# DM 1 Topologie et Calcul Différentiel

Topologie définie par une famille de semi-normes

Matthieu Boyer

3 octobre 2023

## Table des matières



# 1 Exercice 1 : Généralités

## 1.1 Question 1

On remarque que les $(B(x, B, r))_{x\in E, B\subset A, |B|<+\infty, r>0}$ sont l'équivalent pour une famille de semi-normes des boules ouvertes, on les appellera donc des *semies-boules*. On va donc montrer que les $(B(x, B, r))_{B\subset A, |B|<+\infty, r>0}$ forment une base de voisinage de $x$ pour chaque $x$ dans $E$, i.e. que chaque voisinage de $x$ contient au moins une semie-boule centrée en $x$. On en déduira alors directement que l'ensemble des semies-boules forme une base d'ouverts de $\mathcal{T}$.

1. On a toujours $B(x, B, r) \subset E$ donc $E$ est voisinage de $x$.
2. On a toujours $p_b(x - x) = 0$ par homogénéité donc toute semie-boule centrée en $x$ et par extension tout voisinage de $x$ contient $x$.
3. Si on prend une collection $(U_i)_{i\in I}$ de voisinages de $x$, et si l'un des $U_i$ contient $B(x, B_i, r_i)$, l'union des $U_i$ contient $B(x, B_i, r_i)$ et est donc un voisinage de $x$.
4. Si on prend une semie-boule $B(x, B, r)$ centrée en $x$ qui contient un élément $y$, en prenant $\tilde{r} = \min_{b\in B} r - p_b(x - y)$, $B(y, B, \tilde{r}) \subset B(x, B, r)$ donc $B(x, B, r)$ est un voisinage de $y$.
5. Si $U_0, U_1$ sont deux voisinages de $x$, qui contiennent les semies-boules $B(x, B_0, r_0)$ et $B(x, B_1, r_1)$, alors $U \cap V$ contient la semie-boule $B(x, B_0 \cup B_1, \min(r_0, r_1))$ donc est un voisinage de $x$.

On a bien montré que les semies-boules centrées en $x$ forment une base de voisinage de $x$, donc que les semies-boules de $E$ forment bien une base d'ouvert de la topologie $\mathcal{T}$

## 1.2 Question 2

### 1.2.1 Continuité de l'application Somme

Si on se donne une semie-boule $B = B(x+y, B, r)$ centrée en $x+y \in E$. En prenant pour ouverts autour de $x$ et $y$ les semies-boules $B_x = B(x, B, r/2)$ et $B_y = B(y, B, r/2)$, on a bien, si $(a_0, a_1) \in B_x \times B_y$ pour tout $b \in B$, $p_b(a_0 + a_1 - (x+y)) \leq p_b(a_0 - x) + p_b(a_1 - y) < r/2 + r/2 = r$. Donc, l'application somme est bien continue.

### 1.2.2 Continuité du produit externe

On a toujours, si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, et si $(x, y) \in E^2$ :

$$\begin{aligned} p_b(\lambda x - \mu y) &= p_b(\lambda(x-y) + \lambda y - \mu y) \\ &\leq |\lambda|\, p_b(x-y) + |\lambda - \mu|\, p_b(y) && \text{Inégalité Triangulaire sur } p_b \\ &\leq |\mu|\, p_b(x-y) + |\lambda - \mu|\, p_b(y) + |\lambda - \mu|\, p_b(x-y) && \text{Inégalité Triangulaire sur } |\cdot| \end{aligned}$$

Donc, si on prend $x$ de telle sorte que $p_b(x-y) < \min(1, r/(3\mu))$ et si on prend $\lambda$ tel que $|\lambda - \mu| < \min(r/3, r/p_b(y))$, on a bien la continuité en $(\mu, y)$ du produit externe. On a donc bien la continuité du produit externe sur $\mathbb{R} \times E$

## 1.3 Question 3

Soit $r > 0$, on note $S$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon $r$. Si $x \in B(0_E, \{\alpha\}, r)$, on a $p(x) < r$.
Soit $a \in \Im(p_\alpha)$, on note cette fois-ci $S$ la boule ouverte de centre $a$ et de rayon $r$. Si $x$ est un antécédent de $a$ par $p_\alpha$, l'image par $p_\alpha$ de $B(x, \{\alpha\}, r)$ est inclue dans $S$.
Donc $p_\alpha$ est continue.

## 1.4 Question 4

- ($\Rightarrow$) Si $\mathcal{T}$ est séparée, si $x \neq 0_E \in E$, il existe $B \subset A$ *finie*, $r$ tels que $B(0_E, B, r)$ ne contienne pas $x$. Autrement dit, il existe $\alpha \in B \subset A$ tel que $p_\alpha(x) \geq r > 0$.
- ($\Leftarrow$) Réciproquement, si la famille $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ est séparante, soient $x \neq y \in E$. Il existe $\alpha \in A$ tel que $p_\alpha(x-y) = r > 0$. Alors, les semies-boules $B(x, \alpha, r/3)$ et $B(y, \alpha, r/3)$ sont des voisinages de $x$ et $y$ respectivement et sont disjoints. Donc $\mathcal{T}$ vérifie l'axiome de séparation des espaces séparés de Hausdorff.

