Intégration et Probabiliéts

Null

27 novembre 2023

Table des matières

1 Espaces Mesurés

1.1 Ensembles Mesurables

Définition 1.1.1. *Une tribu sur un ensemble E est un ensemble $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ telle que :*

- $E \in \mathcal{A}$
- $\mathcal{A}^{\complement} = \mathcal{A}$
- *Si* $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés parties mesurables.

Définition 1.1.2. *Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$. On appelle* tribu engendrée par C *l'ensemble* $\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\mathcal{A} \ tribu, \mathcal{C}\subset\mathcal{A}} \mathcal{A}$. *C'est la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$.*

Définition 1.1.3. *Soit E un espace topologie, $\mathcal{O}$ la classe des ouverts. On appelle* tribu borélienne sur *E la tribu engendrée par $\mathcal{O}$ notée $\mathcal{B}(E)$.*

Proposition 1.1.1. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *est engendrée aussi par les intervalles ouverts* $(]a,b[)_{a,b\in\mathbb{R}}$, $(]a,+\infty[)_{a\in\mathbb{R}}$, $(]a,+\infty[)_{a\in\mathbb{Q}}$.

Définition 1.1.4. *La* tribu produit *sur* $(E_1, \mathcal{A}_1), (E_2, \mathcal{A}_2)$ *est la tribu sur* $E_1 \times E_2$ *définie* $\mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2 = \sigma\left(\{A_1 \times A_2 \mid (A_1, A_2) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\}\right)$

Proposition 1.1.2. *On a* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \bigotimes \mathcal{B}\mathbb{R}$.

1.2 Mesures Positives

Définition 1.2.1. *Une* mesure positive *sur* $(E, \mathcal{A})$ *est une application* $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ *qui vérifie :*

- $\mu(\varnothing) = 0$.
- *Pour toute famille* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de parties mesurables disjointes :*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Proposition 1.2.1. *On a :*

- *Si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ *est une suite croissante :*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \uparrow \mu(A_n)$$

- *Si* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ *est une suite décroissante et si* $\mu(B_0) < \infty$ *:*

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \downarrow \mu(B_n)$$

- *Si* $A_n \in \mathcal{A}$ *:*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Définition 1.2.2. *Il existe une unique mesure positive sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *telle que* $\lambda(]a, b[) = b - a$, *pour tous* $a, b \in \mathbb{R}$.

Définition 1.2.3.

- μ *est finie si* $\mu(E) < \infty$
- μ *est une mesure de probabilité si* $\mu(E) = 1$
- μ *est* σ*-finie s'il existe une suite croissante de parties mesurables* E_n *d'union* E *et de mesure toujours finie.*
- $x \in E$ *est un atome de* μ *si* $\mu(\{x\}) > 0$
- μ *est dite diffuse si elle n'a pas d'atomes.*

1.3 Fonctions Mesurables

Définition 1.3.1. *Une application* $f : (E, \mathcal{A}) \to (F, \mathcal{B})$ *est dite mesurable si* $\forall B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Théorème 1.3.1. *La composition de deux applications mesurables est mesurable.*

Remarque 1.3.1.1 (Composition Mesurable)**.** *Il faut bien que les applications* f *et* g *partagent un espace, avec la* même *tribu (comme la chanson). On définit fréquemment deux tribus différentes sur* $\mathbb{R}^d$ *: la tribu borélienne et la tribu de Lebesgue, tribu complétée de la tribu borélienne pour la mesure de Lebesgue* $\mathcal{M}(\lambda) = \left\{A \subset \mathbb{R}^d, \exists B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), B_1 \subset A \subset B_2 \text{ et } \lambda(B_2 \setminus B_1) = 0\right\}$ *et on a :* $B(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{M}(\lambda)$. *Dans certains livres :* f *est mesurable si* $f : (\mathbb{R}, \mathcal{M}(\lambda)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *est mesurable.*

Proposition 1.3.1. *Pour que* f *soit mesurable, il suffit qu'il existe une sous-classe engendrant* $\mathcal{B}$ *pour laquelle la propriété est vraie.*

Corollaire 1.3.1.1. *Si $f : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}^{d_2}$ est continue, elle est mesurable pour les boréliens.*

Corollaire 1.3.1.2. *Une application produit est mesurable.*

Démonstration. On a : $A_1 \bigotimes A_2 = \sigma(A_1 \times A_2)$ ∎

Lemme 1.3.2. *Les applications $(+)(\times)(\max)(\min)$ de deux fonctions réelles sont mesurables*

Corollaire 1.3.2.1. *Les parties positives et négatives d'une fonction sont mesurables*

Proposition 1.3.2. *Si les f_n sont mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors : $\sup_n f_n, \inf_n f_n, \liminf f_n, \limsup f_n$ sont mesurables. En particulier : $\lim_n f_n$ est mesurable si la suite CS.*

Démonstration.

1. Si $f(x) = \inf f_n(x)$: $f^{-1}\left[-\infty, a\right[= \bigcup_n \{x \mid f_n(x) < a\}$. De même pour sup. On en déduit immédiatement $\liminf f_n = \sup_{n\geq 0} \inf_{k\geq n} f_k$.
2. On a : $\{x \in E \mid \lim f_n(x) \text{ existe}\} = \{x \in E \mid \liminf f_n(x) = \limsup f_n(x)\} = \mathcal{G}^{-1}(\Delta)$ où $\mathcal{G} = (\liminf f_n, \limsup f_n)$ et Δ est la diagonale de $\overline{\mathbb{R}}^2$.

