Topologie et Calcul Différentiel

Djalil Chafaï

2023 - 2024

Table des matières

1 Espaces Topologiques

1.1 Espaces à produit scalaire, espaces normés, espaces métriques, espaces topologiques.

Définition 1.1.1. *Un produit scalaire sur un $\mathbb{K}$-ev est une forme linéaire, symétrique (ou hermitienne) et définie positive. Quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on dit que le produit scalaire est sesquilinéaire.*

Proposition 1.1.1.
- *Relation de Pythagore : $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re(\langle x, y\rangle)$*
- *Identité du Parallélograme : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$*
- *Inégalité de Chauchy-Schwarz : $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$*

Définition 1.1.2. *Une norme sur un $\mathbb{K}$-ev ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) est une forme positive sous-additive homogène séparée.*

Définition 1.1.3. *Une distance ou une métrique sur un ensemble est une forme positive séparée symétrique vérifiant l'inégalité triangulaire.*

Définition 1.1.4. *Une topologie $\mathcal{O} \in \mathcal{P}(X)$ sur un ensemble X est une collection de partie de X stable par réunion quelconque, intersections finies, contenant l'espace et le vide. On appelle ses éléments des ouverts*

1.2 Fermés

Définition 1.2.1.
- *Un ensemble A est fermé si et seulement si $A^{\complement}$ est ouvert.*
- *L'adhérence d'un ensemble est le plus petit fermé le contenant :*

$$\overline{A} = \bigcap_{A \subset F, F\, fermé} F = \{x \in X, \forall O \in \mathcal{O}, x \in O \to O \cap A \neq \varnothing\}$$

- *L'intérieur de A est le plus grand ouvert qu'il contient :*

$$\mathring{A} = \bigcup_{O \subset A, O ouvert} = \{x \in X, \exists\ O \in \mathcal{O},\ x \in O \subset A\}$$

- *La frontière de A est : $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$*
- *A est dense si d'adhérence égale à X.*

Définition 1.2.2.
- *x est intérieur à A si $x \in \mathring{A}$.*
- *x est adhérent à A lorsque $x \in \overline{A}$. On dit alors que x est isolé lorsqu'il existe O_x voisinage ouvert de x d'intersection x avec A. Sinon, x esst d'accumulation.*

1.3 Voisinages, convergence et continuité.

Définition 1.3.1. *Un voisinage d'un point x est une partie qui contient un ouvert contenant x.*

Définition 1.3.2. *Une suite converge vers x pour une topologie lorsque pour tout voisinage de x, la suite appartient à ce voisinage àpcr.*

Proposition 1.3.1. *Si F fermé, $x_n \in F \to x$, alors $x \in F$. La réciproque est fausse en générale.*

Théorème 1.3.1. *Dans un espace métrique, $x_n \to x$ ssi $d(x_n, x) \to 0$*

Définition 1.3.3. *Une application f est dite :*
- *continue en x lorsque pour tout voisinage V de $f(x)$, il existe un voisinage W de x tel que $f(W) \subset V$.*
- *séquentiellement continue en x lorsque pour toute suite $x_n \to x$, $f(x_n) \to f(x)$.*

Proposition 1.3.2. *La continuité implique la continuité séquentielle.*

Proposition 1.3.3. *Soit $f : X \to Y$. On a équivalence entre :*

- *f est continue*
- *Les images réciproques par f des ouverts de Y sont des ouverts de X.*
- *Les images réciproques par f des fermés de Y sont des fermés de X.*

Définition 1.3.4 (Propriété de Fréchet-Urysohn)**.** *X vérifie la propriété de Fréchet-Urysohn si :*

$$\forall A \subset X,\ x \in \overline{A},\ \textit{il existe } x_n \in A^{\mathbb{N}},\ x_n \to x$$

Théorème 1.3.2. *Si X vérifie la propriété de Fréchet-Urysohn, pour tout espace Y et tout $f : X \to Y$, la continuité équivaut à la continuité séquentielle.*

Définition 1.3.5. *Un homéomorphisme est une bijection continue de réciproque continue.*

