

# Lambda-Calcul et Catégories

Paul-André Mellies

7 octobre 2024



## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Introduction Historique . . . . .	1
1.2	Notion de Catégorie : Premiers Exemples . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Catégories Cartésiennes</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>La 2-catégorie des catégories, foncteurs et transformations naturelles</b>	<b>6</b>
3.1	Foncteurs entre Catégories . . . . .	6
3.2	Transformations entre Foncteurs . . . . .	7
3.2.1	Transformation . . . . .	7
3.2.2	Action à Gauche de Post-Composition . . . . .	7
3.2.3	Action à droite de Pré-Composition . . . . .	8
<b>4</b>	<b>TD 1</b>	<b>12</b>
4.1	Catégories et Foncteurs . . . . .	12
4.2	Catégories Cartésiennes . . . . .	12
<b>5</b>	<b>TD 2</b>	<b>14</b>
5.1	Produits Fibrés . . . . .	14
5.2	Monomorphismes et Épimorphismes . . . . .	15

## 1 Introduction

### 1.1 Introduction Historique

Le  $\lambda$ -calcul a été introduit dans les années 1930 par Church. Il est en lien avec des questions de linguistique, de logique et de calculabilité.

**Définition 1.1** Le  $\lambda$ -calcul est un langage de preuves pour une logique intuitionniste minimale (ou pour la théorie simple des types).

Le  $\lambda$ -calcul non typé a la puissance des machines de Turing.

**Définition 1.2** Les catégories sont des structures algébriques (parfois appelées monoïdes à plusieurs objets)

Historiquement, les catégories ont été introduites pour la topologie algébriques dans les années 1940 avec les travaux de Eilenberg et MacLane. Leur objectif était de comprendre les propriétés fondamentales des espaces en s'intéressant aux morphismes entre espaces (les fonctions continues).

Il y a une connexion forte au niveau de la théorie des preuves entre  $\lambda$ -calcul et théorie, qui est très similaire à ce qui s'était passé lors de la définition des algèbres de Boole. Dans ce deuxième cas, Boole montre qu'on peut mettre un ordre partiel sur les formules de la logique classique :

$$\varphi \leq \Psi \text{ si et seulement si } \varphi \Rightarrow \Psi$$

Une algèbre de Boole  $(A, \leq, \wedge, \vee, \neg, \top, \perp)$  est un ensemble ordonné  $A, \leq$  muni de fonctions préservant l'ordre  $\wedge, \vee : A \times A \rightarrow A$  :

$$\varphi_1 \leq \Psi_1 \wedge \varphi_2 \leq \Psi_2 \implies \varphi_1 \wedge \varphi_2 \leq \Psi_1 \wedge \Psi_2, \varphi_1 \vee \varphi_2 \leq \Psi_1 \vee \Psi_2$$

et d'une fonction inversant l'ordre  $\neg : A \rightarrow A$  :

$$\varphi \leq \Psi \implies \neg \Psi \leq \neg \varphi$$

vérifiant un certain nombre d'axiomes :

• Associativité :

$$\begin{aligned} (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3 &= \varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \\ (\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3 &= \varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3) \end{aligned}$$

• Neutralité :

$$\begin{aligned} \varphi \wedge \top &= \top \wedge \varphi = \varphi \\ \varphi \vee \perp &= \perp \vee \varphi = \varphi \end{aligned}$$

• Commutativité :

$$\varphi \wedge \Psi = \Psi \wedge \varphi, \varphi \vee \Psi = \Psi \vee \varphi$$

• Distributivité :

$$\begin{aligned} \varphi \wedge (\Psi_1 \vee \Psi_2) &= (\varphi \wedge \Psi_1) \vee (\varphi \wedge \Psi_2) \\ \varphi \vee (\Psi_1 \wedge \Psi_2) &= (\varphi \vee \Psi_1) \wedge (\varphi \vee \Psi_2) \\ \neg(\varphi \wedge \Psi) &= \neg \varphi \vee \neg \Psi, \neg \top = \perp \end{aligned}$$

• Idempotence :

$$\begin{aligned} \varphi &= \neg \neg \varphi \\ \varphi \wedge \varphi &= \varphi, \varphi \vee \varphi = \varphi \end{aligned}$$

Dans une algèbre de Boole,  $\varphi \wedge \psi$  est le plus grand minorant de  $\varphi$  et de  $\psi$  et  $\varphi \vee \psi$  est le plus petit majorant de  $\varphi$  et  $\psi$

**R** On peut définir l'implication dans les algèbres de Boole comme  $\varphi \implies \psi = \neg \varphi \vee \psi$

On va passer du système des algèbres de Boole ( $\varphi \leq \psi$  s'il existe une preuve que  $\varphi$  implique  $\psi$ ) au système de catégories comme proposé par Lambek.

**Définition 1.3** On peut voir une catégorie comme un graphe dont les noeuds sont appelés objets et les arêtes sont appelées morphismes, maps ou flèches. On peut composer les arêtes d'une catégorie, comme pour se déplacer sur le graphe.

Ici on considère une catégorie dont les objets sont des formules logiques, et les morphismes sont des preuves d'implication. Il y a donc des liens très forts entre les catégories obtenues avec des formules et des preuves et celles obtenues par des types et des programmes fonctionnels entre les types. On va ici étudier les catégories à travers leurs représentations : on peut mieux comprendre une catégorie en la représentant comme une famille d'actions au moyen d'un foncteur.

