb{C}$  est constante.

### Théorème 2.6: d'Alembert-Gauss

Tout polynôme  $P \in \mathbb{C}[z]$  de degré  $\geq 1$  admet une racine dans  $\mathbb{C}$ .

*Démonstration.* Par l'absurde, si  $P(z) = \sum_{i=0}^d a_i z^i$  ne s'annule pas,  $f = 1/P$  est analytique sur  $\mathbb{C}$  et  $|f(z)| \sim \frac{1}{|a_d||z|^d}$  tend vers 0 quand  $|z|$  tend vers  $+\infty$ . En particulier,  $f$  est bornée sur  $\mathbb{C}$  donc constante d'après le théorème de Liouville. Ainsi,  $P = 1/f$  est constant, ce qui est absurde. ■

### Théorème 2.7: Topologie

Les ouverts  $\mathbb{C}$  et  $D(0, 1)$  sont homéomorphes mais pas isomorphes.

## 3 Fonctions Holomorphes

### 3.1 Définitions

#### Définition 3.1: Holomorphicité

Une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  est dite holomorphe en  $z_0 \in U$  si la limite

$$\lim_{h \in \mathbb{C} \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existe. On la note  $f'(z_0)$ .

On définit  $\mathcal{O}(U)$  l'ensemble des fonctions holomorphes.

#### Proposition 3.1: Exemples Holomorphe

- Si  $f$  est constante,  $f$  est holomorphe et  $f' = 0$
- Si  $f$  est un polynôme,  $f$  est holomorphe
- Si  $f$  est analytique,  $f$  est holomorphe
- $\sin, \cos, \exp, \tan$  sont holomorphes sur  $\mathbb{C}$ .
- $z \mapsto \bar{z}$  n'est pas holomorphe en aucun point :

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$$

n'a pas de limite en 0.

- $f(z) = |z|^2$  n'est holomorphe que pour  $z = 0$  :

$$\frac{(z+h)(\bar{z}+\bar{h}) - z\bar{z}}{h} = \frac{h\bar{z} + \bar{h}z + h\bar{h}}{h}$$

n'a une limite que si  $z = 0$ .

### 3.2 $\mathbb{R}$ -différentiabilité

#### Définition 3.2: Forme Différentielle

Une 1-forme différentielle sur  $\Omega$  est une application  $\alpha : \Omega \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ .  
En particulier, les  $dx_i \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  qui à  $a \mapsto dx_i(a) = a_i$  permettent d'écrire :

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) dx_i$$

où  $\alpha_i : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . On a alors :

$$\alpha(x)(a) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) dx_i(a)$$

On dit que  $\alpha$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  si et seulement si tous les  $\alpha_i$  sont de classe  $\mathcal{C}^k$ .

#### Définition 3.3: $\mathbb{R}$ Différentiabilité

Une fonction  $f$  d'un ouvert connexe  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  est dite  $\mathbb{R}$ -différentiable sur  $\Omega$  si et seulement si il existe une 1-forme différentielle  $df : \Omega \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  telle que

$$f(z+h) = f(z) + df(z)(h) + o(h)$$

On pose  $dx f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i$ .

Dans la suite on travaille dans  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$  et pour  $h \in \mathbb{C}$ , on note  $h = k + il = (k, l)$  et pour  $z \in U = \Omega$ ,  $z = x + iy = (x, y)$ .

#### Proposition 3.2: Différentielle dans une base

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  différentiable de différentielle  $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ . On a  $\forall z \in U$  :

$$d_z f = \frac{\partial f}{\partial x}(z) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z) dy$$

En  $h = k + il$  :

$$d_z f(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(z)k + \frac{\partial f}{\partial y}(z)l$$

On définit

$$dz = dx + i dy \text{ et } d\bar{z} = dx - i dy$$

On a alors :

$$df = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\bar{z}$$

ce qu'on écrit aussi :

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

On a par ailleurs

$$\overline{\left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$$

### Proposition 3.3: Exemples

1. Si  $f(z) = z$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z} = 1$  et  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ . A l'inverse,  $\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0$ .
2. Pour  $P(x, y) = \sum_{0 \leq \alpha, \beta \leq d} c_{\alpha, \beta} x^\alpha y^\beta$ . En notant  $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$  et  $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ , on a :

$$P(z) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha, \beta} z^\alpha \bar{z}^\beta$$

où on a

$$a_{\alpha, \beta} = \frac{1}{\alpha! \beta!} \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} P(0)$$

On retrouve que  $P$  est holomorphe si on a  $a_{\alpha, \beta} = 0$  pour  $\beta \geq 1$ .

### Théorème 3.1: Lien $\mathbb{C}$ -dérivabilité et $\mathbb{R}$ -différentiabilité

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . On a équivalence entre :

1.  $f \in \mathcal{O}(U)$
2.  $f$  est  $\mathbb{R}$ -différentiable sur  $U$  et  $d_z f$  est  $\mathbb{C}$ -linéaire pour tout  $z \in U$
3.  $f$  est  $\mathbb{R}$ -différentiable sur  $U$  et  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$  pour tout  $z \in U$

*Démonstration.*  $i \Rightarrow ii$   $f(z+h) = f(z) + hf'(z) + o(h) \Rightarrow f$  est  $\mathbb{R}$ -différentiable en  $z$  et  $d_z f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  qui à  $h \mapsto hf'(z)$  est  $\mathbb{C}$ -linéaire.

$ii \Rightarrow iii$  On a :

$$\begin{aligned} d_z f(h) &= \frac{\partial f}{\partial z}(z) dz(h) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) d\bar{z}(h) \\ &= \frac{\partial f}{\partial z}(z)h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)\bar{h} \\ d_z f(h) &= \frac{\partial f}{\partial z}h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\bar{h} \end{aligned}$$

On a alors :  $d_z f(ih) = \frac{\partial f}{\partial z}ih - i\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\bar{h}$ . Mais  $d_z f$  est  $\mathbb{C}$ -linéaire par hypothèse. Donc :

$$d_z f(ih) = i d_z f(h) = i \frac{\partial f}{\partial z}h + i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\bar{h}$$

Ainsi :  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ .

$iii \Rightarrow i$  On a :

$$d_z f(h) = \frac{\partial f}{\partial z}h$$

D'où

$$f(z+h) = f(z) + \frac{\partial f}{\partial z}h + o(h)$$

Ainsi :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

et  $f$  est holomorphe en  $z$ . ■

### Proposition 3.4: Équations de Cauchy-Riemann

On note  $f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$  où  $P, Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  est holomorphe, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

i.e.

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Ce sont les équations de Cauchy-Riemann.

*Démonstration.* On a :

$$d_z f(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) dx(h) + \frac{\partial f}{\partial y}(z) dy(h) = f'(z)h = f'(z)(k + il)$$

On obtient

$$f'(z)(k + il) = \frac{\partial f}{\partial x}(z)k + \frac{\partial f}{\partial y}(z)l$$

et donc :

$$\begin{cases} f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) \\ if'(z) = \frac{\partial f}{\partial y}(z) \end{cases}$$

On obtient ainsi la première égalité en identifiant.

On réécrit ceci avec  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

■

### Proposition 3.5: Constance sur un Connexe

Si  $f$  est holomorphe sur  $U$  connexe on a équivalence entre :

- $f$  est constante sur  $U$
- $\Re f$  l'est
- $\Im f$  l'est
- $|f|$  l'est
- $\bar{f}$  est holomorphe

## 3.3 Intégrale sur le bord d'un Compact

### Définition 3.4: Classe du Bord d'un Compact

Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^2$ .  $K$  est dit à bord compact de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux si pour tout élément  $z_0 \in \partial K$ , il existe des coordonnées  $(u, v)$  associées à un repère affine de  $\mathbb{R}^2$  d'origine  $z_0$  orienté positivement par rapport à l'orientation canonique de  $\mathbb{R}^2$  et un rectangle ouvert  $R = \{-\delta < u < \delta\} \times \{-\eta < v < \eta\}$  tel que :

$$K \cap R = \{(u, v) \in R, v \geq h(u)\}$$

où  $h$  est une fonction réelle  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $[-\delta, \delta]$  avec  $h(0) = 0$  et  $\sup |h| < \eta$ .



### Définition 3.5: Orientation du Bord

Soit  $K$  un compact à bord de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. On appelle orientation canonique du bord l'orientation donnée par les arcs  $u \mapsto (u, h(u))$  avec  $u$  croissant.

### Lemme 3.1: Existence de l'Orientation

La définition a du sens.

### Lemme 3.2: Recouvrement de Rectangles

Soit  $R, R'$  des rectangles ouverts tels que  $\partial K \cap R \cap R' \neq \emptyset$ .

On définit

$$K \cap R = \{(u, v) \in R, v \geq h(u)\}$$

et

$$K \cap R' = \{(u', v') \in R', v' \geq l(u')\}$$

Alors, les orientations sur  $\partial K \cap R \cap R'$  coïncident.

*Démonstration.* Soit  $z_0 \in \partial K \cap R \cap R'$ .  $h$  et  $l$  sont  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. En évitant un nombre fini de points de  $\partial K \cap R \cap R'$  on peut supposer  $h$  et  $l$   $\mathcal{C}^1$  en  $z_0$ . Autrement dit, le bord admet une tangente en  $z_0$ . On a deux repères affines orientés  $(z_0, e_1, e_2)$  et  $(z_0, e'_1, e'_2)$  qui génèrent des coordonnées  $(u, v)$  et  $(u', v')$ . Quitte à remplacer  $h$  par  $h(u) - h'(0)u$  on peut supposer que  $h'(0) = l'(0) = 0$ . Ainsi,  $e_1$  et  $e'_1$  sont colinéaires. Puisqu'on a supposé que  $(e_1, e_2)$  et  $(e'_1, e'_2)$  sont orientés positivement par rapport à l'orientation canonique de  $\mathbb{R}^2$  et puisque  $e_2$  et  $e'_2$  doivent être dans le même sens (i.e. à l'intérieur du compact), on a bien le fait que  $e_1$  et  $e'_1$  sont dans le même sens. Finalement, les orientations sur  $\partial K \cap R \cap R'$  coïncident. ■

## 3.4 Formule de Green-Riemann

Soit  $p, n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $\Lambda_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{R}^n)$  le  $\mathbb{R}$ -ev des formes  $p$ -linéaires alternées sur  $\mathbb{R}^n$ . Toute forme  $S \in \Lambda_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{R}^n)$  s'écrit de manière unique

$$S = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} c_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

### Définition 3.6: Produit Extérieur

Pour  $S \in \Lambda_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{R}^n), T \in \Lambda_{\mathbb{R}}^q(\mathbb{R}^n)$  on définit le produit extérieur de  $S$  et  $T$  noté  $S \wedge T \in \Lambda_{\mathbb{R}}^{p+q}(\mathbb{R}^n)$  comme :

$$S \wedge T(v_1, \dots, v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) S(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) T(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)})$$

### Proposition 3.6: Exemples

La paire  $(dx, dy)$  forme une base de  $\Lambda_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{C})$ . Les seuls produits extérieurs à considérer sont :

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0, \quad dx \wedge dy = -dy \wedge dx$$

De plus,  $dx \wedge dy$  est la forme bilinéaire alternée déterminant dans la base canonique.