∎

Définition 1.3.2 (Mesure-Image)**.** *On appelle mesure image de μ par f, notée $f_\#\mu$ la mesure $f_\#\mu(B) = \mu(f^{-1}(B))$*

1.4 Classe Monotone

Définition 1.4.1 (Classe Monotone)**.** *$\mathcal{M} \in \mathcal{P}(E)$ est une classe monotone si :*

1. *$E \in \mathcal{M}$*
2. *Si $A, B \in \mathcal{M}$ avec $A \subset B$, $B \setminus A \in \mathcal{M}$*
3. *Si $(A_n) \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$ croissante, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$*

Remarque 1.4.0.1. *Toute tribu est une classe monotone*

Lemme 1.4.1. *Si $\mathcal{M}$ est une classe monotone stable par intersections finies, c'est une tribu.*

Définition 1.4.2. *Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$: $\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \bigcap\limits_{\mathcal{M} \text{classe monotone, } \mathcal{C}\subset\mathcal{M}}$*

Théorème 1.4.2 (Lemme de Classe Monotone)**.** *Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ est stable par intersections finies : $\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$*

Remarque 1.4.2.1. *Les classes monotones sont des outils plus maniables que les tribus et se marient mieux avec les propriétés des mesures. Le théorème fait le lien entre tribus et classes monotones, ce qui facilite la vie avec les mesures.*

Démonstration. Point Méthodologique : ne pas essayer d'exprimer des éléments de $\mathcal{C}$. T'façon les preuves constructives, c'est pour les salopes. ∎

Remarque 1.4.2.2. *On peut en déduire l'unicité de la mesure de Lebesgue. C'est une conséquence du théorème suivant.*

Théorème 1.4.3. *Soit $\mathcal{C}$ stable par intersections telle que $\sigma\mathcal{C} = \mathcal{A}$. On suppose $\mu_1(A) = \mu_2(A), \forall A \in \mathcal{C}$ Alors :*

1. *μp.p., l'application $u \mapsto f(u, x)$ est continue en u_0*
2. *Si $\mu_1(E) = \mu_2(E) < +\infty$ alors $\mu_1 = \mu_2$*
3. *S'il existe $(E_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ croissante d'union E et de mesures égales et finies par μ_1 et μ_2 alors $\mu_1 = \mu_2$*

Démonstration.

1. Cas fini : $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{A} \mid \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$ est une classe monotone. Donc $\mathcal{M} = \mathcal{A}$ par Lemme de Classe Monotone
2. Cas Infini : On applique le cas fini à E_n en prenant la restriction. Par continuité croissante, on obtient bien le résultat.

∎

2 Intégration par rapport à une mesure

2.1 Intégration Positive

Définition 2.1.1. *f mesurable à valeurs réelles est étagée si elle prend un nombre fini de valeurs.*

Remarque 2.1.0.1. *1. Les Fonctions en escalier sur un intervalle sont étagées*

2. L'indicatrice d'un ensemble est étagée, en particulier : $1_{\mathbb{Q}}$ est étagée.

Définition 2.1.2. *Si f est étagée, et prend les valeurs : $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$, l'écriture canonique de f est, avec $A_i = f^{-1}(\{\alpha_i\})$: $f = \sum_i^n \alpha_i 1_{A_i}$*
Pour f mesurable, on pose alors : $\int f \mathrm{d}\mu = \sup_{h \in \mathcal{E}, h \leq f} g \mathrm{d}\mu$

Proposition 2.1.1. *L'intégrale est une forme linéaire monotone i.e. l'intégrale d'une fonction positive est positive. Ceci s'étend aux fonctions intégrables.*

Théorème 2.1.1 (De Convergence Monotone)**.** *Si f_n est croissante positive et tend vers f :*

$$\int f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \uparrow \int f_n \mathrm{d}\mu$$

Démonstration. Par croissance :

$$\int f \mathrm{d}\mu \geq \lim_{n\to\infty} \uparrow \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

Il suffit donc d'établir l'autre inégalité : soit $h = \sum \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ étagée positive inférieure à f. Soit $a \in [0, 1[$. On pose :

$$E_n = \{x \in E \mid ah(x) \leq f_n(x)\}$$

Les E_n sont mesurables et, puisque $a < 1$ et $f = \lim \uparrow f_n$, $E = \bigcup \uparrow E_n$.
Comme $f_n \geq a\mathbb{1}_{E_n} h$,

$$\int f_n \mathrm{d}\mu \geq \int \mathbb{1}_{E_n} h = a \sum \alpha_i \mu(A_i \cap E_n)$$

En passant à la limite croissante, comme $A_i \cap E_n \uparrow A_i$, puis en faisant tendre a vers 1 on trouve le résultat. ■

Théorème 2.1.2. *Soit f mesurable positive. Il existe une suite croissante de fonctions étagées positives de limite f.*