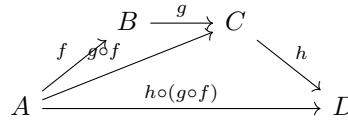
## 1.2 Notion de Catégorie : Premiers Exemples

**Définition 1.4 — Catégorie.** Une *catégorie* est décrite par les données suivantes :

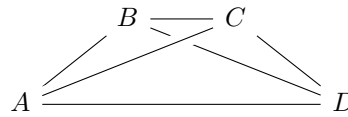
- 0 Une classe <sup>a</sup> d'objets (les noeuds d'un graphe). On appelle les catégories dont les objets définissent un ensemble des *petites catégories*.
- 1 Pour toute paire d'objets  $A, B$ , un ensemble  $\text{Hom}(A, B)$  de fonctions de  $A$  vers  $B$  appelées *morphismes* ou *maps*. On note ceci :  $f : A \rightarrow B$  ou  $A \xrightarrow{f} B$ .
- 2 Pour tous objets  $A, B, C$ , une loi de composition  $\circ_{A,B,C}$  :

$$\begin{aligned} \text{Hom}(B, C) \times \text{Hom}(A, B) &\rightarrow \text{Hom}(A, C) \\ (g, f) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

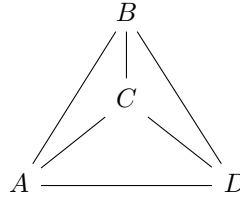
- 2 Pour tout objet  $A$ , une fonction identité  $\text{id}_A \in \text{Hom}(A, A)$
- 3 Associativité :



On peut aussi voir la composition comme la couverture de l'aire entre les noeuds du graphe :



ou encore :



- 3 Neutralité :  $f \circ \text{id}_A = f = \text{id}_B \circ f$ .

<sup>a</sup>. propriété non incarnée par un ensemble

**R** Voir *nerf d'une catégorie* pour voir la notion d'ensemble simplicial.

■ **Exemple 1.1 PoSet** On considère d'abord les ensembles partiellement ordonnés comme des catégories :

**Proposition 1.1** Chaque ensemble partiellement ordonné  $(A, \leq)$  définit une catégorie dont les objets sont des éléments  $a, b, c$  de  $A$  avec une map  $a \rightarrow b$  si et seulement si  $a \leq b$  et  $\text{Hom}(a, b)$  un singleton si  $a \leq b$  et  $\emptyset$  sinon.

*Démonstration.* On doit montrer l'existence d'une identité, d'une loi de composition, et les propriétés d'associativité et de neutralité :

- Par réflexivité de l'ordre :  $a \leq a$  et donc  $a \xrightarrow{\text{id}_a} a$  existe.
- Par transitivité : si  $a \leq b$  et  $b \leq c$  alors  $a \leq c$  et on peut donc voir la transitivité comme une composition :
- L'associativité et la neutralité découlent immédiatement du fait que chaque  $\text{Hom}(a, b)$  contient au plus un élément.

Réciproquement, une catégorie  $\varphi$  telle que chaque ensemble d'homomorphismes contienne au plus un élément est la même chose qu'un préordre :

$$\text{id}=g \circ f \hookrightarrow a \xleftarrow{f} b \rightrightarrows f \circ g = \text{id}$$

**Monoïde** On considère maintenant les Monoïdes comme des catégories.

**Proposition 1.2** Chaque monoïde  $(M, m, e)$  définit une catégorie notée  $\mathcal{BM}$  appelée sa suspension avec un seul objet  $*$  tel que :  $\text{Hom}(*, *) = M$  et  $\circ : m, n \mapsto n \cdot m$ .

L'associativité et la neutralité de la catégorie  $\mathcal{BM}$  sont des conséquences directes de l'associativité et de la neutralité du monoïde.

**R** En prenant  $M = (\mathbb{N}, +, 0)$ , la représentation ainsi obtenue des entiers a un lien direct avec la théorie de l'homotopie : c'est le groupe de Poincaré (ou groupe fondamental) d'un espace topologique pointé. Tout espace topologique définit une catégorie dont les objets sont les éléments de l'espace topologique et les flèches sont les chemins, à homotopie près.

**Types** On considère la catégorie cartésienne fermée des types simples comme objets et des  $\lambda$ -termes simplement typés (module  $\beta\eta$ -équivalence) comme morphismes :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{x:A \models t:B} & B \xrightarrow{y:B \models u:C} C \\ \downarrow & & \uparrow \\ & x:A \models a[t/y]:C & \end{array}$$

$A \xrightarrow{x:A \models t:B} B \xrightarrow{y:B \models u:C} C$  flèche dessous  $(x : A \models u[t/y] : C)$  Cette catégorie jouera le rôle en théorie de la démonstration de l'algèbre de Boole des formules

## 2 Catégories Cartésiennes

**Définition 2.1** Un produit cartésien de deux objets  $A$  et  $B$  dans une catégorie  $\varphi$  est la donnée d'un triplet

$$(A \times B, \pi_1 : A \times B \rightarrow A, \pi_2 : A \times B \rightarrow B)$$

$$\begin{array}{ccc} A & & B \\ & \swarrow \pi_1 & \searrow \pi_2 \\ & A \times B & \end{array}$$

tel que pour toute paire de flèches :  $X \xrightarrow{f} A$  et  $X \xrightarrow{g} B$ , il existe une et une seule flèche :  $h : X \rightarrow A \times B$  telle que  $f = \pi_1 \circ h, g = \pi_2 \circ h$ . Pour  $\varphi = \text{Set}$ , par exemple,  $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$  et  $\pi_1 : (a, b) \mapsto a$  et  $h : x \mapsto (fx, gx)$ .

