Lambda-Calcul et Catégories

Paul-André Mellies

18 novembre 2024

Table des matières

1 Introduction

1.1 Introduction Historique

Le λ-calcul a été introduit dans les années 1930 par Church. Il est en lien avec des questions de linguistique, de logique et de calculabilité.

> **Définition 1.1** Le λ-calcul est un langage de preuves pour une logique intuitionniste minimale (ou pour la théorie simple des types).

Le λ-calcul non typé a la puissance des machines de Turing.

> **Définition 1.2** Les catégories sont des structures algébriques (parfois appelées monoïdes à plusieurs objets)

Historiquement, les catégories ont été introduites pour la topologie algébriques dans les années 1940 avec les travaux de Eilenberg et Maclane. Leur objectif était de comprendre les propriétés fondamentales des espaces en s'intéressant aux morphismes entre espaces (les fonctions continues).

Il y a une connexion forte au niveau de la théorie des preuves entre λ-calcul et théorie, qui est très similaire à ce qui s'était passé lors de la définition des algèbres de Boole. Dans ce deuxième cas, Boole montre qu'on peut mettre un ordre partiel sur les formules de la logique classique :

$$\varphi \leq \Psi \text{ si et seulement si } \varphi \Rightarrow \Psi$$

Une algèbre de Boole $(A, \leq, \wedge, \vee, \neg, \top, \bot)$ est un ensemble ordonnée $A, \leq$ muni de fonctions préservant l'ordre $\wedge, \vee$: $A \times A \to A$:

$$\varphi_1 \leq \Psi_1 \wedge \varphi_2 \leq \Psi_2 \Longrightarrow \varphi_1 \wedge \varphi_2 \leq \Psi_1 \wedge \Psi_2, \varphi_1 \vee \varphi_2 \leq \Psi_1 \vee \Psi_2$$

et d'une fonction inversant l'ordre $\neg : A \times A$:

$$\varphi \leq \Psi \Rightarrow \neg\Psi \leq \neg\varphi$$

vérifiant un certain nombre d'axiomes :

- Associativité :

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3 = \varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3)$$
$$(\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3 = \varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)$$

- Neutralité :

$$\varphi \wedge \top = \top \wedge \varphi = \varphi$$
$$\varphi \vee \perp = \perp \vee \varphi = \varphi$$

- Commutativité :

$$\varphi \wedge \Psi = \Psi \wedge \varphi, \varphi \vee \Psi = \Psi \vee \varphi$$

- Distributivité :

$$\varphi \wedge (\Psi_1 \vee \Psi_2) = (\varphi \wedge \Psi_1) \vee (\varphi \wedge \Psi_2)$$
$$\varphi \vee (\Psi_1 \wedge \Psi_2) = (\varphi \vee \Psi_1) \wedge (\varphi \vee \Psi_2)$$
$$\neg (\varphi \wedge \Psi) = \neg\varphi \vee \neg\Psi, \neg\top = \perp$$

- Idempotence :

$$\varphi = \neg\neg\varphi$$
$$\varphi \wedge \varphi = \varphi, \varphi \vee \varphi = \varphi$$

Dans une algèbre de Boole, $\varphi \wedge \psi$ est le plus grand minorant de φ et de ψ et $\varphi \vee \psi$ est le plus petit majorant de φ et ψ

R On peut définir l'implication dans les algèbres de Boole comme $\varphi \Longrightarrow \psi = \neg\varphi \vee \psi$

On va passer du système des algèbres de Boole ($\varphi \leq \psi$ s'il existe une preuve que φ implique ψ) au système de catégories comme proposé par Lambek.

Définition 1.3 On peut voir une catégorie comme un graphe dont les noeuds sont appelés objets et les arêtes sont appelées morphismes, maps ou flèches. On peut composer les arêtes d'une catégorie, comme pour se déplacer sur le graphe.

Ici on considère une catégorie dont les objets sont des formules logiques, et les morphismes sont des preuves d'implication. Il y a donc des liens très forts entre les catégories obtenues avec des formules et des preuves et celles obtenues par des types et des programmes fonctionnels entre les types. On va ici étudier les catégories à travers leurs représentations : on peut mieux comprendre une catégorie en la représentant comme une famille d'actions au moyen d'un foncteur.

1.2 Notion de Catégorie : Premiers Exemples

Définition 1.4 — Catégorie. Une *catégorie* est décrite par les données suivantes :

0 Une classe [a] d'objets (les noeuds d'un graphe). On appelle les catégories dont les objets définissent un ensemble des *petites catégories*.

1 Pour toute paire d'objets A, B, un ensemble $\mathrm{Hom}(A, B)$ de fonctions de A vers B appelées *morphismes* ou *maps*. On note ceci : $f : A \to B$ ou $A \xrightarrow{f} B$.

2 Pour tous objets A, B, C, une loi de composition $\circ_{A,B,C}$:

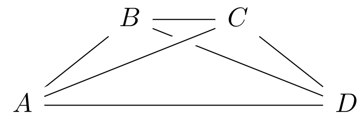
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}(B, C) \times \mathrm{Hom}(A, B) & \to & \mathrm{Hom}(A, C) \\ (g, f) & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

2 Pour tout objet A, une fonction identité $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}(A, A)$

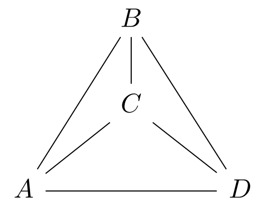
3 Associativité :

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[r, "g"] & C \arrow[dr, "h"] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[urr, "g\circ f"] \arrow[rrr, "h\circ(g\circ f)"] & & & D
\end{tikzcd}$$

On peut aussi voir la composition comme la couverture de l'aire entre les noeuds du graphe :



ou encore :



3 Neutralité : $f \circ \mathrm{id}_A = f = \mathrm{id}_B \circ f$.

a. propriété non incarnée par un ensemble

R Voir *nerf d'une catégorie* pour voir la notion d'ensemble simplicial.

■ **Exemple 1.1** **PoSet** On considère d'abord les ensembles partiellement ordonnés comme des catégories :

Proposition 1.1 Chaque ensemble partiellement ordonné $(A, \leq)$ définit une catégorie dont les objets sont des éléments a, b, c de A avec une map $a \to b$ si et seulement si $a \leq b$ et $\mathrm{Hom}(a, b)$ un singleton si $a \leq b$ et $\varnothing$ sinon.

Démonstration. On doit montrer l'existence d'une identité, d'une loi de composition, et les propriétés d'associativité et de neutralité :

- Par réflexivité de l'ordre : $a \leq a$ et donc $a \xrightarrow{\mathrm{id}_a} a$ existe.
- Par transitivité : si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$ et on peut donc voir la transitivité comme une composition :
- L'associativité et la neutralité découlent immédiatement du fait que chaque $\mathrm{Hom}(a, b)$ contient au plus un élément.

■

Réciproquement, une catégorie φ telle que chaque ensemble d'homomorphismes contienne au plus un élément est la même chose qu'un préordre :

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[loop left, "\mathrm{id}=g\circ f"] \arrow[r, shift left, "f"] & b \arrow[l, shift left, "g"] \arrow[loop right, "f\circ g=\mathrm{id}"]
\end{tikzcd}$$

Monoïde On considère maintenant les Monoïdes comme des catégories.

Proposition 1.2 Chaque monoïde (M, m, e) définit une catégorie notée $\mathcal{B}M$ appelée sa suspension avec un seul objet $*$ tel que : $\mathrm{Hom}(*, *) = M$ et $\circ : m, n \mapsto n \cdot m$.

L'associativité et la neutralité de la catégorie $\mathcal{B}M$ sont des conséquences directes de l'associativité et de la neutralité du monoïde.

R En prenant $M = (\mathbb{N}, +, 0)$, la représentation ainsi obtenue des entiers a un lien direct avec la théorie de l'homotopie : c'est le groupe de Poincaré (ou groupe fondamental) d'un espace topologique pointé. Tout espace topologique définit une catégorie dont les objets sont les éléments de l'espace topologique et les flèches sont les chemins, à homotopie près.

