Table des matières

Dans ce cours, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ désignent les ensembles de nombres usuels (entiers naturels, entiers rationnels, nombres rationnels, réels et complexes). Pour X un de ces ensembles, X^* désigne $X - \{0\}$.

Si T est un espace topologique et A une partie de T, nous notons A° l'intérieur de A, $\overline{A}$ l'adhérence de A et $\delta A = \overline{A} - A^\circ$ sa frontière.

Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $R \in]0, +\infty]$, nous notons

$$D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < R\},$$
$$\overline{D}(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq R\},$$
$$\partial D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = R\}.$$

L'ensemble U désigne un ouvert de $\mathbb{C}$.

L'analyse complexe étudie localement ou globablement les fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes. Localement, ces fonctions sont des sommes de séries convergentes. Globablement, leur étude nécessite la mise en oeuvre d'idées issues de topologie algébrique et de la géométrie différentielle. Ce cours se concentre principalement sur les fonctions d'une variable complexe pour introduire les méthodes et les résultats principaux. Ceci permet de parcourir un large spectre mathématique et de relier de nombreux domaines entre eux : l'analyse complexe, la géométrie différentielle, la topologie algébrique, la géométrie algébrique, la théorie des surfaces de Riemann, les corps de fonctions, la géométrie hyperbolique et la géométrie conforme, la théorie des nombres, l'arithmétique...

Ce cours s'inspire librement des ouvrages classiques d'analyse complexe cités en référence.

Première partie I

FONCTIONS HOLOMORPHES

Une grande partie des résultats exposés est valide pour les fonctions analytiques sur K un corps valué complet non discret, i.e pour les fonctions développables en série entière convergente au voisinage de tout point d'un ouvert de K (voir de K^n pour les séries à plusieurs variables). Ce cours se concentre sur le cas des séries à coefficients et variable complexes.

1. Fonctions analytiques

Les fonctions analytiques généralisent la notion de séries entières convergentes et partagent de nombreuses propriétés en commun pourvu que leur domaine de définition U soit connexe. Dans ce paragraphe, nous rappelons les définitions et les résultats classiques pour les séries entières (§1.1) et les fonctions analytiques (§1.2) et nous mettons en évidence cette première manifestation de la topologie. Nous concluons par l'introduction des logarithmes complexes qui fournissent un exemple d'une fonction de la variable complexe riche en pathologies (§1.3). Cette partie s'inspire librement du chapitre VI **[Di]** et du chapitre I **[BD]**.

1.1. Rappel sur les séries entières.

— Nous rappelons brièvement les résultats élémentaires sur les séries entières pour fixer les notations.

Définition 1.1.1. — *Une* **série entière** *(complexe) est une série de la forme* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *où les coefficients* $a_n \in \mathbb{C}$ *et la variable* $z \in \mathbb{C}$.
Le **domaine de convergence** *de la série entière est l'ensemble* Δ *des nombres complexes* $z \in \mathbb{C}$ *pour lesquels la série converge. Lorsque la série converge, nous notons*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$$

la valeur de sa somme.

Le critère de Cauchy, les notions de convergence, convergence absolue (et de sommation par paquets des séries absolument convergentes), convergence uniforme et normale des séries entières sont supposés connus. Rappelons un critère utile de convergence normale :

Proposition 1.1.2. — *Soient* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite complexe et* $0 < r < r_0$. *S'il existe* $M > 0$ *tel que*

$$|a_n| r_0^n \leq M, n \geq 0,$$

alors $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *converge normalement sur* $\overline{D}(0,r)$*.*

Démonstration. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \bar{D}(0,r)$, nous avons

$$|a_n z^n| \leq |a_n| r^n \leq M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n .$$

Comme $0 < r < r_0$, $M\left(\frac{r}{r_0}\right)^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente. □

La proposition 1.1.2 permet d'établir :

Corollaire 1.1.3. — *Soit* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *une série entière et* $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ *défini par*

$$R = \sup\{r \geq 0 \text{ tel que la suite } (|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ soit bornée}\}.$$

Alors le domaine de convergence Δ *de la série vérifie*

$$D(0,R) \subset \Delta \subset \overline{D}(0,R).$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *converge normalement sur tout disque fermé* $\overline{D}(0,r) \subset D(0,R)$*.*

Définition 1.1.4. — *Soit* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *une série entière. L'élément* $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *défini par*

$$R = \sup\{r \geq 0 \text{ tel que la suite } (|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ soit bornée}\}$$

est dit **rayon de convergence** *de* f*.*

Exemples 1.1.5. — *i. Le rayon de convergence est donné par la* **formule d'Hadamard**

$$R = \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{|a_n|^{1/n}}$$

avec la convention $1/0 = +\infty$*.*
En effet si $r > r' > \liminf \frac{1}{|a_n|^{1/n}}$ *alors il existe une infinité d'indices* n *pour lesquels* $r' \geq |a_n|^{-1/n}$ *et la sous-suite correspondante* $|a_n| r^n \geq (r/r')^n$ *n'est pas bornée donc* $R \leq r$*.*
Si $r < \liminf \frac{1}{|a_n|^{1/n}}$ *alors* $1/|a_n|^{1/n} \geq r$ *pour* $n \geq n_0$ *et la suite* $|a_n| r^n$ *est bornée donc* $R \geq r$*.*
La notion de rayon de convergence se généralise aux fonctions non centrées en zéros (voir Proposition 1.1.12).
ii. (Critère de d'Alembert). Si les coefficients a_n *sont non nuls et si la limite*

$$\ell = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \in [0,+\infty]$$

existe alors le rayon de convergence est $R = 1/\ell$*.*
iii. La somme de la série entière est une fonction continue sur l'intérieur du disque de convergence (car normalement convergente sur tout compact inclus dans le disque de convergence).

iv. La somme et le produit de deux séries entières de rayon de convergence supérieur à R sont des séries entières de rayon de convergence supérieur à R.
v. La série géométrique $\sum_{n\geq 0} z^n$ admet pour rayon de convergence $R = 1$ et pour domaine de convergence $\Delta = D(0,1)$.
La série $\sum_{n\geq 1} n^n z^n$ a pour rayon de convergence $R = 0$.
Les fonctions $\exp, \sin, \cos$ *sont des séries entières de rayon de convergence $+\infty$.*
vi. Des phénomènes variés peuvent se produire sur le cercle de convergence $\delta D(0,R)$. La formule d'Hadamard montre que le rayon de convergence est inchangé en remplaçant a_n par $n^\alpha a_n$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque car $(n^\alpha)^{1/n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Cependant cela peut affecter les points situés sur la frontière du domaine de convergence : la série $\sum_{n\geq 1} z^n/n^2$ converge sur $\overline{D}(0,1)$ et la série $\sum_{n\geq 1} n^{-1} z^n$ converge sur $\overline{D}(0,1) - \{1\}$ (pour montrer la convergence en $z = e^\theta \neq 1$, nous appliquons le lemme d'Abel 1.1.6).

Par souci d'exhaustivité, nous rappelons le lemme d'Abel :

Lemme 1.1.6. — *(Lemme d'Abel). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante vers 0 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que les sommes partielles $s_n = \sum_{k=0}^n v_k$ soient bornées. Alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n v_n$ converge.*

Démonstration. — Pour tout $q > p > 0$,

$$\sum_{k=p}^{q} u_k v_k = \sum_{k=p}^{q} u_k (s_k - s_{k-1}) = -u_p s_{p-1} + \sum_{k=p}^{q-1} s_k (u_k - u_{k+1}) + u_q s_q.$$

Comme les sommes partielles sont bornées $|s_n| \leq M$, et la suite $u_n \in \mathbb{R}_+$ est décroissante vers 0

$$\left|\sum_{k=p}^{q} u_k v_k\right| \leq 3M u_p.$$

Ainsi les sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0} u_n v_n$ satisfont le critère de Cauchy donc la série converge. □

D'après l'exemple 1.1.5 ii., une série entière est continue à l'intérieur de son disque de convergence. Nous en déduisons le principe des zéros isolés :

Proposition 1.1.7. — *(Principe des zéros isolés, version séries entières). Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Si au moins un des coefficients a_n n'est pas nul, il existe $r \in]0, +\infty[$ tel que f ne s'annule pas pour $|z| \in]0, r[$.*

Démonstration. — Soit $\ell = \min\{n \in \mathbb{N} | a_n \neq 0\}$. Alors

$$f(z) = \sum_{n\geq \ell} a_n z^n = z^\ell g(z)$$

avec $g(z) = a_\ell + a_{\ell+1}z + \cdots$ et $g(0) = a_\ell \neq 0$. Comme g est la somme d'une série entière, elle est continue à l'intérieur de son disque de convergence, il existe donc un voisinage de 0 sur lequel elle ne s'annule pas. □

Exemple 1.1.8. — *i. Si la série entière $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est convergente sur $D(0,r)$, $r > 0$ et si $f(z_m) = 0$ pour une suite de nombres complexes distincts $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ qui converge vers zéro, alors f est nulle.*
ii. Le principe des zéros isolés (Proposition 1.1.7) montre l'unicité du développement de f à l'intérieur de son disque de convergence.

La formule d'Hadamard (Exemples 1.1.5 i. et iv.) permet de montrer qu'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à l'intérieur de son disque de convergence et d'exprimer ses dérivées complexes.

Définition 1.1.9. — *Une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ admet une* **dérivée** *au point z_0 par rapport à la variable complexe z si*

$$\lim_{u\longrightarrow 0} \frac{f(z_0+u) - f(z_0)}{u}$$

existe. La limite est alors appelée dérivée de f au point z_0 et est notée $f'(z_0)$ ou $\frac{df}{dz}(z_0)$.

Proposition 1.1.10. — *Soit $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors la dérivée complexe $f'(z)$ existe en tout point de $D(0,R)$ et cette dérivée est donnée par la dérivée terme à terme de la série :*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}.$$

De façon analogue, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, les séries entières dérivées ℓ-ièmes de f

$$f^{(\ell)}(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(n+\ell)!}{n!} a_{n+\ell} z^n$$

ont pour rayon de convergence R.

Démonstration. — D'après la formule du binôme, en remarquant $\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)}{p(p-1)}\binom{n-2}{p-2} \leq n(n-1)\binom{n-2}{p-2}$,

$$\begin{array}{rcl} \left|\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1}\right| & \leq & \sum_{p=2}^n \binom{n}{p} |h|^{p-1}|z|^{n-p}, \\ & \leq & n(n-1)|h| \sum_{p=2}^n \binom{n-2}{p-2} |h|^{p-2}|z|^{n-p}, \\ & \leq & n(n-1)|h|(|z|+|h|)^{n-2}. \end{array}$$

D'après la formule d'Hadamard, la dérivée terme à terme admet R pour rayon de convergence. Donc pour $|h| \leq \delta < R - |z|$, $|z| + |h| \leq |z| + \delta < R$

$$\left|\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}\right| \leq |h| \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)|a_n|(|z|+|h|)^{n-2}.$$

De même d'après la formule d'Hadamard la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}z^n$ a pour rayon de convergence R, donc

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)|a_n|(|z|+|h|)^{n-2} < +\infty.$$

D'où,

$$\lim_{h\in\mathbb{C}^*, h\longrightarrow 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}.$$

□

Nous en déduisons

Corollaire 1.1.11. — *Une série entière $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R>0$ admet sur $D(0,R)$ une primitive complexe*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

série entière de rayon de convergence R telle que $F'(z)=f(z)$.
Les autres primitives sont $F(z)+c$ où $c\in\mathbb{C}$ est une constante.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer la proposition 1.1.10 à la fonction F pour démontrer $F'=f$.
De plus une fonction G sur $D(0,R)$ admettant une dérivée complexe G' nulle est necessairement constante à $G(0)$ (considérer les fonctions réelles $u(t)=G(tz)$, $t\in[0,1]$ qui ont pour dérivées $u'(t)=0$). Donc deux primitives de f diffèrent par une constante. □

Une série entière est somme de sa série de Taylor en tout point intérieur à son disque de convergence :

Proposition 1.1.12. — *Soit $f(z)=\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$. Soit $z_0\in D(0,R)$. Alors la série entière*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) w^n$$

a un rayon de convergence supérieur à $R-|z_0|$ et pour tout $z\in D(z_0, R-|z_0|)$,

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n.$$

Démonstration. — La démonstration est conséquence de la sommation par paquet des séries absolument convergentes et de la formule d'Hadamard.

D'après la Proposition 1.1.10,

$$f^{(\ell)}(z_0) = \sum_{q\geq 0} \frac{(\ell+q)!}{q!} a_{\ell+q} z_0^q.$$

Pour $|z_0| \leq r < R$, nous avons

$$\sum_{\ell\geq 0} \frac{1}{\ell!} |f^{(\ell)}(z_0)|(r-|z_0|)^\ell \leq \sum_{\ell,q\geq 0} \frac{(\ell+q)!}{\ell!q!} |a_{\ell+q}||z_0|^q (r-|z_0|)^\ell \leq \sum_{n\geq 0} |a_n| r^n < +\infty.$$

La série $\sum_{\ell,q\geq 0} \frac{(\ell+q)!}{\ell!q!} a_{\ell+q} z_0^q (z-z_0)^\ell$ converge absolument. Nous pouvons calculer sa somme en regroupant les termes de façon arbitraire. Ainsi

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n\geq 0} a_n z^n = \sum_{n\geq 0} a_n \left(\sum_{0\leq \ell\leq n} \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!} (z-z_0)^\ell z_0^{n-\ell} \right) \\ &= \sum_{\ell\geq 0} \frac{(z-z_0)^\ell}{\ell!} \left(\sum_{q\geq 0} \frac{(\ell+q)!}{q!} a_{\ell+q} z_0^q \right) = \sum_{\ell\geq 0} \frac{(z-z_0)^\ell}{\ell!} f^{(\ell)}(z_0). \end{aligned}$$

□

1.2. Fonctions analytiques. — La définition des fonctions analytiques (Définition 1.2.1) est de nature locale. Nous pourrons déduire des informations de nature globale sur f en faisant des hypothèses topologiques supplémentaires sur l'ouvert U : connexité pour le principe des zéros isolés (Proposition 1.2.7), simple connexité pour le théorème de Cauchy (Théorème 2.3.1).

Définition 1.2.1. — *Une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite* **analytique** *(complexe) si elle est développable en série entière au voisinage de chaque point de U : pour tout $z_0 \in U$, il existe $r > 0$ avec $D(z_0, r) \subset U$ et une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n w^n$ de rayon de convergence $R > r$ telle que*

$$\forall z \in D(z_0, r), f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n.$$

Exemples 1.2.2. — *i. Un polynôme est une fonction analytique en tout point de $\mathbb{C}$. En effet, d'après la formule de Taylor :*

$$P(z) = P(z_0) + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!} P^{(k)}(z_0)(z-z_0)^k.$$

ii. (Analyticité des séries entières). La somme d'une série entière est analytique à l'intérieur de son disque de convergence.
iii. L'ensemble des fonctions analytiques sur l'ouvert U est une algèbre sur $\mathbb{C}$.
iv. La composée de deux fonctions analytiques est analytique (là où elle est définie).
v. La fonction $1/z$ est analytique sur $\mathbb{C} - \{0\}$. Les fonctions rationnelles sont analytiques sur leur domaine de définition.

vi. Les fonctions $\exp, \cos, \sin$ *sont analytiques sur* $\mathbb{C}$.

Des propriétés locales de régularité des séries entières (Proposition 1.1.10), nous déduisons

Proposition 1.2.3. — *Une fonction analytique sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ y admet des dérivées de tous ordres qui sont des fonctions analytiques sur U.*
De plus pour tout $z_0 \in U$, il existe $D(z_0, r) \subset U$, $r > 0$ dans lequel f est égale à sa série de Taylor

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \cdots + \frac{1}{p!} f^{(p)}(z_0)(z - z_0)^p + \cdots$$

qui converge sur $D(z_0, r)$.

Du principe des zéros isolés pour les séries entières (Proposition 1.1.7), nous déduisons :

Corollaire 1.2.4. — *Toute fonction analytique sur U admet un unique développement en série entière au voisinage de chaque point de U.*

Pour obtenir des informations de nature globable, nous devons supposer que U est connexe. Sous cette hypothèses, le corollaire 1.2.4 permet d'établir le lemme utile suivant :

Lemme 1.2.5. — *Supposons que U soit connexe. Si f est une fonction analytique sur U telle que f s'annule sur un ouvert non-vide de U, alors f est identiquement nulle sur U.*

Démonstration. — Soit $A = \{u \in U | f \text{ est nulle au voisinage de } u\}$. Alors A est un ouvert non vide. De plus A est fermé car pour toute suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans A convergente vers b, nous avons $f^{(\ell)}(b_n) = 0$ pour tout n, ℓ. Par passage à la limite, nous obtenons $f^{(\ell)}(b) = 0$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$. Donc $b \in A$. Comme U est connexe, $A = U$, et f est identiquement nulle sur U. □

Exemple 1.2.6. — *Une fonction analytique nulle sur un ouvert non vide contenu dans $\mathbb{C}$ est nulle sur $\mathbb{C}$. Cette propriété n'est pas vérifiée pour les fonctions de $\mathbb{R}^2$ seulement $\mathcal{C}^\infty$.*

Proposition 1.2.7. — *(Principe des zéros isolés, version fonctions analytiques). Soit f une fonction analytique sur un ouvert connexe U. Si f n'est pas identiquement nulle, ses zéros sont isolés, i.e si $z_0 \in U$ avec $f(z_0) = 0$ alors il existe $r > 0$ tel que z_0 soit le seul zéro de f sur $D(z_0, r)$.*

Démonstration. — Sinon il existe une suite infinie $u_n \in U$ de zéros distincts de f qui converge vers $u \in U$. Le principe des zéros isolés (Proposition 1.1.7) pour f somme d'une série entière au voisinage de u montre que f est nulle sur un voisinage de u. Donc f est identiquement nulle sur U connexe (Lemme 1.2.5). □

Observons que l'hypothèse de connexité de l'ouvert de définition U donne des informations de nature globale via l'hypothèse locale de développement en série entière (Proposition 1.2.7). De façon analogue, nous avons le théorème utile suivant, dit principe du prolongement analytique :

Théorème 1.2.8. — *(Principe du prolongement analytique). Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, f, g des fonctions analytiques sur U. Si f et g coincident sur une partie Σ de U qui a un point d'accumulation dans U alors elles coincident sur U.*

Démonstration. — La fonction $f - g$ est analytique sur U connexe et admet un zéro non isolé. Donc $f = g$ d'après le principe des zéros isolés (Proposition 1.2.7). □

Exemples 1.2.9. — *i. Le théorème du prolongement analytique ne garantit pas l'existence mais seulement l'unicité d'un prolongement analytique s'il existe.*
Nous l'appliquons notamment lorsque la fonction analytique f est définie par une intégrale sur un domaine V et que f coincide sur $U \subset V$ avec une fonction g qui admet un développement en série entière sur U. Alors nous pouvons prolonger g par f sur V. Cela permet d'identifier deux définitions d'une même fonction.
ii. Dans les applications du théorème du prolongement analytique, nous prenons souvent Σ ouvert de U ou Σ courbe dans U, par exemple l'intersection de l'axe réel avec U.
iii. Si U_1 et U_2 sont deux ouverts connexes contenant U sur lesquels f admet des prolongements analytiques f_1 et f_2. En général, $f_1 \neq f_2$ sur $U_1 \cap U_2$ (voir par exemple le logarithme (§1.3) lorsque $U_1 \cap U_2$ n'est pas connexe).

Définition 1.2.10. — *Etant donnée une fonction analytique f dans un ouvert U de $\mathbb{C}$, une fonction analytique F dans U est dite* **primitive** *de f si $F'(z) = f(z), z \in U$.*

En général une fonction analytique n'admet pas de primitive (même sur un ouvert connexe !). Le paragraphe suivant fournit des contre-exemples et révèlent des phénomènes nouveaux spécifiques à l'étude des fonctions de la variable complexe (§1.3).

1.3. Détermination du logarithme. — La fonction exponentielle est définie par la série entière de rayon de convergence $R = +\infty$:

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*, \exp(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}.$$

Sur $\mathbb{C}$ (disque de convergence), la dérivée est obtenue par dérivation terme à terme. Donc l'exponentielle complexe est égale à sa dérivée. Cette propriété et la condition que sa valeur en 0 est 1 la caractérisent (Corollaire 1.1.11).

Lemme 1.3.1. — *La fonction exponentielle vérifie*

$$\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z'), z, z' \in \mathbb{C}.$$

Démonstration. — En effet la fonction $f(z) = e^{z+z'}e^{-z}$ a pour dérivée $f'(z) = e^{z+z'}e^{-z} - e^{z+z'}e^{-z} = 0$. Donc f est constante à $f(0) = e^{z'}$. □

Définition 1.3.2. — *Soit $U \subset \mathbb{C}^*$ ouvert. Une fonction continue* $\arg : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite* **détermination continue de l'argument** *sur U si pour tout $z \in U$,* $\exp(i\arg(z)) = \frac{z}{|z|}$.

Exemple 1.3.3. — *Deux déterminations continues de l'argument définies sur un ouvert connexe diffèrent d'un élément de $2\pi\mathbb{Z}$.*

Pour $z = x+iy \in \mathbb{C}-\mathbb{R}_-$, nous avons une détermination continue de l'argument définie par

$$\mathrm{Arg} : \mathbb{C} - \mathbb{R}_- \longrightarrow]-\pi,\pi[, z \mapsto 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

en prenant la racine carrée de z appartenant au demi-plan $\Re z > 0$.

Définition 1.3.4. — *La détermination continue de l'argument*

$$\mathrm{Arg} : \mathbb{C} - \mathbb{R}_- \longrightarrow]-\pi,\pi[$$

est dite **détermination principale de l'argument**.

Exemple 1.3.5. — *Sur le plan complexe privé de la demi-droite $\mathbb{R}_-e^{i\theta}$, il existe une détermination continue de l'argument*

$$\arg_\theta : \mathbb{C} - \mathbb{R}_-e^{i\theta} \longrightarrow]\theta-\pi,\theta+\pi[, z \mapsto \mathrm{Arg}(ze^{-i\theta}) + \theta.$$

D'après le lemme 1.3.1, $\exp(x+iy) = \exp(x)\exp(iy)$, $x, y \in \mathbb{R}$ et nous avons

$$z = \log|w| + i\arg(w) \Longrightarrow \exp(z) = w \tag{1}$$

où $\arg(w)$ est une détermination continue de l'argument. Ceci nous conduit à la définition suivante :

Définition 1.3.6. — *Soit $U \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert. Une fonction continue $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite,* **détermination du logarithme** *sur U si*

$$\forall z \in U, \exp(f(w)) = w.$$

D'après (1), l'existence d'une détermination continue du logarithme est équivalent à l'existence d'une détermination de l'argument. De plus, s'il existe une détermination du logarithme f sur U connexe, alors l'ensemble des déterminations du logarithme sur U est $\{f + 2i\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$.

Exemples 1.3.7. — *i. Il n'existe pas de détermination (continue) f du logarithme sur $\mathbb{C}^*$ (ouvert connexe). En effet si f existe, alors $u = \Im(f)$ est une détermination continue de l'argument sur $\mathbb{C}^*$. L'application $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $v(\theta) = u(e^{i\theta})$ est continue et 2π-périodique. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, θ et $v(\theta)$ sont des arguments de $e^{i\theta}$ donc $v(\theta) - \theta = 2\pi n(\theta)$, avec $n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ continue donc constante, ce qui est contraire à la périodicité de v.*
ii. Sur le plan complexe privé de la demi-droite $\mathbb{R}_- e^{i\theta}$, il existe une détermination du logarithme

$$\log_\theta : \mathbb{C} - \mathbb{R}_- e^{i\theta} \longrightarrow \mathbb{C}, \log_\theta(w) = \log|w| + i \arg_\theta(w)$$

où $\arg_\theta(w) \in]\theta - \pi, \theta + \pi[$.

Avec les notations de l'exemple 1.3.7 ii.,

Définition 1.3.8. — *Nous appelons* **détermination principale du logarithme** *la fonction* $\log_0 : \mathbb{C} - \mathbb{R}_- \longrightarrow \mathbb{C}$. *Nous la notons* $\log$.

Exemples 1.3.9. — *i. Par intégration terme à terme du développement en série entière de $\frac{1}{1+z}$ et vu que $\log 1 = 0$, nous avons*

$$\log(1+z) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}, z \in D(0,1).$$

Par conséquent $\log$ *est analytique (développable en série entière) sur $D(1,1)$.*
ii. Soit $z_0 = |z_0| e^{i\theta_0} \in \mathbb{C}^*$. Alors sur $D(z_0, |z_0|)$ la somme de la série

$$g(z) = \log|z_0| + i\theta_0 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{z - z_0}{z_0} \right)^n$$

est une détermination (analytique) du logarithme.
En effet, en notant $f(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ la détermination du logarithme sur $D(1,1)$ définie en ii., nous avons $g(z) = \log|z_0| + i\theta_0 + f(z/z_0)$. Donc

$$exp(g(z)) = |z_0| e^{i\theta_0} \exp(f(z/z_0)) = z_0 \frac{z}{z_0} = z.$$

Proposition 1.3.10. — *Soit $U \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert connexe et $\ell : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue. Nous avons équivalence entre les propriétés suivantes :*
i. ℓ est une détermination (continue) du logarithme dans U à l'addition près d'une constante.
ii. Si ℓ est une primitive analytique de $1/z$ dans U.
Ainsi toute détermination du logarithme sur U est analytique.

Démonstration. — *i.* $\Longrightarrow$ *ii.* Soit $z_0 = |z_0|e^{i\theta_0} \in U$, $D(z_0, r) \subset U$ avec $r < |z_0|$ et

$$g(z) = \log|z_0| + i\theta_0 + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{z - z_0}{z_0}\right)^n.$$

Ainsi il existe une constante c telle que $\ell + c$ et g sont deux déterminations du logarithme sur $D(z_0, r)$. Donc il existe $n \in \mathbb{Z}$, telle que

$$\ell(z) = g(z) + c + 2i\pi n, z \in D(z_0, r).$$

De plus, $\ell'(z) = g'(z) = 1/z$ sur $D(z_0, r)$. Donc ℓ est une primitive analytique de $1/z$ sur U.
ii. $\Longrightarrow$ *i.* Soit F une primitive de $\frac{1}{z}$ dans U. Dans U,

$$\left(\frac{1}{z}\exp F(z)\right)' = \left(-\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}F'(z)\right)\exp F(z) = 0.$$

Ainsi $\frac{1}{z}\exp F(z) = c$ est une constante non nulle. Soit C tel que $\exp C = c$ ainsi $\exp(F(z) - C) = z$ dans U et $F - C$ est un détermination du logarithme dans U. □

Exemple 1.3.11. — *Nous avons* $\exp \circ \log(z) = z$, *donc* $\log'(z) = \frac{1}{z}$ *et* $\log(1) = 0$.

Définition 1.3.12. — *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Nous appelons* **détermination continue** *de z^α toute application continue $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ telle qu'il existe une détermination du logarithme $\ell(z)$ de z tel que $g(z) = e^{\alpha\ell(z)}$. Sur l'ouvert $U = \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$, nous appelons* **détermination principale** *de z^α la fonction* $z \mapsto \exp(\alpha \log z)$.

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique. Les questions d'existence d'une primitive (analytique) de f et d'une fonction analytique g telle que $\exp(g) = f$ sont traitées dans la section suivante (§2, Théorème 2.3.2). Pour cela, l'hypothèse de connexité de U n'est pas suffisante (voir Exemple 1.3.7.i.), ce qui nous conduit à introduire la simple connexité (§2.1).

2. La théorie de Cauchy

Le lien entre les valeurs d'une fonction analytique aux différents points d'un ensemble ouvert connexe s'est déjà manifesté par le principe du prolongement analytique (Théorème 1.2.8). Il s'illustre de façon encore plus frappante via la théorie de Cauchy : les valeurs d'une fonction analytique dans un disque sont déterminées par ses valeurs sur le cercle frontière du disque.
Dans cette section §2 nous définissons la notion topologique de simple connexité (§2.1) et les intégrales sur un chemin (§2.2). Cette hypothèse topologique sur l'ouvert de définition d'une fonction analytique garantit l'existence d'une primitive (Théorème 2.3.2) via la théorie de Cauchy (§2.3-2.4). Les inégalités de Cauchy

(§2.5) permettent également d'établir les théorèmes classiques de Liouville 2.5.3 et de d'Alembert-Gauss 2.5.4.
Cette section s'inspire librement du chapitre VII du livre de Dieudonné [Di].

2.1. Homotopie. Simple connexité. — Nous définissons dans ce paragraphe (Définition 2.1.7) la simple connexité, hypothèse topologique sous laquelle une fonction analytique admet une primitive (Théorème 2.3.2).

Définition 2.1.1. — *Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Un* **chemin** $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *est une application continue. Le point $\gamma(a)$ est appelé* **origine** *et $\gamma(b)$ est dit* **extrémité**. *Sauf précision contraire, nous orientons un tel chemin dans le sens des paramètres croissants.*
Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, le chemin est dit **lacet** *d'origine $\gamma(a)$.*

Exemples 2.1.2. — *i. Si γ est constant dans $[a,b]$, alors $\gamma([a,b])$ est réduit à un point. Il est alors appelé* **chemin (ou lacet) constant**.
ii. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, t \mapsto e^{2i\pi\alpha t}$ est un chemin tel que $\gamma([0,1])$ est une partie du cercle unité $\partial D(0,1)$. Si $\alpha = n \in \mathbb{Z}^*$, $\gamma([0,1])$ est le cercle tout entier et tout point du cercle est obtenu pour $|n|$ valeurs distinctes de t. Nous disons que γ est le cercle unité parcouru $|n|$ fois. Il ne faut pas confondre le chemin γ, une courbe paramétrée, avec la courbe image $\gamma([0,1])$.
iii. Si $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est un chemin, alors le **chemin opposé**

$$\gamma^0 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \gamma(a+b-t)$$

est le chemin γ parcouru en sens inverse.
iv. Etant donnés deux chemins

$$\gamma_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}, \gamma_2 : [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}, \text{ avec } \gamma_1(b) = \gamma_2(c),$$

la **juxtaposition** *de γ_1 et γ_2 est le chemin $\gamma = \gamma_1 \wedge \gamma_2 : [a, d+b-c] \longrightarrow \mathbb{C}$,*

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{pour } a \leq t \leq b, \\ \gamma_2(t-b+c) & \text{pour } b \leq t \leq d+b-c. \end{cases}$$

Définition 2.1.3. — *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\gamma_i : I \longrightarrow U$, $i = 1,2$ deux chemins. Une* **homotopie** *de γ_1 à γ_2 dans U est une application continue $\varphi : I \times J \longrightarrow U$ où $I = [a,b]$ et $J = [c,d]$ sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, telle que*

$$\varphi(t,c) = \gamma_1(t) \text{ et } \varphi(t,d) = \gamma_2(t), t \in I.$$

S'il existe une homotopie de γ_1 à γ_2 dans U, γ_2 est dit **homotope à** *γ_1 dans U. Si γ_1 et γ_2 sont des lacets, ils sont dits* **homotopes** *s'ils sont homotopes comme chemin avec de plus $\varphi(a,s) = \varphi(b,s), s \in J$.*
Un lacet contenu dans U est dit **homotope à un point** *dans U s'il est homotope dans U à un lacet constant.*

Exemples 2.1.4. — *i. La notion d'homotopie dépend du choix de l'ouvert U.*
ii. La notion d'homotopie pour les chemins (ou les lacets) est une relation d'équivalence.

Définition 2.1.5. — *Un espace topologique X est dit* **connexe par arcs** *si tout couple points de X est relié par un chemin dont le support est inclus dans X.*

Exemples 2.1.6. — *i. Un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ est localement connexe par arcs donc connexe par arcs.*
ii. Une partie $V \subset \mathbb{C}$ étoilée par rapport au point $a \in V$ (i.e. pour tout $z \in U$, $[a, z] \subset U$) est connexe par ars.

Définition 2.1.7. — *Un espace topologique X connexe par arcs est dit* **simplement connexe** *si tout lacet dans X est homotope à un point dans X.*

Exemples 2.1.8. — *i. Un espace topologique X connexe par arcs est simplement connexe si et seulement si tous les chemins de mêmes extrémités sont homotopes.*
ii. Un ouvert étoilé $U \subset \mathbb{C}$ par rapport à un point $a \in U$ est simplement connexe. En effet $\gamma(t, s) = sa + (1 - s)\gamma_1(t)$ est une homotopie de lacets.
En particulier, le plan $\mathbb{C}$, un demi-plan, un disque ouvert, l'intérieur d'un rectangle ou d'un triangle sont simplement connexes.
Le disque $|z| < 1$ auquel nous ôtons un nombre fini de segments $z = te^{i\theta_k}, 0 < \rho_k \leq t < 1$ est étoilé par rapport à zéro donc simplement connexe.
Une intersection finie d'ensembles étoilés par rapport à a est étoilé par rapport à a donc simplement connexe.
iii. Le demi-plan ouvert $\Im z > 0$ auquel nous ôtons une nombre fini de demi-droites fermées $z = t + i\beta_k$, $t \in] - \infty, \alpha_k]$ est simplement connexe non étoilé.
iv. L'ouvert $\mathbb{C}^*$ n'est pas simplement connexe car le cercle unité n'est pas homotope à un chemin constant.

