

Algèbre 1

Gaëtan Chenevier

15 novembre 2023



Table des matières

1	Ensembles Quotients	3
1.1	Partitions et Relations d'Equivalence	3
1.2	Passage au Quotient	3
1.3	Sections et systèmes de représentants	3
1.4	Lemme de Zorn	4
2	Généralités sur les Groupes	5
2.1	Exemples de Groupes	5
2.2	Morphismes	5
2.3	Groupes Cycliques et Monogènes	6
2.4	Théorème de Lagrange	6
2.5	Sous-groupes finis de k^\times et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$	7
2.6	Groupes Quotients	7
3	Groupes Abéliens de Type Fini	9
3.1	Caractères	9
3.2	Décomposition de Fourier finie	9
3.3	Structure des groupes abéliens finis	9
3.4	Existence	9
3.5	Exemple	9
3.6	Unicité	10
3.7	Groupes Abéliens de Type Fini	10
4	Groupe Symétrique et Dévissage	11
4.1	Actions de Groupes	11
4.2	Groupes Symétriques et Alternés	11
4.3	Les suites exactes	12
4.4	Dévissage de S_n	12
4.5	Commutateur et Groupes Dérivés	12
4.6	Dévissage en Produit Semi-Direct	13
5	Groupes et Symétries	14
5.1	Sous-groupes Finis de $O(2)$ et $SO(3)$	14
5.2	Le Groupe $SP(1)$	15
5.2.1	L'algèbre des quaternions de Hamilton	15
5.2.2	Le groupe $Sp(1)$	16
5.2.3	L'espace euclidien \mathbb{H}	16

1 Ensembles Quotients

1.1 Partitions et Relations d'Equivalence

Définition 1.1.1. Une partition d'un ensemble X est un ensemble de parties non vides de X de réunion disjointe X .

Définition 1.1.2. On appelle fibre d'une application $f : X \rightarrow Y$ en $y \in Y$ l'ensemble $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$. Il s'agit d'une partition de X indexée par Y . Toute partition de X s'obtient ainsi.

Définition 1.1.3. Une relation d'arité n sur un ensemble X est la donnée d'un ensemble $R \subseteq X^n$. Une relation binaire R i.e. une partie de $X \times X$ est dite d'équivalence si elle est réflexive, transitive et symétrique. On appelle classe de R -équivalence de x l'ensemble $[x]_R = \{y \in X \mid \{x, y\} \in R\}$

Proposition 1.1.1. Les classes d'équivalences d'une relation R sur X forment une partition de X .

Définition 1.1.4. Si R est une relation d'équivalence sur X , le sous-ensemble de $P(X)$ constitué des classes de R -équivalence est appelé ensemble quotient de X par R , noté X/R . L'application $\pi_R : X \rightarrow X/R, x \mapsto [x]_R$ est appelée projection canonique associée à R . C'est une surjection dont les fibres sont par définition les classes d'équivalences de R .

Exemple 1.1.1. On définit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble quotient de \mathbb{Z} pour la relation $n \mid b - a$. On note \bar{k} la classe de k .

1.2 Passage au Quotient

Théorème 1.2.1 (Propriété Universelle du Quotient). Soient $f : X \rightarrow Y$ une application et R une relation d'équivalence sur X . On suppose que f est constante sur chaque classe d'équivalence sur X . Alors, il existe une unique application $g : X/R \rightarrow Y$ telle que $g([x]_R) = f(x)$ pour tout $x \in X$, i.e. vérifiant $g \circ \pi_R = f$.

Démonstration. Par surjectivité de π_R , g est unique. De plus, si C est une classe de R -équivalence, il y a un sens à poser $g(C) = f(x)$ car C est une classe d'équivalence sur laquelle f est constante. ■

1.3 Sections et systèmes de représentants

Définition 1.3.1. Une section de $f : X \rightarrow Y$ est une application $s : Y \rightarrow X$ telle que $f \circ s = \text{id}_Y$

Proposition 1.3.1. f possède une section $\Rightarrow f$ est surjective

Définition 1.3.2 (Axiome du Choix). Pour tout ensemble X il existe une application $\tau : P(X) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow X$ telle que $\tau(E) \in E$ pour toute partie non vide E de X . On appelle τ fonction de choix sur X .

Proposition 1.3.2. Les propositions suivantes sont équivalentes à l'axiome du choix (donc fausses) :

1. Toute surjection admet une section.
2. Pour toute famille d'ensembles non vides $\{X_i\}_{i \in I}$, $\pi_{i \in I} X_i$ est non vide.

Définition 1.3.3. Un représentant d'une classe de R -équivalence d'un ensemble X est un élément de cette classe. Un système de représentants de (X, R) est la donnée d'une partie de X contenant un et un seul représentant de chaque classe de R -équivalence. C'est l'image d'une section de π_R .

Remarque 1.3.0.1. Ceci est également équivalent à 1.3.2

1.4 Lemme de Zorn

Définition 1.4.1. • *Une relation d'ordre sur un ensemble X est une relation binaire \leq réflexive, transitive et antisymétrique. On dit alors que X est ordonné.*

- *L'ordre \leq est total quand tous deux éléments de X sont comparables.*
- *On appelle majorant d'une partie Y de X , tout élément $x \in X$ tel que $y \leq x$ pour tout $y \in Y$. On parle de plus grand élément dans le cas $Y = X$.*
- *$x \in X$ est un élément maximal si le seul $y \in X$ tel que $y \leq x$ est x . Un plus grand élément est nécessairement maximal, et unique s'il existe.*
- *On appelle X inductif si tout sous-ensemble totalement ordonné admet un majorant.*
- *On appelle bon ordre un ordre pour lequel toute partie non vide admet un plus petit élément.*

Théorème 1.4.1 (Lemme de Zorn). *Un ensemble ordonné inductif possède au moins un élément maximal. Ceci est équivalent à l'axiome du choix 1.3.2.*

Corollaire 1.4.1.1. *Tout espace vectoriel possède une base.*

Corollaire 1.4.1.2 (Théorème de Zermelo). *Tout ensemble peut être muni d'un bon ordre.*

Démonstration. C'est équivalent à l'axiome du choix donc faux et les preuves prennent trois plombs. ■

2 Généralités sur les Groupes

2.1 Exemples de Groupes

Définition 2.1.1. Une loi de composition interne est une application $\star : X \times X \rightarrow X$.