■ **Exemple 2.1** Dans une catégorie définie par une relation d'ordre sur  $A, \leq$ , le produit cartésien de  $a, b \in A$  c'est la même chose que la borne inférieure  $a \wedge b$  de  $a$  et  $b$  définie comme le plus grand des minorants de  $a$  et  $b$ .

$$\begin{array}{ccc} a & & b \\ & \swarrow \leq & \searrow \leq \\ & a \wedge b & \\ & \uparrow h & \\ & x & \end{array}$$

**Définition 2.2 — Objet Terminal.** Un objet terminal  $\mathbb{1}$  dans une catégorie  $\mathcal{C}$  est un objet tel que pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{C}$ ,  $\text{Hom}(A, \mathbb{1})$  est une singleton.

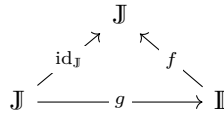
**R** Un objet initial est un objet terminal dans la catégorie duale (catégorie où on renverse les flèches).

**Définition 2.3** Une catégorie cartésienne est une catégorie  $\mathcal{C}$  munie d'un produit cartésien  $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$  et munie d'un objet terminal.

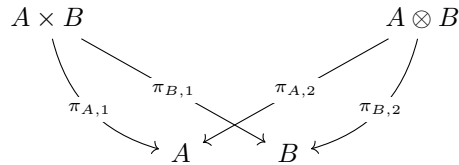
**Définition 2.4** Une paire  $\mathbb{I} \xrightarrow{f} \mathbb{J}$  et  $\mathbb{J} \xrightarrow{g} \mathbb{I}$  telle que  $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{I}}$  et  $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{J}}$  est appelée *isomorphisme*

**Proposition 2.1** Deux objets terminaux sont isomorphes. Deux produits cartésiens d'une même paire d'objets sont isomorphes.

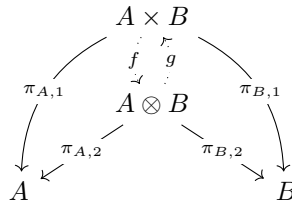
*Démonstration.* Soit  $\mathbb{I}, \mathbb{J}$  deux objets terminaux d'une même catégorie. Il existe un unique morphisme  $f$  (resp.  $g$ ) de  $\mathbb{I}$  (resp.  $\mathbb{J}$ ) vers  $\mathbb{J}$  (resp.  $\mathbb{I}$ ). De même, il existe un unique morphisme  $\text{id}_{\mathbb{J}}$  de  $\mathbb{J}$  vers lui-même. Le diagramme ci-dessous commute donc :



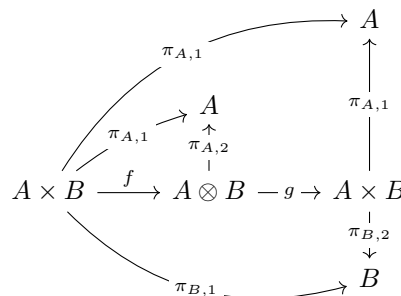
En particulier, on a bien  $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{J}}$ . Puisque la situation est symétrique,  $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{I}}$  et donc deux objets terminaux sont isomorphes. Si on a deux produits cartésiens  $A \times B, A \otimes B$  de deux objets  $A, B$ , alors :



En particulier, par définition du produit cartésien, puisqu'il existe deux applications de  $A \times B$  vers  $A, B$ , il existe une unique application  $h_{1,2}$  de  $A \times B$  vers  $A \otimes B$  telle que  $\pi_{A,2} \circ h_{1,2} = \pi_{A,1}$  :

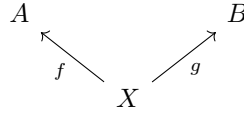


Il suffit donc de montrer que l'identité fait commuter le diagramme pour que avoir  $f \circ g = \text{id}_{A \times B}$  et donc le résultat :

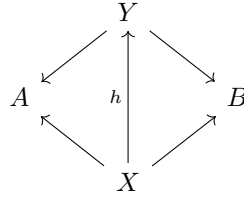


On aurait aussi pu construire une catégorie  $\text{Span}(A, B)$  :

- Les objets sont des triplets  $\langle f, X, g \rangle$  :



- Les flèches sont des  $\langle f, X, g \rangle \xrightarrow{h} \langle f', Y, g' \rangle$  :



Alors,  $A \times B, \pi_1, \pi_2$  est un produit cartésien dans  $\mathcal{C}$  si et seulement si  $\langle \pi_1, A \times B, \pi_2 \rangle$  est un objet terminal dans  $\text{Span}(A, B)$ . ■

### 3 La 2-catégorie des catégories, foncteurs et transformations naturelles

#### 3.1 Foncteurs entre Catégories

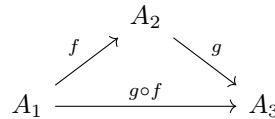
**Définition 3.1** Soient  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  deux catégories. Un foncteur  $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  est la donnée de :

- 0 Un objet  $F(A) \in \mathcal{B}$  pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{A}$ .
- 1 Pour toute paire d'objets  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ , une fonction :

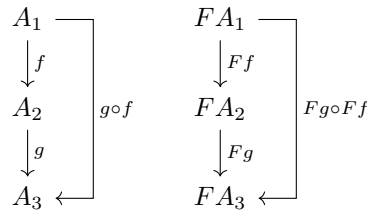
$$\begin{array}{ccc} F_{A_1, A_2} : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_1, A_2) & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{B}}(FA_1, FA_2) \\ f & \mapsto & F(f) \end{array}$$

- 2 On demande que les équations suivantes soient satisfaites :

- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$  où



C'est à dire :



- Si  $A \xrightarrow{\text{id}_A} A$ ,  $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$

Autrement dit, l'image de la composée est égale à la composée des images.

