None

Null

29th November 2023

Contents

1 chaipukoi

1.1 Extensions et Cohomologie

Si A et G sont fixés, on veut classifier les suites exactes courtes :

$$1 \to A \xrightarrow{i} \tilde{G} \xrightarrow{\pi} G \to 1 \tag{1}$$

Etant donné une telle sec est-ce que $i(A)$ admet un complément dans $\tilde{G}$?

Lemme 1.1.1. *Soit une extension comme ci-dessus. Il y a équivalence entre :*

1. *$i(A)$ admet un complément dans $\tilde{G}$*
2. *π admet une section ensembliste qui est un morphisme de groupes.*

Définition 1.1.1. *On dit que la suite exacte courte est scindée si les conditions équivalentes du lemme précédent sont satisfaites.*

Théorème 1.1.2 (Schur-Zassenhaus)**.** *Toute extension de G par A avec $|G| \wedge |A| = 1$ est scindée*

Dans la suite, on suppose que A est abélien.

Définition 1.1.2. *Un G-module est la donnée d'un groupe abélien $(A, +)$ muni d'une action de G sur A vérifiant $g(a + b) = ga + gb$ ou, ce qui revient au même, telle que le morphisme $G \to S_A$ associé soit à valeurs dans $Aut(A)$.*

Proposition 1.1.1. *La donnée de la suite exacte courte* **??** *munit le groupe abélien A d'une structure de G-module par :*

$$g.a = i^{-1}\left(\tilde{g}i(a)\tilde{g}^{-1}\right)$$

où $\tilde{g} \in \tilde{G}$ est un relevé de g par π.

Exemple 1.1.1 (Extensions Centrales)**.** *Une extension* **??** *de G par A est dite* centrale *si $i(A) \subseteq Z(\tilde{G})$.*

On fixe une extension **??** de G par A, et on considère une section ensembliste $s : G \to \tilde{G}$. Il existe un unique élément $c(g, g^{'})$ dans A tel que :

$$s(g)s(g^{'}) = i(c(g, g^{'}))s(gg^{'})$$

On remarque qu'alors s est un morphisme si et seulement si $c = Ob(s)$ est nulle.

Lemme 1.1.3. *Soient s une section ensembliste de π et $c = Ob(s)$. On a :*

$$g.c(g^{'}g^{''}) - c(gg^{'}, g^{''}) + c(g, g^{'}g^{''}) - c(g, g^{'}) = 0,\ \forall g, g^{'}, g^{''} \in G$$

Définition 1.1.3. *Si A est un G-module, on note $Z^2(G, A)$ l'ensemble des fonctions vérifiant l'identité du lemme précédent. Une telle fonction est appelée 2-cocycle de G à valeurs dans A.*

Une autre section de π que s est de la forme $s_\varepsilon : g \mapsto i(\varepsilon(g))s(g)$ où ε est une fonction arbitraire de G dans A. Les deux 2-cocycles $c = Ob(s)$ et $c_\varepsilon = Ob(s_\varepsilon)$ sont alors liés par :

$$c_\varepsilon(g, g^{'}) = c(g, g^{'}) + g.\varepsilon(g^{'}) - \varepsilon(gg^{'}) + \varepsilon(g)$$

Définition 1.1.4. *Si A est un G-module, on note $B^2(G, A)$ l'ensemble des fonctions $\partial\varepsilon : G \times G \to A$ de la forme $g, g^{'} \mapsto g.\varepsilon(g^{'}) - \varepsilon(gg^{'}) + \varepsilon(g)$ avec $\varepsilon : G \to A$. Une telle fonction f est appelée 2-cobord de G à valeurs dans A.*

Définition 1.1.5. *Pour tout G-module A, le groupe $B^2(G, A)$ est un sous-groupe de $Z^2(G, A)$ et on définit le 2-ème groupe de cohomologie de G à valeurs dans A comme le groupe abélien quotient :*

$$H^2(G, A) = Z^2(G, A)/B^2(G, A)$$

Proposition 1.1.2. *Si s est une section de π, la classe de $Ob(s)$ ne dépend pas du choix de la section s. On la note $[E]$ et on l'appelle classe de cohomologie assoicée à* **??**. *La sec* **??** *est scindée si, et seulement si sa classe $[E]$ est nulle.*

Théorème 1.1.4 (Schur-Zassenhaus, Cohomologique)**.** *Soient G un groupe et A un G-module :*

1. *Si G est fini, alors $|G|\,x = 0$ pour tout $x \in H^2(G, A)$*
2. *Si A est fini, alors $|A|\,x = 0$ pour tout $x \in H^2(G, A)$*

En particulier, si G et A sont finis avec $|G| \wedge |A| = 1$, on a $H^2(G, A) = 0$.