Définition 2.1.2 (Groupe). Un groupe est un ensemble G muni d'une loi de composition associative, unifiée et inversible, i.e. :

1. $\forall (x, y, z) \in G, x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$
2. $\exists e \in G, \forall x \in G, e \star x = x \star e = x$.
3. $\forall x \in G, \exists y \in G, x \star y = y \star x = e$

Remarque 2.1.0.1. Le neutre est unique.

Exemple 2.1.1 (Groupe Symétrique). On note : $\mathfrak{S}_X = X^X$ le groupe muni de la loi \circ de composition des applications, appelé groupe symétrique de X , de neutre id_X . L'inverse d'une bijection σ est sa bijection réciproque σ^{-1} . On note $\mathfrak{S}_n = |1, n|^{1, n!}$ et alors $|\mathfrak{S}_n| = n!$.

Définition 2.1.3. Un groupe est dit abélien lorsque tous deux éléments commutent.

Définition 2.1.4. Une partie H d'un groupe G est un sous-groupe de G lorsque la loi induite par le produit dans G fait de H un groupe. On le notera ici $H \leq G$.

Exemple 2.1.2 (Groupes d'ordre n). Pour $n \geq 1$, on note μ_n le sous-groupe de \mathbb{C}^\times composé des racines n -ièmes de l'unité. C'est un sous-groupe d'ordre n . L'application $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mu_n, \bar{k} \mapsto e^{2ik\pi/n}$ est un isomorphisme de groupe.

Définition 2.1.5. Un anneau est un groupe abélien $(A, +)$ muni d'une loi associative unifiée et distributive sur $+$, notée \times . Il est dit commutatif lorsque la loi produit est commutative.

Définition 2.1.6. On note A^\times le groupe des inversibles du monoïde (A, \cdot) .

Proposition 2.1.1. La loi d'un groupe vérifie les propriétés de la loi produit usuelle sur \mathbb{R} .

Définition 2.1.7. On appelle groupe engendré par une partie X de G le plus petit sous groupe de G contenant X . C'est l'ensemble des produits de puissances d'éléments de X .

2.2 Morphismes

Définition 2.2.1. On appelle morphisme une application entre deux groupes qui préserve le produit. On note $\text{Hom}(G, G')$ l'ensemble des morphismes de G dans G' . Ce n'est à priori pas naturellement un groupe si G' n'est pas abélien.

On dit que G et G' sont isomorphes lorsqu'il existe un morphisme bijectif de l'un vers l'autre. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme. On note alors $G \simeq G'$.

Proposition 2.2.1 (Transport de Structure). Si G est un groupe, $\varphi : X \rightarrow G$ une bijection, il existe une unique loi de groupe sur X telle que φ soit un isomorphisme, à savoir $x \star y = \varphi^{-1}(\varphi(x)\varphi(y))$. On dit que la loi est déduite de celle de G par transport de structure via φ .

Définition 2.2.2. On appelle automorphisme de G un isomorphisme de G dans G . L'ensemble des automorphismes $\text{Aut}(G)$ est un sous groupe de S_G . On appelle automorphisme intérieur associé à $g \in G$ l'application : $h \in G \mapsto ghg^{-1}$.

Définition 2.2.3. On appelle noyau d'un morphisme $\ker(f) = f^{-1}(1) = \{g \in G \mid f(g) = 1\}$. C'est un sous-groupe de G .

Proposition 2.2.2. Si $f \in \text{Hom}(G, G') :$

1. $H \leq G \Rightarrow f(H) \leq G'$
2. $H \leq G' \Rightarrow f^{-1}(H) \leq G$ Avec \mathcal{A} l'ensemble des sous-groupes de G contenant $\ker f$ et \mathcal{B} celui des sous-groupes de G' inclus dans $\text{Im} f$, alors :

3. $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, H \mapsto f(H)$ est une bijection croissante.

Proposition 2.2.3. Les fibres non vides de f sont en bijection avec $\ker f$. En particulier :

- f injective $\Leftrightarrow \ker f = \{1\}$.
- Si G est fini, $|G| = |\operatorname{Im} f| |\ker f|$.

Théorème 2.2.1 (Cayley). Tout groupe d'ordre fini n est isomorphe à un sous-groupe de S_n .

Lemme 2.2.2. Si $\varphi : X \rightarrow Y$ est bijective, l'application $\varphi_{X,Y} : S_X \rightarrow S_Y, \sigma \mapsto \varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1}$ est un isomorphisme de groupes.

Définition 2.2.4. Un morphisme d'anneau est un morphisme des groupes additifs et des monoïdes multiplicatifs (en particulier, il envoie 1 sur 1).

2.3 Groupes Cycliques et Monogènes

Proposition 2.3.1. Les sous-groupes de \mathbb{Z} sont les $n\mathbb{Z}$.

