TD Topo

Matthieu Boyer

23 octobre 2023

Table des matières

I TD3 **2**

1 Exercice 1 : Echauffement **2**
1.1 Question 1 . . . 2
1.1.1 Question a. . . . 2
1.1.2 Question b. . . . 2
1.2 Question 2 . . . 2
1.3 Question 3 . . . 2
1.4 Question 4 . . . 2
1.4.1 Question a. . . . 2
1.4.2 Question b. . . . 3
1.4.3 Question c. . . . 3
1.5 Question 5 . . . 3
1.5.1 Question a. . . . 3
1.5.2 Question b. . . . 3

2 Exercice 2 : Topologie Induite **3**
2.1 Question 1 . . . 3
2.2 Question 2 . . . 3
2.2.1 Question a. . . . 3
2.2.2 Question b. . . . 3
2.2.3 Question c. . . . 3

3 Exercice 3 : Séparation et espaces quotients **3**
3.1 Question 1 . . . 3
3.2 Question 2 . . . 3
3.3 Question 3 . . . 4
3.3.1 Question a. . . . 4
3.3.2 Question b. . . . 4

4 Exercice 4 : Lemme d'Urysohn **4**
4.1 Question 1 . . . 4
4.2 Question 2 . . . 4
4.3 Question 3 . . . 4
4.3.1 Question a. . . . 4
4.3.2 Question b. . . . 4

5 Exercice 5 : Quelques propriétés des espaces produits **4**
5.1 Question 1 . . . 4
5.2 Question 2 . . . 4
5.3 Question 3 . . . 5

6 **Exo 10 TD4/ TD5** 5
6.1 Question 1 5
6.2 Question 2 5
6.3 Question 3 5
6.4 Question 4 5
6.4.1 Question a. 5
6.4.2 Question b. 5
6.4.3 Question c. 6

II TD6 6

7 **Exercice 1** 6
7.1 Question 1 6
7.2 Question 2 6
7.3 Question 3 6
7.4 Question 4 6
7.5 Question 5 6
7.6 Question 6 6
7.7 Question 7 6

8 **Exercice 2** 6
8.1 Question 1 6
8.2 Question 2 6
8.3 Question 3 6

Première partie
TD3

1 Exercice 1 : Echauffement

1.1 Question 1

1.1.1 Question a.

Plus ou moins vrai, $f\ |_A$ est continue pour la topologie induite/trace

1.1.2 Question b.

Faux, il suffit de prendre la fonction sign qui n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ mais qui l'est sur $\mathbb{R}^{+*}$

1.2 Question 2

Vrai, les singletons sont ouverts

1.3 Question 3

Faux, les singletons ne sont pas ouverts.

1.4 Question 4

1.4.1 Question a.

On a $\pi\left([0,1[\right) = [0,1[$. Mais $[\cdot]^{-1}\left([0,1[\right) =]-1,1[$ qui est ouvert.

1.4.2 Question b.

On a $\pi(1) = 1$ et $\pi([0,1]) = [0,1]$. Or, ce segment contient un voisinage de 1 : 1. Donc c'est bien un voisinage de 1

1.4.3 Question c.

On ne peut pas séparer -1 et 1.

1.5 Question 5

1.5.1 Question a.

Faux : $0, -1$ n'est pas ouvert.

1.5.2 Question b.

Faux : 0 est ouvert.

2 Exercice 2 : Topologie Induite

2.1 Question 1

Oui bon ça va hein

2.2 Question 2

2.2.1 Question a.

La fonction j étant croissante de réciproque croissante pour $\subset$, c'est bien un homéomorphisme.

2.2.2 Question b.

$\overline{\{\omega\}} = Y$ et donc : $\{\{\omega\}\}$ est une base finie de Y.

2.2.3 Question c.

On a $\omega \in U \cap V$

3 Exercice 3 : Séparation et espaces quotients

3.1 Question 1

Si $(x, y) \in (X \times X)/\mathcal{R}$, on a U, V ouverts de $X/\mathcal{R}$ tels que :

$$x \in U, y \in V$$
$$U \cap V = \varnothing$$

Alors, $\{[t] \mid t \in U\}$ (de même pour V) est ouvert. Donc en particulier, $\mathcal{R}$ est fermé.

