Intégration et Probabiliéts

Null

3 novembre 2023

Table des matières

1 Espaces Mesurés

1.1 Ensembles Mesurables

1.2 Mesures Positives

1.3 Fonctions Mesurables

Théorème 1.3.1. *La composition de deux applications mesurables est mesurable.*

Remarque 1.3.1.1 (Composition Mesurable)**.** *Il faut bien que les applications f et g partagent un espace, avec la* même *tribu (comme la chanson). On définit fréquemment deux tribus différentes sur $\mathbb{R}^d$: la tribu borélienne et la tribu de Lebesgue, tribu complétée de la tribu borélienne pour la mesure de Lebesgue $\mathcal{M}(\lambda) = \left\{A \subset \mathbb{R}^d, \exists B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), B_1 \subset A \subset B_2 \text{ et } \lambda(B_2 \setminus B_1) = 0\right\}$ et on a : $B(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{M}(\lambda)$. Dans certains livres : f est mesurable si $f : (\mathbb{R}, \mathcal{M}(\lambda)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable.*

Proposition 1.3.1. *Pour que f soit mesurable, il suffit qu'il existe une sous-classe engendrant $\mathcal{B}$ pour laquelle la propriété est vraie.*

Corollaire 1.3.1.1. *Si $f : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}^{d_2}$ est continue, elle est mesurable pour les boréliens.*

Corollaire 1.3.1.2. *Une application produit est mesurable.*

Démonstration. On a : $A_1 \bigotimes A_2 = \sigma\left(A_1 \times A_2\right)$ ■

Lemme 1.3.2. *Les applications $(+)(\times)(\max)(\min)$ de deux fonctions réelles sont mesurables*

Corollaire 1.3.2.1. *Les parties positives et négatives d'une fonction sont mesurables*

Proposition 1.3.2. *Si les f_n sont mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors : $\sup_n f_n, \inf_n f_n, \liminf f_n, \limsup f_n$ sont mesurables. En particulier : $\lim_n f_n$ est mesurable si la suite CS.*

Démonstration. 1. Si $f(x) = \inf f_n(x)$: $f^{-1}[-\infty, a[= \bigcup_n \{x \mid f_n(x) < a\}$. De même pour sup. On en déduit immédiatement $\liminf f_n = \sup_{n\geq 0} \inf_{k\geq n} f_k$.

2. On a : $\{x \in E \mid \lim f_n(x) \text{ existe}\} = \{x \in E \mid \liminf f_n(x) = \limsup f_n(x)\} = \mathcal{G}^{-1}(\Delta)$ où $\mathcal{G} = (\liminf f_n, \limsup f_n)$ et Δ est la diagonale de $\overline{\mathbb{R}}^2$.

■

Définition 1.3.1 (Mesure-Image)**.** *On appelle mesure image de μ par f, notée $f_\#\mu$ la mesure $f_\#\mu(B) = \mu(f^{-1}(B))$*

1.4 Classe Monotone

Définition 1.4.1 (Classe Monotone)**.** *$\mathcal{M} \in \mathcal{P}(E)$ est une classe monotone si :*

1. *$E \in \mathcal{M}$*
2. *Si $A, B \in \mathcal{M}$ avec $A \subset B$, $B \setminus A \in \mathcal{M}$*
3. *Si $(A_n) \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$ croissante, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$*

Remarque 1.4.0.1. *Toute tribu est une classe monotone*

Lemme 1.4.1. *Si $\mathcal{M}$ est une classe monotone stable par intersections finies, c'est une tribu.*

Définition 1.4.2. *Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$: $\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \bigcap\limits_{\mathcal{M} \text{classe monotone, } \mathcal{C}\subset\mathcal{M}}$*

Théorème 1.4.2 (Lemme de Classe Monotone)**.** *Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ est stable par intersections finies : $\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \sigma\mathcal{C}$*

Remarque 1.4.2.1. *Les classes monotones sont des outils plus maniables que les tribus et se marient mieux avec les propriétés des mesures. Le théorème fait le lien entre tribus et classes monotones, ce qui facilite la vie avec les mesures.*