1.4 Bases de topologie

Définition 1.4.1. *Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ une famille d'ouverts. $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{O}$ quand : $\forall O \in \mathcal{O}, \exists\, (B_i)_i \in \mathcal{B}, O = \cup_i B_i$ ou de manière équivalente quand $\forall O \in \mathcal{O}, x \in O, \exists B \in \mathcal{B},\ x \in B \subset O$.*

Théorème 1.4.1. *Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ une base. On a :*

- *$X = \cup_{B \in \mathcal{B}} B$*
- *$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B},\ x \in B_1 \cap B_2,\ \exists B_3 \in \mathcal{B}, x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*

Réciproquement, si une famille vérifie ces propriétés, alors $\mathcal{O} = \{\cup_{B \in \mathcal{A} B}\}_{\mathcal{A} \subset \mathcal{B}}$ est la plus petite topologie qui contient $\mathcal{B}$, appelée topologie engendrée par $\mathcal{B}$.

Définition 1.4.2. *Une base locale au point x est une famille d'ouverts contenant x et dont au moins l'un est inclus dans chaque ouvert contenant x.*

Définition 1.4.3. *Un espace topologique est :*

- *à base dénombrable de voisinages si tout point possède une base dénombrable de voisinages.*
- *à base dénombrable lorsqu'il possède une base dénombrable (c'est plus fort !)*
- *séparable lorsqu'il existe une partie dénombrable dense.*

Théorème 1.4.2. *Un espace à base dénombrable est toujours séparable. La réciproque est vraue pour un espace métrisable.*

Théorème 1.4.3. *Tout espace à base dénombrable de voisinages (en particulier tout espace métrisable) est un espace de Fréchet-Urysohn.*

1.5 Axiomes de Séparation

Définition 1.5.1. *Axiome T2 : Tous deux points peuvent être séparés par deux ouverts distincts.*

Théorème 1.5.1. *Pour tout espace topologique métrisable :*

- *Les singletons sont fermés.*
- *Pour tous fermés F_0, F_1, il existe f continue valant i sur F_i.*

Lemme 1.5.2. *Dans un espace métrique, F est fermé si et seulement si $d(x, F) = 0 \Rightarrow x \in F$.*

1.6 Topologies

1.6.1 Topologie Trace

Définition 1.6.1. *On appelle topologie trace la topologie induite par la topologie de X sur $A \subset X$ est la topologie la moins fine sur A qui rend l'inclusion canonique continue.*

Proposition 1.6.1.
- *La restriction de la métrique induit la topologie trace.*
- *La définition est emboîtable.*
- *La fermeture d'un ensemble pour la topologie trace est la trace de sa fermeture. Ce n'est pas vrai pour l'intérieur.*
- *Si $x_n \to x_* \in A$ ssi $x_n \to x_*$ dans X.*
- *Si $\mathcal{O}$ est à base dénombrable (resp. de voisinages), $\mathcal{O}_A$ l'est aussi*
- *Si $\mathcal{O}$ est séparée (axiome T2), $\mathcal{O}_A$ aussi.*
- *Si $\mathcal{O}$ est métrisable est séparable, alors $\mathcal{O}_A$ est métrisable est séparable.*

1.6.2 Topologie Produit

Définition 1.6.2. *On appelle topologie produit ou cylindrique sur $X = \prod_{i \in I} X_i$ la topologie engendrée par les $\prod_{i \in I} O_i$ avec $O_i \neq X_i$ sur un nombre fini de i. C'est la topologie la moins fine sur X qui rend les projections canoniques continues.*

Lemme 1.6.1. *On a : $x_n \to x$ si et seulement si $x_{n,i} \to x_i$ pour tout i.*

Proposition 1.6.2.
- *Si tous les X_i vérifient $T2$, X vérifie $T2$*
- *Si I est au plus dénombrable, et tous les X_i sont à base dénombrable (de voisinages), X l'est aussi.*
- *Si I est au plus dénombrable ou a le cardinal de $\mathbb{R}$, et si les X_i sont tous séparables, X aussi.*
- *Si I est au plus dénombrable, et si les X_i sont métrisables par les d_i, X est métrisable par :*
  - $\max_i(d_i)$ *si I est fini*
  - $\max_i \min(d_i, 2^{-i})$ *si I est infini dénombrable.*

