Topologie et Calcul Différentiel

Djalil Chafaï

2023 - 2024

Contents

1 Espaces Topologiques

1.1 Espaces à produit scalaire, espaces normés, espaces métriques, espaces topologiques.

Définition 1.1.1. *Un produit scalaire sur un $\mathbb{K}$-ev est une forme linéaire, symétrique (ou hermitienne) et définie positive. Quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on dit que le produit scalaire est sesquilinéaire.*

Proposition 1.1.1.
- *Relation de Pythagore :* $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re(\langle x, y\rangle)$
- *Identité du Parallélograme :* $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$
- *Inégalité de Chauchy-Schwarz :* $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$

Définition 1.1.2. *Une norme sur un $\mathbb{K}$-ev ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) est une forme positive sous-additive homogène séparée.*

Définition 1.1.3. *Une distance ou une métrique sur un ensemble est une forme positive séparée symétrique vérifiant l'inégalité triangulaire.*

Définition 1.1.4. *Une topologie $\mathcal{O} \in \mathcal{P}(X)$ sur un ensemble X est une collection de partie de X stable par réunion quelconque, intersections finies, contenant l'espace et le vide. On appelle ses éléments des ouverts*

1.2 Fermés

Définition 1.2.1.
- *Un ensemble A est fermé si et seulement si $A^{\complement}$ est ouvert.*
- *L'adhérence d'un ensemble est le plus petit fermé le contenant :*

$$\overline{A} = \bigcap_{A \subset F, F\,fermé} F = \{x \in X, \forall O \in \mathcal{O}, x \in O \Rightarrow O \cap A \neq \varnothing\}$$

- *L'intérieur de A est le plus grand ouvert qu'il contient :*

$$\mathring{A} = \bigcup_{O \subset A, O ouvert} = \{x \in X, \exists\ O \in \mathcal{O},\ x \in O \subset A\}$$

- *La frontière de A est :* $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$
- *A est dense si d'adhérence égale à X.*

Définition 1.2.2.
- *x est intérieur à A si $x \in \mathring{A}$.*
- *x est adhérent à A lorsque $x \in \overline{A}$. On dit alors que x est isolé lorsqu'il existe O_x voisinage ouvert de x d'intersection x avec A. Sinon, x esst d'accumulation.*

1.3 Voisinages, convergence et continuité.

Définition 1.3.1. *Un voisinage d'un point x est une partie qui contient un ouvert contenant x.*

Définition 1.3.2. *Une suite converge vers x pour une topologie lorsque pour tout voisinage de x, la suite appartient à ce voisinage àpcr.*

Proposition 1.3.1. *Si F fermé, $x_n \in F \to x$, alors $x \in F$. La réciproque est fausse en générale.*

Théorème 1.3.1. *Dans un espace métrique, $x_n \to x$ ssi $d(x_n, x) \to 0$*

Définition 1.3.3. *Une application f est dite :*

- *continue en x lorsque pour tout voisinage V de $f(x)$, il existe un voisinage W de x tel que $f(W) \subset V$.*

- *séquentiellement continue en x lorsque pour toute suite $x_n \to x$, $f(x_n) \to f(x)$.*

Proposition 1.3.2. *La continuité implique la continuité séquentielle.*

Proposition 1.3.3. *Soit $f : X \to Y$. On a équivalence entre :*

- *f est continue*
- *Les images réciproques par f des ouverts de Y sont des ouverts de X.*
- *Les images réciproques par f des fermés de Y sont des fermés de X.*

Définition 1.3.4 (Propriété de Fréchet-Urysohn)**.** *X vérifie la propriété de Fréchet-Urysohn si :*

$$\forall A \subset X,\ x \in \overline{A},\ \textit{il existe } x_n \in A^{\mathbb{N}},\ x_n \to x$$

Théorème 1.3.2. *Si X vérifie la propriété de Fréchet-Urysohn, pour tout espace Y et tout $f : X \to Y$, la continuité équivaut à la continuité séquentielle.*

Définition 1.3.5. *Un homéomorphisme est une bijection continue de réciproque continue.*

1.4 Bases de topologie

Définition 1.4.1. *Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ une famille d'ouverts. $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{O}$ quand : $\forall O \in \mathcal{O}, \exists\, (B_i)_i \in \mathcal{B}, O = \cup_i B_i$ ou de manière équivalente quand $\forall O \in \mathcal{O}, x \in O, \exists B \in \mathcal{B},\ x \in B \subset O$.*

Théorème 1.4.1. *Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ une base. On a :*

- *$X = \cup_{B \in \mathcal{B}} B$*
- *$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B},\ x \in B_1 \cap B_2,\ \exists B_3 \in \mathcal{B}, x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*

Réciproquement, si une famille vérifie ces propriétés, alors $\mathcal{O} = \{\cup_{B \in \mathcal{A} B}\}_{\mathcal{A} \subset \mathcal{B}}$ est la plus petite topologie qui contient $\mathcal{B}$, appelée topologie engendrée par $\mathcal{B}$.

Définition 1.4.2. *Une base locale au point x est une famille d'ouverts contenant x et dont au moins l'un est inclus dans chaque ouvert contenant x.*

Définition 1.4.3. *Un espace topologique est :*

- *à base dénombrable de voisinages si tout point possède une base dénombrable de voisinages.*
- *à base dénombrable lorsqu'il possède une base dénombrable (c'est plus fort !)*
- *séparable lorsqu'il existe une partie dénombrable dense.*

Théorème 1.4.2. *Un espace à base dénombrable est toujours séparable. La réciproque est vraue pour un espace métrisable.*

Théorème 1.4.3. *Tout espace à base dénombrable de voisinages (en particulier tout espace métrisable) est un espace de Fréchet-Urysohn.*

1.5 Axiomes de Séparation

Définition 1.5.1. *Axiome T2 : Tous deux points peuvent être séparés par deux ouverts distincts.*

Théorème 1.5.1. *Pour tout espace topologique métrisable :*

- *Les singletons sont fermés.*
- *Pour tous fermés F_0, F_1, il existe f continue valant i sur F_i.*

Lemme 1.5.2. *Dans un espace métrique, F est fermé si et seulement si $d(x, F) = 0 \Rightarrow x \in F$.*

1.6 Topologies

1.6.1 Topologie Trace

Définition 1.6.1. *On appelle topologie trace la topologie induite par la topologie de X sur $A \subset X$ est la topologie la moins fine sur A qui rend l'inclusion canonique continue.*