2.2. Intégrales sur un chemin. — Pour définir une intégrale de chemin, nous avons besoin d'une hypothèse supplémentaire sur le **chemin** $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$. Dorénavant, dans l'ensemble de ce cours, les chemins (et les lacets) sont supposés $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Exemple 2.2.1. — *La* **longueur** *d'un chemin $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est*

$$\operatorname{long}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Définition 2.2.2. — *Deux chemins $\gamma_i : I_i \longrightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, 2$ sont dits* **équivalents** *s'il existe une bijection croissante $\varphi : I_2 \longrightarrow I_1$ avec φ et φ^{-1} continues et $\mathcal{C}^1$ par morceaux telle que*

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(\varphi(t)), t \in I_2.$$

Définition 2.2.3. — *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et $\gamma : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin avec $\gamma(I) \subset U$. Alors la fonction $t \longrightarrow f(\gamma(t))\gamma'(t)$ est continue par morceaux (donc intégrable) dans $[a,b]$. Nous appelons* **intégrale de f le long du chemin γ**

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f \circ \gamma(t)\gamma'(t)dt.$$

Exemples 2.2.4. — *i. Si F est une primitive de f dans U, pour tout chemin $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$,*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

En particulier si γ est un lacet, $\int_\gamma f(z)dz = 0$.
ii. L'intégrale le long d'un chemin γ dépend non seulement de l'ensemble $\gamma(I)$ mais aussi de son paramétrage. En revanche, si γ_1 et γ_2 sont deux chemins équivalents alors

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

En effet pour $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_c^d f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)dt =$$

$$= \int_c^d f(\gamma_1(\varphi(t)))\gamma_1'(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_a^b f(\gamma_1(s))\gamma_1'(s)ds = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

iii. Si le segment $[z_0, z_1] \subset U$, nous notons $\int_{[z_0,z_1]} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$ où $\gamma : [0,1] \longrightarrow U$, $\gamma(t) = (1-t)z_0 + tz_1$.
iv. Si $\partial D(z_0, r) \subset U$, soit le lacet $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow U$, $\gamma(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$. Ainsi

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\partial D(z_0,r)} f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})ire^{i\theta}d\theta.$$

v. En séparant parties réelles et imaginaires, $f = P + iQ$ et $\gamma = u + iv$, l'intégrale de f le long de γ s'écrit

$$\begin{array}{rcl} \int_\gamma f(z)dz & = & \int_a^b((P\circ\gamma)u' - (Q\circ\gamma)v')dt + i\int_a^b((Q\circ\gamma)u' + (P\circ\gamma)v')dt \\ & = & \int_\gamma(Pdx - Qdy) + i\int_\gamma(Pdy + Qdx). \end{array}$$

vi. Nous avons $\int_\gamma f(z)dz = -\int_{\gamma^0} f(z)dz$.
vii. Nous avons $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \mathrm{long}(\gamma)\max_\gamma |f|$.

2.3. Théorème de Cauchy. — Le théorème de Cauchy est un résultat important qui relie les propriétés de régularité d'une fonction analytique avec la topologie de son ensemble de définition.

Théorème 2.3.1. — *(Cauchy). Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et f une fonction analytique dans U. Si γ_1 et γ_2 sont deux lacets homotopes dans U, alors*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

En particulier si U est simplement connexe,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

pour tout lacet dans U.

Démonstration. — Soit $\gamma_1, \gamma_2 : I = [a,b] \longrightarrow U$ deux lacets et $\varphi : I \times J \longrightarrow U$, $J = [c,d]$ une homotopie de lacets de γ_1 à γ_2 dans U.

• Nous découpons $I \times J$ en rectangles $R_{hk} = [a_h, a_{h+1}] \times [c_k, c_{k+1}]$ $(0 \leq h \leq m, 0 \leq k \leq n)$ avec $\varphi(R_{hk})$ inclus dans des disques $D_{hk} \subset U$ de centre z_{hk} où la fonction f est développable en série entière en $z - z_{hk}$. L'existence d'un tel découpage s'obtient en considérant l'application continue $\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ qui à z_0 associe le rayon de convergence du développement en série entière de f au voisinage de z_0. L'image $K = \varphi(I \times J)$ du compact $I \times J$ par l'application continue φ est compacte. Donc il existe $r = \min_K \psi > 0$. Comme φ est continue sur le compact $I \times J$, il existe $\eta > 0$ tel que pour $u, u' \in I \times J$,

$$|u - u'| < \eta \Longrightarrow |\varphi(u) - \varphi(u')| < r.$$

Il suffit de prendre un cadrillage assez fin pour garantir $\mathrm{diam} R_{hk} < \eta$ ainsi $\varphi(R_{hk}) \subset D(z_{h,k}, r) = D_{hk}$.

• Sur D_{hk}, f admet une primitive (Corollaire 1.1.11). Considérons le lacet γ_{hk} formés des quatre segments dans D_{hk} joignant les images par φ des quatre sommets du rectangle R_{hk} (sauf pour $k = 0$, (resp. $k = m+1$) nous faisons l'abus de notation $[\varphi(a_h, c_k), \varphi(a_{h+1}, c_k)]$ désigne l'arc $\gamma_1([a_h, a_{h+1}])$ (resp. $\gamma_2([a_h, a_{h+1}])$)). Tous ses segments sont dans D_{hk} qui est convexe.

Ainsi $\int_{\gamma_{hk}} f(z)dz = 0$ (voir Exemple 2.2.4i.) et

$$\int_{[\varphi(a_h,c_k),\varphi(a_h,c_{k+1})]} f(z)dz + \int_{[\varphi(a_h,c_{k+1}),\varphi(a_{h+1},c_{k+1})]} f(z)dz$$

$$= \int_{[\varphi(a_h,c_k),\varphi(a_{h+1},c_k)]} f(z)dz + \int_{[\varphi(a_{h+1},c_k),\varphi(a_{h+1},c_{k+1})]} f(z)dz.$$

De plus $\alpha_k = \cup_{0 \leq h \leq m-1} [\varphi(a_h, c_k), \varphi(a_{h+1}, c_k)]$ est un lacet dans U. Donc en sommant les m égalités ci-dessus pour $0 \leq h \leq m-1$, nous obtenons pour $0 \leq k \leq n-1$,

$$\int_{\alpha_k} f(z)dz - \int_{\alpha_{k+1}} f(z)dz = \int_{[\varphi(a,c_k),\varphi(a,c_{k+1})]} f(z)dz + \int_{[\varphi(b,c_k),\varphi(b,c_{k+1})]} f(z)dz = 0$$

Ainsi $\int_{\alpha_0} f(z)dz = \int_{\alpha_n} f(z)dz$. Or,

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\alpha_0} f(z)dz \text{ et } \int_{\alpha_n} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Ainsi

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

□

Nous obtenons ainsi une condition sur U impliquant l'existence d'une primitive des fonctions analytiques définies sur U.

Théorème 2.3.2. — *Soit $U \in \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe.*
i. Toute fonction analytique dans U admet une primitive.
ii. Si $f : U \longrightarrow \mathbb{C}^*$ analytique, alors il existe $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ analytique tel que $\exp(g) = f$ sur U.

Démonstration. — i. Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ analytique et $z_0 \in U$. Comme U est simplement connexe, U est connexe par arcs. Ainsi pour tout $z \in U$, il existe un chemin ($\mathcal{C}^1$ par morceaux car affine par morceaux sur U localement convexe) γ_z de z_0 à z. Alors la fonction

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)dw$$

est bien définie pour $z \in U$ (l'indépendance vis-à-vis du chemin choisi résulte du théorème de Cauchy 2.3.1 et de l'hypothèse de simple connexité de U) et est une primitive de f sur U (i.e. $\frac{F(z+h)-F(z)}{h} \to f'(z)$ quand h tend vers 0).
ii. Comme f ne s'annule pas, la fonction $\frac{f'}{f}$ est analytique sur U. D'après i. elle admet une primitive g qui est analytique sur U. □

Exemple 2.3.3. — *L'ouvert connexe $\mathbb{C}^*$ n'est pas simplement connexe (Exemple 2.1.8 iii.). Le théorème de Cauchy 2.3.1 n'est pas satisfait pour la fonction $f(z) = 1/z$:*

$$\int_{\partial D(z_0,r)} \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta = \int_0^{2\pi} id\theta = 2i\pi \neq 0.$$

La fonction $f(z) = 1/z$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$ (voir Exemple 1.3.7 i.).

2.4. Formule de Cauchy. — Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe et $\gamma : I \longrightarrow U$ un lacet. Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique. La formule de Cauchy (Théorème 2.4.4) montre que les valeurs de f à l'intérieur de $\gamma(I)$ sont déterminées par les valeurs de f sur le contour $\gamma(I)$. Pour pouvoir l'exprimer, nous avons besoin d'introduire la notion d'indice d'un lacet (Définition 2.4.2) qui est un entier d'après le lemme suivant :

Lemme 2.4.1. — *Soit $\gamma : I = [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ un lacet et $a \notin \gamma(I)$. Alors*

$$j(a,\gamma) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-a} \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration. — Pour $t \in [c,d]$, nous posons

$$h(t) = \int_c^t \frac{\gamma'(s)ds}{\gamma(s)-a}.$$

Nous avons $h'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}$, sauf en un nombre fini de points de I (les points de discontinuité de γ').
Remarquons que $g(t) = e^{-h(t)}(\gamma(t)-a)$, a pour dérivée

$$g'(t) = -h'(t)e^{-h(t)}(\gamma(t)-a) + \gamma'(t)e^{-h(t)} = 0$$

sauf en un nombre fini de points de I. Comme g est continue, elle est constante et $g(c) = g(d)$.
Or $h(c) = 0$ donc $g(c) = \gamma(c) - a$ et $g(d) = e^{-h(d)}(\gamma(d)-a) = \gamma(c) - a$. Mais γ est un lacet donc $\gamma(c) = \gamma(d)$. Donc $h(d) = 2in\pi$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $j(a,\gamma) = n$ est entier. □

Définition 2.4.2. — *Soit $\gamma : I = [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ un lacet et $a \notin \gamma(I)$. L'entier $j(a,\gamma) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$ est dit* **indice** *de a par rapport au lacet γ.*

L'indice de a par rapport à γ s'interprète comme le nombre de fois que le lacet tourne autour de a lorsque a est intérieur au lacet (voir Exemple 2.4.3 v.).

Exemples 2.4.3. — *i. Soient $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ des lacets de même origine dont les images ne contiennent pas a. Alors*

$$j(a,\gamma^0) = -j(a,\gamma)$$

$$j(a,\gamma_1 \wedge \gamma_2) = j(a,\gamma_1) + j(a,\gamma_2).$$

ii. En appliquant le théorème de Cauchy à la fonction analytique $1/(z-a)$ dans $\mathbb{C} - \{a\}$, nous obtenons $j(a,\gamma_1) = j(a,\gamma_2)$, si γ_1, γ_2 sont deux lacets homotopes dans $\mathbb{C} - \{a\}$.
iii. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe et γ un lacet inclus dans U. Si $a \notin U$, alors $j(a,\gamma) = 0$ (d'après ii.).
iv. Si γ est un lacet dans $\mathbb{C}$, alors pour tout ouvert connexe $U \subset \mathbb{C} - \gamma(I)$, la fonction $z \mapsto j(z,\gamma)$ est constante dans U. En effet, soit $z \in D(z_0, r) \subset U$,

$$j(z,\gamma) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{du}{u-z} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1} \frac{du}{u-z} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{du}{u-z_0} = j(z_0,\gamma)$$

pour $\gamma_1 : t \mapsto \gamma(t) - (z - z_0)$ qui est homotope à γ via

$$\varphi(t,s) = \gamma(t) + s(z-z_0), 0 \leq s \leq 1.$$

Donc $j(\cdot,\gamma)$ *est localement constante donc constante sur* U *connexe.*
v. Soit $\gamma_n : t \mapsto e^{int}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ *le cercle unité parcouru* $n \in \mathbb{Z}$ *fois. Alors*

$$j(z_0,\gamma_n) = \begin{cases} n & si\ |z_0| < 1, \\ 0 & si\ |z_0| > 1 \end{cases}$$

En effet, d'après les exemples iii. et iv., il suffit de montrer

$$j(0,\gamma_n) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_n}\frac{du}{u} = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}\frac{nie^{nit}dt}{e^{int}} = n$$

Théorème 2.4.4. — *(Formule de Cauchy). Soit* $U \subset \mathbb{C}$ *un ouvert simplement connexe,* $\gamma : I \longrightarrow U$ *un lacet dans* U*. Soit* f *une fonction analytique sur* U*. Alors pour tout* $w \in U - \gamma(I)$,

$$j(w,\gamma)f(w) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}dz.$$

Démonstration. — La fonction

$$g : U \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & \text{si } z \neq w, \\ f'(w) & \text{si } z = w, \end{cases}$$

est analytique sur U. En effet pour $r > 0$ assez petit, f admet un développement de Taylor sur $D(w,r) \subset U$:

$$f(z) = f(w) + f'(w)(z-w) + \cdots + \frac{f^{(n)}(w)}{n!}(z-w)^n + \cdots$$

et donc pour $z \in D(w,r)$,

$$g(z) = f'(w) + \frac{f''(w)}{2!}(z-w) + \cdots + \frac{f^{(n)}(w)}{n!}(z-w)^{n-1} + \cdots$$

et g est analytique sur $D(w,r)$ et sur U.
Comme U est simplement connexe, le théorème de Cauchy 2.3.1 donne $\int_\gamma g(z)dz = 0$ et comme $w \notin \gamma(I)$, $\int_\gamma \frac{f(z)-f(w)}{z-w}dz = 0$; soit encore

$$\int_\gamma \frac{f(z)dz}{z-w} = f(w)\int_\gamma \frac{dz}{z-w} = 2i\pi j(w,\gamma)f(w).$$

□

Exemple 2.4.5. — *Soit* f *une fonction analytique sur* U, *avec* $\overline{D}(z_0,r) \subset U$ *et* γ *le cercle* $\partial D(z_0,r) : t \mapsto z_0 + re^{it}$*. Alors, d'après la formule de Cauchy 2.4.4, les valeurs de* f *sur* $D(z_0,r)$ *sont données par ses valeurs sur le cercle* γ *:*

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(z_0,r)}\frac{f(z)dz}{z-w},\ w \in D(z_0,r).$$

Réciproquement une fonction continue sur l'image $\gamma(I)$ d'un lacet définit une fonction analytique en dehors de $\gamma(I)$:

Proposition 2.4.6. — *Soit $\gamma : I = [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ un lacet et $g : \gamma(I) \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie et continue sur $\gamma(I)$. Alors*

$$f(z) = \int_\gamma \frac{g(u)du}{u-z}$$

est définie et analytique dans $\mathbb{C} - \gamma(I)$.
Précisément pour tout $w \in \mathbb{C} - \gamma(I)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$c_n = \int_\gamma \frac{g(u)du}{(u-w)^{n+1}}$$

nous avons un développement en série entière convergente

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-w)^n$$

dans tout disque ouvert de centre w de rayon $r = d(w, \gamma(I))$ et

$$f^{(n)}(w) = n! c_n = n! \int_\gamma \frac{g(u)du}{(u-w)^{n+1}}.$$

Démonstration. — Pour tout $u \in \gamma(I)$, $z \in D(w, qr)$ $q \in]0,1[$, la série

$$\frac{1}{u-z} = \frac{1}{u-w}\frac{1}{1-\frac{z-w}{u-w}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-w)^n}{(u-w)^{n+1}}$$

est convergente. Comme $(g \circ \gamma)\gamma'$ est continue par morceaux sur $[c,d]$, il existe M tel que

$$|g(\gamma(t))\gamma'(t)| \leq M.$$

Donc

$$\left| g(\gamma(t))\gamma'(t) \frac{(z-w)^n}{(\gamma(t)-w)^{n+1}} \right| \leq M \frac{q^n}{r}, t \in [c,d].$$

Ainsi la série sous l'intégrale est normalement convergente et

$$f(z) = \int_c^d \frac{g(\gamma(t))\gamma'(t)dt}{\gamma(t)-z} = \int_c^d g(\gamma(t))\gamma'(t) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-w)^n}{(\gamma(t)-w)^{n+1}} \right) dt$$

et $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-w)^n$. □

Exemple 2.4.7. — *Soit f analytique sur U et γ le bord du disque $\overline{D}(w,r) \subset U$. D'après la formule de Cauchy et la proposition 2.4.6 avec $g = f/2i\pi$:*

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \frac{f(w+re^{it})}{e^{nit}} dt.$$

Corollaire 2.4.8. — *i. Soit f une fonction analytique sur U. Alors pour tout $a \in U$, la série de Taylor de f au voisinage de a est convergente et a pour somme $f(z)$ dans le plus grand disque ouvert de centre a contenu dans U.*

ii. Si f est analytique sur $\mathbb{C}$, sa série de Taylor en tout point de $\mathbb{C}$ est convergente sur $\mathbb{C}$.

Démonstration. — i. Nous appliquons la formule de Cauchy 2.4.4 sur le contour γ d'un disque $D(a,r) \subset U$: pour $z \in D(a,r)$, $j(z,\gamma) = 1$ et

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

La proposition 2.4.6 donne un développement en série entière de f en $z-a$ convergeant sur $D(a,r)$. Par unicité du développement (Corollaire 1.2.4), il s'agit de la série de Taylor. En faisant tendre r vers $d(a, \mathbb{C} - U)$, nous obtenons le résultat annoncé.
ii. est une conséquence directe de i. pour $U = \mathbb{C}$. □

L'écriture locale de f analytique comme somme de sa série de Taylor (Corollaire 2.4.8) est riche de conséquences pratiques et utiles pour les calculs. Nous en énonçons quelques uns ci-dessous.

Le corollaire 2.4.9 établit qu'une fonction localement nulle est globablement nulle. Nous pouvons également le voir comme conséquence directe de la définition d'une fonction analytique.

Corollaire 2.4.9. — *Supposons U connexe, $a \in U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ analytique. Si pour tout $k > 0$, $f^{(k)}(a) = 0$ alors f est constante sur U.*

Démonstration. — D'après le Corollaire 2.4.8, f est localement somme de sa série de Taylor. Donc f est constante sur un ouvert contenant a. Soit $\Omega = \{w \in U, \forall k > 0, f^{(k)}(w) = 0\}$. Cet ensemble est ouvert, non vide et fermé. Par connexité de U, $\Omega = U$, $f' = 0$ sur U et f est contante sur U. □

Théorème 2.4.10. — *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ analytique non constante au voisinage de $a \in U$. Si $f(a) = 0$, il existe un unique entier $m \geq 1$ et $g : V \longrightarrow \mathbb{C}$ analytique sur un voisinage V de a tels que*

$$f(z) = (z-a)^m g(z), g(a) \neq 0, z \in V.$$

En particulier, le point a possède un voisinage dans lequel il est l'unique zéro de f.

Démonstration. — D'après le Corollaire 2.4.9, si f n'est pas constante dans un voisinage de a, il existe $m \geq 1$ tel que

$$f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0 \text{ et } f^{(m)}(a) \neq 0.$$

Comme $f(a) = 0$, nous pouvons factoriser $(z-a)^m$ dans le développement en série entière (de Taylor) de f au voisinage de a. □

Définition 2.4.11. — *Sous les hypothèses du Théorème 2.4.10, l'entier m est dit* **ordre** *de f en a et est noté* $\operatorname{ord}(f,a)$.

Exemple 2.4.12. — *En corollaire du Théorème 2.4.10, nous retrouvons le principe des zéros isolés 1.2.7 et le principe du prolongement analytique 1.2.8.*

2.5. Inégalités de Cauchy. Premières applications.—

Proposition 2.5.1. — *(Inégalités de Cauchy). Soit f analytique sur U avec $\overline{D}(w,r) \subset U$ $(r > 0)$. Alors*

$$\forall n \geq 0, \quad |f^{(n)}(w)| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{z \in \partial D(w,r)} |f(z)|.$$

Démonstration. — Notons γ le lacet $t \mapsto w + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Les inégalités de Cauchy s'obtiennent directement de

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \frac{f(w + re^{it})}{e^{nit}} dt$$

(voir Exemple 2.4.7). □

Proposition 2.5.2. — *Soit f analytique sur $\mathbb{C}$ telle que*

$$\exists A, B \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq A(1 + |z|)^B.$$

Alors f est un polynôme de degré inférieur ou égal à B.

Démonstration. — Soit $n \geq \lfloor B \rfloor + 1 > B$. Les inégalités de Cauchy et la majoration $\sup_{\partial D(z,r)} |f| \leq A(1 + |z| + r)^B$ entrainent

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{r^n} A(1 + |z| + r)^B, z \in \mathbb{C}, r > 0.$$

En faisant tendre r vers $+\infty$, nous en déduisons que $f^{(n)}(z) = 0$ pour tout $n \geq \lfloor B \rfloor + 1 > B$ donc f est un polynôme de degré inférieur ou égal à $\lfloor B \rfloor$. □

Dans le cas $B = 0$, nous obtenons le théorème de Liouville :

Théorème 2.5.3. — *(Liouville). Soit f une fonction analytique et bornée sur $\mathbb{C}$. Alors f est constante.*

Le théorème de d'Alembert-Gauss est une conséquence immédiate du théorème de Liouville.

Théorème 2.5.4. — *(d'Alembert-Gauss). Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[z]$ de degré $d \geq 1$ admet une racine dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. — Par l'absurde si $P(z) = \sum_{i=0}^{d} a_i z^i$ ne s'annule pas, alors la fonction $f = 1/P$ est analytique sur $\mathbb{C}$ et $|f(z)| \sim \frac{1}{|a_d||z|^d}$ tend vers 0 quand $|z|$ tend vers $+\infty$. En particulier f est bornée sur $\mathbb{C}$ donc constante d'après le théorème de Liouville 2.5.3. Ainsi $P = 1/f$ est constant, ce qui est absurde. □

La topologie de l'ensemble de définition d'une fonction analytique permet d'en déduire quelques propriétés. Réciproquement, l'étude des fonctions analytiques donne des propriétés topologiques des ensembles de définition sous-jacents :

Théorème 2.5.5. — *Les ouverts* $\mathbb{C}$ *et* $D(0,1)$ *sont homéomorphes mais pas isomorphes.*

Démonstration. — En identifiant $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$, la fonction

$$f : D(0,1) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{z}{1-|z|^2}$$

est une application bijective de deux variables réelles $\mathcal{C}^\infty$ (fraction rationnelle) dont la réciproque est $\mathcal{C}^\infty$. Donc f est un homéomorphisme de $D(0,1)$ dans $\mathbb{C}$.
S'il existe un isomorphisme (bijection analytique de réciproque analytique) $f : \mathbb{C} \longrightarrow D(0,1)$ alors f analytique sur $\mathbb{C}$ bornée donc constante d'après le théorème de Liouville (Théorème 2.5.3) ce qui est absurde. □

3. Fonctions holomorphes

Cette section est dévolue à l'étude des fonctions holomorphes. Contrairement aux fonctions analytiques qui sont définies par une propriété locale exigeante (existence d'un développement en série entière), la définition d'une fonction holomorphe est très simple à vérifier : existence d'une dérivée complexe en tout point (§3.1). Nous insistons sur la différence avec la différentiabilité des fonctions de $\mathbb{R}^2$ et donnons quelques propriétés liées à la différentiabilité complexe (§3.2). Grâce à la formule de Green-Riemann (§3.4), résultat classique de théorie de l'intégration, nous montrons que les fonctions holomorphes de classe $\mathcal{C}^1$ vérifient la formule de Cauchy. Ce résultat se généralise à l'ensemble des fonctions holomorphes et nous permet de les identifier aux fonctions analytiques (§3.5).
La suite de ce cours illustrera combien des deux approches analytiques et holomorphes complémentaires sont fertiles non seulement en analyse complexe mais dans de nombreux domaines mathématiques connexes.
Cette partie s'inspire librement du chapitre II de [?].

3.1. Définition des fonctions holomorphes.

— Nous rappelons que U désigne un ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition 3.1.1. — *La fonction* $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ *est dite* **holomorphe** *en* $z_0 \in U$ *si*

$$\lim_{z \longrightarrow z_0, z \neq z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe.
Une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ *est dite holomorphe sur* U *si elle est holomorphe en chaque point de* U*.*

Notation 3.1.2. — *Si $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe sur U, nous notons*

$$f' \text{ ou } \frac{df}{dz} : U \longrightarrow \mathbb{C}, z_0 \mapsto \lim_{z \longrightarrow z_0, z \neq z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

L'ensemble des fonctions holomorphes sur U est noté $\mathcal{O}(U)$.

Exemples 3.1.3. — *i. Une fonction f constante est holomorphe avec $f' = 0$. Plus généralement tout polynôme $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ est holomorphe, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ avec $f'(z) = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1}$.*
ii. L'ensemble $\mathcal{O}(U)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre pour l'addition et la multiplication usuelles ; ses éléments inversibles sont les fonctions $g \in \mathcal{O}(U)$ telles que $g(z) \neq 0$, $z \in U$.
iii. La conjugaison $f(z) = \bar{z}$ n'est holomorphe nulle part car la limite

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\overline{h}}{h}$$

n'existe pas.
De façon analogue, la fonction $f(z) = |z|^2$ n'est holomorphe qu'au point $z = 0$.
iv. Les fonctions analytiques $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ sont holomorphes (voir Proposition 1.2.3).
Les fonctions $\exp, \cos, \sin, \mathrm{ch}, \mathrm{sh}$ *sont des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$.*
Les fonctions classiques suivantes sont également holomorphes :

$$\tan \in \mathcal{O}(\mathbb{C} - (\pi/2 + \pi\mathbb{Z})), \mathrm{cotan} \in \mathcal{O}(\mathbb{C} - \pi\mathbb{Z}),$$

$$\mathrm{th} \in \mathcal{O}(\mathbb{C} - (i\pi/2 + i\pi\mathbb{Z})), \coth \in \mathcal{O}(\mathbb{C} - i\pi\mathbb{Z}).$$

3.2. Différentiabilité. — Dans ce paragraphe, nous rappelons les notions de 1-forme différentielle (Définition 3.2.1). Nous comparons la $\mathbb{R}$-différentiabilité des fonctions de $\mathbb{R}^2$ (Définition 3.2.2) et la $\mathbb{C}$-dérivabilité (ou holomorphie) des fonctions de la variable complexe (Propositions 3.2.6 et 3.2.8). Cette comparaison nous permet d'expliciter l'hypothèse d'holomorphie sous différentes formes : équations de Cauchy-Riemann (Proposition 3.2.8).

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$. D'après le cours de géométrie différentielle,

Définition 3.2.1. — *Une 1-***forme différentielle** *sur Ω est une application α de Ω dans l'espace* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ *des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$.*
En notant dx_i la base canonique des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ (i.e. $dx_i(a) = a_i$), nous avons $\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) dx_i$ et nous notons $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i dx_i$:

$$\forall a \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega, \alpha(x)(a) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) a_i.$$

*Nous disons que α est une 1-***forme différentielle de classe** *$\mathcal{C}^k$ pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ si les fonctions α_i sont de classes $\mathcal{C}^k$.*

Définition 3.2.2. — *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. Une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite* $\mathbb{R}$-**différentiable** *sur Ω s'il existe une forme linéaire*

$$df : \Omega \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}), x \mapsto d_x f,$$

telle que

$$f(x+h) = f(x) + d_x f(h) + o(h).$$

Dans la suite nous identifions les ouverts de $\mathbb{R}^2$ et les ouverts de $\mathbb{C}$ afin de pouvoir comparer $\mathbb{R}$-différentiabilité et $\mathbb{C}$-dérivabilité.

Exemple 3.2.3. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $d_x f$ la différentielle de f au point x. Alors $x \mapsto d_x f$ est une 1-forme différentielle,*

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

Pour $n = 2$ et U un ouvert de $\mathbb{C}$, nous utilisons l'identification canonique $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ pour écrire la variable indifféremment $z = x + iy$ ou $z = (x, y)$. Si $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est $\mathbb{R}$-différentiable, nous avons une 1-forme différentielle

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

En posant $dz = dx + idy$, $d\bar{z} = dx - idy$, nous pouvons réécrire

$$df = 1/2\Big(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\Big)dz + 1/2\Big(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\Big)d\bar{z}.$$

Autrement dit (dx, dy) et $(dz, d\bar{z})$ sont deux bases du $\mathbb{C}$-espace vectoriel des 1-formes différentielles.

Définition 3.2.4. — *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction $\mathbb{R}$-différentiable. Nous notons*

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 1/2\Big(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\Big), \ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 1/2\Big(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\Big).$$

La différentielle de f s'écrit alors $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$.

Exemples 3.2.5. — *i. Ces notations sont justifiées par les formules*

$$\frac{\partial}{\partial z} z = 1, \frac{\partial}{\partial z} \bar{z} = 0, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} z = 0 \ \textit{et} \ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z} = 1.$$

ii. Les opérateurs $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sont conjugués :

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}, \ \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}.$$

iii. Les fonctions complexes polynomiales de deux variables réelles x et y s'écrivent sous la forme

$$P(x,y) = \sum_{0\leq \alpha,\beta\leq d} c_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta, \text{ avec } c_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}.$$

En substituant $x = (z+\bar{z})/2$ et $y = (z-\bar{z})/2i$ (via l'isomorphisme $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$), nous obtenons une écriture de la forme

$$P(z) = \sum_{\alpha+\beta\leq d} a_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta$$

où les coefficients $a_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$ sont donnés par

$$a_{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha!\beta!}\frac{\partial^{\alpha+\beta}P}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}(0).$$

Autrement dit, nous avons un isomorphisme d'anneaux $\mathbb{C}[x,y] \simeq \mathbb{C}[z,\bar{z}]$. La fonction $z \mapsto P(z)$ est holomorphe si et seulement si $a_{\alpha\beta} = 0$ pour $\beta \geq 1$, i.e $P \in \mathbb{C}[z]$.

Proposition 3.2.6. — *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$. Nous avons équivalence entre*
i. f est holomorphe sur U,
ii. f est $\mathbb{R}$-différentiable sur U et $d_z f$ est $\mathbb{C}$-linéaire en tout point $z \in U$,
iii.(Condition de Cauchy-Riemann) f est $\mathbb{R}$-différentiable sur U et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ en tout point $z \in U$.

Démonstration. — i.$\Longrightarrow$ ii. La fonction f est holomorphe en z si et seulement si

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)h + o(h), h \longrightarrow 0$$

Donc f holomorphe est $\mathbb{R}$-différentiable en $z \in U \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ avec $d_z f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, h \mapsto f'(z)h$, qui est $\mathbb{C}$-linéaire.
ii.$\Longrightarrow$ iii. Nous avons

$$d_z f(h) = \frac{\partial f}{\partial z}h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\bar{h} \text{ et } d_z f(ih) = i\frac{\partial f}{\partial z}h - i\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\bar{h}.$$

La $\mathbb{C}$-linéarité implique $d_z f(ih) = i d_z f(h)$ qui est réalisée pour tout h si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.
iii.$\Longrightarrow$ i. La $\mathbb{R}$-différentiabilité donne

$$f(z+h) = f(z) + \frac{\partial f}{\partial z}h + o(h).$$

Donc $\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$ existe et f est holomorphe en z. □

Nous pouvons caractériser les fonctions dérivables au sens complexe parmi les fonctions $\mathbb{R}$-différentiables en un point de $\mathbb{R}^2$ (comme nous l'avons fait pour les fonctions polynomiales dans l'exemple 3.2.5). En effet, via l'identification $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, une fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ s'écrit $f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$, où P et Q sont des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. La fonction f est holomorphe si et seulement si elle est $\mathbb{R}$-différentiable et

$$df(k,\ell) = \frac{\partial f}{\partial x}k + \frac{\partial f}{\partial y}\ell = f'(z)(k+i\ell), k,\ell \in \mathbb{R}^2.$$

Ainsi $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), if'(z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, i.e.

