

Lambda-Calcul et Catégories

Paul-André Mellies

24 septembre 2024



Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Introduction Historique	1
1.2	Notion de Catégorie : Premiers Exemples	2
2	Catégories Cartésiennes	4
3	TD 1	6
3.1	Catégories et Foncteurs	6
3.2	Catégories Cartésiennes	6
3.2.1	Apparitions et Variables Libres	7

1 Introduction

1.1 Introduction Historique

Le λ -calcul a été introduit dans les années 1930 par Church. Il est en lien avec des questions de linguistique, de logique et de calculabilité.

Définition 1.1 Le λ -calcul est un langage de preuves pour une logique intuitionniste minimale (ou pour la théorie simple des types).

Le λ -calcul non typé a la puissance des machines de Turing.

Définition 1.2 Les catégories sont des structures algébriques (parfois appelées monoïdes à plusieurs objets)

Historiquement, les catégories ont été introduites pour la topologie algébriques dans les années 1940 avec les travaux de Eilenberg et Maclane. Leur objectif était de comprendre les propriétés fondamentales des espaces en s'intéressant aux morphismes entre espaces (les fonctions continues).

Il y a une connexion forte au niveau de la théorie des preuves entre λ -calcul et théorie, qui est très similaire à ce qui s'était passé lors de la définition des algèbres de Boole. Dans ce deuxième cas, Boole montre qu'on peut mettre un

ordre partiel sur les formules de la logique classique :

$$\varphi \leq \Psi \text{ si et seulement si } \varphi \Rightarrow \Psi$$

Une algèbre de Boole $(A, \leq, \wedge, \vee, \neg, \top, \perp)$ est un ensemble ordonné A, \leq muni de fonctions préservant l'ordre $\wedge, \vee : A \times A \rightarrow A$:

$$\varphi_1 \leq \Psi_1 \wedge \varphi_2 \leq \Psi_2 \implies \varphi_1 \wedge \varphi_2 \leq \Psi_1 \wedge \Psi_2, \varphi_1 \vee \varphi_2 \leq \Psi_1 \vee \Psi_2$$

et d'une fonction inversant l'ordre $\neg : A \times A$:

$$\varphi \leq \Psi \implies \neg \Psi \leq \neg \varphi$$

vérifiant un certain nombre d'axiomes :

- Associativité :

$$\begin{aligned} (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3 &= \varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \\ (\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3 &= \varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3) \end{aligned}$$

- Neutralité :

$$\begin{aligned} \varphi \wedge \top &= \top \wedge \varphi = \varphi \\ \varphi \vee \perp &= \perp \vee \varphi = \varphi \end{aligned}$$

- Commutativité :

$$\varphi \wedge \Psi = \Psi \wedge \varphi, \varphi \vee \Psi = \Psi \vee \varphi$$

- Distributivité :

$$\begin{aligned} \varphi \wedge (\Psi_1 \vee \Psi_2) &= (\varphi \wedge \Psi_1) \vee (\varphi \wedge \Psi_2) \\ \varphi \vee (\Psi_1 \wedge \Psi_2) &= (\varphi \vee \Psi_1) \wedge (\varphi \vee \Psi_2) \\ \neg(\varphi \wedge \Psi) &= \neg \varphi \vee \neg \Psi, \neg \top = \perp \end{aligned}$$

- Idempotence :

$$\begin{aligned} \varphi &= \neg \neg \varphi \\ \varphi \wedge \varphi &= \varphi, \varphi \vee \varphi = \varphi \end{aligned}$$

Dans une algèbre de Boole, $\varphi \wedge \psi$ est le plus grand minorant de φ et de ψ et $\varphi \vee \psi$ est le plus petit majorant de φ et ψ

R On peut définir l'implication dans les algèbres de Boole comme $\varphi \implies \psi = \neg \varphi \vee \psi$

On va passer du système des algèbres de Boole ($\varphi \leq \psi$ s'il existe une preuve que φ implique ψ) au système de catégories comme proposé par Lambek.

Définition 1.3 On peut voir une catégorie comme un graphe dont les noeuds sont appelés objets et les arêtes sont appelées morphismes, maps ou flèches. On peut composer les arêtes d'une catégorie, comme pour se déplacer sur le graphe.

Ici on considère une catégorie dont les objets sont des formules logiques, et les morphismes sont des preuves d'implication. Il y a donc des liens très forts entre les catégories obtenues avec des formules et des preuves et celles obtenues par des types et des programmes fonctionnels entre les types. On va ici étudier les catégories à travers leurs représentations : on peut mieux comprendre une catégorie en la représentant comme une famille d'actions au moyen d'un foncteur.