1.6.3 Topologies Initiale et Finale

Définition 1.6.3.
- *Soient $f_i : X \to X_i$. La topologie engendrée sur X par les $f_i^{-1}(O_i)$ où O_i est ouvert dans X_i est appelée topologie initiale. C'est la moins fine qui rend f_i continue pour tout i.*
- *Soient $g_i : X_i \to X$. La topologie engendrée par les ensembles O tels que $g_i^{-1}(O)$ est ouvert dans X_i est appelée topologie finale. C'est la plus fine qui rend g_i continue pour tout i.*

1.6.4 Topologie Quotient

Définition 1.6.4. *Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur X. La topologie quotient sur $X/\sim$ est la plus fine qui rend la projection canonique continue : $O \subset X/\sim$ est ouvert ssi $[\cdot]^{-1}(O) = \{x \in X \mid [x] \in O\}$ est ouvert dans X. C'est la topologie finale de la projection canonique.*

2 Compacité

2.1 Quasi-Compéacité

Définition 2.1.1. *Un espace est dit quasi-compact lorsqu'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue : De tout recouvrement par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini. Un espace est dit compact lorsqu'il est quasi-compact et séparé.*

Définition 2.1.2. *Un sous ensemble est quasi-compact lorsqu'il est quasi compact pour la topologie trace.*

Proposition 2.1.1.

Dans $\mathbb{R}^n$, K est compact si et seulement si il est fermé borné.

Si K_1, K_2 sont quasi compacts, $K_1 \cup K_2$ est quasi compact.

Théorème 2.1.1.

Si F est fermé dans K quasi compact, F est quasi compact.

Si K est quasi compact dans X séparé, K est fermé.

Définition 2.1.3. *Si X est séparé, $A \subset X$ est relativement compact lorsque $\overline{A}$ est compact.*

Théorème 2.1.2.
- *Si $f : X \to Y$ est continue, X est quasi compact, alors $f(X)$ est quasi-compact.*
- *Si $f : X \to \mathbb{R}$ et $X \neq \varnothing$ est quasi compact, alors, $\exists\, x_\star \in X,\ f(x_\star) = \sup_{x\in X} f(x) < \infty$.*

Théorème 2.1.3. *Si $f : X \to Y$ est une bijection continue avec X quasi compact et Y séparé, f^{-1} est continue.*

2.2 Théorème de Tykhonov

Théorème 2.2.1. *Tout produit de (quasi-)compacts est (quasi-)compact.*

2.3 Compacité Métrique

Définition 2.3.1. *Un ε-réseau est un ensemble A fini tel que tout point est à distance au plus ε d'un point de A.*

Lemme 2.3.1. *Un espace métrique compact possède un ε-réseau fini pour tout ε.*

Théorème 2.3.2. *Pour un espace métrisable, on a équivalence entre :*

1. *X est compact*
2. *De toute suite de X on peut extraire une sous-suite convergeant dans X.*

Dans ce cas on a :

Lemme de Lebesgue : pour tout recouvrement par des ouverts O_i, il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in X$, il existe i_x tel que $B(x, r) \subset O_{i_x}$.

2.4 Compacité Locale

Définition 2.4.1. *Un espace est localement compact lorsque tout point possède un voisinage quasi-compact.*

Définition 2.4.2. *Un espace est dénombrable à l'infini s'il admet un recouvrement dénombrable par des quasi-compacts (qu'on peut supposer croissants sans perte de généralité).*

Lemme 2.4.1. *Un espace métrisable compact est localement compact et dénombrable à l'infini, et cela est vrai pour tout ouvert pour la topologie induite.*

Théorème 2.4.2. *Si un espace est localement compact et dénombrable à l'infini, il existe une suite K_n de quasi-compacts croissante d'union X et tel que tout quasi-compact inclus dans X est inclus dans au moins l'un des K_n. On parle de suite exhaustive de compacts.*