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

Or

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Ainsi (2) se rééecrit sous la forme des équations de Cauchy-Riemann :

Définition 3.2.7. — *Les* **équations de Cauchy-Riemann** *sont définies par*

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}.$$

D'après la définition 3.2.7 et la proposition 3.2.6

Proposition 3.2.8. — *Pour que $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ soit $\mathbb{C}$-dérivable en z_0, il faut qu'elle soit $\mathbb{R}$-différentiable comme fonction de deux variables réelles et que ses dérivées partielles en z_0 vérifient les équations de Cauchy-Riemann.*

Exemples 3.2.9. — *i. Si $f \in \mathcal{O}(U)$ et $f' = 0$, alors f est constante sur chaque composante connexe de U.*
En effet pour tout point $z_0 \in U$,

$$f'(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0.$$

Donc f est $\mathbb{R}$-différentiable sur U de $\mathbb{R}$-différentielle nulle, donc f est constante sur les composantes connexes de U.
ii. Si U connexe et $f \in \mathcal{O}(U)$, alors les équations de Cauchy permettent de montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
- *f est constante sur U,*
- *$P = \Re f$ est constante sur U,*
- *$Q = \Im f$ est constante sur U,*
- *$|f|$ est constante sur U,*
- *$\overline{f} \in \mathcal{O}(U)$.*

ii. Les équations de Cauchy-Riemann signifient que la matrice jacobienne de

$$(x,y) \longrightarrow (P(x,y), Q(x,y)),$$

est la matrice d'une application $\mathbb{C}$-linéaire, c'est-à-dire que nous avons

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

3.3. Intégrale sur le bord d'un compact. — La définition des intégrales sur des chemins s'étend naturellement à l'intégrale des 1-formes différentielles.

Définition 3.3.1. — *Soit* $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [a, b] \longrightarrow U$ *un chemin et* $\alpha = u(x, y)dx + v(x, y)dy$ *une 1-forme différentielle continue. L'***intégrale** $\int_\gamma \alpha$ *est définie par*

$$\int_\gamma \alpha = \int_\gamma u(x, y)dx + v(x, y)dy$$

$$= \int_a^b \left(u(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_1'(t) + v(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_2'(t)\right) dt.$$

Proposition 3.3.2. — *Soit* α *une 1-forme différentielle continue sur* U *et un chemin de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux* $\gamma : [a, b] \longrightarrow U$*. Alors*
i. Si f *est une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* U*,*

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

ii. Nous avons

$$\int_\gamma \alpha = \lim_{\eta \to 0} \sum_{j=0}^{N-1} u(\gamma(\xi_j))(\gamma_1(\tau_{j+1}) - \gamma_1(\tau_j)) + v(\gamma(\xi_j))(\gamma_2(\tau_{j+1}) - \gamma_2(\tau_j))$$

où la subdivision $a = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_N = b$ *décrit l'ensemble des subdivisions de* $[a, b]$ *telles que* $\sup_j(\tau_{j+1} - \tau_j) \leq \eta$ *et les* $\xi_j \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$ *sont des points arbitraires.*

Démonstration. — i. vient de $(f \circ \gamma)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_2'(t)$.
ii. Nous avons

$$\Big| \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (u(\gamma(t))\gamma_1'(t) + v(\gamma(t))\gamma_2'(t))dt$$

$$-u(\gamma(\xi_j))(\gamma_1(\tau_{j+1}) - \gamma_1(\tau_j)) - v(\gamma(\xi_j))(\gamma_2(\tau_{j+1}) - \gamma_2(\tau_j))\Big|$$

$$\leq \omega_j \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} |\gamma'(t)|dt$$

où $\omega_j = \sup_{t \in [\tau_j, \tau_{j+1}]} |\alpha \circ \gamma(t) - \alpha \circ \gamma(\xi_j)|$. Quand η tend vers 0, $\max_{0 \leq j < N} \omega_j$ tend vers 0 par uniforme continuité de $\alpha \circ \gamma$. □

Dans la définition 3.3.1, le chemin d'intégration peut être défini par le bord d'un compact K et l'intégrale curviligne s'écrit alors

$$\int_{\partial K} \alpha$$

pourvu que ce bord ∂K soit orienté (Définition 3.3.4) et assez régulier (Définition 3.3.3).

Définition 3.3.3. — *Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$.*
Le compact K est dit **à bord de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux** *si pour tout $z_0 \in \partial K$, il existe des coordonnées (u, v) associées à un repère affine de $\mathbb{R}^2$ d'origine z_0 (orienté positivement par rapport à l'orientation de la base canonique de $\mathbb{R}^2$) et un rectangle ouvert $R = \{-\delta < u < \delta\} \times \{-\eta < v < \eta\}$ assez petit de sorte que*

$$K \cap R = \{(u, v) \in R, v \geq h(u)\}$$

où h est une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[-\delta, \delta]$ avec $h(0) = 0$ et $\sup |h| < \eta$.

Définition 3.3.4. — *Soit K est un compact à bord de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. L'***orientation canonique** *du bord ∂K est donnée par l'orientation des arcs $u \mapsto (u, h(u))$ dans le sens des u croissants.*

Dans la Définition 3.3.4, il s'agit de voir que l'orientation canonique d'un compact à bord est définie de manière cohérente. C'est l'objet du lemme suivant :

Lemme 3.3.5. — *Soient R, R' des rectangles ouverts tels que $\partial K \cap R \cap R' \neq \emptyset$ et*

$$K \cap R = \{(u, v) \in R, v \geq h(u)\}, K \cap R' = \{(u', v') \in R', v' \geq \ell(u')\}$$

dans des repères affines orientés de $\mathbb{R}^2$. Alors les orientations de $\delta K \cap R \cap R'$ par les paramètres u et u' coïncident.

Démonstration. — En dehors d'un nombre fini de points, ∂K admet une tangente (car le compact K est à bord de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux). Soit $z_0 \in \partial K \cap R \cap R'$ un tel point et (z_0, e_1, e_2), (z_0, e'_1, e'_2) les repères affines définissant les coordonnées (u, v), (u', v'). Quitte à changer $h(u)$ en $h(u) - h'(0)u$ et les coordonnées (u, v) en $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u, v - h'(0)u)$ (ce qui ne change pas l'orientation puisque le déterminant de la matrice de passage est 1), nous pouvons supposer $h'(0) = 0$, i.e le vecteur de base e_1 est tangent à ∂K en z_0. Nous opérons de même sur e'_1. Ainsi les vecteurs e_1 et e'_1 sont colinéaires. Il s'agit de montrer qu'ils sont de même sens. Or les vecteurs e_2 et e'_2 sont dans le même demi-plan ouvert de $\mathbb{R}^2$ délimité par la tangente, i.e le demi plan des vecteurs w tels que $z_0 + \lambda w \in K$ pour $\lambda > 0$ assez petit. Le fait que les bases (e_1, e_2) et (e'_1, e'_2) aient la même orientation impose alors que les vecteurs colinéaires e_1 et e'_1 sont de même sens. $\square$

3.4. Formule de Green-Riemann. — Nous rappelons brièvement la notion de 2-forme différentielle qui est étudiée plus en détail dans les cours d'intégration et de géométrie différentielle (Définition 3.4.3). Nous esquissons la preuve de la formule de Green-Riemann (Théorème 3.4.11). Enfin la formule de Grenn-Riemann nous permet d'établir un théorème de Cauchy pour les fonctions holomorphes de classe $\mathcal{C}^1$ (Théorème 3.4.12) et d'en déduire l'analycité de ces fonctions (Corollaire 3.4.13). Le paragraphe 3.5 est dédié à la preuve de l'analycité des fonctions holomorphes (sans l'hypothèse de régularité de classe $\mathcal{C}^1$).

Soit $p, n \in \mathbb{N}^*$. Notons $\Lambda^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des formes p-linéaires alternées sur $\mathbb{R}^n$ (voir Cours d'algèbre 1). Toute forme $S \in \Lambda^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ s'écrit de manière unique

$$S = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} c_{i_1 \cdots i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} = \sum_{I=(i_1,\ldots,i_p)} c_{i_1 \cdots i_p} dx^I.$$

Définition 3.4.1. — *Pour $S \in \Lambda^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ et $T \in \Lambda^q_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$, le produit extérieur de S par T est $S \wedge T \in \Lambda^{p+q}(\mathbb{R}^n)$ défini par :*

$$S \wedge T(v_1, \ldots, v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma) S(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) T(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}).$$

Exemples 3.4.2. — *i. La paire (dx, dy) forme une base de $\Lambda^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$. Les seuls produits extérieurs à considérer sont*

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0, \quad dx \wedge dy = -dy \wedge dx.$$

ii. Etant donnés deux vecteurs $v_1 = (x_1, y_1)$ et $v_2 = (x_2, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$, d'après la définition 3.4.1, nous avons

$$dx \wedge dy(v_1, v_2) = x_1 y_2 - y_1 x_2;$$

autrement dit le produit $dx \wedge dy$ s'interprète comme la forme bilinéaire alternée déterminant de la base canonique. Le réel $dx \wedge dy(v_1, v_2)$ est l'aire du parallélogramme dont les côtés sont les vecteurs v_1, v_2. Ainsi $dx \wedge dy$ s'interprète également comme une expression algébrique de la mesure d'aire de Lebesgue dans le plan (aussi notée $dxdy$).

Définition 3.4.3. — *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Une 2-**forme différentielle** β sur U est une application continue de U dans $\Lambda^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$: $\beta = w(x, y) dx \wedge dy$ pour $w : U \longrightarrow \mathbb{C}$ continue.*

Définition 3.4.4. — *Soit $\beta = w(x, y) dx \wedge dy$ une 2-forme différentielle sur U. L'intégrale de β est définie par*

$$\int_U \beta = \int_U w(x, y) dxdy.$$

Définition 3.4.5. — *Soit $\alpha = u(x, y)dx + v(x, y)dy$ une 1-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. La **différentielle** $d\alpha$ de α est la 2-forme différentielle*

$$d\alpha = du \wedge dx + dv \wedge dy = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

Exemples 3.4.6. — *i. Soit α une 1-forme différentielle sur U et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors (Propriété de Leibniz)*

$$d(f\alpha) = df \wedge \alpha + f d\alpha.$$

ii. Si la 1-forme différentielle $\mathcal{C}^1$ $\alpha = f dz + g d\bar{z}$ est donnée dans la base $(dz, d\bar{z})$., alors nous avons

$$d(f dz + g d\bar{z}) = (\partial_z g - \partial_{\bar{z}} f) dz \wedge d\bar{z} = -2i(\partial_z g - \partial_{\bar{z}} f) dx \wedge dy.$$

En particulier si $\alpha = fdz$ avec f holomorphe. Alors $\partial_{\bar z} f = 0$ et $d\alpha = 0$.

Lemme 3.4.7. — *(Formule de Green-Riemann à support dans un rectangle). Soit $K \subset \mathbb{C}$ compact à bord de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux orienté canoniquement. Soit $\alpha = u(x,y)dx + v(x,y)dy$ une 1-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de K à support dans un rectangle $R = [-\delta, \delta] \times [-\eta, \eta] \subset K$.*

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_K d\alpha, \text{ i.e. } \int_{\partial K} u(x,y)dx + v(x,y)dy = \int_K \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy.$$

Démonstration. — Comme K est compact, $R \subset K^o$ ou $\partial(K \cap R)$ est le graphe d'une fonction h et $K \cap R$ est la partie située à l'intérieur du graphe.
Supposons $R \subset K^o$, alors $u = v = 0$ sur ∂R et

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)dx = v(\delta, y) - v(-\delta, y) = 0,$$
$$\int_{-\eta}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)dy = u(x, \eta) - u(x, -\eta) = 0,$$

et

$$\int_K d\alpha = \int_R d\alpha = \int_{-\delta \le x \le \delta, -\eta \le y \le \eta} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy = 0.$$

Or le support de α ne rencontre pas ∂K, donc $\int_{\partial K} \alpha = 0 = \int_K d\alpha$.
Si $K \cap R = \{(x,y) \in R, y \le h(x)\}$, alors

$$\int_K d\alpha = \int_{K \cap R} d\alpha = \int_{-\delta}^{\delta} dx \int_{h(x)}^{\eta} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy$$
$$= \int_{-\delta}^{\delta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{h(x)}^{\eta} v(x,y)dy \right) + v(x, h(x))h'(x) - \big(u(x,\eta) - u(x, h(x))\big) \right) dx,$$
$$= \int_{h(\delta)}^{\eta} v(\delta, y)dy - \int_{h(-\delta)}^{\eta} v(-\delta, y)dy + \int_{-\delta}^{\delta} \left(v(x,h(x))h'(x) + u(x,h(x))\right) dx,$$
$$= \int_{-\delta}^{\delta} \left(v(x,h(x))h'(x) + u(x,h(x))\right) dx$$

car $u(x,\eta) = v(\delta, y) = v(-\delta, y) = 0$. Par ailleurs, comme $\partial K \cap R$ est paramétré par $y = h(x)$,

$$\int_{\delta K \cap R} \alpha = \int_{\delta K \cap R} u(x,y)dx + v(x,y)dy = \int_{-\delta}^{\delta} \left(u(x,h(x)) + v(x,h(x))h'(x)\right) dx.$$

Le support de α est inclus dans R, i.e. $v(\delta, y) = v(-\delta, y) = 0$. Nous concluons $\int_K d\alpha = \int_{\partial R} \alpha$. $\square$

Pour démontrer la formule de Green-Riemann sans hypothèse sur le support de la 1-forme différentielle α, nous avons besoin d'une version simple de la notion de partition de l'unité :

Définition 3.4.8. — *Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact et $(U_i)_{1\leq i\leq n}$ un recouvrement fini par les ouverts de K. Une* **partition de l'unité** *de classe $\mathcal{C}^1$ subordonnée au recouvrement $(U_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille de fonctions $\phi_i : K \longrightarrow [0,1]$ de classe $\mathcal{C}^1$ à support dans U_i telle que $\sum_{0\leq i\leq n} \phi_i(x) = 1, x \in K$.*

Lemme 3.4.9. — *Soit U ouvert de $\mathbb{C}$. Pour tout $z \in U$, il existe un voisinage V de z avec $\overline{V} \subset U$ et une fonction $\mathcal{C}^1$ à support dans U, $\phi_U : \mathbb{C} \longrightarrow [0,1]$ telle que $\phi_U(w) = 1$, $w \in V$.*

Démonstration. — Soit $r > r' > 0$ tel que $D(z,r') \subset D(z,r) \subset U$. Nous définissons les fonctions $\mathcal{C}^\infty$

$$f_r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ \ f_r(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t^2-r^2}} & \text{si } |t| < r, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et

$$g_r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ \ g_r(s) = \frac{\int_{-\infty}^{s} f_r(t)dt}{\int_{-\infty}^{\infty} f_r(t)dt}.$$

En particulier, nous avons

$$g_r(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq -r \\ 1 & \text{si } s \geq r. \end{cases}$$

Alors $V = D(z,r')$ et $\phi_U(w) = g_r(r + \frac{2r}{r-r'}(r' - |w-z|))$ convient. □

Lemme 3.4.10. — *Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact et $(U_i)_{1\leq i\leq n}$ un recouvrement fini par les ouverts de K. Il existe une* **partition de l'unité** *de classe $\mathcal{C}^1$ subordonnée au recouvrement $(U_i)_{1\leq i\leq n}$.*

Démonstration. — Pour tout $z \in K - U_j$, il existe i, tel que $z \in U_i$. Le lemme 3.4.9 construit une fonction ψ_z^j de classe $\mathcal{C}^1$ qui vaut 1 sur un voisinage ouvert W_z^j de z et dont le support est dans l'ouvert $U_i \cap (K - U_j)$. Le support de ψ_z^j est un fermé de K donc est compact.
Nous obtenons donc un recouvrement ouvert $\{W_z^j, z \in K - U_j\}$ du compact $K - U_j$ dont on extrait un sous-recouvrement fini $\{W_{z_1}^j, \ldots, W_{z_{j_\ell}}^j\}$.
Nous procédons de même pour tout $1 \leq j \leq n$. En réindexant, nous obtenons une famille finie $(\psi_\ell)_{1\leq \ell\leq N}$ de fonctions dont l'union des supports recouvre K, i.e. pour tout $z \in K$, il existe ℓ, $\psi_\ell(z) > 0$. Nous posons

$$\psi = \sum_{\ell=1}^{N} \psi_\ell \text{ et pour } 1 \leq \ell \leq N, \rho_\ell = \frac{\psi_\ell}{\psi}.$$

Ainsi $(\rho_\ell)_{1\leq \ell\leq N}$ est une partition de l'unité de classe $\mathcal{C}^1$ de K telle que pour tout ℓ, il existe $1 \leq i \leq n$ tel que le support de ρ_ℓ soit inclus dans U_i. □

Théorème 3.4.11. — *(Formule de Green-Riemann). Soit $K \subset \mathbb{C}$ compact à bord de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux orienté canoniquement. Soit α une 1-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de K. Alors*

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_K d\alpha.$$

Démonstration. — Comme K est compact, il est recouvert par un nombre fini de rectangle ouverts R_j tels que $R_j \subset K^o$ ou $\partial(K \cap R_j)$ est le graphe d'une fonction h_j et $R \cap R_j$ est la partie située à l'intérieur du graphe. Soit (χ_j) une partition de l'unité subordonnée au recouvrement R_j. Ecrivons $\alpha = \sum \alpha_j$ où les 1-formes $\alpha_j = \chi_j \alpha$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ à support dans R_j. Nous sommes donc ramenés à l'étude du cas où α est à support dans le rectangle $R = [-\delta, \delta] \times [-\eta, \eta]$. Le lemme 3.4.7 conclut. □

Dans le cas où la fonction holomorphe f est de classe $\mathcal{C}^1$, l'analycité de f est une conséquence directe (Théorème 3.4.12 et Corollaire 3.4.13) de la formule de Green-Riemann 3.4.11.

Théorème 3.4.12. — *(Cauchy). Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et K un compact à bord de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux inclus dans U, avec l'orientation canonique du bord. Alors pour toute fonction f holomorphe sur K qui est de classe $\mathcal{C}^1$, nous avons*

$$\int_{\partial K} f(z)dz = 0$$

Démonstration. — Soit la 1-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$, $\alpha = f(z)dz$. Nous avons (voir Exemples 3.4.5)

$$d\alpha = -\partial_{\bar{z}} f dz \wedge d\bar{z} = 0.$$

La formule de Green-Riemann (Théorème 3.4.11) implique

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_K d\alpha = 0.$$

□

Corollaire 3.4.13. — *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et de classe $\mathcal{C}^1$. Alors f est analytique sur U.*

Démonstration. — Soit $\overline{D}(w, r) \subset U$ et γ le lacet $t \mapsto w + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Pour $0 \leq \lambda \leq 1$, posons

$$g(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z + \lambda(u - z))}{u - z} du = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \lambda(w + re^{it} - z))}{w + re^{it} - z} e^{it} dt.$$

Ainsi g est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$ de dérivée

$$g'(\lambda) = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(z+\lambda(w+re^{it}-z))e^{it} dt = \left[\frac{1}{2i\pi\lambda} f(z + \lambda(w + re^{it} - z)) \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Donc g est constante sur $]0,1[$ et continue sur $[0,1]$ avec

$$g(1) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(u)du}{u-z} \text{ et } g(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)du}{u-z} = f(z).$$

D'où

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(u)du}{u-z}$$

D'après la proposition 2.4.6, f est analytique sur $D(w,r)$ et donc analytique sur U. □

3.5. Analycité des fonctions holomorphes. — D'après la proposition 1.2.3, toute fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ analytique complexe est holomorphe. L'objet de cette section est de monter la réciproque (Théorème 3.5.4) : pour qu'une fonction soit analytique, c'est-à-dire somme de sa série de Taylor en tout point, il suffit qu'elle soit holomorphe (dérivable une fois !). Il est remarquable que la $\mathbb{C}$-dérivabilité implique l'analycité, i.e. une propriété encore plus forte que la dérivabilité en tout ordre. Ce résultat, sans analogue en analyse réelle, a de nombreuses applications (voir §4).

Le théorème de Goursat 3.5.2 est une version généralisée du théorème de Cauchy pour les fonctions holomorphes. Sa preuve s'effectue en deux étapes. D'abord, nous nous limitons au cas d'un contour triangulaire (Lemme de Goursat 3.5.1) puis nous traitons le cas général (Théorème de Goursat 3.5.2).
Du théorème de Goursat 3.5.2, nous déduisons la formule de Cauchy (3.5.3) qui permet d'établir enfin l'analycité de toute fonction holomorphe (Théorème 3.5.4).

Nous rappelons qu'un triangle du plan est l'enveloppe convexe de trois points non alignés. Un triangle est donc un compact à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux.

Lemme 3.5.1. — *(Goursat). Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et T un triangle inclus dans U. Alors pour toute fonction holomorphe sur U,*

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0$$

Démonstration. — Nous découpons T en quatre triangles $T_i, 1 \le i \le 4$ dont les sommets sont ceux de T et les milieux des côtés de T. Nous orientons les arêtes opposées des triangles T_k de telle façon que

$$I = \int_{\partial T} f(z)dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial T_k} f(z)dz.$$

Il existe donc un indice k avec $\left|\int_{\partial T_k} f(z)dz\right| \ge |I|/4$. De cette façon, nous construisons une suite de triangles emboités : $T'_0 = T, T'_1 = T_k \ldots$ avec diamT'_n =diam

$T/2^n$ et $\int_{\partial T'_n} f(z)dz \geq |I|/4^n$. L'intersection décroissante des T'_n est réduite à un point noté z_0. Comme f est holomorphe en z_0 :

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)\varepsilon(z)$$

avec $\varepsilon(z)$ tend vers zéro quand z tend vers z_0. Ainsi

$$\left|\int_{\partial T'_n} f(z)dz\right| = \left|\int_{\partial T'_n} (z - z_0)\varepsilon(z)dz\right| \leq \text{long}(\partial T'_n) \sup_{\partial T'_n} |z - z_0||\varepsilon(z)|,$$

$$\left|\int_{\partial T'_n} f(z)dz\right| \leq 3(\text{diam}T'_n)^2 \sup_{\partial T'_n} |\varepsilon(z)|.$$

Donc

$$|I| \leq 4^n \left|\int_{\partial T'_n} f(z)dz\right| \leq 3(\text{diam}T)^2 \sup_{\partial T'_n} |\varepsilon(z)|.$$

Ainsi en faisant tendre n vers $+\infty$, nous obtenons $I = 0$. □

Théorème 3.5.2. — *(Goursat). Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et K un compact à bord de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux inclus dans U, avec l'orientation canonique du bord. Alors pour toute fonction f holomorphe sur U, nous avons*

$$\int_{\partial K} f(z)dz = 0.$$

Démonstration. — Il s'agit d'approcher K par des compacts à bords polygonaux. Notons $\delta = d(K, \mathbb{C} - U) > 0$. Paramétrons ∂K par un nombre fini d'arcs $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Pour chaque tel arc $\gamma : [a, b] \longrightarrow U$, soit une subdivision $a = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_n = b$ telle que $|\gamma(\tau_{j+1}) - \gamma(\tau_j)| \leq \varepsilon \leq \delta/2$. Ainsi chaque segment $[\gamma(\tau_{j+1}), \gamma(\tau_j)] \subset U$. Pour ε assez petit, la réunion de ces segments constitut le bord d'un compact K_ε à bord polygonal. Le compact $K_\varepsilon = \cup_i T_i$ est réunion de triangles adjacents et le lemme de Goursat 3.5.1 implique

$$\int_{\partial K_\varepsilon} f(z)dz = \sum_i \int_{\partial T_i} f(z)dz = 0.$$

La première égalité vient du fait que chacun des segments composant les ∂T_i et ne figurant pas dans ∂K_ε apparait deux fois avec des orientations opposées.
D'après la proposition 3.3.2 ii.,

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{\partial K_\varepsilon} f(z)dz = \int_{\partial K} f(z)dz.$$

D'où le résultat. □

La formule de Cauchy montre que les valeurs de f holomorphe sur un ouvert U à l'intérieur d'un compact K à bord orienté $\mathcal{C}^1$ par morceaux inclus dans U sont déterminées par les valeurs de f sur le bord ∂K.

Théorème 3.5.3. — *(Formule de Cauchy). Soit f une fonction holomorphe sur $U \subset \mathbb{C}$ ouvert et K un compact à bord orienté $\mathcal{C}^1$ par morceaux inclus dans U. Alors pour tout $z \in \mathring{K}$,*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Démonstration. — Soit $r > 0$ tel que $\overline{D(z,r)} \subset \mathring{K}$. Nous notons $K_r = K - D(z,r)$. Ainsi K_r est un compact à bord orienté $\mathcal{C}^1$ par morceaux dont le bord est $\partial K_r = \partial K \cup \partial D^-(z,r)$, où ∂D^- signifie que ce cercle a l'orientation opposée à celle obtenue comme bord de $\overline{D(z,r)}$. La fonction $g(w) = f(w)/(w-z)$ est holomorphe sur $U - \{z\}$. Le théorème de Goursat 3.5.2 appliqué à la fonction g sur le compact $K_r \subset U - \{z\}$ donne

$$\int_{\partial K} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{\partial D(z,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw = 0.$$

En posant $w = z + re^{it}$, nous obtenons

$$\int_{\partial D(z,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_0^{2\pi} \frac{f(z+re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(z+re^{it}) dt,$$

et cette dernière intégrale tend vers $2i\pi f(z)$ lorsque r tend vers 0 par continuité de f au point z. □

Nous pouvons à présent établir l'équivalence entre holomorphie et $\mathbb{C}$-analycité

Théorème 3.5.4. — *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$. Alors f est holomorphe si U si et seulement elle est analytique.*

Démonstration. — Supposons que f soit holomorphe sur U et $\overline{D}(z_0, r) \subset U$. Pour $z \in D(z_0, r)$, la formule de Cauchy 3.5.3, donne

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(w)dw}{w-z}.$$

Or

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0} \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}.$$

De plus pour $w = z_0 + re^{it}$,

$$\left| \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \right| = \frac{1}{r} \left(\frac{|z-z_0|}{r} \right)^n, \text{ avec } |z-z_0|/r < 1.$$

Par convergence normale pour $t \in [0, 2\pi]$, nous obtenons

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0,r)} f(w) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} dw = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

avec
$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})e^{-int}dt = \frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0),$$
et la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ converge normalement sur les compacts de $D(z_0,r)$. □

Corollaire 3.5.5. — *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Toute fonction holomorphe sur U est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U.*
Précisement, pour tout $K \subset U$ compact à bord de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et pour tout $z \in K^o$, nous avons
i. $\forall n \geq 0$, $\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z) = f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi}\int_{\partial K}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw$,
ii. $\forall n \geq 0, \forall m > 0$, $\frac{\partial^{n+m} f}{\partial z^n \partial \bar{z}^m}(z) = 0$.
En particulier, une fonction holomorphe f admet des dérivées complexes $f^{(n)}$ d'ordre n arbitraire et les dérivées $f^{(n)}$ sont elles aussi holomorphes.

Le lemme de Goursat (Lemme 3.5.1) admet une réciproque, le théorème de Morera :

Théorème 3.5.6. — *(Morera). Soit f une fonction continue sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Nous supposons que $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$ pour tout triangle T inclus dans U. Alors f est holomorphe sur U.*

Démonstration. — Soit $z_0 \in U$ et $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0,r) \subset U$. Pour $z \in D(z_0,r)$, soit
$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(w)dw$$
où $[z_0,z]$ désigne le segment joignant z_0 à z. Soit $z \in D(z_0,r)$ et $h \neq 0$ tel que $z+h \in D(z_0,r)$. Comme le triangle de sommets $z_0, z, z+h$ est inclus dans $D(z_0,r)$, nous avons
$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(w)dw = \int_0^1 f(z+th)dt.$$
Comme f est continue au point z,
$$\lim_{h\in\mathbb{C}^*, h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z).$$
Ainsi F est holomorphe sur $D(z_0,r)$ donc analytique d'après le théorème 3.5.4 et sa dérivée $f = F'$ l'est aussi. □

Corollaire 3.5.7. — *La fonction Γ*
$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{s-1}dt$$
est holomorphe pour $\Re s > 0$.

Démonstration. — L'intégrale converge en $t = 0$ car $|t^{s-1}e^{-t}| \leq t^{\Re s-1}$. A s fixé pour $t \in \mathbb{R}_+$ grand

$$|t^{s-1}e^{-t}| = t^{\Re s-1}e^{-t} \leq e^{t/2}e^{-t} = e^{-t/2},$$

donc $\Gamma(s)$ est bien définie pour $\Re s > 0$. Soit $\gamma : [0,1] \longrightarrow \{s, \Re s > 0\}$ la courbe décrivant un triangle. Alors d'après le théorème de Fubini (voir cours d'intégration ou raisonner sur les intégrales définies),

$$\int_\gamma \Gamma(s)ds = \int_\gamma \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dtds = \int_0^{+\infty} \left(\int_\gamma t^{s-1}ds\right) e^{-t}dt = 0$$

Ainsi en appliquant le théorème de Morera (Théorème 3.5.6), la fonction Γ est holomorphe sur le demi-plan $\Re s > 0$. $\square$

4. Propriétés élémentaires des fonctions holomorphes

Dans cette section nous donnons les premières propriétés des fonctions holomorphes. Là encore le lien entre comportements locaux et globaux conduit à des propriétés remarquables et propres à ces fonctions. Cette section s'inspire des chapitre II de **[BD]** et **[dM]**.

4.1. Principe de réflexion de Schwarz.

— Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ invariant par $z \mapsto \overline{z}$. Nous notons

$$\Omega_+ = \{z \in \Omega, \Im z > 0\},\ \Omega_- = \{z \in \Omega, \Im z < 0\},\ I = \Omega \cap \mathbb{R}.$$

Ainsi $\Omega = \Omega_+ \cup I \cup \Omega_-$ et nous supposons $I \neq \emptyset$.

Théorème 4.1.1. — *(Principe de réflexion). Soient $f^- \in \mathcal{O}(\Omega_-)$ et $f^+ \in \mathcal{O}(\Omega_+)$ deux fonctions holomorphes qui se prolongent continûment à I, avec $f^+(x) = f^-(x)$, $x \in I$. Alors la fonction continue $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par*

$$f(z) = \begin{cases} f^-(z) & \text{si } z \in \Omega_- \cup I, \\ f^+(z) & \text{si } z \in \Omega_+ \cup I, \end{cases}$$

est holomorphe dans Ω.

Démonstration. — Soit $x \in I$ et $\overline{D}(x,r) \subset \Omega$. Soit $\overline{T} \subset D(x,r)$ un triangle plein.
Si $\overline{T} \cap I = \emptyset$, $\int_{\partial\overline{T}} f(z)dz = 0$ car f est holomorphe dans $\Omega_+ \cup \Omega_-$.
Si $\overline{T} \cap I \neq \emptyset$ et $\overline{T} \subset I \cup \Omega_+$ (le cas $\overline{T} \subset I \cup \Omega_-$ est similaire), alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que le translaté $T_\varepsilon = \overline{T} + i\varepsilon \subset \Omega_+$. Ainsi $\int_{\partial T_\varepsilon} f(z)dz = 0$ et en faisant tendre ε vers 0, nous obtenons encore $\int_{\partial\overline{T}} f(z)dz = 0$.
Si $T \cap I \neq \emptyset$, nous pouvons découper $\overline{T}$ via $I \cap \overline{T}$ en trois triangles de façon à nous ramener à la situation précédente. $\square$

Théorème 4.1.2. — *(Principe de réflexion de Schwarz). Soit f holomorphe sur Ω_+, continue sur $\Omega_+ \cup I$ et telle que $f(I) \subset \mathbb{R}$. Alors il existe un unique prolongement holomorphe $\tilde{f}$ de f sur Ω tel que $\tilde{f}(z) = \overline{f(z)}$ pour $z \in \Omega_-$.*

Démonstration. — Si $z \in D(z_0, r) \subset \Omega_-$, alors $\bar{z} \in \Omega_+$,

$$f(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\bar{z} - \bar{z}_0)^n$$

avec $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\bar{z}_0)$ et un rayon de convergence $\geq r$. Par conséquent

$$\overline{f(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n}(z - z_0)^n$$

et $\tilde{f}$ est holomorphe dans $D(z_0, r)$.
Montrons que $\tilde{f}$ est holomorphe au voisinage de $x_0 \in I$. Nous avons $\tilde{f}(x) \in \mathbb{R}$ pour $x \in I$ et la continuité de $\tilde{f}$ sur $I \cup \Omega_+$ garantit que $\tilde{f}(x_0 + h) \longrightarrow \tilde{f}(x_0)$ quand $h \in \mathbb{C}$ tend vers 0. Donc $\tilde{f}$ est continue sur Ω.
Le principe de réflexion (Théorème 4.1.1) permet alors de conclure. □

4.2. Théorème d'inversion locale holomorphe. — Nous donnons deux preuves du théorème d'inversion locale holomorphe. La première est très courte et utilise la différentielle :

Théorème 4.2.1. — *(Inversion locale holomorphe). Soit $f \in \mathcal{O}(U)$, $a \in U$ avec $f'(a) \neq 0$. Alors il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de a tel que $f(V)$ soit ouvert et $f_{|V} : V \longrightarrow f(V)$ soit un biholomorphisme.*

Démonstration. — La différentielle

$$d_a f : h \mapsto f'(a)h$$

est inversible. Le théorème d'inversion locale pour les fonctions $\mathbb{R}$-différentiables implique qu'il existe un voisinage ouvert V de a tel que $f(V)$ soit ouvert et $f_{|V} : V \longrightarrow f(V)$ soit un difféomorphisme.
La fonction réciproque f^{-1} est holomorphe avec $d_{f(z)}(f^{-1}) = (d_z f)^{-1}$. □

La méthode des séries majorantes permet d'obtenir une autre démonstration du théorème d'inversion locale qui est "effective" au sens où nous contrôlons la taille des voisinages mis en jeu (voir Théorème 4.5.5)

Démonstration. — (Théorème d'inversion locale, méthode des séries majorantes) Après translation et homothétie, nous pouvons supposer $a = 0$, $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ et écrire

$$f(z) = z - \sum_{n \geq 2} a_n z^n \text{ pour } z \in D(0, r).$$

• En posant $w = f(z)$, nous avons $w \sim z$ au voisinage de 0. Nous en déduisons

$$\begin{array}{rcl} z & = & w + O(w^2) \\ & = & w + a_2(w + O(w^2))^2 + O(w^3) \\ & = & w + a_2 w^2 + O(w^3) \\ & = & w + a_2(w + a_2 w^2)^2 + a_3 w^3 + O(w^4) \\ & = & w + a_2 w^2 + (a_3 + 2a_2^2)w^3 + O(w^4) \\ & = & \cdots \end{array}$$

Nous obtenons ainsi un développement limité à tout ordre de la forme

$$z = w + \sum_{n=2}^{N} P_n(a_2, \ldots, a_n) w^n + O(w^N) \tag{3}$$

où les P_n sont des polynômes à coefficients entiers naturels.