Démonstration. Point Méthodologique : ne pas essayer d'exprimer des éléments de $\mathcal{C}$. T'façon les preuves constructives, c'est pour les salopes. ■

Remarque 1.4.2.2. *On peut en déduire l'unicité de la mesure de Lebesgue. C'est une conséquence du théorème suivant.*

Théorème 1.4.3. *Soit $\mathcal{C}$ stable par intersections telle que $\sigma\mathcal{C} = \mathcal{A}$. On suppose $\mu_1(A) = \mu_2(A), \forall A \in \mathcal{C}$ Alors :*

1. *μp.p., l'application $u \mapsto f(u, x)$ est continue en u_0*
2. *Si $\mu_1(E) = \mu_2(E) < +\infty$ alors $\mu_1 = \mu_2$*
3. *S'il existe $(E_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ croissante d'union E et de mesures égales et finies par μ_1 et μ_2 alors $\mu_1 = \mu_2$*

Démonstration. 1. Cas fini : $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{A} \mid \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$ est une classe monotone. Donc $\mathcal{M} = \mathcal{A}$ par Lemme de Classe Monotone

2. Cas Infini : On applique le cas fini à E_n en prenant la restriction. Par continuité croissante, on obtient bien le résultat.

■

2 Intégration par rapport à une mesure

2.1 Intégration Positive

Définition 2.1.1. *f mesurable à valeurs réelles est étagée si elle prend un nombre fini de valeurs.*

Remarque 2.1.0.1. 1. *Les Fonctions en escalier sur un intervalle sont étagées*

2. *L'indicatrice d'un ensemble est étagée, en particulier : $1_{\mathbb{Q}}$ est étagée.*

Définition 2.1.2. *Si f est étagée, et prend les valeurs : $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$, l'écriture canonique de f est, avec $A_i = f^{-1}(\{\alpha_i\})$: $f = \sum\limits_i^n \alpha_i 1_{A_i}$*
Pour f mesurable, on pose alors : $\int f \mathrm{d}\mu = \sup\limits_{h \in \mathcal{E}, h \leq f} g \mathrm{d}\mu$

Proposition 2.1.1. *L'intégrale est une forme linéaire monotone i.e. l'intégrale d'une fonction positive est positive. Ceci s'étend aux fonctions intégrables.*

Théorème 2.1.1 (De Convergence Monotone)**.** *Si f_n est croissante positive et tend vers f :*

$$\int f \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \uparrow \int f_n \mathrm{d}\mu$$

Démonstration. Par croissance :

$$\int f \mathrm{d}\mu \geq \lim_{n \to \infty} \uparrow \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

Il suffit donc d'établir l'autre inégalité : soit $h = \sum \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ étagée positive inférieure à f. Soit $a \in [0, 1[$. On pose :

$$E_n = \{x \in E \mid ah(x) \leq f_n(x)\}$$

Les E_n sont mesurables et, puisque $a < 1$ et $f = \lim \uparrow f_n$, $E = \bigcup \uparrow E_n$.
Comme $f_n \geq a \mathbb{1}_{E_n} h$,

$$\int f_n \mathrm{d}\mu \geq \int \mathbb{1}_{E_n} h = a \sum \alpha_i \mu(A_i \cap E_n)$$

En passant à la limite croissante, comme $A_i \cap E_n \uparrow A_i$, puis en faisant tendre a vers 1 on trouve le résultat. ∎

Théorème 2.1.2. *Soit f mesurable positive. Il existe une suite croissante de fonctions étagées positives de limite f.*

Corollaire 2.1.2.1. *Si les f_n sont positives :*

$$\sum_n \int f_n \mathrm{d}\mu = \int f_n \sum_n \mathrm{d}\mu$$

Théorème 2.1.3 (Lemme de Fatou)**.** *Si les f_n sont mesurables positives :*

$$\int \liminf f_n \mathrm{d}\mu \leq \liminf \int f_n \mathrm{d}\mu$$

Démonstration. On a :

$$\liminf f_n = \lim_{k \to \infty} (\inf_{n \geq k} f_n)$$

Donc, par théorème de convergence monotone 2.1.1 :

$$\int \liminf f_n \mathrm{d}\mu = \lim_{k \to \infty} \int \left(\inf_{n \geq k} f_n \right) \mathrm{d}\mu$$