Proposition 2.3.2. Si $g \in G$ est d'ordre fini n , alors $\langle g \rangle$ a exactement n éléments et est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Définition 2.3.1. Un groupe G est monogène s'il est engendré par un seul élément, appelé générateur. Il est cyclique s'il est fini.

Corollaire 2.3.0.1. Un groupe G est monogène infini si et seulement si il est isomorphe à \mathbb{Z} . Il est cyclique d'ordre $n \geq 1$ si et seulement si isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Proposition 2.3.3 (Générateurs d'un Groupe Cyclique). • Les générateurs de $\mathbb{Z}, +$ sont les $k \in \mathbb{Z}$ tels que $\mathbb{Z} = k\mathbb{Z}$, i.e. $k = \pm 1$.

- Pour $k \in \mathbb{Z}$, $G = \langle g \rangle$ un groupe cyclique d'ordre n , on a équivalence entre :
 1. $\langle g^k \rangle = G$
 2. $g \in \langle g^k \rangle$
 3. $\exists k' \in \mathbb{Z}, kk' = 1 \pmod n$
 4. $\bar{k} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$
 5. $k \wedge n = 1$

Corollaire 2.3.0.2. Un groupe cyclique d'ordre n a exactement $\varphi(n)$ générateurs.

Corollaire 2.3.0.3. Si G est cyclique d'ordre n : $\operatorname{Aut}(G) = \{g \mapsto g^k \mid k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\}$. On a alors un isomorphisme de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ dans $\operatorname{Aut}(G)$.

Remarque 2.3.0.1. Si $g \in G$ est d'ordre fini n , si $d \geq 1$, g^d est d'ordre fini $\frac{n}{n \wedge d}$.

Proposition 2.3.4. Si G est cyclique d'ordre n , $d \mapsto G_d = \{g^d \mid g \in G\}$ est une bijection de l'ensemble des diviseurs de n sur l'ensemble des sous-groupes de G .

Théorème 2.3.1 (Chinois). Soient $m, n \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux. L'application $\mathbb{Z} \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}), k \mapsto (k \pmod n, k \pmod m)$ définit un isomorphisme par passage au quotient de par la propriété universelle 1.2.1.

2.4 Théorème de Lagrange

Définition 2.4.1. Si A, B sont deux parties d'un groupe, $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$. Si $A = \{g\}$, on le note gB .

Lemme 2.4.1. $H \leq G \Leftrightarrow (H \neq \emptyset, HH = H, H^{-1} = H)$.

Définition 2.4.2. On pose $g \sim_H g'$ si $g' \in gH$. C'est une relation d'équivalence. On note G/H son ensemble quotient, et on appelle indice de H dans G son cardinal noté $[G : H]$.

Théorème 2.4.2 (Lagrange). ?? Si H est un sous-groupe de G , $G \sim H \times (G/H)$. En particulier, si deux des trois ensembles $G, H, G/H$ sont finis, $|G| = |H| [G : H]$.

Corollaire 2.4.2.1. • Si H est un sous-groupe du groupe fini G , $|H| \mid |G|$.

- Si G est fini, $g \in G$, $g^{|G|} = 1$.
- $n^{p-1} \cong 1 \pmod{p}$ pour $n \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{P}$.
- Tout groupe d'ordre premier p est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Théorème 2.4.3 (Cauchy). Soit G un groupe fini, p un nombre premier divisant $|G|$. G possède un élément d'ordre p . Si G est abélien, on peut généraliser immédiatement à tout $p \in \mathbb{Z}$.

2.5 Sous-groupes finis de k^\times et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$

Théorème 2.5.1. Si k est un corps, tout sous-groupe fini de k^\times est cyclique.

Lemme 2.5.2 (Cauchy). Soit G un groupe, x, y deux éléments qui commutent d'ordres a et b premiers entre eux. Alors, xy est d'ordre ab .

Théorème 2.5.3 (Gauss). Pour p premier, le groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ est cyclique.

Définition 2.5.1. Un isomorphisme de groupes $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\text{times}} \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ est appelé un logarithme discret.

Définition 2.5.2. Pour un groupe, on note $G^{(n)}$ le groupe des puissances n -ièmes.

Proposition 2.5.1. Soient $p \in \mathbb{P}$, $n \geq 1$ et $m = (p-1) \wedge n$.

1. $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times, (n)}$ est cyclique d'ordre $\frac{p-1}{m}$ et égal à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times, (m)}$
2. Pour $x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$, on a $x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times, (n)}$ si et seulement si $x^{\frac{p-1}{m}} = 1$, i.e. $X^{\frac{p-1}{m}}$ a au plus $\frac{p-1}{m}$ racines dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et donc ses racines sont exactement les puissances n -èmes.

Proposition 2.5.2. Si p est premier impair, $m \geq 1$, alors $(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times$ est cyclique. Si $m \geq 2$, $(\mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{m-2}\mathbb{Z}$

2.6 Groupes Quotients

Définition 2.6.1. Un sous-groupe H de G est dit distingué, noté $H \triangleleft G$ si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

1. $gHg^{-1} \subset H$, $\forall g \in G$
2. $gHg^{-1} = H$, $\forall g \in G$
3. $gH = Hg$, $\forall g \in G$.

Remarque 2.6.0.1. Tous les sous-groupes d'un groupe abélien sont distingués. Un groupe d'indice 2 dans G est distingué.

Définition 2.6.2. Le normalisateur de H dans G est le sous-groupe de G défini par $N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$.

Théorème 2.6.1. Soit H un sous groupe d'un groupe G .

1. Il existe au plus une loi de groupe sur G/H telle que la projection canonique $G \rightarrow G/H$ soit une loi de groupe.
2. Une telle loi existe si, et seulement si, on a $H \triangleleft G$, auquel cas c'est la loi induite par le produit sur $P(G)$.