Corollaire 2.1.2.1. *Si les f_n sont positives :*

$$\sum_n \int f_n \mathrm{d}\mu = \int f_n \sum_n \mathrm{d}\mu$$

Théorème 2.1.3 (Lemme de Fatou)**.** *Si les f_n sont mesurables positives :*

$$\int \liminf f_n \mathrm{d}\mu \leq \liminf \int f_n \mathrm{d}\mu$$

Démonstration. On a :

$$\liminf f_n = \lim_{k\to\infty} (\inf_{n\geq k} f_n)$$

Donc, par théorème de convergence monotone 2.1.1 :

$$\int \liminf f_n \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int \left(\inf_{n\geq k} f_n \right) \mathrm{d}\mu$$

Par ailleurs, si $p \geq k$, on a : $\inf_{n \geq k} f_n \leq f_p$, d'où :

$$\int \left(\inf_{n \geq k} f_n \right) \mathrm{d}\mu \leq \inf_{p \geq k} \int f_p \mathrm{d}\mu$$

En passant à la limite croissante quand $k \to \infty$, on a :

$$\lim_{k \to \infty} \int \left(\inf_{n \geq k} f_n \right) \mathrm{d}\mu \leq \lim_{k \to \infty} \inf_{p \geq k} \int f_p \mathrm{d}\mu = \liminf \int f_n \mathrm{d}\mu$$

ce qui conclut. ■

Proposition 2.1.2. *Soit f mesurable positive :*

- $\forall a > 0, \mu\left(\{x \in E \mid f(x) \geq a\}\right) \leq \frac{1}{a} \int f \mathrm{d}\mu$ *[Inégalité de Markov]*
- $\int f \mathrm{d}\mu < \infty \Rightarrow f < \infty p.p.$
- $\int f \mathrm{d}\mu \Leftrightarrow f = 0 p.p.$
- $f = g p.p. \Rightarrow \int f \mathrm{d}\mu = \int g \mathrm{d}\mu$

On peut généraliser cette dernière proposition aux fonctions intégrables.

2.2 Fonctions Intégrables

Définition 2.2.1. *On dit qu'une fonction est intégrable si l'intégrale de sa norme est finie. En ce cas, l'intégrale de la fonction est la somme des intégrales de ses fonctions composantes.*

Théorème 2.2.1. *L'intégrale vérifie l'inégalité triangulaire : Soit f intégrable*

$$\int |f| \, \mathrm{d}\mu \geq \left| \int f \mathrm{d}\mu \right|$$

Démonstration. Ecrire $|z|^2 = z\overline{z}$ pour z l'intégrale de f. En notant a le conjugué de z, on a le résultat. ■

Théorème 2.2.2 (De Convergence Dominée)**.** *Soit f_n une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose :*

1. *Il existe f mesurable telle que $f_n(x) \to f(x) \mu p.p.$*
2. *Il existe g telle que $|f_n(x)| \leq g(x) \mu p.p.$*

Alors :

$$\lim_{n \to \infty} \int |f_n(x) - f(x)| \, \mu(\mathrm{d}x) = 0$$

et

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu$$

Démonstration.
1. On suppose dans un premier temps que les hypothèses (1) et (2) sont vérifiées sur tout l'ensemble. On remarque $|f| \leq g$ donc f est intégrable.
   Ensuite, puisque par inégalité triangulaire, $|f - f_n| \leq 2g$ et $|f - f_n| \to 0$, par lemme de Fatou :

   $$\liminf \int (2g - |f - f_n|) \, \mathrm{d}\mu \geq \int \liminf (2g - |f - f_n|) \, \mathrm{d}\mu = 2 \int g \mathrm{d}\mu.$$

   Par linéarité, comme $\liminf -u_n = -\limsup u_n$:

   $$2 \int g \mathrm{d}\mu - \limsup \int |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu \geq 2 \int g \mathrm{d}\mu$$

   D'où, $\int |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu \to 0$. Par inégalité triangulaire :

   $$\left| \int f \mathrm{d}\mu - \int f_n \mathrm{d}\mu \right| \leq \int |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu$$

2. Dans le cas général, on suppose cette fois ci (1) et (2). On pose alors :
$$A = \{x \in E \mid f_n(x) \to f(x) \text{ et pour tout n } |f_n(x)| \leq g(x)\}.$$
Par hypothèses, $\mu\left(A^{\complement}\right) = 0$ et par la première partie de la preuve appliquée à :
$$\tilde{f}_n(x) = \mathbb{1}_A(x) f_n(x), \tilde{f}(x) = \mathbb{1}_A(x) f(x)$$
Comme $f = \tilde{f} p.p.$ et $f_n = \tilde{f}_n p.p.$, on a bien le résultat par la première partie de la preuve.

■

2.3 Intégrales dépendant d'un Paramètre

Principe : Utiliser le TCD pour montrer des propriétés de régularité.

Remarque 2.3.0.1 (Exemples d'utilisation)**.**
- *Pour f intégrable à variables dans $\mathbb{R}^d$, on définit la transformée de fourier $\hat{f}$ par :*
$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-\xi \cdot x) f(x) \mathrm{d}x$$
- *Soit f intégrable à variables dans $\mathbb{R}^d$, g continue bornée à variables dans $\mathbb{R}^d$. On définit la convolée de f et g par :*
$$f \star g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) \mathrm{d}y$$

Théorème 2.3.1 (De Continuité sous l'intégrale)**.** *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $u_0 \in U$. Soit $f : U \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant :*

1. *$\forall u \in U$, l'application $x \in E \mapsto f(u,x)$ est mesurable.*
2.
3. *$\mu p.p.$, l'application $u \mapsto f(u,x)$ est continue en u_0*
4. *Il existe une application $g : E \to [0, +\infty[$, intégrable telle*
$$\forall u \in U, \mu p.p., |f(u,x)| \leq g(x)$$

Alors, $F(u) = \int f(u,x)\mu(\mathrm{d}x)$ est bien définie et est continue en u_0.

