Exercices pour devenir familier avec les groupes

En TD, la sélection d'exercices vise à vous faire comprendre des méthodes ou des idées classiques gravitant autour des cours de la semaine. Ce document vise à fournir une petite liste d'exercices pour se familiariser d'abord avec le cours. Il s'agira d'énoncés dont les preuves nécessitent uniquement de connaître les définitions ou faire quelques calculs basiques, ce qui est toujours important pour s'habituer à de nouveaux objets. Le document est découpé suivant les TDs et propose trois ou quatre exercices par semaine de cours. Comme d'habitude, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à nataniel.marquis@dma.ens.fr ou à venir me poser les questions directement au bureau T13.

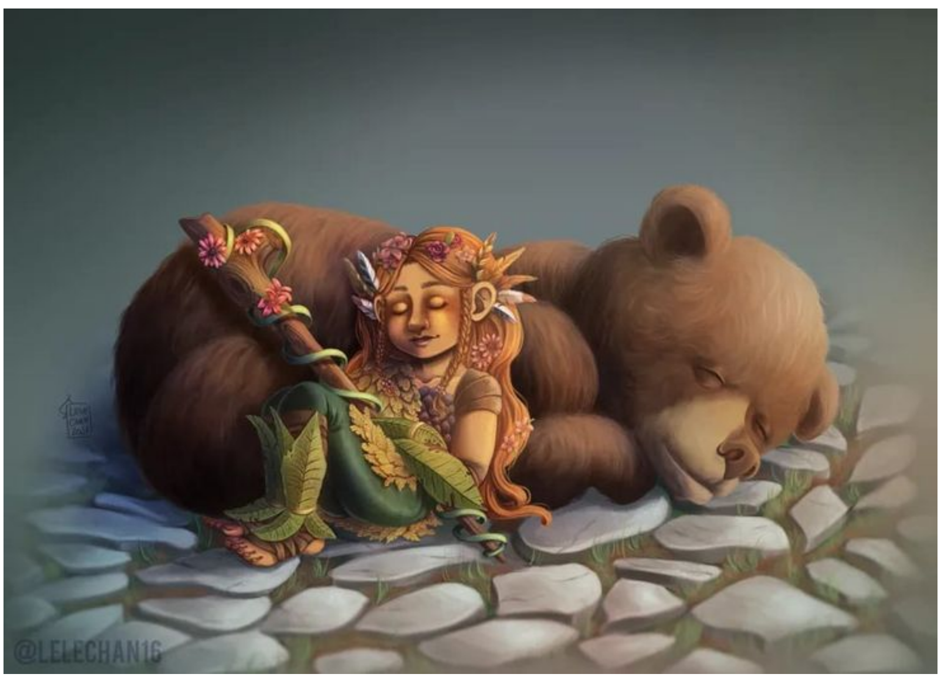

FIGURE 1 – Devenez aussi familier·ère avec les groupes que la druide avec cet ourson !

TD n°1 : Relations

Exercice 1.

Démontrer que les relations suivantes sont d'équivalence :

1. Soit $N \geq 1$ un entier. Considérer la relation de congruence sur $\mathbb{Z}$ définie par
$$a \equiv b \text{ ssi } n|(a-b).$$
2. Pour un ensemble E, considérer la relation sur ses parties $\mathcal{P}(E)$ définie par
$$A\mathcal{R}B \text{ ssi } (A = B) \,\text{ou}\, (A = \overline{B}).$$
3. Soit X un ensemble et $f : X \to X$ une bijection. Considérer la relation d'orbite définie par
$$x\mathcal{O}y \text{ ssi } \exists i \in \mathbb{Z},\; f^{\circ\, i}(x) = y.$$

Exercice 2.

Soit $N \geq 1$ un entier. Nous considérons de nouveau la relation de congruence $\equiv$ définie sur $\mathbb{Z}$ comme au premier exercice.

1. Décrire les classes d'équivalences.
2. On appelle $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ l'ensemble quotient. Écrire explicitement la projection canonique
$$\pi_{\equiv} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}.$$
3. Soit ζ une racine n-ième de l'unité dans $\mathbb{C}$. Considérons l'application
$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^{\times},\;\; n \mapsto \zeta^n.$$
Démontrer qu'elle se factorise par la projection canonique $\pi_{\equiv}$, au sens où il existe une unique application $g : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^{\times}$ telle que $f = g \circ \pi_{\equiv}$.

Exercice 3.

Nous allons étudier la relation de contraction d'une partie.