Proposition 1.6.1.
- *La restriction de la métrique induit la topologie trace.*
- *La définition est emboîtable.*
- *La fermeture d'un ensemble pour la topologie trace est la trace de sa fermeture. Ce n'est pas vrai pour l'intérieur.*
- *Si $x_n \to x_* \in A$ ssi $x_n \to x_*$ dans X.*
- *Si $\mathcal{O}$ est à base dénombrable (resp. de voisinages), $\mathcal{O}_A$ l'est aussi*
- *Si $\mathcal{O}$ est séparée (axiome T2), $\mathcal{O}_A$ aussi.*
- *Si $\mathcal{O}$ est métrisable est séparable, alors $\mathcal{O}_A$ est métrisable est séparable.*

1.6.2 Topologie Produit

Définition 1.6.2. *On appelle topologie produit ou cylindrique sur $X = \prod_{i \in I} X_i$ la topologie engendrée par les $\prod_{i \in I} O_i$ avec $O_i \neq X_i$ sur un nombre fini de i. C'est la topologie la moins fine sur X qui rend les projections canoniques continues.*

Lemme 1.6.1. *On a : $x_n \to x$ si et seulement si $x_{n,i} \to x_i$ pour tout i.*

Proposition 1.6.2.
- *Si tous les X_i vérifient $T2$, X vérifie $T2$*
- *Si I est au plus dénombrable, et tous les X_i sont à base dénombrable (de voisinages), X l'est aussi.*
- *Si I est au plus dénombrable ou a le cardinal de $\mathbb{R}$, et si les X_i sont tous séparables, X aussi.*
- *Si I est au plus dénombrable, et si les X_i sont métrisables par les d_i, X est métrisable par :*
  - $\max_i(d_i)$ *si I est fini*
  - $\max_i \min(d_i, 2^{-i})$ *si I est infini dénombrable.*

1.6.3 Topologies Initiale et Finale

Définition 1.6.3.
- *Soient $f_i : X \to X_i$. La topologie engendrée sur X par les $f_i^{-1}(O_i)$ où O_i est ouvert dans X_i est appelée topologie initiale. C'est la moins fine qui rend f_i continue pour tout i.*
- *Soient $g_i : X_i \to X$. La topologie engendrée par les ensembles O tels que $g_i^{-1}(O)$ est ouvert dans X_i est appelée topologie finale. C'est la plus fine qui rend g_i continue pour tout i.*

1.6.4 Topologie Quotient

Définition 1.6.4. *Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur X. La topologie quotient sur $X/\sim$ est la plus fine qui rend la projection canonique continue : $O \subset X/\sim$ est ouvert ssi $[\cdot]^{-1}(O) = \{x \in X \mid [x] \in O\}$ est ouvert dans X. C'est la topologie finale de la projection canonique.*

2 Compacité

2.1 Quasi-Compéacité

Définition 2.1.1. *Un espace est dit quasi-compact lorsqu'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue : De tout recouvrement par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini. Un espace est dit compact lorsqu'il est quasi-compact et séparé.*

Définition 2.1.2. *Un sous ensemble est quasi-compact lorsqu'il est quasi compact pour la topologie trace.*

Proposition 2.1.1.

Dans $\mathbb{R}^n$, K est compact si et seulement si il est fermé borné.

Si K_1, K_2 sont quasi compacts, $K_1 \cup K_2$ est quasi compact.

Théorème 2.1.1.

Si F est fermé dans K quasi compact, F est quasi compact.

Si K est quasi compact dans X séparé, K est fermé.

Définition 2.1.3. *Si X est séparé, $A \subset X$ est relativement compact lorsque $\overline{A}$ est compact.*

Théorème 2.1.2.

- *Si $f : X \to Y$ est continue, X est quasi compact, alors $f(X)$ est quasi-compact.*
- *Si $f : X \to \mathbb{R}$ et $X \neq \varnothing$ est quasi compact, alors, $\exists\ x_\star \in X,\ f(x_\star) = \sup_{x \in X} f(x) < \infty$.*

Théorème 2.1.3. *Si $f : X \to Y$ est une bijection continue avec X quasi compact et Y séparé, f^{-1} est continue.*

2.2 Théorème de Tykhonov

Théorème 2.2.1. *Tout produit de (quasi-)compacts est (quasi-)compact.*

2.3 Compacité Métrique

Définition 2.3.1. *Un ε-réseau est un ensemble A fini tel que tout point est à distance au plus ε d'un point de A.*

Lemme 2.3.1. *Un espace métrique compact possède un ε-réseau fini pour tout ε.*

Théorème 2.3.2. *Pour un espace métrisable, on a équivalence entre :*

1. *X est compact*
2. *De toute suite de X on peut extraire une sous-suite convergeant dans X.*

Dans ce cas on a :

Lemme de Lebesgue : pour tout recouvrement par des ouverts O_i, il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in X$, il existe i_x tel que $B(x, r) \subset O_{i_x}$.

2.4 Compacité Locale

Définition 2.4.1. *Un espace est localement compact lorsque tout point possède un voisinage quasi-compact.*

Définition 2.4.2. *Un espace est dénombrable à l'infini s'il admet un recouvrement dénombrable par des quasi-compacts (qu'on peut supposer croissants sans perte de généralité).*

Lemme 2.4.1. *Un espace métrisable compact est localement compact et dénombrable à l'infini, et cela est vrai pour tout ouvert pour la topologie induite.*

Théorème 2.4.2. *Si un espace est localement compact et dénombrable à l'infini, il existe une suite K_n de quasi-compacts croissante d'union X et tel que tout quasi-compact inclus dans X est inclus dans au moins l'un des K_n. On parle de suite exhaustive de compacts.*

2.5 Compactification d'Alexandrov

Théorème 2.5.1. *Soit X un espace topologique et un point à l'infini $\infty \notin X$. Soit $X^\star = X \cup \{\infty\}$, $\mathcal{O}^\star \subset \mathcal{P}(X^\star)$ formé par les ouverts de X et les complémentaires dans $X^\star$ des quasi-compacts fermés de X. Alors :*

1. *$\mathcal{O}^\star$ est une topologie sur $X^\star$.*
2. *$X^\star$ est quasi-compact*
3. *L'injection canonique est continue et ouverte*
4. *$X^\star$ est séparé si et seulement si X est séparé et localement compact.*
5. *X est dense dans $X^\star$ si et sseulement si X n'est pas quasi-compact fermé.*