- **Exemple 3.1**
1. Un foncteur  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  entre catégories de préordre est la même chose qu'une fonction croissante (order preserving).
  2. Un foncteur  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  entre catégories à un objet est la même chose qu'un homomorphisme  $M \rightarrow N$  si  $\mathcal{A} = \Sigma M$  et  $\mathcal{B} = \Sigma N$ .
  3. Si  $M$  est un monoïde,  $\mathcal{A} = \Sigma M$  la catégorie à un objet associée, un foncteur  $F : \mathcal{A} \rightarrow \text{Set}$  la catégorie des

ensembles et fonctions est la donnée d'un ensemble  $X$  (l'image de  $M$ ) et d'une action à gauche de  $M$  sur  $X$ . En effet, puisque chaque élément de  $M$  est une flèche de  $\Sigma M$  de l'objet dans lui même, pour tous  $m, n \in M$ , on a une flèche de  $F(*) \rightarrow F(*)$  telles que  $F(m \cdot n) = F(m) \circ F(n)$ . On vérifie alors bien les propriétés d'une action à gauche.

Similairement, si  $M$  est le monoïde libre engendré par un alphabet  $A$ , l'action à droite  $X \times A^* \rightarrow X$  étant une famille de fonctions  $\delta_a : X \rightarrow X$  pour  $a \in A$ , i.e. un automate déterministe et total dont l'ensemble des états est  $X$ .

4. Soit  $\mathbb{G}$  la catégorie à deux objets et quatre morphismes :

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\text{id}_1} & \\ t \downarrow & & s \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{\text{id}_0} & \end{array}$$

Un foncteur  $F : \mathbb{G} \rightarrow \text{Set}$  est une paire d'ensembles  $E = F(1)$ ,  $V = F(0)$ , et de deux fonctions  $F(s), F(t) : E \rightarrow V$ . En voyant  $E$  comme un ensemble d'arêtes et  $V$  comme un ensemble de sommets,  $F(s)$  peut être vue comme une fonction  $\partial_0$  qui à une arête  $(x, y)$  associe  $x$ . Rajouter un élément 2 avec deux morphismes vers 1 permettrait de définir des graphes avec des 2-arêtes entre arêtes. En prenant la catégorie des faces d'un triangle on obtiendrait la catégorie des ensembles simpliciaux. ■

## 3.2 Transformations entre Foncteurs

### 3.2.1 Transformation

On va essayer de suivre l'intuition selon laquelle la théorie des catégories préserve l'ordre.

$$\begin{array}{ccc} & g & \\ (A, \leq_A) & \xrightarrow{\quad} & (B, \leq_B) \\ & f & \end{array} \quad \forall !$$

On a alors  $f \leq g \Leftrightarrow \forall a \in A, fa \leq ga$ .

On va essayer de généraliser cette définition. On se donne deux foncteurs  $F, G$  de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{B}$  et on va définir une transformation point à point de  $F$  vers  $G$  :

**Définition 3.2** Une transformation  $\theta : F \Rightarrow G$  est une famille  $(\theta_A : FA \rightarrow GA)_{A \in \text{Obj } \mathcal{A}}$  de flèches de  $\mathcal{B}$  indicée par les objets de  $\mathcal{A}$ . On note ceci :

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{B} \\ & F & \end{array} \quad \theta \uparrow$$

**Définition 3.3** La catégorie  $\text{Trans}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  a pour objet les foncteurs  $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$  et pour flèches les transformations  $\theta : F \Rightarrow G$ .

- La transformation  $\text{id}_F : F \Rightarrow F$  est définie par  $\text{id}_F = \left( FA \xrightarrow{\text{id}_{FA}} FA \right)_{A \in \text{Obj } \mathcal{A}}$
- La transformation  $\psi \cdot \varphi : F \Rightarrow H$  composée de  $\varphi : F \Rightarrow G$  et  $\psi : G \Rightarrow H$  telle que  $(\psi \cdot \varphi)_A = \psi_A \circ_{\mathcal{B}} \varphi_A$ .

### 3.2.2 Action à Gauche de Post-Composition

Supposons qu'on ait la situation suivante :

$$\mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{G} \\ \uparrow \theta \\ \xrightarrow{F} \end{array} \mathcal{B} \xrightarrow{H} \mathcal{C}$$

où  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  sont des catégories,  $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  et  $H : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  sont des foncteurs et  $\theta : F \rightarrow G$  est une transformation.

**Définition 3.4** La transformation (dite d'action à gauche)  $H \circ_L \theta : H \circ F \Rightarrow H \circ G$  est définie par  $(H \circ \theta)_A = H(\theta_A) : HFA \rightarrow HGA$

Autrement dit, une transformation est la donnée pour tout objet de la catégorie de départ d'une flèche dans la catégorie d'arrivée.