Définition 2.6.3. Si $H \triangleleft G$, le groupe quotient G/H est la donnée de l'ensemble G/H muni de son unique loi de groupe telle que la projection canonique est un morphisme de groupes.

Définition 2.6.4. On pose $\left(\frac{x}{p}\right) = 1$ si x est un carré non nul, 0 si x est nul et -1 sinon. $x \mapsto \left(\frac{x}{p}\right)$ est un morphisme multiplicatif.

On va étudier les groupes en cherchant à étudier des groupes plus simples : étant donné un groupe G , on cherche $H \subsetneq G$ un groupe distingué non trivial pour étudier H et G/H , d'ordres plus petits.

Définition 2.6.5. *Un groupe G est dit simple si ses seuls groupes distingués sont $\{1\}$ et G .*

Théorème 2.6.2 (Propriété Universelle des Groupes Quotients). *Si $H \triangleleft G$, et si $f : G \rightarrow G'$ est un morphisme, $g = f \circ \pi$ est un morphisme de G/H dans G' tel que $g(H) = 1$.*

Théorème 2.6.3 (Premier Théorème d'Isomorphisme). *Si f est un morphisme de G dans G' , alors f induit par passage au quotient un isomorphisme de groupes de $G/\ker f$ dans $\text{Im} f$*

Proposition 2.6.1 (Troisième Théorème d'Isomorphisme). *Soit $H \triangleleft G$:*

1. $H \mapsto K/H$ induit une bijection croissante entre sous groupes de G contenant H et sous-groupes de G/H .
2. Dans cette bijection, $K/H \triangleleft G/H \Leftrightarrow K \triangleleft G$ auquel cas le morphisme naturel $G/H \rightarrow G/K$ induit un isomorphisme $(G/H)/(K/H) \rightarrow G/K$.

3 Groupes Abéliens de Type Fini

3.1 Caractères

Définition 3.1.1. Un caractère d'un groupe G est un morphisme de G dans \mathbb{C}^\times .

Proposition 3.1.1. Soit $G = \langle g \rangle$ un groupe cyclique d'ordre n . Pour $\zeta \in \mu_n$, il existe un unique caractère χ_ζ de G tel que $\chi_\zeta(g) = \zeta$. De plus, $\zeta \mapsto \chi_\zeta$ est un isomorphisme de groupes.

3.2 Décomposition de Fourier finie

Définition 3.2.1. Si G est un groupe fini, on note $L^2(G)$ le \mathbb{C} -espace vectoriel des fonctions $G \rightarrow \mathbb{C}$ muni du produit hermitien. C'est un espace de dimension finie $|G|$. On note \hat{G} l'ensemble des caractères de G . On rappelle que \mathbb{C}^\times étant abélien, $\hat{G} = \text{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$

Théorème 3.2.1. Soit G un groupe fini.

1. L'ensemble \hat{G} est une famille libre et orthonormée de $L^2(G)$ (Orthogonalité des Caractères)
2. Si G est abélien, \hat{G} est une base de $L^2(G)$.

Corollaire 3.2.1.1. Soit G abélien fini

1. On a $|\hat{G}| = |G|$
2. Pour toute fonction $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ on a $f = \sum_{\chi \in \hat{G}} \langle f, \chi \rangle \chi$

Proposition 3.2.1. Soit G abélien fini, $H \subset G$ un sous-groupe. Pour tout caractère χ de H , il existe $\tilde{\chi}$ de G tel que $\chi|_H = \tilde{\chi}$

Définition 3.2.2. Un groupe abélien D est divisible si le morphisme de groupes $x \mapsto x^n$ est surjectif pour tout $n \geq 1$.

Proposition 3.2.2 (Prolongement des Morphismes). Soient G, H, D des groupes abéliens avec D divisible, $H \subset G$ et $f : H \rightarrow D$ un morphisme de groupes. Alors il existe un morphisme de groupes $\tilde{f} : G \rightarrow D$ tel que $\tilde{f}|_H = f$.

3.3 Structure des groupes abéliens finis

Théorème 3.3.1. Soit G abélien fini, il existe un unique entier $n \geq 0$ et des uniques entiers $a_i > 1$ vérifiant $a_1 \mid a_2 \mid \dots \mid a_n$ et $G \simeq \prod_{i=1}^n \mathbb{Z}/a_i \mathbb{Z}$.

Définition 3.3.1. L'exposant d'un groupe fini G est le plus petit entier $e \geq 1$ vérifiant $g^e = 1$ pour tout $g \in G$. C'est le ppcm des ordres des éléments de G .

3.4 Existence

Lemme 3.4.1. Si G est abélien fini, il existe un élément d'ordre l'exposant.

Proposition 3.4.1. Soit G un groupe, $H \leq G, K \leq G$. On suppose $H \cap K = 1$, $G = HK$ et enfin $hk = kh$ pour tout $h \in H, k \in K$. L'application produit sur $H \times K$ définit un isomorphisme de groupes.

De ces deux propositions, on peut prouver la partie existence du théorème.

3.5 Exemple

Définition 3.5.1. Soit p un nombre premier. Un groupe abélien fini est p -élémentaire si on a $g^p = 1$ pour tout $g \in G$.

Définition 3.5.2. On définit G^\sharp le $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -espace vectoriel dont G est le groupe additif.

Proposition 3.5.1. Soit p premier, G abélien fini. G est p -élémentaire si et seulement si $G \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ pour un certain $n \geq 1$. Le nombre minimal de générateurs de G est $\dim_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} G^\sharp$.