Démonstration. Par l'hypothèse ($iii.$), F est bien définie.
Soit (u_n) une suite de limite u_0. Par ($ii.$), $f(u_n,x) \to_{n\to\infty} f(u_0,x), \mu p.p.$. Par ($iii.$), on peut appliquer le théorème de convergence dominée 2.2.2, ce qui donne le résultat par caractérisation séquentielle de la limite. ■

Corollaire 2.3.1.1. *Les fonctions définies en exemple sont continues.*

Théorème 2.3.2 (De Dérivation sous l'intégrale)**.** *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, $u_0 \in U$. Soit $f : U \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant :*

1. *$\forall u \in U$, $x \mapsto f(u,x)$ est mesurable*
2. *$\mu p.p.$, $u \mapsto f(u,x)$ est dérivable en u_0*
3. *il existe g positive intégrable, telle que $\mu p.p.$:*
$$\forall u \in U, |f(u,x) - f(u_0,x)| \leq g(x)\,|u - u_0|$$

Alors :
$$F(u) = \int f(u,x)\mu(\mathrm{d}x) \text{ est dérivable et } F^{'}(u_0) = \int \frac{\partial f}{\partial u}(u_0,x)\mu(\mathrm{d}x)$$

Démonstration. On applique le TCD 2.2.2 à $\varphi_n(x) = \frac{f(u_n,x)-f(u_0,x)}{u_n-u_0}$ où $u_n \to u_0$. ■

Corollaire 2.3.2.1. *En choisissant pour la transformée de fourier des fonctions dont les premiers moments sont intégrables, on gagne en régularité. En particulier, si une fonction est à support compact, sa transformée de fourier est indéfiniment dérivable.*

3 Mesures Produits

On se donne $(E_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$, et on veut :

1. Définir une mesure produit sur $(E_1 \times E_2, \mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2)$
2. Démontrer les théorèmes de Fubini sur la mesure ainsi définie.

3.1 Préliminaires

Définition 3.1.1. *Soit $C \in \mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2, x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$. On note :*

$$C_{x_1} = \{y \in E_2 \mid (x_1, y) \in C\}$$
$$C_{x_2} = \{y \in E_1 \mid (y, x_2) \in C\}$$

On définit par ailleurs, si $f : (E_1 \times E_2, \mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, les applications partielles f_{x_1} et f^{x_2}.

Lemme 3.1.1.
- *$\forall C \in \mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2, x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$, $C_{x_1} \in A_2$ et $C^{x_2} \in A_1$*
- *f_{x_1} et f^{x_2} sont mesurables.*

Démonstration.
- On introduit la classe des C_{x_1} pour $x_1 \in E_1$. Cette classe contient les pavés et est une tribu, i.e. $\mathcal{C} = \mathcal{A} \bigotimes \mathcal{B}$.
- Pour toute partie mesurable D de $\mathbb{R}$,

$$f_{x_1}^{-1}(D) = \left\{x_2 \in E_2 \mid (x_1, x_2) \in f^{-1}(D)\right\} = \left(f^{-1}(D)\right)_{x_1}$$

■

3.2 Construction de la mesure-produit.

Théorème 3.2.1.
1. *Il existe une unique mesure m sur $(E_1 \times E_2, \mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2)$ telle que :*

$$\forall A \in \mathcal{A}_1,\ \forall A_2 \in \mathcal{A}_2,\ m(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\,\mu_2(A_2)$$

   Cette mesure est σ-finie et notée $m = \mu_1 \otimes \nu$
2. *Pour tout $C \in \mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2$:*

$$\mu_1 \otimes \mu_2(C) = \int_E \mu_2(C_{x_1})\,\mu_1(\mathrm{d}x_1) = \int_F \mu_1(C^{x_2})\,\mu_2(\mathrm{d}x_2)$$

Démonstration.
- Unicité : Lemme de Classe Monotone sur la classe des pavés mesurables.
- Existence : On pose $m(C)$ comme dans le second point et on vérifie le résultat en supposant d'abord μ_2 finie puis σ-finie.

■

3.3 Théorème de Fubini

Théorème 3.3.1 (Fubini-Tonelli)**.** *On suppose μ_1, μ_2 σ-finies. Soit $f : E_1 \times E_2 \to [0, \infty]$ une fonction mesurable :*
- *Les fonctions :*

$$x \mapsto \int f(x,y)\mu_2(\mathrm{d}y)$$
$$y \mapsto \int f(x,y)\mu_1(\mathrm{d}x)$$

  sont E_1 et E_2 mesurables respectivement.
- *On a :*

$$\int_{E_1 \times E_2} f \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(x,y)\mu_2(\mathrm{d}y) \right) \mu_1(\mathrm{d}x) = \int_{E_2} \left(\int_{E_1} f(x,y)\mu_1(\mathrm{d}x) \right) \mu_2(\mathrm{d}y)$$

Autrement dit, pour une fonction positive, ça marche.

