

Imagerie 3D — Ray Tracing

Cours TalENS n°1

Matthieu Boyer & Clément Allard

16 Novembre 2024



Introduction

1 Faire briller un chameau de mille feux ?

1.1 La lumière, kéazko ?

Qu'est ce que la lumière ? Comment se propage-t-elle ? Voilà un débat qui a enflammé les derniers siècles. La conclusion de ces débats fut que la lumière se comporte comme à la fois un ensemble de photons mais également comme un onde (phénomène mis en évidence par Louis DE BROGLIE en 1924) : on appelle ceci la dualité onde-corpuscule. Posons en premier temps la définition d'une onde :

Définition 1.1: Onde

Une onde est la propagation d'une perturbation de proche en proche avec transfert d'énergie

Dans le cadre du modèle de l'optique géométrique, on vient étudier le comportement de la lumière d'un point de vue simplifié, en introduisant la notion de rayon lumineux.

Définition 1.2: Rayon Lumineux

On définit un rayon lumineux comme une courbe de l'espace selon laquelle se propage l'énergie lumineuse (véhiculée par l'onde électromagnétique).

On représentera donc la lumière par des courbes fléchées. Notons qu'*a priori*, ce qu'est la lumière ne donne pas d'information sur la forme de ces courbes.

Remarque 1.1

D'un point de vue expérimental, la modélisation de la lumière par des rayons lumineux fonctionne bien (dans la limite d'objets assez grands devant la longueur d'onde de l'onde, pour ne pas avoir de diffraction). Il n'y a diffraction que dans le cas où la taille de l'objet est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde du rayon lumineux ($< 1 \mu\text{m}$ pour les rayons visibles).

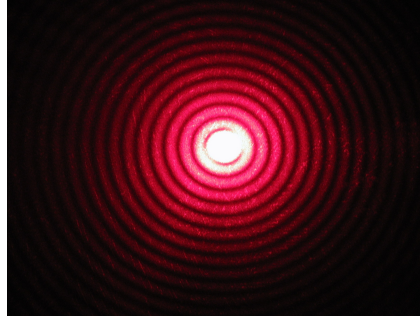


FIGURE 1 – Illustration du phénomène de diffraction

Nous avons à présent un modèle pour la lumière, et nous allons pouvoir étudier sa propagation.

1.2 Mille feux et mille couleurs

On a déjà vu qu'à la lumière on pouvait associer une onde. Regardons un peu plus en détail une grandeur caractéristique de ce comportement ondulatoire :

Définition 1.3: Longueur d'onde

On appelle longueur d'onde d'une onde sa période spatiale λ , c'est à dire le plus petit réel non nul qui vérifie

$$\forall x, s(x) = s(x + \lambda)$$

Remarque 1.2: Couleur

En pratique, on peut associer à chaque longueur d'onde une couleur, comme le montre le spectre ci-dessous :

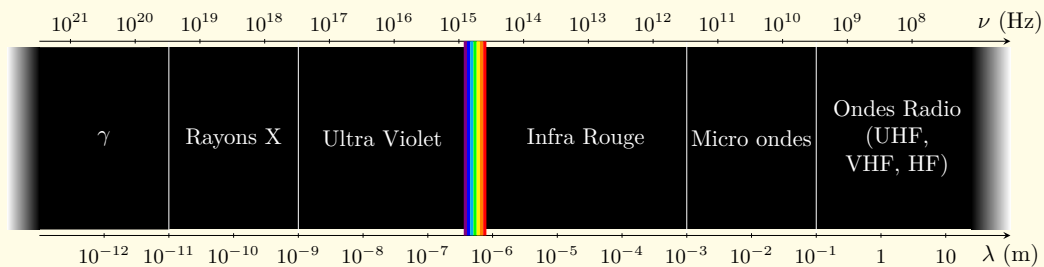


FIGURE 2 – Spectre électromagnétique du visible

2 Comment un écran voit-il un chameau ?

2.1 Propagation de la lumière

Étudions la propagation de la lumière dans certains milieux que nous allons définir ci-dessous.