2.5 Compactification d'Alexandrov

Théorème 2.5.1. *Soit X un espace topologique et un point à l'infini $\infty \notin X$. Soit $X^\star = X \cup \{\infty\}$, $\mathcal{O}^\star \subset \mathcal{P}(X^\star)$ formé par les ouverts de X et les complémentaires dans $X^\star$ des quasi-compacts fermés de X. Alors :*

1. *$\mathcal{O}^\star$ est une topologie sur $X^\star$.*
2. *$X^\star$ est quasi-compact*
3. *L'injection canonique est continue et ouverte*
4. *$X^\star$ est séparé si et seulement si X est séparé et localement compact.*
5. *X est dense dans $X^\star$ si et sseulement si X n'est pas quasi-compact fermé.*

2.6 Théorème de Baire

Lemme 2.6.1. *Pour X un espace topologique, X est quasi-compact si et seulement si pour toute famille de fermés $(F_i)_{i \in I}$ telle que $\bigcap_{i \in I'} \neq \varnothing$ pour tout $I' \subset I$ fini, on a : $\bigcap_i F_i \neq \varnothing$.*

Lemme 2.6.2. *Si X est quasi-compact éparé alors :*

- *Tout point et tout fermé ne le contenant pas sont séparables par des ouverts.*
- *Pour tout $x \in X$ et tout ouvert $O \ni x$, il existe $O' \ni x$ tel que $\overline{O'} \subset O$.*

Théorème 2.6.3. *Si X est quasi-compact alors il est de Baire : toute intersection d'une suite d'ouverts denses est dense.*

3 Complétude

3.1 Suites de Cauchy

Définition 3.1.1. *Une suite x_n est de Cauchy lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N = N_\varepsilon$ tel que pour tous $n, m \geq N$, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Un espace métrique est complet lorsque toute suite de Cauchy converge.*

Lemme 3.1.1. *Si X est complet, $F \subset X$ est fermé, alors F est complet. Si $A \subset X$ est complet, alors A est fermé.*

Lemme 3.1.2. *Soit X complet et $X = F_0 \supset F_1 \supset \dots$ une suite décroissante de fermés non vide et de diamètres tendant vers 0. Alors leur intersection est un certain point $x \in X$.*

Théorème 3.1.3. *Un espace métrique est compact si et seulement si il est complet et admet un ε-réseau pour tout ε.*

Théorème 3.1.4.

- *Les R^n sont complets*
- *Les l^p pour $p \in [1, \infty]$ sont conplet.*

Théorème 3.1.5.

- *Si K est compact et Y métrique complet, alors $\mathcal{C}(K, Y)$ est métrique complet.*
- *Si X est localement compact à base dénombrable de voisinages et Y métrique complet alors $\mathcal{C}(X, Y)$ est métrisable complet.*

Définition 3.1.2. *On définit la distance de Hausdorff entre deux fermés d'un espace métrique de diamètre fini par :*

$$d_H(F_1, F_2) < r \Leftrightarrow \text{ pour tout } x \in F_{1,2},\ \exists y \in F_{2,1},\ d(x, y) < r$$

On note $\mathcal{F}(X)$ l'ensemble des fermés non-vides de X, et $\mathcal{K}(X)$ l'ensemble des compacts non-vides.

Théorème 3.1.6.

- *Si X complet, $\mathcal{F}(X)$ et $\mathcal{K}(X)$ sont complets.*
- *Si X est compact, $\mathcal{K}(X)$ est compact.*

3.2 Espaces Polonais, de Banach, de Hilbert

Définition 3.2.1. *Un espace topologique est :*

- *polonais lorsqu'il est séparable et métrisable complet*
- *de Banach lorsque c'est un ev normé complet*
- *de Hilbert loesque c'est un ev à produit scalaire complet*

Théorème 3.2.1. *Un ev normé est un espace de Banach ssi toute série absolument convergente est convergente.*

3.3 Complétion

Définition 3.3.1. *Soit X un espace métrique non complet. Son complété $(X^{'}, d')$ est un espace métrique complet tel que $X \subset X^{'}$ et X est dense dans $X^{'}$. On le construit ainsi :*