**Proposition 3.1** On a alors une série d'équations :

1. On a :

$$H \circ_L (\psi \cdot \varphi) = (H \circ_L \psi) \cdot (H \circ_L \varphi)$$

et de même :

$$H \circ_L \text{Id}_F = \text{Id}_{H \circ F}$$

Autrement dit :

$$H \circ_L : \begin{array}{c} \mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{G} \\ \uparrow \theta \\ \xrightarrow{F} \end{array} \mathcal{B} \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{H \circ G} \\ \uparrow H \circ_L \theta \\ \xrightarrow{H \circ F} \end{array} \mathcal{C} \end{array}$$

$H \circ_L -$  est un foncteur. On dit que l'action est fonctorielle.

2. On a :

$$(H' \circ H) \circ_L \theta = H' \circ_L (H \circ_L \theta)$$

et de même :

$$\text{Id}_B \circ_L \theta = \theta$$

*Démonstration.* 1. La première propriété est immédiate par la composition des foncteurs.

2. On a :

$$\begin{aligned} ((H' \circ H) \circ_L \theta)_{A \in \text{Obj } \mathcal{A}} &= H' \circ H(\theta_A : FA \rightarrow GA) \\ &= H'(H\theta_A) \\ &= H' \circ (H \circ \theta_A) \\ &= (H' \circ_L (H \circ_L \theta))_{A \in \text{Obj } \mathcal{A}} \end{aligned}$$

D'où la deuxième propriété. ■

### 3.2.3 Action à droite de Pré-Composition

On suppose qu'on à :

$$\mathcal{A} \xrightarrow{H} \mathcal{B} \begin{array}{c} \xrightarrow{G} \\ \uparrow \theta \\ \xrightarrow{F} \end{array} \mathcal{C}$$

Ceci permet de définir une transformation, dite d'action à droite :



**Définition 3.5** La transformation (d'action à droite)  $\theta \circ_R H : F \circ H \Rightarrow G \circ H$  est définie par :  $(\theta \circ_R H)_{C \in \text{Obj } \mathcal{C}} = \theta_{HC}$ .

**Proposition 3.2**  $\circ_H$  définit un foncteur :

$$\text{Trans}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \longrightarrow \text{Trans}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$$

Si on a :

$$\mathcal{C} \xrightarrow{H} \mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{G} \mathcal{B} \\ \theta_2 \uparrow \! \! \! \uparrow \\ \xrightarrow{F} \mathcal{B} \\ \theta_1 \uparrow \! \! \! \uparrow \\ \xrightarrow{E} \mathcal{B} \end{array}$$

Alors  $(\theta_2 \circ_R H) \cdot (\theta_1 \circ_R H) = (\theta_2 \cdot \theta_1) \circ_R H$  De même, on a :

$$\text{id}_F \circ_R H = \text{id}_{F \circ H}$$

**Proposition 3.3** Les actions à gauche et à droite sont compatibles au sens où :

$$\mathcal{A}' \xrightarrow{H_{\mathcal{A}'}} \mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{G} \mathcal{B} \\ \theta \uparrow \! \! \! \uparrow \\ \xrightarrow{F} \mathcal{B} \end{array} \xrightarrow{H_{\mathcal{B}}} \mathcal{B}'$$

En particulier :

$$(H_{\mathcal{B}} \circ_L \theta) \circ_R H_{\mathcal{A}} = H_{\mathcal{B}} \circ_L (\theta \circ_R H_{\mathcal{A}})$$

cette transformation étant définie en  $A' \in \text{Obj } \mathcal{A}'$  par :

$$H_{\mathcal{B}}(\theta_{H_{\mathcal{A}}A'}) : H_{\mathcal{B}}F H_{\mathcal{A}}A' \rightarrow H_{\mathcal{B}}G H_{\mathcal{A}}A'$$

Ces équations assurent que tout diagramme de la forme :/

$$\mathcal{A}''' \longrightarrow \mathcal{A}'' \longrightarrow \mathcal{A}' \xrightarrow{H_{\mathcal{A}'}} \mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{G} \mathcal{B} \\ \theta \uparrow \! \! \! \uparrow \\ \xrightarrow{F} \mathcal{B} \end{array} \xrightarrow{H_{\mathcal{B}}} \mathcal{B}' \longrightarrow \mathcal{B}'' \longrightarrow \mathcal{B}'''$$

définit une transformation de manière unique.

**Proposition 3.4** Toutefois, si on se donne deux transformations :

$$\mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{G_1} \mathcal{B} \\ \theta_1 \uparrow \! \! \! \uparrow \\ \xrightarrow{F_1} \mathcal{B} \end{array} \quad \mathcal{B} \begin{array}{c} \xrightarrow{G_2} \mathcal{C} \\ \theta_2 \uparrow \! \! \! \uparrow \\ \xrightarrow{F_2} \mathcal{C} \end{array}$$

on a deux manières de composer, qui donnent en général des transformations différentes.

$$\begin{array}{ccc} G_2 \circ G_1 & & G_2 \circ G_1 \\ \theta_2 \circ_R G_1 \uparrow \! \! \! \uparrow & & G_2 \circ_L \theta_1 \uparrow \! \! \! \uparrow \\ F_2 \circ G_1 & & G_2 \circ F_1 \\ F_2 \circ_L \theta_1 \uparrow \! \! \! \uparrow & & \theta_2 \circ_R F_1 \uparrow \! \! \! \uparrow \\ F_2 \circ F_1 & & F_2 \circ F_2 \end{array}$$

*Démonstration.* On considère les catégories  $\mathcal{A} = \mathbb{1}$  à un élément,  $\mathcal{B}$  définie par :

$$\begin{array}{c} 1 \\ \uparrow \\ 0 \end{array}$$

et  $\mathcal{C}$  définie par le diagramme non commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{g'} & d \\ g \uparrow & \neq & \uparrow f' \\ a & \xrightarrow{f} & c \end{array}$$

