

Géométrie Différentielle

Géométrie Locale des Applications Différentiables

Emmanuel Giroux

7 février 2024



Table des matières

1 Applications Différentiables, Propriétés et Exemples	1
1.1 Relations avec les Polynômes	1
1.2 Construction par Convolution	2
2 Structure Locale des Applications Différentiables	4
2.1 Inversion Locale	4
2.2 Applications de rang Constant	5
2.3 Applications de Rang Maximal	6
3 Applications Différentiables et Mesure	7
3.1 Petit Théorème de Sard	7
3.2 Théorème de Sard	8

1 Applications Différentiables, Propriétés et Exemples

1.1 Relations avec les Polynômes

Définition 1.1: Applications Différentiables, Lisses

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n . Une fonction $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ est \mathcal{C}^r , $r \geq 1$ si toutes ses dérivées partielles d'ordre s , $1 \leq s \leq r$, existent et sont continues. Une fonction \mathcal{C}^r est donc \mathcal{C}^s pour $s \leq r$.

On dit que φ est \mathcal{C}^∞ ou lisse si elle est \mathcal{C}^r pour tout $r \geq 1$.

Théorème 1.1: Schwarz

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction \mathcal{C}^1 . Si les dérivées partielles $\partial_{x_j} \partial_{x_i} \varphi$ et $\partial_{x_i} \partial_{x_j} \varphi$ existent et sont continues sur U , elles sont égales.

Proposition 1.1: Intégration d'une Différentielle sur une Courbe

Soit $C = \gamma([a, b]) \subseteq \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée par une application \mathcal{C}^1 par morceaux γ . On définit

$$\begin{aligned}\int_C d\varphi &= \int_a^b d_{\gamma(t)}\varphi(\gamma'(t)) dt \\ &= \int_a^b (\varphi \circ \gamma)'(t) dt = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))\end{aligned}$$

Remarque 1.1: Reformulation du Théorème de Taylor

Sur l'ensemble des fonctions réelles définies au voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n on met la relation d'équivalence :

$$\varphi_1 \sim_r \varphi_2 \text{ si } \varphi_1 - \varphi_2 =_{x \rightarrow 0} o(|x|^r)$$

Le théorème de Taylor dit que, si on restreint cette relation à l'ensemble des fonctions \mathcal{C}^r , chaque classe d'équivalence contient un et un seul polynôme de degré $\leq r$. Le quotient est ainsi un sev de dimension finie.

Théorème 1.2: Weierstraß

Soit K un compact de \mathbb{R}^n . Toute fonction continue de K dans \mathbb{R} est limite uniforme de polynômes $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ restreints à K .

1.2 Construction par Convolution**Proposition 1.2: Fonctions Cloches**

Soit $B(a, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ la boule ouverte de rayon δ centrée en a . Il existe une fonction lisse $\chi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ positive sur la boule et nulle en dehors.

Démonstration. Typiquement, on trouve

$$\chi(x) = \exp\left(\frac{1}{|x-a|^2 - \delta^2}\right)$$

■

Définition 1.2: Support

Soit $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$. Son support est le fermé :

$$Supp(\varphi) : \overline{\{x \in U \mid \varphi(x) \neq 0\}}$$

Définition 1.3: Produit de Convolution

Le produit de convolution de deux fonctions intégrables φ, χ est la fonction intégrable :

$$(\varphi \star \chi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\chi(y) dy$$

Lorsque χ est une fonction positive ou nulle d'intégrale 1, c'est à dire une densité de probabilité, la valeur de $\varphi \star \chi$ en un point x doit être vue comme la moyenne des valeurs de φ pour cette mesure de probabilité recentrée sur x .

Proposition 1.3: Indicatrice Normalisée

Pour $\delta > 0$ on considère $\chi_\delta = \frac{1}{2\delta} \mathbb{1}_{[-\delta, \delta]}$. On a, si φ est intégrable :

- $\int_{\mathbb{R}} (\varphi \star \chi_\delta)(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) dy$ car $\int_{\mathbb{R}} \chi_\delta = 1$
- $\text{Supp}(\varphi \star \chi_\delta) \subseteq \text{Supp}(\varphi) + [-\delta, \delta]$
- Si $\varphi = c$ est constante sur $[a, b]$ de diamètre strictement plus grand que 2δ , alors $\varphi \star \chi_\delta = c$ sur $[a + \delta, b - \delta]$.

