Théorie des Jeux et Théorie des Langages

Matthieu Boyer

18 Janvier 2024

Plan

Introduction

Un jeu à plusieurs joueurs est, de manière informelle, une abstraction d'un jeu ressemblant par exemple au Tarot : chaque joueur, à son tour, va choisir, parmi un éventail de coups possibles, celui qu'il souhaite effectuer, modifiant alors l'état du jeu.

Introduction

On limite en quelque sorte les transitions possibles de l'état de jeu selon l'état et selon les règles du jeu. Le manque d'informations d'un joueur sur les mains de ses adversaires limite aussi la description directe du jeu avec du non-déterminisme.
On s'intéresse donc ici à des manières de décrire les jeux par les automates et les grammaires formelles.

Plan

Notion de Jeu

Définition 2.1: Première définition de Jeu suivant [1]

Un jeu est un triplet $(P, A_i, \succeq_i)$ où P est un ensemble de joueurs, A_i est un ensemble d'actions pour le joueur $i \in P$ et $\succeq_i$ est une relation de préférence pour le joueur i.

Notion de Jeu

Définition 2.2: Première définition de Jeu suivant [1]

Un jeu est un triplet $(P, A_i, \succeq_i)$ où P est un ensemble de joueurs, A_i est un ensemble d'actions pour le joueur $i \in P$ et $\succeq_i$ est une relation de préférence pour le joueur i.

Pour le Dilemme du Prisonnier : $P = \{1, 2\}$, et $\forall i, A_i = \{A, N\}$

Représentation Extensive

Définition 2.3: Description Extensive

La description extensive d'un jeu est son arbre de possibilités.

Représentation Extensive

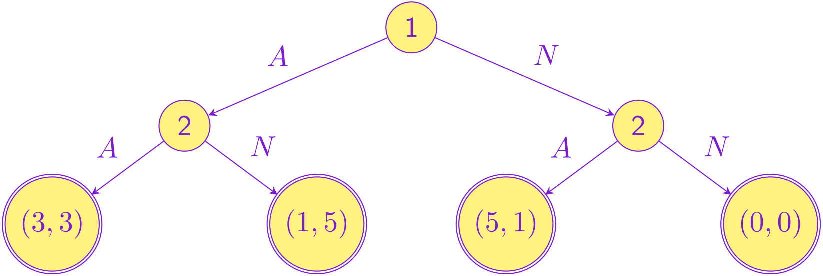

Figure – Représentation Extensive du Jeu du Dilemme du Prisonnier à information totale.

Information Imparfaite

Définition 2.4: Information d'un Jeu

On parle de jeu à information imparfaite, lorsque le joueur actuel n'a pas d'informations sur les coups des joueurs précédents. On rajoute l'information possédée par un joueur sur l'arbre de jeu.

Information Imparfaite

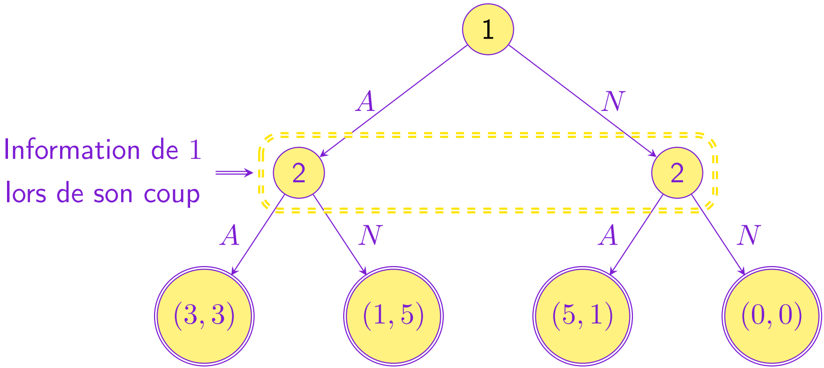

Figure – Représentation Extensive du Jeu du Dilemme du Prisonnier à information imparfaite.

Partie sur un Jeu

Définition 2.5: Partie sur un Jeu

Une partie sur un jeu est une suite d'états de ce jeu, ou, de manière équivalente, une suite de coups $s_0 s_1 \ldots s_k$ tels que :

- $\forall i, s_{2i} \in A_0$ et $s_{2i+1} \in A_1$.
- $\nexists s_{k+1} \in A_i$ où $i = 1$ si $k \equiv 0 \mod 2$ et $i = 0$ sinon.