• Montrons la convergence de (3) quand $N \longrightarrow +\infty$, comme $\sum_{n\geq 2} a_n z^n$ converge sur $D(0,r)$, il existe $M > 0$ avec $|a_n| \leq M^n$, $n \geq 2$. Or

$$w + \sum_{n\geq 2} P_n(M^2, \ldots, M^n) w^n$$

est la solution z, $|z| < 1/M$, de l'équation

$$w = z - \sum_{n\geq 2} M^n z^n = \frac{z - (M + M^2)z^2}{1 - Mz} \tag{4}$$

soit encore

$$(M+M^2)z^2 - (1+Mw)z + w = 0, \text{ i.e. } z = \frac{1 + Mw - \sqrt{(1+Mw)^2 - 4w(M+M^2)}}{2(M+M^2)}$$

où la racine carrée désigne la détermination holomorphe de la racine carrée sur $D(1,1)$ telle que $\sqrt{1} = 1$ (car $z = 0$ pour $w = 0$). Le développement en série entière par rapport à la variable w a un rayon de convergence > 0, donc converge sur le disque $D(0,R)$ avec

$$R = \frac{1}{(1+\sqrt{2})M + 4M^2}$$

car alors

$$|M^2 w^2| \leq M^2 |w| R \leq \frac{M^2 |w|}{(1+\sqrt{2})M} = (\sqrt{2}-1)M|w|$$

et

$$|(2M + 4M^2)w - M^2 w^2| \leq (2M + 4M^2)|w| + |M^2 w^2| \leq ((1+\sqrt{2})M + 4M^2)|w| < 1$$

D'où la convergence de $g(w) = w + \sum_{n\geq 2} P_n(a_2, \cdots, a_n) w^n$ sur $D(0,R)$ et nous avons $g(D(0,R)) \subset D(0, 1/M)$.

• Par identification de la série entière en zéro et principe du prolongement analytique, nous avons $f \circ g(w) = w$ pour $w \in D(0,R)$.

De plus, par construction, g est injectif sur l'ouvert $W = D(0,R)$ et l'image $w =$

$f(z)$ atteint surjectivement le disque W sur $g(W) \subset D(0,1/M) \cap f^{-1}(W)$. Prenons V la composante connexe de 0 dans $D(0,1/M) \cap f^{-1}(W)$. Alors $f(V) \subset W$, $g(W) \subset V$, V, W sont ouverts, et $f_{|V} \circ g_{|W} = \mathrm{id}_W$ sur W. Enfin par connexité de V et prolongement analytique $g_{|W} \circ f_{|V} = \mathrm{Id}_V$. □

4.3. Théorème de l'application ouverte. — Le théorème d'inversion locale holomorphe (Théorème 4.2.1) permet de décrire le comportement local d'une fonction holomorphe au voisinage d'un point (Théorème 4.3.1) et d'en déduire plusieurs propriétés utiles des fonctions holomorphes : Théorème de l'application ouverte (Corollaire 4.3.3), Théorème d'inversion globale (Corollaire **??**), Principe du maximum (Théorème 4.4.1) et Lemme de Schwarz (Théorème 4.4.2).
La théorème 4.3.1 formalise un argument qui a été mis en œuvre dans la méthode du col (Théorème **??**).

Théorème 4.3.1. — *Soit $f \in \mathcal{O}(U)$ non constante au voisinage de $a \in U$ et*

$$m = \min\{k \in \mathbb{N}^*, f^{(k)}(a) \neq 0\}.$$

Alors il existe un voisinage ouvert V de a, un voisinage ouvert W de 0 et un biholomorphisme $\varphi : V \longrightarrow W$ tel que φ envoie a sur 0 et

$$f(z) = f(a) + \varphi(z)^m.$$

Démonstration. — D'après le Théorème 2.4.10, il existe $U' \subset U$ un voisinage de a et $g \in \mathcal{O}(U')$ tels que pour tout $z \in U'$,

$$f(z) - f(a) = \alpha(z-a)^m g(z), \text{ avec } \alpha \in \mathbb{C}^* \text{ et } g(a) = 1.$$

Sur le voisinage ouvert $V' = \{z \in U', |g(z) - 1| < 1\}$ de a la fonction

$$z \mapsto \exp\left(\frac{1}{m}\log g(z)\right)$$

est bien définie et est une racine m-ème de g. Ainsi pour tout $z \in V'$,

$$f(z) = f(a) + (\varphi(z))^m \text{ où } \varphi(z) = \alpha_m(z-a)\exp\left(\frac{1}{m}\log g(z)\right)$$

et α_m est une racine m-ème de α. De plus $\varphi'(a) = 1$. Le théorème d'inversion locale holomorphe 4.2.1 conclut. □

Corollaire 4.3.2. — *Soit $f \in \mathcal{O}(U)$, $a \in U$ et $m = \min\{k \in \mathbb{N}^*, f^{(k)}(a) \neq 0\}$. Il existe $r, \rho \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tout $w \in D(f(a), \rho) - \{f(a)\}$, l'équation $f(z) = w$ a exactement m solutions dans $D(a,r)$. L'équation $f(z) = f(a)$ n'a qu'une solution $z = a$ dans $D(a,r)$ de multiplicité m.*

Démonstration. — D'après le théorème 4.3.1, pour $z \in V$ nous pouvons écrire $f(z) = f(a) + \varphi(z)^m$. Ainsi

$$f(z) = w \Longleftrightarrow \varphi(z) = e^{2ik\pi/m}(w - f(a))^{1/m}$$

pour $k \in \{0, \ldots, m-1\}$. □

Corollaire 4.3.3. — *(Théorème de l'application ouverte). Une fonction holomorphe non constante sur un ouvert U connexe est une application ouverte.*

Démonstration. — D'après le Corollaire 4.3.2, tout point $z_0 \in U$ admet un voisinage $V_{z_0} \subset U$ tel que $f(V_{z_0}) = D(f(z_0), \rho(z_0))$. Ainsi $f(U) = \cup D(f(z_0), \rho(z_0))$ est ouvert. □

Du théorème 4.3.1, nous déduisons également

Corollaire 4.3.4. — *(Théorème d'inversion globale). Soit U un ouvert connexe et $f \in \mathcal{O}(U)$ injective. Alors*
i. $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$,
ii. f' ne s'annule pas sur U,
iii. $f : U \longrightarrow f(U)$ est un biholomorphisme.

Démonstration. — i. D'après le théorème de l'application ouverte (Théorème 4.3.3), f est ouverte donc $f(U)$ est ouverte et f est une bijection continue ouverte de U dans $f(U)$, i.e. un homéomorphisme.
ii. Supposons qu'il existe $z_0 \in U$ avec $f'(z_0) = 0$. Le théorème 4.3.1 définit un entier $m \geq 2$ et donc f n'est pas injective au voisinage de z_0, ce qui est absurde. Donc f' ne s'annule pas sur U.
iii. D'après i., ii. et le théorème d'inversion locale (Théorème 4.2.1), f^{-1} est holomorphe sur $f(U)$ et $f : U \longrightarrow f(U)$ est un biholomorphisme. □

4.4. Lemme de Schwarz.

4.4. Lemme de Schwarz. — Un corollaire important du théorème de l'application ouverte est le principe du maximum que nous avons déjà établi une version pour les fonctions vérifiant la propriété de la moyenne (Théorème **??**).

Théorème 4.4.1. — *(Principe du maximum). Soit $f \in \mathcal{O}(U)$.*
i. Si $|f|$ admet un maximum local en un point $a \in U$, alors f est constante sur la composante connexe contenant a.
ii. Pour tout compact $K \subset U$,

$$\max_K |f| = \max_{\partial K} |f|, \quad \max_K \Re f = \max_{\partial K} \Re f, \quad \max_K \Im f = \max_{\partial K} \Im f.$$

Démonstration. — i. Supposons f non constante sur la composante connexe U_0 de U contenant a avec $|f(a)| = \sup_U |f| = \sup_{U_0} |f|$. D'après le théorème de l'application ouverte, f est ouverte sur U_0. L'image $f(U_0)$ est un voisinage de $f(a)$ donc contient des points de module strictement supérieur à $|f(a)|$ (absurde !).
ii. Si $\max_{\partial K} \Re f < \max_K \Re f$, il existe $z_0 \in K^o$ avec $\Re f(z_0) = \max_K \Re f$. Soit U_0 une composante connexe de z_0 dans K^o et f non constante dans U_0. Alors $f(U_0)$ est un ouvert qui contient $f(z_0)$ et est contenue dans le demi-plan $\{w, \Re w \leq \Re f(z_0)\}$. Absurde ! Donc f est constante sur U_0 et $\Re f_{|\partial U_0} = \Re f(z_0)$ par continuité de f. Or

$$\emptyset \neq \partial U_0 \subset \partial(K^o) = \overline{K^o} - K^o \subset \overline{K} - K^o = \partial K$$

ainsi $\max_K \Re f = \Re f(z_0)$ est atteint sur ∂K. Absurde !
Les cas $|f|$ et $\operatorname{im} f$ sont analogues. $\square$

Du principe du maximum, nous déduisons enfin le lemme de Schwarz (Théorème 4.4.2) dont nous présentons plusieurs applications dans le paragraphe suivant (§4.5).

Théorème 4.4.2. — *(Lemme de Schwarz). Soit f holomorphe sur $D(0,1)$ avec $f(0)=0$ et $|f(z)| \leq 1, z \in D(0,1)$. Alors nous avons*

$$\forall z \in D(0,1), |f(z)| \leq |z| \text{ et } |f'(0)| \leq 1.$$

De plus si

$$\exists z_0 \in D(0,1) - \{0\}, |f(z_0)| = |z_0| \text{ ou } |f'(0)| = 1,$$

alors f est une rotation : $f(z) = az$ pour $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$.

Démonstration. — L'application $g(z) = f(z)/z$ est holomorphe sur $D(0,1)$ et vérifie $g(0) = f'(0)$. En appliquant le principe du maximum à la fonction g sur $D(0,r)$, $r < 1$, nous obtenons

$$\sup_{D(0,r)} |g| = \sup_{\delta D(0,r)} |g| = \sup_{\delta D(0,r)} |f|/r \leq 1/r.$$

En faisant tendre r vers 1, nous obtenons

$$\sup_{D(0,1)} |g| \leq 1 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} |f(z)| \leq |z|, \forall z \in D(0,1) - \{0\}, \\ |f'(0)| \leq 1. \end{array} \right.$$

De plus si $\exists z_0 \in D(0,1) - \{0\}, |f(z_0)| = |z_0|$ ou si $|g(0)| = |f'(0)| = 1$, alors $|g|$ admet un maximum local (en z_0 ou 0) donc $g = a$ est constante avec $|a| = 1$. $\square$

Corollaire 4.4.3. — *(Point fixe). Soit $f : D(0,1) \longrightarrow D(0,1)$ holomorphe $f \neq \mathrm{Id}$. Alors f a au plus un point fixe.*

Démonstration. — Supposons que nous ayons $a \neq b \in D(0,1)$ avec $f(a) = a$ et $f(b) = b$.
Si $a = 0$, $f(0) = 0, f(b) = b$, le lemme de Schwarz (Théorème 4.4.2) montre que $f = e^{i\theta} z$ et comme $f(b) = b$, $f(z) = z$, ce qui est exclu.
Nous pouvons donc supposer $a \neq 0$. Posons $\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ et

$$g = \varphi_a \circ f \circ \varphi_a^{-1} \text{ et } \lambda = \varphi_a(b) \neq 0.$$

Ainsi $g : D(0,1) \longrightarrow D(0,1)$ avec deux points fixes $g(0) = 0$ et $g(\lambda) = \lambda$. Donc $g = \mathrm{Id} = f$. Absurde ! $\square$

4.5. Disque unité. —

Définition 4.5.1. — *Un automorphisme de U est une bijection holomorphe $f : U \longrightarrow U$. Nous notons* $\mathrm{Aut}(U)$ *l'ensemble des automorphismes de U.*

Remarquons que si $f \in \mathrm{Aut}\, U$ alors f^{-1} est holomorphe (d'après la formule de la différentielle d'une application réciproque). Ainsi $\mathrm{Aut}\, U$ est un groupe. La détermination de $\mathrm{Aut}\, D(0,1)$ (Théorème 4.5.2) est conséquence directe du lemme de Schwarz (Théorème 4.4.2). Pour l'énoncer, nous rappelons que le groupe unitaire de signature (n,m) est le groupe des matrices préservant une forme hermitienne de signature (n,m). Il est isomorphe au groupe $U(n,m)$ préservant la forme hermitienne diagonale de signature (n,m) :

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{n+m}(\mathbb{C}), AA^* - BB^* = I_n, DD^* - CC^* = I_m, AC^* = BD^* \right\}.$$

Le groupe spécial unitaire $\mathrm{SU}(n,m)$ est le sous-groupe des matrices de déterminant 1 et $\mathrm{PSU}(n,m)$ est le quotient de $\mathrm{SU}(n,m)$ par son centre (matrices scalaires de déterminant 1).

Théorème 4.5.2. — *Soit $D = D(0,1)$. Alors*

$$\mathrm{Aut}\, D = \left\{ f_a : z \mapsto e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \theta \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{C}, |a| < 1 \right\} = \mathrm{PSU}(1,1).$$

Démonstration. — • Nous vérifions que $f_a \in \mathrm{Aut}\, D$. Réciproquement soit $f \in \mathrm{Aut}\, D$. Notons $a = f(0)$. Ainsi $f_a \circ f(0) = 0$ et pour tout $z \in D$, $|f_a \circ f(z)| < 1$. Le lemme de Schwarz (Théorème 4.4.2) implique alors que $g = f_a \circ f$ vérifie $|g(z)| \leq |z|$, $z \in D$ et de même $|g^{-1}(z)| \leq |z|$ donc $|g(z)| = |z|$, $z \in D$. Donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $g(z) = e^{i\theta} z$.
• L'application

$$f_a \mapsto \frac{1}{1-|a|^2} \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & -ae^{i\theta/2} \\ -\bar{a}e^{-i\theta/2} & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$$

induit un isomorphisme

$$\mathrm{Aut}\, D \longrightarrow \mathrm{PSU}(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix}, |A|^2 - |B|^2 = 1 \right\} / \pm \mathrm{Id}.$$

□

Corollaire 4.5.3. — *(Schwarz-Pick). Soit $D = D(0,1)$ et $f : D \longrightarrow D$ holomorphe. Alors pour tout $z \in D$,*

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}$$

avec égalité si et seulement si $f \in \mathrm{Aut}\, D$.

Démonstration. — La dérivée de $\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \in \operatorname{Aut} D$ satisfait

$$\varphi_a'(z) = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2},\ \varphi_a'(0) = 1-|a|^2,\ |\varphi_a'(a)| = \frac{1}{1-|a|^2}.$$

Soit $z_0 \in D$ et $g = \varphi_{f(z_0)} \circ f \circ \varphi_{-z_0}$. Nous avons $g(0) = 0$ et $g : D \longrightarrow D$. Le lemme de Schwarz (Théorème 4.4.2) implique que $|g(z)| \leq |z|$ et $|g'(0)| \leq 1$. L'inégalité attendue résulte de

$$g'(0) = \varphi_{f(z_0)}'(f(z_0))f'(z_0)\varphi_{-z_0}'(0) = \frac{1}{1-|f(z_0)|^2}f'(z_0)(1-|z_0|^2).$$

Le cas d'égalité correspond à $|g'(0)| = 1$. Alors g et f sont des automorphismes de D. □

Remarque 4.5.4. — *La distance pseudo-hyperbolique sur $\mathbb{C}$ est définie par*

$$d(z,w) = \left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right|$$

Le corollaire de Schwarz-Pick 4.5.3 permet d'établir que les fonctions holomorphes font décroitre la distance pseudo-hyperbolique.

Le théorème de Bloch-Landau (Corollaire 4.5.5) est une version quantitative précise du théorème d'inversion locale, via la méthode des suites majorantes. Cette version est utile à la démonstration du grand théorème de Picard (§7.2).

Théorème 4.5.5. — *(Bloch-Landau). Soit $f \in \mathcal{O}(D(z_0,r))$ telle que $f'(z_0) \neq 0$. Alors il existe $U \subset D(z_0,r)$ tel que $f_{|U}$ est un biholomorphisme de U sur $f(U) = D(w_0,R)$ disque de rayon $R \geq \frac{1}{12}r|f'(z_0)|$.*

Démonstration. — Quitte à considérer la restriction de f et à remplacer f par $f(z_0+rz)$, nous pouvons supposer f définie au voisinage du disque fermé $\overline{D}(0,1)$. Soit

$$m = \sup_{z\in\overline{D}(0,1)} (1-|z|^2)|f'(z)| \geq |f'(0)|.$$

La valeur m est atteinte en $a \in D(0,1)$, $m = (1-|a|^2)|f'(a)|$. Posons $h = f \circ \varphi_{-a}$, ainsi

$$h(0) = f(a), h'(0) = f'(a)\varphi_{-a}'(0) = (1-|a|^2)f'(a), |h'(0)| = m \geq |f'(0)|.$$

De plus pour $z \in D(0,1)$, d'après le corollaire de Schwarz-Pick (Corollaire 4.5.3)

$$(1-|z|^2)|h'(z)| = \frac{(1-|z|^2)|\varphi_{-a}'(z)|}{1-|\varphi_{-a}(z)|^2}(1-|\varphi_{-a}(z)|^2)|f'(\varphi_{-a}(z))| \leq m.$$

Quitte à remplacer h par $\frac{1}{h'(0)}(h-h(0))$, nous pouvons supposer $h(0) = 0$ et $m = h'(0) = 1$. Donc

$$|h'(z)| \leq \frac{1}{1-|z|^2}, z \in D(0,1).$$

Le rayon de convergence du développement en série entière (donc de Taylor)

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$$

est supérieur à 1 et les inégalités de Cauchy appliquées à h' sur le disque $D(0,\rho)$ donnent

$$h^{(n)}(w) = \frac{(n-1)!}{2\pi\rho^{n-1}} \int_0^{2\pi} \frac{h'(w+re^{it})}{e^{i(n-1)t}} dt \text{ et } n|a_n| \leq \frac{1}{(1-\rho^2)\rho^{n-1}}.$$

Or le maximum de $\rho \mapsto (1-\rho^2)\rho^{n-1}$ est atteint en $\rho = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$. Donc, pour ce ρ, nous obtenons,

$$|a_n| \leq \frac{n+1}{2n}\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^{(n-1)/2}$$

et pour $M = 3^{3/4}/2$, $|a_n| \leq M^n$, $n \geq 2$ (à vérifier numériquement pour $2 \leq n \leq 4$, puis remarquer que $|a_n| < 3e/5$ pour $n \geq 5$ car $\frac{n-1}{2}\ln(1+\frac{2}{n-1}) \leq 1$). En reprenant la preuve du théorème d'inversion locale par la méthode des séries majorantes (Théorème 4.2.1), nous obtenons que h est un biholomorphisme d'un ouvert $U \subset D(0,1)$ sur le disque $D(0,R)$ avec

$$R = \frac{1}{(1+\sqrt{2})M + 4M^2} > \frac{1}{12}.$$

□

5. Espaces de fonctions holomorphes

Les démonstrations de ce chapitre sont issues des chapitres III-IV **[Do]**.

5.1. Convergence de suites de fonctions holomorphes.

— Rappelons les différentes notions de convergence.

Définition 5.1.1. — *Soit $f_n, f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ des fonctions.*
i. la suite f_n converge **simplement** *vers f, si pour tout $x \in U$, $f_n(x) \longrightarrow_{n\to+\infty} f(x)$.*
ii. La suite f_n converge **uniformément** *vers f, si* $\sup_U |f_n - f| \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$.
iii. La suite f_n converge **uniformément sur tout compact** *vers f, si pour tout $K \subset U$ compact* $\sup_K |f_n - f| \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$.
iv. La suite f_n converge **localement uniformément** *vers f, si pour tout $x \in U$ il existe $r_x > 0$ tel que f_n converge uniformément vers f sur $D(x, r_x) \subset U$.*

Lemme 5.1.2. — *La convergence uniforme sur tout compact est équivalente à la convergence localement uniforme.*

Démonstration. — Soit $K \subset U$ compact. Par compacité de K, nous pouvons extraire un recouvrement fini de $K \subset \cup_{x\in K} D(x, r_x)$. □

Théorème 5.1.3. — *(Weierstrass). Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur U et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$. Nous supposons que la suite de fonctions f_n converge uniformément sur tout compact $K \subset U$ vers f. Alors f est holomorphe sur U et pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, la suite $f_n^{(\ell)}$ converge uniformément vers $f^{(\ell)}$ sur tout compact $K \subset U$.*

Démonstration. — Par convergence uniforme sur tout compact inclus dans U de la suite (f_n), la fonction f est continue sur U. Soit $a \in U$ et $r > 0$ tel que le disque fermé $\overline{D(a,r)} \subset U$. D'après la formule de Cauchy pour tout $z \in D(a,r)$,

$$f_n(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(a,r)} \frac{f_n(w)}{w-z}dw.$$

Par convergence uniforme sur le compact $\overline{D}(a,r)$, nous pouvons intervertir limite et intégrale et obtenir

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Donc f est holomorphe sur U. De plus, pour $z \in D(a,r)$

$$f_n^{(\ell)}(z) = \frac{\ell!}{2i\pi}\int_{\partial D(a,r)} \frac{f_n(w)}{(w-z)^{\ell+1}}dw \quad f^{(\ell)}(z) = \frac{\ell!}{2i\pi}\int_{\partial D(a,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{\ell+1}}dw.$$

Ainsi pour $z \in \overline{D}(a, r/2)$

$$|f_n^{(\ell)}(z) - f^{(\ell)}(z)| \leq \frac{\ell!}{(r/2)^\ell} \sup_{\delta D(a,r)} |f_n - f|.$$

La suite f_n' converge localement uniformément sur U et donc uniformément vers f' sur tout compact de U. □

Nous reformulons le théorème de Weierstrass (Théorème 5.1.3) pour les séries et les produits infinis.

Théorème 5.1.4. — *Soit $f_n : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une suite de fonctions holomorphes. Nous supposons que pour tout compact $K \subset U$, il existe $M_n(K)$ tel que $sup_K|f_n| \leq M_n(K)$ et $\sum_{n=1}^{\infty} M_n(K) < \infty$.*
Alors $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge absolument et uniformément sur tout compact. De plus f est holomorphe et $f' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'$.

Démonstration. — Le résultat s'obtient en appliquant le théorème de Weierstrass (Théorème 5.1.3) à la suite de fonctions holomorphes sur U, $g_k = \sum_{n=1}^{k} f_n$. □

Proposition 5.1.5. — *Soit $f_n : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une suite de fonctions holomorphes telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n|$ converge localement uniformément. Alors*
i. le produit

$$F(z) = \prod_{n=1}^{+\infty}(1 + f_n(z))$$

converge localement uniformément sur U,
ii. F est holomorphe,
iii. $F(z_0) = 0$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}$ avec $f_k(z_0) = -1$. De plus

$$\operatorname{ord}(F, z_0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{ord}(1 + f_k, z_0).$$

iv. Pour tout disque fermé $\overline{D}(z_0, r) \subset U$ ne contenant aucun des zéros de F, la série de terme général $\frac{f_n'(z)}{1+f_n(z)}$ est uniformément convergente dans $\overline{D}(z_0, r)$ et nous avons la dérivée logarithmique

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n'(z)}{1 + f_n(z)}.$$

Démonstration. — i. Rappelons que la fonction $\log(1 + z)$ est continue dans $D(0, 1)$ et il existe $0 < \rho < 1$ tel que $|\log(1 + z)| \leq \frac{3}{2}|z|$ pour $|z| \leq \rho$.
Soit $K \subset U$ un compact. Comme $\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k|$ converge localement uniformément il existe N tel que si $k \geq N$, $|f_k(z)| < \rho$, $z \in K$. Donc

$$|\log(1 + f_k(z))| \leq \frac{3}{2}|f_k(z)|, z \in K, k \geq N.$$

Comme $\sum_{k=N}^{+\infty} |f_k|$ converge uniformément, $G(z) = \sum_{k=N}^{+\infty} \log(1+f_k(z))$ converge uniformément sur K et $\prod_{k\geq 1}(1 + f_k(z))$ converge uniformément vers $F(z) = e^{G(z)}(1 + f_1(z)) \cdots (1 + f_{N-1}(z))$ sur K.
ii. La convergence localement uniforme (i.) et le théorème de Weierstrass (Théorème 5.1.3) permettent d'établir que F est holomorphe sur U.
iii. Soit V un voisinage de z_0 avec $K = \overline{V} \subset U$ compact. Alors

$$F(z_0) = e^{G(z_0)}(1 + f_1(z_0)) \cdots (1 + f_{N-1}(z_0)), \text{ avec } e^{G(z_0)} \neq 0,$$

donc

$$\operatorname{ord}(F, z_0) = \sum_{k=1}^{N-1} \operatorname{ord}(1 + f_k, z_0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{ord}(1 + f_k, z_0),$$

car $1 + f_k \neq 0$ pour $k \geq N$ car $|f_k| < \rho < 1$ dans K.
iv. Les fonctions $\frac{f_n'(z)}{1+f_n(z)} \in \mathcal{O}(\overline{D}(z_0, r))$ sont les dérivées des fonctions $\log(1 + f_n(z)) \in \mathcal{O}(\overline{D}(z_0, r)$ pour $n \geq N$. Par convergence uniforme de G sur $\overline{D}(z_0, r)$,

nous déduisons la convergence uniforme de la série de terme général $\frac{f_n'(z)}{1+f_n(z)}$ sur $\overline{D}(z_0, r)$ avec

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n'(z)}{1+f_n(z)}.$$

□

Exemples 5.1.6. — *i. La fonction $z\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ dont les zéros sont les entiers relatifs.*
ii. La fonction $\prod_{k=1}^{+\infty}(1+q^k z)$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ si $|q|<1$ dont les zéros sont les $-q^{-k}$, $k\in\mathbb{N}$.

Lemme 5.1.7. — *Si $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ ont les mêmes zéros avec multiplicités, alors il existe $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ avec $f = ge^h$.*

Démonstration. — La fonction $H = \frac{f}{g} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ n'a pas de zéro. La fonction $\frac{H'}{H} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ admet donc une primitive h.

$$(He^{-h})' = (H' - Hh')e^{-h} = 0$$

donc $He^{-h} = c \neq 0$ et $H = ce^h = e^{h+\log c}$. □

Exemple 5.1.8. — *Nous avons la factorisation*

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right), z \in \mathbb{C}$$

5.2. Théorèmes de Runge.— Toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(U)$ peut être approchée uniformément sur les compacts $K \subset U$ par une suite de fonctions rationnelles. Nous commençons par démontrer le cas où U est un disque ouvert. Cette section s'inspire du chapitre XII **[Ma]**.

Théorème 5.2.1. — *Soit $R \in]0, +\infty]$ et $K \subset D(z_0, R)$ un compact. Pour tout $f \in \mathcal{O}(D(z_0, R))$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $P_\varepsilon \in \mathbb{C}[z]$ tel que $\max_{z\in K}|f(z) - P_\varepsilon(z)| \leq \varepsilon$.*

Démonstration. — Par translation, nous pouvons supposer $z_0 = 0$. La fonction holomorphe est somme de sa série de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ qui converge sur $D(0, R)$. D'après la formule d'Hadamard le rayon de convergence $R' \geq R$ de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ vérifie

$$\frac{1}{R'} = \limsup_{n\longrightarrow+\infty} |a_n|^{1/n}.$$

Pour tout $\delta > 0$, il existe $N(\delta)$ tel que

$$|a_n|^{1/n} \leq \frac{1}{R} + \delta, n \geq N(\delta).$$

Soit $K \subset D(0,R)$ un compact et $r > 0$ tel que $0 < R - r < d(K, \mathbb{C} - D(0,R))$ ainsi $K \subset \overline{D}(0,r)$. Choisissons $\delta > 0$ assez petit pour que

$$\frac{1}{R'} + \delta < \frac{1}{r}.$$

Posons $q = \left(\frac{1}{R'} + \delta\right) r$, ainsi $q < 1$. Nous avons alors pour $z \in K$,

$$\left| \sum_{n=N(\delta)}^{+\infty} a_n z^n \right| \leq \sum_{n=N(\delta)}^{+\infty} \left(\frac{1}{R'} + \delta\right)^n r^n \leq \frac{q^{N(\delta)}}{1-q}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq N(\delta)$ tel que $\frac{q^N}{1-q} \leq \varepsilon$. Posons $P_\varepsilon = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n$. Alors nous obtenons le résultat attendu :

$$\max_{z \in K} |f(z) - P_\varepsilon(z)| = \max_{z \in K} \left| \sum_{n=N}^{+\infty} a_n z^n \right| \leq \varepsilon.$$

$\square$

Exemple 5.2.2. — *Soit $r > 1$, $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, 1/r < |z| < r\}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto 1/z$. Alors la fonction f ne satisfait pas la propriété d'approximation polynomiale sur $K = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. En effet si $P \in \mathbb{C}[z]$ alors $\int_K P(z)dz = 0$. Cependant $\int_K \frac{dz}{z} = 2\pi$. Il ne peut donc pas y avoir approximation uniforme de f par des polynômes sur K.*

Lemme 5.2.3. — *Soit K compact inclus dans U ouvert de $\mathbb{C}$. Pour $\gamma : [0,1] \longrightarrow U - K$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$, nous notons*

$$F_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ avec Q sans zéro dans K tels que

$$\max_{z \in K} \left| F_\gamma(z) - \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \varepsilon.$$

Démonstration. — La fonction

$$H : K \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (z,t) \mapsto \frac{1}{2i\pi} \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} \gamma'(t)$$

est continue sur le compact $K \times [0,1]$ donc uniformément continue. Par conséquent

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, |t_1 - t_2| \leq \delta(\varepsilon) \Longrightarrow |H(z,t_1) - H(z,t_2)| \leq \varepsilon, z \in K.$$

Ainsi pour n tel que $1/n \leq \delta(\varepsilon)$,

$$\left| F_{\gamma(z)} - \sum_{k=0}^{n-1} H(z, k/n) \frac{1}{n} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} |H(z,t) - H(z,k/n)|\, dt \leq \varepsilon.$$

En posant

$$\frac{P}{Q} = \sum_{k=0}^{n-1} H(z, k/n)\frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2i\pi}\frac{f(\gamma(k/n))}{\gamma(k/n) - z}\gamma'(k/n)\frac{1}{n},$$

nous obtenons une fraction rationnelle qui approche F_γ sur K avec

$$Q(z) = \prod_{k=0}^{n-1} (\gamma(k/n) - z) \in \mathbb{C}[z]$$

sans zéro dans K. □

Le théorème de Runge est une version généralisée du théorème 5.2.1 pour tout ouvert U.