Types On considère la catégorie cartésienne fermée des types simples comme objets et des λ-termes simplement typés (module $\beta\eta$-équivalence) comme morphismes :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x:A\models t:B"] \arrow[rr, bend right, "x:A\models a[t/y]:C"'] & B \arrow[r, "y:B\models u:C"] & C \end{tikzcd}$$

$A \xrightarrow{x:A\models t:B} B \xrightarrow{y:B\models u:C} C$ flèche dessous $(x : A \models u[t/y] : C)$ Cette catégorie jouera le rôle en théorie de la démonstration de l'algèbre de Boole des formules

■

2 Catégories Cartésiennes

Définition 2.1 Un produit cartésien de deux objets A et B dans un catégorie φ est la donnée d'un triplet

$$(A \times B, \pi_1 : A \times B \to A, \pi_2 : A \times B \to B)$$

$$\begin{tikzcd} A & & B \\ & A \times B \arrow[ul, "\pi_1"] \arrow[ur, "\pi_2"'] & \end{tikzcd}$$

tel que pour toute paire de flèches : $X \xrightarrow{f} A$ et $X \xrightarrow{g} B$, il existe un et une seule flèche : $h : X \to A \times B$ telle que $f = \pi_1 \circ h, g = \pi_2 \circ h$. Pour $\varphi = Set$, par exemple, $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ et $\pi_1 : (a, b) \mapsto a$ et $h : x \mapsto (fx, gx)$.

■ **Exemple 2.1** Dans une catégorie définie par une relation d'ordre sur $A, \leq$, le produit cartésien de $a, b \in A$ c'est la même chose que la borne inférieure $a \wedge b$ de a et b définie comme le plus grand des minorants de a et b.

$$\begin{tikzcd} a & & b \\ & a \wedge b \arrow[ul, "\leq"] \arrow[ur, "\leq"'] & \\ & x \arrow[u, dotted, "h"] \arrow[uul, bend left] \arrow[uur, bend right] & \end{tikzcd}$$

■

Définition 2.2 — Objet Terminal. Un objet terminal $\mathbb{1}$ dans une catégorie $\mathcal{C}$ est un objet tel que pour tout objet A de $\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{1})$ est une singleton.

R Un objet initial est un objet terminal dans la catégorie duale (catégorie ou on renverse les flèches).

Définition 2.3 Une catégorie cartésienne est une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'un produit cartésien $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$ et munie d'un objet terminal.

Définition 2.4 Une paire $\mathbb{I} \xrightarrow{f} \mathbb{J}$ et $\mathbb{J} \xrightarrow{g} \mathbb{I}$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{J}}$ et $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{I}}$ est appelée *isomorphisme*

Proposition 2.1 Deux objets terminaux sont isomorphes. Deux produits cartésiens d'une même paire d'objets sont isomorphes.

Démonstration. Soit $\mathbb{I}, \mathbb{J}$ deux objets terminaux d'une même catégorie. Il existe un unique morphisme f (resp. g) de $\mathbb{I}$ (resp. $\mathbb{J}$) vers $\mathbb{J}$ (resp. $\mathbb{I}$). De même, il existe un unique morphisme $\mathrm{id}_{\mathbb{J}}$ de $\mathbb{J}$ vers lui-même. Le diagramme ci-dessous commute donc :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{J} & \\
\mathbb{J} \arrow[ur, "\mathrm{id}_{\mathbb{J}}"] \arrow[rr, "g"] & & \mathbb{I} \arrow[ul, "f"']
\end{tikzcd}$$

En particulier, on a bien $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{J}}$. Puisque la situation est symétrique, $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{I}}$ et donc deux objets terminaux sont isomorphes. Si on a deux produits cartésiens $A \times B, A \otimes B$ de deux objets A, B, alors :

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[dr, bend right, "\pi_{A,1}"'] \arrow[drr, "\pi_{B,1}"] & & & A \otimes B \arrow[dll, "\pi_{A,2}"'] \arrow[dl, bend left, "\pi_{B,2}"] \\
 & A & B &
\end{tikzcd}$$

En particulier, par définition du produit cartésien, puisqu'il existe deux applications de $A \times B$ vers A, B, il existe une unique application $h_{1,2}$ de $A \times B$ vers $A \otimes B$ telle que $\pi_{A,2} \circ h_{1,2} = \pi_{A,1}$:

$$\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, bend right, "\pi_{A,1}"'] \arrow[dr, bend left, "\pi_{B,1}"] \arrow[d, dashed, shift right, "f"'] & \\
 & A \otimes B \arrow[u, dashed, shift right, "g"'] \arrow[dl, "\pi_{A,2}"] \arrow[dr, "\pi_{B,2}"'] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

Il suffit donc de montrer que l'identité fait commuter le diagramme pour que avoir $f \circ g = \mathrm{id}_{A \times B}$ et donc le résultat :

$$\begin{tikzcd}
 & & A & \\
 & A & & \\
A \times B \arrow[rr, bend left, "\pi_{A,1}"] \arrow[ur, "\pi_{A,1}"] \arrow[r, "f"] \arrow[rrd, bend right, "\pi_{B,1}"'] & A \otimes B \arrow[u, "\pi_{A,2}"] \arrow[r, "g"] & A \times B \arrow[uu, "\pi_{A,1}"] \arrow[d, "\pi_{B,2}"] & \\
 & & B &
\end{tikzcd}$$

On aurait aussi pu construire une catégorie $Span(A, B)$:

- Les objets sont des triplets $\langle f, X, g \rangle$:

$$\begin{tikzcd}
A & & B \\
 & X \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

- Les flèches sont des $\langle f, X, g \rangle \xrightarrow{h} \langle f', Y, g' \rangle$:

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
A & & B \\
 & X \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[uu, "h"] &
\end{tikzcd}$$

Alors, $A \times B, \pi_1, \pi_2$ est un produit cartésien dans $\mathcal{C}$ si et seulement si $\langle \pi_1, A \times B, \pi_2 \rangle$ est un objet terminal dans $Span(A, B)$. ■

3 La 2-catégorie des catégories, foncteurs et transformations naturelles

3.1 Foncteurs entre Catégories

Définition 3.1 Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ deux catégories. Un foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est la donnée de :

0 Un objet $F(A) \in \mathcal{B}$ pour tout objet A de $\mathcal{A}$.

1 Pour toute paire d'objets $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, une fonction :

$$\begin{array}{rccc} F_{A_1,A_2} : & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A_1, A_2) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(FA_1, FA_2) \\ & f & \mapsto & F(f) \end{array}$$

2 On demande que les équations suivantes soient satisfaites :

- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ où

$$\begin{tikzcd} & A_2 \arrow[dr, "g"] & \\ A_1 \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ f"] & & A_3 \end{tikzcd}$$

  C'est à dire :

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[d, "f"] \arrow[dd, bend left, "g \circ f"] \\ A_2 \arrow[d, "g"] \\ A_3 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FA_1 \arrow[d, "Ff"] \arrow[dd, bend left, "Fg \circ Ff"] \\ FA_2 \arrow[d, "Fg"] \\ FA_3 \end{tikzcd}$$

- Si $A \xrightarrow{\mathrm{id}_A} A$, $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$

  Autrement dit, l'image de la composée est égale à la composée des images.

■ **Exemple 3.1**

1. Un foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre catégories de préordre est la même chose qu'une fonction croissante (order preserving).
2. Un foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre catégories à un objet est la même chose qu'un homomorphisme $M \to N$ si $\mathcal{A} = \Sigma M$ et $\mathcal{B} = \Sigma N$.
3. Si M est un monoïde, $\mathcal{A} = \Sigma M$ la catégorie à un objet associée, un foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathrm{Set}$ la catégorie des ensembles et fonctions est la donnée d'un ensemble X (l'image de M) et d'une action à gauche de M sur X. En effet, puisque chaque élément de M est une flèche de ΣM de l'objet dans lui même, pour tous $m, n \in M$, on a une flèche de $F(*) \to F(*)$ telles que $F(m \cdot n) = F(m) \circ F(n)$. On vérifie alors bien les propriétés d'une action à gauche.

   Similairement, si M est le monoïde libre engendré par un alphabet A, l'action à droite $X \times A^* \to X$ étant une famille de fonctions $\delta_a : X \to X$ pour $a \in A$, i.e. un automate déterministe et total dont l'ensemble des états est X.
4. Soit $\mathbb{G}$ la catégorie à deux objets et quatre morphismes :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop right, "\mathrm{id}_1"] \arrow[d, shift right, "t"'] \arrow[d, shift left, "s"] \\ 0 \arrow[loop right, "\mathrm{id}_0"] \end{tikzcd}$$

   Un foncteur $F : \mathbb{G} \to \mathrm{Set}$ est une paire d'ensembles $E = F(1)$, $V = F(0)$, et de deux fonctions $F(s), F(t) : E \to V$. En voyant E comme un ensemble d'arêtes et V comme un ensemble de sommets, $F(s)$ peut être vue comme une fonction ∂_0 qui à une arête (x, y) associe x. Rajouter un élément 2 avec deux morphismes vers 1 permettrait de définir des graphes avec des 2-arêtes entre arêtes. En prenant la catégorie des faces d'un triangle on obtiendrait la catégorie des ensembles simpliciaux.