Plan

Jeu d'un Automate

Définition 2.6: Jeu d'un Automate

Si $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ est un automate, on se donne G_A un jeu sous représentation extensive à deux joueurs Tatiana et Pierre. Dans ce jeu, Tatiana joue des états de Q et Pierre joue des lettres de Σ.

Jeu d'un Automate

Définition 2.7: Règles du Jeu

Les règles du jeu pour chaque joueur sont les suivantes : si Tatiana joue $q \in \Sigma$ alors Pierre doit jouer s tel que $\delta(q, s) \neq \varnothing$ sinon il perd.

Jeu d'un Automate

- Si A est déterministe, G_A est équivalent à un jeu à information parfaite.
- A l'inverse, si A n'est pas déterministe, on définit des ensembles d'informations récursivement.

Un Exemple Déterministe

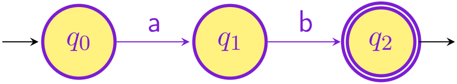

Figure – Un Automate Déterministe

Un Exemple Déterministe

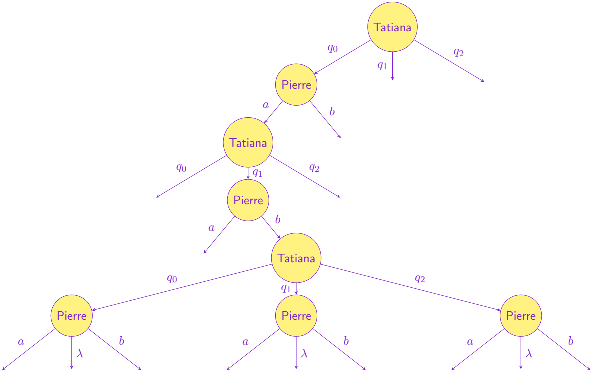

Figure – Représentation Extensive du Jeu à Information Parfaite de l'automate figure 3

Plan

Stratégies

La stratégie d'un joueur assigne une action choisie par le joueur pour chaque historique des coups dans lequel c'est à son tour de jouer.
L'historique d'un joueur est l'ensemble des actions qu'il peut choisir de faire durant la partie.

Stratégies

Définition 3.1: Stratégie

Une stratégie pour Pierre définie par $w \in \Sigma^\star$ est telle que Pierre joue les lettres de w indépendamment de ce que Tatiana joue.

Stratégies

Définition 3.2: Stratégie Gagnante

Une stratégie w est gagnante pour Pierre si Tatiana n'a pas de coup valide et où son dernier coup est un état final de A. On pose :

- $S\left(G_A\right)^n$ l'ensemble des stratégies gagnantes de longueur n pour Pierre
- $L(A)^n$ l'ensemble des mots de longueur n reconnus par A

Théorème de Reconnaissance

Théorème 3.3: Reconnaissance des Stratégies

$S(G_A)^n = L(A)^n$

Plan

Introduction

Jeux et Automates

Théorèmes de Reconnaissance

- Stratégies Gagnantes et Langages
- Non-Déterminisme

Jeux et Grammaires

Non-Déterminisme ?

Définition 3.4: Jeu d'un NFA

Etant donné un automate non-déterministe A, on définit :

- P un ensemble de deux joueurs où Tatiana joue des états et Pierre des lettres.
- Un ensemble I d'ensembles d'informations B, où on définit $\delta\left(q, s\right) = B$ lorsqu'il y a du non-déterminisme dans la transition.
- Des relations de préférence $\succeq_i$ entre deux transitions δ_1, δ_2 où $\delta_1 \succeq \delta_2$ si et seulement si $d\left(\delta_1\right) \leq d(\delta_2)$.

Non-Déterminisme ?

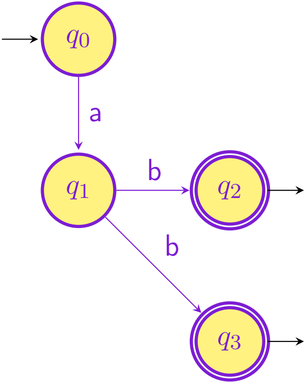

Figure – Un Automate Non-Déterministe

Non-Déterminisme ?