Théorème 5.2.4. — *(Runge, version rationnelle). Soit $K \subset U$ compact. Toute fonction $f \in \mathcal{O}(U)$ peut être approchée uniformément sur K par des fractions rationnelles sans pôle sur K :*

$$\forall f \in \mathcal{O}(U), \forall \varepsilon > 0, \exists P, Q \in \mathbb{C}[z] \text{ tels que } \max_{z \in K} \left| f(z) - \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \varepsilon.$$

Démonstration. — • Construction d'un contour de K. Nous fixons $\alpha \in]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$ et

$$\delta = \alpha d(K, \mathbb{C} - U) > 0.$$

Pour $k, \ell \in \mathbb{Z}$, nous notons le carré plein fermé de côté δ :

$$\overline{\Pi}_{k,\ell} = \{x + iy \in \mathbb{C}, k\delta \leq x \leq (k+1)\delta, \ell\delta \leq y \leq (\ell+1)\delta\}$$

et $\Pi_{k,\ell} = \overline{\Pi}^{o}_{k,\ell}$ le carré plein ouvert. Nous avons le pavage

$$\mathbb{C} = \cup_{k \in \mathbb{Z}} \cup_{\ell \in \mathbb{Z}} \overline{\Pi}_{k,\ell}.$$

Nous notons $\overline{\Pi}_1, \ldots, \overline{\Pi}_J$ la collection de tous les $\overline{\Pi}_{k,\ell}$ d'intersection non nulle avec K et $\gamma_1, \ldots, \gamma_H$ les segments de longueur δ qui appartiennent au bord d'un unique $\overline{\Pi}_j$ sans appartenir à deux bords de deux carrés adjacents. Quitte à translater K et réduire δ, nous pouvons supposons que K contient au moins un point à l'intérieur de chaque carré.
Pour tout j, il existe $z_j \in \Pi_j \cap K$. Nous avons

$$|z_j - w| \leq \sqrt{2}\delta, w \in \overline{\Pi}_j, i.e. \overline{\Pi}_j \subset \overline{D}(z_j, \sqrt{2}\delta).$$

Or $\delta < \alpha d(K, \mathbb{C} - U)$ avec $\alpha \in]0, 1/\sqrt{2}[$, donc

$$\sqrt{2}\delta < d(K, \mathbb{C} - U).$$

Par conséquent $\overline{\Pi}_j \subset \overline{D}(z_j, \sqrt{2}\delta) \subset U$ et

$$\cup_j \overline{\Pi}_j \subset U, \cup_{1 \leq h \leq H} \gamma_h \subset U.$$

De plus pour tout $1 \leq h \leq H$, $\gamma_h \cap K = \emptyset$. En effet si $z \in \gamma_h \cap K$, alors il existe deux carrés adjacents tels que $\gamma_h = \overline{\Pi}_{k(h),\ell(h)} \cap \overline{\Pi}_{k(h)',\ell(h)'}$. Comme z appartient à chacun d'eux, les carrés $\overline{\Pi}_{k(h),\ell(h)}$ et $\overline{\Pi}_{k(h)',\ell(h)'}$ appartiennent tous les deux à la collection $\overline{\Pi}_1, \dots, \overline{\Pi}_J$. Donc γ_h est un bord commun à deux carrés de la collection ce qui est exclu par hypothèse.

• Montrons que pour tout $z \in K - \cup_{j=1}^J \delta\Pi_j$, nous avons

$$f(z) = \sum_{j=1}^J \frac{1}{2i\pi} \int_{\delta\Pi_j} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Comme $z \in K - \cup_{j=1}^J \delta\Pi_j$, il existe un unique $j(z)$ avec $z \in \Pi_{j(z)}$. Pour tout $j' \neq j(z)$, $\frac{1}{2i\pi} \int_{\delta\Pi_{j'}} \frac{f(w)}{w-z} dw = 0$ et

$$f(z) = \sum_{j=1}^J \frac{1}{2i\pi} \int_{\delta\Pi_j} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

• Montrons que pour tout $z \in K$,

$$f(z) = \sum_{h=1}^H \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_h} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Si $z \in K - \cup_{j=1}^J \delta\Pi_j$, nous avons par définition des γ_h (les contributions des autres bords des $\delta\Pi_j$ s'annulant deux à deux)

$$f(z) = \sum_{j=1}^J \frac{1}{2i\pi} \int_{\delta\Pi_j} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{h=1}^H \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_h} \frac{f(w)}{w-z} dw. \tag{5}$$

Comme $\gamma_h \cap K = \emptyset$, les intégrales $\int_{\gamma_h} \frac{f(w)}{w-z} dw$ sont continues par rapport à $z \in K$. Donc l'égalité (5) est encore satisfaite pour $z \in K \cap \cup_{j=1}^J \delta\Pi_j$.

D'après le lemme 5.2.3, pour tout $1 \leq h \leq H$, il existe $P_h, Q_h \in \mathbb{C}[z]$, Q_h sans zéro dans K avec

$$\sup_{z \in K} \left| F_{\gamma_h}(z) - \frac{P_h(z)}{Q_h(z)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{H}.$$

Posons $Q(z) = \prod_{h=1}^H Q_h(z) \in \mathbb{C}[z]$ et

$$P(z) = Q(z) \prod_{h=1}^H \frac{P_h(z)}{Q_h(z)} \in \mathbb{C}[z].$$

Nous obtenons alors l'approximation rationnelle attendue

$$\left| f(z) - \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \varepsilon.$$

□

Lemme 5.2.5. — *Si $K \subset \mathbb{C}$ compact a un complémentaire connexe, alors pour tout $z_0 \notin K$, la fonction rationnelle $\frac{1}{z-z_0}$ peut être approchée uniformément sur K par des polynômes de $\mathbb{C}[z]$.*

Démonstration. — • Comme K est compact, il est borné donc inclus dans un disque $D(0,R)$. Pour $z_1 \in \mathbb{C} - D(0,R)$, nous avons

$$\frac{1}{z-z_1} = -\frac{1}{z_1}\frac{1}{1-\frac{z}{z_1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{z^n}{z_1^{n+1}}$$

série uniformément convergente pour tout $z \in K$. Donc la fraction $\frac{1}{z-z_1}$ peut être approximée uniformément par des polynômes (séries partielles) sur K . De même pour toute puissance $\frac{1}{(z-z_1)^k}$, $k \in \mathbb{N}$.

• Montrons à présent que la fraction $\frac{1}{z-z_0}$ peut être approximée uniformément sur K par des polynômes en $\frac{1}{z-z_1}$.

Comme $\mathbb{C} - K$ est connexe de $\mathbb{C}$ donc connexe par arcs, il existe un chemin $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} - K$ avec $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma(1) = z_1$. L'image $\gamma([0,1])$ est compacte disjointe de K donc $\rho = \frac{1}{2}d(\gamma([0,1]),K) > 0$. Choisissons une suite de points $\{w_0, \dots w_k\} \subset \gamma([0,1])$ avec

$$w_0 = z_0, w_k = z_1, |w_\ell - w_{\ell+1}| \leq \rho, 0 \leq \ell \leq k.$$

Pour toute paire de points $w, w' \in \gamma([0,1])$ avec $|w - w'| \leq \rho$, montrons que la fonction rationnelle $\frac{1}{z-w}$ peut être approchée uniformément sur K par des polynômes en $\frac{1}{z-w'}$. En effet pour $z \in K$,

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-w'}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{w-w'}{z-w'}\right)^n,$$

et cette somme est uniformément convergente pour $z \in K$ car $\left|\frac{w-w'}{z-w'}\right| \leq \frac{\rho}{d(\gamma([0,1]),K)} = 1/2$. Ainsi les sommes partielles donnent une approximation de $\frac{1}{z-w}$ par des polynomes en $\frac{1}{z-w'}$.

La suite de points $\{w_0, \dots w_k\}$ permet alors de conclure. □

Du lemme 5.2.5 et la version rationnelle du théorème de Runge (Théorème 5.2.1), nous déduisons une version polynomiale du théorème de Runge,

Théorème 5.2.6. — *(Runge, version polynôme). Soit $K \subset U$ compact avec $\mathbb{C} - K$ connexe. Alors les fonctions holomorphes dans U sont uniformément approximables sur K par des polynômes :*

$$\forall f \in \mathcal{O}(U), \forall \varepsilon > 0, \exists P_\varepsilon \in \mathbb{C}[z] \text{ tel que } \max_{z\in K}|f(z) - P_\varepsilon(z)|| \leq \varepsilon.$$

5.3. Théorème de Montel. —

Définition 5.3.1. — *Une famille $\mathfrak{F} \subset \mathcal{O}(U)$ est dite* **uniformément bornée** *sur les compacts de U si pour tout $K \subset U$ compact, il existe $M_K \geq 0$ telle que*

$$|f(z)| \leq M_K, z \in K, f \in \mathfrak{F}.$$

Une fonction holomorphe est toujours bornée sur un compact, mais l'hypothèse "uniformément bornée" impose que la borne soit la même pour toute fonction de la famille.

Définition 5.3.2. — *Une famille $\mathfrak{F} \subset \mathcal{O}(U)$ est dite* **uniformément équicontinue** *sur les compacts de U si pour tout compact $K \subset U$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(K, \varepsilon) > 0$ tel que*

$$(z, w \in K \text{ avec } |z - w| \leq \delta) \Longrightarrow (|f(z) - f(w)| \leq \varepsilon, f \in \mathfrak{F}) .$$

Exemples 5.3.3. — *i. Sur $\overline{D}(0,1)$ la famille $\{f_n(z) = z^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée mais pas uniformément équicontinue car pour tout $z \in D(0,1)$,*

$$|f_n(1) - f_n(z)| = |1 - z^n| \longrightarrow_{n\to+\infty} 1.$$

Sur $D(0,1)$ cette famille $\{f_n(z) = z^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément équicontinue sur tout compact de $D(0,1)$.
ii. Sur $[0,1[$, la famille $\{g_n(x) = \sin(2\pi nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée par 1 mais n'est uniformément équicontinue sur aucun compact $[a,b] \subset [0,1[$ $(a < b)$ car les dérivées $2\pi n \cos(2n\pi x)$ sont non bornées.

Définition 5.3.4. — *Une famille $\mathfrak{F} \subset \mathcal{O}(U)$ est dite* **normale** *si pour toute suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathfrak{F}$, il existe une suite extraite uniformément convergente sur tout compact de U.*

Exemple 5.3.5. — *Sur $D(0,1)$, la famille $\{f_n(z) = z^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est normale.*

Définition 5.3.6. — *Une suite croissante de compacts (K_n) de U telle que tout compact K de U est contenu dans un K_n est dite* **exhaustive***.*

Le théorème 5.3.7 donne une construction systématique d'une suite exhaustive de compacts dans U.

Théorème 5.3.7. — *Pour tout ouvert U de $\mathbb{C}$, il existe une suite croissante (K_n) exhaustive de compacts. De plus $\cup_n K_n = U$.*

Démonstration. — Considérons les disques fermés contenus dans U dont les coordonnées du centre et le rayon sont rationnels. Ils forment un ensemble dénombrable $(\overline{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La suite croissante de compacts, $K_n = \cup_{i=1}^n \overline{B}_i$ convient. □

Théorème 5.3.8. — *(Montel). Soit $\mathfrak{F} \subset \mathcal{O}(U)$ une famille de fonctions uniformément bornées sur les compacts de U. Alors*
i. $\mathfrak{F}$ est uniformément équicontinue sur les compacts $K \subset U$,
ii. $\mathfrak{F}$ est une famille normale.

Démonstration. — i. Soit $K \subset U$ un compact et $r > 0$ avec $3r < d(K, \mathbb{C} - U)$. Pour tout $w \in K$,

$$\overline{D}(w, 2r) \subset \{u \in U, d(u, K) \leq 2r\} =: L.$$

La famille $\mathfrak{F}$ est uniformément bornée sur L compact, donc il existe $M_L > 0$ tel que

$$|f(u)| \leq M_L, u \in L, f \in \mathfrak{F}.$$

Pour $z \in D(w,r)$, la formule de Cauchy donne

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(w,2r)} \frac{f(u)}{u-z} du \text{ et } f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(w,2r)} \frac{f(u)}{u-w} du.$$

Ainsi

$$f(z) - f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(w,2r)} f(u) \left(\frac{1}{u-z} - \frac{1}{u-w} \right) du.$$

Or, comme $z \in D(w,r)$, $u \in \partial D(w,2r)$, $|u-z| > r$ et

$$\left| \frac{1}{u-z} - \frac{1}{u-w} \right| = \frac{|z-w|}{|u-z|2r} \leq \frac{|z-w|}{2r^2}.$$

Ainsi

$$|f(z) - f(w)| \leq \frac{1}{2\pi} M_L \frac{|z-w|}{2r^2} 2\pi 2r = \text{constante}|z-w|.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, nous pouvons choisir convenablement $0 < \delta < r$ de telle façon que pour tout $z, w \in K$ avec $|z-w| < \delta$, $|f(z) - f(w)| \leq \varepsilon$, ce qui établit l'uniforme équicontinuité sur K.
ii. Soit K un compact de U. Soit $r < \frac{1}{2} d(K, \mathbb{C} - U)$ et les compacts

$$K_r = \{z \in \mathbb{C}, d(z,K) \leq r\} \subset K_{2r} \subset U.$$

Par hypothèses, $M_0 = \sup_{n \in \mathbb{N}, z \in K_{2r}} |f_n(z)| < +\infty$. D'après l'inégalité de Cauchy

$$M_1 = \sup_{n \in \mathbb{N}, z \in K_r} |f_n'(z)| \leq \frac{M_0}{r} < +\infty.$$

Soient $z_1, z_2 \in K$. Si $d(z_1, z_2) \leq r$, alors $[z_1, z_2] \subset K_r$ et le théorème des accroissements finis entraîne

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| \leq M_1 d(z_1, z_2).$$

Si $d(z_1, z_2) \geq r$, $|f_n(z_i)| \leq M_0$ implique

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| \leq \frac{2M_0}{r} d(z_1, z_2).$$

Les fonctions $f_{n|K}$ sont lipschitziennes avec la même constante de Lipschitz, le théorème d'Ascoli (voir cours de Topologie et Calcul Différentiel) montre que nous pouvons en extraire une suite uniformément convergente sur K.
Pour $\nu \in \mathbb{N}^*$, nous considérons une suite croissante exhaustive de compacts $(K_\nu)_{\nu \in N^*}$. D'après ce qui précède, il existe une partie infinie $S_1 \subset \mathbb{N}$ telle que la suite $(f_n)_{n \in S_1}$ converge uniformément sur K_1. Par récurrence sur ν, nous construisons une suite de parties infinies emboîtées

$$S_\nu \subset S_{\nu-1} \subset \cdots \subset S_1 \subset \mathbb{N}$$

telle que la sous-suite $(f_n)_{n\in S_\nu}$ converge uniformément sur K_ν. Par le procédé d'extraction diagonale, en notant n_i le $(i+1)$-ème élément de S_i, nous construisons une sous-suite $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur tous les compacts K_ν. $\square$

5.4. Compacts de $\mathcal{O}(U)$. — Nous munissons $\mathcal{O}(U)$ de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. C'est une topologie invariante par translation dans laquelle les parties

$$V(K,\varepsilon) = \{f \in \mathcal{O}(U), \sup_{z\in K} |f(z)| < \varepsilon\}$$

pour K décrivant l'ensemble des compacts de U et ε décrivant $\mathbb{R}_+$, constituent un système de voisinages de 0. En particulier, l'addition et l'homothétie sont continues pour cette topologie.

Nous montrons que cette topologie est métrisable : soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante exhaustive de compacts de U et

$$p_{K_n} : \mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathbb{R}_+, f \mapsto \sup_{z\in K_n} |f(z)|.$$

Alors

$$d(f,g) = \sum_{i\geq 1} 2^{-i} \min(1, p_{K_i}(f-g))$$

définit une distance invariante par translation sur $\mathcal{O}(U)$ qui induit la topologie de la convergence sur tout compact :

Lemme 5.4.1. — *La topologie de la convergence sur tout compact coïncide avec la topologie induite par la distance d sur $\mathcal{O}(U)$.*

Démonstration. — • Soit K un compact de U et $\varepsilon \in]0,1[$. Notons

$$V(K,\varepsilon) = \{f \in \mathcal{O}(U), p_K(f) < \varepsilon\}.$$

Soit $i \in \mathbb{N}$ avec $K \subset K_i$. Alors $d(f,0) < 2^{-i}\varepsilon$, implique $p_{K_i}(f) < \varepsilon$, donc $B(0, 2^{-i}\varepsilon) \subset V(K_i,\varepsilon) \subset V(K,\varepsilon)$. Donc $V(K,\varepsilon)$ contient une boule centrée en 0 pour d.

• Soit $B(0,\varepsilon)$ une boule pour d. Soit $i \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-i} < \varepsilon/2$. Alors si $f \in V(K_i, \varepsilon/2)$,

$$d(f,0) \leq \sum_{j=1}^{i} 2^{-j} p_{K_i}(f) + \sum_{j=i+1}^{+\infty} 2^{-j} < \varepsilon/2 + 2^{-i} < \varepsilon$$

donc $V(K_i,\varepsilon/2) \subset B(0,\varepsilon)$. $\square$

Remarque 5.4.2. — *L'espace vectoriel $\mathcal{O}(U)$ localement convexe, métrisable et complet est un espace de Frechet.*

Théorème 5.4.3. — *Les compacts de $\mathcal{O}(U)$ sont les fermés bornés.*

Démonstration. — • Soit $A \subset \mathcal{O}(U)$ une partie compacte.
Comme $\mathcal{O}(U)$ est métrisable, il est séparé, donc A est fermée.
Soit K un compact de U ; l'application

$$p_K : \mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathbb{R}_+, f \mapsto \sup_{z \in K} |f(z)|$$

est continue. Donc comme A est compacte, $p_K(A)$ est compacte donc bornée dans $\mathbb{R}$. Les applications $f \in A$ sont uniformément bornées sur K. Pour tout compact K de U, il existe $\varepsilon_A > 0$ tel que $A \subset V(K, \varepsilon_A)$. Ainsi pour tout $V(K, \varepsilon)$ d'un système fondamental de voisinages de 0, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ avec $A \subset V(K, \lambda\varepsilon)$ donc A est bornée, i.e incluse dans une boule $B(0, r)$.
• Soit A une partie fermée bornée de $\mathcal{O}(U)$. Comme A est borné, pour tout compact K de U, les application $f \in A$ sont uniformément bornées sur K. Soit (f_n) une suite d'éléments de A. Cette suite est uniformément bornée donc admet une sous-suite convergente uniformément sur tout compact de U de limite $f \in \mathcal{O}(U)$ (Théorème de Montel 5.3.8). Comme A est fermée, $f \in A$ donc A est compact. □

Deuxième partie II

FONCTIONS MÉROMORPHES

6. Théorème des résidus

L'objet de cette section est la preuve du théorème des résidus (Théorème 6.2.3) qui permet de calculer sans peine de nombreuses intégrales de la fonction réelle. L'intégrale sur un lacet perçoit la trace (des "résidus") des singularités via le développement en série de Laurent de f.
Ce chapitre s'inspire librement du chapitre VIII du livre de J. Dieudonné [**Di**].

6.1. Développement en séries de Laurent.— Nous montrons que toute fonction holomorphe sur une couronne est somme d'une série de Laurent (Théorème 6.1.2).

Définition 6.1.1. — *Nous appelons série de Laurent, les séries complexes de la forme* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n$.

Si les séries $g(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $h(z) = \sum_{n<0} a_n z^n$ admettent comme rayon de convergence respectif $R_2, 1/R_1$ (avec la convention $R_1 = 0$ pour $1/R_1 = \infty$) avec $R_1 < R_2$ alors la série de Laurent $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n$ converge sur la couronne $\{z, R_1 < |z-a| < R_2\}$ avec $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$. Le point $a \in \mathbb{C}$ est dit centre de la couronne. La somme de la série de Laurent sur la couronne est une fonction holomorphe.
En effet pour r_1, r_2 tels que $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ les séries g, h convergent normalement, nous pouvons les intégrer terme à terme. Donc f est holomorphe, comme dérivée d'une fonction holomorphe.
Le théorème 6.1.2 établit que toute fonction holomorphe f sur une couronne est somme d'une série de Laurent, le centre a de la couronne n'appartenant pas forcément au domaine de définition de f.

Théorème 6.1.2. — *Soit $f \in \mathcal{O}(U)$, $a \in \mathbb{C}$ et $V = \{z | R_1 < |z-a| < R_2\} \subset U$. Alors il existe une unique série de Laurent convergente dans V telle que $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n$.*

Démonstration. — Commençons par établir l'unicité. Écrivons la fonction nulle $f \in \mathcal{O}(U)$ sous la forme $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n$. Il s'agit de montrer que $a_n = 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Posons $w = z - a$, ainsi $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n w^n = 0$. Rappelons que

$$\int_{\delta D(0,r)} z^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2i\pi, & n = -1 \end{cases}$$

Ainsi pour $R_1 < r < R_2$ et $p \in \mathbb{Z}$, nous avons

$$\int_{\delta D(0,r)} w^{-p-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n w^n dw = 2i\pi a_p = 0.$$

Pour l'existence, soit $z \in V$, $R_1 < r_1 < |z-a| < r_2 < R_2$. D'après la formule de Cauchy,

$$2i\pi f(z) = \int_{\partial D(a,r_2)} \frac{f(u)}{u-z} du - \int_{\partial D(a,r_1)} \frac{f(u)}{u-z} du.$$

Or pour $|z-a| < |u-a|$,

$$\frac{1}{u-z} = \frac{1}{(u-a)-(z-a)} = \sum_{n\geq 0} \frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+1}}.$$

Ainsi en intégrant terme à terme la série normalement convergente sur $\partial D(a, r_2)$,

$$\int_{\partial D(a,r_2)} \frac{f(u)}{u-z} du = \sum_{n\in\mathbb{N}} (z-a)^n \int_{\partial D(a,r_2)} \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}} du.$$

De façon analogue,

$$\int_{\partial D(a,r_1)} \frac{f(u)}{u-z} du = -\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \int_{\partial D(a,r_1)} f(u)(u-a)^n du$$

$$\int_{\partial D(a,r_1)} \frac{f(u)}{u-z} du = -\sum_{k=-1}^{-\infty} (z-a)^k \int_{\partial D(a,r_1)} \frac{f(u)}{(u-a)^{k+1}} du.$$

D'où l'existence du développement de Laurent de f. □

Exemple 6.1.3. — *Sous les hypothèses du théorème 6.1.2, la valeur de l'intégrale*

$$\int_{\partial D(a,r)} \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}} du = 2i\pi a_n$$

ne dépend pas du choix de r satisfaisant $R_1 < r < R_2$. Cet exemple est particulièrement utile pour le calcul d'intégrales réelles via le théorème des résidus (Théorème 6.2.3).

Définition 6.1.4. — *Soit $f : U - \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Le point a alors dit* **singularité** *de f. Il existe $r > 0$ tel que $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n$, pour $0 < |z| < r$.*
i. Si $a_n = 0, n < 0$, la singularité en a est dite **singularité apparente** *et f se prolonge en une fonction holomorphe sur U.*
ii. S'il existe $k < 0$ tel que $a_n = 0$ pour tout $n < k$, le point a est dit **pôle ou singularité isolée** *et la fonction $(z-a)^k f(z)$ est holomorphe sur U.*
iii. Si $a_n \neq 0$ pour une infinité de $n < 0$, alors la singularité en a est dite **singularité essentielle**.

Exemples 6.1.5. — *i. La fonction* $f(z) = \exp(1/z)$ *est holomorphe sur* $\mathbb{C}^*$ *et admet une singularité essentielle en* 0.
ii. Soit la série entière

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

a pour rayon de convergence 1. Alors il existe au moins un point de $\delta D(0,1)$ *au voisinage duquel* f *ne se prolonge pas.*
En effet raisonnons par l'absurde, comme $\delta D(0,1)$ *est compact, il existe un nombre fini de disques ouverts* $(D_i)_{1\leq i\leq n}$ *et des fonctions* $g_i \in \mathcal{O}(D_i)$ *tels que le centre de* D_i *soit sur* $\delta D(0,1)$, $\delta D(0,1) \subset \cup_{i=1}^n D_i$ *et* $g_i(z) = f(z)$ *pour* $z \in D_i \cap U$, $1 \leq i \leq n$. *Si* $D_i \cap D_j \neq \emptyset$ *alors* $V_{ij} = D_i \cap D_j \cap U \neq \emptyset$ *(car les centres des* D_i *sont dans* $\delta D(0,1)$*) et* $g_i = f = g_j$ *dans* V_{ij}. *Comme* $D_i \cap D_j$ *est connexe,* $g_i = g_j$ *sur* $D_i \cap D_j$. *Définisssons* h *sur* $\Omega = U \cup D_1 \cup \cdots \cup D_n$ *par*

$$h(z) = \begin{cases} f(z) & si\ z \in U, \\ g_i(z) & si\ z \in D_i \end{cases}$$

Or $\overline{U} \subset \Omega$ *et* Ω *est ouvert donc il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que* $D(0, 1+\varepsilon) \subset \Omega$. *Or* $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ *et* h *est donné par* f *dans* U. *Ceci est en contradiction avec la valeur 1 du rayon de convergence.*

6.2. Résidus. Calculs d'intégrales.— Du développement en séries de Laurent des fonctions holomorphes, nous déduisons le théorème des résidus (Théorème 6.2.3) qui permet de calculer de façon très simple de nombreuses intégrales de la fonction réelle.

Définition 6.2.1. — *Soit* $f : \{z | R_1 < |z-a| < R_2\} \longrightarrow \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe. Le* **résidu** *de* f *au point* a *est le coefficient* a_{-1} *de son développement de Laurent,*

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(u)du$$

avec $\gamma = \partial D(a,r)$ *pour* $R_1 < r < R_2$.

Exemples 6.2.2. — *i. Si* f *admet un pôle d'ordre* m *en* a, *alors*

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{(z-a)^m}$$

où f_1 *est holomorphe dans un voisinage de* a *et* $f_1(a) \neq 0$. *Par conséquent* $\operatorname{Res}(f,a)$ *est le coefficient de* $(z-a)^{m-1}$ *dans le développement de Taylor de* $f_1(z)$ *au point* a *:*

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{f_1^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}.$$

En particulier, dans le cas d'un pôle simple, $\mathrm{Res}(f,a) = f_1(a)$.
Par exemple, $f(z) = \frac{z}{(z^2+1)^2} = \frac{f_1(z)}{(z-i)^2}$ *avec* $f_1(z) = \frac{z}{(z+i)^2}$. *Ainsi*

$$\mathrm{Res}(f,i) = f_1'(i) = 0.$$

ii. Si $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ *avec* g, h *des fonctions holomorphes au point* a, $g(a) \neq 0$ *et* h *admet une racine simple en* a. *Alors*

$$\mathrm{Res}(f,a) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

En effet $h(z) = (z-a)h_1(z)$ *avec* h_1 *holomorphe en* a, $h_1(a) \neq 0$. *Ainsi* $h'(a) = h_1(a)$. *Avec les notations de i.,* $f_1 = g/h_1$ *et le résultat suit.*
Par exemple la fonction

$$f(z) = \frac{z - \sin z}{z^2 \sin z}$$

admet pour pôles $z = n\pi$, *pour* $n \in \mathbb{Z}$. *Or* $\lim_{z\to 0} f(z) = 1/6$, *donc* $\mathrm{Res}(f,0) = 0$.
Soit $n \in \mathbb{Z}^*$ *et* $z = n\pi$. *Ecrivons*

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \textit{ pour } g(z) = \frac{z - \sin z}{z^2} \textit{ et } h(z) = \sin z.$$

Alors $g(n\pi) = 1/n\pi$ *et* $h'(n\pi) = \cos(n\pi)$, *donc*

$$\mathrm{Res}(f,n\pi) = \frac{g(n\pi)}{h'(n\pi)} = \frac{(-1)^n}{n\pi}.$$

Théorème 6.2.3. — *(Théorème des résidus). Soit* U *un ouvert simplement connexe de* $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $(a_i)_{1\leq i\leq n} \in U^n$ n *points distincts de* U. *Soit*

$$f : U - \{a_1, \dots, a_n\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

holomorphe et γ *un lacet de* U'. *Alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{i=1}^n \mathrm{Res}(f,a_i) j(a_i,\gamma).$$

Démonstration. — La fonction f admet un développement de Laurent dans un voisinage de chacun des points a_k : $f(z) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} b_\ell^{(k)}(z-a_k)^\ell, 1 \leq k \leq n$. Posons

$$u_k(z) = \sum_{\ell=1}^\infty b_{-\ell}^{(k)} \frac{1}{(z-a_k)^\ell}, 1 \leq k \leq n \text{ et } g(z) = f(z) - u_1(z) - \dots - u_n(z).$$

La fonction g est holomorphe sur $U - \{a_1, \dots, a_n\}$ et les a_k sont des singularités apparentes de g. En effet soit $D(a_k, r) \subset U - \{a_1, \dots a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n\}$, alors dans $D(a_k,r) - \{a_k\}$,

$$g(z) = (f(z) - u_k(z)) - \sum_{j\neq k} u_j(z)$$

est prolongeable en une fonction holomorphe sur $D(a_k, r)$, donc g est prolongeable en une fonction holomorphe sur U. Comme U est simplement connexe, le théorème de Cauchy (Théorème 2.3.1) sur le lacet γ de U implique

$$\int_\gamma g(z)dz = 0.$$

Or pour $1 \leq k \leq n$, $\int_\gamma u_k(z)dz = 2i\pi \mathrm{Res}(u_k, a_k) j(a_k, \gamma)$. D'où

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}(f, a_i) j(a_i, \gamma).$$

$\square$

Nous donnons quelques applications du théorèmes des résidus à l'analyse réelle :
- intégrales trigonométriques (Exemple 6.2.4.i.),
- fonctions rationnelles (Exemple 6.2.4.ii.),
- intégrales de Fourier (Exemple 6.2.4.iii.),
- intégrales logarithmiques (Exemple 6.2.4.iv.),
- transformation de Mellin (Exemple 6.2.4.v.).

Exemples 6.2.4. — *i. Intégrale trigonométrique.*
Soit $a \in]1, +\infty[$,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t}$$

En effectuant le changement de variable $z = e^{it}$, nous obtenons

$$I = \int_{|z|=1} \frac{2dz}{z^2 - 1 + 2aiz}.$$

Les pôles sont en $z_\pm = -ai \pm i\sqrt{a^2 - 1}$ et seul $|z_+| < 1$. Ainsi $j(z_+, \delta D(0, 1)) = 1$ et $j(z_-, \delta D(0, 1)) = 0$. D'après le théorème des résidus (Théorème 6.2.3)

$$I = 2i\pi \mathrm{Res}(f, z_+) = 2i\pi \left(\frac{2}{(z^2 - 1 + 2aiz)'} \right)(z_+) = 2i\pi \frac{2}{2z_+ + 2ai} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

ii. Intégrale d'une fonction rationnelle.
Supposons que $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg Q \geq \deg P + 2$ et Q sans racine réelle. Soit

$$f = \frac{P}{Q} \text{ et } I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Ces hypothèses garantissent que I converge et

$$I = \lim_{R \longrightarrow +\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx.$$

Considérons la fonction de la variable complexe $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ *et le contour* $\gamma_R = [-R, R] \cup S_R$ *où* S_R *désigne le demi-cercle de centre 0 de rayon* R *sur le demi-plan* $\Im z \geq 0$ *parcouru dans le sens trigonométrique. D'après le théorème des résidus*

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{S_R} f(z)dz = 2i\pi \sum_{a_j, |a_j|<R, \Im(a_j)>0} \operatorname{Res}(f, a_j)$$

où les a_j *sont les racines de* Q*. Posons* $\alpha = \lim_{|x| \to +\infty} x^2 |f(x)|$*. Quand* R *tend vers* $+\infty$, $\left|\int_{S_R} f dz\right| \leq \pi R \frac{\alpha+1}{R^2}$ *tend vers* 0*. Nous obtenons*

$$I = 2i\pi \sum_{a_j, \Im a_j > 0} \operatorname{Res}(\frac{P}{Q}, a_j).$$

Par exemple, les racines de $Q(z) = z^4 + 1$ *sont* $e^{i\pi/4}, e^{3i\pi/4}, e^{5i\pi/4}, e^{7i\pi/4}$ *et seuls* $e^{i\pi/4}, e^{3i\pi/4}$ *sont dans le demi-plan supérieur. Ainsi*

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} &= 2i\pi \left(\operatorname{Res}(\frac{1}{z^4+1}, e^{i\pi/4}) + \operatorname{Res}(\frac{1}{z^4+1}, e^{i3\pi/4}) \right) \\ &= 2i\pi \left(e^{-3i\pi/4}/4 + e^{-i\pi/4}/4 \right).\end{aligned}$$

D'où,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

iii. Intégrales de Fourier.
Nous calculons l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix} f(x)dx$$

pour f *une fonction holomorphe sur* $\mathbb{C} - \{a_1, \ldots, a_n\}$ *sans singularité sur l'axe réel avec*

$$\lim_{|z| \to +\infty, \Im(z) \geq 0} f(z) = 0$$

et telle que l'intégrale I *soit absolument convergente. Cette dernière hypothèse garantit la convergence de* I *et l'égalité*

$$I = \lim_{R \longrightarrow +\infty} \int_{-R}^{R} e^{ix} f(x)dx.$$

Nous considérons le même contour γ_R *que dans l'exemple ii. Le théorème des résidus (Théorème 6.2.3) implique*

$$\int_{\gamma_R} e^{iz} f(z)dz = \int_{-R}^{R} e^{ix} f(x)dx + \int_{S_R} e^{iz} f(z)dz = 2i\pi \sum_{a_j, \Im(a_j)>0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, a_j).$$

Montrons que

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{S_R} e^{iz} f(z)dz = 0.$$

Posons $z = Re^{it}$ *pour* $0 \leq t \leq \pi$. *Par hypothèse,* $M_R = \sup_{z \in S_R} |f(z)|$ *tend vers* 0 *quand* R *tend vers 0. De plus*

$$J = \left| \int_{S_R} f(z)e^{iz}dz \right| = \left| \int_0^\pi Rf(Re^{it})e^{iRe^{it}}dt \right| \leq \int_0^\pi RM_R e^{-R\sin t}dt.$$

Or $\frac{\sin t}{t} \geq \frac{2}{\pi}$, *donc* $J \leq 2\int_0^{\pi/2} RM_R e^{-R\frac{2}{\pi}t}dt = \pi M_R(1-e^{-R}) \longrightarrow 0$. *Donc*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx = 2i\pi \sum_{a_j, \Im(a_j)>0} \mathrm{Res}(f(z)e^{iz}, a_j).$$

Par exemple,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx = \Re \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}dx = 2i\pi \mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{1+z^2}, i\right) = \frac{\pi}{e}.$$

Le cas où f *admet un pôle simple sur l'axe réel se ramène à ce cas en travaillant sur le contour* $S_R \cup [-R, -r] \cup S_r \cup [r, R]$.

vi. Intégrales logarithmiques.