■

3.2 Transformations entre Foncteurs

3.2.1 Transformation

On va essayer de suivre l'intuition selon laquelle la théorie des catégories préserve l'ordre.

$$\begin{tikzcd}
(A, \leq_A) \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\rotatebox{90}{$\leq$}"] & (B, \leq_B)
\end{tikzcd}$$

On a alors $f \leq g \Leftrightarrow \forall a \in A, fa \leq ga$.

On va essayer de généraliser cette définition. On se donne deux foncteurs F, G de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ et on va définir une transformation point à point de F vers G :

Définition 3.2 Une transformation $\theta : F \Rightarrow G$ est une famille $(\theta_A : FA \to GA)_{A \in \mathrm{Obj}\mathcal{A}}$ de flèches de $\mathcal{B}$ indicée par les objets de $\mathcal{A}$. On note ceci :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\theta\Uparrow"] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

Définition 3.3 La catégorie $\mathrm{Trans}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ a pour objet les foncteurs $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ et pour flèches les transformations $\theta : F \Rightarrow G$.

- La transformation $\mathrm{id}_F : F \Rightarrow F$ est définie par $\mathrm{id}_F = \left(FA \xrightarrow{\mathrm{id}_{FA}} FA\right)_{A \in \mathrm{Obj}\mathcal{A}}$
- La transformation $\psi \cdot \varphi : F \Rightarrow H$ composée de $\varphi : F \Rightarrow G$ et $\psi : G \Rightarrow H$ telle que : $(\psi \cdot \varphi)_A = \psi_A \circ_{\mathcal{B}} \varphi_A$.

3.2.2 Action à Gauche de Post-Composition

Supposons qu'on ait la situation suivante :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\theta\Uparrow"] & \mathcal{B} \arrow[r, "H"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

où $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ sont des catégories, $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et $H : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ sont des foncteurs et $\theta : F \to G$ est une transformation.

Définition 3.4 La transformation (dite d'action à gauche) $H \circ_L \theta : H \circ F \Rightarrow H \circ G$ est définie par $(H \circ \theta)_A = H(\theta_A) : HFA \to HGA$

Autrement dit, une transformation est la donnée pour tout objet de la catégorie de départ d'une flèche dans la catégorie d'arrivée.

Proposition 3.1 On a alors une série d'équations :

1. On a :

$$H \circ_L (\psi \cdot \varphi) = (H \circ_L \psi) \cdot (H \circ_L \varphi)$$

et de même :

$$H \circ_L \mathrm{Id}_F = \mathrm{Id}_{H\circ F}$$

Autrement dit :

$$H\circ_L : \begin{array}{ccc} \mathrm{Trans}\,(\mathcal{A},\mathcal{B}) & \longrightarrow & \mathrm{Trans}\,(\mathcal{A},\mathcal{C}) \\ F:\mathcal{A}\to\mathcal{B} & \longmapsto & H\circ F:\mathcal{A}\to\mathcal{C} \\ \begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\theta\Uparrow"] & \mathcal{B} \end{tikzcd} & \longmapsto & \begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "H\circ G"] \arrow[r, bend right, "H\circ F"'] \arrow[r, phantom, "H\circ_L\theta\Uparrow"] & \mathcal{C} \end{tikzcd} \end{array}$$

$H \circ_L -$ est un foncteur. On dit que l'action est fonctorielle.

2. On a :

$$(H' \circ H) \circ_L \theta = H' \circ_L (H \circ_L \theta)$$

et de même :

$$\mathrm{Id}_{\mathcal{B}} \circ_L \theta = \theta$$

Démonstration. 1. La première propriété est immédiate par la composition des foncteurs.

2. On a :

$$\begin{aligned} ((H' \circ H) \circ_L \theta)_{A\in \mathrm{Obj}\,\mathcal{A}} =& H' \circ H\,(\theta_A : FA \to GA) \\ =& H'\,(H\theta_A) \\ =& H' \circ (H \circ \theta_A) \\ =& \,(H' \circ_L (H \circ_L \theta))_{A\in \mathrm{Obj}\,\mathcal{A}} \end{aligned}$$

D'où la deuxième propriété.

■

3.2.3 Action à droite de Pré-Composition

On suppose qu'on à :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "H"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\theta\Uparrow"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

Ceci permet de définir une transformation, dite d'action à droite :

Définition 3.5 La transformation (d'action à droite) $\theta \circ_R H : F \circ H \Rightarrow G \circ H$ est définie par : $(\theta \circ_R H)_{C\in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}} = \theta_{HC}$.

Proposition 3.2 $\circ_H$ définit un foncteur :

$$\mathrm{Trans}\,(\mathcal{A},\mathcal{B}) \longrightarrow \mathrm{Trans}\,(\mathcal{A},\mathcal{C})$$

Si on a :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "H"] & \mathcal{A} \arrow[r, bend left=50, "G"] \arrow[r, "F" description] \arrow[r, bend right=50, "E"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\theta_2\Uparrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\theta_1\Uparrow"] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

Alors $(\theta_2 \circ_R H) \cdot (\theta_1 \circ_R H) = (\theta_2 \cdot \theta_1) \circ_R H$ De même, on a :

$$\mathrm{id}_F \circ_R H = \mathrm{id}_{F \circ H}$$

Proposition 3.3 Les actions à gauche et à droite sont compatibles au sens où :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}' \arrow[r, "H_{\mathcal{A}'}"] & \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\theta\Uparrow"] & \mathcal{B} \arrow[r, "H_{\mathcal{B}}"] & \mathcal{B}' \end{tikzcd}$$

En particulier :

$$(H_{\mathcal{B}} \circ_L \theta) \circ_R H_{\mathcal{A}} = H_{\mathcal{B}} \circ_L (\theta \circ_R H_{\mathcal{A}})$$

cette transformation étant définie en $A' \in \mathrm{Obj}\mathcal{A}'$ par :

$$H_{\mathcal{B}}\left(\theta_{H_{\mathcal{A}}A'}\right) : H_{\mathcal{B}} F H_{\mathcal{A}} A' \to H_{\mathcal{B}} G H_{\mathcal{A}} A'$$

Ces équations assurent que tout diagramme de la forme :/

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}''' \arrow[r] & \mathcal{A}'' \arrow[r] & \mathcal{A}' \arrow[r, "H_{\mathcal{A}'}"] & \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\theta\Uparrow"] & \mathcal{B} \arrow[r, "H_{\mathcal{B}}"] & \mathcal{B}' \arrow[r] & \mathcal{B}'' \arrow[r] & \mathcal{B}''' \end{tikzcd}$$

définit une transformation de manière unique.

Proposition 3.4 Toutefois, si on se donne deux transformations :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "G_1"] \arrow[r, bend right, "F_1"'] \arrow[r, phantom, "\theta_1\Uparrow"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "G_2"] \arrow[r, bend right, "F_2"'] \arrow[r, phantom, "\theta_2\Uparrow"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

on a deux manières de composer, qui donnent en général des transformations différentes.

$$\begin{tikzcd} G_2 \circ G_1 & & G_2 \circ G_1 \\ F_2 \circ G_1 \arrow[u, Rightarrow, "\theta_2 \circ_R G_1"] & & G_2 \circ F_1 \arrow[u, Rightarrow, "G_2 \circ_L \theta_1"] \\ F_2 \circ F_1 \arrow[u, Rightarrow, "F_2 \circ_L \theta_1"] & & F_2 \circ F_2 \arrow[u, Rightarrow, "\theta_2 \circ_R F_1"] \end{tikzcd}$$

Démonstration. On considère les catégories $\mathcal{A} = \mathbb{1}$ à un élément, $\mathcal{B}$ définie par :

$$\begin{tikzcd} 1 \\ 0 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

et $\mathcal{C}$ définie par le diagramme non commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "g'"] & d \\ a \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\neq"] & c \arrow[u, "f'"'] \end{tikzcd}$$

On considère alors le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[rr, "G_2"] & & b \arrow[r, "g'"] & d \\
\mathbb{1} \arrow[ur, bend left, "G_1"] \arrow[dr, bend right, "F_1"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta_1"] & {} & & & \\
 & 0 \arrow[uu, "j"] \arrow[rr, "F_2"'] \arrow[uurr, phantom, "\Uparrow\theta_2"] & & a \arrow[uu, "g"] \arrow[r, "f"'] & c \arrow[uu, "f'"'] \\
\mathcal{A} & \mathcal{B} & & \mathcal{C} &
\end{tikzcd}$$

On pose :

$$\theta_1(\mathbb{1}) = j$$
$$F_2(0) = a, G_2(0) = c$$
$$F_2(j) = g, G_2(j) = f'$$
$$\theta_2(0) = f, \theta_2(1) = g'$$

■

Les propriétés et équations des actions définissent une sesquicatégorie des catégories, foncteurs et transformations.