**Définition 3.7: 2-forme différentielle**

Une 2-forme différentielle  $\beta$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$  est une application continue de  $U$  dans  $\Lambda_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{C})$  :  $\beta = w(x, y) dx \wedge dy$  pour  $w$  continue.

**Définition 3.8: Intégrale d'une 2-forme**

Soit  $\beta = w(x, y) dx \wedge dy$  une 2-forme différentielle sur  $U$ . On définit :

$$\int_U \beta = \int_U w(x, y) dx dy$$

**Définition 3.9: Différentielle d'une Différentielle**

Soit  $\alpha = u(x, y) dx + v(x, y) dy$  une 1-forme différentielle  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ . La différentielle  $d\alpha$  de  $\alpha$  est la 2-forme différentielle

$$d\alpha = du \wedge dx + dv \wedge dy = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

**Proposition 3.7: Exemples**

1. Soit  $\alpha$  une 1-forme différentielle sur  $U$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Alors

$$d(f\alpha) = df \wedge \alpha + f d\alpha$$

2. Si on écrit la 1-forme différentielle  $\mathcal{C}^1$   $\alpha = f dz + g d\bar{z}$  on a :

$$d(f dz + g d\bar{z}) = (\partial_z g - \partial_{\bar{z}} f) dz \wedge d\bar{z} = -2i (\partial_z - \partial_{\bar{z}} f) dx \wedge dy$$

En particulier, si  $\alpha = f dz$  avec  $f$  holomorphe, alors  $\partial_{\bar{z}} f = 0$  et  $d\alpha = 0$ .

**Lemme 3.3: Formule de Green-Riemann sur un rectangle**

Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{C}$  à bord de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux orienté canoniquement. Soit  $\alpha = u(x, y) dx + v(x, y) dy$  une forme 1-différentielle de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert de  $K$  à support dans un rectangle  $R = [-\delta, \delta] \times [-\eta, \eta] \subseteq K$ . Alors

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_K d\alpha \text{ i.e. } \int_{\partial K} u(x, y) dx + v(x, y) dy = \int_K \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$$

*Démonstration.* Comme  $K$  est compact,  $R \subseteq \overset{\circ}{K}$  ou bien  $\partial K \cap R$  est le graphe d'une fonction  $h$  et  $K \cap R$  est la partie située à l'intérieur du graphe. Supposons  $R \subseteq \overset{\circ}{K}$ , alors  $u = v = 0$  sur  $\partial R$  et

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) dx = v(\delta, y) - v(-\delta, y) = 0$$

$$\int_{-\eta}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dy = u(x, \eta) - u(x, -\eta) = 0$$

et

$$\int_K d\alpha = \int_R d\alpha = \int_{-\delta \leq x \leq \delta, -\eta \leq y \leq \eta} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

Puisque le support de  $\alpha$  ne rencontre pas  $\partial K$  on a  $\int_{\partial K} \alpha = 0 = \int_K d\alpha$ .  
Si  $K \cap R = \{(x, y) \in R \mid y \leq h(x)\}$ , alors

$$\begin{aligned} \int_K d\alpha &= \int_{K \cap R} d\alpha = \int_{-\delta}^{\delta} dx \int_{h(x)}^{\eta} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{h(x)}^{\eta} v(x, y) dx \right) + v(x, h(x))h'(x) - (u(x, \eta) - u(x, h(x))) \right) dx \\ &= \int_{h(\delta), \eta} v(\delta, y) dy - \int_{h(-\delta)}^{\eta} v(-\delta, y) dy + \int_{-\delta}^{\delta} (v(x, h(x))h'(x) + u(x, h(x))) dx \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} (v(x, h(x))h'(x) + u(x, h(x))) dx \end{aligned}$$

car  $u(x, \eta) = v(\delta, y) = v(-\delta, y) = 0$ . Par ailleurs, comme  $\partial K \cap R$  est paramétré par  $y = h(x)$ ,

$$\int_{\partial K \cap R} \alpha = \int_{\partial K \cap R} u(x, y) dx + v(x, y) dy = \int_{-\delta}^{\delta} (v(x, h(x))h'(x) + u(x, h(x))) dx$$

Le support de  $\alpha$  est inclus dans  $R$ . Nous concluons donc :

$$\int_K d\alpha = \int_{\partial K} \alpha$$

■

### Définition 3.10: Partition de l'unité

Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{C}$  recouvert par un nombre fini d'ouverts  $U_i$ . Une partition de l'unité de classe  $\mathcal{C}^1$  subordonnée au recouvrement  $U_i$  est une famille  $\varphi_i$  de fonctions de  $K$  dans  $[0, 1]$  de classe  $\mathcal{C}^1$  à support dans  $U_i$  telles que  $\sum \varphi_i(x) = 1$  pour tout  $x \in K$ .

### Lemme 3.4: Unité sur un Voisinage

Soit  $z \in U$ . Il existe  $V$  un voisinage de  $z$  avec  $\overline{V} \subseteq U$  et une fonction  $\mathcal{C}^1$   $\varphi_U$  à support dans  $U$  valant 1 sur  $V$ .

*Démonstration.* Soit  $r > r' > 0$  tel que  $D(z, r') \subset D(z, r) \subset U$ . On définit les fonctions  $\mathcal{C}^\infty$

$$f_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_r(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t^2 - r^2}} & \text{si } |t| < r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$g_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g_r(s) = \frac{\int_{-\infty}^s f_r(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} f_r(t) dt}$$

En particulier :

$$g_r(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq -r \\ 1 & \text{si } s \geq r \end{cases}$$

Alors,  $V = D(z, r')$  et  $\varphi_U(w) = f_r\left(r + \frac{2r}{r-r'}(r' - |w - z|)\right)$  conviennent. ■

### Lemme 3.5: Existence d'une Partition

Soit  $K \subseteq \mathbb{C}$  un compact et  $(U_i)$  un recouvrement fini par des ouverts de  $K$ . Il existe une partition de l'unité  $\mathcal{C}^1$  subordonnée au recouvrement  $U_i$

*Démonstration.* Pour tout  $z \in K \setminus U_j$  il existe  $i$  tel que  $z \in U_i$ . Par le lemme 3.4 on construit  $\psi_z^j$  de classe  $\mathcal{C}^1$  qui vaut 1 sur un voisinage ouvert  $W_z^j$  de  $z$  et dont le support est dans l'ouvert  $U_i \cap (K \setminus U_j)$ . Le support de  $\psi_z^j$  est un fermé de  $K$  donc est compact.

On obtient donc un recouvrement ouvert  $W_z^j$  du compact  $K \setminus U_j$  donc on extrait un sous-recouvrement fini  $\{W_{z_1}^j, \dots, W_{z_{j_l}}^j\}$ .

On procède de même pour tout  $j \leq n$ . En réindexant on obtient une famille finie  $(\psi_l)_{1 \leq l \leq N}$  de fonctions dont l'union des supports recouvre  $K$ , i.e. pour tout  $z \in K$ , il existe  $l$  tel que  $\psi_l(z) > 0$ . On pose alors

$$\psi = \sum \psi_l \text{ et pour } l \leq N, \rho_l = \frac{\psi_l}{\psi}$$

Ainsi,  $\rho_l$  est une partition de l'unité de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $K$  telle que pour tout  $l$  il existe  $1 \leq i \leq n$  tel que le support de  $\rho_l$  soit inclus dans  $U_i$ . ■

### Théorème 3.2: Formule de Green-Riemann

Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{C}$  à bord de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux orienté canoniquement. Soit  $\alpha$  une 1-forme différentielle de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert de  $K$ . On a alors

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_K d\alpha$$

*Démonstration.* Comme  $K$  est compact, il est recouvert par un nombre fini de rectangles ouverts  $R_j$  qui vérifient  $R_j \subseteq \mathring{K}$  ou  $\partial(K \cap R_j)$  est le graphe d'une fonction  $h_j$  et  $K \cap R_j$  est la partie située à l'intérieur du graphe. Soit  $(\chi_j)$  une partition de l'unité subordonnée au recouvrement  $R_j$ . Écrivons  $\alpha = \sum \alpha_j$  où les 1-formes différentielles  $\alpha_j = \chi_j \alpha$  sont de classes  $\mathcal{C}^1$  à support dans  $R_j$ . On se ramène alors au cas du lemme 3.3 ■

### Théorème 3.3: Cauchy

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $K$  un compact à bord de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux inclus dans  $U$ , avec l'orientation canonique du bord. Alors pour toute fonction holomorphe de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $K$  nous avons

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 0$$

*Démonstration.* On applique la formule de Green-Riemann 3.2 à  $\alpha = f(z) dz$ , 1-forme différentielle de classe  $\mathcal{C}^1$ . On a  $d\alpha = -\partial_{\bar{z}} f dz \wedge d\bar{z} = 0$ . ■

### Corollaire 3.1: Analyticité Holomorphe $\mathcal{C}^1$

Soit  $f$  holomorphe de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$ . Alors  $f$  est analytique sur  $U$ .

*Démonstration.* Soit  $\overline{D}(w, r) \subseteq U$  et  $\gamma$  le lacet  $t \mapsto w + re^{it}$ . Pour  $\lambda \leq 1$ , on pose

$$g(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z + \lambda(u - z))}{u - z} du = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \lambda(w + re^{it} - z))}{w + re^{it} - z} e^{it} dt$$

Ainsi,  $g$  est continue sur  $[0, 1]$ , dérivable sur  $]0, 1[$  de dérivée

$$g'(\lambda) = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(z + \lambda(w + re^{it} - z)) e^{it} dt = \left[ \frac{1}{2i\pi\lambda} f(z + \lambda(w + re^{it} - z)) \right]_{t=0}^{2\pi} = 0$$

Donc  $g$  est constante avec

$$g(1) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(u) du}{u - z} \text{ et } g(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z) du}{u - z} = f(z)$$

D'où, par la proposition 2.4,  $f$  est analytique ■

### 3.5 Analycité des Fonctions Holomorphes

#### Lemme 3.6: Goursat

Soient  $U \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert et  $T$  un triangle inclus dans  $U$ . Pour toute fonction holomorphe sur  $U$

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0$$

*Démonstration.* Nous décopons  $T$  en quatre triangles  $T_i$  dont les sommets sont ceux de  $T$  et les milieux des côtés de  $T$ . Nous orientons les arêtes opposées des triangles  $T_k$  de telle façon que

$$I = \int_{\partial T} f(z) dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\partial T_k} f(z) dz$$

Il existe donc un indice  $k$  avec  $\left| \int_{\partial T_k} f(z) dz \right| \geq |I|/4$ . De cette façon, nous construisons une suite de triangles emboîtés  $T'_0 = T, T'_1 = T_k$  avec  $\text{diam} T'_n = \text{diam} T / 2^n$  et  $\left| \int_{\partial T'_n} f(z) dz \right| \geq |I|/4^n$ . L'intersection des triangles emboîtés  $T'_n$  est réduite à un point  $z_0$ . Comme  $f$  est holomorphe en  $z_0$  :