Soit $f = P/Q$ *une fonction rationnelle* $\deg Q \geq \deg P + 2$ *sans racine réelle. Nous calculons*

$$I = \int_0^{+\infty} f(x)\log(x)dx.$$

Pour cela, nous introduisons le contour

$$\gamma_{r,R} = C_R \cup L_- \cup C_r \cup L_+$$

où C_r, C_R *décrivent les cercles de centre 0 de rayons respectifs* R, r, *privés d'un petit arc (i.e. de longueur que nous faisons tendre vers 0) de cercle pour éviter le demi axe réel positif. Les notations* L_+ *et* L_- *sont abusives et désignent respectivement*

$$L_+ = \{z = t + i\varepsilon, r \leq t \leq R\} \text{ et } L_- = \{z = t - i\varepsilon, r \leq t \leq R\}$$

pour ε *que nous faisons tendre vers 0. Nous donnons ici les grandes lignes du calcul sans détailler les passages à la limite vers 0.*

Sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}_+$, *nous pouvons définir le logarithme de* $z = \rho e^{it}$, $t \in]0, 2\pi[$ *par* $log(z) = \log(\rho) + it$ *et la fonction* $g(z) = (\log z - i\pi)^2 f(z)$. *Ainsi*

$$\lim_{R \longrightarrow +\infty} \int_{C_R} g(z)dz = 0 \text{ et } \lim_{r \longrightarrow 0} \int_{C_r} g(z)dz = 0.$$

Sur l'axe réel,

$$\int_r^R (\ln(x) - i\pi)^2 f(x)dx + \int_R^r (\ln(x) + i\pi)^2 f(x)dx = -4i\pi \int_r^R \ln(x)f(x)dx.$$

D'après le théorème des résidus pour la fonction g *sur* $\gamma_{r,R}$ *en passant à la limite quand* r *tend vers 0 et* R *tend vers* $+\infty$,

$$\int_0^\infty \ln(x)f(x)dx = -1/2 \sum_a \mathrm{Res}((\log z - i\pi)^2 f(z), a),$$

où la somme porte sur l'ensemble des zéros a de Q.
En particulier, nous obtenons

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = 0.$$

v. Transformation de Mellin.
Soit $0 < \alpha < 1$*. Nous calculons*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(x+1)}dx.$$

Cette intégrale est convergente car :
- pour $0 < x < 1$*,*

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(x+1)} < \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

- pour $1 < x < +\infty$*,*

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(x+1)} < \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha}.$$

Ainsi I *converge et* $I = \lim_{r\to 0, R\to+\infty} \int_r^R \frac{dx}{x^\alpha(x+1)}$*. Nous prolongeons* x^α *par la fonction* $z^\alpha = \exp(\alpha \log(z))$ *avec pour* $z = \rho e^{it}, 0 < t < 2\pi$*,* $\log(z) = \log(\rho) + it$ *et nous calculons l'intégrale de* $f(z) = \frac{1}{z^\alpha(z+1)}$ *sur le contour de l'exemple iv.* $\gamma_{r,R} = C_R \cup L_- \cup C_r \cup L_+$*. Le théorème des résidus donne*

$$\int_{\gamma_{r,R}} f dz = \int_{C_R} f dz - \int_{C_r} f dz + \int_{L_+} f dz - \int_{L_-} f dz = 2i\pi \mathrm{Res}(f,-1) = 2i\pi e^{-i\alpha\pi}.$$

Il s'agit ensuite de montrer

$$\lim_{r\to 0} \int_{C_r} f dz = 0, \lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f dz = 0,$$

$$\lim_{r\to 0, R\to+\infty, \varepsilon\to 0} \int_{L_+} f dz = I, \lim_{r\to 0, R\to+\infty, \varepsilon\to 0} \int_{L_-} f dz = Ie^{-2i\pi\alpha}.$$

Nous obtenons alors

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(x+1)}dx = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$

Cette méthode se généralise aux intégrales de la forme

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{F(x)}{x^\alpha}dx$$

pour F *une fonction rationnelle sans pôle sur* $\mathbb{R}_+$*.*

6.3. Résidus en l'infini. —

Définition 6.3.1. — *La fonction holomorphe $f : \{z \in \mathbb{C}, |z| > R\} \longrightarrow \mathbb{C}$ admet une* **singularité isolée en** ∞ *si la fonction*

$$g : D(0, 1/R) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = f(1/z)$$

admet 0 comme singularité isolée.

Définition 6.3.2. — *Soit $f : \{z \in \mathbb{C}, |z| > R\} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe admettant une singularité isolée en ∞. Le résidu à l'infini de f est défini par*

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=\rho} f dz, \text{ avec } \rho > R.$$

Lemme 6.3.3. — *Soit $f : \{z \in \mathbb{C}, |z| > R\} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe admettant une singularité isolée en ∞ et $g(z) = f(1/z)$. Alors*

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = \mathrm{Res}(-g(w)\frac{1}{w^2}, 0).$$

Démonstration. — Pour $\rho > R$, nous avons

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=\rho} f dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=1/\rho} \frac{-g(w)}{w^2} dw = \mathrm{Res}(-g(w)\frac{1}{w^2}, 0).$$

□

La définition du résidu en l'infini donne une version du théorème des résidus sur $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ commode pour les applications. En effet, il est parfois plus simple de calculer uniquement le résidu à l'infini plutôt qu'en tous les pôles finis.

Corollaire 6.3.4. — *Si f n'a que des singularités isolées en $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ et éventuellement en ∞, alors*

$$\sum_{a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}} \mathrm{Res}(f, a) = 0.$$

Démonstration. — Soit R tel que $R \geq |a_i|$, $1 \leq i \leq n$. Alors

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=R} f dz = -\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(f, a_j).$$

D'où $\sum_{a \in \widehat{\mathbb{C}}} \mathrm{Res}(f, a) = 0$. □

Exemples 6.3.5. — *i. La fonction $f(z) = \frac{z^4+3}{z-1}$ a des pôles en 1 et ∞. En effet $g(z) = f(1/z) = \frac{1}{z^3} \frac{1+3z^4}{1-z}$ a un pôle en 0. Remarquons que $\mathrm{Res}(f, \infty) \neq \mathrm{Res}(g, 0)$. Cependant*

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = \mathrm{Res}\left(g(w)\frac{-1}{w^2}, 0\right) = \mathit{Coeff}_{w^{-1}} \frac{-1}{w^5} \frac{1 + 3w^4}{1 - w} = \mathit{Coeff}_{w^4} \frac{-1 - 3w^4}{1 - w} = -4.$$

ii. Soient $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ avec $\deg Q = q$, $q \geq \deg P + 2$ et Q n'ayant que des racines simples en $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$. Alors

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{P(\alpha_i)}{Q'(\alpha_i)} = 0.$$

En effet, il suffit d'appliquer le corollaire 6.3.4 avec $\mathrm{Res}(f, \alpha_i) = \frac{P(\alpha_i)}{Q'(\alpha_i)}$ et $\mathrm{Res}(f, \infty) = 0$ car la fonction associée $g(w)\frac{-1}{w^2}$ est holomorphe en 0.

7. Singularités

Cette section s'inspire du chapitre IV [**BD**].

7.1. Etude locale. —

Théorème 7.1.1. — *(Théorème du prolongement de Riemann). Soit $f : U - \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Si f est bornée au voisinage de a alors a est une singularité apparente.*

Démonstration. — Les coefficients de Laurent vérifient les inégalités de Cauchy : pour $r > 0$ assez petit,

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}} du, \text{ donc } |a_n| \leq \frac{\sup_{\partial D(a,r)} |f(z)|}{r^n}.$$

Donc pour $n < 0$, si f est bornée au voisinage de a en faisant tendre r vers 0, nous obtenons $a_n = 0$, $n < 0$. □

Théorème 7.1.2. — *(Théorème de Weierstass). Soit U ouvert, $a \in U$, f holomorphe sur $U - \{a\}$ avec a singularité essentielle de f. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, $f(\{z, 0 < |z-a| < \varepsilon\})$ dense dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. — Raisonnons par l'absurde en supposant

$$\exists b \in \mathbb{C}, r > 0, f(\{z, 0 < |z-a| < \varepsilon\}) \cap D(b,r) = \emptyset.$$

Alors la fonction $g : D(a,\varepsilon) - \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$, $g(z) = \frac{1}{f(z)-b}$ est holomorphe et bornée au voisinage de a donc admet un prolongement holomorphe sur $D(a,\varepsilon)$ et un développement de la forme $g(z) = \sum_{n\geq 0} b_n (z-a)^n$. Notons b_k le premier coefficient non nul de g. Ainsi

$$f(z) = b + \frac{1}{g(z)} = b + \frac{1}{b_k (z-a)^k \left(1 + \sum_{n\geq k+1} \frac{b_n}{b_k} (z-a)^{n-k}\right)}.$$

Donc f admet un développement de Laurent avec un pôle d'ordre k en a, ce qui est absurde. □

Exemple 7.1.3. — *Les automorphismes (biholomorphismes) de $\mathbb{C}$ sont les applications affines $z \mapsto az+b$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$:*

$$\operatorname{Aut}\mathbb{C} = \{f : z \mapsto az+b, a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\}.$$

En effet si $f \in \operatorname{Aut}\mathbb{C}$, alors $g(z) = f(1/z)$ est holomorphe injective sur $\mathbb{C}^*$. L'image $g(D(0,r) - \{0\})$ d'un disque pointé n'est pas dense dans $\mathbb{C}$ car cet ensemble est disjoint de l'ouvert $g(\mathbb{C} - \overline{D}(0,r)) = f(D(0,1/r) - \{0\})$. D'après le théorème de Weierstrass, ceci entraîne que g n'a pas de singularité essentielle en 0. Donc g a un pôle d'ordre m. Donc $f(z)/z^m$ est bornée quand $z \longrightarrow \infty$ donc f est un polynôme d'ordre m. Comme f est injectif, f est de degré 1, $f(z) = az+b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Remarque 7.1.4. — *Le théorème de Picard (Théorème 7.2.3) est un énoncé plus précis que le théorème de Weierstrass : sous les mêmes hypothèses, nous avons*

$$f(\{z, 0 < |z-a| < \varepsilon\}) = \mathbb{C} \text{ ou } \mathbb{C} - \{\text{un point}\}.$$

7.2. Grand théorème de Picard. —

Lemme 7.2.1. — *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$. Il existe une fonction*

$$M : [1, +\infty[\times]0, R[\longrightarrow \mathbb{R}^+, (A,r) \mapsto M(A,r)$$

croissante en les variables A, r telle que toute application holomorphe $f : D(z_0,R) \longrightarrow \mathbb{C} - \{0,1\}$ vérifiant $A^{-1} \leq |f(z_0)| \leq A$, satisfait

$$|f(z)| \leq M(A,r), z \in \overline{D}(z_0,r).$$

Démonstration. — Comme $D(z_0,R)$ est simplement connexe et $f(D(z_0,R)) \subset \mathbb{C}^*$, il existe une détermination du logarithme $f_1 = \frac{1}{2i\pi}\log f$ sur $D(z_0,R)$ telle que $0 \leq \Re f_1(z_0) \leq 1$ (Théorème 2.3.2). Nous avons $|\Im f_1(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\log A$, donc

$$|f_1(z_0) - j| \leq B = \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}(\log A)^2}, j = 0,1.$$

Comme $1 \notin f(D(z_0,R))$, $f_1(D(z_0,R)) \subset \mathbb{C} - \mathbb{Z}$, en particulier f_1 omet les valeurs 0 et 1. Il existe donc des fonctions f_2, f_3 holomorphes telles que

$$f_2 = \sqrt{f_1} + \sqrt{f_1 - 1}, f_3 = \sqrt{f_1} - \sqrt{f_1 - 1}, \text{ sur } D(z_0,R).$$

Nous avons $f_2 f_3 = 1$, $|f_2(z_0)| \leq 2\sqrt{B}$, $|f_3(z_0)| \leq 2\sqrt{B}$. Ainsi,

$$C(A)^{-1} \leq |f_2(z_0)| \leq C(A), \text{ avec } C(A) = 2\sqrt{B} = 2(1 + \frac{1}{4\pi^2}(\ln A)^2)^{1/4}.$$

Or f_2 n'atteint aucune des valeurs $\sqrt{n} + \sqrt{n-1}$, $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ car sinon $\sqrt{f_1} = \frac{1}{2}(f_2 + f_2^{-1})$ prendrait la valeur $\sqrt{n}$ ce qui est exclut. Comme f_2 ne s'annule pas et $D(z_0,R)$ est simplement connexe, il existe une détermination holomorphe $f_4 = \log f_2$ (Théorème 2.3.2). Alors f_4 omet toutes les valeurs de l'ensemble

$$S = \left\{\pm\log(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) + 2i\pi k, n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Nous pouvons choisir un argument $-\pi < \Im f_4(z_0) \leq \pi$ de telle sorte que $|f_4(z_0)| \leq \sqrt{(\ln C(A))^2 + \pi^2}$. Les nombres $\pm \ln(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})$ sont de moins en moins espacés quand n augmente, ce qui entraîne que le plus grand disque contenu dans $\mathbb{C} - S$ a pour rayon

$$R_0 = \sqrt{\frac{1}{4}(\ln(\sqrt{2}+1))^2 + \pi^2}.$$

Pour $z \in D(z_0, R)$, le théorème de Bloch-Landau (Théorème 4.5.5) appliqué au disque $D(z, \rho)$ avec $\rho = R - |z - z_0|$ montre que l'image de f_4 contient un disque de rayon supérieur à $\frac{1}{12}\rho |f_4'(z)|$. Or comme $f_4(D(z_0, R)) \subset \mathbb{C} - S$, ce rayon doit être inférieur à R_0. D'où

$$|f_4'(z)| \leq 12\frac{R_0}{\rho} = 12\frac{R_0}{R - |z - z_0|}.$$

Or $f_4(z) = f_4(z_0) + \int_{z_0}^{z} f_4'(t)dt$, donc

$$|f_4(z)| \leq T(A, r) = \sqrt{(\ln C(A))^2 + \pi^2} + 12R_0 \ln \frac{R}{R - r}$$

sur le disque $D(z_0, r)$. Ceci entraîne l'existence de majorations uniformes explicites pour $f_2 = \exp(f_4)$ et $f_2^{-1} = \exp(-f_4)$, $\sqrt{f_1} = \frac{1}{2}(f_2 + f_2^{-1})$ et $f = \exp(2i\pi f_1)$:

$$|f_2(z)|^{\pm 1} \leq \exp(T(A, r)), |f_1(z)| \leq \exp(2T(A, r)),$$
$$|f(z)| \leq M(A, r) = \exp(2\pi \exp(2T(A, r))).$$

□

Exemple 7.2.2. — *Le lemme 7.2.1 est faux pour les applications holomorphes omettant un seul point :*

$$f_k : D(0, 1) \longrightarrow \mathbb{C} - \{0\}, f_k(z) = \exp(kz)$$

ne sont uniformément bornées sur aucun disque $\overline{D}(0, r)$.

Théorème 7.2.3. — *(Grand théorème de Picard). Soit $f \in \mathcal{O}(D(z_0, r_0) - \{z_0\})$ une fonction holomorphe possédant une singularité essentielle en z_0. Alors pour tout voisinage V de z_0, $f(z)$ prend sur $V - \{z_0\}$ une infinité de fois toutes les valeurs de $\mathbb{C}$ sauf au plus une.*

Démonstration. — Par translation, nous pouvons supposer $z_0 = 0$. Soit $V \subset D(0, r_0)$ un voisinage de 0. Supposons que $f(V - \{0\}) \subset \mathbb{C} - \{a, b\}$. Quitte à remplacer f par $(f(z) - a)/(b - a)$, nous pouvons supposer $a = 0, b = 1$. Pour $r \in]0, r_0[$, posons

$$\mu(r) = \inf_{|z|=r} |f(z)|, m(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$$

Montrons par l'absurde que $\lim_{r \to 0} m(r) = +\infty$. Sinon il existe une suite décroissante $r_k \to 0$ telle que $m(r_k)$ est bornée. Le principe du maximum (Théorème 4.4.1) sur les couronnes $\{z, r_{k+1} \leq |z| \leq r_k\}$, implique que f est bornée au voisinage de $z_0 = 0$, ce qui est exclu car f admet une singularité essentielle en 0.

Le même raisonnement appliqué à $1/f$ qui a également une singularité essentielle en z_0 permet d'établir $\lim_{r\to 0^+}\mu(r)=0$.
Pour r assez petit $\mu(r) < 2 < m(r)$ et le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence de $\theta_r \in [0,2\pi[$ tel que $|f(re^{i\theta_r})| = 2$.
Pour $0 < r < r_0e^{-2\pi}$ (assez petit), définissons

$$g_r : D(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f(re^{i\theta_r}e^{2i\pi z}).$$

Ainsi $g_r(D(0,1)) \subset \mathbb{C}-\{0,1\}$, $|g_r(0)| = |f(re^{i\theta_r})| = 2$. Le lemme 7.2.1 garantit l'existence d'une constante $M(2,1/2)$ telle que les fonctions g_r soient uniformément bornées par $M(2,1/2)$ sur $\overline{D}(0,1/2)$. Or $g_r([-1/2,1/2])$ décrit toutes les valeurs atteintes par $f(z)$ pour $|z| = r$, nous en déduisons $m(r) \leq M(2,1/2)$ pour tout $r < r_0e^{-2\pi}$ ce qui est absurde.
Par conséquent pour tout voisinage $V-\{0\}$ un voisinage de 0, $f(V-\{0\})$ atteint toute valeur de $\mathbb{C}$ sauf au plus une. Quitte à prendre des voisinages arbitrairement petits, nous obtenons que $f(V-\{0\})$ prend une infinité de fois toutes valeurs de $\mathbb{C}$ sauf au plus une. □

Exemples 7.2.4. — *i. La fonction* $\mathrm{e}^{1/z}$ *admet une singularité essentielle en 0. Son image est* $\mathbb{C}^*$.
ii. Si P *est un polynôme non nul, l'équation* $\mathrm{e}^z = P(z)$ *a une infinité de solutions.*

Corollaire 7.2.5. — *(Petit théorème de Picard). Soit* $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ *non constante. Alors* f *prend toutes les valeurs complexes sauf éventuellement une.*

Démonstration. — Les polynômes non constants prennent toutes les valeurs complexes (mais seulement un nombre fini de fois). Supposons que $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ n'est pas un polynôme et notons $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_nz^n$ son développement en série entière. La fonction $g(z) = f(1/z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ avec

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_nz^{-n}.$$

Comme f n'est pas un polynôme, g admet une singularité essentielle en 0. Donc g et f atteignent une infinité de fois toutes les valeurs complexes sauf éventuellement une. □

Corollaire 7.2.6. — *Soit* $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ *qui n'est pas une translation. Alors* $f\circ f$ *admet un point fixe.*

Démonstration. — Raisonnons par l'absurde et supposons que $f\circ f$ n'a pas de point fixe. Alors f n'a pas de point fixe et la fonction

$$g(z) = \frac{f(f(z)) - z}{f(z) - z} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$$

évite les valeurs 0 et 1. D'après le petit Théorème de Picard (Corollaire 7.2.5), $g = c \neq 1$ est constante et

$$f(f(z)) - z = c(f(z) - z), z \in \mathbb{C}.$$

Par conséquent

$$f'(z)(f'(f(z)) - c) = 1 - c. \tag{6}$$

Comme $c \neq 1$, la fonction holomorphe $f' \circ f$ ne prend pas la valeur c. S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ avec $f' \circ f(z_0) = 0$ alors pour $z = f(z_0)$, nous obtenons $c = 1$ ce qui est exclu. Donc $f' \circ f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ évite les valeurs c et 1 donc est constante (Corollaire 7.2.5). D'après (6), f' est constante donc $f(z) = az + b$. Comme f n'est pas une translation, $a \neq 1$. Si $a \neq 1$ alors f a un point fixe, ce qui est exclu. □

8. Théorème de Rouché

Le principe de l'argument (Théorème 8.2.3) et le Théorème de Rouché (Théorème 8.4.1) donnent des informations sur les zéros et les pôles des fonctions méromorphes. En application nous obtenons la classification des fonctions elliptiques (Théorème 8.3.13).

8.1. Fonctions méromorphes. —

Définition 8.1.1. — *Soit U connexe. L'anneau $\mathcal{O}(U)$ est intègre. Nous notons $\mathcal{F}(U)$ son corps des fractions.*

Exemple 8.1.2. — *Soit U connexe et $u, v \in \mathcal{O}(U)$ avec v non nulle. Les zéros de v constituent un ensemble discret $Z(v)$ de U et la fonction $z \mapsto u(z)v(z)^{-1}$ est holomorphe sur $U - Z(v)$. Pour $z_0 \in Z(v)$, $u(z) = (z - z_0)^m u_1(z), v(z) = (z - z_0)^n v_1(z)$ avec $m \geq 0$, $n > 0$, u_1, v_1 holomorphes au voisinage de z_0 et $u_1(z_0)v_1(z_0) \neq 0$. Ainsi $u(z)v(z)^{-1} = (z - z_0)^{m-n} u_1(z)v_1(z)^{-1}$. Si $m \geq n$, uv^{-1} est holomorphe au voisinage de z_0 si $n > m$, le point z_0 est un pôle de uv^{-1}.*

Définition 8.1.3. — *Une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}\}$ est dite* **méromorphe** *si f est holomorphe sur un ouvert U' de U avec $U - U'$ discret et si tout point $z_0 \in U$ admet un voisinage ouvert connexe V_{z_0} dans U tel que $f_{|V_{z_0}} \in \mathcal{F}(V_{z_0})$.*

Exemples 8.1.4. — *i. L'ensemble des fonctions méromorphes sur U est un anneau $\mathcal{M}(U)$ et une $\mathbb{C}$-algèbre. Si U est connexe, $\mathcal{M}(U)$ est un corps.*
ii. Soit f une fonction méromorphe au voisinage du point z_0. Alors il existe une fonction holomorphe g au voisinage de z_0 telle que $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ avec $g(z_0) \neq 0$ et $m \in \mathbb{Z}$. Si $m \neq 0$ la fonction $\log f(z)$ n'est pas définie au voisinage de z_0. Cependant sa dérivée logarithmique est définie par

$$\frac{f'}{f}(z) = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'}{g}(z).$$

iii. Une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est méromorphe si et seulement si elle est holomorphe en dehors d'une suite de points singuliers localement finie dans U et si tous ces points singuliers sont des pôles (singularités non essentielles).
Les fonctions rationnelles sont méromorphes sur $\mathbb{C}$. La fonction $(\sin(1/\pi z))^{-1}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}^*$ mais pas sur $\mathbb{C}$.

8.2. Principe de l'argument. —

Définition 8.2.1. — *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $a \in U$. Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ une fonction méromorphe, nous définissons l'ordre de f en a par*

$$\operatorname{ord}(f, a) = \begin{cases} n & \textit{si } a \textit{ est un zéro d'ordre } n, \\ -n & \textit{si } a \textit{ est un pôle d'ordre } n, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 8.2.2. — *i. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ une fonction méromorphe. Alors*

$$\operatorname{Res}(\frac{f'}{f}, a) = \operatorname{ord}(f, a).$$

En effet si $\operatorname{ord}(f, a) = k$, alors $f = (z-a)^k g$ avec g holomorphe avec $g(a) \neq 0$, et $\frac{f'}{f} = \frac{k}{z-a} + \frac{g'}{g}$. Comme $g \neq 0$ au voisinage de a, $\frac{g'}{g}$ holomorphe près de a.

D'après le théorème des résidus (Théorème 6.2.3), nous avons

Théorème 8.2.3. — *(Principe de l'argument). Soit f méromorphe sur U et $\gamma \subset U$ un lacet ne contenant ni pôle ni zéro de f. Alors*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'}{f} dz = \sum_a j(a, \gamma) \operatorname{ord}(f, a)$$

où a parcourt l'ensemble des zéros et des pôles de f à l'intérieur de γ.

Démonstration. — Si $a \in U$ est un pôle ou un zéro de f, alors a est un pôle simple de f'/f avec un résidu égal à $\operatorname{ord}(f, a)$. En effet, au voisinage de a,

$$f(z) = (z-a)^m f_1(z)$$

avec $m = \operatorname{ord}(f, a)$, f_1 analytique en a et $f_1(a) \neq 0$. Ainsi

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}.$$

D'où, $\operatorname{Res}(f'/f, a) = m = \operatorname{ord}(f, a)$. Le principe de l'argument se déduit alors du théorème des résidus. $\square$

Exemples 8.2.4. — *i. Pour $\gamma \subset U$ une courbe simple fermée (par exemple, un cercle ou le bord d'un compact à bord de classe $\mathbb{C}^1$ par morceaux), $j(a,\gamma)$ est égal à 1 si a est à l'intérieur de γ et 0 sinon. Ainsi*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'}{f}dz = \#z\acute{e}ros f - \#p\hat{o}les f \text{ à l'intérieur de } \gamma$$

les pôles et les zéros sont comptés avec multiplicités.
ii. Le terme "principe de l'argument" provient de l'égalité

$$\Re(\frac{1}{2i\pi}\frac{f'}{f}) = \Re(\frac{1}{2i\pi}\frac{d(\log f)}{dz}) = \Re(\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dz}(\log|f| + i\operatorname{Arg} f)) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dz}\operatorname{Arg} f.$$

iii. Si $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe, alors

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma g\frac{f'}{f}dz = \sum_a g(a)j(a,\gamma)\operatorname{ord}(f,a).$$

Nous donnons une première application (Proposition 8.2.5) du principe de l'argument (Théorème 8.2.3). Les applications à l'études des fonctions elliptiques (§8.3) et au théorème de Rouché (§8.4) font l'objet de paragraphes distincts.

Proposition 8.2.5. — *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, $\overline{\Delta} \subset U$ tel que $f_{|\overline{\Delta}}$ est injective et $V = f(\Delta)$ ouvert. Alors $f : \Delta \longrightarrow V$ est bijective et*

$$f^{-1}(q) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\delta\Delta} z\frac{f'(z)}{f(z)-q}dz, \quad q \in V.$$

En particulier $f^{-1} : V \longrightarrow \Delta$ est holomorphe.

Démonstration. — Soit $q \in V$, comme f est injective, il existe un unique $p \in \Delta$ avec $f(p) = q$. D'après le principe de l'argument (Exemple 8.2.4 iii. avec les fonctions $f - q$ et $g(z) = z$ et vu que $f(z) - q$ n'a pas de zéro sur $\delta\Delta$ car $f_{|\overline{\Delta}}$ est injective) $\frac{1}{2i\pi}\int_{\delta\Delta} z\frac{f'(z)}{f(z)-q} = g(p) = p = f^{-1}(q)$. □

8.3. Fonctions elliptiques. — Une première application en théorie des nombres du principe de l'argument (Théorème 8.2.3) est la description complète des fonctions elliptiques (Théorème 8.3.13) à l'aide de la fonction $\mathfrak{p}$ de Weierstrass. Ce paragraphe s'inspire librement du chapitre VI de J. Silverman **[Si1]**. Le lecteur curieux pourra trouver des compléments dans **[Si2]**.

Soient $w_1, w_2 \in \mathbb{C}-\{0\}$ avec $\frac{w_1}{w_2} \notin \mathbb{R}$. Nous définissons le réseau $\Lambda = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$. Nous cherchons à construire des fonctions méromorphes $f : \mathbb{C} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ invariantes par Λ :

Définition 8.3.1. — *Une fonction f est dite* **elliptique** *si f est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et si f est Λ-périodique :*

$$f(z) = f(z + w_1) = f(z + w_2), z \in \mathbb{C}.$$

Exemples 8.3.2. — *i. L'ensemble des fonctions elliptiques est un corps.*
ii. Si f est une fonction elliptique alors f' aussi.
iii. Soit f une fonction elliptique holomorphe et P_a. Comme f est holomorphe sur $\mathbb{C}$, $f_{|\overline{P}_a}$ est continue. Comme $\overline{P}_a$ est compact, $f_{|\overline{P}_a}$ est bornée. Comme f est périodique, f est bornée donc constante (d'après le Théorème de Liouville, Théorème 2.5.3).
Les fonctions elliptiques holomorphes sont donc constantes.

Une fonction elliptique est déterminée par ses valeurs sur tout parallélogramme fondamental de Λ, i.e. de la forme

$$P_a = \{a + t_1 w_1 + t_2 w_2, 0 \leq t_1 < 1, 0 \leq t_2 < 1\}.$$

Lemme 8.3.3. — *Soit f une fonction elliptique. Il existe $a \in \mathbb{C}$, tel que δP_a ne contient ni zéro ni pôle de f.*

Démonstration. — Soit $a \in \mathbb{C}$. Comme $\overline{P}_a$ est compact et l'ensemble des zéros et pôles est discret, il n'existe qu'un nombre fini de pôles et de zéros dans $\overline{P}_a$. Par conséquent, il existe une translation telle que δP_a les évite tous. □

Proposition 8.3.4. — *Soit f une fonction elliptique et P_a tel que δP_a ne contient ni pôle ni zéro de f. Nous notons $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ (resp. $\beta_1, \ldots, \beta_\ell$) les zéros (resp. les pôles) de f dans P_a avec multiplicités. Alors*
i. $k = \ell$,
ii. $\sum_{i=1}^k \alpha_i - \sum_{i=1}^k \beta_i \in \Lambda$.

Démonstration. — i. D'après le principe de l'argument,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\delta P_a} \frac{f'}{f} dz = \#\text{zéros}(f) - \#\text{pôles}(f) \text{ dans } P_a.$$

Nous avons $\frac{1}{2i\pi} \int_{\delta P_a} \frac{f'}{f} dz = 0$ car les apports de deux côtés parallèles de δP_a se compensent par périodicité de f.
ii. Le principe de l'argument (Théorème 8.2.3) avec $g(z) = z$, donne

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\delta P_a} z \frac{f'}{f} dz = \sum_{i=1}^k \alpha_i - \sum_{i=1}^k \beta_i.$$

Il suffit donc de montrer que

$$\frac{1}{2i\pi} \left(\int_a^{a+w_1} z \frac{f'}{f} dz - \int_{a+w_2}^{a+w_1+w_2} z \frac{f'}{f} dz \right) \in \Lambda$$

$$\frac{1}{2i\pi}\left(\int_{a+w_1}^{a+w_1+w_2} z\frac{f'}{f}dz - \int_a^{a+w_2} z\frac{f'}{f}dz\right) \in \Lambda$$

Or, par périodicité de f'/f, nous avons,

$$\frac{1}{2i\pi}\left(\int_a^{a+w_1} z\frac{f'}{f}dz - \int_{a+w_2}^{a+w_1+w_2} z\frac{f'}{f}dz\right) = -\frac{w_2}{2i\pi}\int_a^{a+w_1} \frac{f'}{f}dz$$

$$= -\frac{w_2}{2i\pi}\int_{f(L_1)} \frac{dw}{w}$$

où $f(L_1) = f(a + tw_1, t \in [0,1])$ est un lacet (f est w_1-périodique) ne contenant pas 0, donc $\frac{1}{2i\pi}\int_{f(L_1)} \frac{dw}{w} \in \mathbb{Z}$ et

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i - \sum_{i=1}^{k} \beta_i \in \Lambda.$$

□

Exemple 8.3.5. — **L'ordre** *d'une fonction elliptique est le nombre de pôles (avec multiplicité) contenu dans un (dans tout) parallélogramme fondamental. La notion d'ordre d'une fonction elliptique est bien définie, i.e. indépendante du choix du parallélogramme fondamental. D'après le proposition 8.3.4, l'ordre d'une fonction elliptique coïncide avec le nombre de ses zéros dans un parallélogramme fondamental.*

Remarque 8.3.6. — *Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{C}$ distincts modulo Λ , tels que $\sum_{i=1}^k \alpha_i - \sum_{i=1}^k \beta_i \in \Lambda$. La théorie d'Abel-Jacobi permet d'établir qu'il existe une fonction elliptique de zéros les α_i et de pôles les β_i.*

Il convient à présent de montrer qu'il existe effectivement des fonctions elliptiques.