Définition 3.6 Une transformation $\theta : F \Rightarrow G$ est dite naturelle lorsque le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
GA \arrow[r, "Gf"] & GA' \\
FA \arrow[u, "\theta_A"] \arrow[r, "Ff"'] & FA' \arrow[u, "\theta_{A'}"']
\end{tikzcd}$$

pour toute flèche f de la catégorie $\mathcal{A}$.

Définition 3.7 — Catégorie des Transformations Naturelles. La transformation id_F est naturelle :

$$\mathrm{id}_F : F \Rightarrow F, (\mathrm{id}_F) = \mathrm{id}_{FA}$$

On note $\mathrm{Nat}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et dont les flèches sont les transforamtions naturelles.

Proposition 3.5 La composée verticale de deux transformations naturelles est une transformation naturelle :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left=60, "H"{name=H}] \arrow[r, "G"{description, name=G}] \arrow[r, bend right=60, "F"'{name=F}] & \mathcal{B}
\arrow[from=G, to=H, phantom, "\varphi\Uparrow"]
\arrow[from=F, to=G, phantom, "\psi\Uparrow"]
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
HA \arrow[r, "Hf"] & HA' \\
GA \arrow[r, "Gf"] \arrow[u, "\psi_A"] & GA' \arrow[u, "\psi_{A'}"'] \\
FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[u, "\varphi_A"] & FA' \arrow[u, "\varphi_{A'}"']
\end{tikzcd}$$

■

Proposition 3.6 Les actions à gauche et à droite d'un foncteur préservent la naturalité des transformations.

Démonstration. Tout foncteur $H : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ définit un foncteur

$$H \circ_L : \mathrm{Nat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \to \mathrm{Nat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}')$$

Tout foncteur $H : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ définit un foncteur

$$\circ_R H : \mathrm{Nat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \to \mathrm{Nat}(\mathcal{A}', \mathcal{B})$$

■

Proposition 3.7 Si θ_1, θ_2 sont des transformations naturelles :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left, "G_1"] \arrow[r, bend right, "F_1"'] \arrow[r, phantom, "\theta_1 \Uparrow"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "G_2"] \arrow[r, bend right, "F_2"'] \arrow[r, phantom, "\theta_2 \Uparrow"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd} \qquad \text{"Higher pasting diagram"}$$

alors les transformations naturelles "θ_1 puis θ_2" et "θ_2 puis θ_1" coïncident.

■ **Vocabulaire 3.1** $\theta_2 \circ \theta_1$ désigne la transformation naturelle obtenue de la composition horizontale de transformations naturelles

Définition 3.8 Une 2-catégoprie est une sesquicatégorie où la loi **??** est satisfaite.

Théorème 3.1 Les catégories, foncteurs et tranformations naturelles définissent une 2-catégorie.

■ **Exemple 3.2** On réétudie la catégorie $\mathbb{G}$:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[loop left, "\mathrm{id}_1"] \arrow[d, shift right, "t"'] \arrow[d, shift left, "s"] \\
0 \arrow[loop left, "\mathrm{id}_0"]
\end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}
\mathbb{G} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\theta \Uparrow"] & \mathrm{Set}
\end{tikzcd}$$

Ici, F et G définissent deux graphes $\langle F \rangle$ et $\langle G \rangle$.

$$\text{L'ensemble des sommets de } \langle F \rangle \; FV \xrightarrow{\theta_V} GV \text{ L'ensemble des sommets de } \langle G \rangle$$

$$\text{L'ensemble des arêtes de } \langle F \rangle \; FE \xrightarrow{\theta_E} GE \text{ L'ensemble des arêtes de } \langle G \rangle$$

Une transformation $\theta \in \mathrm{Trans}\,(\mathbb{G}, \mathrm{Set})$ définit deux fonctions.

Proposition 3.8 Un homomorphisme de graphe :

$$\langle F\rangle \to \langle G\rangle$$

est la même chose qu'une transformation naturelle :

$$\theta : F \Rightarrow G$$

Démonstration. On a deux diagrammes :

$$\begin{tikzcd} FE \arrow[r, "\theta_E"] \arrow[d, "Fs"] \arrow[dr, phantom, "1"] & GE \arrow[d, "Gs"] \\ FV \arrow[r, "\theta_V"] & GV \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FE \arrow[r, "\theta_E"] \arrow[d, "Ft"] \arrow[dr, phantom, "2"] & GE \arrow[d, "Gt"] \\ FV \arrow[r, "\theta_V"] & GV \end{tikzcd}$$

Le fait que 1 et 2 commutent signifie que *l'image de la source est la source de l'image.* ■

▪

4 Diagrammes de Corde pour 2-Catégories

4.1 2-Catégories

Définition 4.1 Le produit $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ de deux catégories est la catégorie dont les objets sont les paires d'objets, les flèches sont les paires de flèches et la composition se fait point à point :

Définition 4.2 — Définition équivalente de 2-catégorie. Une 2-catégorie $\mathcal{W}$ est la donnée :

0 D'une classe d'objets (ou 0-cellules)

1 Pour toute paire d'objets A, B d'une catégorie $\mathrm{Hom}\,(A,B)$ Notation :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & B \end{tikzcd}$$

2 Pour tout triplet d'objets A, B, C un foncteur :

$$\mathrm{Hom}\,(A,B) \times \mathrm{Hom}\,(B,C) \to \mathrm{Hom}\,(A,C)$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f"] & \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "f'"] \arrow[r, bend right, "g'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \varphi'"] & \mathcal{C} \end{tikzcd} \longmapsto \begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f' \circ f"] \arrow[r, bend right, "g' \circ g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \varphi' \circ \varphi"] & C \end{tikzcd}$$

2 Une identité $\mathrm{id}_A : A \to A$

3 Associativité et Neutralité :

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & \mathrm{Hom}(C,D)\times\mathrm{Hom}(B,C)\times\mathrm{Hom}(A,B) \arrow[dl, "\circ_{BCD}\times\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(A,B)}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(C,D)}\times\circ_{ABC}"] & \\
\mathrm{Hom}(B,D)\times\mathrm{Hom}(A,B) \arrow[dr, "\circ_{ABD}"'] & & \mathrm{Hom}(C,D)\times\mathrm{Hom}(A,C) \arrow[dl, "\circ_{ACD}"] \\
 & \mathrm{Hom}(A,D) &
\end{tikzcd}$$

Un objet f de $\mathrm{Hom}(A,B)$ est appelé une flèche ou 1-cellule et notée $f : A \to B$. Une flèche $\theta : f \to g$ de $\mathrm{Hom}(A,B)$ est appelée 2-cellule et notée :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"{name=U}] \arrow[r, bend right, "g"'{name=D}] & B \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\theta"] \end{tikzcd}$$

■ **Exemple 4.1 — Espaces Topologiques.** Si on définit sur $\mathcal{T}op$ la flèche $\theta : f \to g$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"{name=U}] \arrow[r, bend right, "g"'{name=D}] & B \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\theta"] \end{tikzcd}$$

comme une fonction continue : $\theta : [0,1] \times A \to B$ telle que :

$$\forall a \in A, \begin{cases} \theta(0,a) & = f(a) \\ \theta(1,a) & = g(a) \end{cases}$$

on définit une 2-catégorie. ■

R Une transformation naturelle $\theta : f \to g$ de $\mathrm{Hom}(A,B)$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"{name=U}] \arrow[r, bend right, "g"'{name=D}] & B \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\theta"] \end{tikzcd}$$

est la même chose qu'un foncteur :

$$A \times 2 \xrightarrow{H} B$$

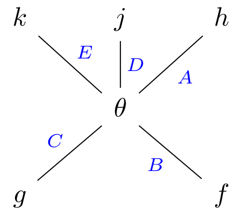
où $2 = (0 \to 1)$ telle que : $H(-,0) = F$ et $H(-,1) = G$.

4.2 Diagrammes de Cordes

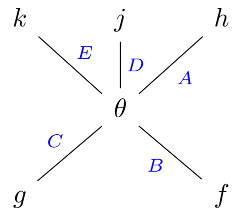
L'idée fondamentale derrière les diagrammes 2-catégoriques : On représente une 2-cellule comme le sommet

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, Rightarrow, "\theta"] & C \\
A \arrow[ur, bend left, "f"] \arrow[dr, bend right, "h"'] & & \\
 & D \arrow[r, "j"'] & E \arrow[uu, bend right, "k"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} k \circ j \circ h \\ g \circ f \arrow[u, Rightarrow, "\theta"'] \end{tikzcd}$$



C'est le dual de poincaré du diagramme précédent.

