# Géométrie Différentielle

Géométrie Locale des Applications Différentiables

Emmanuel Giroux

5 février 2024

## Table des matières



# 1 Applications Différentiables, Propriétés et Exemples

## 1.1 Relations avec les Polynômes

**Définition 1.1: Applications Différentiables, Lisses**

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $\varphi : U \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$ si toutes ses dérivées partielles d'ordre $s$, $1 \leq s \leq r$, existent et sont continues. Une fonction $\mathcal{C}^r$ est donc $\mathcal{C}^s$ pour $s \leq r$.
On dit que $\varphi$ est $\mathcal{C}^\infty$ ou lisse si elle est $\mathcal{C}^r$ pour tout $r \geq 1$.

**Théorème 1.1: Schwarz**

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$. Si les dérivées partielles $\partial_{x_j}\partial_{x_i}\varphi$ et $\partial_{x_i}\partial_{x_j}\varphi$ existent et sont continues sur $U$, elles sont égales.

**Proposition 1.1: Intégration d'une Différentielle sur une Courbe**

Soit $C = \gamma([a,b]) \subseteq \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée par une application $\mathcal{C}^1$ par morceaux $\gamma$. On définit

$$\begin{aligned}\int_C \mathrm{d}\varphi &= \int_a^b d_{\gamma(t)}\varphi\left(\gamma'(t)\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \left(\varphi \circ \gamma\right)'(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))\end{aligned}$$

**Remarque 1.1: Reformulation du Théorème de Taylor**

Sur l'ensemble des fonctions réelles définies au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ on met la relation d'équivalence :

$$\varphi_1 \sim_r \varphi_2 \text{ si } \varphi_1 - \varphi_2 =_{x\to 0} o\left(|x|^r\right)$$

Le théorème de Taylor dit que, si on restreint cette relation à l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^r$, chaque classe d'équivalence contient un et un seul polynôme de degré $\leq r$. Le quotient est ainsi un sev de dimension finie.

**Théorème 1.2: Weierstraß**

Soit $K$ un compact de $\mathbb{R}^n$. Toute fonctions continue de $K$ dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme de polynômes $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ restreints à $K$.

## 1.2 Construction par Convolution

**Proposition 1.2: Fonctions Cloches**

Soit $B(a,\delta) \subset \mathbb{R}^n$ la boule ouverte de rayon $\delta$ centrée en $a$. Il existe une fonction lisse $\chi : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ positive sur la boule et nulle en dehors.

*Démonstration.* Typiquement, on trouve

$$\chi(x) = \exp\left(\frac{1}{|x-a|^2 - \delta^2}\right)$$

■

**Définition 1.2: Support**

Soit $\varphi : X \to \mathbb{R}$. Son support est le fermé :

$$Supp(\varphi) : \overline{\{x \in U \mid \varphi(x) \neq 0\}}$$

**Définition 1.3: Produit de Convolution**

Le produit de convolution de deux fonctions intégrables $\varphi, \chi$ est la fonction intégrable :

$$\left(\varphi \star \chi\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\chi(y)\,\mathrm{d}y$$

Lorsque $\chi$ est une fonction positive ou nulle d'intégrale 1, c'est à dire une densité de probabilité, la valeur de $\varphi \star \chi$ en un point $x$ doit être vue comme la moyenne des valeurs de $\varphi$ pour cette mesure de probabilité recentrée sur $x$.

**Proposition 1.3: Indicatrice Normalisée**

Pour $\delta > 0$ on considère $\chi_\delta = \frac{1}{2\delta}\mathbb{1}_{[-\delta,\delta]}$. On a, si $\varphi$ est intégrable :

- $\int_{\mathbb{R}} (\varphi \star \chi_\delta)(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\,\mathrm{d}y$ car $\int_{\mathbb{R}} \chi_\delta = 1$
- $\mathrm{Supp}(\varphi \star \chi_\delta) \subseteq \mathrm{Supp}(\varphi) + [-\delta, \delta]$
- Si $\varphi = c$ est constante sur $[a, b]$ de diamètre strictement plus grand que $2\delta$, alors $\varphi \star \chi_\delta = c$ sur $[a + \delta, b - \delta]$.