Définition 2.1: MTHI - Milieux Transparents Homogènes Isotropes

On s'intéresse à des milieux qui sont :

- Transparents : l'énergie lumineuse n'est pas absorbée par le milieu ;
- Homogènes : les propriétés du milieu ne dépendent pas du point choisi ;
- Isotropes : les propriétés du milieu ne dépendent pas de la direction du rayon lumineux.

Définition 2.2: Dioptre

On appelle dioptre l'interface entre deux milieux

Cet ensemble de milieux regroupe par exemple le vide, l'air, l'eau ou bien le verre. On peut se demander à quelle vitesse se propagent les rayons lumineux dans notre milieu, ce qui nous amène à introduire la notion d'indice optique :

Définition 2.3: Indice optique

On définit l'indice optique n de la manière suivante

$$n = \frac{c}{v_\varphi}$$

où $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ est la vitesse de la lumière dans le vide et v_φ est la vitesse de propagation de la lumière dans notre milieu.

Exemple 2.1.1. L'indice optique du vide vaut 1, celui de l'air 1.0003, celui de l'eau 1.33 et le verre autour de 1.5.

Remarque 2.1: Lien période - longueur d'onde

On a ici

$$v_\varphi = \frac{\lambda}{T}$$

où T est la période temporelle de l'onde

Théorème 2.1: Propagation de la lumière dans les MTHI

- Les rayons lumineux sont des droites ;
- Les rayons lumineux se propagent indépendamment entre eux.

Démonstration. On prouvera un de ces points ultérieurement. ■

Proposition 2.1: Droite Paramétrée

Une droite de l'espace euclidien \mathbb{R}^n peut être vue comme un vecteur de norme 1 $v \in \mathbb{R}^n$ appelé vecteur directeur associé à un point $p \in \mathbb{R}^n$ par lequel elle passe.

Un des principes fondamentaux de la propagation de la lumière dans les MTHI est le suivant :

Théorème 2.2: Principe du retour inverse de la lumière

Le trajet de la lumière ne dépend pas du sens de parcours

Démonstration. Ceci s'illustre car le milieu est homogène et isotrope. ■

2.2 Principe du Ray Tracing

Considérons une lampe qui éclaire notre chameau. On va s'intéresser à la manière dont un observateur extérieur peut voir le chameau. Un observateur extérieur ne voit une surface que si celle-ci réfléchit la lumière vers son œil.

L'idée naïve est de prendre notre source lumineuse, de déduire la marche d'un rayon lumineux. Le problème ici est qu'on doit tracer la marche d'un grand nombre de rayons pour avoir une image de bonne résolution, sachant que la plupart des rayons n'atteindront jamais l'observateur ! Pour nous sauver, le principe de retour inverse de la lumière vient à notre rescousse ! En effet, il suffit de

tracer les rayons dirigés de l'œil vers le chameau, et ensuite voir si le rayon intercepte notre source lumineuse. L'avantage : on peut se restreindre à un nombre de rayons plus limité, en ne prenant que ceux qui vont entrer dans le champ de vision de l'observateur et économisant énormément de puissance de calcul (ce qui est nécessaire pour la fluidité d'un jeu vidéo par exemple).

Donc, pour calculer la répartition de lumière sur l'écran (et donc la couleur de chaque pixel), il nous reste à :

1. Trouver comment la trajectoire d'un rayon est modifiée en rencontrant un objet.
2. Trouver comment la couleur d'un rayon est modifiée en rencontrant un objet.
3. Trouver comment modéliser un objet et calculer son intersection avec des rayons lumineux.

3 Implémentation pratique

3.1 Comment prédire la trajectoire de la lumière ?

Une règle fondamentale permet de prédire la trajectoire de la lumière :

Théorème 3.1: Principe de Fermat

La lumière se propage en minimisant son temps de parcours.

Remarque 3.1

Ce principe n'est pas exclusif à la lumière, et par exemple est aussi vrai pour le son (et généralement tout comportement ondulatoire) : on peut donc faire des équivalents de ray tracing sur du son ou autres.