3.6 Unicité

Définition 3.6.1. On note $\min(G)$ le nombre minimal de générateurs de G . Il est fini si et seulement si G est de type fini.

Proposition 3.6.1. Supposons qu'on écrit une décomposition de G comme dans le théorème 3.3.1. On a $n = \min(G)$

Définition 3.6.2. Soit G abélien. Le sous-ensemble $G[n] = \{g^n = 1\}$ est un sous groupe de G appelé n -torsion de G .

Lemme 3.6.1. Soit G et H abéliens et $n \geq 1$.

1. On a $(G \times H)[n] = G[n] \times H[n]$
2. Tout (iso-)morphisme $G \rightarrow H$ induit un (iso-)morphisme $G[n] \rightarrow H[n]$.
3. Supposons G cyclique d'ordre m et p premier. Alors $G[p] = \{1\}$ sauf si $p \mid m$ auquel cas $G[p] \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $G/G[p] \simeq \mathbb{Z}/m/p\mathbb{Z}$.

3.7 Groupes Abéliens de Type Fini

On note ici G un groupe abélien additif

Définition 3.7.1. Soit $\mathcal{F} = \{g_1, \dots, g_n\}$ une famille d'éléments de G et

$$f : \mathbb{Z}^n \rightarrow G, (m_i) \mapsto \sum_{i=1}^n m_i g_i$$

On dit que \mathcal{F} est libre (ou \mathbb{Z} -libre) si f est injectif. On dit que \mathcal{F} est génératrice si f est surjectif, et est une base si f est bijectif.

Définition 3.7.2. Un groupe abélien est dit libre de rang n s'il possède une \mathbb{Z} base à n éléments, i.e. s'il est isomorphe à \mathbb{Z}^n . Par conventions, $\{0\}$ est libre de rang 0.

Lemme 3.7.1. Pour tout entier $n \geq 0$, $\min(\mathbb{Z}^n) = n$. En particulier, $\mathbb{Z}^n \simeq \mathbb{Z}^m \Leftrightarrow n = m$.

Définition 3.7.3. On appelle sous-groupe de torsion de G , le sous-groupe de G noté $G_{\text{tor}} = \{g \in G \mid \exists n \geq 1, ng = 0\}$

Théorème 3.7.2 (Dirichlet). Si G est abélien de type fini, G_{tor} est fini et il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $G \simeq G_{\text{tor}} \times \mathbb{Z}^n$.

Corollaire 3.7.2.1. Un groupe abélien de type fini sans torsion est libre

Lemme 3.7.3. Si $f : G \rightarrow \mathbb{Z}$ est surjectif, $G \simeq \mathbb{Z} \times \ker f$.

Lemme 3.7.4. Si A, B sont deux groupes abéliens avec A fini et B libre de rang fini, alors, avec $G = A \times B : G_{\text{tor}} = A \times \{0\}$ et $G/G_{\text{tor}} \simeq B$.

4 Groupe Symétrique et Dévissage

4.1 Actions de Groupes

Définition 4.1.1. Une action de G sur X est une application $\cdot : G \times X \rightarrow X$ vérifiant : $1 \cdot x = x$ et $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$.

Définition 4.1.2. Soit G agissant sur X , et $x \in X$.

- $O_x = \{gx \mid g \in G\} \subset X$ est l'orbite de x sous G , aussi notée Gx .
- Le sous-groupe $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ est appelé stabilisateur de x ou groupe d'isotropie de x , noté $\text{Stab}_G(x)$.

Lemme 4.1.1. On a : $G_{gx} = gG_xg^{-1}$.

Proposition 4.1.1. • Les orbites sous G forment une partition de X .

- Pour tout $x \in X$, on a une bijection $G/G_x \xrightarrow{\sim} O_x$ envoyant gG_x sur gx . En particulier, si G est fini, on a $|G| = |G_x| |O_x|$.

Corollaire 4.1.1.1. On note x_i des représentants des orbites de G dans X . On a :

$$|X| = \sum_{i \in I} |O_{x_i}| = \sum_{i \in I} |G| / |G_{x_i}|$$

Théorème 4.1.2 (Premier Théorème de Sylow). Soit G fini d'ordre $p^n m$ avec p premier et $m \wedge p = 1$. Alors G possède un sous-groupe d'ordre p^n , appelé un p -Sylow de G .

Définition 4.1.3. Une action de G sur X est transitive si on a $X \neq \emptyset$ et si $\forall x, y \in X, \exists g \in G, y = gx$, i.e. que X a une et une seule orbite sous l'action de G .

Définition 4.1.4. Le noyau d'une action est le noyau du morphisme $G \rightarrow S_X$ associé à l'action. C'est un sous-groupe distingué de G . Une action est dite fidèle si son noyau est $\{1\}$.

Définition 4.1.5. Une action est libre si on a toujours $G_x = \{1\}$.

Définition 4.1.6. Deux actions d'un même groupe sur deux ensembles X et Y sont isomorphes s'il existe une bijection f vérifiant $f(g \cdot x) = g \star f(x)$.

Proposition 4.1.2. Une action transitive (X, \cdot) est isomorphe à l'action par translations de G sur G/G_x .

Proposition 4.1.3. Deux actions transitives sont isomorphes si et seulement si elles ont les mêmes stabilisateurs.

4.2 Groupes Symétriques et Alternés

Proposition 4.2.1. Toute permutation σ de S_n s'écrit comme un produit de cycles à supports disjoints. L'ordre de σ est alors le ppcm des longueurs des cycles.

Proposition 4.2.2. Les transpositions engendrent S_n .