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)\varepsilon(z)$$

avec  $\varepsilon(z)$  qui tend vers 0 quand  $z$  tend vers  $z_0$ . On a ainsi :

$$\left| \int_{\partial T'_n} f(z) dz \right| = \left| \int_{\partial T'_n} (z - z_0)\varepsilon(z) dz \right| \leq \text{long}(\partial T'_n) \sup_{\partial T'_n} |z - z_0| |\varepsilon(z)|$$

et donc

$$\left| \int_{\partial T'_n} f(z) dz \right| \leq 3 (\text{diam} T'_n)^2 \sup_{\partial T'_n} |\varepsilon(z)|$$

Donc  $|I| \leq 4^n \left| \int_{\partial T'_n} f(z) dz \right| \leq 3 (\text{diam} T_n)^2 \sup_{\partial T'_n} |\varepsilon(z)|$  et donc  $I = 0$ . ■

#### Théorème 3.4: Goursat

Soit  $U \subseteq \mathbb{C}$  ouvert et  $K$  un compact à bord de classe  $\mathcal{C}^1$  avec l'orientation canonique du bord. Pour toute fonction holomorphe sur  $U$  on a :

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 0$$

*Démonstration.* On approche  $K$  par des compacts à bords polygonaux. Notons  $\delta = d(K, \mathbb{C} \setminus U) > 0$ . Paramétrisons  $\delta K$  par un nombre fini d'arcs  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. Pour chaque tel arc  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ , soit une subdivision  $a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = b$  telle que  $|\gamma(\tau_{j+1}) - \gamma(\tau_j)| \leq \varepsilon \leq \delta/2$ . Chaque segment  $[\gamma(\tau_{j+1}), \gamma(\tau_j)] \subset U$ . Pour  $\varepsilon$  assez petit, la réunion de ces segments constitue le bord d'un compact  $K_\varepsilon$  à bord polygonal.  $K_\varepsilon = \cup_i T_i$  est réunion de triangles adjacents et le lemme de Goursat 3.6 implique

$$\int_{\partial K_\varepsilon} f(z) dz = \sum_i \int_{\partial T_i} f(z) dz = 0$$

D'après la proposition , on a bien :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial K_\varepsilon} f(z) dz = \int_{\partial K} f(z) dz$$

D'où le résultat. ■

### Théorème 3.5: Formule de Cauchy

Soit  $f$  holomorphe sur un ouvert  $U \subseteq \mathbb{C}$  et  $K$  un compact à bord orienté  $\mathcal{C}^1$  par morceaux inclus dans  $U$ . Alors, pour tout  $z \in K$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega$$

*Démonstration.* Soit  $r > 0$  tel que  $\overline{D(z, r)} \subset \overset{\circ}{K}$ . On note  $K_r = K \setminus D(z, r)$ .  $K_r$  est un compact à bord orienté  $\mathcal{C}^1$  par morceaux dont le bord est  $\partial K_r = \partial K \cup \partial D^-(z, r)$  où  $\partial D^-$  signifie que ce cercle a l'orientation opposée à celle obtenue comme bord de  $\overline{D(z, r)}$ . La fonction  $g(\omega) = f(\omega)/(\omega - z)$  est holomorphe sur  $U \setminus \{z\}$ . Le théorème de Goursat 4.5 appliqué à  $g$  sur le compact  $K_r \subseteq U \setminus \{z\}$  donne

$$\int_{\partial K} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega - \int_{\partial D(z, r)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega = 0$$

En posant  $\omega = z + re^{it}$  on a :

$$\int_{\partial D(z, r)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt$$

et cette dernière intégrale tend vers  $2i\pi f(z)$  lorsque  $r$  tend vers 0 par continuité de  $f$  au point  $z$ . ■

### Théorème 3.6: Équivalence Holomorphie-Analyticité

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ .  $f$  est holomorphe sur  $U$  si et seulement si elle est analytique.

*Démonstration.* On a déjà l'implication analyticité holomorphie. Supposons  $f$  holomorphe sur  $U$  et  $\overline{D}(z_0, r) \subset U$ . Pour  $z \in D(z_0, r)$ , la formule de Cauchy 4.6 donne

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega$$

Or

$$\frac{1}{\omega - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\omega - z_0)^{n+1}}$$

De plus, pour  $\omega = z_0 + re^{it}$ ,

$$\left| \frac{(z - z_0)^n}{(\omega - z_0)^{n+1}} \right| = \frac{1}{r} \left( \frac{|z - z_0|}{r} \right)^n, \text{ avec } |z - z_0|/r < 1$$

Par convergence normale pour  $t \in [0, 2\pi]$ , on obtient :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0, r)} f(\omega) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\omega - z_0)^{n+1}} d\omega \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\omega)}{2i\pi (\omega - z_0)^{n+1}} d\omega (z - z_0)^n \\ &= \sum a_n (z - z_0)^n \end{aligned}$$

et la série entière ci-dessus converge normalement sur les compacts de  $D(z_0, r)$ . ■

### Corollaire 3.2: Classe des Dérivées

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Toute fonction holomorphe sur  $U$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $U$ .  
Précisément, pour tout  $K \subset U$  compact à bord de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et pour tout  $z \in \overset{\circ}{K}$  nous avons :

1.  $\forall n \geq 0, \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z) = f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(\omega)}{(\omega-z)^{n+1}} d\omega$
2.  $\forall n \geq 0, \forall m \geq 0, \frac{\partial^{n+m} f}{\partial z^n \partial \bar{z}^m}(z) = 0$ .

En particulier, une fonction holomorphe  $f$  admet des dérivées complexes  $f^{(n)}$  d'ordre  $n$  arbitraire et les dérivées  $f^{(n)}$  sont holomorphes.

### Théorème 3.7: Morera

Soit  $f$  une fonction continue sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$ . Nous supposons que  $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$  pour tout triangle  $T$  inclus dans  $U$ . Alors  $f$  est holomorphe sur  $U$ .

*Démonstration.* Soit  $z_0 \in U$  et  $r > 0$  tel que  $\overline{D}(z_0, r) \subset U$ . Pour  $z \in D(z_0, r)$ , on pose

$$F(z) = \int_{[z_0, z]} f(\omega) d\omega$$

Soit  $z \in D(z_0, r)$  et  $h \neq 0$  tel que  $z+h \in D(z_0, r)$ . Comme le triangle de sommets  $z_0, z, z+h$  est inclus dans  $D(z_0, r)$ , nous avons

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(\omega) d\omega = \int_0^1 f(z+th) dt$$

Comme  $f$  est continue au point  $z$ ,

$$\lim_{h \in \mathbb{C}^*, h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z)$$

Ainsi  $F$  est holomorphe sur  $D(z_0, r)$  donc analytique d'après le théorème 4.7 et sa dérivée  $f = F'$  l'est donc aussi. ■

### Corollaire 3.3: $\Gamma$

La fonction  $\Gamma$

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$$

est holomorphe pour  $\Re s > 0$ .

*Démonstration.* L'intégrale converge en  $t=0$  car  $|t^{s-1}e^{-t}| \leq t^{\Re s-1}$ . À  $s$  fixé pour  $t \in \mathbb{R}_+$  grand,

$$|t^{s-1}e^{-t}| = t^{\Re s-1}e^{-t} \leq e^{t/2}e^{-t} = e^{-t/2}$$

Donc  $\Gamma(s)$  est bien définie pour  $\Re s > 0$ . Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \{s, \Re s > 0\}$  la courbe décrivant un triangle. Alors, d'après le théorème de Fubini

$$\int_\gamma \Gamma(s) ds = \int_\gamma \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt ds = \int_0^{+\infty} \left( \int_\gamma t^{s-1} ds \right) e^{-t} dt = 0$$

Ainsi, en appliquant le théorème de Morera 4.8, la fonction  $\Gamma$  est holomorphe sur le demi-plan  $\Re s > 0$ . ■

## 4 Propriétés Élémentaires des Fonctions Holomorphes

### 4.1 Théorème d'inversion locale

#### Théorème 4.1: Inversion Locale

Si  $f \in \mathcal{O}(U)$ ,  $a \in U$ ,  $f'(a) \neq 0$ , alors,  $\exists V$  voisinage ouvert de  $a$  inclus dans  $U$  sur lequel  $f$  est biholomorphe sur  $f(V)$  ouvert.

*Démonstration.* Comme  $f \in \mathcal{O}(U)$ ,  $f$  est  $\mathbb{R}$ -différentiable. Donc il existe un voisinage  $V$  ouvert de  $U$  contenant  $a$  sur lequel  $f|_V : V \rightarrow f(V)$  est un difféomorphisme. Alors,  $d_{f(z)}(f^{-1}) = (d_z f)^{-1}$  et donc  $f^{-1} \in \mathcal{O}(U)$ . ■

*Idée des Séries Majorantes.* • On suppose d'abord  $a = 0$ ,  $f(a) = 0$ ,  $f'(a) = 1$ . On a

$$f(z) = z - \sum_{n \geq 2} a_n z^n, z \in D(0, r)$$

On veut résoudre  $f(z) = \omega = z - \sum_{n \geq 2} a_n z^n$  i.e.  $z = \omega + \sum_{n \geq 2} a_n z^n$ . Mais,  $\sum_{n \geq 2} a_n z^n = \mathcal{O}(\omega^2)$  :

$$z = \omega + \sum_{n \geq 2} a_n (\omega + \mathcal{O}(\omega^2))^n = \omega + a_2 \omega^2 + \mathcal{O}(\omega^3)$$

On peut alors réinjecter :

$$z = \omega + a_2 \omega^2 + (2a_2^2 + a_3) \omega^3 + \mathcal{O}(\omega^4)$$

et ainsi de suite :

$$z = \omega + \sum_{n=2}^N P_n(a_2, \dots, a_n) \omega^n + \mathcal{O}(\omega^{N+1})$$

où les  $P_n \in \mathbb{N}[X_2, \dots, X_n]$ .

- Montrons maintenant que cette série converge lorsque  $N \rightarrow \infty$ . On sait que la série  $\sum a_n z^n$  converge sur  $D(0, r)$ . Pour  $r' < r$ ,  $|a_n r'^n| \rightarrow 0$ . Donc il existe  $M > 0$  tel que  $|a_n| \leq M^n$ . Or,

$$z = \omega + \sum_{n=2}^{+\infty} P_n(M^2, \dots, M^n) \omega^n$$

est solution de :

$$\begin{aligned} \omega &= z - \sum_{n \geq 2} M^n z^n \\ &= z - \left( \frac{1}{1 - Mz} - 1 - Mz \right) \end{aligned}$$

Donc

$$(1 - Mz) \omega = z(1 - Mz) - 1 + 1 - Mz + Mz(1 - Mz)$$

C'est à dire :

$$z^2 (M + M^2) + z(-M\omega - 1) + \omega = 0$$

ou

$$z = \frac{(M\omega + 1) - \sqrt{(1 + M\omega)^2 - 4\omega(M + M^2)}}{2(M + M^2)}$$

On prend ici pour  $\sqrt{\cdot}$  la détermination holomorphe de  $()^{1/2}$  qui existe sur  $D(1, 1)$  et pour laquelle  $\sqrt{1} = 1$  de sorte que pour  $\omega = 0$ ,  $z = 0$ .