**Lemme 1.1: Régularité de la Convolée**

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable.

1. Si $|\varphi|$ est bornée par une constante $\mu$, alors $\varphi \star \chi_\delta$ est $\mu/\delta$-lipschitzienne et donc continue.
2. Si $\varphi$ est continue, alors $\varphi \star \chi_\delta$ est $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est donnée par

$$(\varphi \star \chi_\delta)'(x) = \frac{\varphi(x+\delta) - \varphi(x-\delta)}{2\delta}$$

   Par suite, si $\varphi$ est $\mathcal{C}^r$, $\varphi \star \chi_\delta$ est $\mathcal{C}^{r+1}$.

**Proposition 1.4: Convolution D'indicatrices**

Soit $\delta_k$ une suite de nombres positifs dont la série converge. La suite $\rho_k$ définie par :

$$\begin{cases} \rho_0 &= \chi_{\delta_0} \\ \rho_k &= \rho_{k-1} \star \chi_{\delta_k} \end{cases}$$

converge vers une fonction lisse $\rho$ qui vérie $\rho(x) = 0$ si et seulement si $|x| \geq \sum_{k\geq 0} \delta_k$. De plus, $\rho(x) = 1$ si $|x| \leq \delta_0 - \sum_{k\geq 1} \delta_k$.

**Corollaire 1.1: Fonctions Cloches Revisitées**

Soit $B(a, \delta) \subseteq \mathbb{R}^n$ la boule ouverte de rayon $\delta$ centrée en $a$. Il existe une fonction lisse $\chi : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ qui est positive sur $B(a, \delta)$ et nulle en dehors.

*Démonstration.* On pose $\chi(x) = \rho(|x - a|/\delta)$ où $\rho$ est une fonction lisse positive sur $[-1, 1]$, nulle en dehors et constante près de 0. Une telle fonction existe par la proposition précédente. ∎

**Définition 1.4: Noyau Régularisant**

On appelle noyau régularisant une fonction lisse, positive sur $B(0, 1)$ nulle en dehors et d'intégrale 1.

**Définition 1.5: Construction de Noyaux**

Soit $\rho$ un noyau régularisant. Pour tout $\delta > 0$ la fonction $\rho_\delta$ définie par

$$\rho_\delta(x) = \delta^{-n}\rho(x/\delta)$$

est toujours d'intégrale 1 et de support $\overline{B(0,\delta)}$.
Si $\varphi : U \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^r$ sur $U$, la formule $\varphi \star \rho_\delta$ définit une fonction sur l'ouvert

$$U_\delta = \left\{x \in U \mid \overline{B(x,\delta)} \subset U\right\}$$

qu'on peut écrire

$$\varphi \star \rho_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\rho_\delta(x-y)\,\mathrm{d}y$$

**Proposition 1.5: Convolution avec un Noyau Régularisant**

Les fonctions $\varphi \star \rho_\delta$ sont lisses et si $x \in U_\delta$ :

$$\begin{aligned}\partial^i(\varphi \star \rho_\delta)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\delta^i\rho_\delta(x-y)\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta^i\varphi(y)\rho_\delta(x-y)\,\mathrm{d}y = \delta^i\varphi \star \rho_\delta\end{aligned}$$

De plus, pour tout compact $K \subseteq U$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $K \subset U_\delta$ et

$$\|(\varphi \star \rho_\delta) - \varphi\|_{r,K} < \varepsilon$$

où $\|\psi\|_{r,K} = \sup\left\{\left|\partial^i\psi(x)\right| \mid x \in K, i \leq r\right\}$

# 2 Structure Locale des Applications Différentiables

## 2.1 Inversion Locale

**Définition 2.1: Difféomorphisme**

Une application $f : U \to V$ entre des ouverts $U$ et $V$ de $\mathbb{R}^n$ est un difféormorphisme $\mathcal{C}^r$ si c'est une application $\mathcal{C}^r$ bijective dont l'inverse est $\mathcal{C}^r$ ?