2.6 Théorème de Baire

Lemme 2.6.1. *Pour X un espace topologique, X est quasi-compact si et seulement si pour toute famille de fermés $(F_i)_{i\in I}$ telle que $\bigcap_{i\in I'} \neq \varnothing$ pour tout $I^{'} \subset I$ fini, on a : $\bigcap_i F_i \neq \varnothing$.*

Lemme 2.6.2. *Si X est quasi-compact éparé alors :*

- *Tout point et tout fermé ne le contenant pas sont séparables par des ouverts.*
- *Pour tout $x \in X$ et tout ouvert $O \ni x$, il existe $O^{'} \ni x$ tel que $\overline{O'} \subset O$.*

Théorème 2.6.3. *Si X est quasi-compact alors il est de Baire : toute intersection d'une suite d'ouverts denses est dense.*

3 Complétude

3.1 Suites de Cauchy

Définition 3.1.1. *Une suite x_n est de Cauchy lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N = N_\varepsilon$ tel que pour tous $n, m \geq N$, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Un espace métrique est complet lorsque toute suite de Cauchy converge.*

Lemme 3.1.1. *Si X est complet, $F \subset X$ est fermé, alors F est complet. Si $A \subset X$ est complet, alors A est fermé.*

Lemme 3.1.2. *Soit X complet et $X = F_0 \supset F_1 \supset \dots$ une suite décroissante de fermés non vide et de diamètres tendant vers 0. Alors leur intersection est un certain point $x \in X$.*

Théorème 3.1.3. *Un espace métrique est compact si et seulement si il est complet et admet un ε-réseau pour tout ε.*

Théorème 3.1.4.
- *Les R^n sont complets*
- *Les l^p pour $p \in [1, \infty]$ sont conplet.*

Théorème 3.1.5.
- *Si K est compact et Y métrique complet, alors $\mathcal{C}(K, Y)$ est métrique complet.*
- *Si X est localement compact à base dénombrable de voisinages et Y métrique complet alors $\mathcal{C}(X, Y)$ est métrisable complet.*

Définition 3.1.2. *On définit la distance de Hausdorff entre deux fermés d'un espace métrique de diamètre fini par :*

$$d_H(F_1, F_2) < r \Leftrightarrow \text{ pour tout } x \in F_{1,2},\ \exists y \in F_{2,1},\ d(x, y) < r$$

On note $\mathcal{F}(X)$ l'ensemble des fermés non-vides de X, et $\mathcal{K}(X)$ l'ensemble des compacts non-vides.

Théorème 3.1.6.
- *Si X complet, $\mathcal{F}(X)$ et $\mathcal{K}(X)$ sont complets.*
- *Si X est compact, $\mathcal{K}(X)$ est compact.*

3.2 Espaces Polonais, de Banach, de Hilbert

Définition 3.2.1. *Un espace topologique est :*

- *polonais lorsqu'il est séparable et métrisable complet*
- *de Banach lorsque c'est un ev normé complet*
- *de Hilbert loesque c'est un ev à produit scalaire complet*

Théorème 3.2.1. *Un ev normé est un espace de Banach ssi toute série absolument convergente est convergente.*

3.3 Complétion

Définition 3.3.1. *Soit X un espace métrique non complet. Son complété $(X^{'}, d')$ est un espace métrique complet tel que $X \subset X^{'}$ et X est dense dans $X^{'}$. On le construit ainsi :*

- *Soit $\tilde{X}$ l'ensemble des suites de Cauchy, muni de la relation : $x_n \sim y_n$ ssi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang pour lequel les suites sont à distance au plus ε.*
- *On considère $X^{'} = \tilde{X}/\sim$. On considère la quantité $d'((x_n),(y_n)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$. C'est bien une métrique compatible avec la topologie de $X^{'}$.*

Remarque 3.3.0.1. *Tous deux complétés sont isomètres.*

Lemme 3.3.1. *Si $f : X \to Y$ est uniformément continue, Y est complet, il existe une unique fonction continue prolongée sur le complété de X et égale à f sur X.*

Théorème 3.3.2. *Si X est complet, alors il est de Baire.*

4 Connexité

4.1 Connexité, connexité par arcs, composantes connexes

Définition 4.1.1. *Un espace est :*

- *connexe lorsqu'il n'est pas partitionnable en deux ouverts non-vides*
- *connexe par arcs lorsque les points sont reliés par des arcs*

Théorème 4.1.1.

- *X est connexe ssi $\varnothing$ et X sont les seules parties à la fois ouvertes et fermées.*
- *X est connexe ssi il n'est pas partitionnable en deux fermés non-vides.*
- *Si $f : X \to Y$ est continue et X connexe (resp. par arcs), alors $f(X)$ est connexe (resp. par arcs)*
- *Si X est connexe par arcs, alors il est connexe, et la réciproque est fausse.*
- *Si $\cap_i A_i \neq \varnothing$ avec les A_i connexes (resp. par arcs), $\cup_i A_i$ est connexe (resp. par arcs)*
- *Si les X_i sont connexes (resp. par arcs), alors $\prod_i X_i$ est connexe (resp. par arcs).*

Définition 4.1.2. *La composante connexe C_x de $x \in X$ est la plus grande partie connexe de X contenant x. Un espace est totalement discontinu si $C_x = \{x\}$ pour tout x.*

4.2 Connexité Métrique

Définition 4.2.1. *Un espace métrique est bien echaîné lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, et tous $x, y \in X$ il existe une suite finie $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$ telle que $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ pour tout i.*

Théorème 4.2.1. *Si un espace est connexe alors il est bien enchaîné, et la réciproque est fausse mais devient vraie en ajoutant la compacité..*

5 Espaces de fonctions continues sur un métrique compact

Définition 5.0.1. *Pour une suite f_n dans $\mathcal{C}(K,Y)$ et f dans $\mathcal{C}(K,Y)$:*

- *$f_n \to f$ ponctuellement lorsque pour tout $x \in K, f_n(x) \to f(x)$*
- *$f_n \to f$ uniformément lorsque la convergence a lieu dans $\mathcal{C}(K,Y)$.*

Théorème 5.0.1 (De Dini)**.** *Si $Y = \mathbb{R}$, si la suite f_n est croissante, et f est continue, la convergence ponctuelle implique la convergence uniforme.*

Théorème 5.0.2 (De Heine)**.** *Toute fonction $f \in \mathcal{C}(K,Y)$ est uniformément continue.*

Théorème 5.0.3 (de Arzelà-Ascoli)**.** *$A \subset \mathcal{C}(K,Y)$ a une adhérence compacte ssi les deux conditions suivantes sont réalisées :*