- *Soit $\tilde{X}$ l'ensemble des suites de Cauchy, muni de la relation : $x_n \sim y_n$ ssi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang pour lequel les suites sont à distance au plus ε.*
- *On considère $X^{'} = \tilde{X}/\sim$. On considère la quantité $d'((x_n), (y_n)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$. C'est bien une métrique compatible avec la topologie de $X^{'}$.*

Remarque 3.3.0.1. *Tous deux complétés sont isomètres.*

Lemme 3.3.1. *Si $f : X \to Y$ est uniformément continue, Y est complet, il existe une unique fonction continue prolongée sur le complété de X et égale à f sur X.*

Théorème 3.3.2. *Si X est complet, alors il est de Baire.*

4 Connexité

4.1 Connexité, connexité par arcs, composantes connexes

Définition 4.1.1. *Un espace est :*

- *connexe lorsqu'il n'est pas partitionnable en deux ouverts non-vides*
- *connexe par arcs lorsque les points sont reliés par des arcs*

Théorème 4.1.1.

- *X est connexe ssi $\varnothing$ et X sont les seules parties à la fois ouvertes et fermées.*
- *X est connexe ssi il n'est pas partitionnable en deux fermés non-vides.*
- *Si $f : X \to Y$ est continue et X connexe (resp. par arcs), alors $f(X)$ est connexe (resp. par arcs)*
- *Si X est connexe par arcs, alors il est connexe, et la réciproque est fausse.*
- *Si $\cap_i A_i \neq \varnothing$ avec les A_i connexes (resp. par arcs), $\cup_i A_i$ est connexe (resp. par arcs)*
- *Si les X_i sont connexes (resp. par arcs), alors $\prod_i X_i$ est connexe (resp. par arcs).*

Définition 4.1.2. *La composante connexe C_x de $x \in X$ est la plus grande partie connexe de X contenant x. Un espace est totalement discontinu si $C_x = \{x\}$ pour tout x.*

4.2 Connexité Métrique

Définition 4.2.1. *Un espace métrique est bien echaîné lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, et tous $x, y \in X$ il existe une suite finie $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ telle que $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ pour tout i.*

Théorème 4.2.1. *Si un espace est connexe alors il est bien enchaîné, et la réciproque est fausse mais devient vraie en ajoutant la compacité..*

5 Espaces de fonctions continues sur un métrique compact

Définition 5.0.1. *Pour une suite f_n dans $\mathcal{C}(K,Y)$ et f dans $\mathcal{C}(K,Y)$:*

- *$f_n \to f$ ponctuellement lorsque pour tout $x \in K, f_n(x) \to f(x)$*
- *$f_n \to f$ uniformément lorsque la convergence a lieu dans $\mathcal{C}(K,Y)$.*

Théorème 5.0.1 (De Dini)**.** *Si $Y = \mathbb{R}$, si la suite f_n est croissante, et f est continue, la convergence ponctuelle implique la convergence uniforme.*

Théorème 5.0.2 (De Heine)**.** *Toute fonction $f \in \mathcal{C}(K,Y)$ est uniformément continue.*

Théorème 5.0.3 (de Arzelà-Ascoli)**.** *$A \subset \mathcal{C}(K,Y)$ a une adhérence compacte ssi les deux conditions suivantes sont réalisées :*

- *Compacité Ponctuelle : $\forall x \in K, \{f(x) \mid f \in A\}$ a une adhérence compacte dans Y.*
- *La famille A est uniformément équicontinue : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $f \in A$, et tous $x, y \in K$, si $d_K(x,y) < \eta$, alors $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Théorème 5.0.4 (de Stone-Weierstrass)**.** *Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$. vérifiant la propriété de prescription de valeurs arbitraires en deux points arbitraires : pour tous $x, y \in K$, $a, b, \in \mathbb{R}$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) = a$ et $f(y) = b$. Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$.*

Corollaire 5.0.4.1 (Théorème de Weierstrass)**.** *Pour tout n, $K \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ est dense dans $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$.*