**Théorème 2.1: Inversion Locale**

La différentielle d'un difféormorphisme est une application linéaire inversible.
Réciproquement, si $f$ est $\mathcal{C}^r$ sur un ouvert dont la différentielle est inversible en tout point $a$, il existe un voisinage ouvert $U_a$ de $a$ dans $U$ tel que l'application $f_{|U_a}$ soit un $\mathcal{C}^r$-difféormorphisme. En particulier, $f$ est une application ouverte.

## 2.2 Applications de rang Constant

**Définition 2.2: Applications Equivalentes**

Soit $f : U \to \mathbb{R}^m, f' : U' \to \mathbb{R}^m$ des applications $\mathcal{C}^r$ sur des ouverts $U, U' \subseteq \mathbb{R}^n$. On dit que $f$ et $f'$ sont équivalentes s'il existe :

- des voisinages ouverts $V$ de $f(U)$ et $V'$ de $f'(U')$ dans $\mathbb{R}^m$
- des $\mathcal{C}^r$-difféormorphismes $u : U \to U'$ et $v : V \to V'$

de sorte que $f' = v \circ f \circ u^{-1}$.

**Définition 2.3: Rang**

Le rang d'une application différentiable en $a$ est le rang de sa différentielle en $a$.

**Proposition 2.1: Propriétés**

- L'application qui à $a \in U$ associe le rang de $f$ en $a$ est semi-continue inférieurement
- Si $f$ et $f' = v \circ f \circ u^{-1}$ sont équivalentes, leurs rangs sont égaux en $a$ et en $u(a)$.
- Si $\bar{f}$ est affine, son rang est constant

Ainsi, si $f$ est équivalente à son application tangente en un point, elle est de rang constant.

**Théorème 2.2: du Rang Constant**

Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application $\mathcal{C}^r$ de rang constant $k$ sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$. Il existe alors, si $a \in U$ :

- des voisinages ouverts $U_a$ de $a$ dans $U$ et $V_a$ de $f(a)$ dans $\mathbb{R}^m$
- des $\mathcal{C}^r$-difféormorphismes $u$ et $v$

tels que

$$v \circ f \circ u^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k, 0 \dots, 0) \in \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$$

**Remarque 2.1**

1. Le théorème du rang constant est une version non linéaire du théorème du rang, équivalence en algèbre linéaire d'une matrice à sa réduite de Jordan.
2. L'énoncé du théorème du rang constant qu'on a donné est celui qui servira en pratique. Il n'affirme pas directement que, pour $a \in U$ quelconque, $f$ est localement équivalenete à $\bar{f}_a$ mais dit que $f$ est localement équivalente à une application linéaire de son rang. Pour en tirer la réponse à la question posée, il suffit d'observer que deux applications affines/linéaires $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ qui ont le même rang sont affinement/linéairement équivalentes (justement par le théorème du rang)

## 2.3 Applications de Rang Maximal

**Définition 2.4: Immersions et Submersions**

Soit $f$ une application $\mathcal{C}^r$ sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$.

1. On dit que $f$ est une immersion si son rang en tout point de $U$ vaut $n$, ce qui signifie que la différentielle est injective et que $n \leq m$.
2. On dit que $f$ est une submersion si son rang en tout point de $U$ vaut $m$, ce qui signifie que la différentielle est surjective et suppose $n \geq m$.

On parle de même d'immersion et de submersion en $a$ selon les propriétés de $d_a f$.

**Proposition 2.2: Exemples**

- Une application linéaire/affine est une submersion (resp. immersion) si et seulement si elle est surjective (resp. injective)
- Une application sur un ouvert de $\mathbb{R}$ est une immersion si et seulement si sa dérivée de s'annule pas.
- Une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ est une submersion si et seulement si sa dérivée ne s'annule pas.
- Soit $f$ une application $\mathcal{C}^r$ sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$. Alors l'application graphe est une immersion injective et la projection est une submersion surjective. Par suite, $f$ est la composée d'une immersion et d'une submersion.

**Théorème 2.3: Forme Normale des Immersions et Submersions**

Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application $\mathcal{C}^r$ sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$.