- *Compacité Ponctuelle : $\forall x \in K, \{f(x) \mid f \in A\}$ a une adhérence compacte dans Y.*
- *La famille A est uniformément équicontinue : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $f \in A$, et tous $x, y \in K$, si $d_K(x,y) < \eta$, alors $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Théorème 5.0.4 (de Stone-Weierstrass)**.** *Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$. vérifiant la propriété de prescription de valeurs arbitraires en deux points arbitraires : pour tous $x, y \in K$, $a, b, \in \mathbb{R}$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) = a$ et $f(y) = b$. Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$.*

Corollaire 5.0.4.1 (Théorème de Weierstrass)**.** *Pour tout n, $K \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ est dense dans $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$.*

Corollaire 5.0.4.2 (de Stone-Weierstrass Complexe)**.** *Si de plus la famille $\mathcal{A}$ est stable par conjugaison et à valeurs complexes, elle est dense dans $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$.*

Corollaire 5.0.4.3. *Pour tout n, $K \subset \mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n, \overline{z_1}, \ldots, \overline{z_n}]$ est dense. En particulier, $\mathbb{C}\left[e^{i\theta}, e^{-i\theta}\right]$ est dense dans $\mathcal{C}(S^1, \mathbb{C})$.*

6 Opérateurs Linéaires Bornés

6.1 Définitions et Duéalité

Définition 6.1.1. *Soient X, Y des $\mathbb{K}$ ev normés avec $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.*

- *$u : X \to Y$ est un opérateur linéaire borné lorsque u est linéaire et qu'il est $M \in [0, \infty[$ tel que pour tout $x \in X$, $\|u(x)\|_Y \leq M \|x\|_X$.*
- *On note $L(X,Y)$ l'ev des opérateurs linéaires bornés $X \to Y$.*
- *$L(X,Y)$ est normé par la norme d'opérateur, et a une structure d'algèbre.*

Lemme 6.1.1. *Pour u linéaire, on a équivalence entre :*

1. *$u \in L(X,Y)$*
2. *u est Lipschitz*
3. *u est uniformément continue*
4. *u est continue*
5. *u est continue en 0.*

Lemme 6.1.2. *Si Y est un Banach, $L(X,Y)$ est un Banach.*

Définition 6.1.2. *Si X est un $\mathbb{K}$-Banach, $L(X,\mathbb{K})$ est appelé dual de X, noté $X^{'}$ ou $X^{\star}$.*

Théorème 6.1.3. *Si* $p \in [1, \infty)$ *et* $q = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}$ *est le conjugué de Hölder de* p*, alors :*

$$\Phi : \updownarrow^q \to (\updownarrow^p)^{'}, y \mapsto \left(x \mapsto \sum_n x_n y_n \right)$$

est une bijection linéaire isométrique : $(\updownarrow^p)^{'}$ *est isomorphe à* $\updownarrow^q$*.*

Lemme 6.1.4. *Une forme linéaire est continue ssi son noyau est fermé.*

6.2 Banach-Steinhaus

Théorème 6.2.1. *Si* X *est un Banach, et* Y *un evn, alors pour tout* $A \subset L(X, Y)$*, la bronitude ponctuelle est équivalente à la bornitude uniforme :*

$$\forall x \in X, \sup_{u \in A} \|u(x)\|_Y < \infty \Leftrightarrow \sup_{u \in A} \|u\|_{L(X,Y)} < \infty$$

Corollaire 6.2.1.1. *Soit* u_n *dans* $L(X, Y)$*, où* X *est un Banach et* Y *un evn. La convergence ponctuelle entraîne la continuité de la limite.*

6.3 Hahn-Banach

Théorème 6.3.1. *Soit* $X \subset \tilde{X}$ *un sous-espace d'un evn sur* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$*. Soit* $u \in L(X, \mathbb{K})$ *une forme linéaire. Alors il existe* $\tilde{u} \in L(\tilde{X}, \mathbb{K})$ *telle que* $\tilde{u}_{|X} = u$ *et* $\|\tilde{u}\| = \|u\|$*.*

Corollaire 6.3.1.1. *Si* X *est un Banach, et* $X^{''}$ *est sont bidual, l'injection canonique* $\iota : X \to X^{''}$ *est une isométrie linéaire :* $\|\iota(x)\| = \|x\|$*.*

Corollaire 6.3.1.2. *L'application* $\Phi : \updownarrow^1 \to (\updownarrow^\infty)^{'}$, $\Phi(y)(x) = \sum_n x_n y_n$ *est une isométrie linéaire non surjective. En d'autres termes :*

$$\updownarrow^1 \subsetneq (\updownarrow^\infty)^{'} = (l^1)^{''}$$

6.4 Banach-Schauder

Théorème 6.4.1 (de Banach-Schauder ou de l'application ouverte)**.** *Si* X *et* Y *sont des Banach et si* $u \in L(X, Y)$ *est surjective, alors* u *est une application ouverte.*

Corollaire 6.4.1.1.

- ***(inverse continu)*** *: Si* X *et* Y *de Banach et* $u \in L(X, Y)$ *est bijective, alors* $u^{-1} \in L(Y, X)$*. On parle de Théorème d'Isomorphisme de Banach.*
- ***(équivalence des normes)*** *: Si* $\|\cdot\|, \|\cdot\|^{'}$ *sont deux normes qui font d'un même espace vectoriel normé* X *un espace de Banach. S'il existe* $c \in (0, \infty)$ *telle que* $\|\cdot\| \leq c \|\cdot\|^{'}$ *alors il existe* $C \in (0, \infty)$ *telle que* $\|\cdot\|^{'} \leq C \|\cdot\|$*.*
- ***(théorème du graphe fermé)*** *: Si* X *et* Y *sont deux Banach et* $u : X \to Y$ *est linéaire, alors* $u \in L(X, Y)$ *si et seulement si son graphe est fermé dans* $X \times Y$*.*
- ***(structure des Banach séparables)*** *: tout Banach séparable est isomorphe à quotient de* $\updownarrow^1$ *par un sous-espace fermé.*

6.5 Algèbres de Banach, Rayon Spectral, Inverse

Définition 6.5.1. *Si* X *est un Banach, on définit l'espace vectoriel* $L(X)$ *normé par* $|||u||| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$*. Le produit naturel* $uv = u \circ v$ *en fait une algèbre de Banach :* $|||uv||| \leq |||u||| \, |||v|||$*. Le rayon spectral de* $u \in L(X)$ *est* $\rho(u) = \lim_{n\to\infty} |||u^n|||^{1/n} \leq |||u|||$*.*

Remarque 6.5.0.1.