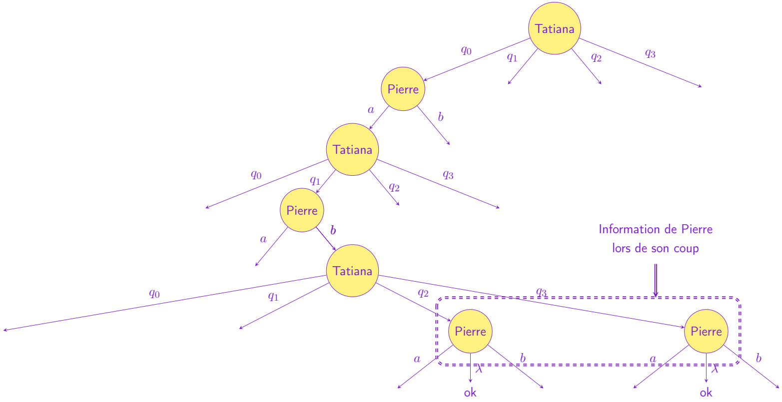

Figure – Représentation Extensive du Jeu à Information Imparfaite de l'Automate Non-Déterministe Précédent

Théorème de Reconnaissance

Théorème 3.5: Information et Reconnaissance

Tout jeu à information imparfaite est équivalent, au sens de la reconnaissance des langages, à un jeu à information totale.

Plan

Définitions

Définition 4.1: Jeu Hors-Contexte

Un Jeu Hors-Contexte est un triplet $G = \langle \Sigma, R, T \rangle$ où Σ est un alphabet fini, $R \subseteq \Sigma \times \Sigma^+$ est un ensemble fini de règles et T est un automate représentant un langage régulier cible.

Définitions

- Une partie du jeu G est jouée par deux joueurs Tatiana et Pierre. Une partie consiste, à chaque étape, à appliquer une des règles de R à un mot donné sur Σ. A chaque étape, Tatiana choisit une position dans le mot et Pierre choisit une règle de R associée.

Définitions

- Un état du jeu C est une paire (w, i) où w est un mot et $i \leq |w|$ est la position courante. Un choix de position de la configuration $(a_1 \dots a_n, i)$ est un entier $j \leq n$, un choix de règle consiste à remplacer a_j par un mot u tel qu'on a $a_j \to u$ dans R. On appelle configuration résultante la configuration $(a_1 \dots a_{j-1} u a_{j+1} \dots a_n, j)$ obtenue.

Définitions

- Une partie sur w commence dans la configuration initiale $C_0 = (w, 1)$ et s'arrête ou bien lorsque le mot résultat est dans $L(T)$ auquel cas Tatiana gagne ou bien lorsque la position choisie par Tatiana est un terminal auquel cas Pierre gagne.

Définitions

Définition 4.2: Stratégie Gagnante

On dit que Tatiana a une stratégie gagnante en (w, i) lorsque quelque soient les coups de Pierre, une configuration de $L(T)$ est atteinte en un nombre fini de coups. On dit que Tatiana gagne (G, w) si Tatiana a une stratégie gagnante dans G sur w.

Reconnaissance de la Victoire

Théorème 4.3: Reconnaissance de la Victoire

Soit M une machine de Turing bornée en espace par $s(n)$. On peut construire un jeu de sorte que pour tout mot $w = a_1 \dots a_n$, on ait :

$$M \text{ accepte } w \Leftrightarrow \text{Tatiana gagne } (G, \$q_0 a_1 \dots a_n \sqcup^{s(n)-n} \#)$$

Equivalence Hors-Contexte

Définition 4.4: Système à Pile Alternant

Un système à pile alternant est un quadruplet $\mathcal{P} = \langle S = S_T \cup S_P, \Gamma, \delta, F\rangle$ i.e. un automate à pile sans entrée avec des états existentiels et universels. On note ici les configurations de cet automate entre crochets $[q, u]$ pour les distinguer des configurations d'un jeu. On dit qu'une configuration est gagnante si Tatiana peut toujours atteindre une configuration finale sur le jeu, quels que soient les choix de Pierre.

Equivalence Hors-Contexte

Théorème 4.5: Equivalence Hors-Contexte

On peut réduire un système à pile à un jeu hors-contexte et réciproquement en temps polynômial.