Par ailleurs, si $p \geq k$, on a : $\inf\limits_{n \geq k} f_n \leq f_p$, d'où :

$$\int \left(\inf_{n \geq k} f_n \right) \mathrm{d}\mu \leq \inf_{p \geq k} \int f_p \mathrm{d}\mu$$

En passant à la limite croissante quand $k \to \infty$, on a :

$$\lim_{k \to \infty} \int \left(\inf_{n \geq k} f_n \right) \mathrm{d}\mu \leq \lim_{k \to \infty} \inf_{p \geq k} \int f_p \mathrm{d}\mu = \liminf \int f_n \mathrm{d}\mu$$

ce qui conclut. ∎

Proposition 2.1.2. *Soit f mesurable positive :*
- $\forall a > 0, \mu(\{x \in E \mid f(x) \geq a\}) \leq \frac{1}{a}\int f \mathrm{d}\mu$ *[Inégalité de Markov]*
- $\int f \mathrm{d}\mu < \infty \Rightarrow f < \infty p.p.$
- $\int f \mathrm{d}\mu \Leftrightarrow f = 0 p.p.$
- $f = g p.p. \Rightarrow \int f \mathrm{d}\mu = \int g \mathrm{d}\mu$

On peut généraliser cette dernière proposition aux fonctions intégrables.

2.2 Fonctions Intégrables

Définition 2.2.1. *On dit qu'une fonction est intégrable si l'intégrale de sa norme est finie. En ce cas, l'intégrale de la fonction est la somme des intégrales de ses fonctions composantes.*

Théorème 2.2.1. *L'intégrale vérifie l'inégalité triangulaire : Soit f intégrable*

$$\int |f| \mathrm{d}\mu \geq \left|\int f \mathrm{d}\mu\right|$$

Démonstration. Ecrire $|z|^2 = z\overline{z}$ pour z l'intégrale de f. En notant a le conjugué de z, on a le résultat. ■

Théorème 2.2.2 (De Convergence Dominée)**.** *Soit f_n une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose :*
1. *Il existe f mesurable telle que $f_n(x) \to f(x) \mu p.p.$*
2. *Il existe g telle que $|f_n(x)| \leq g(x) \mu p.p.$*

Alors :

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n(x) - f(x)| \, \mu(\mathrm{d}x) = 0$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu$$

Démonstration.
1. On suppose dans un premier temps que les hypothèses (1) et (2) sont vérifiées sur tout l'ensemble. On remarque $|f| \leq g$ donc f est intégrable.
   Ensuite, puisque par inégalité triangulaire, $|f - f_n| \leq 2g$ et $|f - f_n| \to 0$, par lemme de Fatou :
   $$\liminf \int (2g - |f - f_n|) \, \mathrm{d}\mu \geq \int \liminf (2g - |f - f_n|) \, \mathrm{d}\mu = 2\int g \mathrm{d}\mu.$$
   Par linéarité, comme $\liminf -u_n = -\limsup u_n$:
   $$2\int g \mathrm{d}\mu - \limsup \int |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu \geq 2\int g \mathrm{d}\mu$$
   D'où, $\int |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu \to 0$. Par inégalité triangulaire :
   $$\left|\int f \mathrm{d}\mu - \int f_n \mathrm{d}\mu\right| \leq \int |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu$$
2. Dans le cas général, on suppose cette fois ci (1) et (2). On pose alors :
   $$A = \{x \in E \mid f_n(x) \to f(x) \text{ et pour tout n } |f_n(x)| \leq g(x)\}.$$
   Par hypothèses, $\mu\left(A^{\complement}\right) = 0$ et par la première partie de la preuve appliquée à :
   $$\tilde{f}_n(x) = \mathbb{1}_A(x) f_n(x), \tilde{f}(x) = \mathbb{1}_A(x) f(x)$$
   Comme $f = \tilde{f} p.p.$ et $f_n = \tilde{f}_n p.p.$, on a bien le résultat par la première partie de la preuve.