- *Lemme de Fekete : Si* a_n *est sous-additive,* $\lim_n \frac{1}{n} a_n = \inf_n \frac{1}{n} a_n$*. La formule de* ρ *fait sens en prenant* $a_n = \log |||u^n|||$*.*

- *Le rayon spectral est inchangé avec une norme équivalente.*
- *On généralise les algèbres de matrices à la dimension infinie.*
- *En dimension finie, $L(X)$ est isomorphe à $\mathcal{M}_n$ et le rayon spectral est égal au maximum des modules des valeurs propres par décomposition de Jordan.*
- *Lorsque X est de dimension infinie, il n'y a pas vraiment d'analogue à la décomposition de Jordan. L'équation aux valeurs propres n'est pas une bonne manière de définir le spectre des opérateurs et on définit plutôt :*

  $$spec(u) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid u - \lambda \mathrm{Id} \text{ n'est pas inversible à inverse continu}\}$$

  Alors, $\rho(u) = \sup\{|\lambda \mid \lambda \in spec(u)|\}$.

Théorème 6.5.1. *Soit X un Banach, et $u \in L(X)$.*

1. *Si $\rho(u) < 1$, alors $\mathrm{Id} - u$ est inversible dans $L(X)$ et*

   $$(\mathrm{Id} - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$$

2. *Si u est inversible et $|||v||| \leq \left|\left|\left|u^{-1}\right|\right|\right|^{-1}$ alors $u - v$ est inversible dans $L(X)$ et :*

   $$(u - v)^{-1} = \left(\mathrm{Id} - u^{-1}v\right)^{-1} u^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(u^{-1}v\right)^n u^{-1}$$

3. *L'ensemble des $u \in L(X)$ inversibles (groupe linéaire) est un ouvert de $L(X)$.*

6.6 Intégrale de Riemann pour les fonctions de la variable réelle à valeurs dans un Banach

Théorème 6.6.1. *Soit X un Banach, $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On note $\mathcal{A}([a, b], X) \subset \mathcal{C}([a, b], X)$ l'ensemble des fonctions affines par morceaux. C'est un sev de $\mathcal{C}([a, b], X)$ Il existe une unique application liénaire continue $I : \mathcal{C}([a, b]) \to X$ telle que pour tout fonction $f \in \mathcal{A}([a, b], X)$ affine par morceaux associée à une subdivision $a = a_0 < \ldots < a_n = b$ et à des valeurs $f_0, \ldots, f_n \in X$:*

$$I(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \frac{f_i + f_{i+1}}{2}$$

On note : $\int\limits_a^b = I(f)$. De plus pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b], X)$:

$$\left\| \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\, \mathrm{d}t$$

7 Espaces de Hilbert

7.1 Projection Orthogonale sur un Convexe Fermé

Théorème 7.1.1. *Si X est un Hilbert, $C \subseteq X$ un convexe fermé, pour tout $x \in X$, il existe un unique $p_C(x) \in C$ tel que :*

$$\|x - p_C(x)\| = d(x, C)$$

Corollaire 7.1.1.1. *Si X est un Hilbert et F est un sev de X fermé alors :*

1. *p_F est linéaire*

2. $p_F(x)$ *est caractérisé par* $x - p_F(x) \perp F$

3. p_F *est* 1*-Lipschitz donc continue*

4. *Si* $dim F = n < \infty$, $p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$

5. $X = F \bigoplus F^{\perp}$ *et* $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.

7.2 Théorème de Représentation de Riesz

Théorème 7.2.1 (de Représentation de Riesz des fomes linéaires continues)**.** *Si X est un Hilbert sur $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$:*

1. *Pour tout* $u \in X^{'} = L(X, \mathbb{K})$, *il existe un unique* $a \in X$ *tel que* $u(x) = \langle x, a \rangle$.

2. *L'application* $a \in X \mapsto \langle \cdot, a \rangle \in X^{'}$ *est un isomorphisme anti-linéaire et une isométrie.*

Remarque 7.2.1.1. • *Les formes linéaires continues sur* $X = \updownarrow^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ *sont de la forme :*

$$x \in \updownarrow^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \mapsto \sum_{n} x_n \overline{y_n} \text{ pour un } y \in \updownarrow^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$$

- *Le dual topologique* $X^{'}$ *d'un Hilbert est un Hilbert : si* $u, v \in X^{'}$ *alors* $\langle u, v \rangle_{X'} = \langle a_v, a_u \rangle$
- *Théorème de Hahn-Banach sur un Hilbert : Si F est un sev d'un Hilbert X et* $u \in L(F, \mathbb{K})$, *alors il existe* $u_X \in X^{'} = L(X, \mathbb{K})$ *tel que* $u_{X|_F} = u$ *et* $\|u_X\| = \|u\|$.
- *Si F est un sev d'un Hilbert non dense, alors pour tout* $x \notin \overline{F}$ *il existe* $u \in X^{'}$ *nulle sur F valant* 1 *en x.*
- *Un sev F d'un Hilbert est dense si et seulement si* $F^{\perp} = \{0\}$.
- *Pour toute application linéaire continue* $u \in L(X, X)$ *sur X un Hilbert, il existe un unique* $u^{\star} \in L(X, X)$ *appelé adjoint de u tel que, pour tous x, y :*

$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^{\star}(y) \rangle$$

7.3 Bases Hilbertiennes et Parseval

Définition 7.3.1. *Une base hilbertienne d'un Hilbert X est une suite e_n finie ou pas d'éléments de X vérifiant :*

- *Orthonormalité : pour tous* m, n, $\langle e_m, e_n \rangle = \mathbf{1}_{n=m}$
- *L'espace vectoriel engendré par* (e_n) *est dense dans X.*

Théorème 7.3.1 (Séparabilité et Identité de Parseval)**.** 1. *Un Hilbert X admet une base hilbertienne ssi il est séparable.*

2. *Tout $\mathbb{K}$ Hilbert séparable de dimension ∞ est isomorphe isométriquement à* $\updownarrow^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$

3. *Si e_n est une base hilbertienne de X :*
   - *Pour tout* $x \in X$, $x = \sum_n \langle x, e_n \rangle e_n$
   - *Pour tout* $x \in X$: $\|x\|^2 = \sum_n |\langle x, e_n \rangle|^2$
   - $\sum_n \lambda_n e_n$ *converge si et seulement si* $\sum_n \lambda_n^2 < \infty$

8 Dérivation dans les Espaces Vectoriels Normés

Ici, $X, X_1, \ldots, X_n, Y, Z$ sont des evn réels.