En notant une distance AB , on a :

$$\Delta t = \frac{AB}{v_\varphi} = \frac{nAB}{c}$$

On note $(AB) = nAB$ le chemin optique. Le principe de Fermat s'écrit de manière équivalente en la minimisation du chemin optique.

Remarque 3.2

Dans un milieu d'indice constant, la minimisation du chemin optique est équivalente à celle de la distance entre deux points. On sait que le chemin le plus court entre deux points est la ligne droite : on retrouve que dans un MTHI, les rayons lumineux sont des droites.

Ce principe permet d'intuiter les lois dites de Snell-Descartes :

Théorème 3.2: Lois de Snell-Descartes

À l'interface entre deux milieux d'indice optique n_1 et n_2 , la propagation d'un rayon lumineux en provenance du milieu 1 se fait selon les lois suivantes :

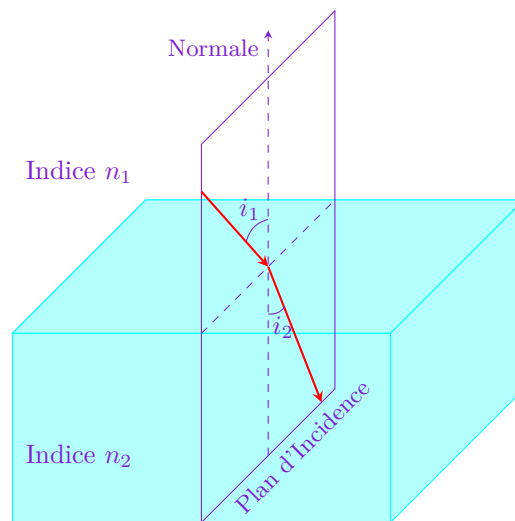
- **Plan d'incidence** : Il existe un rayon réfléchi (qui reste dans le milieu 1) et un rayon réfracté (qui se propage dans le milieu 2) qui sont tous les deux situés dans le plan formé par le rayon incident et la normale au dioptré.
- **Réfraction** : L'angle i_2 de sortie dans le milieu 2 vérifie

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$

- **Réflexion** : Son angle i'_1 de réflexion dans le milieu 1 est tel que la normale au milieu au point d'incidence est la bissectrice de l'angle $i_1 + i'_1$.

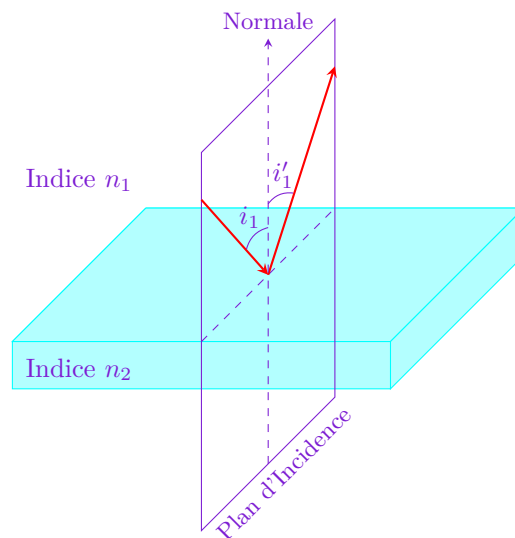
Loi de la Réfraction :

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$



Loi de la Réflexion :

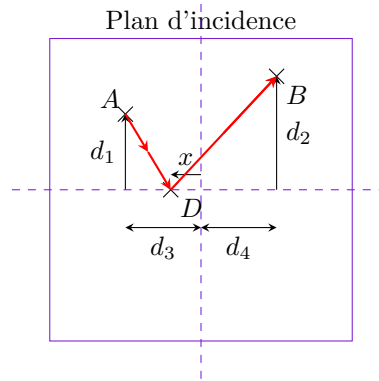
$$i_1 = -i'_1$$



Démonstration. • **Plan d'incidence** : Soient deux points dans le plan d'incidence. Pour le cas de la réfraction, le rayon de Snell-Descartes minimise la durée de parcours totale comparé à un rayon qui ne serait pas dans le plan d'incidence. Pour la réflexion, c'est la même chose sauf qu'on a comme contrainte que le rayon passe par le dioptré.