La série définissant  $\sqrt{\cdot}$  converge alors sur  $D(0, R)$  où  $R = \frac{1}{(1+\sqrt{2})M+4M^2}$ . En effet, alors, on a

$$|M^2\omega^2| \leq M^2|\omega|R \leq \frac{M^2|\omega|}{(1+\sqrt{2})M} = (\sqrt{2}-1)M|\omega|$$

et donc

$$|(2M+4M^2)\omega - M^2\omega^2| \leq (2M+4M^2)|\omega| + |M^2\omega^2| \leq ((1+\sqrt{2})M+4M^2)|\omega| < 1$$

D'où la convergence de  $g(\omega) = \omega + \sum_{n \geq 2} P_n(a_2, \dots, a_n)\omega^n$  sur  $D(0, R)$ . et  $g(D(0, R)) \subset D(0, 1/M)$ .

- Par identification de la série entière en zéro et principe du prolongement analytique, nous avons  $f \circ g(\omega) = \omega$  pour  $\omega \in D(0, R)$ . De plus, par construction,  $g$  est injective sur  $W = D(0, R)$  et l'image  $\omega = f(z)$  atteint surjectivement  $W$  sur  $g(W) \subseteq D(0, 1/M) \cap f^{-1}(W)$ . Prenons  $V$  la composante connexe de 0 dans  $D(0, 1/M) \cap f^{-1}(W)$ . Alors  $f(V) \subset W$  et  $g(W) \subset V$ .  $V, W$  sont ouverts et  $f|_V \circ g|_W = id_W$ . Par connexité de  $V$  et prolongement analytique,  $g|_W \circ f|_V = id_V$ . ■

#### Théorème 4.2: Pré-Application Ouverte

Soit  $f \in \mathcal{O}(U)$  non constante au voisinage de  $a \in U$ ,  $f(a) = 0$  et

$$m = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid f^{(k)}(a) \neq 0\}$$

Il existe alors un voisinage ouvert  $V$  de  $a$ , un voisinage ouvert  $W$  de 0 et un biholomorphisme  $\varphi : V \rightarrow W$  tel que  $\varphi$  envoie  $a$  sur 0 et  $f(z) = f(a) + \varphi(z)^m$ .

*Démonstration.* D'après le théorème 2.4 il existe  $U' \subseteq U$  un voisinage de  $a$  et  $g \in \mathcal{O}(U')$  tels que pour tout  $z \in U'$

$$f(z) - f(a) = \alpha(z - a)^m g(z)$$

avec  $\alpha \in \mathbb{C}^*$  et  $g(a) = 1$ .

Soit  $V = \{z \in U' \mid |g(z) - 1| < 1\}$ . C'est un voisinage de  $a$  sur lequel  $\exp \frac{1}{m} \log(g(z))$  existe.

On a alors

$$\forall z \in V', f(z) = f(a) + (\varphi(z))^m$$

où

$$\varphi(z) = \alpha_m(z - a) \exp\left(\frac{1}{m} \log(g(z))\right)$$

où  $\alpha_m^m = \alpha$ . Alors,  $\varphi \in \mathcal{O}(V')$  avec  $\varphi(a) = 0$  et  $\varphi'(a) = 1$ . Par théorème d'inversion locale 5.1, on a un voisinage  $V \subset V'$  de  $a$  sur lequel  $\varphi$  est un biholomorphisme. ■

#### Corollaire 4.1: Solutions d'une Équation

Soit  $f \in \mathcal{O}(U)$  non constante au voisinage de  $a \in U$  et

$$m = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid f^{(k)}(a) \neq 0\}$$

. Alors,  $\exists r, \rho \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $\forall \omega \in D(f(a), \rho) \setminus \{f(a)\}$  l'équation  $f(z) = \omega$  a exactement  $m$  solutions dans  $D(a, r)$ .

*Démonstration.* On écrit par le théorème 5.2 précédent  $f(z) = \omega = f(a) + \varphi(z)^m$  où  $\varphi : V \rightarrow W$  est tel que  $\varphi(a) = 0$ . On suppose  $\varphi(z) = (\omega - f(a))^{1/m}$  pour une certaine détermination de l'exponentielle. On prend  $r$  tel que  $D(a, r) \subset V$ .  $\varphi(D(a, r))$  est un ouvert de  $W$  voisinage de 0.

Il existe un  $\rho'$  tel que  $D(0, \rho')$  est inclus dans  $\varphi(D(a, r))$ . Alors, pour tout  $\omega \in D(f(a), \rho'^m)$ ,  $(\omega - f(a))^{1/m} \in D(0, \rho')$ . Mézalor,  $e^{2ik\pi/m} (\omega - f(a))^{1/m}$  sont dans  $D(0, \rho')$ . On obtient alors

$$z_k = \varphi^{-1} \left( e^{2ik\pi/m} (\omega - f(a))^{1/m} \right) \in D(a, r)$$

Les  $z_k$  sont solutions de  $f(z) = \omega$  et donc il y en a bien exactement  $m$ .

De même, l'équation  $f(z) = f(a)$  n'a qu'une solution  $z = a$  dans  $D(a, r)$  de multiplicité  $m$ . ■

#### Théorème 4.3: Application Ouverte

Une fonction holomorphe non constante sur un ouvert  $U$  connexe est une application ouverte.

*Démonstration.* Par le corollaire 5.1, tout point  $z_0 \in U$  admet un voisinage  $V_{z_0} \subset U$  tel que  $f(V_{z_0}) = D(f(z_0), \rho(z_0))$ . Ainsi,  $f(U) = \cup D(f(z_0), \rho(z_0))$  est ouvert. ■

#### Théorème 4.4: Théorème d'Inversion Globale

Soit  $U$  un ouvert connexe et  $f \in \mathcal{O}(U)$  injective. Alors :

1.  $f(U)$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$
2.  $f'$  ne s'annule pas sur  $U$
3.  $f : U \rightarrow f(U)$  est un biholomorphisme

*Démonstration.* 1. D'après le théorème de l'application ouverte 5.3,  $f$ , injective donc non constante, est ouverte donc  $f(U)$  est ouverte et  $f$  est une bijection continue ouverte de  $U$  dans  $f(U)$ , i.e., un homéomorphisme.

2. Supposons qu'il existe  $z_0$  pour lequel  $f'(z_0) = 0$ . Dans le théorème 5.1, on a un entier  $m \geq 2$  et donc  $f$  n'est pas injective au voisinage de  $z_0$  ce qui est absurde. Donc  $f'$  ne s'annule pas sur  $U$ .

3. D'après les deux premiers points et le théorème 5.1 d'inversion locale,  $f^{-1}$  est holomorphe sur  $f(U)$  et  $f : U \rightarrow f(U)$  est un biholomorphisme. ■

#### Théorème 4.5: Goursat

Soit  $U \subseteq \mathbb{C}$  ouvert et  $K$  un compact à bord de classe  $\mathcal{C}^1$  avec l'orientation canonique du bord. Pour toute fonction holomorphe sur  $U$  on a :

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 0$$

*Démonstration.* On approche  $K$  par des compacts à bords polygonaux. Notons  $\delta = d(K, \mathbb{C} \setminus U) > 0$ . Paramétrisons  $\partial K$  par un nombre fini d'arcs  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. Pour chaque tel arc  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ , soit une subdivision  $a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = b$  telle que  $|\gamma(\tau_{j+1}) - \gamma(\tau_j)| \leq \varepsilon \leq \delta/2$ . Chaque segment  $[\gamma(\tau_{j+1}), \gamma(\tau_j)] \subset U$ . Pour  $\varepsilon$  assez petit, la réunion de ces segments constitue le bord d'un compact  $K_\varepsilon$  à bord polygonal.  $K_\varepsilon = \cup_i T_i$  est réunion de triangles adjacents et le lemme de Goursat 3.6 implique

$$\int_{\partial K_\varepsilon} f(z) d(z) = \sum_i \int_{\partial T_i} f(z) dz = 0$$

D'après la proposition , on a bien :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial K_\varepsilon} f(z) dz = \int_{\partial K} f(z) dz$$

D'où le résultat. ■

#### Théorème 4.6: Formule de Cauchy

Soit  $f$  holomorphe sur un ouvert  $U \subseteq \mathbb{C}$  et  $K$  un compact à bord orienté  $\mathcal{C}^1$  par morceaux inclus dans  $U$ . Alors, pour tout  $z \in K$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega$$

*Démonstration.* Soit  $r > 0$  tel que  $\overline{D(z, r)} \subset K^\circ$ . On note  $K_r = K \setminus D(z, r)$ .  $K_r$  est un compact à bord orienté  $\mathcal{C}^1$  par morceaux dont le bord est  $\partial K_r = \partial K \cup \partial D^-(z, r)$  où  $\partial D^-$  signifie que ce cercle a l'orientation opposée à celle obtenue comme bord de  $\overline{D(z, r)}$ . La fonction  $g(\omega) = f(\omega)/(\omega - z)$  est holomorphe sur  $U \setminus \{z\}$ . Le théorème de Goursat 4.5 appliqué à  $g$  sur le compact  $K_r \subseteq U \setminus \{z\}$  donne

$$\int_{\partial K} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega - \int_{\partial D(z, r)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega = 0$$

En posant  $\omega = z + re^{it}$  on a :

$$\int_{\partial D(z, r)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt$$

et cette dernière intégrale tend vers  $2i\pi f(z)$  lorsque  $r$  tend vers 0 par continuité de  $f$  au point  $z$ . ■

#### Théorème 4.7: Équivalence Holomorphie-Analyticité

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ .  $f$  est holomorphe sur  $U$  si et seulement si elle est analytique.

*Démonstration.* On a déjà l'implication analyticité holomorphie. Supposons  $f$  holomorphe sur  $U$  et  $\overline{D}(z_0, r) \subset U$ . Pour  $z \in D(z_0, r)$ , la formule de Cauchy 4.6 donne

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega$$

Or

$$\frac{1}{\omega - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\omega - z_0)^{n+1}}$$

De plus, pour  $\omega = z_0 + re^{it}$ ,

$$\left| \frac{(z - z_0)^n}{(\omega - z_0)^{n+1}} \right| = \frac{1}{r} \left( \frac{|z - z_0|}{r} \right)^n, \text{ avec } |z - z_0|/r < 1$$

Par convergence normale pour  $t \in [0, 2\pi]$ , on obtient :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0, r)} f(\omega) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\omega - z_0)^{n+1}} d\omega = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\omega)}{2i\pi (\omega - z_0)^{n+1}} d\omega (z - z_0)^n = \sum a_n (z - z_0)^n$$

et la série entière ci-dessus converge normalement sur les compacts de  $D(z_0, r)$ . ■

#### Corollaire 4.2: Classe des Dérivées

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Toute fonction holomorphe sur  $U$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $U$ .  
Précisément, pour tout  $K \subset U$  compact à bord de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et pour tout  $z \in \overset{\circ}{K}$  nous avons :

1.  $\forall n \geq 0, \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z) = f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(\omega)}{(\omega-z)^{n+1}} d\omega$
2.  $\forall n \geq 0, \forall m \geq 0, \frac{\partial^{n+m} f}{\partial z^n \partial \bar{z}^m}(z) = 0$ .

En particulier, une fonction holomorphe  $f$  admet des dérivées complexes  $f^{(n)}$  d'ordre  $n$  arbitraire et les dérivées  $f^{(n)}$  sont holomorphes.