Lemme 1.1: Régularité de la Convolée

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable.

1. Si $|\varphi|$ est bornée par une constante μ , alors $\varphi \star \chi_\delta$ est μ/δ -lipschitzienne et donc continue.
2. Si φ est continue, alors $\varphi \star \chi_\delta$ est \mathcal{C}^1 et sa dérivée est donnée par

$$(\varphi \star \chi_\delta)'(x) = \frac{\varphi(x + \delta) - \varphi(x - \delta)}{2\delta}$$

Par suite, si φ est \mathcal{C}^r , $\varphi \star \chi_\delta$ est \mathcal{C}^{r+1} .

Proposition 1.4: Convolution D'indicatrices

Soit δ_k une suite de nombres positifs dont la série converge. La suite ρ_k définie par :

$$\begin{cases} \rho_0 &= \chi_{\delta_0} \\ \rho_k &= \rho_{k-1} \star \chi_{\delta_k} \end{cases}$$

converge vers une fonction lisse ρ qui vérifie $\rho(x) = 0$ si et seulement si $|x| \geq \sum_{k \geq 0} \delta_k$. De plus, $\rho(x) = 1$ si $|x| \leq \delta_0 - \sum_{k \geq 1} \delta_k$.

Corollaire 1.1: Fonctions Cloches Revisitées

Soit $B(a, \delta) \subseteq \mathbb{R}^n$ la boule ouverte de rayon δ centrée en a . Il existe une fonction lisse $\chi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ qui est positive sur $B(a, \delta)$ et nulle en dehors.

Démonstration. On pose $\chi(x) = \rho(|x - a|/\delta)$ où ρ est une fonction lisse positive sur $[-1, 1]$, nulle en dehors et constante près de 0. Une telle fonction existe par la proposition précédente. ■

Définition 1.4: Noyau Régularisant

On appelle noyau régularisant une fonction lisse, positive sur $B(0, 1)$ nulle en dehors et d'intégrale 1.

Définition 1.5: Construction de Noyaux

Soit ρ un noyau régularisant. Pour tout $\delta > 0$ la fonction ρ_δ définie par

$$\rho_\delta(x) = \delta^{-n} \rho(x/\delta)$$

est toujours d'intégrale 1 et de support $\overline{B(0, \delta)}$.

Si $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ est \mathcal{C}^r sur U , la formule $\varphi \star \rho_\delta$ définit une fonction sur l'ouvert

$$U_\delta = \left\{ x \in U \mid \overline{B(x, \delta)} \subset U \right\}$$

qu'on peut écrire

$$\varphi \star \rho_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \rho_\delta(x - y) dy$$

Proposition 1.5: Convolution avec un Noyau Régularisant

Les fonctions $\varphi \star \rho_\delta$ sont lisses et si $x \in U_\delta$:

$$\begin{aligned} \partial^i(\varphi \star \rho_\delta)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \delta^i \rho_\delta(x - y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta^i \varphi(y) \rho_\delta(x - y) dy = \delta^i \varphi \star \rho_\delta \end{aligned}$$

De plus, pour tout compact $K \subseteq U$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $K \subset U_\delta$ et

$$\|(\varphi \star \rho_\delta) - \varphi\|_{r,K} < \varepsilon$$

où $\|\psi\|_{r,K} = \sup \{ |\partial^i \psi(x)| \mid x \in K, i \leq r \}$

2 Structure Locale des Applications Différentiables

2.1 Inversion Locale

Définition 2.1: Difféomorphisme

Une application $f : U \rightarrow V$ entre des ouverts U et V de \mathbb{R}^n est un difféomorphisme \mathcal{C}^r si c'est une application \mathcal{C}^r bijective dont l'inverse est \mathcal{C}^r ?