Définition 8.3.7. — *Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau. Notons $\Lambda^* = \Lambda - \{0\}$. La* **fonction $\mathfrak{p}$ de Weierstrass** *(relative à Λ) est définie par*

$$\mathfrak{p}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda\in\Lambda^*}\left(\frac{1}{(z+\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Nous allons établir que la fonction $\mathfrak{p}$ de Weierstrass est une fonction elliptique.

Lemme 8.3.8. — *La série d'Eisenstein de poids $2k$ (pour Λ)*

$$G_{2k} = \sum_{\lambda\in\Lambda^*} \frac{1}{\lambda^{2k}}$$

est absolument convergente pour tout $k > 1$.

Démonstration. — Comme Λ est discret dans $\mathbb{C}$, il existe une constante c (qui dépend de Λ) telle que pour tout $N \geq 1$,

$$\sharp\{\lambda \in \Lambda, N \leq |\lambda| < N+1\} < cN$$

En effet le nombre de points du réseau contenus dans un disque de rayon R est de l'ordre de $A(\Lambda)^{-1}\pi R^2$ pour $A(\Lambda)$ l'aire d'un parallélogramme fondamental. Ainsi

$$\sum_{\lambda \in \Lambda, |\lambda| \geq 1} \frac{1}{|\lambda|^{2k}} \leq \sum_{N=1}^{+\infty} \frac{\sharp\{\lambda \in \Lambda, N \leq |\lambda| < N+1\}}{N^{2k}} < \infty.$$

Ce qui permet de conclure. $\square$

Lemme 8.3.9. — *La fonction $\mathfrak{p}$ de Weierstrass converge absolument et uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} - \Lambda$. Elle définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ n'ayant pour pôles que des pôles doubles de résidu 0 en tout point du réseau Λ.*

Démonstration. — Dans un disque $|z| < R$ qui ne contient qu'un nombre fini d'élément de Λ qu'on peut enlever à la série pour en étudier la convergence (voir Définition 9.1.1),

$$\frac{1}{(z+\lambda)^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2z}{\lambda^3} + O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right).$$

Donc il existe une constante $C(R)$

$$\left|\frac{1}{(z+\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right| \leq \frac{C(R)}{|\lambda|^3}.$$

Donc, en suivant la preuve du lemme 8.3.8, $\mathfrak{p}(z)$ est absolument convergente pour $z \in \mathbb{C}-\Lambda$ et uniformément convergente sur tout compact de $\mathbb{C}-\Lambda$ (voir Théorème 9.1.2). Ainsi la fonction $\mathfrak{p}$ de Weierstrass est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} - \Lambda$. Son développement montre que $\mathfrak{p}(z)$ a des pôles doubles en tout point de Λ de résidu zéro. $\square$

Proposition 8.3.10. — *La fonction $\mathfrak{p}$ de Weierstrass est une fonction elliptique.*

Démonstration. — Comme la fonction $\mathfrak{p}$ est localement uniformément convergente, l'expression de sa dérivée s'obtient terme à terme :

$$\mathfrak{p}'(z) = -2\sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(z+\lambda)^3}.$$

Ainsi $\mathfrak{p}'$ est une fonction elliptique et en intégrant,

$$\mathfrak{p}(z+\lambda) = \mathfrak{p}(z) + c(\lambda), z \in \mathbb{C} - \Lambda$$

où $c(\lambda) \in \mathbb{C}$ est une constante indépendante de z. Pour $z = -\lambda/2$, comme $\mathfrak{p}(z) = \mathfrak{p}(-z)$, nous obtenons $c(\lambda) = 0$ et $\mathfrak{p}(z)$ est une fonction elliptique. $\square$

Exemple 8.3.11. — *Soit $z_0 \in \mathbb{C} - \Lambda$. La fonction $\mathfrak{p}(z) - \mathfrak{p}(z_0)$ s'annule en z_0 et a des pôles doubles sur Λ. D'après la proposition 8.3.4, le nombre de zéros avec mutliplicité de $\mathfrak{p}(z) - \mathfrak{p}(z_0)$ dans P_a est donc deux : z_0, z_1 avec $z_0 + z_1 \in \Lambda$. Donc $2z_0 \in \Lambda$ (et z_0 est un zéro double) ou $z_1 = -z_0$ dans $\mathbb{C}/\Lambda$.*

Proposition 8.3.12. — *Nous avons*

$$(\mathfrak{p}')^2 = 4\mathfrak{p}^3 - 60G_4\mathfrak{p} - 140G_6.$$

Démonstration. — La fonction $\mathfrak{p}$ est paire. Son développement en série de Laurent au voisinage de 0 est de la forme

$$\mathfrak{p}(z) = 1/z^2 + az^2 + bz^4 + O(z^6).$$

Comme $\mathfrak{p}''(z) = 6\sum_{\lambda\in\Lambda} 1/(z+\lambda)^4$, nous avons

$$\mathfrak{p}''(z) = 6/z^4 + 2a + 12bz^2 + O(z^4) = 6/z^4 + 6G_4 + O(z^2).$$

D'où $a = 3G_4$. Le même raisonnement donne $b = 5G_6$. Nous obtenons alors

$$\mathfrak{p}'(z)^2 = 4/z^6 - 24G_4/z^2 - 80G_6 + O(z^2)$$

$$\mathfrak{p}(z)^3 = 1/z^6 + 9G_4/z^2 + 15G_6 + O(z^2).$$

Nous en déduisons que la fonction elliptique $(\mathfrak{p}')^2 - 4\mathfrak{p}^3 + 60G_4\mathfrak{p}$ n'a pas de pôle donc est constante et vaut $-140G_6$ (en zéro). □

Le théorème de classification des fonctions elliptiques est le suivant :

Théorème 8.3.13. — *Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau. Le corps des fonctions elliptiques (relativement à Λ) est engendré par la fonction $\mathfrak{p}$ de Weierstrass et sa dérivée $\mathfrak{p}'$:*

$$\mathbb{C}(\Lambda) = \mathbb{C}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$$

i.e toute fonction elliptique est une fraction rationnelle en $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$.

Démonstration. — Soit $f \in \mathbb{C}(\Lambda)$. Comme

$$f(z) = \frac{1}{2}(f(z) + f(-z)) + \frac{1}{2}(f(z) - f(-z))$$

il suffit d'établir le théorème pour les fonctions elliptiques paires et les fonctions elliptiques impaires. De plus si f est impaire, alors $f\mathfrak{p}'$ est paire, donc nous pouvons supposer f elliptique paire. Ainsi pour f elliptique paire,

$$\mathrm{ord}(f, 0) \in 2\mathbb{Z}, \mathrm{ord}(f, a) = \mathrm{ord}(f, -a), a \in \mathbb{C} - \Lambda.$$

Montrons que si $a \in \frac{1}{2}\Lambda$, alors $\mathrm{ord}(f, a)$ est pair. En effet, comme $f(z) = f(-z)$, nous avons

$$f^{(k)}(z) = (-1)^k f^{(k)}(-z), k \in \mathbb{N}.$$

Si $2a \in \Lambda$, est un zéro de f, $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(-a)$. Donc $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout k impair donc $\mathrm{ord}(f, a)$ est pair. Le même raisonnement appliqué à $1/f$ montre que $\mathrm{ord}(f, a)$ paire si $2a \in \Lambda$ est un pôle de f.

Soit H (un domaine fondamental de $(\mathbb{C}/\Lambda)/\{\pm 1\}$) tel que $H \cup (-H)$ est un parallélogramme fondamental. Ainsi nous pouvons écrire la somme formelle

$$\sum_{a \in H \cup (-H)} \mathrm{ord}(f, a)[a] = \sum_{a \in H} n_a([a] + [-a])$$

avec $n_a \in \mathbb{Z}$. Ainsi les fonctions f et

$$g(z) = \Pi_{a \in H - \{0\}}(\mathfrak{p}(z) - \mathfrak{p}(a))^{n_a}$$

ont les mêmes zéros et les mêmes pôles (avec multiplicité) dans le parallélogramme fondamental $H \cup (-H)$ sauf éventuellement en $a = 0$. D'après la Proposition 8.3.4, elles ont aussi le même ordre en 0. Donc f/g fonction elliptique holomorphe est constante (Exemple 8.3.2). Ainsi $f = cg \in \mathbb{C}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$. □

8.4. Théorème de Rouché. — Le théorème de Rouché (Théorème 8.4.1) est un outil utile à la localisation des zéros d'une fonction analytique. En effet, il permet de séparer les racines d'une équation en remplaçant cette dernière par une équation approchée :

Théorème 8.4.1. — *(Rouché). Soit U un ouvert, $D(a, r) \subset U$. Supposons f, g méromorphes sur U sans pôle ni zéro sur $\partial D(a, r)$ et $|f - g| < |f|$ sur $\partial D(a, r)$. Alors dans $D(a, r)$,*

$$\#\textit{zéros } f - \#\textit{pôles } f = \#\textit{zéros } g - \#\textit{pôles } g.$$

Démonstration. — Ecrivons $h = g/f$ sur $D(a, r)$. Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$ le lacet bord de $\delta D(a, r)$ et $\Gamma = h \circ \gamma$. La fonction $\left|\frac{f(\gamma(t)) - g(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\right|$ est définie et continue dans I donc atteint son maximum M en un point de I. Ainsi $|h(\gamma(t)) - 1| \leq M < 1, t \in I$. Le lacet Γ est donc inclus dans $D(0, 1)$ simplement connexe et Γ ne contient pas 0 (Exemple 2.4.3iii). La fonction $\log h$ est définie sur $\gamma(I)$. Ainsi $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)} dz = 0$. Or $\frac{h'}{h} = \frac{g'}{g} - \frac{f'}{f}$. Donc

$$\int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)} dz = \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz - \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

L'égalité attendue s'obtient alors directement du principe de l'argument. □

Exemples 8.4.2. — *i. Pour déterminer le nombre de racines de $f(z) = z^6 + 21z^4 + 3z^2 + 2z + 3$ dans $D(0, 1)$, nous introduisons $g(z) = 21z^4$. Nous vérifions $|f - g| < |g|$ sur $\partial D(0, 1)$. Le théorème de Rouché indique alors que f admet 4 zéros (autant que g) dans $D(0, 1)$.*
De même pour $f(z) = e^z - 5z^3 + 1$, $g(z) = -5z^3$. Nous trouvons que f admet 3 zéros dans $D(0, 1)$.
ii. En prenant $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$, $g(z) = z^n$, R assez grand, le théorème de Rouché montre que f admet n zéros dans $D(0, R)$, i.e $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Corollaire 8.4.3. — *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ une fonction méromorphe avec $\overline{D}(0,1) \subset U$, $|f(z)| < 1$, $z \in \partial D(0,1)$. Alors f a un unique point fixe dans $D(0,1)$.*

Démonstration. — Posons $h(z) = f(z) - z$, $g(z) = -z$. Ainsi $|h - g| = |f| < 1 = |g|$ sur $\partial D(0,1)$. Le théorème de Rouché permet alors de conclure. □

Le théorème de Hurwitz est une conséquence directe du théorème de Rouché.

Corollaire 8.4.4. — *(Théorème de Hurwitz). Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f_n \in \mathcal{O}(U)$ une suite de fonctions holomorphes convergeant uniformément sur tout compact de U vers $f \in \mathcal{O}(U)$.*
Si $\overline{D(z_0, R)} \subset U$ et f ne s'annule pas sur $\delta D(z_0, R)$ alors pour n assez grand f_n ne s'annule pas sur $\delta D(z_0, R)$ et le nombre de zéros de f_n dans $D(z_0, R)$ est le même que celui de f.

Démonstration. — Prenons n assez grand pour que $|f_n - f| < \inf_{\delta K} |f|$ sur $\delta D(z_0, R)$. Le théorème de Rouché garantit alors le résultat annoncé. □

Corollaire 8.4.5. — *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f_n \in \mathcal{O}(U)$ une suite de fonctions holomorphes convergeant uniformément sur tout compact de U vers $f \in \mathcal{O}(U)$.*
Si les fonctions f_n sont injectives dans U alors ou bien f est constante ou bien f est injective.

Démonstration. — Supposons que f n'est pas constante et n'est pas injective. Alors il existe $z_1 \neq z_2$ avec $f(z_1) = f(z_2) = w$. Comme la fonction $f(z) - w$ n'est pas identiquement nulle sur U connexe, ses zéros sont isolés. Donc il existe des disques disjoints $D(z_1, r_1)$, $D(z_2, r_2)$ tels que $f(z) - w$ ne s'annule pas sur le bord $K = \delta D(z_1, r_1) \cup \delta D(z_2, r_2)$. D'après le théorème de Hurwitz, $f_n(z) - w$ a au moins deux zéros dans $D(z_1, r_1) \cup D(z_2, r_2)$ pour n assez grand, ce qui contredit l'injectivité de f_n. □

8.5. Théorème de l'application conforme de Riemann. — Les deux lemmes techniques suivants (8.5.1 et 8.5.2) permettent de montrer le théorème de l'application conforme de Riemann : tout ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ distinct de $\mathbb{C}$ est en bijection holomorphe (équivalence conforme) avec le disque unité (Théorème 8.5.3).

Lemme 8.5.1. — *Pour tout $U \subset \mathbb{C}$ simplement connexe, distinct de $\mathbb{C}$, il existe un ouvert U' inclus dans un compact et un isomorphisme $U \longrightarrow U'$.*

Démonstration. — Soit $a \in \mathbb{C} - \mathrm{U}$. Comme U est simplement connexe, il existe un détermination du logarithme $g(z) = \log(z - a)$ sur U qui de plus est injective.

Soit $z_0 \in U$. D'après le théorème d'inversion globale (Corollaire 4.3.4, g est ouverte), il existe $D(g(z_0), r) \subset g(U)$. Comme g est une détermination du logarithme, le disque $D(g(z_0), r) + 2i\pi$ ne contient aucun point de $g(U)$. Ainsi pour tout $z \in U$, $|g(z) - g(z_0) - 2i\pi| \geq r > 0$. La fonction $h : z \mapsto \frac{1}{g(z)-g(z_0)-2i\pi}$ est holomorphe, injective et bornée sur U. D'après le théorème d'inversion globale (Corollaire 4.3.4), $h : U \longrightarrow U' = h(U)$ est un isomorphisme où $U' \subset \overline{D(0, r^{-1})}$. □

Lemme 8.5.2. — *Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ avec $0 \in U$.*

$$A = \{f \in \mathcal{O}(U), f \text{ injective}, f(0) = 0, |f(z)| < 1, z \in U\}.$$

Alors pour $f \in A$, les propriétés suivantes sont équivalentes :
i. $f(U) = D(0, 1)$,
ii. $|f'(0)|$ est maximum sur A, $|f'(0)| = \sup_{g\in A} |g'(0)|$.

Démonstration. — *i.* $\Longrightarrow$ *ii.* D'après le théorème d'inversion globale (Corollaire 4.3.4), les éléments g de A sont des isomorphismes sur leur image. Soit $f \in A$ d'image $D(0, 1)$. Alors $h = g \circ f^{-1} : D(0, 1) \longrightarrow g(U)$ est un isomorphisme tel que $h(0) = 0$. D'après le lemme de Schwarz (Théorème 4.4.2) $|h'(0)| \leq 1$ donc $|g'(0)| \leq |f'(0)|$ et $|f'(0)|$ est maximum.
ii. $\Longrightarrow$ *i.* Montrons non *i.* $\Longrightarrow$ non *ii.*. Soit $f \in A$ et $a \in D(0, 1)$ avec $a \notin f(U)$. Notons $\varphi_a \in \operatorname{Aut} D(0, 1)$, $\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Comme $f(U)$ est simplement connexe, $F(z) = \log \varphi_a f(z)$ est définie, holomorphe et injective dans U et $\Re F(z) < 0$.
Pour $u, v \in \mathbb{C}$ avec $\Re u < 0, \Re v < 0$, nous avons $\left|\frac{v-u}{v+\bar{u}}\right| < 1$.
Ainsi $g(z) = \frac{F(z)-F(0)}{F(z)+\overline{F(0)}}$ est holomorphe injective dans U, $g(0) = 0$, $|g(z)| < 1$, donc $g \in A$. Et enfin (non *ii.*) :

$$\left|\frac{g'(0)}{f'(0)}\right| = \frac{1 - |a|^2}{2|a| \log\left|\frac{1}{a}\right|} > 1$$

car $|\varphi_a'(0)| = 1 - |a|^2, |\varphi_a(0)| = |a|, \Re F(0) = \log |1/a|$. □

Théorème 8.5.3. — *(Théorème de l'application conforme de Riemann). Tout ouvert simplement connexe U de $\mathbb{C}$, distinct de $\mathbb{C}$, est isomorphe à $D(0, 1)$.*

Démonstration. — D'après le lemme 8.5.1, quite à effectuer une homothétie et une translation, nous pouvons supposer $0 \in U \subset D(0, 1)$.
D'après le lemme 8.5.2, il suffit de prouver qu'il existe $f \in A$ telle que $\sup_{g\in A} |g'(0)| = |f'(0)|$. Nous supposons $\mathcal{O}(U)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact et nous posons

$$B = \{f \in A, |f'(0)| \geq 1\}.$$

Alors la partie B de $\mathcal{O}(U)$ est non vide car $U \subset D(0, 1)$ donc $\mathrm{id}_U \in B$.
La partie B est bornée dans $\mathcal{O}(U)$ car pour tout $z \in U$, $|f(z)| < 1$, donc pour tout compact $K \subset U$, $\sup_K |f| < 1$.
La partie B est fermée dans $\mathcal{O}(U)$. En effet pour $f \in \overline{B}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à

termes dans B telle que $f = \lim f_n$. Alors $f(0) = \lim_n f_n(0) = 0$ et par convergence uniforme sur tout compact $f' = \lim f'_n$ et $|f'(0)| = \lim_n |f'_n(0)| \geq 1$. Ainsi f n'est pas constante et comme c'est une limite de fonctions holomorphes injectives, elle est injective (Corollaire 8.4.5). Comme $|f_n(z)| < 1$ sur $D(0,1)$, $|f(z)| \leq 1$ sur U et d'après le principe du maximum, comme f n'est pas constante, il n'existe pas de point $z \in U$ tel que $|f(z)| = 1$. Donc $f \in B$, fermée.
Ainsi B est fermée bornée dans $\mathcal{O}(U)$, donc compacte (Théorème 5.4.3). L'application $B \longrightarrow \mathbb{R}, g \mapsto |g'(0)|$ est continue donc atteint sa borne supérieure. □

D'après le théorème de l'application conforme de Riemann (Théorème 8.5.3), nous avons

Corollaire 8.5.4. — *Deux ouverts simplement connexes U et V de $\mathbb{C}$ distincts de $\mathbb{C}$ sont isomorphes.*
Deux ouverts simplement connexes U et V de $\mathbb{C}$ sont homéomorphes.

9. Espaces de fonctions méromorphes

9.1. Séries de fonctions méromorphes. —

Définition 9.1.1. — *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions méromorphes sur U. La série de fonctions $\sum f_n$ est dite* **uniformément convergente** *sur une partie A de U s'il existe un sous-ensemble fini J de $\mathbb{N}$ tel que,*
i. pour tout $n \in \mathbb{N} - J$, f_n n'a pas de pôle dans A,
ii. la série $\sum_{n\in\mathbb{N}-J} f_n$ est uniformément convergente sur A.

Théorème 9.1.2. — *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions méromorphes sur U. Si elle converge uniformément sur tout compact de U alors sa somme f est méromorphe sur U.*
De plus la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f'_n$ converge uniformément sur tout compact de U et sa somme est la fonction méromorphe f'.

Démonstration. — Pour tout ouvert $V \subset K$ inclus dans un compact K de U, il existe n_0 tel que f_n n'ait pas de pôle dans K, $n \geq n_0$ donc f_n est holomorphe sur V et

$$f = \sum_{n \leq n_0} f_n + \sum_{n > n_0} f_n$$

est méromorphe sur V. Par conséquent f est méromorphe au voisinage de tout point de U donc sur U.
Sur K, la série $\sum_{n>n_0} f_n$ est uniformément convergente, donc $\sum_{n>n_0} f'_n$ aussi. Ainsi la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f'_n$ converge uniformément sur tout compact de U et sa somme est la fonction méromorphe f'. □

Exemple 9.1.3. — *La série* $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(z-n)^{-2}$ *converge uniformément sur tout compact de* $\mathbb{C}$. *En effet tout compact de* $\mathbb{C}$ *est inclus dans une bande* $B=\{z\in\mathbb{C}|\Re(z)\in[a,b]\}$ *qui ne contient qu'un nombre fini d'entiers. Pour* $z\in B$ *et* $n<a$, $|(z-n)^{-2}|\leq(a-n)^{-2}$, *pour* $n>b$, $|(z-n)^{-2}|\leq(b-n)^{-2}$. *Donc la série est uniformément convergente dans* K. *Nous pouvons montrer (voir TD)*

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(z-n)^{-2}=\Big(\frac{\pi}{\sin\pi z}\Big)^2.$$

9.2. Produits infinis. — Nous rappelons le théorème de convergence des produits infinis de fonctions holomorphes (Proposition 5.1.5) .

Théorème 9.2.1. — *Soit* U *un ouvert connexe de* $\mathbb{C}$ *et* (f_n) *une suite de fonctions non nulles holomorphes telle que la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}}|f_n-1|$ *converge uniformément sur tout compact de* U. *Alors la suite des produits* $(\Pi_{k=0}^n f_k)$ *converge uniformément sur tout compact de* U *vers une fonction* f *non nulle holomorphe sur* U.
De plus la série de fonctions méromorphes $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{f_n'}{f_n}$ *converge uniformément sur tout compact de* U *et sa somme est la dérivée logarithmique* f'/f.

Démonstration. — Soit $K\subset U$ un compact. Par convergence uniforme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}|f_n-1|$ sur K, il existe N tel que pour tout $n\geq N$, tel que $|f_n-1|<\frac{1}{2}$ sur K. Donc pour tout $n>N$, $\log f_n$ est défini sur K.
Notons $c>0$ un constante telle que

$$|1-z|<1/2\Longrightarrow|\log z|\leq c|1-z|.$$

Par conséquent la série $\sum_{n>N}\log f_n$ converge uniformément vers une fonction g holomorphe sur U. Ainsi

$$F_n=\prod_{k=1}^n f_k=\prod_{k=1}^N f_k\cdot\prod_{k=N+1}^n f_k$$

converge uniformément vers $f=\prod_{k=1}^N f_k\cdot\exp g$ sur K, pour tout compact K de U donc (F_n) converge uniformément vers f sur U.
De plus sur K compact avec $K\cap f^{-1}(0)=\emptyset$, nous avons la convergence uniforme (Théorème 9.1.2)

$$\frac{F_n'}{F_n}\longrightarrow\frac{f'}{f}.$$

□

Exemple 9.2.2. — *Le produit infini* $f(z)=z\Pi_{n\in\mathbb{N}^*}(1-(z/n)^2)$ *converge uniformément sur tout compact de* $\mathbb{C}$ *vers une fonction holomorphe de dérivée logarithmique*

$$F(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}=z^{-1}+\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{2z}{(z^2-n^2)}.$$

Or
$$F(z) = 1/z + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{z}{n(z-n)}$$
et la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{z}{n(z-n)}$ *converge normalement sur tout compact de* $\mathbb{C}$. *Donc* F *méromorphe sur* $\mathbb{C}$. *Or, d'après l'exemple 9.1.3*
$$F'(z) = -z^2 - \sum_{n\in\mathbb{Z}^*}(z-n)^{-2} = -\left(\frac{\pi}{\sin\pi z}\right)^2.$$
En intégrant, et en remarquant que $F(z) - \pi/\tan\pi z$ *est une fonction impaire constante donc nulle, nous obtenons*
$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\pi}{\tan\pi z} = \pi\frac{\cos\pi z}{\sin\pi z}.$$
Par conséquent $f(z) = c\sin\pi z$ *pour* $c\in\mathbb{C}$. *Or* $\lim_{z\to 0} f(z)/z = 1 = c\pi$ *d'où,*
$$f(z) = \prod_{n\in\mathbb{N}^*}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{\sin\pi z}{\pi z}.$$

Le reste de ce paragraphe est dévolu à l'étude de la fonction Γ (voir Corollaire 3.5.7), fonction méromorphe définie comme produit infini. Nous commençons par l'étude d'une fonction intermédiaire :

Lemme 9.2.3. — *Soit* $G(z) = \prod_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-z/n}$. *Alors*
i. G *est une fonction holomorphe sur* $\mathbb{C}$ *admettant pour seuls zéros les entiers strictement négatifs.*
ii. Pour tout $z\notin\mathbb{Z}$, $G(z)G(-z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$.
iii. Pour tout $z\notin -\mathbb{N}$, $G(z-1) = zG(z)e^{\gamma}$ *pour* $\gamma = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n$.

Démonstration. — i. Posons $f_n(z) = (1+z/n)e^{-z/n}$, $z\in\mathbb{C}$, $n\geq 1$. Pour tout $R>0$,
$$\left|\log(1+\frac{z}{n}) - \frac{z}{n}\right| \leq 2\left|\frac{z^2}{n^2}\right| \leq 2\frac{R^2}{n^2}$$
pour n assez grand uniformément en $z\in\overline{D}(0,R)$. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}|f_n-1|$ est uniformément convergente sur tout compact de $\mathbb{C}$. D'où $G\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ (Théorème 9.2.1).
ii. D'après l'exemple 9.2.2, nous avons pour tout $z\in\mathbb{C}-\mathbb{Z}$,
$$G(z)G(-z) = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-(\frac{z}{n})\right)^2 = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}.$$
iii. Les fonctions $G(z-1)$ et $zG(z)$ ont les mêmes zéros, donc il existe une fonction $\gamma(z)$ avec $G(z-1) = zG(z)e^{\gamma(z)}$. En prenant les dérivées logarithmiques, nous obtenons
$$\frac{G'(z-1)}{G(z-1)} = \frac{1}{z} + \frac{G'(z)}{G(z)} + \gamma'(z).$$

Or

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1/n}{1+\frac{z}{n}} - \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right),$$

$$\frac{G'(z-1)}{G(z-1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \frac{G'(z)}{G(z)}.$$

Donc $\gamma'(z) = 0$ et $\gamma(z) = \gamma$ est constante. Or $G(0) = 1 = G(1)e^{\gamma}$ avec

$$G(1) = \Pi_{k=1}^{+\infty}(1+\frac{1}{k})e^{-1/k} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}(n+1)e^{-\sum_{k=1}^{n}1/k}.$$

D'où $\gamma = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$. □

Définition 9.2.4. — *La* **fonction** Γ *est la fonction méromorphe sur* $\mathbb{C}$

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \frac{1}{\Pi_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-z/n}}.$$

La fonction Γ admet pour seuls pôles simples les entiers strictement négatifs car

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z}\frac{1}{G(z)}. \tag{7}$$

Proposition 9.2.5. — *La fonction* Γ *satisfait les propriétés suivantes :*
i. $\Gamma(1) = 1$,
ii. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, *en particulier* $\Gamma(n) = (n-1)!$.
iii. (Formule des compléments). $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$, *en particulier* $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
iv. $\Gamma(z) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} n^z$,
v. $\mathrm{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$.

Démonstration. — i. Comme $G(1) = e^{-\gamma}$, $\Gamma(1) = 1$.
ii. est une conséquence directe de $G(z) = (z+1)G(z+1)e^{\gamma}$.
iii. Nous avons

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \Gamma(z)(-z)\Gamma(-z) = \frac{e^{-\gamma z}}{zG(z)}(-z)\frac{e^{\gamma z}}{(-z)G(-z)}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{1}{zG(z)G(-z)} = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

iv. Nous avons

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z}\frac{1}{G(z)} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{e^{-\gamma z}}{z}\Pi_{k=1}^{n}(1+\frac{z}{k})^{-1}e^{z/k}$$

$$\Gamma(z) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} e^{z(1+1/2+\cdots 1/n - ln(n) - \gamma)} n^z$$

$$\Gamma(z) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} n^z.$$

v. D'après ii. pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(z+m) = (z+m-1)\cdots(z+1)z\Gamma(z).$$

Donc pour $n \leq m-1$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(\Gamma, -n) &= \frac{\Gamma(-n+m)}{(-n+m-1)\cdots(1)(-1)(-2)\cdots(-n)} \\ &= \frac{(m-n-1)!}{(m-n-1)!(-1)^n n!} = \frac{(-1)^n}{n!}.\end{aligned}$$

□

9.3. Problème de Weierstrass. — Le théorème 9.3.5 donne un réponse positive au problème de Weierstrass suivant : Etant donnée une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes sans point d'accumulation, existe-il une fonction $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ n'ayant que des zéros en a_n (comptés avec multiplicités) ?
Cette section s'inspire du chapitre 8 **[GK]**.

Exemples 9.3.1. — *i. Si f_1 et f_2 sont deux solutions du problème de Weierstrass alors $f_1 = f_2 e^h$ avec $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.*
ii. Si la suite (a_n) n'a pas de valeur d'adhérence alors elle diverge vers ∞.
iii. Nous pouvons poser le problème de Weierstrass sur tout ouvert U de $\mathbb{C}$.
iv. Nous pouvons supposer que tous les $a_k \neq 0$ quitte à multiplier par une puissance convenable z^n.
v. Le problème de Weierstrass est trivial pour une suite finie $a_1, \ldots, a_n$. Il suffit de prendre le produit $\Pi_{k=1}^n (1 - \frac{z}{a_k})$. Pour une suite infinie, ce produit ne converge pas forcément. Par exemple $\Pi_{n=1}(1 + \frac{z}{n})$ diverge alors $\Pi_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-z/n} = G(z)$ converge. Ce qui est l'idée sous-jacente à l'introduction du facteur principal de Weierstrass.

Définition 9.3.2. — *Le* **facteur principal de Weierstrass** *d'ordre $m \geq 1$ est la fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$*

$$W_1(z) = (1-z), \ldots, W_m(z) = (1-z)\exp\left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{z^k}{k}\right).$$

Lemme 9.3.3. — *Si $|z| \leq 1$, alors $|1 - W_p(z)| \leq |z|^p$.*

Démonstration. — Ecrivons $W_p(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$. Par définition $W_p(0) = 1$, donc $a_0 = 1$.

• Montrons que $a_1 = \cdots = a_{p-1} = 0$. Nous avons

$$W_p(z) = (1-z)e^u, u = z + z^2/2 + \cdots + z^{p-1}/(p-1).$$

Donc $W_p'(z) = -e^u + (1-z)u'e^u = -z^{p-1}e^u = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k z^{k-1}$. D'où $a_1 = \cdots = a_{p-1} = 0$.

• Montrons $a_k \in \mathbb{R}_-$, $k \geq p$. Comme précédemment, a_k s'identifie au produit de $-1/k$ et du coefficient de z^{k-p} dans e^u. Or

$$e^u = e^z e^{z^2/2} \cdots e^{z^{p-1}/(p-1)}$$

Donc $a_k \in \mathbb{R}_-$ pour $k \geq p$.
• Montrons $\sum_{k=p}^{+\infty} a_k = -1$. En $z = 1$, nous avons

$$0 = W_p(1) = 1 + \sum_{k=p}^{+\infty} a_k.$$

• Nous avons alors pour $|z| \leq 1$

$$|W_p(z) - 1| = \left| \sum_{k=p}^{+\infty} a_k z^k \right| \leq -|z|^p \sum_{k=p}^{+\infty} a_k = |z|^p.$$

□

Lemme 9.3.4. — *Soit (a_n) une suite complexe qui diverge vers ∞. Alors il existe une suite d'entiers naturels $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que*

$$\forall r > 0, \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{|a_n|} \right)^{p_n} < +\infty.$$

Démonstration. — Il suffit de prendre $p_n = n$. En effet soit $r > 0$, comme la suite (a_n) diverge vers ∞, il existe N tel que $|a_n| \geq r/2$ pour $n > N$. Ainsi $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{r}{|a_n|})^n < +\infty$. □

Théorème 9.3.5. — *Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe sans point d'accumulation. Il existe une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ dont les zéros sont exactement les a_n comptés avec multiplicités.*

Démonstration. — Soit (p_n) une suite satisfaisant les hypothèses du lemme 9.3.4 et $f_n = W_{p_n}(z/a_n) - 1$. Ainsi sur $\overline{D}(0, r)$ pour $n \geq N$ (assez grand)

$$|f_n(z)| = |W_{p_n}(z/a_n) - 1| \leq |z/a_n|^{p_n} \leq (r/|a_n|)^{p_n},$$

Comme $\sum_{n=1}^{+\infty} (r/|a_n|)^{p_n} < +\infty$, $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n|$ converge uniformément sur $\overline{D}(0, r)$ et $\Pi_{n=1}^{+\infty}(1 + f_n)$ converge localement uniformément sur $\mathbb{C}$ vers une solution du problème de Weierstrass. □

Corollaire 9.3.6. — *Toute fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ est le quotient de deux fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$.*

Démonstration. — Soit h une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Soit P l'ensemble des pôles de h avec multiplicités. Il existe g solution du problème de Weierstrass pour P. La fonction $f = \frac{h}{g}$ est alors holomorphe sur $\mathbb{C}$. □

Nous pouvons reformuler le corollaire 9.3.6 de la façon suivante :

Corollaire 9.3.7. — *Toute fonction $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ non nulle s'écrit*

$$f(z) = z^m e^h \prod_n W_{p_n}(z/a_n),$$

où $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $a_n \in \mathbb{C}^*$, $p_n \in \mathbb{N}$ et h, p_n ne sont pas définies de façon unique.