#### Théorème 4.8: Morera

Soit  $f$  une fonction continue sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$ . Nous supposons que  $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$  pour tout triangle  $T$  inclus dans  $U$ . Alors  $f$  est holomorphe sur  $U$ .

*Démonstration.* Soit  $z_0 \in U$  et  $r > 0$  tel que  $\overline{D}(z_0, r) \subset U$ . Pour  $z \in D(z_0, r)$ , on pose

$$F(z) = \int_{[z_0, z]} f(\omega) d\omega$$

Soit  $z \in D(z_0, r)$  et  $h \neq 0$  tel que  $z+h \in D(z_0, r)$ . Comme le triangle de sommets  $z_0, z, z+h$  est inclus dans  $D(z_0, r)$ , nous avons

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(\omega) d\omega = \int_0^1 f(z+th) dt$$

Comme  $f$  est continue au point  $z$ ,

$$\lim_{h \in \mathbb{C}^*, h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z)$$

Ainsi  $F$  est holomorphe sur  $D(z_0, r)$  donc analytique d'après le théorème 4.7 et sa dérivée  $f = F'$  l'est donc aussi. ■

#### Corollaire 4.3: $\Gamma$

La fonction  $\Gamma$

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$$

est holomorphe pour  $\Re s > 0$ .

*Démonstration.* L'intégrale converge en  $t=0$  car  $|t^{s-1}e^{-t}| \leq t^{\Re s-1}$ . À  $s$  fixé pour  $t \in \mathbb{R}_+$  grand,

$$|t^{s-1}e^{-t}| = t^{\Re s-1}e^{-t} \leq e^{t/2}e^{-t} = e^{-t/2}$$

Donc  $\Gamma(s)$  est bien définie pour  $\Re s > 0$ . Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \{s, \Re s > 0\}$  la courbe décrivant un triangle. Alors, d'après le théorème de Fubini

$$\int_\gamma \Gamma(s) ds = \int_\gamma \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt ds = \int_0^{+\infty} \left( \int_\gamma t^{s-1} ds \right) e^{-t} dt = 0$$

Ainsi, en appliquant le théorème de Morera 4.8, la fonction  $\Gamma$  est holomorphe sur le demi-plan  $\Re s > 0$ . ■

## 5 Propriétés Élémentaires des Fonctions Holomorphes

### 5.1 Théorème d'inversion locale

#### Théorème 5.1: Inversion Locale

Si  $f \in \mathcal{O}(U)$ ,  $a \in U$ ,  $f'(a) \neq 0$ , alors,  $\exists V$  voisinage ouvert de  $a$  inclus dans  $U$  sur lequel  $f$  est biholomorphe sur  $f(V)$  ouvert.

*Démonstration.* Comme  $f \in \mathcal{O}(U)$ ,  $f$  est  $\mathbb{R}$ -différentiable. Donc il existe un voisinage  $V$  ouvert de  $U$  contenant  $a$  sur lequel  $f|_V : V \rightarrow f(V)$  est un difféomorphisme. Alors,  $d_{f(z)}(f^{-1}) = (d_z f)^{-1}$  et donc  $f^{-1} \in \mathcal{O}(U)$ . ■

*Idée des Séries Majorantes. ??*

- On suppose d'abord  $a = 0$ ,  $f(a) = 0$ ,  $f'(a) = 1$ . On a

$$f(z) = z - \sum_{n \geq 2} a_n z^n, z \in D(0, r)$$

On veut résoudre  $f(z) = \omega = z - \sum_{n \geq 2} a_n z^n$  i.e.  $z = \omega + \sum_{n \geq 2} a_n z^n$ . Mais,  $\sum_{n \geq 2} a_n z^n = \mathcal{O}(\omega^2)$  :

$$z = \omega + \sum_{n \geq 2} a_n (\omega + \mathcal{O}(\omega^2))^n = \omega + a_2 \omega^2 + \mathcal{O}(\omega^3)$$

On peut alors réinjecter :

$$z = \omega + a_2 \omega^2 + (2a_2^2 + a_3) \omega^3 + \mathcal{O}(\omega^4)$$

et ainsi de suite :

$$z = \omega + \sum_{n=2}^N P_n(a_2, \dots, a_n) \omega^n + \mathcal{O}(\omega^{N+1})$$

où les  $P_n \in \mathbb{N}[X_2, \dots, X_n]$ .

- Montrons maintenant que cette série converge lorsque  $N \rightarrow \infty$ . On sait que la série  $\sum a_n z^n$  converge sur  $D(0, r)$ . Pour  $r' < r$ ,  $|a_n r'^n| \rightarrow 0$ . Donc il existe  $M > 0$  tel que  $|a_n| \leq M^n$ . Or,

$$z = \omega + \sum_{n=2}^{+\infty} P_n(M^2, \dots, M^n) \omega^n$$

est solution de :

$$\begin{aligned} \omega &= z - \sum_{n \geq 2} M^n z^n \\ &= z - \left( \frac{1}{1 - Mz} - 1 - Mz \right) \end{aligned}$$

Donc

$$(1 - Mz)\omega = z(1 - Mz) - 1 + 1 - Mz + Mz(1 - Mz)$$

C'est à dire :

$$z^2 (M + M^2) + z(-M\omega - 1) + \omega = 0$$

ou

$$z = \frac{(M\omega + 1) - \sqrt{(1 + M\omega)^2 - 4\omega(M + M^2)}}{2(M + M^2)}$$

On prend ici pour  $\sqrt{\cdot}$  la détermination holomorphe de  $()^{1/2}$  qui existe sur  $D(1, 1)$  et pour laquelle  $\sqrt{1} = 1$  de sorte que pour  $\omega = 0$ ,  $z = 0$ .

La série définissant  $\sqrt{\cdot}$  converge alors sur  $D(0, R)$  où  $R = \frac{1}{(1+\sqrt{2})M+4M^2}$ . En effet, alors, on a

$$|M^2\omega^2| \leq M^2|\omega|R \leq \frac{M^2|\omega|}{(1+\sqrt{2})M} = (\sqrt{2}-1)M|\omega|$$

et donc

$$|(2M+4M^2)\omega - M^2\omega^2| \leq (2M+4M^2)|\omega| + |M^2\omega^2| \leq ((1+\sqrt{2})M+4M^2)|\omega| < 1$$

D'où la convergence de  $g(\omega) = \omega + \sum_{n \geq 2} P_n(a_2, \dots, a_n)\omega^n$  sur  $D(0, R)$ . et  $g(D(0, R)) \subset D(0, 1/M)$ .

- Par identification de la série entière en zéro et principe du prolongement analytique, nous avons  $f \circ g(\omega) = \omega$  pour  $\omega \in D(0, R)$ . De plus, par construction,  $g$  est injective sur  $W = D(0, R)$  et l'image  $\omega = f(z)$  atteint surjectivement  $W$  sur  $g(W) \subseteq D(0, 1/M) \cap f^{-1}(W)$ . Prenons  $V$  la composante connexe de 0 dans  $D(0, 1/M) \cap f^{-1}(W)$ . Alors  $f(V) \subset W$  et  $g(W) \subset V$ .  $V, W$  sont ouverts et  $f|_V \circ g|_W = id_W$ . Par connexité de  $V$  et prolongement analytique,  $g|_W \circ f|_V = id_V$ .

■

## 5.2 Théorème de l'Application Ouverte

### Théorème 5.2: Pré-Application Ouverte

Soit  $f \in \mathcal{O}(U)$  non constante au voisinage de  $a \in U$ ,  $f(a) = 0$  et

$$m = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid f^{(k)}(a) \neq 0\}$$

Il existe alors un voisinage ouvert  $V$  de  $a$ , un voisinage ouvert  $W$  de 0 et un biholomorphisme  $\varphi : V \rightarrow W$  tel que  $\varphi$  envoie  $a$  sur 0 et  $f(z) = f(a) + \varphi(z)^m$ .

*Démonstration.* D'après le théorème 2.4 il existe  $U' \subseteq U$  un voisinage de  $a$  et  $g \in \mathcal{O}(U')$  tels que pour tout  $z \in U'$

$$f(z) - f(a) = \alpha(z-a)^m g(z)$$

avec  $\alpha \in \mathbb{C}^*$  et  $g(a) = 1$ .

Soit  $V = \{z \in U' \mid |g(z) - 1| < 1\}$ . C'est un voisinage de  $a$  sur lequel  $\exp \frac{1}{m} \log(g(z))$  existe.

On a alors

$$\forall z \in V', f(z) = f(a) + (\varphi(z))^m$$

où

$$\varphi(z) = \alpha_m(z-a) \exp\left(\frac{1}{m} \log(g(z))\right)$$

où  $\alpha_m^m = \alpha$ . Alors,  $\varphi \in \mathcal{O}(V')$  avec  $\varphi(a) = 0$  et  $\varphi'(a) = 1$ . Par théorème d'inversion locale 5.1, on a un voisinage  $V \subset V'$  de  $a$  sur lequel  $\varphi$  est un biholomorphisme. ■

### Corollaire 5.1: Solutions d'une Équation

Soit  $f \in \mathcal{O}(U)$  non constante au voisinage de  $a \in U$  et

$$m = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid f^{(k)}(a) \neq 0\}$$

. Alors,  $\exists r, \rho \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $\forall \omega \in D(f(a), \rho) \setminus \{f(a)\}$  l'équation  $f(z) = \omega$  a exactement  $m$  solutions dans  $D(a, r)$ .

*Démonstration.* On écrit par le théorème 5.2 précédent  $f(z) = \omega = f(a) + \varphi(z)^m$  où  $\varphi : V \rightarrow W$  est tel que  $\varphi(a) = 0$ . On suppose  $\varphi(z) = (\omega - f(a))^{1/m}$  pour une certaine détermination de l'exponentielle. On prend  $r$  tel que  $D(a, r) \subset V$ .  $\varphi(D(a, r))$  est un ouvert de  $W$  voisinage de 0. Il existe un  $\rho'$  tel que  $D(0, \rho')$  est inclus dans  $\varphi(D(a, r))$ . Alors, pour tout  $\omega \in D(f(a), \rho'^m)$ ,  $(\omega - f(a))^{1/m} \in D(0, \rho')$ . Mézamor,  $e^{2ik\pi/m}(\omega - f(a))^{1/m}$  sont dans  $D(0, \rho')$ . On obtient alors

$$z_k = \varphi^{-1} \left( e^{2ik\pi/m} (\omega - f(a))^{1/m} \right) \in D(a, r)$$

Les  $z_k$  sont solutions de  $f(z) = \omega$  et donc il y en a bien exactement  $m$ .

De même, l'équation  $f(z) = f(a)$  n'a qu'une solution  $z = a$  dans  $D(a, r)$  de multiplicité  $m$ . ■

### Théorème 5.3: Application Ouverte

Une fonction holomorphe non constante sur un ouvert  $U$  connexe est une application ouverte.