Théorème 2.1: Inversion Locale

La différentielle d'un difféomorphisme est une application linéaire inversible. Réciproquement, si f est \mathcal{C}^r sur un ouvert dont la différentielle est inversible en tout point a , il existe un voisinage ouvert U_a de a dans U tel que l'application $f|_{U_a}$ soit un \mathcal{C}^r -difféomorphisme. En particulier, f est une application ouverte.

2.2 Applications de rang Constant

Définition 2.2: Applications Equivalentes

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f' : U' \rightarrow \mathbb{R}^m$ des applications \mathcal{C}^r sur des ouverts $U, U' \subseteq \mathbb{R}^n$. On dit que f et f' sont équivalentes s'il existe :

- des voisinages ouverts V de $f(U)$ et V' de $f'(U')$ dans \mathbb{R}^m
- des \mathcal{C}^r -difféomorphismes $u : U \rightarrow U'$ et $v : V \rightarrow V'$

de sorte que $f' = v \circ f \circ u^{-1}$.

Définition 2.3: Rang

Le rang d'une application différentiable en a est le rang de sa différentielle en a .

Proposition 2.1: Propriétés

- L'application qui à $a \in U$ associe le rang de f en a est semi-continue inférieurement
- Si f et $f' = v \circ f \circ u^{-1}$ sont équivalentes, leurs rangs sont égaux en a et en $u(a)$.
- Si \bar{f} est affine, son rang est constant

Ainsi, si f est équivalente à son application tangente en un point, elle est de rang constant.

Théorème 2.2: du Rang Constant

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application \mathcal{C}^r de rang constant k sur un ouvert U de \mathbb{R}^n . Il existe alors, si $a \in U$:

- des voisinages ouverts U_a de a dans U et V_a de $f(a)$ dans \mathbb{R}^m
- des \mathcal{C}^r -difféomorphismes u et v

tels que

$$v \circ f \circ u^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$$

Remarque 2.1

1. Le théorème du rang constant est une version non linéaire du théorème du rang, équivalence en algèbre linéaire d'une matrice à sa réduite de Jordan.
2. L'énoncé du théorème du rang constant qu'on a donné est celui qui servira en pratique. Il n'affirme pas directement que, pour $a \in U$ quelconque, f est localement équivalente à \bar{f}_a mais dit que f est localement équivalente à une application linéaire de son rang. Pour en tirer la réponse à la question posée, il suffit d'observer que deux applications affines/linéaires $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ qui ont le même rang sont affinement/linéairement équivalentes (justement par le théorème du rang)

2.3 Applications de Rang Maximal

Définition 2.4: Immersions et Submersions

Soit f une application \mathcal{C}^r sur un ouvert U de \mathbb{R}^n .

1. On dit que f est une immersion si son rang en tout point de U vaut n , ce qui signifie que la différentielle est injective et que $n \leq m$.
2. On dit que f est une submersion si son rang en tout point de U vaut m , ce qui signifie que la différentielle est surjective et suppose $n \geq m$.

On parle de même d'immersion et de submersion en a selon les propriétés de $d_a f$.

Proposition 2.2: Exemples

- Une application linéaire/affine est une submersion (resp. immersion) si et seulement si elle est surjective (resp. injective)
- Une application sur un ouvert de \mathbb{R} est une immersion si et seulement si sa dérivée ne s'annule pas.
- Une fonction à valeurs dans \mathbb{R} est une submersion si et seulement si sa dérivée ne s'annule pas.
- Soit f une application \mathcal{C}^r sur un ouvert U de \mathbb{R}^n . Alors l'application graphe est une immersion injective et la projection est une submersion surjective. Par suite, f est la composée d'une immersion et d'une submersion.

Théorème 2.3: Forme Normale des Immersions et Submersions

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application \mathcal{C}^r sur un ouvert U de \mathbb{R}^n .