■

2.3 Intégrales dépendant d'un Paramètre

Principe : Utiliser le TCD pour montrer des propriétés de régularité.

Remarque 2.3.0.1 (Exemples d'utilisation)**.** — *Pour f intégrable à variables dans $\mathbb{R}^d$, on définit la transformée de fourier $\hat{f}$ par :*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-\xi \cdot x) f(x) \mathrm{d}x$$

— *Soit f intégrable à variables dans $\mathbb{R}^d$, g continue bornée à variables dans $\mathbb{R}^d$. On définit la convolée de f et g par :*

$$f \star g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) \mathrm{d}y$$

Théorème 2.3.1 (De Continuité sous l'intégrale)**.** *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $u_0 \in U$. Soit $f : U \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant :*

1. *$\forall u \in U$, l'application $x \in E \mapsto f(u,x)$ est mesurable.*
2.
3. *$\mu p.p.$, l'application $u \mapsto f(u,x)$ est continue en u_0*
4. *Il existe une application $g : E \to [0, +\infty[$, intégrable telle*

$$\forall u \in U, \mu p.p., |f(u,x)| \leq g(x)$$

Alors, $F(u) = \int f(u,x)\mu(\mathrm{d}x)$ est bien définie et est continue en u_0.

Démonstration. Par l'hypothèse (*iii.*), F est bien définie.
Soit (u_n) une suite de limite u_0. Par (*ii.*), $f(u_n,x) \to_{n\to\infty} f(u_0,x), \mu p.p.$. Par (*iii.*), on peut appliquer le théorème de convergence dominée 2.2.2, ce qui donne le résultat par caractérisation séquentielle de la limite. ∎

Corollaire 2.3.1.1. *Les fonctions définies en exemple sont continues.*

Théorème 2.3.2 (De Dérivation sous l'intégrale)**.** *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, $u_0 \in U$. Soit $f : U \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant :*

1. *$\forall u \in U$, $x \mapsto f(u,x)$ est mesurable*
2. *$\mu p.p.$, $u \mapsto f(u,x)$ est dérivable en u_0*
3. *il existe g positive intégrable, telle que $\mu p.p.$:*

$$\forall u \in U, |f(u,x) - f(u_0,x)| \leq g(x) |u - u_0|$$

Alors :

$$F(u) = \int f(u,x)\mu(\mathrm{d}x) \text{ est dérivable et } F^{'}(u_0) = \int \frac{\partial f}{\partial u}(u_0,x)\mu(\mathrm{d}x)$$

Démonstration. On applique le TCD 2.2.2 à $\varphi_n(x) = \frac{f(u_n,x)-f(u_0,x)}{u_n-u_0}$ où $u_n \to u_0$. ∎

Corollaire 2.3.2.1. *En choisissant pour la transformée de fourier des fonctions dont les premiers moments sont intégrables, on gagne en régularité. En particulier, si une fonction est à support compact, sa transformée de fourier est indéfiniment dérivable.*

2.4 Mesures Produits

On se donne $(E_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$, et on veut :

1. Définir une mesure produit sur $(E_1 \times E_2, \mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2)$
2. Démontrer les théorèmes de Fubini sur la mesure ainsi définie.

2.4.1 Préliminaires

Définition 2.4.1. *Soit $C \in \mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2, x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$. On note :*

$$C_{x_1} = \{y \in E_2 \mid (x_1, y) \in C\}$$
$$C_{x_2} = \{y \in E_1 \mid (y, x_2) \in C\}$$

On définit par ailleurs, si $f : (E_1 \times E_2, \mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, les applications partielles f_{x_1} et f^{x_2}.

Lemme 2.4.1.
- *$\forall C \in \mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2, x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$, $C_{x_1} \in A_2$ et $C^{x_2} \in A_1$*
- *f_{x_1} et f^{x_2} sont mesurables.*

Démonstration.
- On introduit la classe des C_{x_1} pour $x_1 \in E_1$. Cette classe contient les pavés et est une tribu.
-

■