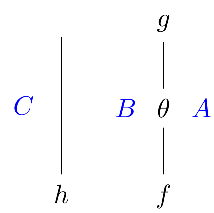


- θ dimension 2 donne un noeud de dimension 0
- f, g dimension 1 donnent de cordes de dimension 1
- A, B dimension 0 donnent des zones de dimension 2.

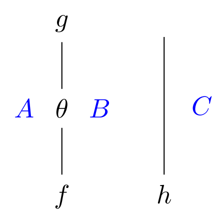
Pour représenter l'action à gauche :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\theta\Uparrow"] & \mathcal{B} \arrow[r, "H"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

On donne le diagramme de cordes suivant :

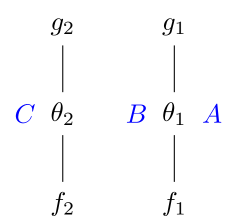


Pour ce qui est de l'action à droite, de manière similaire :



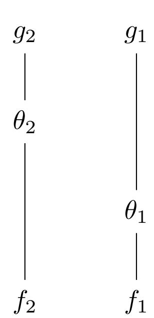
Pour la bimoustache :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "f_1"] \arrow[r, bend right, "g_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_1"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "f_2"] \arrow[r, bend right, "g_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_2"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$



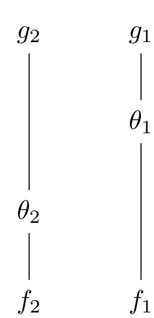
Ainsi, la composition verticale (composition dans $\mathrm{Hom}(A, C)$) peut se représenter en diagramme de cordes :

Le diagramme :



est une représentation de « θ_1 puis θ_2 »

Le diagramme :



est une représentation de « θ_2 puis θ_1 »

5 λ-Calcul Simplement Typé

L'idée du λ-calcul introduit par Church est de définir un calcul symbolique des fonctions. On se donne un ensemble infini Var de variables. On définit les termes du λ-calcul de manière inductive : Si x est une variable, c'est un lambda

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{E} & ::= & x \in Var & \textit{(Variables)} \\ & | & App(E, E) & \textit{(Application)} \\ & | & \lambda x.E & \textit{(Évaluation)} \end{array}$$

TABLE 1 – Termes du λ-calcul

terme. Si M, N sont des lambdas termes, MN ou $App(M, N)$ (la composition de fonction) est un lambda-terme. Si $x \in Var$ et M est un lambda terme, $\lambda x.M$ est la fonction qu'on écrirait $x \mapsto M(x)$.

Une des difficultés de cette explication est l'α-conversion, que nous devrons définir de telle sorte à identifier des λ-termes tels que $\lambda x.x$ et $\lambda y.y$.

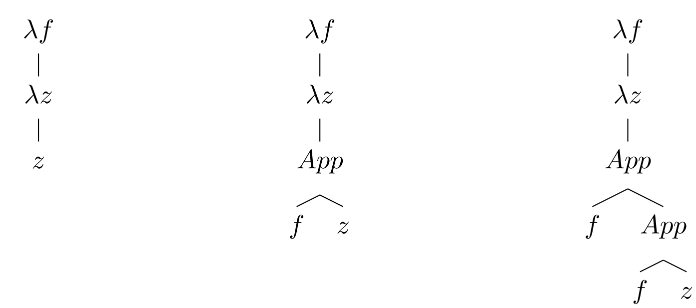
5.1 La notion d'occurence

Définition 5.1 Une occurence est un mot sur l'alphabet $\{\mathtt{fun}, \mathtt{arg}, \mathtt{body}\}$.

Définition 5.2 On définit l'ensemble $Occ(M)$ des occurences d'un λ-terme M par induction structurelle sur M :

$$\begin{array}{lcl} Occ(x) & ::= & \{\varepsilon\} \\ Occ(App(M, N)) & ::= & \{\varepsilon\} \sqcup \{\mathtt{fun}.o \mid o \in Occ(M)\} \sqcup \{\mathtt{arg}.o \mid o \in Occ(N)\} \\ Occ(\lambda x.M) & ::= & \{\varepsilon\} \sqcup \{\mathtt{body}.o \mid o \in Occ(M)\} \end{array}$$

■ **Exemple 5.1 — Codage des Entiers de Church.** Les trois arbres ci-dessous sont les représentations dans le codage des entiers de Church de 0, de 1 et de 2.



Pour 2, on a par exemple :

$$Occ(M) = \{\varepsilon, \mathtt{body}, \mathtt{bodybody}, \mathtt{bodybodyfun}, \mathtt{bodybodyarg}\}$$

■

Définition 5.3 On définit $VarOcc(M)$ l'ensemble des occurences de variables :

$$\begin{array}{lcl} VarOcc(x) & ::= & \{\varepsilon\} \\ VarOcc(App(M,N)) & ::= & \texttt{fun}.VarOcc(M) + \texttt{arg}.VarOcc(N) \\ VarOcc(\lambda x.M) & ::= & \texttt{arg}.VarOcc(M) \end{array}$$

Proposition 5.1 $VarOcc(M)$ coïncide avec l'ensemble des mots maximaux pour l'ordre préfixe dans $Occ(M)$.

Définition 5.4 On définit $LamOcc(M)$ l'ensemble des occurences d'un lieur λ dans M.

$$\begin{array}{lcll} LamOcc(x) & ::= & \varnothing & \\ LamOcc(App(M,N)) & ::= & \texttt{fun}.LamOcc(M) + \texttt{arg}.LamOcc(N) & \\ LamOcc(\lambda x.M) & ::= & \texttt{body}.LamOcc(M) & (+) \\ \{\varepsilon\} & & & \end{array}$$

Définition 5.5 On définit une fonction Lieur : $VarOcc\,(M) \to Occ(M) + Var, o \mapsto x$. On dira qu'une occurence de variable est *libre* lorsque $\text{Lieur}_M(o) \in Var$, *liée* sinon La fonction Lieur_M est définie par induction :

$$Lieur(x) : \varepsilon \mapsto x \in Var, VarOcc(x) = \{\varepsilon\}$$

Intuition : $x \models x$ où le premier désigne le contexte de variable et le second est un λ-terme.

$$\begin{array}{lcl} \text{Lieur}(x) & ::= & \varepsilon \mapsto x \\ \text{Lieur}\,(App(M,N)) & ::= & VarOcc(App(M,N)) \to Occ(App(M,N)) + Var \\ & & \quad fun \cdot occ \mapsto \begin{cases} fun \cdot \text{Lieur}(M)(occ) & \text{si } occ \text{ est liée dans } Occ(App(M,N)) \\ \text{Lieur}(M)(occ) & \text{sinon} \end{cases} \\ & | & \quad arg \cdot occ \mapsto \begin{cases} arg \cdot \text{Lieur}(N)(occ) & \text{si Lieur}(N)(occ) \in Occ(N) \\ \text{Lieur}(N)(occ) & \text{sinon} \end{cases} \\ \text{Lieur}(\lambda x.M) & ::= & VarOcc\,(\lambda x.M) \to Occ(\lambda x.M) + Var \\ & & \quad body \cdot occ \mapsto \begin{cases} \varepsilon & \text{si Lieur}(M)(occ) = x \in Var \\ body \cdot \text{Lieur}(M)(occ) & \text{si Lieur}(M)(occ) \in Occ(M) \\ \text{Lieur}(M)(occ) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Définition 5.6 On dit que deux λ-termes M et N sont α-convertibles lorsque :

$$Occ(M) = Occ(N)$$
$$\text{Lieur}(M) = \text{Lieur}(N)$$

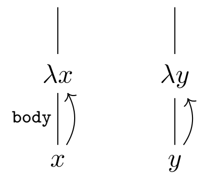
Dans ce cas, on écrit

$$M \equiv_\alpha N$$

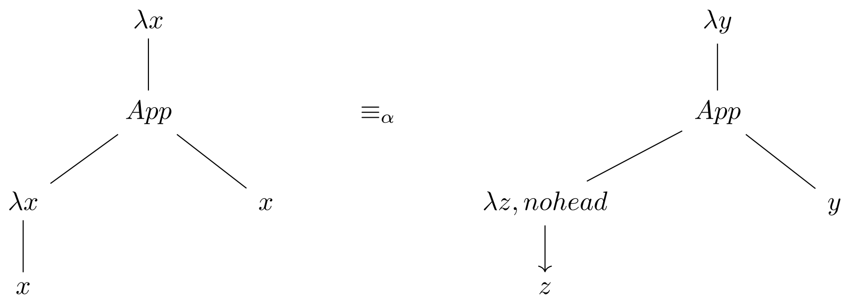
■ **Exemple 5.2** **Identité** On a :

$$\lambda x.x \equiv_\alpha \lambda y.y$$

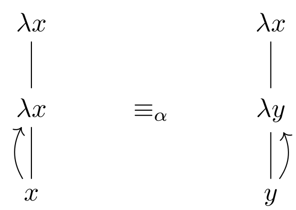
En effet :



Je sais pas lol On a :



C'est pareil On a :



■

R Lieur(M) associe à une occurence $occ \in VarOcc(M)$ d'une variable x dans M ou bien $x \in Var$ (cas libre) ou bien l'occurence maximale d'un préfixe de occ étiqueté par λx (cas lié).