1. Si f est une immersion en a , il existe des voisinages ouverts U_a et V_a de a et de $f(a)$ ainsi qu'un \mathcal{C}^r -difféomorphisme v tel que

$$v \circ f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$$

2. Si f est une submersion en a , il existe de même U_a, V_a et un \mathcal{C}^r -difféomorphisme u tel que

$$f \circ u^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$$

Corollaire 2.1

Soit f une application \mathcal{C}^r .

- Si f est une immersion, f est localement injective
- Si f est une submersion, f est une application ouverte (qu'on peut voir comme une surjectivité locale).

Définition 2.5: Transversalité

Deux sev E_1, E_2 d'un ev E sont dits transversaux si $E_1 + E_2 = E$.

Théorème 2.4: Fonctions Implicites

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une submersion \mathcal{C}^r sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$ et soit $a \in U$. On suppose le noyau de $d_a f$ transversal au sous-espace $\{0\} \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n$. Il existe alors un voisinage ouvert U_a de a du type :

$$U_a = U' \times U'' \subseteq \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n$$

et une application $s : U' \rightarrow U''$ de classe \mathcal{C}^r tels que

$$f^{-1}(f(a)) \cap U_a = \{x = (x', x'') \in U' \times U'' = U_a \mid x'' = s(x')\}$$

3 Applications Différentiables et Mesure

3.1 Petit Théorème de Sard

Lemme 3.1: Critère de Fubini

Soit $N \subseteq \mathbb{R}^m$ un ensemble Lebesgue-Mesurable dont toutes les tranches sont des parties négligeables dans \mathbb{R}^{m-1} . Alors N est négligeable dans \mathbb{R}^m .

Lemme 3.2: Constante de Lipschitz Locale

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application \mathcal{C}^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^n et soit $K \subset U$ un compact convexe. L'application $f|_K : K \rightarrow \mathbb{R}^m$ est alors lipschitzienne de constante au plus $\sup\{|d_a f|, a \in K\}$.

Proposition 3.1: Petit Théorème de Sard

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application \mathcal{C}^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^n .

- Si $m > n$, alors $f(U)$ est négligeable dans \mathbb{R}^m .
- Si $m = n$ et si $n \subseteq U$ est négligeable dans \mathbb{R}^n , alors $f(N)$ est négligeable dans \mathbb{R}^n .

Lemme 3.3: Réduction Locale

Pour montrer que l'image $f(P)$ d'une partie $P \subseteq U$ par une application $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est négligeable dans \mathbb{R}^m , il suffit de montrer que chaque point $a \in U$ possède un voisinage $U_a \subseteq U$ tel que $f(P \cap U_a)$ soit négligeable dans \mathbb{R}^m .

Démonstration. En effet, bien que la famille $\{V_a\}$ ne soit pas dénombrable, on peut choisir tous les V_a dans un ensemble dénombrable, par exemple une base dénombrable d'ouverts de \mathbb{R}^n . Ainsi, $P = \bigcup P \cap V_a$ et $f(P)$ est négligeable comme union dénombrable de parties négligeables dans \mathbb{R}^m . ■

Corollaire 3.1: Invariance des Ensembles Négligeables

Soit $f : U \rightarrow V$ un difféomorphisme entre deux ouverts de \mathbb{R}^n . Une partie $N \subseteq U$ est négligeable si et seulement si son image $f(N) \subseteq V$ l'est.

3.2 Théorème de Sard

Définition 3.1: Critique

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application \mathcal{C}^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^n . On appelle

- Point Critique de f tout point $a \in U$ où $d_a f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ n'est pas surjective.
- Valeur Critique de f tout point $y \in \mathbb{R}^m$ qui est l'image d'un point critique.
- Point Régulier (resp. valeur) de f tout point (resp. valeur) non critique.

Théorème 3.1: de Sard

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application \mathcal{C}^r sur un ouvert U de \mathbb{R}^n . Si $r \geq 1 + \max(n - m, 0)$ alors l'ensemble des valeurs régulières de f est de mesure pleine et est en particulier dense dans \mathbb{R}^m .

Autrement dit, l'ensemble $f(C_f)$ des valeurs critiques est négligeable.