Corollaire 5.0.4.2 (de Stone-Weierstrass Complexe)**.** *Si de plus la famille $\mathcal{A}$ est stable par conjugaison et à valeurs complexes, elle est dense dans $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$.*

Corollaire 5.0.4.3. *Pour tout n, $K \subset \mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n, \overline{z_1}, \dots, \overline{z_n}]$ est dense. En particulier, $\mathbb{C}\left[e^{i\theta}, e^{-i\theta}\right]$ est dense dans $\mathcal{C}(S^1,\mathbb{C})$.*

6 Opérateurs Linéaires Bornés

6.1 Définitions et Duéalité

Définition 6.1.1. *Soient X, Y des $\mathbb{K}$ ev normés avec $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.*

- *$u : X \to Y$ est un opérateur linéaire borné lorsque u est linéaire et qu'il est $M \in [0, \infty[$ tel que pour tout $x \in X$, $\|u(x)\|_Y \leq M \|x\|_X$.*
- *On note $L(X,Y)$ l'ev des opérateurs linéaires bornés $X \to Y$.*
- *$L(X,Y)$ est normé par la norme d'opérateur, et a une structure d'algèbre.*

Lemme 6.1.1. *Pour u linéaire, on a équivalence entre :*

1. *$u \in L(X,Y)$*
2. *u est Lipschitz*
3. *u est uniformément continue*
4. *u est continue*
5. *u est continue en 0.*

Lemme 6.1.2. *Si Y est un Banach, $L(X,Y)$ est un Banach.*

Définition 6.1.2. *Si X est un $\mathbb{K}$-Banach, $L(X,\mathbb{K})$ est appelé dual de X, noté $X^{'}$ ou $X^{\star}$.*

Théorème 6.1.3. *Si $p \in [1, \infty)$ et $q = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}$ est le conjugué de Hölder de p, alors :*

$$\Phi : \updownarrow^q \to (\updownarrow^p)^{'}, y \mapsto \left(x \mapsto \sum_n x_n y_n\right)$$

est une bijection linéaire isométrique : $(\updownarrow^p)^{'}$ est isomorphe à $\updownarrow^q$.

Lemme 6.1.4. *Une forme linéaire est continue ssi son noyau est fermé.*

6.2 Banach-Steinhaus

Théorème 6.2.1. *Si X est un Banach, et Y un evn, alors pour tout $A \subset L(X, Y)$, la bronitude ponctuelle est équivalente à la bornitude uniforme :*

$$\forall x \in X, \sup_{u \in A} \|u(x)\|_Y < \infty \Leftrightarrow \sup_{u \in A} \|u\|_{L(X,Y)} < \infty$$

Corollaire 6.2.1.1. *Soit u_n dans $L(X, Y)$, où X est un Banach et Y un evn. La convergence ponctuelle entraîne la continuité de la limite.*

6.3 Hahn-Banach

Théorème 6.3.1. *Soit $X \subset \tilde{X}$ un sous-espace d'un evn sur $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Soit $u \in L(X, \mathbb{K})$ une forme linéaire. Alors il existe $\tilde{u} \in L(\tilde{X}, \mathbb{K})$ telle que $\tilde{u}_{|X} = u$ et $\|\tilde{u}\| = \|u\|$.*

Corollaire 6.3.1.1. *Si X est un Banach, et $X^{''}$ est sont bidual, l'injection canonique $\iota : X \to X^{''}$ est une isométrie linéaire : $\|\iota(x)\| = \|x\|$.*

Corollaire 6.3.1.2. *L'application $\Phi : \updownarrow^1 \to (\updownarrow^\infty)^{'}$, $\Phi(y)(x) = \sum_n x_n y_n$ est une isométrie linéaire non surjective. En d'autres termes :*

$$\updownarrow^1 \subsetneq (\updownarrow^\infty)^{'} = \left(l^1\right)^{''}$$

6.4 Banach-Schauder

Théorème 6.4.1 (de Banach-Schauder ou de l'application ouverte)**.** *Si X et Y sont des Banach et si $u \in L(X, Y)$ est surjective, alors u est une application ouverte.*

Corollaire 6.4.1.1.