*Démonstration.* Par le corollaire 5.1, tout point  $z_0 \in U$  admet un voisinage  $V_{z_0} \subset U$  tel que  $f(V_{z_0}) = D(f(z_0), \rho(z_0))$ . Ainsi,  $f(U) = \cup D(f(z_0), \rho(z_0))$  est ouvert. ■

### Théorème 5.4: Théorème d'Inversion Globale

Soit  $U$  un ouvert connexe et  $f \in \mathcal{O}(U)$  injective. Alors :

1.  $f(U)$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$
2.  $f'$  ne s'annule pas sur  $U$
3.  $f : U \rightarrow f(U)$  est un biholomorphisme

*Démonstration.* 1. D'après le théorème de l'application ouverte 5.3,  $f$ , injective donc non constante, est ouverte donc  $f(U)$  est ouverte et  $f$  est une bijection continue ouverte de  $U$  dans  $f(U)$ , i.e., un homéomorphisme.

2. Supposons qu'il existe  $z_0$  pour lequel  $f'(z_0) = 0$ . Dans le théorème 5.1, on a un entier  $m \geq 2$  et donc  $f$  n'est pas injective au voisinage de  $z_0$  ce qui est absurde. Donc  $f'$  ne s'annule pas sur  $U$ .

3. D'après les deux premiers points et le théorème 5.1 d'inversion locale,  $f^{-1}$  est holomorphe sur  $f(U)$  et  $f : U \rightarrow f(U)$  est un biholomorphisme. ■

## 5.3 Lemme de Schwarz

### Théorème 5.5: Principe du Maximum

Soit  $f \in \mathcal{O}(U)$

1. Si  $|f|$  admet un maximum local en un point  $a \in U$ , alors  $f$  est constante sur la composante connexe contenant  $a$ .
2. Pour tout  $K \subset U$

$$\max_K |f| = \max_{\partial K} |f|, \max_K \Re f = \max_{\partial K} \Re f, \max_K \Im f = \max_{\partial K} \Im f$$

*Démonstration.* 1. Supposons  $f$  non constante sur la composante connexe  $U_0$  de  $U$  contenant  $a$  avec  $|f(a)| = \sup_U |f| = \sup_{U_0} |f|$ . D'après le théorème de l'application ouverte,  $f$  est ouverte sur  $U_0$ . L'image  $f(U_0)$  est un voisinage de  $f(a)$  donc contient des points de module strictement supérieur à  $|f(a)|$ .

2. Si  $\max_{\partial K} \Re f < \max_K \Re f$ , il existe  $z_0 \in \overset{\circ}{K}$  avec  $\Re f(z_0) = \max_K \Re f$ . Soit  $U_0$  une composante connexe de  $z_0$  dans  $\overset{\circ}{K}$  et  $f$  non constante dans  $U_0$ . Alors  $f(U_0)$  est un ouvert qui contient  $f(z_0)$  et qui est contenue dans le demi-plan  $\{w \mid \Re w \leq \Re f(z_0)\}$ . Donc  $f$  est constante sur  $U_0$  et  $\Re f|_{\partial U_0} = \Re f(z_0)$  par continuité de  $f$ . Or

$$\emptyset \neq \partial U_0 \subset \partial \overset{\circ}{K} = \overline{\overset{\circ}{K}} \setminus \overset{\circ}{K} \subseteq \overline{K} \setminus \overset{\circ}{K} = \partial K$$

ainsi,  $\max_K \Re f = \Re f(z_0)$  est atteint sur  $\partial K$ . Les cas  $|f|$  et  $\Im f$  sont analogues. ■

#### Théorème 5.6: Lemme de Schwarz

Soit  $f$  holomorphe sur  $D(0, 1)$  avec  $f(0) = 0$  et  $|f(z)| \leq 1$  sur  $D(0, 1)$ . Alors, on a

$$\forall z \in D(0, 1), |f(z)| \leq |z| \text{ et } |f'(0)| \leq 1$$

De plus si

$$\exists z_0 \in D(0, 1) \setminus \{0\}, |f(z_0)| = |z_0| \text{ ou } |f'(0)| = 1$$

alors  $f$  est une rotation :  $f(z) = az$  pour  $a \in \mathbb{C}, |a| = 1$ .

*Démonstration.* L'application  $g(z) = f(z)/z$  est holomorphe sur  $D(0, 1)$  et vérifie  $g(0) = f'(0)$ . En appliquant le principe du maximum à la fonction  $g$  sur  $D(0, r), r < 1$ , on obtient :

$$\sup_{D(0, r)} |g| = \sup_{\partial D(0, r)} |g| = \sup_{\partial D(0, r)} |f|/r \leq 1/r$$

En faisant tendre  $r$  vers 1, nous obtenons

$$\sup_{D(0, 1)} |g| \leq 1 \iff \begin{cases} |f(z)| \leq |z| & \forall z \in D(0, 1) \setminus \{0\} \\ |f'(0)| \leq 1 \end{cases}$$

De plus, si  $\exists z_0 \in D(0, 1) \setminus \{0\}, |f(z_0)| = |z_0|$  ou si  $|g(0)| = |f'(0)| = 1$ , alors  $|g|$  admet un maximum local en  $z_0$  ou 0 donc  $g = a$  est constante avec  $|a| = 1$ . ■

#### Corollaire 5.2: Point Fixe

Soit  $f : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$  holomorphe,  $f \neq \text{Id}$ . Alors  $f$  a au plus un point fixe.

*Démonstration.* Supposons que nous ayons  $a \neq b \in D(0, 1)$  avec  $f(a) = a$  et  $f(b) = b$ . Si  $a = 0, f(0) = 0, f(b) = b$ , le lemme de Schwarz montre que  $f = e^{i\theta}z$  et comme  $f(b) = b, f = \text{Id}$ . On peut donc supposer  $a \neq 0$ . Posons  $\varphi_a(z)^1 = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$  et

$$g = \varphi_a \circ f \circ \varphi_a^{-1} \text{ et } \lambda = \varphi_a(b) \neq 0$$

Ainsi,  $g : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$  avec deux points fixes  $g(0) = 0, g(\lambda) = \lambda$ . Donc  $g = \text{Id} = f$ . Absurde. ■

## 5.4 Disque Unité et Inversion Locale Effective

#### Définition 5.1: Automorphisme

Un automorphisme de  $U$  est une bijection holomorphe de  $U$  dans  $U$ . On note  $\text{Aut } U$  l'ensemble des automorphismes de  $U$ .

---

1. C'est la fonction du jour !



On rappelle que le groupe unitaire de signature  $(n, m)$  est le groupe des matrices préservant une forme hermitienne de signature  $(n, m)$ . Il est isomorphe au groupe  $U(n, m)$  préservant la forme hermitienne diagonale de signature  $(n, m)$  :

$$U(n, m) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \text{GL}_{n+m}(\mathbb{C}) \left| \begin{array}{l} AA^* - BB^* = I_n \\ DD^* - CC^* = I_m \\ AC^* = BD^* \end{array} \right. \right\}$$

### Théorème 5.7: Automorphisme du Disque Unité

$$\text{Aut } D(0, 1) = \left\{ \varphi_\alpha : z \mapsto e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \mid \theta \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{C}, |a| < 1 \right\} = \text{PSU}(1, 1)$$

*Démonstration.* • Nous vérifions que  $\varphi_\alpha \in \text{Aut } D$ . Soit  $f \in \text{Aut } D$ . On note  $a = f(0)$ . On a  $\varphi_\alpha \circ f(0) = 0$  et pour tout  $z \in D$ ,  $|\varphi_\alpha \circ f(z)| < 1$ . Le lemme de Schwarz 5.6 implique alors que  $g = \varphi_\alpha \circ f$  vérifie  $|g(z)| \leq |z|$  et de même  $|g^{-1}(z)| \leq |z|$  donc  $|g(z)| = |z|$  pour  $z \in D$ . Donc il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $g(z) = e^{i\theta}z$ .

- L'application :

$$\varphi_\alpha \mapsto \frac{1}{1 - |a|^2} \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & -\alpha e^{i\theta/2} \\ -\bar{\alpha} e^{-i\theta/2} & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$$

induit un automorphisme

$$\text{Aut } D \rightarrow \text{PSU}(1, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ \bar{A} & \bar{B} \end{pmatrix} \mid |A|^2 - |B|^2 = 1 \right\} / \pm \text{Id}$$

■

### Corollaire 5.3: Schwarz-Pick

Soit  $f : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$  holomorphe. Pour  $z \in D(0, 1)$  on a :

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

avec égalité si et seulement si  $f \in \text{Aut } D(0, 1)$ .

*Démonstration.* La dérivée de  $\varphi_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \in \text{Aut } D$  vérifie :

$$\varphi'_\alpha(z) = \frac{1 - |\alpha|^2}{(1 - \bar{\alpha}z)^2}, \varphi'_\alpha(0) = 1 - |\alpha|^2, |\varphi'_\alpha(\alpha)| = \frac{1}{1 - |\alpha|^2}$$

Soit  $z_0 \in D$  et  $g = \varphi_{f(z_0)} \circ f \circ \varphi_{-z_0}$ . On a  $g(0) = 0$  et  $g : D \rightarrow D$ . Le lemme de Schwarz 5.6 implique que  $|g(z)| \leq |z|$  et  $|g'(0)| \leq 1$ . L'inégalité attendue résulte de

$$g'(0) = \varphi_{f(z_0)}(f(z_0))f'(z_0)\varphi'_{-z_0}(0) = \frac{1}{1 - |f(z_0)|^2}f'(z_0)(1 - |z_0|)^2$$

Le cas d'égalité correspond à  $|g'(0)| = 1$ . Alors  $g$  et donc  $f$  sont des automorphismes de  $D$ . ■

### Théorème 5.8: Bloch-Landau

Soit  $f \in \mathcal{O}(D(z_0, r))$  telle que  $f'(z_0) \neq 0$ . Alors il existe  $U \subset D(z_0, r)$  tel que  $f|_U$  est un biholomorphisme de  $U$  sur  $f(U) = D(\omega_0, R)$  disque de rayon  $R \geq \frac{r}{12} |f'(z_0)|$ .

*Démonstration.* Quitte à considérer la restriction de  $f$  et à remplacer  $f$  par  $f(z_0 + rz)$  on peut considérer définie au voisinage du disque fermé  $\overline{D}(0, 1)$ . On pose

$$m = \sup_{z \in \overline{D}(0,1)} \left(1 - |z|^2\right) |f'(z)| \geq |f'(0)|$$

La valeur  $m$  est atteinte en  $\alpha \in D(0, 1)$  et alors  $m = \left(1 - |\alpha|^2\right) |f'(\alpha)|$ . Posons  $h = f \circ \varphi_{-\alpha}$ . On a :

$$h(0) = f(\alpha), h'(0) = f'(\alpha)\varphi_{-\alpha}(0) = \left(1 - |\alpha|^2\right) f'(\alpha), |h'(0)| = m \geq |f'(0)|$$

De plus, pour  $|z| < 1$ , d'après le corollaire de Schwarz-Pick 5.3 :

$$\left(1 - |z|^2\right) |h'(z)| = \frac{\left(1 - |z|^2\right) |\varphi'_{-\alpha}(z)|}{1 - |\varphi_{-\alpha}(z)|^2} \left(1 - |\varphi_{-\alpha}(z)|^2\right) |f'(\varphi_{-\alpha}(z))| \leq m$$

Quitte à remplacer  $h$  par  $\frac{1}{h'(0)}(h - h(0))$ , on peut supposer  $h(0) = 0$  et  $m = h'(0) = 1$ . Donc :

$$|h'(z)| \leq \frac{1}{1 - |z|^2}, z \in D(0, 1)$$

Le rayon de convergence du développement en série entière<sup>2</sup>

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$$

est supérieur à 1 et les inégalités de Cauchy appliquées à  $h'$  sur le disque  $D(0, \rho)$  donnent

$$h^{(n)}(\omega) = \frac{(n-1)!}{2\pi\rho^{n-1}} \int_0^{2\pi} \frac{h'(\omega + re^{it})}{e^{i(n-1)t}} dt \text{ et } n|a_n| \leq \frac{1}{(1 - \rho^2)\rho^{n-1}}$$

Or,  $\rho \mapsto (1 - \rho^2)\rho^{n-1}$  atteint son maximum en  $\rho = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$ . Pour ce  $\rho$ , on obtient :

$$|a_n| \leq \frac{n+1}{2n} \left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^{(n-1)/2}$$

et pour  $M = 3^{3/4}/2$ ,  $|a_n| \leq M^n$  si  $n \geq 2$ .