Théorème 3.3.2 (Fubini-Lebesgue)**.** *Soit* $f \in \mathcal{L}^1(E_1 \times E_2, \mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$*. Alors :*

1. $\mu_1(\mathrm{d}x_1)$ *p.p.,* $y \mapsto f(x, y)$ *est dans* $\mathcal{L}^1(E_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$*,*
   $\mu_2(\mathrm{d}x_2)$ *p.p.,* $x \mapsto f(x, y)$ *est dans* $\mathcal{L}^1(E_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$
2. *Les fonctions* $x \mapsto \int f(x, y)\mu_2(\mathrm{d}y)$ *et* $y \mapsto \int f(x, y)\mu_1(\mathrm{d}x)$*, bien définies sauf sur un ensemble mesurable de mesure nulle sont respectivement dans* $\mathcal{L}^1(E_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ *et* $\mathcal{L}^1(E_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$*.*
3. *On a :*

$$\int_{E_1 \times E_2} f \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(x_1, x_2)\mu_2(\mathrm{d}x_2) \right) \mu_1(\mathrm{d}x_1) = \int_{E_2} \left(\int_{E_1} f(x_1, x_2)\mu_1(\mathrm{d}x_1) \right) \mu_2(\mathrm{d}x_2)$$

Autrement dit, pour une fonction intégrable (même à valeurs complexes), ça se passe bien.

3.4 Applications

3.4.1 Intégration par Parties

Définition 3.4.1. *Pour* f, g *deux fonctions mesurables de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *localement intégrables (i.e. intégrables sur tout compact pour la mesure de Lebesgue), on pose pour* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$
$$G(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$$

Théorème 3.4.1 (IPP)**.** *Pour tous* $a < b$*, on a :*

$$F(b)G(b) = F(a)G(a) + \int_a^b f(t)G(t)\mathrm{d}t + \int_a^b F(t)g(t)\mathrm{d}t$$

3.4.2 Convolution

Définition 3.4.2. *Si* f *et* g *sont deux fonctions mesurables sur* $\mathbb{R}^d$*, la convolution :*

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y)\mathrm{d}y$$

est bién définie si :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x - y)g(y)| \, \mathrm{d}y < \infty$$

Alors, on a $g \star f(x) = f \star g(x)$

Proposition 3.4.1. *Soient* $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$*. Alors, pour* λ *presque tout* $x \in \mathbb{R}^d$*, la convolution* $f \star g(x)$ *est bien définie. De plus* $f \star g \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ *et* $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$*.*

3.4.2.1 Approximations de Dirac

Définition 3.4.3. *On dit qu'une suite* $\varphi_n \in C_c\left(\mathbb{R}^d\right)$ *est une approximation de* δ_0 *si :*

- *Il existe un compact* K *tel que supp(*φ_n*)* $\subset K$ *pour tout* n*.*
- *Pour tout* n*,* $\varphi_n \geq 0$ *et*
$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(x)\mathrm{d}x = 1$$
- *Pour tout* $\delta > 0$*,*
$$\lim_{n \to \infty} \int_{\{|x| > \delta\}} \varphi_n(x)\mathrm{d}x = 0$$

Proposition 3.4.2. *En prenant $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ est continue à support compact de mesure 1, avec $\varphi_n(x) = n^d\varphi(nx)$, on a construit des approximations de Dirac.*
En prenant par exemple $\varphi(x) = c\exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right)\mathbb{1}_{\{|x|<1\}}$, et en choisissant $c > 0$ correctement, on a même une approximation C^∞.

Proposition 3.4.3.
1. *Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est continue, on a $\varphi_n \star f \to f$ quand $n \to \infty$, uniformément sur tout compact.*
2. *Si $f \in \mathcal{L}^p\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right), \lambda\right)$, avec $p \in [1,\infty[$, on a $\varphi_n \star f \to f$ dans $\mathcal{L}^p$.*

3.4.3 Calcul du Volume de la Boule Unité

On note ici B_d la boule unité fermée de $\mathbb{R}^d$ et λ_d la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. En vue de calculer $\gamma_d = \lambda_d\left(B_d\right)$, on observe que l'image de λ_d par $x \mapsto ax$ est $a^{-d}\lambda_d$ pour tout $a > 0$. Par théorème de Fubini, si $d \geq 2$, on montre que $\gamma_d = \gamma_{d-1}I_{d-1}$ en posant pour $n \geq 0$, $I_n = \int_{-1}^1 \left(1-x^2\right)^{n/2} \mathrm{d}x$. Or, par IPP, $I_n = \frac{n}{n+1}I_{n-2}$. D'où $\gamma_d = I_{d-1}I_{d-2}\gamma_{d-2} = \frac{2\pi}{d}\gamma_{d-2}$ et donc $\gamma_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}$ et $\gamma_{2k+1} = \frac{\pi^k}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}$. On peut regrouper ces résultats sous :

$$\gamma_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}$$

4 Espaces L^p

4.1 Définition et Inégalités

Définition 4.1.1. *Soit f et g des fonctions mesurables à valeurs réelles, on dit que $f \sim g$ si et seulement si $f = g$, μ p.p. C'est une relation d'équivalence.*

Définition 4.1.2. *Soit alors : $p \in [1, +\infty)$. On note :*

$$\mathcal{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu) = \left\{f : E \to \mathbb{R},\ \textit{mesurable}\ \mid \int_E |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty\right\}$$

On définit alors : $L^p(E, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)/\sim$.
On définit de plus :

$$\mathcal{L}^\infty(E, \mathcal{A}, \mu) = \{f : E \to \mathbb{R},\ \textit{mesurable}\ \mid \exists C > 0,\ |f| \leq C,\ \mu \text{ p.p.}\}$$

On définit alors : $L^\infty(E, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^\infty(E, \mathcal{A}, \mu)/\sim$.