- **Réflexion** : On sait que nos rayons sont dans le plan d'incidence. On doit minimiser la distance

entre deux points A et B avec comme condition le fait qu'on passe par le dioptré :



On doit donc minimiser (étant donné que l'indice optique est constant, minimiser le temps revient à minimiser la distance)

$$d(x) = \sqrt{d_1^2 + (d_3 + x)^2} + \sqrt{d_2^2 + (d_4 - x)^2}$$

En dérivant et cherchant les extrema (on annule la dérivée), on trouve que $i_1 = i'_1$

- **Réfraction** : Principe analogue à la réflexion.

■

Nous avons à présent un moyen de prédire la trajectoire des rayons lumineux à l'aide de la connaissance des indices optiques.

Remarque 3.3

Pour un objet suffisamment agréable (donc modélisable par une fonction mathématique simple $z = f(x, y)$), la normale au point (x, y, z) est définie par $(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1)$

On introduit un opérateur simple qui va nous servir à calculer la normale à une surface :

Définition 3.1: Produit Vectoriel

Si $u, v \in \mathbb{R}^3$, on définit le produit vectoriel $u \times v$ de u et v comme le vecteur orthogonal à u et v , de norme $\|u\| \cdot \|v\| \cdot \sin(\angle(u, v))$ et orienté selon la règle de la main droite :

$$u \times v = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

Proposition 3.1: Propriétés

On a :

- $u \times v = -v \times u$
- $u \times u = 0$

Remarque 3.4

Il est impossible de définir des opérateurs similaires aux produits vectoriels en dimensions supérieures. Sauf en dimension 7.

Puisqu'on n'a ici que des triangles dont on connaît les trois côtés, on peut aisément trouver la normale en tout point appartenant à la face (et on peut aisément trouver la face atteinte par un rayon par une méthode qu'on décrira plus tard) :

Proposition 3.2: Normale à un Triangle

Si $T = (i, j, k)$ est une face d'une triangulation de sommets x_i, x_j, x_k , alors la normale à l'objet en tout point de la face T est définie par :

$$(x_j - x_i) \times (x_k - x_i)$$

Il ne nous reste donc qu'à savoir comment appliquer les lois de Snell-Descartes à un rayon lumineux, et donc, savoir comment représenter un rayon lumineux. Cette représentation simple nous amène à la reformulation des lois de Snell-Descartes :

Proposition 3.3: Lois de Snell-Descartes Vectorielles

On se donne \vec{l} un vecteur directeur de rayon de lumière, \vec{n} la normale à la surface au point où elle est atteinte. On garde les notations de 3.2. On a :

Réfraction On a :

$$\vec{v}_{réfracté} = \frac{n_1}{n_2} \vec{l} + \left(\frac{n_1}{n_2} \cos i_1 - \cos i_2 \right) \vec{n} \quad (1)$$

Réflexion On a :

$$\vec{v}_{réfléchi} = \vec{l} + 2 \cos i_1 \vec{n} \quad (2)$$

Démonstration. Par le calcul, on vérifie que les vecteurs $\vec{v}_{réfléchi}$ et $\vec{v}_{réfracté}$ conviennent. ■

En associant à chaque droite une intensité lumineuse et une couleur, on a une modélisation parfaite d'un rayon lumineux.

3.2 La puissance

Le modèle de l'optique géométrique ne détaille pas comment la puissance véhiculée par les rayons lumineux évolue après passage dans un dioptré. Pour y remédier, on définit deux grandeurs :

Définition 3.2: Coefficients de puissance

Coefficient en réflexion On définit le coefficient de réflexion en puissance R comme le rapport de la puissance véhiculée par l'onde réfléchie sur celle de l'onde incidente.

Coefficient en transmission On définit le coefficient de transmission en puissance T comme le rapport de la puissance véhiculée par l'onde réfractée sur celle de l'onde incidente.

Remarque 3.5: Conservation de la puissance ?