8.1 Dérivée, Dérivées Partielles, Gradient

Définition 8.1.1. *Soit $O \subset X$ un ouvert. Une application $f : O \to Y$ est dérivable ou différentiable en $a \in O$ lorsqu'il existe $u \in L(X, Y)$ tel que :*

$$f(x) = f(a) + u(x - a) + o(x - a) \text{ quand } x \to a$$

On note $u = (Df)(a)$ et on dit que $(Df)(a)$ est la dérivée ou différentielle de f en a. On dit que f est $\mathcal{C}^1(O, Y)$ quand f est dérivable en tout point de O et que $Df : O \to L(X, Y)$ est continue

Définition 8.1.2. *La dérivée directionnelle de f en a par rapport à la direction h est définie lorsqu'il existe $(Df)(a, h) \in Y$ tel que :*

$$f(a + th) = f(a) + t(Df)(a, h) + o(t) \text{ quand } t \to 0$$

Etre dérivable dans toutes les directions n'est pas équivalent à être dérivable. On ne demande par ailleurs pas la linéarité ni la continuité en h.

Proposition 8.1.1.

- *Si $\|\cdot\|$ est hilbertienne, alors : $f(x) = \|x\|^2$ est dérivable partout et $(Df)(a)(h) = \langle 2a, h\rangle$.*
- *La norme n'est jamais dérivable en 0.*
- *Si $m \in \mathbb{N}$, $f : x \in L(X, X) \mapsto x^m$ est dérivable partout et*

$$(Df)(a)(h) = \sum_{k=0}^{m-1} a^k h a^{m-1-k}$$

- *On sait que sur un Banach X, $O = \left\{x \in L(X, X) \mid x^{-1} \text{ existe}\right\}$ est un ouvert et que $f : x \in O \to x^{-1} \in L(X, X)$ est bien définie. On a alors :*

$$(Df)(a)(h) = -a^{-1} h a^{-1}$$

Théorème 8.1.1.

- *Linéarité : Si f, g sont dérivables en a alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:*

$$(D(\lambda f + g))(a) = \lambda(Df)(a) + (Dg)(a)$$

- *Composition : Si $f : O \subseteq X \to Y$ et $g : O^{'} \subseteq Y \to Z$ avec f différentiable en a et g différentiable en $f(a)$, $g \circ f$ est différentiable en a et :*

$$(Dg \circ f)(a) = (Dg)(f(a)) \circ Df(a)$$

Proposition 8.1.2.

- *Espace de départ est de dimension 1 : Comme $L(\mathbb{R}, Y)$ est isomorphe isométriquement à Y, $u \in L(\mathbb{R}, Y) \to u(1) \in Y$, si $f : O \subseteq \mathbb{R} \to Y$ est dérivable en a, alors $Df(a)$ est identifiable à $Df(a)(1) = f^{'}(a)$ et $(Df)(a)(h) = (Df)(1)h$*
- *Espace de départ Hilbert et espace d'arrivée de dimension 1. Par théorème de Représentation de Riesz, pour tout $a \in O$, il existe un vecteur de X noté $\nabla f(a)$ appelé gradient de f en a tel que $(Df)(a)(h) = \langle \nabla f(a), h\rangle$.*
- *Si $f : \mathbb{R} \to X$ et $g : X \to \mathbb{R}$ avec X un Hilbert, dérivables en a et $f(a)$ respectivement, on a :*

$$(g \circ f)^{'}(a) = \left\langle (\nabla g)(f(a)), f^{'}(a)\right\rangle$$

Définition 8.1.3. *Soit $O \subseteq X_1 \times \cdots \times X_n$ un ouvert. Pour $a \in O$, $1 \leq i \leq n$, on note :*

$$O^{\hat{a_i}} = \{x_i \mid x \in O, x_j = a_j, j \neq i\}$$

et

$$f^{\hat{a_i}} : x_i \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

f admet des dérivées partielles en a lorsque ces applications sont dérivables et on note :

$$(D_{x_i} f)(a) = (Df^{\hat{a_i}})(a_i)$$

et parfois : $\frac{\partial}{\partial x_i} f$ ou $\partial_{x_i} f$ voire $\partial_i f$

Proposition 8.1.3. *Si f est dérivable en a, les dérivées partielles existent toutes mais la réciproque et fausse, l'existence de dérivées partielles n'impliquant même pas la continuité.*

8.2 Inégalité des Accroissements Finis, Jacobienne

Lemme 8.2.1. *Si O est un ouvert, $[a, b] \subseteq O$ et $f : O \to Y$ est dérivable en tout point de $[a, b]$ alors :*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{x \in [a,b]} \|Df(x)\|_{L(X,Y)} \|b - a\|$$

Proposition 8.2.1. *Si $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, X)$ où $I \subseteq \mathbb{R}$ est ouvert et X un Banach, alors, pour tout $t \in I$:*

$$\varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = \int_\alpha^\beta (D\varphi)(t)\,\mathrm{d}t$$

Corollaire 8.2.1.1. *Si une fonction f sur O possède des dérivées partielles sur O continues en a alors elle est dérivable en a et :*

$$(Df)(a)(h) = \sum_{i=1}^n (D_{x_i} f)(a)(h_i)$$

Définition 8.2.1. *Si $f : O \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $(Df)(a)$ est identifiable à une matrice $n \times m$ appelée jacobienne :*

$$(\mathrm{Jac}\, f)(a) = (\partial_{x_i} f_j(a))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} = (\nabla f_1, \ldots, \nabla f_m)$$

8.3 Dérivées successives, lemme de Schwarz, formule de Taylor, extrema

Définition 8.3.1.

- *$u : X_1 \times \ldots \times X_m \to Y$ est multilinéaire lorsqu'elle est linéaire en chaque X_i*
- *On note $L(X_1, \ldots, X_m; Y)$ l'ensemble des applications multilinéaires continues.*
- *On note $L_m(X, Y)$ les applications multilinéaires continues sur X^m.*

Remarque 8.3.0.1.

- *u multilinéaire est continue si et seulement si elle est bornée.*
- *$L(X_1, \ldots, X_m; Y)$ est un evn*
- *$L(X, L(X, Y))$ et $L(X, X; Y)$ sont isomorphes.*
- *Un polynôme de degré n : $(h_1, \ldots, h_n) \in X^n \mapsto \sum_{m=0}^n u_m(h_1, \ldots, h_m) \in Y$*

Définition 8.3.2.