3.2 Question 2

Si $\mathcal{R}$ est fermée, alors si, $(x, y) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})/\mathcal{R}$ il existe des voisinages disjoints de x et y. Par ouverture de π on obtient bien la séparation de $X/\mathcal{R}$.

3.3 Question 3

3.3.1 Question a.

- ($i. \Rightarrow ii.$) On considère : $\|\cdot\| : S \mapsto \sup_{x \in S} d(x, F)$. Il est clair que cette application est positive et est nulle si et seulement si $\forall x \in S, x \in \overline{F} = F$ i.e. $S \subset F$. Par les propriétés de d, cette fonction définit bien une norme sur E/F en passant au quotient.
- ($ii. \Rightarrow iii.$) En particulier, E/F est métrisable donc est séparé.
- ($iii. \Rightarrow i.$) Ceci est une conséquence de la question 1.

3.3.2 Question b.

- ($\Leftarrow$) Si $F = \ker f$ est fermé. En particulier si $U \subset \Im f$ est ouvert, en quotientant par F, puisque E/F est normable, f est continue.
- ($\Rightarrow$) Si f est continue, il est clair que $\ker f$ est fermé.

4 Exercice 4 : Lemme d'Urysohn

4.1 Question 1

En prenant pour ouverts dans la définition d'un espace normal $f^{-1}\left([0, 1/3[\right)$ et $f^{-1}\left([2/3, 1[\right)$, on a bien le résultat.

4.2 Question 2

Si (X, d) est métrique, si F_0, F_1 sont fermés disjoints dans X. En particulier, en prenant un recouvrement d'ouverts le plus petit possible de F_0 et un de F_1, on a bien le résultat.

4.3 Question 3

4.3.1 Question a.

Déjà, il existe une bijection r de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{D}$. Ensuite, on peut définir par récurrence la famille G. On suppose que les r_k pour $k < n$ sont déjà définis.
On pose alors $U_n = F_0 \cup \bigcup_{k<n, r_k<r_n} \overline{G_{r_k}}$. C'est un fermé, inclus dans l'ouvert : $V_n = F_1^{\complement} \cap \bigcap_{k<n, r_k>r_n} G_{r_k}$.
Puisquee X est normal, il existe donc un ouvert G_{r_n} tel que : $U_n \subset G_{r_n}$ et $\overline{G_{r_n}} \subset V_n$.
On a bien défini une famille de fermés $(G_x)_{x \in \mathcal{D}}$ qui convient.

4.3.2 Question b.

Il est clair que f est bien définie, à valeurs dans $0, 1$. De plus, il est aussi clair que : $f\left(F_0\right) = 0$ puisque $\forall x \in F_0, x \in G_1$ et $x \in F_0$.
Ensuite, si $x \in F_1, x \notin G_1 \subset F_1^{\complement}$. Donc $f\left(F_1\right) = 1$.
Enfin, par densité des nombres dyadiques, il est clair que f est continue.

5 Exercice 5 : Quelques propriétés des espaces produits

5.1 Question 1

Bah oui. 'fin, c'est trivial quoi.

5.2 Question 2

Faites un effort svp.

5.3 Question 3

- ($\Leftarrow$) Si I est dénombrable, le résultat est direct en prenant pour métrique l'infimum des métriques
- ($\Rightarrow$) Sinon, si I n'est pas dénombrable, supposons qu'il y ait une métrique d qui induit la topologie produit sur X. En particulier, si on pose se donne une famille croissante C de parties finies de I, $O_{i,n} = \prod_{k \in C_i} B_{X_k}(x_k, 1/n)$, les $O_{i,n}$ sont ouverts donc sont des ouverts pour d. Mais alors, en faisant tendre i vers l'infini, on n'obtient plus des ouverts, ce qui contredit l'existence de d.