Lemme 4.2.1. Si $\sigma \in S_n, c = (i_1, \dots, i_k)$ est un k -cycle : $\sigma c \sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k))$.

Proposition 4.2.3. • Les $(i, i+1)$ engendrent S_n . Ils sont appelés générateurs de Coxeter.

- La transposition $(1, 2)$ et le cycle $(12 \dots n)$ engendrent S_n .
En particulier, $\min S_n = 2$.

Définition 4.2.1. • Une partition de l'entier n est une suite décroissante $n_1 \geq \dots \geq n_r$ d'entiers strictement positifs de somme n .

- Le type de $\sigma \in S_n$ est la partition de l'entier n définie par les cardinaux des orbites de σ .

Proposition 4.2.4. Deux éléments de S_n sont conjugués si et seulement si ils ont même type.

Définition 4.2.2. Pour $k \geq 1$ entier, G agissant sur X avec $|X| \geq k$, G agit k -transitivement sur X si pour deux k -uplets d'éléments distincts de X il existe $g \in G$ tel que $gx_i = y_i$ pour tout i .

Définition 4.2.3. La signature de $\sigma \in S_n$ est :

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{\{i,j\}} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

C'est un morphisme de groupes $S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ valant -1 sur les transpositions. On note A_n son noyau. C'est un sous-groupe distingué.

Proposition 4.2.5. Pour $n \geq 3$, A_n agit $(n-2)$ -transitivement sur $|1, n|$. Les k -cycles sont conjugués sous l'action de A_n pour $k \in |2, n-2|$.

4.3 Les suites exactes

Définition 4.3.1. Une suite de $n \geq 2$ morphismes de groupes (f_1, \dots, f_n) est exacte si $\text{Im } f_i = \ker f_{i+1}$ pour tout i .

Définition 4.3.2. Une suite exacte de la forme $1 \rightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} K \rightarrow 1$ est une suite exacte courte.

Proposition 4.3.1. Il est équivalent de se donner :

- Une suite exacte $1 \rightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} K \rightarrow 1$
- Un sous-groupe distingué $H' \subset G$ et des isomorphismes $i' : H \xrightarrow{\sim} H'$ et $\pi' : G/H' \xrightarrow{\sim} K$.

Définition 4.3.3 (Groupe diédral). Pour $n \geq 3$, on définit le groupe diédral D_{2n} comme le sous-groupe de S_n engendré par $(12 \dots n)$ et l'élément τ défini par $\tau(i) = n+1-i$.

Définition 4.3.4. Si G, H, K sont des groupes donnés, G est extension de K par H s'il existe une suite exacte courte $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow K \rightarrow 1$.

4.4 Dévissage de S_n

Théorème 4.4.1. Les seuls sous-groupes distingués de S_n sont $\{1\}$, A_n , S_n et K_4 dans le cas $n = 4$.

Théorème 4.4.2. Pour $n \geq 5$, A_n est simple non abélien.

Corollaire 4.4.2.1. • Pour $n \neq 4$, toute action de A_n est fidèle ou triviale.

- Une action transitive de S_n sur un ensemble à $m > 2$ éléments est fidèle, sauf peut-être si $n = 4$ et $m = 3$ ou 6 .

4.5 Commutateur et Groupes Dérivés

Définition 4.5.1. Le groupe dérivé d'un groupe G est le sous-groupe $D(G) = [G, G]$ engendré par les $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. On a $D(G) = \{1\}$ si et seulement si G est abélien.

Corollaire 4.5.0.1. $D(G)$ est un sous-groupe caractéristique de G .

Corollaire 4.5.0.2. Soit G un groupe.

- Tout morphisme $f : G \rightarrow G'$ avec G' abélien vérifie $D(G) \subset \ker f$.
- Pour $H \triangleleft G$ alors G/H est abélien si et seulement si, $D(G) \subset H$.

Proposition 4.5.1. On a :

- $D(S_n) = A_n$
- $D(A_n) = A_n$ pour $n \geq 5$.
- $D(A_4) = K_4$ et $D(A_n) = \{1\}$ pour $n \leq 3$

Définition 4.5.2. Un groupe G est résoluble s'il existe n tel que $D^n(G) = \{1\}$. Le plus petit n est appelé classe de résolubilité de G .

Proposition 4.5.2. Si G est un groupe et $H \triangleleft G$, G est résoluble si et seulement si H et G/H le sont. Alors, la classe de G est inférieure à la somme des classes de H et de G/H .

Proposition 4.5.3. Le groupe $T_n(k)$ est résoluble de classe $\leq 1 + \lceil \log_2(n) \rceil$.

4.6 Dévissage en Produit Semi-Direct

Définition 4.6.1. Si $H \leq G$, un complément de H dans G est $K \leq G$ tel que $G = HK$ et $H \cap K = \{1\}$

Remarque 4.6.0.1. Soit $N \triangleleft G$, et K un complément de N dans G . Pour tout $n, n' \in N$, $k, k' \in K$, on a :

$$(nk)(n'k') = n(kn'k^{-1})kk' \text{ avec } kn'k^{-1} \in N$$

Autrement dit :

$$(nk)(n'k') = n \operatorname{int}_k(n')kk'$$

La structure de groupe de G se déduit de celle de N , K et de la connaissance de l'application : $\alpha : k \in K \mapsto \operatorname{int}_k|_N$

On se fixe dans la suite deux tels groupes N et K , et un morphisme de groupe α de K dans $\operatorname{Aut}(N)$.

Définition 4.6.2. La loi $\star_\alpha : (N \times K) \times (N \times K) \rightarrow N \times K, (n, k), (n', k') \mapsto (n\alpha_k(n'), kk')$ est une loi de groupe, qui munit $N \times K$ d'une structure de groupe noté $N \rtimes_\alpha K$ et appelé produit semi-direct (externe) de K par N associé à α .