On fera systématiquement l'abus d'utiliser un système de représentants.

Définition 4.1.3. *On note, pour $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable, avec $\infty^{\frac{1}{p}}$, si $p \in [1, \infty[$:*

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

et :

$$\|f\|_\infty = \inf\{C \in [0,\infty] \mid |f| \leq C, \mu \text{ p.p.}\}$$

Proposition 4.1.1.
- *Si $f \in L^\infty$, alors $|f| \leq \|f\|_\infty, \mu$ p.p.*
- *Si $f \in L^p, p \in [1,\infty]$, $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$.*
- *Les $\|\cdot\|_p$ sont des normes.*

Définition 4.1.4. *Soient $p, q \in [1,\infty]^2$, on dit que p et q sont conjugués si*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

En particulier, $p = 1$ et $q = \infty$ tout comme 2 et 2 sont conjugués

Lemme 4.1.1 (Inégalité d'Young)**.** *Soit $p, q \in]1, \infty[$ conjugués. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:*

$$|ab| \leq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{q}|b|^q$$

Proposition 4.1.2 (Inégalité de Hölder)**.** *Soient p, q conjugués. Soit $f \in L^p$, $g \in L^q$. Alors, fg est intégrable et :*

$$\int |fg| \, \mathrm{d}\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Première partie
Probabilités

5 Théorie des Probabilités

5.1 Loi de Probabilité

Définition 5.1.1. *Un espace probabilisé est un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ muni d'une mesure P de masse totale 1. Pour $A \in \mathcal{A}, P(A)$ représente la probabilité d'occurrence de l'évènement A.*

Définition 5.1.2. *Une application mesurable $X : \Omega \to E$ est appelée variable aléatoire à valeurs dans E.*
La loi de la variable aléatoire X est la mesure image de P par X notée

$$P(X \in B) = P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right)$$

Définition 5.1.3.

- *Variables Aléatoires Discrètes : C'est le cas où E est dénombrable et $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$. La loi de X est alors*

$$P_X = \sum_{x \in E} P(X = x)\delta_x$$

- *Variables Aléatoires à Densité : Une variable aléatoire X à valeurs dans $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\right)$ est dite à densité si P_X est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ. Il existe alors $p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ telle que*

$$P_X(B) = \int_B p(x) \, \mathrm{d}x$$

  La fonction p, unique à un ensemble de mesure nulle près, est appelée la densité de X.

Définition 5.1.4. *Soit X une variable aléatoire réelle. On note*

$$E[X] = \int_\Omega X(\omega) P(\,\mathrm{d}\omega)$$

qui est bien définie si $X \geq 0$ et alors $E[X] \in [0, \infty]$ ou si $E[|X|] < \infty$. On étend cette définition dans $\mathbb{R}^d$ avec $E\left[(X_1, \ldots, X_d)\right] = (E[X_1], \ldots, E[X_d])$.

Proposition 5.1.1. *Si $X = \mathbb{1}_B, E[X] = P(B)$*

Proposition 5.1.2. *Soit X v.a. à valeurs dans E. Si $f : E \to [0, \infty]$ est mesurable :*

$$E[f(X)] = \int_E f(x) P_X\left(\,\mathrm{d}x\right)$$

Démonstration. Découle des propositions sur la composition de fonctions mesurables. ■

Proposition 5.1.3. *Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Supposons que la loi de X a densité $p\left(x_1, \ldots, x_d\right)$. Alors, pour tout j, la loi de X_j a une densité donnée par*

$$p_j(x) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} p\left(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_d\right) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{j-1} \, \mathrm{d}x_{j+1} \ldots \mathrm{d}x_d$$

La loi de X détermine entièrement les lois marginales de X, mais la réciproque est fausse.

Démonstration. Direct. ■

5.1.1 Lois de Probabilité

Définition 5.1.5. • *Lois Discrètes :*

— *Loi Uniforme : Si E est un ensemble fini, $|E| = n$, une v.a. X est de loi uniforme sur E, $X \sim \mathcal{U}(E)$, si*

$$P(X = x) = \frac{1}{n}$$

— *Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$: X à valeurs dans $\{0,1\}$ suit une telle loi, $X \sim \mathcal{B}(p)$ si $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p$.*

— *Loi Binômiale $\mathcal{B}(n,p), n \in \mathbb{N}^*, p \in [0,1]$: $P(X = k) = C_n^k (1-p)^{n-k} p^k$.*

— *Loi Géométrique de paramètre $p \in]0,1[$: $X \sim \mathcal{G}(p)$ si $P(X = k) = (1-p)\, p^k$*

— *Loi de poisson de paramètre $\lambda > 0$: $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.*

• *Lois Continues/à Densité :*

— *Loi Uniforme sur $[a,b]$: $p(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$*

— *Loi Exponentielle de paramètre $\lambda > 0$: $p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$*

— *Loi Gaussienne ou Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2), m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$: $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$*

5.1.2 Des Propriétés

Définition 5.1.6. *La fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X est la fonction $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par :*

$$F_X(t) = P(X \leq t) = P_X\left(]-\infty t]\right)$$

La fonction F_X est croissante, continue à droite, et a pour limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$.