6 Exo 10 TD4/ TD5

6.1 Question 1

On peut appliquer la propriété universelle à $K = Y$, $f = j_x$. On dispose d'une unique fonction continue $\hat{f}$ telle que $\hat{f} o \iota_X = j_X$. On a alors de même une fonction continue $\hat{g}$ en inversant les rôles de $\hat{X}$ et Y. En appliquant la propriété universelle à $K = \hat{X}$ et $f = \iota_X$ on dispose d'une unique application continue telle que $\hat{h} o \iota_X = \iota_X$. Par unicité, $\hat{h} = \text{id}$. Comme $\hat{g} o \hat{f}$ convient aussi, on a bien le résultat.

6.2 Question 2

- ι_X est continue
- Soit x, y deux points distincts. $\{y\}$ est fermé car X est séparé. Puisque X est de Tychonoff, il existe $f : X \to [0,1]$ continue qui envoie x sur 0 et y sur 1. On applique la propriété universelle à f, pour $K = [0,1]$. On dispose de $\hat{f} : \hat{X} \to [0,1]$ continue telle que $f(\iota_X(x)) = 0$ et $f(\iota_X(y)) = 1$ donc ι_X est injective, et donc bijective sur son image.
- Soit $F \subset X$ un fermé. Soit $x \in X \setminus F$. Montrons que $\iota_X(x) \subset U \subset X \setminus \iota_X(F)$. Puisque X est de Tychonoff, il existe f de X dans $[0,1]$ continue telle que $f(x) = 0$ et $f^{-1}(F) = \{1\}$. Par propriété universelle, il existe $\hat{f}$ continue telle que $\hat{f} o \iota_X = f$. Remarquons alors que $\hat{f}^{-1}([0,1/2[)$ est un ouvert par continuité de $\hat{f}$. De plus, $\iota_X(x)$ est dans cet ouvert, et $\iota_X(F) \cap \hat{f}^{-1}([0,1/2[) = \varnothing$ d'où le résultat. Donc ι_X est ouverte et donc sa réciproque est continue. Finalement, on a bien le résultat.

6.3 Question 3

Théorème de Tychonoff

6.4 Question 4

6.4.1 Question a.

Si on a $I(x) = I(y)$, en particulier, leurs images par toute application continue de X dans $[0,1]$ sont égales. Donc en particulier, x et $\{y\}$ sont pas séparables et donc, puisque X est de Tychonoff, on a le résultat.

6.4.2 Question b.

Soit $U = \prod_{g \in C_X} O_g$ un ouvert avec $O_g = [0,1]$ sauf en $g_1, \ldots, g_n \in C_X$ où $O_{g_i} = U_i$ ouvert de $[0,1]$. On a alors :

$$\begin{aligned} I(x) \in U &\Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n,\ I(x)(g_i) \in U_i \\ &\Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n,\ g_i(x) \in U_i \end{aligned}$$

Ainsi : $I^{-1}(U) = \bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1}(U_i)$ qui est un ouvert par continuité de g_i.

6.4.3 Question c.

Si F est un fermé de X, $x \notin F$. Puisque X est de Tychonoff, il existe f de X dans $[0,1]$ continue telle que $f(x) = 0$ et $f^{-1}(F) = \{1\}$. Alors, on a $I(x)(f) = 0$ et $\forall y \in F,\ I(y)(f) = \{1\}$. On a donc, en particulier, $U \cap I(F) = \varnothing$ où $U = [0, 1/2[\times [0,1]^{C_X \setminus \{f\}}$ et donc I est ouverte.

Deuxième partie
TD6

7 Exercice 1

7.1 Question 1

Pas un espace métrique, le TD Man ce bâtard...

7.2 Question 2

Bah non, $1 - 1/n$ ne converge pas dans $]0,1[$. On prend $[0,1]$.

7.3 Question 3

Oui : fermé dans le complet C^0_B

7.4 Question 4

Non : pas un fermé

7.5 Question 5

Non, c_0 n'est pas fermé : $\overline{c_0} = l^{\inf}$ est complet

7.6 Question 6

Oui : preuve par cours.

7.7 Question 7

Non : c_0

8 Exercice 2

8.1 Question 1

La topologie induite explose sinon.

8.2 Question 2

Si $E = O_0 \cup O_1$: Il n'est pas connexe par arcs car $\bigcup_{\mathbb{N}}(\frac{1}{n})$ n'est pas dense dans $[0,1]$: on ne peut pas sortir de $(0,0)$.

8.3 Question 3