1.2 Notion de Catégorie : Premiers Exemples

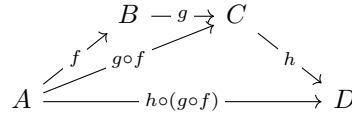
Définition 1.4 — Catégorie. Une *catégorie* est décrite par les données suivantes :

- 0 Une classe ^a d'objets (les noeuds d'un graphe). On appelle les catégories dont les objets définissent un ensemble des *petites catégories*.

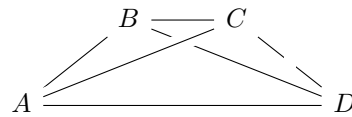
- 1 Pour toute paire d'objets A, B , un ensemble $\text{Hom}(A, B)$ de fonctions de A vers B appelées *morphismes* ou *maps*. On note ceci : $f : A \rightarrow B$ ou $A \xrightarrow{f} B$.
- 2 Pour tous objets A, B, C , une loi de composition $\circ_{A,B,C}$:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(B, C) \times \text{Hom}(A, B) &\rightarrow \text{Hom}(A, C) \\ (g, f) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

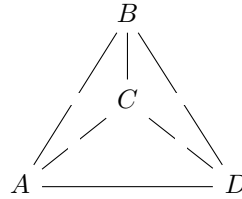
- 2 Pour tout objet A , une fonction identité $\text{id}_A \in \text{Hom}(A, A)$
- 3 Associativité :



On peut aussi voir la composition comme la couverture de l'aire entre les noeuds du graphe :



ou encore :



- 3 Neutralité : $f \circ \text{id}_A = f = \text{id}_B \circ f$.

a. propriété non incarnée par un ensemble

R Voir *nerf d'une catégorie* pour voir la notion d'ensemble simplicial.

■ **Exemple 1.1 PoSet** On considère d'abord les ensembles partiellement ordonnés comme des catégories :

Proposition 1.1 Chaque ensemble partiellement ordonné (A, \leq) définit une catégorie dont les objets sont des éléments a, b, c de A avec une map $a \rightarrow b$ si et seulement si $a \leq b$ et $\text{Hom}(a, b)$ un singleton si $a \leq b$ et \emptyset sinon.

Démonstration. On doit montrer l'existence d'une identité, d'une loi de composition, et les propriétés d'associativité et de neutralité :

- Par réflexivité de l'ordre : $a \leq a$ et donc $a \xrightarrow{\text{id}_a} a$ existe.
- Par transitivité : si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$ et on peut donc voir la transitivité comme une composition :
- L'associativité et la neutralité découlent immédiatement du fait que chaque $\text{Hom}(a, b)$ contient au plus un élément.

■

Réciproquement, une catégorie φ telle que chaque ensemble d'homomorphismes contienne au plus un élément est la même chose qu'un préordre :

$$\text{id} = g \circ f \quad a \leftarrow g \rightarrow b \quad f \circ g = \text{id}$$

Monoïde On considère maintenant les Monoïdes comme des catégories.

Proposition 1.2 Chaque monoïde (M, m, e) définit une catégorie notée \mathcal{BM} appelée sa suspension avec un seul objet $*$ tel que : $\text{Hom}(*, *) = M$ et $\circ : m, n \mapsto n \cdot m$.

L'associativité et la neutralité de la catégorie \mathcal{BM} sont des conséquences directes de l'associativité et de la neutralité du monoïde.

R En prenant $M = (\mathbb{N}, +, 0)$, la représentation ainsi obtenue des entiers a un lien direct avec la théorie de l'homotopie : c'est le groupe de Poincaré (ou groupe fondamental) d'un espace topologique pointé. Tout espace topologique définit une catégorie dont les objets sont les éléments de l'espace topologique et les flèches sont les chemins, à homotopie près.

Types On considère la catégorie cartésienne fermée des types simples comme objets et des λ -termes simplement typés (module $\beta\eta$ -équivalence) comme morphismes :

$$A \vdash x:A \vdash t:B \vdash E \vdash y:B \vdash u:C \vdash$$

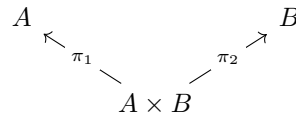
$\langle + + \rangle A \xrightarrow{x:A \vdash t:B} B \xrightarrow{y:B \vdash u:C} C$ flèche dessous ($x : A \vdash u[t/y] : C$) Cette catégorie jouera le rôle en théorie de la démonstration de l'algèbre de Boole des formules

■

2 Catégories Cartésiennes

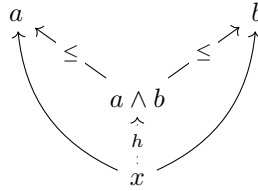
Définition 2.1 Un produit cartésien de deux objets A et B dans une catégorie φ est la donnée d'un triplet

$$(A \times B, \pi_1 : A \times B \rightarrow A, \pi_2 : A \times B \rightarrow B)$$



tel que pour toute paire de flèches : $X \xrightarrow{f} A$ et $X \xrightarrow{g} B$, il existe une et une seule flèche : $h : X \rightarrow A \times B$ telle que $f = \pi_1 \circ h, g = \pi_2 \circ h$. Pour $\varphi = Set$, par exemple, $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ et $\pi_1 : (a, b) \mapsto a$ et $h : x \mapsto (fx, gx)$.