1. Soit X un ensemble et $Z \subset X$. On définit la relation de contraction par
$$x\mathcal{R}_Z y \;\text{ ssi }\; \big((x,y) \in Z^2 \text{ ou } x = y\big)\,.$$
Vérifier qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.
2. Considérons le segment $[0,1]$ et sa partie $\{0,1\}$. Considérons l'application
$$f : [0,1] \to \mathbb{C}^{\times},\;\; x \mapsto e^{2i\pi x}.$$
Vérifier qu'elle se factorise par la projection canonique associée à $\mathcal{R}_{\{0,1\}}$ puis que la factorisation obtenue est une bijection de $[0,1]/\mathcal{R}_{\{0,1\}}$ sur le cercle unité de $\mathbb{C}$.
3. Faire un dessin joli et concis.

Exercice 4.

1. Soit X un ensemble, I un ensemble totalement ordonné et $(\mathcal{R}_i)_{i\in I}$ une famille relation d'équivalences sur X, croissante au sens où $\mathcal{R}_i \subseteq \mathcal{R}_j$ dès que $i \leq j$. Vérifier que $\cup_{i\in I}\mathcal{R}_i$ est une relation d'équivalence.
2. Soit X un ensemble et $\mathfrak{E}$ un sous-ensemble de X^2 n'intersectant pas la diagonale $\{(x,x) \,|\, x \in X\}$. Démontrer qu'il existe une relation d'équivalence maximale disjointe de $\mathfrak{E}$. On pourra considérer l'ensemble
$$\{\mathcal{R} \subset X^2 \,|\, \text{relation d'équivalence telle que } \mathcal{R} \cap \mathfrak{E} = \emptyset\}$$
muni de l'inclusion et vérifier qu'il est inductif.

TD n°2 : Groupes et groupes cycliques

Exercice 1.

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes [1].

1. Démontrer que $f(1_G) = 1_{G'}$ et que pour tout $x \in G$, nous avons $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.
2. Soit H un sous-groupe de G. Démontrer que $f(H)$ est un sous-groupe de G'.

Exercice 2.

Dans chacun des cas suivants, vérifier que H est un sous-groupe de G, puis que l'application explicite est un isomorphisme de groupes.

1. Soit $n \geq 1$. On considère $G = \mathfrak{S}_n$ et $H = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \,|\, \sigma(n) = n\}$. L'application sera
$$\mathfrak{S}_{n-1} \to H, \;\; \tau \mapsto [k \mapsto \tau(k) \text{ si } k < n \text{ et } n \mapsto n].$$
2. Soit $n \geq 1$ et $k \leq n$ On considère $G = \mathfrak{S}_n$ et
$$H = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \,|\, \forall i \leq k, \;\; \sigma(i) \leq k\}.$$
L'application sera
$$\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k} \to H, \;\; (\sigma_1, \sigma_2) \mapsto \left[i \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} \sigma_1(i) & \text{si } i \leq k \\ k + \sigma_2(i-k) & \text{si } i > k \end{array} \right. \right].$$

1. À ce stade défini par $\forall (x,y) \in G^2, \;\; f(xy) = f(x)f(y)$.

Exercice 3.

Soit $n \geq 1$ et $\zeta \in \mathbb{C}^\times$ une racine primitive n-ième de l'unité (i.e. un élément d'ordre n du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^\times$).

1. Vérifier que le groupe des racines n-ièmes de l'unité $\mu_n = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid z^n = 1\}$ est un sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^\times$. Démontrer en considérant le polynôme $X^n - 1$ qu'il possède au plus n éléments.
2. On rappelle par définition de l'ordre d'un élément que
$$\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^\times, \;\; k \mapsto \zeta^k$$
est un morphisme de groupe de noyau $n\mathbb{Z}$. En déduire un isomorphisme de groupe
$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mu_n.$$
3. Retrouver que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède des éléments d'ordre d pour tout diviseur d de n.

Exercice 4.

1. Soit $f : G_1 \hookrightarrow G_2$ un morphisme de groupes injectif et $g_1 \in G_1$. Démontrer que l'ordre de $f(g_1)$ coïncide avec celui de g_1.
2. Soit G un groupe et $g \in G$ un élément d'ordre fini n. Vérifier que l'application
$$\mathbb{Z} \to G, \;\; k \mapsto g^k$$
est un morphisme de groupe de noyau $n\mathbb{Z}$. En déduire qu'elle se factorise en un morphisme de groupes injectif de $\mathbb{Z}/nZ$ dans G.
3. En utilisant l'exercice 3, déduire que G contient un élément d'ordre d pour tout diviseur d de n.