Plan

Prérequis

Définition 4.6: Langage de Description

- On note P l'ensemble des joueurs.
- On appelle *emplacement de carte* une position notée LA dans le jeu où un nombre de cartes peut être posé.
  - P mains H, une par joueur, notées HI, et on notera HX la main du joueur courant, et HA les mains de tous les joueurs.
  - Un jeu ordonné de cartes $D = \{X_Y \mid (X, Y) \in [\![1, 13]\!] \times [\![1, 4]\!]\}$.
  - Un certain nombre d'emplacements TK sur la table.

Prérequis

Définition 4.7: Langage de Description

- On définit de même des emplacements notés KA de jetons pour les jeux à mise. Chaque joueur I en possède deux notés $KI0$ et $KI1$.
- On décompose le jeu en plusieurs phases, qui se déroulent, par joueur, en rebouclant (après la dernière phase, on reprend la première). À chaque phase, durant son tour, un joueur peut jouer un nombre variable de règles.

Prérequis

Définition 4.8: Langage de Description

- Son tour s'arrête lorsque :
  1. Il a `fini`, il revient alors en jeu à la prochaine phase.
  2. Il passe à la `suite`, il revient alors en jeu, dans la même phase, une fois que les tours des autres joueurs sont finis.
  3. Il est `sorti` du jeu, il a perdu la partie et ne peut plus jouer.
  4. Il a `gagné` la partie, auquel cas la partie s'arrête.

Tant qu'il reste des joueurs à la `suite`, on reboucle.

Prérequis

Définition 4.9: Langage de Description

- Un jeu s'arrête lorsque toutes les phases ont été jouées ou que tous les joueurs sont `sortis`.

Deux Exemples de Description

Table – Règles de la Grammaire du Uno

`montrer`, `même couleur`, $T0$, `jouer`
`montrer`, `même valeur`, $T0$, `jouer`
`piocher`, `suite`
`oblig_a`, λ, `gagne`

Deux Exemples de Description

Table – Règles de la Grammaire du Texas Hold'Em Poker

Phase	Règle	Phase	Règle

Phase 1
(Premier pari)
	`oblig_nocond_parier`, λ, λ
	`nodonc_parier`, $=$, $KA1$
	`uniq_nocond`, `next`
	`uniq_nocond_fini`
		Phase 2
		(Vérifier paris)
			`oblig_jetons`, $KX1$, $<$, $KA1$
			`sorti`

Phrase 3
(Flop)
	`piocher`, $D \times 1$
	`poser`, $D \times 3$, $T0$
		Phase 4
		(Deuxième pari)
			`nocond_parier`, $\geq$, $KA1$
			`uniq_nocond_suite`
			`uniq_nocond_fini`

Phase 5 (Vérifier paris)	`oblig_jetons`, $KX1$, $<$, K `sorti`	Phase 6 (Turn)	`piocher`, $D \times 1$ `poser`, $D \times 1$, $T0$

Phase 7
(Troisième pari)
	`nodonc_parier`, $\geq$, $KA1$
	`uniq_nocond_suite`
	`uniq_nocond_fini`
		Phase 8
		(Vérifier paris)
			`oblig_jetons`, $KX1$, $<$, $KA1$
			`sorti`

Phase 9
(River)
	`piocher`, $D \times 1$
	`poser`, $D \times 1$, $T0$
		Phase 10
		(Dernier Pari)
			`nodonc_parier`, $\geq$, $KA1$
			`uniq_nocond_suite`
			`uniq_nocond_fini`

Phase 11 (Vérifier paris)	`oblig_jeton`, $KX1$, $<$, $KA1$ `sorti`	Phase 12 (Showdown)	`oblig_jouer`, $HX + T0$, $>$ $HA + T0$_gain, $KA1$

Bibliographie

- A-Games : using game-like representation for representing finite automatas *Cleyton Slaviero, Edward Hermann Haeusler*
- A Card Game Description Language, *Jose M. Font, Tobias Mahlmann, Daniel Manrique, and Julian Togelius*
- Active Context-Free Games, *Anca Muscholl, Thomas Schwentick, and Luc Segoufin*
- Computing Game Design with Automata Theory, *Noman Sohaib Qureshi et al*
- Summary for Context Free Games, *Lukáš Holík, Roland Meyer and Sebastian Muskalla*
- Permutational Grammar for free word order languages, *Mats Eeg-Olofsson and Bengt Sigurd*
- Timed Automata for Video Games and Interaction, *Jaime Arias, Raphael Marczak, Myriam Desainte-Catherine*