■ **Exemple 2.1** Dans une catégorie définie par une relation d'ordre sur A, \leq , le produit cartésien de $a, b \in A$ c'est la même chose que la borne inférieure $a \wedge b$ de a et b définie comme le plus grand des minorants de a et b .



■

Définition 2.2 — Objet Terminal. Un objet terminal $\mathbb{1}$ dans une catégorie \mathcal{C} est un objet tel que pour tout objet A de \mathcal{C} , $\text{Hom}(A, \mathbb{1})$ est un singleton.

R Un objet initial est un objet terminal dans la catégorie duale (catégorie où on renverse les flèches).

Définition 2.3 Une catégorie cartésienne est une catégorie \mathcal{C} munie d'un produit cartésien $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$ et munie d'un objet terminal.

Définition 2.4 Une paire $\mathbb{I} \xrightarrow{f} \mathbb{J}$ et $\mathbb{J} \xrightarrow{g} \mathbb{I}$ telle que $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{J}}$ et $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{I}}$ est appelée *isomorphisme*

Proposition 2.1 Deux objets terminaux sont isomorphes. Deux produits cartésiens d'une même paire d'objets sont isomorphes.

Démonstration. Soit \mathbb{I}, \mathbb{J} deux objets terminaux d'une même catégorie. Il existe un unique morphisme f (resp. g) de \mathbb{I} (resp. \mathbb{J}) vers \mathbb{J} (resp. \mathbb{I}). De même, il existe un unique morphisme $\text{id}_{\mathbb{J}}$ de \mathbb{J} vers lui-même. Le diagramme ci-dessous commute donc :

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{J} & \\ \text{id}_{\mathbb{J}} \nearrow & & \nwarrow f \\ \mathbb{J} & \xrightarrow{g} & \mathbb{I} \end{array}$$

En particulier, on a bien $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{J}}$. Puisque la situation est symétrique, $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{I}}$ et donc deux objets terminaux sont isomorphes. Si on a deux produits cartésiens $A \times B, A \otimes B$ de deux objets A, B , alors :

$$\begin{array}{ccc} A \times B & & A \otimes B \\ \pi_{A,1} \searrow & \pi_{B,1} \searrow & \pi_{A,2} \searrow \\ & A & B \\ \pi_{A,1} \searrow & \pi_{B,1} \searrow & \pi_{A,2} \searrow \\ & A & B \end{array}$$

En particulier, par définition du produit cartésien, puisqu'il existe deux applications de $A \times B$ vers A, B , il existe une unique application $h_{1,2}$ de $A \times B$ vers $A \otimes B$ telle que $\pi_{A,2} \circ h_{1,2} = \pi_{A,1}$:

$$\begin{array}{ccc} A \times B & & A \otimes B \\ \pi_{A,1} \searrow & f \searrow & \pi_{B,1} \searrow \\ & A \otimes B & \\ \pi_{A,2} \searrow & & \pi_{B,2} \searrow \\ A & & B \end{array}$$

Il suffit donc de montrer que l'identité fait commuter le diagramme pour que avoir $f \circ g = \text{id}_{A \times B}$ et donc le résultat :

$$\begin{array}{ccccc} & & & & A \\ & & & & \uparrow \pi_{A,1} \\ & & & & \pi_{A,1} \\ & & & & \downarrow \pi_{A,2} \\ A \times B & \xrightarrow{f} & A \otimes B & \xrightarrow{g} & A \times B \\ & & \downarrow \pi_{B,2} & & \downarrow \pi_{B,1} \\ & & B & & B \end{array}$$

On aurait aussi pu construire une catégorie $\text{Span}(A, B)$:

- Les objets sont des triplets $\langle f, X, g \rangle$:

$$\begin{array}{ccc} A & & B \\ & \nwarrow f & \nearrow g \\ & X & \end{array}$$

- Les flèches sont des $\langle f, X, g \rangle \xrightarrow{h} \langle f', Y, g' \rangle$:

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ & \uparrow h & \\ A & & B \\ & \nwarrow & \nearrow \\ & X & \end{array}$$

Alors, $A \times B, \pi_1, \pi_2$ est un produit cartésien dans \mathcal{C} si et seulement si $\langle \pi_1, A \times B, \pi_2 \rangle$ est un objet terminal dans $\text{Span}(A, B)$. ■

3 TD 1

3.1 Catégories et Foncteurs

	Catégorie	Objets	Flèches
	SET	Ensembles	Fonctions
1. On a le tableau suivant :	TOP	Espaces Topologiques	Fonctions Continues
	VECT	Espaces Vectoriels	Applications Linéaires
	GRP	Groupes	Morphismes

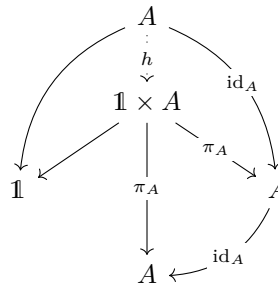
2. Un foncteur est un morphisme entre catégories.