Proposition 5.1.4. *La fonction de répartition caractérise la variable aléatoire et les sauts de F_X correspondent aux atomes de P_X. De plus :*

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a^-)$$
$$P(a < X < b) = F_X(b^-) - F_X(a)$$

Démonstration. Découle des résultats d'intégration. ■

Définition 5.1.7. *On définit la tribu engendrée par une variable aléatoire dans un espace mesurable comme la plus petite tribu sur Ω qui rende X mesurable :*

$$\sigma(X) = \left\{A = X^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{E}\right\}$$

Proposition 5.1.5. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $E, \mathcal{E}$. Soit Y une v.a. réelle. Il y a équivalence entre :*

1. *Y est $\sigma(X)$-mesurable.*
2. *Il existe une fonction mesurable de $E, \mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $Y = f(X)$.*

Démonstration. ii) implique i) est directe. Si Y est $\sigma(X)$-mesurable. On traite le cas où Y est étagée, puis on conclut car Y est limite simple de v.a. Y_n étagées et $\sigma(X)$-mesurables. ■

5.2 Moments de Variables Aléatoires

Définition 5.2.1. *Le moment d'ordre p de X est $E[X^p]$. On appelle moment absolu d'ordre p de X la quantité $E[X^p]$.*

Proposition 5.2.1. • *Par Convergence Monotone : $X_n \geq 0, X_n \uparrow X \Rightarrow E[X_n] \uparrow E[X]$*

• *Lemme de Fatou : $X_n \geq 0 \Rightarrow E[\liminf X_n] \leq \liminf E[X_n]$*

• *Convergence Dominée : $|X_n| \leq Z$, $E[Z] < \infty$, $X_n \to X$ p.p. $\Rightarrow E[X_n] \to E[X]$.*

Proposition 5.2.2. *Inégalité de Cauchy-Schwarz :* $E[|XY|] \leq \sqrt{E[X^2]E[Y^2]}$. *Dans le cas où* $Y = 1$ *on a :* $E[|X|]^2 \leq E[X^2]$

Les espaces $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sont définis pour tout $p \in [1, \infty]$ par le quotient pour la relation "P presque partout" des fonctions dont le moment d'ordre p est défini.

Définition 5.2.2. *Soit* $X \in \mathcal{L}^2$, *la variance de* X *est :*

$$\operatorname{var}(X) = E\left[(X - E[X])^2\right]$$

et l'écart-type de X *est :*

$$\sigma_X = \sqrt{\operatorname{var}(X)}$$

Proposition 5.2.3. *On a :* $\operatorname{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$ *et si* $a \in \mathbb{R}$ *:*

$$E[(X-a)^2] = \operatorname{var}(X) + (E[X] - a)^2$$

Ainsi :

$$\operatorname{var}(X) = \inf_{a \in \mathbb{R}} E[(X-a)^2]$$

Démonstration. Calculer. ■

Proposition 5.2.4. *Si* $X \in \mathcal{L}^2$ *et* $a > 0$ *:*

- *Inégalité de Markov :* $P(X \geq a) \leq \frac{1}{a}E[X]$
- *Inégalité de Bienaymé-Tchébychev :* $P(|X - E[X]| \geq a) \leq \frac{1}{a^2}\operatorname{var}(X)$

Démonstration. Utiliser l'Inégalité de Markov pour $(X - E[X])^2$. ■

Définition 5.2.3. *Si* $X, Y \in \mathcal{L}^2$, *la covariance de* X *et* Y *est :*

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

On définit pour un vecteur aléatoire à valeurs dans R^d *:*

$$K_X = (\operatorname{cov}(X_i, X_j))_{i,j \in [\![1,d]\!]}$$

$X, Y \to \operatorname{cov}(X, Y)$ *est bilinéaire et* K_X *est symétrique positive.*

Définition 5.2.4. *Si* X *est une v.a. à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *la fonction caractéristique de* X *est* $\Phi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *définie par :*

$$\Phi_X(\xi) = E[\exp\left(i\xi\dot{X}\right)] = \int e^{i\xi\dot{x}} P_X(\,\mathrm{d}x)$$

Lemme 5.2.1. *Soit* $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ *:*

$$\Phi_X(\xi) = \exp\left(-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}\right)$$

Démonstration. On calcule, en dérivant sous le signe intégrale. ■

Théorème 5.2.2. *La fonction caractéristique caractérise la loi.*

Démonstration. On traite le cas $d = 1$ puis on applique le théorème de Fubini-Lebesgue. ■

Définition 5.2.5. *On définit la fonction génératrice* g_X *d'une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *sur l'intervalle* $[0, 1]$ *par :*

$$g_X(r) = E[r^X] = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = n) r^n$$

Proposition 5.2.5.