- ***(inverse continu)** : Si X et Y de Banach et $u \in L(X, Y)$ est bijective, alors $u^{-1} \in L(Y, X)$. On parle de Théorème d'Isomorphisme de Banach.*
- ***(équivalence des normes)** : Si $\|\cdot\|, \|\cdot\|^{'}$ sont deux normes qui font d'un même espace vectoriel normé X un espace de Banach. S'il existe $c \in (0, \infty)$ telle que $\|\cdot\| \leq c \|\cdot\|^{'}$ alors il existe $C \in (0, \infty)$ telle que $\|\cdot\|^{'} \leq C \|\cdot\|$.*
- ***(théorème du graphe fermé)** : Si X et Y sont deux Banach et $u : X \to Y$ est linéaire, alors $u \in L(X, Y)$ si et seulement si son graphe est fermé dans $X \times Y$.*
- ***(structure des Banach séparables)** : tout Banach séparable est isomorphe à quotient de $\updownarrow^1$ par un sous-espace fermé.*

6.5 Algèbres de Banach, Rayon Spectral, Inverse

Définition 6.5.1. *Si X est un Banach, on définit l'espace vectoriel $L(X)$ normé par $|||u||| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$. Le produit naturel $uv = u \circ v$ en fait une algèbre de Banach : $|||uv||| \leq |||u|||\,|||v|||$. Le rayon spectral de $u \in L(X)$ est $\rho(u) = \lim_{n\to\infty} |||u^n|||^{1/n} \leq |||u|||$.*

Remarque 6.5.0.1.

- *Lemme de Fekete : Si a_n est sous-additive, $\lim_n \frac{1}{n} a_n = \inf_n \frac{1}{n} a_n$. La formule de ρ fait sens en prenant $a_n = \log |||u^n|||$.*
- *Le rayon spectral est inchangé avec une norme équivalente.*
- *On généralise les algèbres de matrices à la dimension infinie.*
- *En dimension finie, $L(X)$ est isomorphe à $\mathcal{M}_n$ et le rayon spectral est égal au maximum des modules des valeurs propres par décomposition de Jordan.*
- *Lorsque X est de dimension infinie, il n'y a pas vraiment d'analogue à la décomposition de Jordan. L'équation aux valeurs propres n'est pas une bonne manière de définir le spectre des opérateurs et on définit plutôt :*

  $$spec(u) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid u - \lambda \mathrm{Id} \text{ n'est pas inversible à inverse continu}\}$$

  Alors, $\rho(u) = \sup \{|\lambda \mid \lambda \in spec(u)|\}$.

Théorème 6.5.1. *Soit X un Banach, et $u \in L(X)$.*

1. *Si $\rho(u) < 1$, alors* $\mathrm{Id} - u$ *est inversible dans $L(X)$ et*

$$(\mathrm{Id} - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$$

2. *Si u est inversible et $|||v||| \leq \left|\left|\left|u^{-1}\right|\right|\right|^{-1}$ alors $u - v$ est inversible dans $L(X)$ et :*

$$(u - v)^{-1} = \left(\mathrm{Id} - u^{-1}v\right)^{-1} u^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(u^{-1}v\right)^n u^{-1}$$

3. *L'ensemble des $u \in L(X)$ inversibles (groupe linéaire) est un ouvert de $L(X)$.*

6.6 Intégrale de Riemann pour les fonctions de la variable réelle à valeurs dans un Banach

Théorème 6.6.1. *Soit X un Banach, $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On note $\mathcal{A}([a, b], X) \subset \mathcal{C}([a, b], X)$ l'ensemble des fonctions affines par morceaux. C'est un sev de $\mathcal{C}([a, b], X)$ Il existe une unique application liénaire continue $I : \mathcal{C}([a, b]) \to X$ telle que pour tout fonction $f \in \mathcal{A}([a, b], X)$ affine par morceaux associée à une subdivision $a = a_0 < \ldots < a_n = b$ et à des valeurs $f_0, \ldots, f_n \in X$:*

$$I(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \frac{f_i + f_{i+1}}{2}$$

On note : $\int\limits_a^b = I(f)$. De plus pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b], X)$:

$$\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$$