Définition 5.7 On définit le λ-terme $M_{|o}$ pour $o \in Occ(M)$, par induction sur M :

$$\begin{array}{lcl}
x_{|\varepsilon} & ::= & x \\
App(M,N)_{|\varepsilon} & ::= & App(M,N) \\
App(M,N)_{|\mathtt{fun}\cdot occ} & ::= & M_{|occ} \\
App(M,N)_{|\mathtt{arg}\cdot occ} & ::= & N_{|occ} \\
(\lambda x.M)_{|\varepsilon} & ::= & \lambda x.M \\
(\lambda x.M)_{|\mathtt{body}\cdot occ} & ::= & M_{|occ}
\end{array}$$

Définition 5.8 Si M, N sont des λ-termes et $x \in Var$, on définit $M[x \coloneqq N]$ par induction sur M, à α-conversion près :

$$\begin{array}{lcll}
x[x \coloneqq N] & ::= & N & \\
y[x \coloneqq N] & ::= & y & \textit{(si } y \neq x\textit{)} \\
App(P,Q)[x \coloneqq N] & ::= & App(P[x \coloneqq N], Q[x \coloneqq N]) & \\
(\lambda y.M)\,[x \coloneqq N] & ::= & \lambda y.\,(M\,[x \coloneqq N]) & \textit{(si } y \neq x \textit{ et } y \textit{ n'est pas libre dans } N\textit{)} \\
(\lambda x.M)\,[x \coloneqq N] & ::= & \lambda z.M'\,[x \coloneqq N] &
\end{array}$$

Dans le dernier cas, on a choisi $\lambda z.M' \equiv_\alpha \lambda x.M$ avec $z \neq x$ et z n'est pas libre dans N.

Proposition 5.2 La classe de α-équivalence de $M\,[x \coloneqq N]$ ne dépend pas des choix faits dans le cas $M = \lambda x.P$. De plus, si $M' \equiv_\alpha M$ et $N' \equiv_\alpha N$, alors $M\,[x \coloneqq N] = M'\,[x \coloneqq N']$.

Démonstration. On a $(\lambda x.M)[x \coloneqq N] = \lambda x.M$. On a :

$$Occ(M[x \coloneqq N]) + \{occ_x \cdot occ \mid \text{Lieur}(M)(occ_x) = x \text{ et } occ \in Occ(N)\}$$

Par ailleurs :

$$VarOcc(M[x \coloneqq N]) = VarOcc(M) \setminus \{occ_x \mid \text{Lieur}(M)(occ_x) = x\} \cup \{occ_x \mid \text{Lieur}(M)(occ_x) = x\} \cdot VarOcc(N)$$

La fonction Lieur $(M[x \coloneqq N])$ est définie comme suit :

1. Si $occ_y \in VarOcc(M)$ alors Lieur $(M[x \coloneqq N])(occ_y) = \text{Lieur}(M)(occ_y)$
2. Si $occ_y = occ_x \cdot occ'_y$ pour $occ_x \in VarOcc(M)$ telle que $\text{Lieur}(M)(occ_x) = x$, alors Lieur $(M[x \coloneqq N])(occ_y) = occ_x \cdot \text{Lieur}(N)(occ'_y)$ si $\text{Lieur}(N)(occ'_y) \in Occ(N)$, $\text{Lieur}(N)(occ'_y) \in Var$ sinon.

Cela montre que $M[x \coloneqq N]$ ne dépend pas du choix de M et N dans la classe d'équivalence à α-équivalence. ■

5.2 β-réduction et η-expension

Définition 5.9 La règle de β-réduction :

$$(\lambda x.M)\, N \longrightarrow M[x \coloneqq N] \qquad \text{sur les classes d'équivalence à } \alpha\text{-conversion près}$$

La règle d'η-expension :

$$M \longrightarrow \lambda x.App(M, x)$$

Définition 5.10 Une β-redex d'un λ-terme M est une occurence $occ \in Occ(M)$ telle que $M_{|o}$ est de la forme $App(\lambda x.P, Q)$.

Définition 5.11 — Contexte. Un contexte est défini par induction :

$$\begin{array}{rcll} C & ::= & \lambda x.C & \\ & \mid & App\,(C, N) & \\ & \mid & App\,(L, C) & \\ & \mid & id & \textit{(trou.)} \end{array}$$

Si C est un contexte et M est un λ-terme $C[M]$ est défini par induction :

$$\begin{array}{lcl} (\lambda x.C)\,[M] & ::= & \lambda x.\,(C[M]) \\ id[M] & ::= & M \\ App\,(C, Q)\,[M] & ::= & App(C[M], Q) \\ App\,(P, C)\,[M] & ::= & App\,(P, C[M]) \end{array}$$

R

$$\lambda x.[x] = \lambda x.x$$
$$\not\equiv_\alpha \lambda y.[x] = \lambda y.x$$

Définition 5.12 On notera Λ l'ensemble des λ-termes à α-conversion près.

R Chaque contexte définit une fonction $\Lambda \to \Lambda$:

$$\begin{array}{rccc} \lambda x.[-]: & \Lambda & \to & \Lambda \\ & M & \mapsto & \lambda x.M \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} App(P,[-]): & \Lambda & \to & \Lambda \\ & M & \mapsto & App(P,M) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} [-]: & \Lambda & \to & \Lambda \\ & M & \mapsto & M \end{array}$$

Proposition 5.3 Pour toute occurence $occ \in Occ(M)$, il existe un contexte C tel que $M = C[M_{|occ}]$.

Définition 5.13 Une β-redex (nouvelle définition) est un triplet (M, o, N) tel que $M_{occ} = App\,(\lambda x.P, Q)$, $M = C[M_{|occ}]$ et $N = C[P\,[x := Q]]$.

■ **Vocabulaire 5.1** On note $M \xrightarrow{u} N$ pour un β-redex $u = (M, occ, N)$.

On peut avoir :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "v"'] & N \end{tikzcd}$$

■ **Exemple 5.3** En prenant par exemple : $\Delta = \lambda x.App(x,x)$. On a notamment $App(\Delta, P) \xrightarrow{\varepsilon} App(P,P)$. Notamment, si on note :

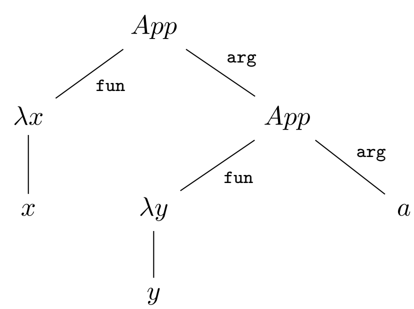
$$\begin{tikzcd} \Omega = App(\Delta,\Delta) \arrow[loop right, "\varepsilon"] \end{tikzcd}$$

on a :

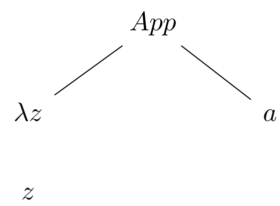
$$\begin{tikzcd} App\,(\Omega,\Omega) \arrow[loop left, "\texttt{fun}"] \arrow[loop right, "\texttt{arg}"] \end{tikzcd}$$

■

■ **Exemple 5.4** En posant $I = \lambda x.x$, on a $\begin{tikzcd} I(Ia) \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] & Ia \end{tikzcd}$ En effet :



Peut se réduire par ε et par `arg` en :



∎

5.3 THéorème de Confluence

Théorème 5.1 — de Church-Rosser (confluence) Si $f : M \twoheadrightarrow P$ et $g : M \twoheadrightarrow Q$ sont deux chemins de β-réduction alors il existe un λ-terme N et deux chemins de β-réduction : $f' : Q \twoheadrightarrow N$ et $g' : P \twoheadrightarrow N$:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\forall f"'] \arrow[dr, "\forall G"] & \\ P \arrow[dr, "\exists g'"'] \arrow[rr, phantom, "\sim"] & & Q \arrow[dl, "\exists f'"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

On va montrer qu'il existe un choix canonique de N, f' et g' modulo permutation en introduisant une théorie des résidus. L'intuition des résidus c'est le calcul qui n'a pas été fait et est retardé.