On considère alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & G_2 & & \\ & \nearrow & \uparrow & \searrow & \\ \mathbb{1} & \xrightarrow{G_1} & 1 & \xrightarrow{\quad} & b \xrightarrow{g'} d \\ & \uparrow \theta_1 & \uparrow j & \uparrow \theta_2 & \uparrow g \\ & \xrightarrow{F_1} & 0 & \xrightarrow{F_2} & a \xrightarrow{f} c \\ & & & & \uparrow f' \\ & & & & c \end{array}$$

$\mathcal{A} \qquad \mathcal{B} \qquad \mathcal{C}$

On pose :

$$\begin{aligned} \theta_1(\mathbb{1}) &= j \\ F_2(0) &= a, G_2(0) = c \\ F_2(j) &= g, G_2(j) = f' \\ \theta_2(0) &= f, \theta_2(1) = g' \end{aligned}$$

■

Les propriétés et équations des actions définissent une sesquicatégorie des catégories, foncteurs et transformations.

**Définition 3.6** Une transformation  $\theta : F \Rightarrow G$  est dite naturelle lorsque le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} GA & \xrightarrow{Gf} & GA' \\ \theta_A \uparrow & & \uparrow \theta_{A'} \\ FA & \xrightarrow{Ff} & FA' \end{array}$$

pour toute flèche  $f$  de la catégorie  $\mathcal{A}$ .

**Définition 3.7 — Catégorie des Transformations Naturelles.** La transformation  $\text{id}_F$  est naturelle :

$$\text{id}_F : F \Rightarrow F, (\text{id}_F) = \text{id}_{FA}$$

On note  $\text{Nat}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  la catégorie dont les objets sont les foncteurs  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  et dont les flèches sont les transformations naturelles.

**Proposition 3.5** La composée verticale de deux transformations naturelles est une transformation naturelle :

$$\begin{array}{ccc} & H & \\ \varphi \Uparrow & \curvearrowright & \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{G} & \mathcal{B} \\ \psi \Uparrow & \curvearrowright & \\ & F & \end{array}$$

*Démonstration.* Le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} HA & \xrightarrow{Hf} & HA' \\ \psi_A \uparrow & & \uparrow \psi_{A'} \\ GA & \xrightarrow{Gf} & GA' \\ \varphi_A \uparrow & & \uparrow \varphi_{A'} \\ FA & \xrightarrow{Ff} & FA' \end{array}$$

■

**Proposition 3.6** Les actions à gauche et à droite d'un foncteur préservent la naturalité des transformations.

*Démonstration.* Tout foncteur  $H : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$  définit un foncteur

$$H \circ_L : \text{Nat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightarrow \text{Nat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}')$$

Tout foncteur  $H : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$  définit un foncteur

$$\circ_R H : \text{Nat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightarrow \text{Nat}(\mathcal{A}', \mathcal{B})$$

■

**Proposition 3.7** Si  $\theta_1, \theta_2$  sont des transformations naturelles :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{G_1} & \mathcal{B} \\ \theta_1 \Uparrow & & \Uparrow \theta_2 \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{G_2} & \mathcal{C} \\ F_1 \Uparrow & & \Uparrow F_2 \end{array} \quad \text{"Higherpastingdiagram"}$$

alors les transformations naturelles " $\theta_1$  puis  $\theta_2$ " et " $\theta_2$  puis  $\theta_1$ " coïncident.

■ **Vocabulaire 3.1**  $\theta_2 \circ \theta_1$  désigne la transformation naturelle obtenue de la composition horizontale de transformations naturelles

**Définition 3.8** Une 2-catégoprie est une sesquicatégorie où la loi 3.7 est satisfaite.

**Théorème 3.1** Les catégories, foncteurs et tranformations naturelles définissent une 2-catégorie.

■ **Exemple 3.2** On réétudie la catégorie  $\mathbb{G}$  :

$$\begin{array}{ccc} \text{id}_1 \hookrightarrow 1 & & \\ \parallel & & \\ t & \xrightarrow{G} & \text{Set} \\ \parallel & & \uparrow \theta \\ \text{id}_0 \hookrightarrow 0 & \xleftarrow{F} & \end{array} \quad \mathbb{G} \begin{array}{c} \xrightarrow{G} \\ \theta \Uparrow \\ \xleftarrow{F} \end{array} \text{Set}$$

Ici,  $F$  et  $G$  définissent deux graphes  $\langle F \rangle$  et  $\langle G \rangle$ .

L'ensemble des sommets de  $\langle F \rangle$   $FV \xrightarrow{\theta_V} GV$  L'ensemble des sommets de  $\langle G \rangle$

L'ensemble des arêtes de  $\langle F \rangle$   $FE \xrightarrow{\theta_E} GE$  L'ensemble des arêtes de  $\langle G \rangle$

Une transformation  $\theta \in \text{Trans}(\mathbb{G}, \text{Set})$  définit deux fonctions.