Un objet opaque a un coefficient de transmission nul. Dans un MTHI, il n'y a pas d'absorption de la lumière donc $A = 0$ et $R + T = 1$ (ce qui traduit la conservation de la puissance). Dans le cas contraire, par exemple pour un objet opaque, on a $R + T < 1$.

En pratique, on peut

Il suffit donc de savoir la direction initiale d'un rayon et les représentations de tous les objets dans l'environnement pour pouvoir calculer la trajectoire complète d'un rayon.

3.3 Le Chameau et l'Espace

On doit faire face à deux contraintes majeures : l'espace et le temps. En effet, on doit effectuer les calculs de lumière 60 fois par seconde, dans une limite de 8Go de mémoire vive, pour éviter que le jeu ne crashe. Par ailleurs, puisque peu d'objets réels peuvent être définis par une fonction mathématique simple, afin d'effectuer les calculs sans encombre, on va faire une supposition assez violente, celle que toutes les surfaces qu'on va considérer sont suffisamment régulières. En particulier, on va supposer qu'on peut aisément les représenter par des triangulations (ou *mesh* en anglais).

FIGURE 3 – Triangulation d'un Chameau

Définition 3.3: Triangulation 3D

Une triangulation d'un objet est un ensemble $\mathcal{V} = \llbracket 1, n \rrbracket$ de sommets ($x_i \in \mathbb{R}^3$ pour $i \in \mathcal{V}$), et un ensemble $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}^{3*m}$ de triangles appelés faces.

Ceci nous permet de définir un objet en ne connaissant qu'un nombre fini de point. Ceci ne change rien en réalité puisqu'on reste limité par la précision des calculs sur les nombres flottants (à virgule).

Remarque 3.6

Formellement (plus ou moins), une triangulation est un complexe simplicial (ensemble de triangles) homéomorphe (qui peut être déformé sans créer de trous ni fermer de trous) à la variété (l'objet).

Puisqu'on sait calculer, en tout point d'un objet, la normale et appliquer les lois de Snell-Descartes à notre représentation par vecteur directeur, il ne nous reste plus qu'à savoir calculer quand un rayon va intersecter un objet :

On suppose donné un rayon (paramétré par t) $P(t) = O + t \cdot D$ et on cherche un t_i tel que $P(t_i) \in F = (P_0, P_1, P_2)$. On note N la normale du triangle F . On calcule d'abord le point d'intersection entre le rayon et le plan qui contient le triangle :

$$t_{intersect} = \frac{(d - N \cdot O)}{N \cdot D}$$

On vérifie alors si le point $I = P(t_i)$ obtenu appartient au triangle. Pour cela on calcule les coordonnées dites barycentrique β_i du point (i.e. $I = \beta_0 P_0 + \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2$) :

$$\beta_i = \|(P_{i+2} - P_{i+1}) \times (I - P_{i+1})\| / \|N\|$$

Alors I est dans le triangle si et seulement si les trois β_i sont entre 0 et 1.

Pour finir, on a obtenu un algorithme de Ray Tracing : la couleur en un point est donnée par :

Algorithme 1 Ray Tracing

```
function ray_cast(r, scène, profondeur)
  if profondeur > profondeur_max then
    couleur ← noir
  else
    if intersection(r, scène) then
      p ← point_intersection(r, scène)
      u ← réfléchi(r, p)
      v ← réfracté(r, p)
      couleur ←  $\begin{pmatrix} k_R \times \text{ray\_cast}(u, \text{scène}, \text{profondeur} + 1) \\ + k_T \times \text{ray\_cast}(v, \text{scène}, \text{profondeur} + 1) \end{pmatrix}$ 
    end if
  end if
end function
```

Dans la vraie vie, pour se faciliter la vie, on ne va pas tester tous les points d'intersection : si on en a trouvé un on s'arrête, et on va séparer l'espace en plusieurs parties pour restreindre les objets qui pourraient potentiellement être atteints. Toutefois, les algorithmes qui effectuent ces répartitions sont un peu trop complexes pour être détaillés ici. Vous pouvez vous renseigner en cherchant les constructions de *BVH* et des *USS*, *Quadtree/Octree*, *kd-trees*, *BSP-trees*.