En reprenant la preuve du théorème d'inversion locale par la méthode des séries majorantes 5.1, on obtient que  $h$  est un biholomorphisme d'un ouvert  $U$  sur le disque  $D(0, R)$  avec :

$$R = \frac{1}{(1 + \sqrt{2})M + 4M^2} > \frac{1}{12}$$

■

## 6 Espaces de Fonctions Holomorphes

### 6.1 Convergence de Suites de Fonctions Holomorphes

On dit qu'une suite converge localement de manière uniforme lorsque

$$\forall x \in U, \exists r_x > 0, f_n \xrightarrow[D(x, r_x)]{\text{CU}} f$$

La convergence uniforme localement est équivalente à la convergence uniforme sur tout compact.

*Démonstration.*  $\Leftarrow$   $K$  étant compact, on le recouvre par un nombre fini de disques.

---

2. DONC DE TAYLOR

⇒ En considérant un disque fermé inclus dans l'ouvert, on a convergence sur ce disque. ■

On rappelle que si  $\sum f_n$  converge uniformément sur un compact et que les  $f_n$  sont holomorphes,  $\sum f_n \in \mathcal{O}(K)$ .

### Théorème 6.1: Weierstrass

Soit  $f_n \in \mathcal{O}(U)$ ,  $f_n \xrightarrow[\forall K \subset U]{CU} f$ . Alors,  $f \in \mathcal{O}(U)$  et  $\forall l \in \mathbb{N}$ ,  $f_n^{(l)} \xrightarrow[\forall K \subset U]{CU} f^{(l)}$ .

*Démonstration.* On considère  $\overline{D(a, r)} \subset U$ . On a :

$$f_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a, r)} \frac{f_n(\omega)}{\omega - z} d\omega$$

On échange limite et intégrale par convergence uniforme et on obtient les formules de Cauchy pour  $f$ . ■

## 6.2 Théorèmes de Runge

On cherche une suite de polynôme convergeant vers une fonction holomorphe.

### Théorème 6.2: Runge - 1

Soit  $f \in \mathcal{O}(D(z_0, R))$ ,  $K \subseteq D(z_0, R)$ . Alors, si  $\varepsilon > 0$ , il existe  $P_\varepsilon \in \mathbb{C}[z]$  tel que

$$\max_K |f - P_\varepsilon| < \varepsilon$$

*Démonstration.* On suppose d'abord  $z_0 = 0$ . On pose  $f(z) = \sum a_n z^n$  sur  $D(0, R)$ , on note  $R'$  son rayon de convergence. Par la formule d'Hadamard :

$$\frac{1}{R'} = \limsup |a_n|^{1/n}$$

Pour  $\delta > 0$ , il existe  $N(\delta)$  tel que  $|a_n|^{1/n} \leq 1/R' + \delta$ . On choisit  $r$  assez petit pour que  $0 < R - r < d(K, \mathbb{C} \setminus D(0, R))$ . ■

### Lemme 6.1: Approximation Rationnelle

Soit  $K$  un compact inclus dans  $U$  ouvert de  $\mathbb{C}$ . Pour  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U \setminus K$  un chemin de classe  $\mathcal{C}^1$ . Nous notons

$$F_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $P, Q \in \mathbb{C}[Z]$  avec  $Q$  sans zéro dans  $K$  tels que

$$\max_{z \in K} \left| F_\gamma(z) - \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \varepsilon$$

*Démonstration.* Idée : La fonction

$$H : \begin{array}{ccc} K \times [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (z, t) & \longmapsto & \frac{1}{2i\pi} \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} \gamma'(t) \end{array}$$

est continue sur le compact  $K \times [0, 1]$  donc uniformément continue. Par conséquent

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, |t_1 - t_2| \leq \delta(\varepsilon) \implies |H(z, t_1) - H(z, t_2)| \leq \varepsilon, \forall z \in K$$

Ainsi, pour  $n$  tel que  $1/n \leq \delta(\varepsilon)$ ,

$$\left| F_{\gamma(z)} - \sum_{k=0}^{n-1} H(z, k/n) \frac{1}{n} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} |H(z, t) - H(z, k/n)| dt \leq \varepsilon$$

En posant

$$\frac{P}{Q} = \sum_{k=0}^{n-1} H(z, k/n) \frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2i\pi} \frac{f(\gamma(k/n))}{\gamma(k/n) - z} \gamma'(k/n) 1/n$$

on obtient une fraction rationnelle qui approche  $F_\gamma$  sur  $K$  avec  $Q(z) = \prod_{k=0}^{n-1} (\gamma(k/n) - z) \in \mathbb{C}[z]$ . ■

### Théorème 6.3: Runge - 2 - Rationnelle Edition

Soit  $K \subseteq U$  un compact. Toute fonction  $f \in \mathcal{O}(U)$  peut-être approchée uniformément sur  $K$  par des fractions rationnelles sans pôle sur  $K$  :

$$\forall f \in \mathcal{O}(U), \forall \varepsilon > 0, \exists P, Q \in \mathbb{C}[z] \text{ tels que } \max_{z \in K} \left| f(z) - \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \varepsilon$$

*Démonstration.* • Construction d'un contour de  $K$ . Soit  $\alpha \in ]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$  et

$$\delta = \alpha d(K, \mathbb{C} \setminus U) > 0$$

Pour  $k, l \in \mathbb{Z}$ , nous notons le carré plein fermé de côté  $\delta$  :

$$\overline{\Pi}_{k,l} = \{x + iy \in \mathbb{C} | k\delta \leq x \leq (k+1)\delta, l\delta \leq y \leq (l+1)\delta\}$$

et  $\Pi_{k,l} = \overset{\circ}{\overline{\Pi}}_{k,l}$  le carré plein ouvert. Nous avons le pavage

$$\mathbb{C} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \bigcup_{l \in \mathbb{Z}} \overline{\Pi}_{k,l}$$

Nous notons  $\overline{\Pi}_1, \dots, \overline{\Pi}_J$  la collection de tous les  $\overline{\Pi}_{k,l}$  d'intersection non nulle avec  $K$  et  $\gamma_1, \dots, \gamma_H$  les segments de longueur  $\delta$  qui appartiennent au bord d'un unique  $\overline{\Pi}_j$  sans appartenir à deux bords de deux carrés adjacents. Quitte à translater  $K$  et réduire  $\delta$ , on peut supposer que  $K$  contient au moins un point à l'intérieur de chaque carré.

Pour tout  $j$ , il existe  $z_j \in \Pi_j \cap K$ . On a :

$$|z_j - w| \leq \sqrt{2}\delta \Rightarrow w \in \overline{\Pi}_j$$

Or,  $\delta < \alpha d(K, \mathbb{C} \setminus U)$  donc

$$\sqrt{2}\delta < d(K, \mathbb{C} \setminus U)$$

Par conséquent,  $\overline{\Pi}_j \subseteq \overline{D}(z_j, \sqrt{2}\delta) \subseteq U$  et

$$\bigcup_j \overline{\Pi}_j \subseteq U \text{ et } \bigcup_{1 \leq h \leq H} \gamma_h \subseteq U$$

De plus, pour tout  $1 \leq h \leq H$ ,  $\gamma_h \cap K = \emptyset$ . Sinon, si  $z \in \gamma_h \cap K$ , il existe deux carrés adjacents tel que  $\gamma_h = \overline{\Pi}_{k(h),l(h)} \cap \overline{\Pi}_{k'(h),l'(h)}$ . Comme  $z$  appartient à chacun d'eux, les carrés  $\overline{\Pi}_{k(h),l(h)}$  et  $\overline{\Pi}_{k'(h),l'(h)}$  appartiennent tous deux à la collection des  $\overline{\Pi}_i$ . Donc  $\gamma_h$  est un bord commun à deux carrés de la collection ce qui est exclu.

- Pour tout  $z \in K \setminus \bigcup_{j=1}^J \delta \Pi_j$ , il existe un unique  $j(z)$  avec  $z \in \Pi_{j(z)}$ . Pour tout  $j' \neq j(z)$ ,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\delta \Pi_{j'}} \frac{f(w)}{w - z} dw = 0$$

et

$$f(z) = \sum_{j=1}^J \frac{1}{2i\pi} \int_{\delta\Pi_j} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

- Si  $z \in K \setminus \bigcup_{j=1}^J \delta\Pi_j$ , on a, par définitions des  $\gamma_h$ , les contributions des autres bords des  $\delta\Pi_j$  s'annulant deux à deux :

$$f(z) = \sum_{j=1}^J \frac{1}{2i\pi} \int_{\delta\Pi_j} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{h=1}^H \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_h} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

Comme  $\gamma_h \cap K = \emptyset$ , les intégrales  $\int_{\gamma_h} \frac{f(w)}{w-z} dw$  sont continues par rapport à  $z \in K$ . L'égalité précédente est donc encore satisfaite pour  $z \in K \cap \bigcup_{j=1}^J \delta\Pi_j$ .

D'après le lemme précédent 6.1, pour tout  $1 \leq h \leq H$ , il existe  $P_h, Q_h \in \mathbb{C}[z]$ ,  $Q_h$  sans zéros dans  $K$  avec

$$\sup_{z \in K} \left| F_{\gamma_h}(z) - \frac{P_h(z)}{Q_h(z)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{H}$$

Posons alors  $Q = \prod_{h=1}^H Q_h \in \mathbb{C}[z]$  et

$$P = Q \prod_{h=1}^H \frac{P_h}{Q_h} \in \mathbb{C}[z]$$

On obtient alors :

$$\left| f(z) - \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \varepsilon$$

■

### Lemme 6.2: Approximation Polynomiale des Fractions Rationnelles

Si  $K \subseteq \mathbb{C}$  compact a un complémentaire connexe, alors pour tout  $z_0 \notin K$ , la fonction rationnelle  $\frac{1}{z-z_0}$  peut être approchée uniformément sur  $K$  par des polynômes de  $\mathbb{C}[z]$ .