Proposition 4.6.1. Soit G un groupe, $N \triangleleft G$ et K un complément de N dans G . Soit $\alpha : K \rightarrow \operatorname{Aut}(N), k \mapsto \alpha_k$. La bijection $N \times K \rightarrow G, (n, k) \mapsto nk$ est un isomorphisme de groupes : $N \rtimes_\alpha K \xrightarrow{\sim} G$. On dit aussi que G est produit semi-direct interne de K par N

Proposition 4.6.2 (Suivi des Isomorphismes). Soit $G = N \rtimes_\alpha K, a : N' \xrightarrow{\sim} N$ et $b : K' \xrightarrow{\sim} K$ des isomorphismes. La bijection $N' \times K' \rightarrow G, (n', k') \mapsto a(n')b(k')$ est un isomorphisme de groupes de $N' \rtimes_{\alpha'} K'$ dans G , où $\alpha' : k' \mapsto \alpha_{k'} = a^{-1} \circ \alpha_{b(k')} \circ a$.

Proposition 4.6.3. Un groupe d'ordre $2p$ avec p premier impair est soit isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ soit à D_{2p} .

Proposition 4.6.4. Les groupes non abéliens d'ordre ≤ 8 sont S_3, D_8 et H_8 .

5 Groupes et Symétries

5.1 Sous-groupes Finis de $O(2)$ et $SO(3)$

. Ici, E est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$

Définition 5.1.1. On définit la réflexion par rapport à H un hyperplan de E , l'application $s_H \in O(E)$ définie par : $s_H(h + d) = h - d$ où $h, d \in H \times H^\perp$. Pour $v \in E$ non nul, on appelle aussi réflexion de vecteur v la réflexion $s_v = s_{v^\perp}$.

Théorème 5.1.1 (Cartan-Dieudonné). Tout élément de $O(E)$ est produit d'au plus n réflexions. En particulier, tout élément de $SO(E)$ est produit d'au plus $n/2$ produits de deux réflexions.

Remarque 5.1.1.1. $SO(2)$ est isomorphe au groupe S^1 des rotations du plan. On peut également montrer que $O(2) \simeq SO(2) \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ avec $\alpha_1(g) = g^{-1}$.

Corollaire 5.1.1.1. Tout élément non trivial de $SO(3)$ possède une et une seule droite fixe dans E .

Lemme 5.1.2. Si $g \in O(E)$ préserve $F \subset E$, il préserve F^\perp .

Définition 5.1.2. Pour $P \subset E$, on note $\text{Iso}(P) = \{g \in O(E) \mid g(P) = P\}$ le sous-groupe des isométries orthogonales de P .

Définition 5.1.3. On note \mathcal{P}_m un polygone régulier du plan à $m \geq 3$ côtés centré en 0.

Proposition 5.1.1. $\text{Iso}(\mathcal{P}_m)$ agit sur l'ensemble \mathcal{S} des sommets de \mathcal{P}_m , puisque ce sont les points à distance maximale de 0. Cette action définit un morphisme f qui induit un isomorphisme $\text{Iso}(\mathcal{P}_m) \xrightarrow{\sim} D_{2m}$. De plus, $\text{Iso}^+(\mathcal{P}_m) \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

En considérant les groupes d'isométries de figures planes bien choisies, on trouve trois autres classes de conjugaison.

Proposition 5.1.2. Soit $G \leq O(2)$ fini. Alors, soit G est isomorphe à 1, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, soit il existe un polygone régulier \mathcal{P} du plan euclidien tel que $G = \text{Iso}(\mathcal{P})$ ou $G = \text{Iso}^+(\mathcal{P})$.

Remarque 5.1.2.1. Le groupe des isométries de $[-1, 1] \times \{0\}$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, qu'on note parfois D_4 .

Définition 5.1.4. $G \leq O(E)$ est dit irréductible, s'il n'existe aucun sous-espace non-dégénéré stable par G .

On suppose désormais $n = 3$.

Remarque 5.1.2.2. Un groupe est irréductible s'il stabilise un plan ou, de manière équivalente, une droite. On a donc un morphisme injectif diagonal : $O(2) \rightarrow SO(3)$

$$g \mapsto \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & \det g \end{pmatrix}$$

Définition 5.1.5. Soit $P \subset E$ un solide de Platon¹. On définit ses sommets, ses arêtes et ses faces comme ses parties extrémales de dimension 0, 1 et 2 :

$$\forall x, y \in P,]x, y[\cap F \neq \emptyset \Rightarrow [x, y] \subset F$$

L'action de $\text{Iso}(P)$ préserve l'ensemble \mathcal{S} des sommets, celui \mathcal{A} des arêtes et celui \mathcal{F} des faces. On note que l'action de $\text{Iso}(P)$ sur \mathcal{S} engendre E . Notons que dès que $-1 \in \text{Iso}(P)$, $\text{Iso}(P) = \{\pm 1\} \times \text{Iso}^+(P)$.

- LE TÉTRAÈDRE RÉGULIER T : En regardant l'action sur les sommets, on obtient :

Proposition 5.1.3. $\text{Iso}(T) \simeq S_4$ et $\text{Iso}^+(T) \simeq A_4$.

1. polyèdre régulier

Le déterminant sur $\text{Iso}(T)$ correspond à la signature sur S_4 . En regardant de plus les paires d'arêtes orthogonales, on fournit un morphisme $\text{Iso}(T) \rightarrow S_3$.