**Proposition 3.8** Un homomorphisme de graphe :

$$\langle F \rangle \rightarrow \langle G \rangle$$

est la même chose qu'une transformation naturelle :

$$\theta : F \Rightarrow G$$

*Démonstration.* On a deux diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} FE & \xrightarrow{\theta_E} & GE \\ \downarrow F_s & 1 & \downarrow G_s \\ FV & \xrightarrow{\theta_V} & GV \end{array} \quad \begin{array}{ccc} FE & \xrightarrow{\theta_E} & GE \\ \downarrow F_t & 2 & \downarrow G_t \\ FV & \xrightarrow{\theta_V} & GV \end{array}$$

Le fait que 1 et 2 commutent signifie que *l'image de la source est la source de l'image*. ■

■

## 4 TD 1

### 4.1 Catégories et Foncteurs

	Catégorie	Objets	Flèches
1. On a le tableau suivant :	SET	Ensembles	Fonctions
	TOP	Espaces Topologiques	Fonctions Continues
	VECT	Espaces Vectoriels	Applications Linéaires
	GRP	Groupes	Morphismes

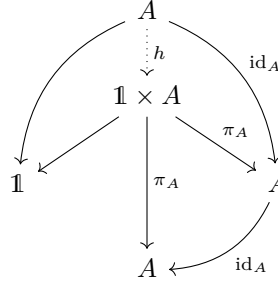
2. Un foncteur est un morphisme entre catégories.

3. La catégorie CAT est la catégorie dont les objets sont des catégories et les flèches sont des foncteurs

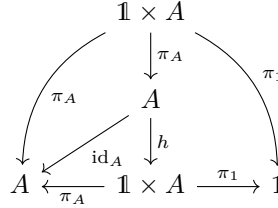
### 4.2 Catégories Cartésiennes

**Question 3, 4, 5** Voir la preuve de 2.1.

**Question 6** On a le diagramme commutatif suivant :

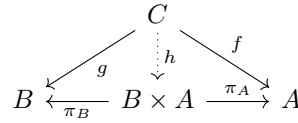


Donc  $\pi_A \circ h = \text{id}_A$ .

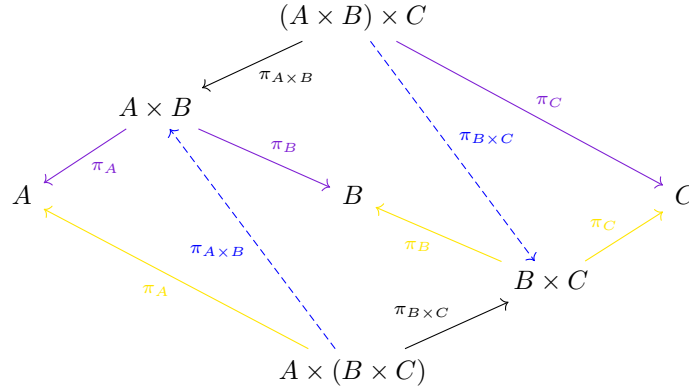


De même pour  $A \times 1$ , par symétrie. On peut par ailleurs procéder de même que pour les produits cartésiens pour montrer que  $A \times 1 \simeq 1 \times A$ .

**Question 7** On montre que  $B \times A$  vérifie les propriétés de produit cartésien pour  $A$  et  $B$  :



**Question 8** On a le diagramme suivant :

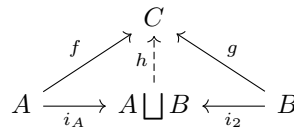


On a donc un morphisme de  $(A \times B) \times C \rightarrow B$  et un morphisme  $(A \times B) \times C \rightarrow C$ . Il existe donc un (unique) morphisme  $(A \times B) \times C \rightarrow B \times C$  (faisant commuter le diagramme idoïne). On a maintenant deux morphismes depuis  $(A \times B) \times C$  :

- un vers  $A$
- un vers  $B \times C$

On peut donc trouver un (unique) morphisme  $h : (A \times B) \times C \rightarrow A \times (B \times C)$  (faisant toujours commuter le diagramme idoïne). On construit de la même façon  $\tilde{h} : A \times (B \times C) \rightarrow (A \times B) \times C$ . On vérifie de façon similaire à la question précédente que  $h \circ \tilde{h} = \text{id}$  et  $\tilde{h} \circ h = \text{id}$ . Donc  $(A \times B) \times C \simeq A \times (B \times C)$ .

**Question 9** On notera  $A + B$  le coproduit de  $A$  et  $B$ . Il doit faire le diagramme commuter :



On remarque notamment que  $A + B$  est un coproduit de  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{C}$  si et seulement si  $A + B$  est un produit de  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{C}^{op}$ . En prenant pour  $A + B$  (si  $A, B \in \text{Set}$ ) l'ensemble abstrait défini à isomorphisme près par :

$$\{(A, a) \mid a \in A\} \cup \{(B, b) \mid b \in B\}$$

avec  $i_A$  et  $i_B$  les inclusions. On a bien le résultat puisque si  $f : A \rightarrow C$  et  $g : B \rightarrow C$ , la fonction  $h : (A, x) \mapsto f(x); (B, y) \mapsto g(y)$  est unique car entièrement définie sur  $A + B$ . Formellement c'est l'union disjointe.

**Question 10** L'objet terminal de  $\text{Rel}$  est l'ensemble vide. En effet, on a toujours une unique relation entre  $X$  et l'ensemble vide : la relation vide. Il est clair que  $\text{Rel}^{op} = \text{Rel}$ . L'union disjointe est le produit cartésien. On prend comme projection  $\pi_A = \{((A, e), e) \mid e \in A\}$

**Question 11** On prend pour objet terminal l'espace vectoriel nul. On prend comme produit cartésien la somme directe disjointe sur les bases. Par le même raisonnement que précédemment, on a le résultat.