## 1.5 Question 5

- ($\Rightarrow$) Il suffit de remarquer que : $\forall \alpha \in A, \forall \varepsilon > 0, B(x, \{\alpha\}, \varepsilon)$ est un voisinage de $x$. Donc à partir d'un certain rang $p_\alpha(x_n - x) < \varepsilon$ et donc $p_\alpha(x_n - x) \to 0$.
- ($\Leftarrow$) Si pour tout $\alpha \in A$, $p_\alpha(x_n - x) \to 0$, on a à partir d'un certain rang, si $\varepsilon > 0$, si $B$ est une partie finie de $A$, $x_n \in B(x, B, \varepsilon)$. Donc, comme tout ouvert contient une semie-boule, on a le résultat souhaité.

## 1.6 Question 6

Tout d'abord, les propriétés *i.* et *ii.* équivalentes pour une application linéaire. En effet, si $T$ est continue en 0, si $x_n \to x$, $x - x_n \to 0$ et donc par continuité, $T(x - x_n) \to T(0)$ et donc $T(x_n) \to T(x)$.
Il reste alors à montrer l'équivalence des propriétés *i.* et *iii.* :

— ($i. \Rightarrow iii.$) Supposons $T$ continue. Pour tout $\beta \in B$, il existe un voisinage $U$ de $0_E$ tel que $\forall x \in U, q_\beta(T(x)) \leq 1$. Comme $U$ est ouvert, il existe $\alpha \in A$ tel qu'une semie boule de centre $0_E$, de semie-norme $p_\alpha$ et de rayon $r$ ($B(0_E, \{\alpha\}, r)$) soit inclue dans $U$. Mais alors, par homogénéité, $\frac{r}{p_\alpha(x)} x \in U$. On a donc :

$$q_\beta(T(x)) = \frac{p_\alpha(x)}{r} q_\beta\left(T\left(\frac{r}{p_\alpha(x)} x\right)\right) \leq \frac{1}{r} p_\alpha(x)$$

— ($iii. \Rightarrow i.$) $T$ étant linéaire, par hypothèses, si $\beta \in B$ : $q_\beta(T(x) - T(y)) = q_\beta(T(x-y)) \leq C \sup_{i \in I} p_i(x-y) =$. Mais alors, puisque ceci est vrai pour tous $\beta$, en particulier, si on se donne une semie-boule $B = B(T(x), \beta, r)$ de $F$, si on a $y \in B(x, I, r/C)$, $T(y) \in B$, et donc $T$ est continue en $x$. Finalement, $T$ est continue.

# 2 Exercice 2 : Exemples

## 2.1 Question 1

Il est clair que $d$ est bien définie et est positive. Par ailleurs, si $d(x,y) = 0$, en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$ $p_n(x-y) = 0$ i.e., la famille des $p_n$ étant séparante, $x = y$, donc $d$ est séparée. De plus, $d$ vérifie l'inégalité triangulaire puisqu'on a, pour tous $x, y, z$, $\min(p_n(x-y), 1) + \min(p_n(z-x), 1) \geq \min(p_n(z-y), 1)$ en distinguant selon les valeurs de $p_n(x-y)$ (et $z-y, z-x$)
De plus, chacune des semi-normes est continue pour $d$ et une boule ouverte pour $d$ est une intersection d'ensembles de la forme : $p_n^{-1}([0, r_n[)$. Donc la topologie induite par $d$ est bien $\mathcal{T}$. Donc $E$ est métrisable.

## 2.2 Question 2

### 2.2.1 Question a.

Par la question 5 de l'exercice 1. :

$$(f_n \to_{n \to +\infty} f) \Leftrightarrow (\forall x \in [0,1], |f(x) - f_n(x)| \to_{n \to +\infty} 0)$$

Les suites convergentes, sont donc les suites convergeant simplement pour la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$.
On a de plus, $\forall f \in E, \forall x \in [0,1], |f(x)| = 0$ si et seulement si, $f = 0$ sur $[0,1]$. Donc, la famille $p_x$ est séparante et donc cette topologie est séparée.

### 2.2.2 Question b.

Cette topologie n'est pas métrisable. En effet, cette topologie ne peut pas être engendrée par une base dénombrable d'ouverts.

## 2.3 Question 3

### 2.3.1 Question a.

Par la question 5. de l'exercice 1, $f_n \to f$ si et seulement si $\forall j, p_j(f_n - f) \to 0$, ce qui équivaut bien à dire que $f_n$ converge uniformément sur tout segment équilibré vers $f$. Mais ceci est équivalent sur $\mathbb{R}$ à la convergence uniforme sur tout compact, puisque tout compact sur $\mathbb{R}$ est borné par une certaine constante $M$, i.e. inclus dans un certain $[-M, M]$.

### 2.3.2 Question b.

# 3 Exercice 3 : Applications aux distributions tempérées sur $\mathbb{R}$