- LE CUBE ou HEXAÈDRE RÉGULIER C : En regardant l'action sur les paires de sommets, on obtient :

Proposition 5.1.4. $\text{Iso}^+(C) \simeq S_4$ et $\text{Iso}(C) = \{\pm 1\} \times \text{Iso}^+(C)$.

En considérant l'action sur les paires de faces opposées, on retrouverait un morphisme $S_4 \rightarrow S_3$.

- L'OCTAÈDRE RÉGULIER O : En regardant les centres des faces, on trouve un cube C appelé cube dual et dont les centres des faces sont les sommets d'un nouvel octaèdre O' . On en déduit que :

Proposition 5.1.5. $\text{Iso}(O) = \text{Iso}(C) = \text{Iso}(O')$

- LE DODÉCAÈDRE RÉGULIER D : En regardant l'action sur les sommets, et en regardant les triplets de diarête² deux à deux orthogonales, on obtient :

Proposition 5.1.6. $\text{Iso}^+(D) \simeq A_5$ et on conclut car $-1 \in \text{Iso}(P)$.

- L'ICOSAÈDRE RÉGULIER I : On vérifie comme pour le cube que le dual de I est un dodécaèdre et que l'on a :

Proposition 5.1.7. $\text{Iso}(I) = \text{Iso}(D)$.

En regardant l'action sur les faces opposées, on retrouve l'action sur les pentagones mystiques.

Théorème 5.1.3 (Klein). *Tout sous-groupe fini irréductible de $SO(3)$ est le groupe des isométries directes d'un solide de Platon, et donc isomorphe à A_4 , S_4 ou A_5 .*

Lemme 5.1.4 (Burnside-Frobenius). *Soit G fini agissant sur un ensemble fini X . On note r le nombre de G -orbites dans X et pour $g \in G$ on note $\text{Fix}(g)$ l'ensemble des points fixes de g dans X . On a alors :*

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$$

Lemme 5.1.5. *Si $G \leq SO(3)$ est fini, soit $X \subset S^2$ l'ensemble des pôles³ des éléments non triviaux de G , soient x_1, \dots, x_r des représentants des orbites de G dans X et $n_i = |G_{x_i}|$ triés dans l'ordre croissant. Alors, on a soit $r = 2$, $|X| = 2$ et $G = G_{x_1} = G_{x_2}$ soit $r = 3$ et $|G|$ et les n_i sont données par :*

$ G $	n_1	n_2	n_3	$ O_{x_1} $	$ O_{x_2} $	$ O_{x_3} $	$ X $
$2m$	2	2	m	m	m	2	$2m + 2$
12	2	3	3	6	4	4	14
24	2	3	4	12	8	6	26
60	2	3	5	30	20	12	60

5.2 Le Groupe $SP(1)$

5.2.1 L'algèbre des quaternions de Hamilton

Définition 5.2.1. *On se place dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et considère :*

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } K = IJ = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

2. couples d'arêtes parallèles

3. couples de points fixes

On définit alors $\mathbb{H} = \text{Vect}_{1,I,J,K}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

On définit de plus :

$$t(q) = \text{Tr}(q), n(q) = \det q \text{ et } q^\star = {}^t\bar{q} = t(q)1 - q \in \mathbb{H}$$

Proposition 5.2.1. \mathbb{H} est un corps gauche de centre \mathbb{R} .

Proposition 5.2.2 (Cayley - Hamilton). Par théorème de Cayley-Hamilton sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$: $q^2 t(q)q + n(q)1 = 0$ ce qui ici vaut :

$$qq^\star = q^\star q = n(q)1$$

5.2.2 Le groupe $Sp(1)$

Définition 5.2.2. On pose $Sp(1) = \{q \in \mathbb{H} \mid n(q) = 1\}$. C'est un sous-groupe de \mathbb{H}^\times

Remarque 5.2.0.1. L'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{H} \\ (t, x, y, z) &\mapsto t + xI + yJ + zK \end{aligned}$$

identifie la sphère unité euclidienne S^3 à $Sp(1)$, ce qui munit S^3 d'une loi de groupe non commutative par transfert de structure. On sait que S^1 et S^3 sont les deux seules sphères euclidiennes que l'on peut munir d'une loi de groupe topologique.

Remarque 5.2.0.2. $Sp(1)$ s'identifie à $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$ de $SL_2(\mathbb{C})$.

Proposition 5.2.3. Par décomposition polaire : $\mathbb{H}^\times = \mathbb{R}_{>0} \times Sp(1)$

Proposition 5.2.4. L'élément -1 est l'unique élément d'ordre 2 de $Sp(1)$

Proposition 5.2.5. Un élément $q \in Sp(1)$ est d'ordre $m > 2$ si et seulement si $t(q) = 2 \cos(2k/m)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k \wedge m = 1$

5.2.3 L'espace euclidien \mathbb{H}

Définition 5.2.3. On définit sur \mathbb{H} un produit scalaire réel par $\langle \cdot | \cdot \rangle = \frac{1}{2} t(q^\star q')$

Proposition 5.2.6. L'application $Sp(1) \times Sp(1) \rightarrow O(\mathbb{H})$ qui à $(q_1, q_2) \mapsto L_{q_1} R_{q_2}$ est un morphisme d'image $SO(\mathbb{H})$ et de noyau $\langle (-1, -1) \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où L_q désigne la translation à gauche par q et R_q la translation à droite.

Proposition 5.2.7. L'application $Sp(1) \rightarrow SO(\mathbb{H}^0)$, $q \mapsto \text{int}_{q|_{\mathbb{H}^0}}$ ou $\mathbb{H}^0 = 1^\perp = \{q \in \mathbb{H} \mid t(q) = 0\}$.