- *Pour $m \geq 1$, une fonction $f : O \subseteq X \to Y$ est dérivable m fois en $a \in O$ lorsque $f \in \mathcal{C}^{m-1}(O', Y)$ avec $a \in O' \subseteq O$ et $D^{m-1}(f) : O' \to L_{m-1}(X, Y)$ est dérivable en a.*
- *On dit que f est un $\mathcal{C}^m$-difféomorphisme lorsque c'est un homéomorphisme et f et f^{-1} sont $\mathcal{C}^m$.*

Proposition 8.3.1.

- *Pour $f(u) = u^m$,*

$$(D^2)f(a)(h_1, h_2) = \sum_{l_i \in \{a, h_1, h_2\} | |i| l_i = h_1| = |i| l_i = h_2| = 1} l_1 \ldots l_m$$

- *Pour $f(u) = u^{-1}$:*

$$(D^2 f)(a)(h_1, h_2) = a^{-1} h_1 a^{-1} h_2 a^{-1} + a^{-1} h_2 a^{-1} h_1 a^{-1}$$

Lemme 8.3.1. *Soit $0, 0 \in O \subseteq X = \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^1(O, Y)$, en particulier, $\partial_{x_1} f$ et ∂_{x_2} existent sur O. Si $\partial_{x_1} f$ admet une dérivée partielle par rapport à x_2 dans un voisinage de $0, 0$ et de même pour $\partial_{x_2} f$:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial_{x_1} \partial_{x_2}}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial_{x_2} \partial x_1}(0, 0)$$

Définition 8.3.3. *On note $L_m^{sym}(X,Y)$ le sev de $L_m(X,Y)$ formé des applications multilinéaires continues symétriques.*

Théorème 8.3.2. *Soit O un ouvert de X, $f \in \mathcal{C}^m(O,Y), m \geq 2$. Alors $D^m f \in \mathcal{C}(O, L_m^{sym}(X,Y))$*

Corollaire 8.3.2.1. *Si $f \in \mathcal{C}^2(O,Y)$, pour tous $a \in O, h, k \in X$ et $1 \leq i,j \leq n$.*

$$(\partial_{x_i}\partial_{x_j} f)(a)(h,k) = (\partial_{x_i}\partial_{x_j} f)(a)(k,h)$$

Remarque 8.3.2.1. *Si $u \in L_2^{sym}(X,Y)$ alors $u(h_1,h_2) = \frac{1}{4}(u(h_1+h_2,h_1+h_2)) - \frac{1}{4}(u(h_1-h_2,h_1-h_2))$*

Définition 8.3.4. *Si f est $\mathcal{C}^2$ et $a \in O$, dans la base canonique, la forme bilinéaire $(D^2 f)(a)$ est identifiable à la matrice symétrique $\left(\partial_{x_i}\partial_{x_j} f(a)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$. On note $Hess(f)(a)$ ou $\nabla^2 f(a)$ cette matrice, qui est égale à $\mathrm{Jac}\, \nabla f(a)$.*

Théorème 8.3.3 (Formule de Taylor)**.** *Si $f \in \mathcal{C}^{m-1}(O \subseteq X, Y), m \geq 1$, si $a \in O$ et $(D^m f)(a)$ existe alors :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \left(D^k f\right)(a)(x-a,\dots,x-a) + r_a(x) \text{ où } r_a(x) = o_{x \to a}\left(\|x-a\|^m\right)$$

et si $D^m f$ existe sur tout le segment $[a,x]$ alors :

$$\|r_a(x)\| \leq \frac{\|x-a\|^{m+1}}{(m+1)!} \sup_{y \in [a,x]} \left\|\left((D^{m+1} f)(y)\right)\right\|$$

Lemme 8.3.4. *Si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $[0,1] \subset I$, $F : I \to Y$ et $G : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables en tout point de $[0,1]$ et telles que $\left\|F^{'}(t)\right\| \leq G^{'}(t)$ pour tout t, alors $\|F(1) - F(0)\| \leq G(1) - G(0)$.*

Corollaire 8.3.4.1. *Soit $f \in \mathcal{C}^1(O \subset X, \mathbb{R})$, $a \in O$ telle que $\left(D^2 f\right)(a) \in L_2^{sym}(X,\mathbb{R})$ existe.*

- *Si a est un extremum local de f alors : $(Df)(a) = 0$ et :*
  - *Quand a est un minimum : $\forall h \in X, \left(D^2 f\right)(a)(h,h) \geq 0$*
  - *Quand a est un maximum : $\forall h \in X, \left(D^2 f\right)(a)(h,h) \leq 0$*
- *Si $(Df)(a) = 0$ et s'il existe c telle que :*
  - *$(D^2 f)(a)(h,h) \geq c\|h\|^2$ alors a est un minimum local de f*
  - *$(D^2 f)(a)(h,h) \leq -c\|h\|^2$ alors a est un maximum local de f.*

Lorsque $X = \mathbb{R}^n$ ces conditions portent sur le gradient et la hessienne.

8.4 Théorème d'inversion Locale et Théorème des Fonctions Implicites

Lemme 8.4.1 (de point fixe de Picard)**.** *Si X, d est métrique complet non vide et si $f : X \to X$ est une contraction, elle admet un unique point fixe.*

Lemme 8.4.2. *Soit X un Banach, O un ouvert de X, $g : O \subseteq X \to X$ c-contractante. Alors $f : x \mapsto x + g(x)$ est un homéomorphisme entre O et $f(O)$ et $\left\|f^{-1}\right\|_{Lip} \leq (1-c)^{-1}$.*

Théorème 8.4.3 (Inversion Locale)**.** *Soient X et Y des Banach, $O \subseteq X$ et $a \in O$. Soit $f \in \mathcal{C}^m(O,Y)$, $m \geq 1$.*
Si $(Df)(a)$ est une bijection à inverse borné $[(Df)(a)]^{-1} \in L(Y,X)$ alors il existe $O^{'} \subseteq X$ tel que $a \in O^{'} \subseteq O$ et $f : O^{'} \to f(O^{'})$ est un $\mathcal{C}^m$-difféomorphisme et pour tout $x \in O^{'}$:

$$\left(Df^{-1}\right)(f(x)) = [(Df)(x)]^{-1}$$

9 EDO

Introduction

Définition 9.0.1. *On considère X un Banach, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $O \subseteq X$ un ouvert, $f : I \times O \to X$ continue. Pour un certain (t_0, x_0) dans $I \times O$, on considère le problème de Cauchy :*

$$x^{'}(t) = f(t, x(t)) \text{ et } x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

Définition 9.0.2.