Proposition 5.4 Chaque occurence $o \in \mathrm{Occ}(M)$ définit une fonction :

$$\mathrm{Redex}(M_{|o}) \to \mathrm{Redex}(M)$$

définie par :

$$u = (M_{|o}, o_u) \longmapsto o \cdot u = (M, o \cdot o_u)$$

Cela fonctionne comme si on effectuait une translation.

Définition 5.14 Toute β-redex $r : M \to_\beta N$ induit une relation binaire $[r] \subseteq \mathrm{Redex}\, M \times \mathrm{Redex}\, N$, qui met en relation toute β-redex $u \in \mathrm{Redex}\, M$ à ses résidus $v \in \mathrm{Redex}\, N$ après la réduction. La relation résiduelle $[r]$ est définie par induction sur les occurrences de $r = (M, o)$:

- La β-redex $r : M = \mathit{App}(\lambda x.P, Q) \to_\beta N = P\,[x \coloneqq Q]$ se réécrit à l'occurence racine ε. Dans ce cas, on a $u[r]v$ pour $u = (M, o_u)$ et $v = (N, o_v)$ quand on a l'un des deux cas suivants :
  1. Il existe $o \in \mathrm{Occ}(P)$ tel que $o_u = \mathtt{fun} \cdot \mathtt{body} \cdot o$ et $o_v = o$.
  2. Il existe $o \in \mathrm{Occ}(Q)$ et $o_x \in \mathrm{Occ}(P)$ d'une variable libre x dans P tels que $o_u = \mathtt{arg} \cdot o$ et $o_v = o_x \cdot o$.
- La β-redex $r : M = \lambda x.P \to_\beta N = \lambda x.Q$ a occurrence $o_r = \mathtt{body} \cdot o$ et est donc de la forme $r = \mathtt{body} \cdot r_p$ pour une β-redex $r_p \in \mathrm{Redex}(P)$. Dans ce cas, on a $u[r]v$ précisément quand $u = \mathtt{body} \cdot u_p$, $v = \mathtt{body} \cdot v_q$ et $u_p[r_p]v_q$.
- La β-redex $r : M = \mathit{App}(P, Q) \to_\beta N = \mathit{App}(P', Q)$ a pour occurrence $o_r = \mathtt{fun} \cdot r_p$ pour $r_p \in \mathrm{Redex}\, P$. Dans ce cas on a $u[r]v$ précisément quand :
  1. Et u et v ont la même occurrence.
  2. $u = \mathtt{fun} \cdot u_p$, $v = \mathtt{fun} \cdot v_{p'}$ et $u_p[r_p]v_{p'}$ pour $u_p \in \mathrm{Redex}\, P$ et $v_{p'} \in \mathrm{Redex}\, P'$.
  3. $u = \mathtt{arg} \cdot w$ et $v = \mathtt{arg} w$ pour $w \in \mathrm{Redex}\, Q$.
- La β-redex $r : M = \mathit{App}(P, Q) \to_\beta N = \mathit{App}(P, Q')$ a une occurrence de la forme $r = \mathtt{arg} \cdot r_q$ pour $r_q \in$

Redex Q. Dans ce cas $u[r]v$ précisément quand :

1. Et u et v ont la même occurrence.
2. $u = \mathtt{fun} \cdot w$ et $v = \mathtt{fun} \cdot w$ pour $w \in \mathrm{Redex}\, P$.
3. $u = \mathtt{arg} \cdot u_q$, $v = \mathtt{arg} \cdot v_{q'}$ et $u_q[r_q]v_{q'}$ pour $u_q \in \mathrm{Redex}\, Q$ et $v_{q'} \in \mathrm{Redex}\, Q'$.

Ceci va nous permettre de *tracer* les β-redex :

Proposition 5.5 Chaque chemin de réécriture $f : M \twoheadrightarrow N$ induit une relation résiduelle :

$$[f] \subseteq \mathrm{Redex}\, M \times \mathrm{Redex}\, N$$

défini par induction sur la longueur de f :

1. Quand f est le chemin vide $\mathrm{id}_M : M \twoheadrightarrow M$:

$$u[\mathrm{id}_M]v \iff u = v$$

2. Quand f se factorise comme $r \cdot g$ pour $r : M \to_\beta P$ et $g : P \twoheadrightarrow N$:

$$u[r \cdot g]v \iff \exists w \in \mathrm{Redex}\, P, u[r]w \wedge w[g]v$$

Définition 5.15 Un λ-terme raffiné est nue paire (M, U) d'un λ-terme M et d'un ensemble fini de β-redex de M.

Définition 5.16 Chaque β-redex $v : M \to N$ induit une β-redex de λ-termes raffinés $(v, U) : (M, U) \to (N, U[v])$ où :

$$U[v] = \{u' \in \mathrm{Redex}(N) \mid \exists u \in U, u[v]u'\}$$

Le graphe G_{ref} des λ-termes raffinés a les λ-termes raffinés comme sommets et les β-redex raffinés comme arêtes. Le graphe des développements G_{dev} est le graphe G_{ref} restreint aux β-redex de U. Un développement de (M, U) est un chemin dans le graphe des développements.

Proposition 5.6 — Lemme des Développements Finis. Il n'y a pas de chemin infini dans G_{dev}.

L'idée est d'associer un ordinal $\omega(M, U)$ a chaque λ-terme (M, U) de telle sorte que pour chaque β-redex raffinée, les ordinaux décroissent strictement. Supposons qu'on se donne un poset $(S, \leq)$. Deux multiensembles finis $M, N : S \to \mathbb{N}$ sont ordonnés par l'ordre multiset $M >_{mset} N$ quand il existe deux multiensembles finis X, Y tels que :

$$N = (M \setminus X) \sqcup Y$$

et

$$\forall y \in Y, \exists x \in X, x >_S y$$

La difficulté est que le nombre de β-redex dans U peut augmenter au cours du développement, typiquement quand une β-redex $u : \mathit{App}(\lambda x.\mathit{App}(x, x), P) \to_\beta \mathit{App}(P, P)$ est dans U. On va introduire les concepts d'emboîtement et d'aggripement pour comprendre la structure des β-redex .

Définition 5.17 On dit que u emboîte v (noté $u <_M v$) quand $o_v = o_u \cdot \mathtt{arg} \cdot o$ pour $o \in \mathrm{Occ}(Q)$. De même, on dit que u aggrippe v (noté $u \prec_M v$) quand $o_v = o_u \cdot \mathtt{fun} \cdot o$ et une occurrence de la variable x liée par la β-redex u apparaît

dans l'argument de la β-redex v. Autrement dit :
- u emboîte v quand v apparaît dans l'argument de u
- u aggrippe v quand v apparaît dans le corps de u et une occurrence de variable x liée par u apparaît dans l'argument de v.

Lemme 5.1 Considérons une β-redex $r : M \to_\beta N$ et des β-redex $u, v \in \mathrm{Redex}\, M$ et $u', v' \in \mathrm{Redex}\, N$ telles que :

$$u[r]u' \text{ et } v[r]v'$$

Si $u' <_N v'$ alors ou bien $u <_M v$ ou bien $r \prec_M u$ et $r <_M v$.

Lemme 5.2 Considérons une β-redex $r : M \to_\beta N$ et des β-redex $u, v \in \mathrm{Redex}\, M$ et $u', v' \in \mathrm{Redex}\, N$ telles que :

$$u[r]u' \text{ et } v[r]v'$$

Si $u' \prec_N v'$, alors $u \prec_M v$ ou $u \prec_M r \prec_M v$.
Par ailleurs, la relation d'emboîtement est transitive, et la relation d'aggrippement ne contient pas de boucle.

Définition 5.18 La hauteur d'aggrippement $|u|_U \in \mathbb{N}$ d'une β-redex u dans un λ-terme raffiné (M, U) est la longueur $n \in \mathbb{N}$ de la plus grande séquence d'aggrippements $u = u_1 \prec_M \cdots \prec_M u_n$.

Lemme 5.3 Pour une β-redex raffinée $r : (M, U) \to_\beta (N, V)$ et toutes β-redex $u \in U, v \in V$:

$$u[r]v \Rightarrow |v|_V \leq |u|_U$$

Démonstration. ■

Définition 5.19 La profondeur d'emboîtement $\|u\|_U$ d'une β-redex est le multiensemble :

$$\|u\|_U = \langle |v_U| \mid v <_M u \rangle$$

des hauteurs d'aggrippement des β-redex $v \in \mathrm{Redex}\, M$ emboîtant u.