**Question 12** L'objet terminal est la catégorie triviale avec un objet et un morphisme. On définit le produit de cartésien par des couples d'objet et dont les flèches sont des couples de fonctions. La projection est alors similaire à celle de  $\text{Set}$ .

**Question 13** De la même manière que précédemment, en considérant des couples de morphisme du produit cartésien de l'origine dans le produit cartésien de l'image. On a le résultat par propriété fondamentale.

## 5 TD 2

### 5.1 Produits Fibrés

**Définition 5.1** Un diagramme commutatif dans  $\mathcal{C}$  :

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p_2} & Y \\ \downarrow p_1 & (*) & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

est un pullback, tiré en arrière ou produit fibré de  $X$  et  $Y$  au dessus de  $Z$  quand pour tout diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{q_2} & Y \\ \downarrow q_1 & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

il existe un unique morphisme  $h : Q \rightarrow P$  tel que le diagramme ci-dessous commute :

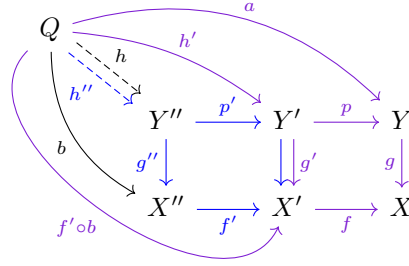
$$\begin{array}{ccccc} Q & & \xrightarrow{q_2} & & Y \\ & \searrow h & & & \downarrow g \\ & & P & \xrightarrow{p_2} & Y \\ & & \downarrow p_1 & & \downarrow g \\ & & X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

**Question 1** On propose pour  $P$  l'ensemble des couples  $(x, y)$  dont les composantes sont dans les mêmes fibres, i.e.,  $P = \{(x, y) \in \hat{X} \times \hat{Y} \mid f(x) = g(y)\}$  où  $\hat{X}$  est un système de représentants des classes d'équivalence définies par

les fibres de  $X$  sous  $f$ . Les projections sont alors les projections sur la première et la deuxième composante.

On a donc une unique définition du morphisme  $h$  en considérant si  $q \in Q$ ,  $h(q) \in f^{-1}(f(q_1(q))) \cap \hat{X} \times g^{-1}(g(q_2(q))) \cap \hat{Y}$ .

**Question 2 et 3** Ajouter un morphisme  $Q \rightarrow Y''$  crée un diagramme commutatif avec les bords bas et droit de (c). Le carré au dessus de (a) ainsi créé a un morphisme vers  $Y'$  qui, puisque  $Y'$  est un pullback pour  $Y$  et  $X'$  au dessus de  $X$ , crée un diagramme carré commutant au dessus de  $X'' \rightarrow X' \rightarrow X$  et  $Y \rightarrow X$ .



Finalement, le carré de gauche est un pullback si et seulement si le grand carré est un pullback.

**Question 4** On considère l'ensemble  $X = \{1\}$  et l'ensemble  $Y = \{1, 2\}$  ainsi que les fonctions  $i : 1 \in X \mapsto 1 \in Y$  et  $p : y \in Y \mapsto 1 \in X$ . Alors :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\text{id}} & X & \xrightarrow{\text{id}} & X \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow i & & \downarrow \text{id} \\ X & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

et donc on a le résultat.

## 5.2 Monomorphismes et Épimorphismes

**Question 1** Trivial, je le ferai faire à un sup en khôlle.

**Question 2** Trivial, je le ferai faire à un autre sup en khôlle.

**Question 3** Si on a :

$$\forall a, b : X \rightarrow A, f \circ a = f \circ b \Rightarrow a = b$$

$$\forall a, b : X \rightarrow B, g \circ a = g \circ b \Rightarrow a = b$$

En particulier, pour tous  $a, b : X \rightarrow A$  :

$$g \circ f \circ a = g \circ f \circ b \Rightarrow g \circ (f \circ a) = g \circ (f \circ b)$$

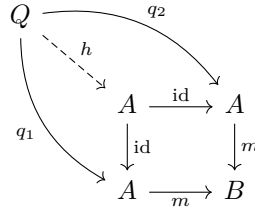
$$(\text{Par propriété de } g) \Rightarrow f \circ a = f \circ b$$

$$(\text{Par propriété de } f) \Rightarrow a = b$$

On procède de même pour les épimorphismes.

**Question 4** Si  $m$  est un mono, le résultat est clair puisqu'alors toutes les flèches telles que  $m \circ q_1 = m \circ q_2 = m \circ \text{id} \circ h$  induisent  $q_1 = q_2 = \text{id} \circ h = h$ .

Réciproquement, si on a le diagramme suivant :



en particulier,  $h = q_1$  et  $h = q_2$  conviennent, donc  $q_1 = q_2$  par unicité de  $h$ . Comme de plus, puisque le diagramme

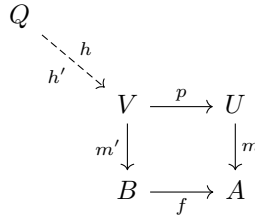
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\text{id}} & A \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow m \\ A & \xrightarrow{m} & B \end{array}$$

est un pullback, on a le diagramme précédent dès que  $m \circ q_2 = m \circ q_1$  et donc  $m$  est un mono.

**Question 5** Si on a le pullback suivant, on suppose que  $m$  est un monomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{p} & U \\ m' \downarrow & & \downarrow m \\ B & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

Soit  $Q$  un objet et  $h, h' : Q \rightarrow V$  telles que  $m' \circ h = m' \circ h'$ .



<++>