1. Si $f$ est une immersion en $a$, il existe des voisinages ouverts $U_a$ et $V_a$ de $a$ et de $f(a)$ ainsi qu'un $\mathcal{C}^r$-difféomorphisme $v$ tel que
$$v \circ f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$$
2. Si $f$ est une submersion en $a$, il existe de même $U_a, V_a$ et un $\mathcal{C}^r$-difféormorphisme $u$ tel que
$$f \circ u^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$$

**Corollaire 2.1**

Soit $f$ une application $\mathcal{C}^r$.

- Si $f$ est une immersion, $f$ est localement injective
- Si $f$ est une submersion, $f$ est une application ouverte (qu'on peut voir comme une surjectivité locale).

**Définition 2.5: Transversalité**

Deux sev $E_1, E_2$ d'un ev $E$ sont dits transversaux si $E_1 + E_2 = E$.

**Théorème 2.4: Fonctions Implicites**

Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une submersion $\mathcal{C}^r$ sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$ et soit $a \in U$. On suppose le noyau de $\mathrm{d}_a f$ transversal au sous-espace $\{0\} \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n$. Il existe alors un voisinage ouvert $U_a$ de $a$ du type :

$$U_a = U' \times U'' \subseteq \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n$$

et une application $s : U' \to U''$ de classe $\mathcal{C}^r$ tels que

$$f^{-1}(f(a)) \cap U_a = \{x = (x', x'') \in U' \times U'' = U_a \mid x'' = s(x')\}$$

# 3 Applications Différentiables et Mesure

## 3.1 Petit Théorème de Sard

**Lemme 3.1: Critère de Fubini**

Soit $N \subseteq \mathbb{R}^m$ un ensemble Lebesgue-Mesurable dont toutes les tranches sont des parties négligeables dans $\mathbb{R}^{m-1}$. Alors $N$ est négligeable dans $\mathbb{R}^m$.

**Lemme 3.2: Constante de Lipschitz Locale**

Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$ et soit $K \subset U$ un compact convexe. L'application $f_{|K} : V \to \mathbb{R}^m$ est alors lipschitzienne de constante au plus $\sup\{|\,\mathrm{d}_a f\,|\,, a \in K\}$.

**Proposition 3.1: Petit Théorème de Sard**

Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$.

- Si $m > n$, alors $f(U)$ est négligeable dans $\mathbb{R}^m$.
- Si $m = n$ et si $n \subseteq U$ est négligeable dans $\mathbb{R}^n$, alors $f(N)$ est négligeable dans $\mathbb{R}^n$.

**Lemme 3.3: Réduction Locale**

Pour montrer que l'image $f(P)$ d'une partie $P \subseteq U$ par une application $f : U \to \mathbb{R}^m$ est négligeable dans $\mathbb{R}^m$, il suffit de montrer que chaque point $a \in U$ possède un voisinage $U_a \subseteq U$ tel que $f(P \cap V_a)$ soit négligeable dans $\mathbb{R}^m$.

*Démonstration.* En effet, bien que la famille $\{V_a\}$ ne soit pas dénombrable, on peut choisir tous les $V_a$ dans un ensemble dénombrable, par exemple une base dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, $P = \bigcup P \cap V_a$ et $f(P)$ est négligeable comme union dénombrable de parties négligeables dans $\mathbb{R}^m$. ■

**Corollaire 3.1: Invariance des Ensembles Négligeables**

Soit $f : U \to V$ un difféormorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Une partie $N \subseteq U$ est négligeable si et seulement si son image $f(N) \subseteq V$ l'est.

## 3.2 Théorème de Sard

**Définition 3.1: Critique**

Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$. On appelle

- Point Critique de $f$ tout point $a \in U$ où $d_a f : R^n + \mathbb{R}^m$ n'est pas surjective.
- Valeur Critique de $f$ tout point $y \in \mathbb{R}^m$ qui est l'image d'un point critique.
- Point Régulier (resp. valeur) de $f$ tout point (resp. valeur) non critique.

**Théorème 3.1: de Sard**

Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application $\mathcal{C}^r$ sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$. Si $r \geq 1 + \max(n - m, 0)$ alors l'ensemble des valeurs régulières de $f$ est de mesure pleine et est en particulier dense dans $\mathbb{R}^m$.
Autrement dit, l'ensemble $f(C_f)$ des valeurs critiques est négligeable.