*Démonstration.* • Comme  $K$  est compact, il est borné donc inclus dans un disque  $D(0, R)$ . Pour  $z_1 \in \mathbb{C} \setminus D(0, R)$ , on a :

$$\frac{1}{z-z_1} = -\frac{1}{z_1} \frac{1}{1-\frac{z}{z_1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{z^n}{z_1^{n+1}}$$

série uniformément convergente pour tout  $z \in K$ . Donc la fraction  $\frac{1}{z-z_1}$  peut être approximée uniformément par des polynômes sur  $K$ . De même pour toute puissance.

- Comme  $\mathbb{C} \setminus K$  est connexe de  $\mathbb{C}$  donc connexe par arcs, il existe un chemin  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus K$  avec  $\gamma(0) = z_0$  et  $\gamma(1) = z_1$ . L'image  $\gamma([0, 1])$  est compacte disjointe de  $K$  donc  $\rho = \frac{1}{2}d(\gamma([0, 1]), K) > 0$ . Choisissons une subdivisions de  $\gamma([0, 1])$  de pas au plus  $\rho$ . Pour toute paire de points  $w, w' \in \gamma([0, 1])$  avec  $|w - w'| \leq \rho$ , pour  $z \in K$ , on a :

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-w'} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{w-w'}{z-w'} \right)^n$$

et cette somme est uniformément convergente car  $\left| \frac{w-w'}{z-w'} \right| \leq 1/2$ . Ainsi on a une approximation de  $\frac{1}{z-w}$  par des polynômes en  $\frac{1}{z-w'}z - w$  par des polynômes en  $\frac{1}{z-w'}$ .

■

### Théorème 6.4: Runge - 3 - Polynomial Edition

Soit  $K \subseteq U$  compact de complémentaire connexe. Alors, les fonctions holomorphes dans  $U$  sont uniformément approximables sur  $K$  par des polynômes :

$$\forall f \in \mathcal{O}(U), \forall \varepsilon > 0, \exists P_\varepsilon \in \mathbb{C}[z] \text{ tel que } \max_{z \in K} |f(z) - P_\varepsilon(z)| \leq \varepsilon$$

*Démonstration.* Ceci découle du lemme 6.2 que l'on combine à la version rationnelle 6.3 du théorème de Runge ■

## 6.3 Théorème de Montel

### Définition 6.1: Bornitude Uniforme

Une famille  $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{O}(U)$  est uniformément bornée sur les compacts de  $U$  si pour tout  $K \subseteq U$  compact, il existe  $M_K \geq 0$  telle que

$$|f(z)| \leq M_K, z \in K, f \in \mathfrak{F}$$

### Définition 6.2: Uniforme Équicontinuité

Une famille  $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{O}(U)$  est uniformément équicontinue sur les compacts de  $U$  si pour tout  $K \subseteq U$  compact, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta = \delta(K, \varepsilon) > 0$  tel que

$$(z, w \in K \text{ avec } |z - w| \leq \delta) \implies |f(z) - f(w)| \leq \varepsilon, f \in \mathfrak{F}$$

### Proposition 6.1: Exemples

1. Sur  $\overline{D}(0, 1)$ , la famille des  $(z^n)$  est uniformément bornée mais pas uniformément équicontinue. Elle l'est sur  $D(0, 1)$ .
2. Sur  $[0, 1]$ , la famille  $(\sin(2\pi nx))$  est uniformément bornée par 1 mais n'est uniformément équicontinue sur aucun compact car les dérivées sont non bornées en  $n$ .

### Définition 6.3: Normalité

Une famille  $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{O}(U)$  est dite normale si pour toute suite de fonctions  $f_n$ , il existe une suite extraite uniformément convergente sur tout compact de  $U$ .

### Définition 6.4: Exhaustivité

Une suite croissante de compacts  $(K_n)$  de  $U$  est exhaustive si tout compact de  $U$  est contenu dans un  $K_n$ .

### Théorème 6.5: Suite Exhaustive

Pour tout ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$ , il existe une suite croissante de compacts exhaustive de réunion  $U$ .

*Démonstration.* Considérons la suite  $B_n$  des disques fermés contenus dans  $U$  dont les coordonnées du centre et le rayon sont rationnels. Ils forment un ensemble dénombrable. La suite des  $K_i = \bigcup_{n=1}^i B_n$  convient ■

### Théorème 6.6: Mantel

Soit  $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{O}(U)$  une famille de fonctions uniformément bornées sur les compacts de  $U$ . Alors

1.  $\mathfrak{F}$  est uniformément équicontinue sur les compacts de  $U$ .
2.  $\mathfrak{F}$  est une famille normale.

*Démonstration.* 1. Soit  $K$  un compact de  $U$ ,  $r < \frac{1}{3}d(K, \mathbb{C} - U)$ . Pour  $w \in K$ , la famille  $\mathfrak{F}$  est uniformément bornée sur  $L = \{u \in U, d(u, K) \leq 2r\}$ . Pour  $z \in D(w, r)$  la formule de Cauchy donne :

$$f(z) - f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(w, 2r)} f(u) \left( \frac{1}{u-z} - \frac{1}{u-w} \right) du$$

Or,  $|u-z| > r$  et

$$\left| \frac{1}{u-z} - \frac{1}{u-w} \right| = \frac{|z-w|}{|u-z|2r} \leq \frac{|z-w|}{2r^2}$$

Ainsi

$$|f(z) - f(w)| \leq \frac{1}{2\pi} M_L \frac{|z-w|}{2r^2} 2\pi 2r \propto |z-w|$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut choisir convenablement  $\delta < r$  de telle sorte qu'on a bien l'uniforme équicontinuité sur  $K$ .

2. Soit  $r < \frac{1}{2}d(K, \mathbb{C} - U)$ . On pose

$$K_r = \{z \in \mathbb{C}, d(z, K) \leq r\} \subseteq K_{2r} \subseteq U$$

Par hypothèses,  $M_0 = \sup_{n \in \mathbb{N}, z \in K_{2r}} |f_n(z)| < +\infty$ . Par l'inégalité de Cauchy,

$$M_1 = \sup_{n \in \mathbb{N}, z \in K_r} |f'_n(z)| \leq \frac{M_0}{r} < +\infty$$

Soient  $z_1, z_2 \in K$ . Si  $d(z_1, z_2) \leq r$ , alors  $|z_1, z_2| \subseteq K_r$  et par théorème des accroissements finis

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| \leq M_1 d(z_1, z_2)$$

À l'inverse, si  $d(z_1, z_2) \geq r$ , on a :

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| \leq \frac{2M_0}{r} d(z_1, z_2)$$

Par théorème d'Ascoli, on peut extraire des  $f_{n|_K}$  une suite uniformément convergente sur  $K$ . Pour  $\nu \in \mathbb{N}^*$ , on considère une suite croissante exhaustive de compacts  $(K_\nu)$ . D'après ce qui précède, il existe une partie infinie  $S_1 \subseteq \mathbb{N}$  telle que la suite  $(f_n)_{n \in S_1}$  converge uniformément sur  $K_1$ . Par récurrence sur  $\nu$ , on construit une suite de parties infinies emboîtées  $S_\nu \subseteq \dots \subseteq S_1 \subseteq \mathbb{N}$  telle que la sous-suite  $(f_n)_{n \in S_\nu}$  converge uniformément sur  $K_\nu$ . Par extraction diagonale, on construit une sous-suite  $(f_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$  qui converge uniformément sur tous les compacts  $K_\nu$ . ■

## 6.4 Compacts de $\mathcal{O}(U)$

On munit  $\mathcal{O}(U)$  de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. C'est une topologie invariante par translation dans laquelle les

$$V(K, \varepsilon) = \left\{ f \in \mathcal{O}(U) \mid \sup_{z \in K} |f(z)| < \varepsilon \right\}$$

pour  $K$  un compact de  $U$  et  $\varepsilon > 0$  constituent un système de voisinage de 0. L'addition et l'homothétie sont continues pour cette topologie.

On définit de plus :

$$p_{K_n} : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}(U) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ f & \longmapsto & \sup_{z \in K_n} |f(z)| \end{array}$$

et

$$d(f, g) = \sum_{i \geq 1} 2^{-i} \min(1, p_{K_i}(f - g))$$

où les  $K_i$  forment une suite croissante exhaustive de compacts de  $U$ .

### Lemme 6.3: Métrisabilité

La topologie de la convergence sur tout compact est métrisable par la distance  $d$  sur  $\mathcal{O}(U)$ .

*Démonstration.* • Soit  $K$  un compact. Soit  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $K \subseteq K_i$ . Alors,  $d(f, 0) < 2^{-i}\varepsilon$  implique  $p_{K_i}(f) < \varepsilon$ . Donc :  $B(0, 2^{-i}\varepsilon) \subseteq V(K_i, \varepsilon) \subseteq V(K, \varepsilon)$ . Donc  $V(K, \varepsilon)$  contient une boule centrée en 0 pour  $d$ .

- Soit  $B(0, \varepsilon)$  une boule pour  $d$ . Soit  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $\frac{2^{-i}\varepsilon}{2} < \varepsilon/2$ . Alors, si  $f \in V(K_i, \varepsilon/2)$

$$d(f, 0) \leq \sum_{j=1}^i 2^{-j} p_{K_j}(f) + \sum_{j=i+1}^{+\infty} 2^{-j} < \varepsilon/2 + 2^{-i} < \varepsilon$$

Donc  $V(K_i, \varepsilon/2) \subseteq B(0, \varepsilon)$ . ■

L'espace vectoriel  $\mathcal{O}(U)$  localement convexe, métrisable et complet est un espace de Fréchet.

### Théorème 6.7: Compacts de $\mathcal{O}(U)$

Les compacts de  $\mathcal{O}(U)$  sont les fermés bornés.

*Démonstration.* • Soit  $A \subseteq \mathcal{O}(U)$  une partie compacte. Comme  $\mathcal{O}(U)$  est métrisable, il est séparé, et donc  $A$  est fermée. Soit  $K \subseteq U$  compact. L'application  $p_K$  est continue sur  $\mathcal{O}(U)$ . Donc comme  $A$  est compacte,  $p_K(A)$  est compacte donc bornée dans  $\mathbb{R}$ . Les applications  $f \in A$  sont donc uniformément bornées sur  $K$ . Pour tout compact  $K$  de  $U$ , il existe donc  $\varepsilon_A > 0$  tel que  $A \subseteq V(K, \varepsilon_A)$ . Ainsi pour tout  $V(K, \varepsilon)$  d'un système fondamental de voisinages de 0, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  avec  $A \subseteq V(K, \lambda\varepsilon)$ . Donc  $A$  est bornée.

- Soit  $A$  une partie fermée bornée de  $\mathcal{O}(U)$ . Comme  $A$  est bornée, pour tout  $K$  compact de  $U$ , les applications  $f \in A$  sont uniformément bornées sur  $K$ . Soit  $(f_n)$  une suite d'éléments de  $A$ . Par théorème de Mantel 6.6, cette suite est uniformément bornée donc admet une sous-suite convergente uniformément sur tout compact de  $U$  de limite  $f \in \mathcal{O}(U)$ . Comme  $A$  est fermée,  $f \in A$  donc,  $A$  est séquentiellement compact pour une topologie métrisable, donc par théorème de Bolzano-Weierstrass est compact. ■

## Deuxième partie

# Fonctions Méromorphes

## 7 Théorème des Résidus

### 7.1 Développement en Séries de Laurent