- *Pour tout $t \in I$, $x \in O \mapsto f(t,x) \in X$ est un champ de vecteurs.*
- *Lorsque f ne dépend pas du temps t, on parle d'EDO autonome. On prend alors $I = \mathbb{R}$.*
- *Il est toujours possible de transformer (EDO) en une EDO autonome en rajoutant le temps à l'espace.*
- *Toute EDO d'ordre plus élevé $x_t^k = f(t, x(t), \ldots, x^{(k-1)}(t))$ peut se réécrire en $X^{'}(t) = F(t, X(t))$ où $X(t) = \left(x(t), \ldots, x^{(k-1)}(t)\right) \in X^k$ et $F(t, a_0, \ldots, a_{k-1}) = (a_1, \ldots, a_{k-1}, f(t, a_0, \ldots, a_{k-1}))$.*

Définition 9.0.3. *Une solution locale de (EDO) est une fonction $x \in \mathcal{C}^1(J, X)$ où J est un intervalle ouvert tel que : $t_0 \in J \subseteq I, x(J) \subseteq O$ et (EDO) a lieu pour tout $t \in J$.*

Lemme 9.0.1. *Une fonction x est solution locale sur J de (EDO) si et seulement si $x \in \mathcal{C}^0(J, X), x(J) \subseteq O$ et si $t \in J$:*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s \tag{2}$$

En particulier, cette équation EDOI implique que $x \in \mathcal{C}^1(J, X)$

Définition 9.0.4.

- *Existence Locale : $\exists J \subseteq I$ ouvert, $t_0 \in J$ et x une solution de EDO.*
- *Unicité Locale : Si J_1, x_1 et J_2, x_2 sont deux solutions de EDO, alors $\exists J_3 \subseteq J_1 \cap J_2$ tel que $t_0 \in J_3$ et sur cet intervalle ouvert : $x_1(t) = x_2(t)$*
- *Solution Maximale : Supposons qu'on a existence et unicité locale en tout point. Dans ce cas, si on a deux solutions locales, elles sont égales sur l'intersection de leurs domaines de définition.*

Remarque 9.0.1.1. *On considère l'EDO autonome $x^{'} = |x|^{\alpha}$ sur $X = \mathbb{R}$ avec $\alpha \neq 0$ fixé.*

1. *Si $\alpha > 0$, $x = 0$ est toujours solution sur tout $\mathbb{R}$.*
2. *Si $\alpha = 1$ alors la solution est $x(t) = x_0 e^{\mathrm{sign}(x_0)(t-t_0)}$.*
3. *Si $\alpha > 1$, la seule solution non identiquement nulle vérifie :*

$$x(t) = |(\alpha - 1)(T - t)|^{-1/(\alpha-1)} \operatorname{sign}(T - t)$$

Il y a existence et unicité locale en tout point, mais $I_{max} = (-\infty, T)$ si $x_0 > 0$ et $I_{max} = (T, +\infty)$ sinon.

9.1 Théorèmes d'Existence

Théorème 9.1.1 (Cauchy-Lipschitz ou Picard-Lindehöf)**.** *Supposons que f dans (EDO) est localement bornée (automatique si f est continue) et localement Lipschitz en x en (t_0, x_0) : Il existe $\tau, \rho, M, L > 0$ tels que $\overline{B}(t_0, \tau) \times \overline{B}(x_0, \rho) \subseteq I \times O$ et :*

- *$\|f(t,x)\| \leq M$ pour tout $(t,x) \in B$*
- *$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L \|x - y\|$*

Alors, $\forall \varepsilon < \min\left(\tau, \frac{\rho}{M}\right)$, en notant $I_\varepsilon = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, on a :

- *Existence et Unicité : Il existe une unique solution x sur I_ε et il y a unicité locale en (t_0, x_0)*
- *Constructibilité par Itération de Picard : $x^{(0)} = x_0$ et $x^{(n+1)} = Ax^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ dans $\mathcal{C}\left(\overline{I}_\varepsilon, X\right)$ où :*

$$(Ax)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s$$

Remarque 9.1.1.1. *L'approximation numérique de la solution de (EDO) peut être menée en discrétisant le temps. Cela revient à se promener par petits sauts dans un champ de vecteurs.*

Théorème 9.1.2 (de Peano)**.** *Si X est localement compact ($X = \mathbb{R}^n$) alors il y a existence locale de solution pour (EDO)*

9.2 Solutions Globales et Lemme de Grönwall

Théorème 9.2.1. *Supposons qu'il y a existence et unicité locale pour EDO en tout point. Soit x une solution maximale de (EDO) et $I_{\max} \subseteq I$ son intervalle de définition.*

- *Si $T_{\max} = \sup I_{\max} < \sup I$ alors x explose (sort de tout compact) au bord droit de $I_{\max}$: Pour tout compact $K \subseteq O$, il existe $T_K < T_{\max}$ tel que $x(t) \notin K$ pour $t > T_K$.*
- *De même à gauche en considérent les* $\min$ *et* $\inf$.

Les hypothèses de ce théorème sont toujours vérifiées lorsque celles du théorème de Cauchy-Lipschitz le sont.

Lemme 9.2.2 (de Grönwall)**.** *Si $u \in \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R})$ et pour $a \geq 0, c \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in [0,T]$ on a :*

$$u(t) \leq c + a\int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s$$

alors $u(t) \leq ce^{at}$ pour tout $t \in [0,T]$.
Plus généralement, si v est continue sur $[0,T]$ et si pour des constantes $a > 0, b, c \in \mathbb{R}$ on a :

$$v(t) \leq c + \int_0^t (av(s) + b)\,\mathrm{d}s \Rightarrow v(t) + \frac{b}{a} \leq \left(c + \frac{b}{a}\right)e^{at} \text{ pour tout } t \in [0,T]$$

Théorème 9.2.3. *Si $\sup_{t\in J} L_t < \infty$ pour tout intervalle borné $J \subseteq I$ où :*

$$L_t = \sup_{x,y\in X} \frac{\|f(t,x) - f(t,y)\|}{\|x - y\|}$$

alors :

- *Il y a existence et unicité locales pour EDO en tout point*
- *Toute solution maximale de EDO est globale.*