Lemme 5.4 Pour une β-redex raffinée, pour toutes β-redex $u \in U, v \in V$:

$$u[r]v \Rightarrow \|v\|_V \leq \|u\|_U$$

L'inégalité est stricte quand $r <_M u$.

Démonstration. ■

Démonstration. Le multiensemble des profondeurs emboîtées $\omega(U_i) = \langle \|u\| \mid u \in U_i \rangle$ décroît strictement à chaque étape du développement $M_1, U_1 \xrightarrow{u_1} (M_2, U_2) \xrightarrow{u_2} \cdots$. Ceci prouve le théorème. ■

Définition 5.20 Un développement est un ensemble fini $U \subseteq \mathrm{Redex}\, M$ de β-redex dans M défini comme une chemin $f : (M, U) \twoheadrightarrow (N, \varnothing)$ dans le graphe des raffinements G_{ref}. On note ceci $f \propto (M, U)$.

Proposition 5.7 Pour toute paire de β-redex coinitiale u, v, il existe un λ-terme N et deux développements $f \propto u[v]$ et $g \propto v[u]$ complétant le diagramme carré :

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "v"] & \\ P \arrow[dr, "g"] & & Q \arrow[dl, "f"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

et telles que les relations résiduelles sur les deux bords coïncident.

Définition 5.21 Une tuile de permutation $u \cdot f \Diamond v \cdot g$:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "v"] & \\ P \arrow[dr, "g"] \arrow[rr, phantom, "\Diamond"] & & Q \arrow[dl, "f"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

est une paire de développement $u \cdot f$ et $v \cdot g$ où $u : M \to_\beta P$ et $v : M \to_\beta Q$ sont deux β-redex coinitiales et $f \propto u[v]$ et $g \propto v[u]$ sont des développements des résidus respectifs de u et v.

■ **Exemple 5.5** Si on pose $I = \lambda x.x$ et $\Delta = \lambda x.xx$, on a :

$$\begin{tikzcd} & (Ia)(Ib) \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "v"] & \\ a(Ib) \arrow[dr, "g"] \arrow[rr, phantom, "\Diamond"] & & (Ia)b \arrow[dl, "f"] \\ & ab & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \Delta(Ia) \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "v"] & \\ (Ia)(Ia) \arrow[r, "v_1"] \arrow[d, "v_2"] & a(Ia) \arrow[d] & \Delta a \arrow[dl] \\ (Ia)a \arrow[r] & aa & \end{tikzcd}$$

■

Théorème 5.2 — Développements Finis Si U est un ensemble fini de β-redex de M, alors :

1. Tous les développements de U terminent.
2. Tous deux développements de (M, U) sont coinitiaux et cofinaux et définissent la même relation résiduelle.

Démonstration. On montre par induction ordinale que f et g sont équivalentes à permutation de tuiles près. ■

Définition 5.22 On dit que $f \sim^1 g : M \twoheadrightarrow N$ et ont dit que f et g sont équivalentes à une tuile de permutation près lorsque $f = d \cdot u \cdot h_v \cdot e$ et $g = g \cdot v \cdot h_u \cdot e$ et :

$$\begin{tikzcd}
 & & R \arrow[dr, "h_v"] & & \\
M \arrow[r, "d"] & P \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "v"'] & \Diamond & Q \arrow[r, "e"] & N \\
 & & S \arrow[ur, "h_u"'] & &
\end{tikzcd}$$

où $h_v \propto (R, v[u])$ et $h_u \propto (S, u[v])$. $f \sim^1 g$ est la plus petite relation d'équivalence contenant $\sim$.

C'est une forme de relation d'homotopie.

Démonstration de manière moderne du théorème de confluence. ■

Définition 5.23 Un λ-terme M est en forme β-normale lorsqu'il n'existe pas de β-redex $M \xrightarrow{u} N$.

Corollaire 5.1 Si $M \twoheadrightarrow P$ et $M \twoheadrightarrow Q$ où P, Q sont des formes β-normales alors $P = Q$.

On va maintenant construire une catégorie $\mathcal{C}_\lambda$ de λ-termes et de chemins de réécriture modulo permutations de telle manière que $\mathcal{C}_\lambda$ a les sommes amalgamées.

Définition 5.24 La somme amalgamée de deux flèches $B \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} C$ dans une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée d'un objet D et de deux flèches $B \xrightarrow{g'} D \xleftarrow{f'} C$ telles que

1. le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & B \arrow[d, "g'"] \\
C \arrow[r, "f'"'] & D
\end{tikzcd}$$

2. la propriété universelle suivante est satisfaite par $(*)$ pour tout X et pour toute paire de flèches a, b telles que $b \circ f = c \circ g$, il existe une unique flèche $h : D \to X$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[d, "g'"] \arrow[ddr, bend left, "b"] & \\
C \arrow[r, "f'"] \arrow[drr, bend right, "c"'] & D \arrow[dr, "\exists ! h"] & \\
 & & X
\end{tikzcd}$$

C'est le dual du *pullback* ou *produit fibré*

■ **Exemple 5.6**

1. Dans *Ens* :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "g'"] \\
C \arrow[r, "f'"'] & D
\end{tikzcd}$$

où $D = (B + C)/(f = g)_a$ la somme disjointe de B et C quotientée par la relation d'équivalence $\sim$ engendrée par $fa \simeq ga$. On peut par exemple écrire $D = \{inlb \mid b \in B\} \sqcup \{inrc \mid c \in C\} / \sim$. f' et g' sont les injections. Alors, dans :

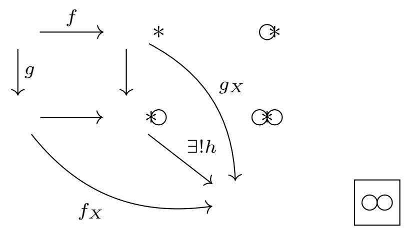
$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[d, "g'"] \arrow[ddr, bend left, "g_b"] & \\
C \arrow[r, "f'"] \arrow[drr, bend right, "f_c"'] & D \arrow[dr, "\exists! h"] & \\
& & X
\end{tikzcd}$$

on définit h par :

$$inlb \longmapsto g_B(b)$$
$$inrc \longmapsto f_C(c)$$

2. Dans $\mathcal{T}op$ des espaces topologiques et fonctions continues a les sommes amalgamées : si on prend D défini comme précédemment et la topologie naturelle définie sur D :

$$u \text{ est ouvert dans } D \text{ si et seulement si } \begin{cases} g'^{-1}(u) \text{ est ouvert dans } B \\ f'^{-1}(u) \text{ est ouvert dans } C \end{cases}$$



∎

On va travailler sur une représentation algébrique des catégories par *générateurs et relations*.

Définition 5.25 Supposons donné un graphe $\mathcal{G}$ et un ensemble $\mathcal{E}$ de paires (f, g) de chemins de $\mathcal{G}$ de la forme : $\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & y \end{tikzcd}$ La catégorie $\mathcal{C} = [\mathcal{G}, \mathcal{E}]$ engendrée a pour objets les sommets de $\mathcal{G}$ et pour flèches les chemins de $\mathcal{G}$ modulo $\sim_{\mathcal{E}}$ la relation d'équivalence engendrée par $\approx_{\mathcal{E}}$.

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "d"] & {} \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & {} \arrow[r, "e"] & {} \end{tikzcd}$$

On définit $u \approx_{\mathcal{E}} v$ lorsque u et v se décomposent en $u = d; f; e$ et $v = d; g; e$ pour $f, g \in \mathcal{E}$.

Proposition 5.8 La catégorie engendrée $\mathcal{C} = [\mathcal{G}, \mathcal{E}]$ satisfait la propriété universelle suivante : Si $\mathcal{D}$ est une catégorie et $|\mathcal{D}|$ est le graphe associé, tout homomorphisme de graphe $\mathcal{G} \xrightarrow{H} |\mathcal{D}|$ tel que $H(f) = H(g)$ dans $\mathcal{D}$ pour tout $f, g \in \mathcal{E}$ induit un unique foncteur $\mathcal{F} : [\mathcal{G}, \mathcal{E}] \to \mathcal{D}$ tel que :

$$F(x \xrightarrow{e} y) = H(x \xrightarrow{e} y)$$

Autrement dit, un foncteur : $\mathcal{F} : [\mathcal{G}, \mathcal{E}] \to \mathcal{D}$ est la donnée d'un homomorphisme de graphe $H : \mathcal{G} \to |\mathcal{D}|$ tel que $H(f) = H(g)$ pour tout $(f, g) \in \mathcal{E}$.

■ **Exemple 5.7** 1. La catégorie $[\mathcal{G}]$ engendrée par un graphe ($\mathcal{E} = \varnothing$) est la même chose qu'un homomorphisme $H : \mathcal{G} \to |\mathcal{D}|$.