- g_X *est continue sur* $[0, 1]$
- $g_X(0) = P(X = 0), g_X(1) = 1$.
- *La focntion caractéristique caractérise la loi puisque les* $P(X = n)$ *sont les coefficients (uniques) du développement de Taylor de* g_X *en* 0.
- $\lim_{r \uparrow 1} g_X^{(p)}(r) = E\left[X(X-1)\cdots(X-p+1)\right]$

6 Indépendance

6.1 Définitions

Définition 6.1.1. *Deux évènements sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. n évènements sont indépendants si pour tout sous-ensemble non vide de $\{1, \ldots, n\}$ on a :*

$$P\left(\bigcap_{j \in J \subset [\![1,n]\!]} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

Proposition 6.1.1. *Les n évènements $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants si et seulement si, quand $B_i \in \sigma(A_i) = \left\{\varnothing, A_i, A_i^{\complement}, \Omega\right\}$:*

$$P\left(\bigcap_{j \in [\![1,n]\!]} B_j\right) = \prod_{j \in [\![1,n]\!]} P(B_j)$$

Définition 6.1.2.
- *Soient $\mathcal{B}_1, \ldots \mathcal{B}_n$ n sous-tribus de $\mathcal{A}$. Ces sous-tribus sont indépendantes si et seulement si toute familles d'évènements de ces tribus l'est.*
- *Soient $X_1, \ldots, X_n$ n v.a. à valeurs dans $E_1, \ldots, E_n$. Ces variables sont indépendantes si les tribus qu'elles engendrent le sont, i.e. si*

$$\forall F_1 \in \mathcal{E}_1, \ldots, \forall F_n \in \mathcal{E}_n,\ P\left(\bigcap_{i \in [\![1,n]\!]} \{X_i \in F_i\}\right) = \prod_{i \in [\![1,n]\!]} P(X_i \in F_i)$$

Théorème 6.1.1. *Les n variables aléatoires sont indépendantes si et seulement si la loi du n-uplet $(X_1, \ldots, X_n)$ est le produit des lois de ses composantes :*

$$P_{(X_1, \ldots, X_n)} = P_{X_1} \bigotimes \cdots \bigotimes P_{X_n}$$

On a alors, si les f_i sont mesurables positives sur $(E_i, \mathcal{E}_i)$:

$$E\left[\prod_{i=1}^{n} f_i(X_i)\right] = \prod_{i=1}^{n} E\left[f_i(X_i)\right]$$

Corollaire 6.1.1.1. *Si $X_1, X_2 \in \mathcal{L}^2$ sont indépendantes :* $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = 0$.

Corollaire 6.1.1.2. *Soient X_1, X_n n v.a. réelles.*

1. *Si P_{X_i} est de densité p_i et que les variables sont indépendantes. Alors :*

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i \in [\![1,n]\!]} p_i(x_i)$$

2. *Inversement, si la loi de $(X_1, \ldots, X_n)$ a une densité de la forme*

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i \in [\![1,n]\!]} q_i(x_i)$$

où les q_i sont boréliennes positives sur $\mathbb{R}$. Alors les variables sont indépendantes et leurs densités sont proportionelles à q_i.

Proposition 6.1.2. *Soient $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$ des sous-tribus de $\mathcal{A}$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{B}_i$ une classe stable par intersections finies, contentant Ω et engendrant $\mathcal{B}_i$. Si*

$$\forall C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}_1 \times \ldots \mathcal{C}_n, P\left(\bigcap_{i \in [\![1,n]\!]} C_i\right) = \prod_{i \in [\![1,n]\!]} P(C_i)$$

alors les tribus $\mathcal{B}_i$ sont indépendantes.

Corollaire 6.1.1.3. *On en déduit le lemme de regroupement par paquets. Si on regroupe des tribus en partition, les tribus que chacune des classes engendrent sont indépendantes, et de même pour des variables aléatoires.*

6.2 Hahn-Kolmogorov

Théorème 6.2.1 (de Hahn-Kolmogorov)**.** *Soit Ω un ensemble, $\mathcal{A}$ une algèbre sur Ω. Soit $m : \mathcal{A} \to \Omega$ telle que :*

- $m(\varnothing) = 0$ *et* $m(\Omega) = 1$
- *Si A_n est une suite d'éléments disjoints de $\mathcal{A}$ telle que $\cup_n A_n \in \mathcal{A}$, alors $m(\cup_n A_n) = \sum_n m(A_n)$.*

Alors, il existe une tribu $\mathcal{T}$ contenant $\mathcal{A}$ et une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ telle que restreinte à $\mathcal{A}$ ce soit m.

Remarque 6.2.1.1. *On appliquera ce résultat avec $\Omega = \prod E_n$, $\mathcal{A} = B_\infty$.*

Lemme 6.2.2. *On définit pour $A \in P(\Omega)$,*

$$m^\star(A) = \inf_{A \subset \bigcup_n A_n} \sum_{n \in \mathbb{N}} m(A_n)$$

Alors $m^\star$ est une mesure extérieure :

- $m^\star(\varnothing) = 0$
- *Si $A \subset B$, $m^\star(A) \leq m^\star(B)$.*
- $\forall\ A_n \in P(\Omega)^{\mathbb{N}}$

$$m^\star\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} m^\star(A_n)$$

De plus $m^\star$ est égale à m sur $\mathcal{A}$.