Exemples 9.3.8. — *i.* $Q(z) = \Pi_{k=1}^{+\infty}(1 + q^k z) = \Pi_{k=1}^{+\infty} W_1(-q^k z)$.
ii. $G(z) = \Pi_{k=1}(1 + \frac{z}{n})e^{-z/k} = \Pi_{k=1}^{+\infty} W_2(-z/k)$.
iii. $\sin \pi z = \pi z \Pi_{k=1}^{+\infty}(1 - \frac{z^2}{k^2}) = \pi z \Pi_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} W_2(z/k)$.

Remarque 9.3.9. — *La décomposition 9.3.7 suggère une analogie avec la factorisation des entiers en produits d'une unité (e^h) et de nombres premiers (W_{p_n}). Cependant, ces facteurs h, p_n ne sont pas uniques. Nous pouvons chercher à développer l'analogie avec l'arithmétique. Notamment en cherchant s'il existe un choix canonique pour les p_n.*

Définition 9.3.10. — *L'entier $s \in \mathbb{N}$ minimum avec $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|a_n|^s} < +\infty$, s'il existe est dit* **genre** *du produit canonique $\Pi_{n=1}^{\infty} W_s(z/a_n)$.*

Le théorème de Weierstrass (Théorème 9.3.11) résoud le problème de Weierstrass sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$.

Théorème 9.3.11. — *(Théorème de Weierstrass). Soit U un ouvert non trivial de $\mathbb{C}$ et $(a_i)_{i\in I}$ une suite (éventuellement finie) d'élements de U sans point d'accumulation. Alors il existe une fonction holomorphe sur U dont les zéros sont exactement les a_i avec multiplicités.*

Démonstration. — Si I est fini, la fonction $f(z) = \prod_{i\in I}(z - a_i)$ est solution.
Nous supposons dorénavant que $I = \mathbb{N}$.
Comme la suite (a_n) n'admet pas de points d'accumulation dans U, nous avons $\max(|a_n|, d(a_n, \delta U)^{-1})$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Nous effectuons alors une partition de $I = P \cup Q$:

$$n \in P \iff |a_n| \geq d(a_n, \delta U)^{-1}, \quad n \in Q \iff |a_n| < d(a_n, \delta U)^{-1}.$$

Ainsi $\lim_{n\in P, n\to+\infty} |a_n| = +\infty$. La fonction $g(z) = \prod_{n\in P} W_n(z/a_n)$ converge et admet pour zéros avec multiplicités les $a_n, n \in P$.
De même, $\lim_{n\in Q, n\to+\infty} d(a_n, \delta U) = 0$. Pour tout $n \in Q$, soit $w_n \in \delta U$ tel que $|w_n - a_n| = d(a_n, \delta U)$ et

$$f_n(z) = W_n(\frac{a_n - w_n}{z - w_n}).$$

Soit $K \subset U$ un compact et $\delta = d(K, \delta U)$. Ainsi $|z - w_n| \geq \delta$, $z \in K, n \in Q$. Comme $|a_n - w_n|$ tend vers 0 quand $n \in Q$ tend vers $+\infty$, nous avons pour $n \in Q$ assez grand $|a_n - w_n| < \frac{1}{2}|z - w_n|$. Ainsi il existe $n_0 \in Q$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $n \in Q$,

$$|f_n(z) - 1| = \left|1 - W_n\left(\frac{a_n - w_n}{z - w_n}\right)\right| \leq \left|\frac{a_n - w_n}{z - w_n}\right|^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n, z \in K.$$

La série $\sum_{n\in Q}|f_n-1|$ converge uniformément sur tout compact de U. La fonction $f(z)=g(z)\prod_{n\in Q}f_n(z)$ est alors solution du problème de Weierstrass sur U. $\square$

Exemples 9.3.12. — *i. Pour $U=\mathbb{C}^*$, $f_1=z$, $f_2=1$ sont solution du même problème de Weierstrass sur U mais il n'existe pas de fonction entière h telle que $f_1=e^h f_2$.*
ii. Toute fonction f méromorphe sur U est le quotient de deux fonctions holomorphes sur U.
En effet, notons $(a_i)_{i\in I}$ l'ensemble des pôles de f avec multiplicité. D'après le théorème de Weierstrass (Théorème 9.3.11), il existe une fonction holomorphe h sur U dont les zéros sont les a_i, $i\in I$. La fonction $g=fh$ est alors holomorphe sur U et $f=g/h$.

Troisième partie III

APPLICATIONS EN THÉORIE DES NOMBRES

10. Fonctions zeta de Hurwitz

Cette section reprend en partie le chapitre 12 de **[Ap]**.

10.1. Prolongement analytique. — La notion de fonction zeta de Hurwitz unifie l'étude des fonctions zeta de Riemann et L de Dirichlet. L'objet de ce paragraphe est d'obtenir un prolongement holomorphe de ces fonctions au-delà du demi plan $\Re s > 1$.

Définition 10.1.1. — *Soit $a \in]0,1]$. La fonction zeta de Hurwitz est la fonction*

$$\zeta(s,a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^s}, \Re s > 1.$$

Exemples 10.1.2. — *i. Pour $\Re(s) > 1$, les séries $\zeta(s,a)$ sont absolument convergentes et elles convergent uniformément sur toute région de la forme $\Re(s) \geq 1+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Ainsi $\zeta(s,a)$ définit une fonction holomorphe sur le demi plan $\Re(s) > 1$.*
ii. Pour $a = 1$, la fonction zeta de Hurwitz coïncide avec la fonction zeta de Riemann $\zeta(s,1) = \zeta(s)$.
iii. Soit χ un caractère modulo D, nous avons

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \sum_{r=1}^{D} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{\chi(qD+r)}{(qD+r)^s}$$

$$= \frac{1}{D^s} \sum_{r=1}^{D} \chi(r) \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{(q+r/D)^s} = D^{-s} \sum_{r=1}^{D} \chi(r)\zeta(s, r/D).$$

Nous identifions les deux définitions introduites de la fonction Γ (Corollaire 3.5.7, Définition 9.2.4)

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \frac{1}{\Pi_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-z/n}}.$$

Proposition 10.1.3. — *Pour $\Re s > 1$,*

$$\zeta(s,a) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1} e^{-at}}{1-e^{-t}} dt.$$

Démonstration. — • Supposons $s \in \mathbb{R}$ et $s > 1$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}e^{-at}}{1-e^{-t}} dt$ est convergente. Pour $n \in \mathbb{N}$, le changement de variable $\tau = (n+a)t$ donne

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} \tau^{s-1} e^{-\tau} d\tau = (n+a)^s \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-(n+a)t} dt.$$

Donc

$$(n+a)^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-at} e^{-nt} dt.$$

En sommant sur $n \in \mathbb{N}$, nous obtenons pour $s > 1$ (en échangeant signe somme et signe intégrale compte tenu de la convergence uniforme)

$$\zeta(s,a) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+a)^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-at} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-t})^n dt = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}e^{-at}}{1-e^{-t}} dt.$$

• Nous étendons ensuite cette égalité à $s \in \mathbb{C}$, $\Re s > 1$. En effet, pour $a \in]0,1]$, $\delta > 0$, $c > 1+\delta$ et $\Re s \in [c, 1+\delta]$,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left| \frac{t^{s-1}e^{-at}}{1-e^{-t}} \right| dt & \leq \int_0^1 \frac{t^\delta e^{(1-a)t}}{e^t - 1} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^{c-1}e^{-at}}{1-e^{-t}} dt \\ & \leq e^{1-a} \int_0^1 t^{\delta-1} dt + \int_0^{+\infty} \frac{t^{c-1}e^{-at}}{1-e^{-t}} dt \\ & \leq \frac{e^{1-a}}{\delta} + \Gamma(c)\zeta(c,a). \end{aligned}$$

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}e^{-at}}{1-e^{-t}} dt$ converge uniformément sur toute bande $1+\delta \leq \Re s \leq c$ pour tout $\delta > 0$, donc définit une fonction holomorphe sur le demi plan $\Re s > 1$ qui coïncide avec la fonction holomorphe $\Gamma(s)\zeta(s,a)$ sur la demi-droite réelle $s > 1$. D'où l'égalité de ces deux fonctions holomorphes sur le demi-plan $\Re s > 1$. □

Pour $2\pi > \varepsilon > \delta > 0$, considérons le contour $C_\varepsilon(\delta)$ composé d'un cercle de centre 0 de rayon ε et de deux demi-droites à distance δ de l'axe $\mathbb{R}^+$.

Lemme 10.1.4. — *Pour ε et δ assez petits, la fonction de Hankel*

$$H : \mathbb{C} \times]0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, H(s,a) = \int_{C_\varepsilon(\delta)} \frac{(-w)^{s-1}e^{-aw}}{1-e^{-w}} dw$$

ne dépend ni de ε ni de δ.

Démonstration. — Pour $0 < \delta < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < 2\pi$, $H_{\varepsilon_1} = H_{\varepsilon_2}$ car la région (en forme de C) bornée par $C_{\varepsilon_1}(\delta)$ et $C_{\varepsilon_2}(\delta)$ ne contient aucun pôle de l'intégrant. La preuve est analogue pour l'invariance par rapport à δ. □

Proposition 10.1.5. — *Pour $\Re z > 1$,*

$$\zeta(z,a) = \frac{-H(z,a)}{2i \sin(\pi z)\Gamma(z)}.$$

La fonction ζ admet un prolongement holomorphe sur $\mathbb{C} - \{1\}$ et a un pôle simple en $z = 1$ avec résidu 1.

Démonstration. — • Pour $\Re z > 1$, en paramétrant $C_\varepsilon(\delta)$ suivant trois chemins $H(z,a) = I + II + III$, avec

$$I = \int_{\infty}^{\varepsilon'} \frac{e^{(z-1)\log(-(t+i\delta))}e^{-(t+i\delta)a}}{1-e^{-(t+i\delta)}}dt$$

$$II = \int_{\varepsilon'}^{\infty} \frac{e^{(z-1)\log(-(t-i\delta))}e^{-(t-i\delta)a}}{1-e^{-(t-i\delta)}}dt$$

$$III = \int_{\delta'}^{2\pi-\delta'} \frac{(-\varepsilon e^{i\theta})^{z-1}e^{-\varepsilon e^{i\theta}a}}{1-e^{-\varepsilon e^{i\theta}}} i\varepsilon e^{i\theta}d\theta,$$

où $\delta' > 0$ est l'angle du point initial de la portion circulaire de la courbe $C_\varepsilon(\delta)$ et ε' est la valeur du paramètre pour lequel la partie linéaire de la courbe $C_\varepsilon(\delta)$ rencontre la partie circulaire. Pour ε petit, $|1-e^{-\varepsilon e^{-i\delta}}| \geq |1-e^{-\varepsilon}| \geq \varepsilon/2$. Donc

$$|III| \leq 2\pi \max_\theta \frac{|(-\varepsilon e^{i\theta})^{z-1}e^{-\varepsilon e^{i\theta}a}|}{\varepsilon/2}\varepsilon \leq 4\pi\varepsilon^{\Re z-1}e^{2\pi|\Im z|}e^{\varepsilon a}.$$

Donc III tend vers zéro avec ε. En faisant tendre δ vers zéro,

$$I + II \longrightarrow \int_{\varepsilon'}^{\infty} \frac{e^{(z-1)(\log(t)+i\pi)}e^{-ta}}{1-e^{-t}}dt - \int_{\varepsilon'}^{\infty} \frac{e^{(z-1)(\log(t)-i\pi)}e^{-ta}}{1-e^{-t}}dt$$

$$= -(e^{i\pi z} - e^{-i\pi z})\int_{\varepsilon'}^{\infty} \frac{t^{z-1}e^{-ta}}{1-e^{-t}}dt.$$

Puis en faisant tendre ε vers 0^+, $I + II \longrightarrow -2i\sin(\pi z)\Gamma(z)\zeta(z,a)$. Ainsi pour $\Re z > 1$,

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} H_\varepsilon(z,a) = -2i\sin(\pi z)\Gamma(z)\zeta(z,a).$$

• Posons $u(w) = \frac{(-w)^{z-1}e^{-aw}}{1-e^{-w}}$, définie pour $w \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_+$. La fonction u est intégrable sur $C_\varepsilon(\delta)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $H(\cdot,a) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. L'équation fonctionnelle permet de définir un prolongement holomorphe de $\zeta(z,a)$ sur $\mathbb{C}-\mathbb{Z}$. Or $\zeta(z,a)$ est holomorphe pour $z \in \mathbb{N}-\{0,1\}$ et sur $\{z, \Re z > 1\}$. Par ailleurs la fonction Γ a des pôles simples sur les entiers négatifs, ce qui permet d'annihiler les zéros simples de $\sin \pi z$ sur $\mathbb{Z} - \mathbb{N}^*$. Le dénominateur se prolonge donc holomorphiquement en une fonction non nulle sur $\{z, \Re z < 3/2\} - \{1\}$ (Théorème de Riemann 7.1.1). Par conséquent $\zeta(z,a)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} - \{1\}$.
• En $z = 1$, $\sin \pi z = 0$ et $I + II = -2i\sin(\pi z)\int_{\varepsilon'}^{\infty} \frac{t^{z-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}dt = 0$. Par ailleurs

$$III = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\varepsilon e^{i\theta}a}}{1-e^{-\varepsilon e^{i\theta}}} i\varepsilon e^{i\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{i\theta}e^{\varepsilon e^{i\theta}(1-a)}}{e^{\varepsilon e^{i\theta}}-1}d\theta$$

$$III = \int_0^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{i\theta}e^{(1-a)\varepsilon e^{i\theta}}}{(1+\varepsilon e^{i\theta}+R(\theta))-1}d\theta$$

pour $|R(\theta)| \leq C\varepsilon^2$.
Donc $III \longrightarrow_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} 2i\pi$. Par conséquent

$$\lim_{z \longrightarrow 1}(z-1)\zeta(z,a) = \lim_{z \longrightarrow 1} \frac{H(z,a)}{\Gamma(z)2i\sin(\pi z)}(z-1) = 1.$$

□

10.2. Produits eulériens. —

Définition 10.2.1. — *Une fonction $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite* **multiplicative** *si $f(1) = 1$ et pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ premiers entre eux*

$$f(mn) = f(m)f(n), (m, n) = 1.$$

Une fonction $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite **complètement multiplicative** *si $f(1) = 1$ et*

$$f(mn) = f(m)f(n), (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2.$$

Lemme 10.2.2. — *Soit $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction multiplicative telle que $\sum_{n\geq 1} |f(n)|$ soit convergente. Alors*

$$\sum_{n\geq 1} f(n) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 + \sum_{k\geq 1} f(p^k)\right)$$

où p parcourt l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers. Si de plus f est complètement multiplicative,

$$\sum_{n\geq 1} f(n) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1 - f(p)}.$$

Démonstration. — Soit

$$P(x) = \prod_{p\leq x} \left(\sum_{k\geq 0} f(p^k)\right)$$

où le produit porte sur l'ensemble des nombres premiers inférieurs à x. Ainsi

$$P(x) = \sum_{n\in A} f(n)$$

pour A l'ensemble des entiers n n'ayant que des facteurs premiers $\leq x$. Ainsi

$$\left|\sum_{n\geq 1} f(n) - P(x)\right| \leq \sum_{n\in B} |f(n)| \leq \sum_{n>x} |f(n)|$$

où B est l'ensemble des entiers ayant au moins un facteur premier $> x$. Comme $\sum_{n\geq 1} |f(n)|$ converge, $P(x)$ tend vers $\sum_{n\geq 1} f(n)$ quand x tend vers $+\infty$. Or un produit infini $\prod(1 + a_n)$ converge absolument si et seulement si la série $\sum a_n$ converge absolument. Ici

$$\sum_{p\leq x} |\sum_{k\geq 1} f(p^k)| \leq \sum_{p\leq x} \sum_{k\geq 1} |f(p^k)| \leq \sum_{n\geq 2} |f(n)|.$$

Donc $\sum_{p\in\mathcal{P}} |\sum_{k\geq 1} f(p^k)|$ converge et $\prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 + \sum_{k\geq 1} f(p^k)\right)$ converge absolument. □

Le théorème 10.2.3 est une conséquence directe du lemme 10.2.2

Théorème 10.2.3. — *Supposons que la série de Dirichlet* $\sum_{n\geq 1} f(n)n^{-s}$ *converge absolument pour* $\Re s > \sigma_{\text{abs}}$. *Si* f *est multiplicative*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 + \sum_{k\geq 1} \frac{f(p^k)}{p^{ks}}\right), \text{ pour } \Re s > \sigma_{\text{abs}}.$$

Si f *est complètement multiplicative*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1 - f(p)p^{-s}}, \text{ pour } \Re s > \sigma_{\text{abs}}.$$

Exemples 10.2.4. — *i. D'après le théorème 10.2.3, pour* $\Re s > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^s}.$$

Par conséquent,

$$\log \zeta(s) = \sum_{p\in\mathcal{P}} \log(1 - p^{-s}) = \sum_{p\in\mathcal{P}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{-ns}}{n}.$$

ii. De même, pour $\Re s > 1$,

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} (1 - p^s).$$

10.3. Fonction zeta de Riemann. — Dans ce paragraphe, nous étudions plus précisément la fonction zeta de Riemann $\zeta(s) = \zeta(s, 1)$, notamment son lieu d'annulation.

Théorème 10.3.1. — *Pour* $z \in \mathbb{C}$, *nous avons l'équation fonctionnelle*

$$\zeta(1 - z) = 2\zeta(z)\Gamma(z) \cos(\frac{\pi}{2} z)(2\pi)^{-z}.$$

Démonstration. — Il suffit de montrer l'égalité pour $z \in \mathbb{C} - \{-\mathbb{N}\}$, $\Re z < 0$. Posons

$$H_t(z) = \int_{C_t(\delta)} \frac{(-w)^{z-1} e^{-w}}{1 - e^{-w}} dw.$$

Alors

$$\frac{1}{2i\pi}(H_{(2n+1)\pi}(z) - H_\varepsilon(z))$$

est la somme des résidus de la fonction $u(w) = \frac{(-w)^{z-1}e^{-w}}{1-e^{-w}}$ dans la région $R_{\varepsilon,n} = \{z \in \mathbb{C}, \varepsilon < |z| < (2n + 1)\pi\}$. Les pôles de u sont simples et sont localisés en $\{\pm 2ki\pi, 1 \leq k \leq n\}$. Le résidu de u en $\pm 2ki\pi$ vaut

$$\lim_{w\longrightarrow \pm 2ki\pi} (w \mp 2ki\pi) \frac{(-w)^{z-1} e^{-w}}{1 - e^{-w}} = \lim_{w\longrightarrow \pm 2ki\pi} (-w)^{z-1} = (\mp 2ki\pi)^{z-1} = e^{\mp i(z-1)\pi/2} (2k\pi)^{z-1}.$$

Donc

$$H_{(2n+1)\pi}(z) - H_\varepsilon(z) = 4i\pi \cos\left(\frac{\pi}{2}(z-1)\right) \sum_{k=1}^{n} (2k\pi)^{z-1}.$$

Or il existe une constante A qui dépend de z telle que $|u(w)| \leq A\frac{|w|^{\Re z - 1} e^{-\Re w}}{|1-e^{-w}|}$. Donc $H_{(2n+1)\pi}(z)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini et

$$-H_\varepsilon(z) = 4i\pi \cos\left(\frac{\pi}{2}(z-1)\right)(2\pi)^{z-1} \sum_{k=1}^{+\infty} (k)^{z-1} = 4\pi i (2\pi)^{z-1} \sin(\pi z/2)\zeta(1-z).$$

D'après la Proposition 10.1.5, $\zeta(z) = \frac{-H_\varepsilon(z)}{(2i \sin \pi z)\Gamma(z)}$, donc

$$\zeta(s) = (2\pi)^s \frac{1}{2\cos(\pi z/2)} \zeta(1-z)\Gamma(z).$$

□

Proposition 10.3.2. — *Les zéros de la fonction ζ qui ne sont pas inclus dans la bande critique $\{z \in \mathbb{C} | 0 \leq \Re z \leq 1\}$ sont les entiers négatifs pairs $-2\mathbb{N}^*$.*

Démonstration. — Dans l'équation fonctionnelle du Théorème 10.3.1, en calculant $\lim_{z \longrightarrow 1} \zeta(1-z)$, nous constatons que le pôle simple de ζ en 1 correspond au pôle simple de $\cos((\pi/2)z)$. Donc la fonction $\zeta(1-z)$ n'a pas de zéro en $z = 1$. □

L'hypothèse de Riemann conjecture que tous les zéros de ζ dans la bande critique sont en fait sur la ligne $\{z, \Re z = 1/2\}$.

Définition 10.3.3. — *Nous définissons la fonction*

$$\Lambda : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}, \Lambda(m) = \begin{cases} \log p & si\ m = p^k, p \in \mathcal{P}, k \in \mathbb{N}^*, \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Lemme 10.3.4. — *Pour $\Re z > 1$,*

$$\sum_{n \geq 2} \Lambda(n) e^{-z \log n} = \frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

Démonstration. — La dérivée logarithmique donne

$$\frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{\log(p) e^{-z \log p}}{1 - e^{-z \log p}} = \sum_{p \in \mathcal{P}} \log p \sum_{k=1}^{+\infty} (e^{-z \log p})^k.$$

La convergence étant absolue, nous pouvons intervertir les signes sommes et obtenir

$$\frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{p \in \mathcal{P}} (\log p) e^{-z \log p^k} = \sum_{n=2}^{+\infty} \Lambda(n) e^{-z \log n}.$$

□

Le lemme technique suivant est utile à la démonstration du Théorème 10.3.6.

Lemme 10.3.5. — *Si Φ est holomorphe non nulle sur un voisinage de $P \in \mathbb{R}$ et si $\Phi(P) = 0$, alors*

$$\Re \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} > 0$$

pour z réel appartenant à un voisinage de P et tel que $z > P$.

Démonstration. — Par hypothèse, $\Phi(z) = \alpha(z-P)^k + o((z-P)^k)$ donc $\Phi'(z) = k\alpha(z-P)^{k-1} + o((z-P)^{k-1})$ et

$$\Re \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} = \Re(k(z-P)^{-1} + o((z-P)^{-1})) > 0$$

pour z réel appartenant à un voisinage de P et tel que $z > P$. □

Théorème 10.3.6. — *La fonction zeta de Riemann n'a pas de zéro sur le bord de la bande critique.*

Démonstration. — D'après l'équation fonctionnelle (Théorème 10.3.1), il suffit de montrer que ζ n'a pas de zéro dans $\{z|, \Re z = 1\}$. Supposons qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}^*$ avec $\zeta(1 + it_0) = 0$. La fonction

$$\Phi(z) = \zeta^3(z)\zeta^4(z + it_0)\zeta(z + 2it_0).$$

a un zéro en $z = 1$ car ζ^3 a un pôle d'ordre 3 en 1 et $\zeta^4(z + it_0)$ a un zéro d'ordre au moins 4 en $z = 1$. D'après le lemme 10.3.5, il existe $\varepsilon_0 > 0$, tel que

$$\Re \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} > 0, \text{ pour } 1 < x < 1 + \varepsilon_0.$$

Cependant la dérivée logarithmique

$$\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = \frac{3\zeta'(x)}{\zeta(x)} + \frac{4\zeta'(x + it_0)}{\zeta(x + it_0)} + \frac{\zeta'(x + 2it_0)}{\zeta(x + 2it_0)}.$$

vérifie d'après la proposition 10.3.4

$$\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = \sum_{n \geq 2} \Lambda(n) \left(-3e^{-x \log n} - 4e^{-(x+it_0) \log n} - e^{-(x+2it_0) \log n}\right).$$

Donc

$$\Re \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = \sum_{n \geq 2} \Lambda(n) e^{-x \log n} \left(-3 - 4\cos(t_0 \log n) - \cos(2t_0 \log n)\right)$$

$$= -2 \sum_{n \geq 2} \Lambda(n) e^{-x \log n} \left(\cos(t_0 \log n) + 1\right)^2 \leq 0.$$

D'où l'absurdité. □

10.4. Théorème des nombres premiers. — L'introduction de l'analyse, et notamment de l'analyse complexe pour l'étude des nombres premiers est une idée extrêmement fructueuse, notamment pour obtenir des résultats de distribution de nombres premiers. Ainsi, par exemple Dirichlet a établi que toute progression arithmétique dont les termes n'ont pas de facteur commun, contient une infinité de nombres premiers.
Hadamard et de la Vallée Poussin ont démontré le théorème des nombres premiers en 1897. Pour $x \in \mathbb{R}$, nous définissons

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1, \quad \theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p.$$

Théorème 10.4.1. — *(Théorème des nombres premiers)*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

Le théorème des nombres premiers est équivalent à $\theta(x) \sim x$. En effet pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\theta(x) \leq \sum_{p \leq x} \log x = \pi(x) \log(x)$$

$$\theta(x) \geq \sum_{x^{1-\varepsilon} \leq p \leq x} \log(x^{1-\varepsilon}) = (1-\varepsilon)(\pi(x) + O(x^{1-\varepsilon})) \log x.$$

Pour établir le résultat, nous allons montrer que l'intégrale impropre

$$\int_1^\infty \frac{\theta(x) - x}{x^2} dx \tag{8}$$

converge, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $\forall y, z \geq N$,

$$\left| \int_y^z \frac{\theta(x) - x}{x^2} dx \right| < \varepsilon.$$

Nous en déduisons alors le résultat $\theta(x) \sim x$. En effet supposons qu'il existe $\lambda > 1$ avec $\theta(x) \geq \lambda x$ pour x arbitrairement grand. Comme θ est croissante,

$$\int_x^{\lambda x} \frac{\theta(t) - t}{t^2} dt \geq \int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2} dt = \int_1^{\lambda} \frac{\lambda - t}{t^2} dt > 0,$$

ce qui est absurde. De même s'il existe $\lambda < 1$ avec $\theta(x) \leq \lambda x$ pour x assez grand, alors

$$\int_x^{\lambda x} \frac{\theta(t) - t}{t^2} dt \leq \int_{\lambda x}^{x} \frac{\lambda x - t}{t^2} dt = \int_{\lambda}^{1} \frac{\lambda - t}{t^2} dt < 0,$$

ce qui est absurde. Il s'agit donc de montrer la convergence de l'intégrale (8). Soit la fonction $\Phi(s) = -\zeta'(s)/\zeta(s)$. Nous avons

$$\Phi(s) = \sum_{p \in \mathcal{P}} (\log p) p^{-s} + \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{n=2}^{\infty} (\log p) p^{-ns}$$

$$= s\int_1^\infty \theta(x)x^{-s-1}dx + s\int_1^\infty \theta(x)\left(\sum_{n=2}^\infty nx^{-ns-1}\right)dx$$
$$= s\int_0^\infty e^{-st}\theta(e^t)dt + s\int_0^\infty \frac{2e^{-2st}-e^{-3st}}{(1-e^{-st})^2}\theta(e^t)dt.$$

Posons
$$f(t) = \theta(e^t)e^{-t} - 1, \quad g(z) = \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z}.$$

Ainsi
$$g(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt + \int_0^\infty \frac{2e^{-2(z+1)t} - e^{-3(z+1)t}}{(1-e^{-(z+1)t)^2}}\theta(e^t)dt.$$

L'intégrale définissant $g(z)$ converge pour $\Re(z) > 0$ et pour montrer le théorème des nombres premiers, il suffit de montrer la convergence de $g(z)$ pour $z = 0$. Pour cela nous disposons de l'argument Tauberien :

Théorème 10.4.2. — *(Newman) Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée localement intégrable et $g(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt$. Supposons que $g(z)$ s'étend en une fonction holomorphe sur un voisinage de $\Re(z) \geq 0$. Alors $\int_0^\infty f(t)dt$ existe et est égale à $g(0)$.*

Démonstration. — Pour $T > 0$, posons $g_T(z) = \int_0^T f(t)e^{-zt}dt$. Chaque fonction g_T est entière et nous voulons montrer que $\lim_{T\to\infty} g_T(0) = g(0)$.
Pour R grand, notons C le bord de la région
$$\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq R, \Re(z) \geq -\delta\}$$
pour $\delta = \delta(R) > 0$ assez petit de façon à ce que C soit inclus dans le domaine d'holomorphie de g. D'après le théorème de Cauchy

$$g(0) - g_T(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_C (g(z) - g_T(z))e^{zT}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z} \tag{9}$$

en effet le seul pôle du terme sous signe intégrale est un pôle simple en $z = 0$.
Pour borner le terme de droite de (9), nous découpons le contour d'intégration C en
$$C_+ = C \cap \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) \geq 0\}, C_- = C \cap \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) \leq 0\}.$$
Par hypothèse, f est bornée : $\exists B > 0,\ |f(t)| \leq B,\ t \in [0,+\infty[$. Ainsi pour $\Re(z) > 0$ et $|z| = R$, nous avons
$$|g(z) - g_T(z)| = \left|\int_T^\infty f(t)e^{-zt}dt\right| \leq B\int_T^\infty |e^{-zt}|dt = \frac{Be^{-\Re(z)T}}{\Re(z)}$$
et
$$\left|e^{zT}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\right| = e^{\Re(z)T}\frac{2\Re(z)}{R^2}.$$
Comme la longueur du contour est au plus $2\pi R$, nous avons
$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{C_+}(g(z) - g_T(z))e^{zT}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right| \leq \frac{2\pi R}{2\pi}\frac{Be^{-\Re(z)T}}{\Re(z)}e^{\Re(z)T}\frac{2\Re(z)}{R^2} = \frac{2B}{R}.$$

Sur C_-, nous découpons l'intégrale en deux pour g et g_T. Comme la fonction g_T est entière, son intégrale sur C_- peut-être calculée sur le demi-cercle $C'_- = \{z \in \mathbb{C}, |z| = R, \Re(z) \leq 0\}$. Comme $\Re(z) \leq 0$, nous avons

$$|g_T(z)| = \left| \int_0^T f(t) e^{-zT} dt \right| \leq B \int_{-\infty}^T |e^{-zt}| dt = \frac{Be^{-\Re(z)T}}{|\Re(z)|} \leq \frac{2B}{R}.$$

Montrons enfin que la contribution de g sur C_- tend vers 0 quand $T \longrightarrow \infty$. Nous avons

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C_-} g(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z} = \int_0^1 a(u) e^{b(u)T} du,$$

où $a(u)$ et $b(u)$ sont continues et $\Re(b(u)) < 0$ pour $0 < u < 1$. Comme a ne dépend pas de T, le terme sous l'intégrale tend vers 0 en dehors d'un nombre fini de points. Comme il est borné, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous avons la convergence vers 0 quand T tend vers ∞. Ainsi

$$\limsup_{T \longrightarrow \infty} |g(0) - g_T(0)| \leq \frac{4B}{R}$$

et comme R peut-être choisi arbitrairement grand, nous obtenons le résultat attendu. □

Références

[Ap] T. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, Springer-Verlag UTM, 1976.

[BD] L. Bonavero et J.-P. Demailly, *Fonctions holomorphes et surfaces de Riemann.*

[Ca] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes.*

[Co] P. Colmez, *Eléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres)*, 2011, Ecole Polytechnique.

[dM] F. De Marçay, *Cours d'analyse complexe*, Département de Mathématiques d'Orsay.

[Do] P. Dolbeault, *Analyse complexe*, Masson 1990.

[Di] J. Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, Hermann, Deuxiéme édition, 1980.

[GK] R. Greene et S. Krantz, *Function Theory of one complex variable*, Third edition, Graduate Studies in Mathematics **40**, 2006.

[Ma] F. de Marçay, *Analyse complexe*, Cours au département de mathématiques d'Orsay.

[Mi] J. Milne, *Modular functions and modular forms.*

[Ru] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 1966.

[Sh] T.N. Shorey, *Complex analysis with applications to number theory*, Infosys Science Foundation Series, Springer 2020.

[Si1] J. Silverman, *The arithmetic of Elliptic curves*, Springer-Verlag 106, Second Edition 1992.

[Si2] J. Silverman, *Advanced topics in the arithmetic of Elliptic Curves*, Springer-Verlag 151, 1994.