3. La catégorie CAT est la catégorie dont les objets sont des catégories et les flèches sont des foncteurs

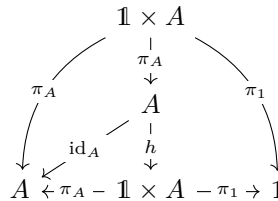
3.2 Catégories Cartésiennes

Question 3, 4, 5 Voir la preuve de 2.1.

Question 6 On a le diagramme commutatif suivant :

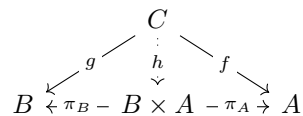


Donc $\pi_A \circ h = id_A$.

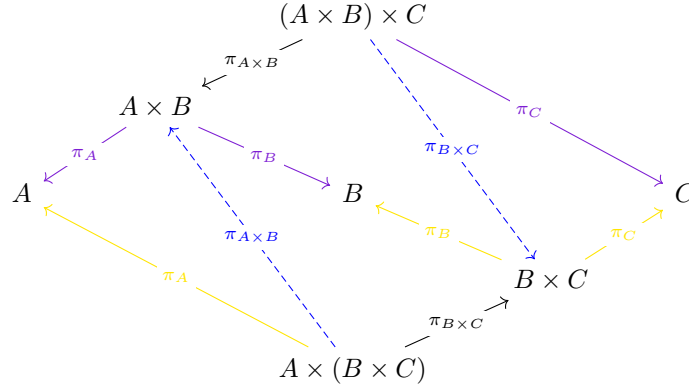


De même pour $A \times 1$, par symétrie. On peut par ailleurs procéder de même que pour les produits cartésiens pour montrer que $A \times 1 \simeq 1 \times A$.

Question 7 On montre que $B \times A$ vérifie les propriétés de produit cartésien pour A et B :



Question 8 On a le diagramme suivant :



On a donc un morphisme de $(A \times B) \times C \rightarrow B$ et un morphisme $(A \times B) \times C \rightarrow C$. Il existe donc un (unique) morphisme $(A \times B) \times C \rightarrow B \times C$ (faisant commuter le diagramme idoine). On a maintenant deux morphismes depuis $(A \times B) \times C$:

- un vers A
- un vers $B \times C$

On peut donc trouver un (unique) morphisme $h : (A \times B) \times C \rightarrow A \times (B \times C)$ (faisant toujours commuter le diagramme idoine). On construit de la même façon $\tilde{h} : A \times (B \times C) \rightarrow (A \times B) \times C$. On vérifie de façon similaire à la question précédente que $h \circ \tilde{h} = \text{id}$ et $\tilde{h} \circ h = \text{id}$. Donc $(A \times B) \times C \simeq A \times (B \times C)$.

$$\begin{array}{lcl} M & ::= & x \\ & & | \quad M \ N \\ & & | \quad \lambda x. M \end{array}$$

TABLE 1 – Termes du Lambda-Calcul Pur

La β -réduction :

$$(\lambda x. M) N \longrightarrow M[X := N]$$

L' η -expansion :

$$M \longrightarrow \lambda x. (Mx)$$

R Un λ -terme est considéré à renommage \equiv_α des variables liées :

$$\lambda x. \lambda y. x \equiv_\alpha \lambda z. \lambda y. z$$

3.2.1 Apparitions et Variables Libres

L'ensemble des occurrences d'un λ -terme M est défini par induction :

L'ensemble des variables libres d'un λ -terme M est défini par induction :

$$\begin{array}{ll} \text{occ}(x) &= \{\varepsilon\} \\ \text{occ}(MN) &= \{\varepsilon\} \cup \{1 \cdot o \mid o \in \text{occ}(M)\} \cup \{2 \cdot o \mid o \in \text{occ}(N)\} \\ \text{occ}(\lambda x. M) &= \{\varepsilon\} \cup \{1 \cdot o \mid o \in \text{occ}(M)\} \end{array}$$

TABLE 2 – Occurences d'un Lambda Terme

$$FV(x) = \{x\}$$

TABLE 3 – Ensemble des Variables Libres d'un Lambda Terme