None

Null

2 octobre 2023

Table des matières

Première partie
TD2 :Mesures Additives et σ-additives

1 Exercice 1

On pose $\tilde{A_0} = A_0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\tilde{A_{n+1}} = A_{n+1} \setminus \tilde{A_n}$.

On a alors : $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{A_n}\right)$ car ces unions sont égales.

Mais, par σ-additivité de μ : $\mu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{A_n}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(\tilde{A_n}\right)$

Par croissance/positivité : $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(\tilde{A_n}\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(A_n\right)$.

Donc : $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(A_n\right)$

2 Exercice 2

Il est clair que $\mathcal{G}$ est stable par intersections finies et contient $\varnothing$ et E. Par ailleurs, si A_i est une famille d'éléments de $\mathcal{G}$, en posant $\tilde{A_n}$ l'union des n premiers A_i, la suite $\tilde{A_i}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{G}$

3 Exercice 3

3.1 Question 1

$\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n$ est l'ensemble des éléments qui sont dans tous les A_k àpcr.
$\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$ est l'ensemble des éléments qui sont apparaissent une infinité de fois dans les A_k.

3.2 Question 2

On a : $\left(\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n\right)^{\complement} \left(\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k\right)^{\complement} = \left(\bigcap_{n\geq 1} \left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right)^{\complement}\right) = \left(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k^{\complement}\right) = \limsup\limits_{n\to+\infty} A_n^{\complement}$

3.3 Question 3

On a : $1_{\liminf A_n} = \liminf 1_{A_n}$. De même pour $\limsup$

3.4 Question 4

Par 1. on a :

1. $\liminf A_n = F \cup G$ et $\limsup A_n = F \cap G$
2. $\liminf A_n =]0,3] \cup [-1,2] = [-1,3]$ et $\limsup A_n =]0,2]$

3.5 Question 5

Par continuité croissante : $\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k\right) = \sup\limits_n \mu\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right) \leq \liminf\limits_n \mu\left(A_n\right)$

On pose : $A_k = [k; k+1]$. Alors, $\blacksquare$.

3.6 Question 6

Par continuité décroissante : $\mu\left(\limsup\limits_n A_n\right) = \inf\limits_n \mu\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$ Par σ-additivité, on obtient bien le résultat.

Deuxième partie

TD 3 : Intégration, Théorèmes de Convergence

4 Exercice 1 : Mise en Jambes

4.1 Question 1

On obtient le résultat par Théorème de Convergence Dominée, en dominant par 1

4.2 Question 2

La fonction $|f|$ est intégrable et à valeurs positives. Par inégalité de Markov, on a le résultat.

4.3 Question 3

Il s'agit simplement des propriétés sur les fonctions à valeurs positives appliquées à la valeur absolue d'une fonction. De même que pour les fonctions positives, la réciproque de la première propriété est vraie, et la réciproque de la seconde est fausse (prendre une fonction constante non nulle)

4.4 Question 4

On prend $f_n(x) = -e^{-nx}$ sur $[0, +\infty]$. Ca marche ?

5 Exercice 2 : Théorème Fondamental de l'Analyse

5.1 Question 1

On a, en tout point x : $f'(x) = \lim_{\mathrm{d}x \to 0} \frac{f(x+\mathrm{d}x)-f(x)}{\mathrm{d}x}$. Or, f étant mesurable :

$$\forall \mathrm{d}x \in \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x+\mathrm{d}x)-f(x)}{\mathrm{d}x} \text{ est mesurable.}$$

Donc, comme limite simple de fonction mesurables, f' est mesurable.

5.2 Question 2

Puisque f' est bornée, les quotients de la question 1 le sont aussi. En particulier, par théorème de convergence dominé :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f'(t)\mathrm{d}t &= \lim_{\mathrm{d}x \to 0} \int_0^1 \frac{f(t+\mathrm{d}x)-f(t)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}t \\
&= \lim_{\mathrm{d}x \to 0} \frac{f(1+\mathrm{d}x)-f(0+\mathrm{d}x)+f(1)-f(0)}{\mathrm{d}x} \\
&= f(1)-f(0)
\end{aligned}$$

5.3 Question 3

On prend l'application $\mathbb{1}_{]0,1]}$. Elle est presque partout dérivable de dérivée nulle, l'intégrale de sa dérivée est bien nulle.

6 Exercice 3

L'albanie est un petit pays d'europe du sud-est. ■

7 Exercice 4 : Un peu de calcul

ALLEZ VOUS FAIRE CUIRE UN OEUF SUR LE CRANE LISSE D'UN CHAUVE SI POSSIBLE FREDERIC WORMS.