Sur le Théorème de Partage des Nouilles

Cours TalENS n°2

Matthieu Boyer

16 Décembre 2023

/home/matthieu/Documents/ETUDES/ENS/ens_psl.pdf

Table des matières

Introduction

Placez vous dans la situation suivante :

- Avec plusieurs de vos amis, vous avez décidé de faire un gâteau.
- Une fois celui-ci cuit, vient le moment de le découper.
- Comment faire pour le découper sans que personne ne soit lésé et que le découpeur ne soit assailli pour ses préférences dans le groupe d'amis.

Vous apprendrez plus tard dans votre vie, qu'en réalité, l'application la plus utile de ce que nous allons voir est en réalité une application au découpage de nouilles.

1 Préliminaires

1.1 Combinatoire

Définition 1.1: Partition d'un Ensemble

On appelle partition d'un ensemble toute sous division de cet ensemble en plusieurs parties sans recouvrement.
Formellement, pour un ensemble X, il s'agit d'un ensemble $(X_i)_{i\in I}$ tel que :

$$\bigcup_{i\in I} X_i = X \text{ et } X_i \cap X_j = \varnothing$$

Par exemple :

- $\{\{1,3\},\{2,4\}\}$ est une partition de $[\![1,4]\!]$
- Dans le cas de $[0,1]$ on dénote une partition comme une suite strictement croissante de réels $x_1,\ldots,x_n$ de sorte qu'on *découpe* l'intervalle en plus petits intervalles.

n	$n!$	n	$n!$	n	$n!$
0	1	5	120	10	3628800
1	1	6	720	11	39916800
2	2	7	5040	12	479001600
3	6	8	40320	13	6227020800
4	24	9	362880	14	87178291200

TABLE 1 – Quelques valeurs de $n!$

Définition 1.2: Permutations d'un Ensemble

On appelle permutation d'un ensemble, toute manière de le réordonner.
Formellement, il s'agit d'une bijection d'un ensemble et dans lui-même, puisqu'il s'agit juste de renommer chaque élément.
On note souvent les permutations entre parenthèses : $(1\ 2\ 3)$ est une permutation de l'ensemble $[\![1,3]\!]$ mais aussi de $[\![1,4]\!]$.
Dans le cas de l'ensemble $[\![1,n]\!]$, on note l'ensemble de ses permutations $\mathfrak{S}_n$ et on l'appelle Groupe Symétrique d'ordre n.

Proposition 1.3: Cardinal de $\mathfrak{S}_n$

On a :

$$|\mathfrak{S}_n| = n! = \prod_{i=1}^{n} i$$

avec la convention usuelle :

$$\prod_{i\in\varnothing} = 1$$

Démonstration. Choisir une bijection de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ c'est :

- Choisir l'image de 1 : n choix
- Choisir l'image de 2 dans $[\![1,n]\!] \setminus \{\sigma(1)\}$ pour ne pas briser l'injectivité : $n-1$ choix
- $\vdots$
- Choisir l'image de i dans les valeurs restantes : $n-i+1$ choix
- $\vdots$
- Choisir l'image de $n-1$: 2 choix
- Choisir l'image de n : 1 choix

Finalement on a bien :

$$\prod_{i=1}^{n}(n-i+1) = \prod_{i=1}^{n} i = n!$$

choix de permutations possibles. ■

1.2 Mesures et Probabilités

Définition 1.4: Mesure Positive sur une Tribu

On appelle mesure μ sur un ensemble E une application d'une tribu $\mathcal{A}$ de l'ensemble de ses parties à valeurs positives qui vérifie deux propriétés :

- $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$
- $\mu(\varnothing) = 0$

Proposition 1.5: Propriétés des Mesures

On a :

- $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$
- Si $A \subseteq B$: $\mu(A) \leq \mu(B)$ et $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

Démonstration. Découle immédiatement de la propriété d'additivité en remarquant que : $A \cup B = A \sqcup (B \setminus (A \cap B))$ et $B = A \sqcup (B \setminus A)$ puis par positivité de la mesure. ■

Quelques Mesures :

- La mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathbb{P}(\mathbb{N}))$: $\mu(A) = |A|$
- La mesure de Dirac en x sur $(E, \mathcal{A})$ quelconque : $\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- La mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$: $\lambda\left([a, b]\right) = b - a$

Définition 1.6: Mesure de Probabilité

Une mesure de probabilité p sur un univers (un ensemble Ω) est une mesure sur les parties de cet univers (les évènements) de masse totale $\mu(\Omega) = 1$.
L'application de cette fonction à un évènement représente la probabilité de celui-ci. On peut généraliser la propriété sur l'union ci-dessus à un nombre dénombrable d'évènements.

Définition 1.7: Atomicité et Densité

Dans le cas d'une mesure de probabilité p sur un ensemble continu, on dit qu'elle est non-atomique lorsque $p(\{x\}) = 0$.
On dit de plus qu'elle est à densité lorsqu'il existe une fonction μ_p telle que :

$$\forall A \subseteq \Omega, p(A) = \int_A \mu_p \, \mathrm{d}\lambda$$

où la mesure de Lebesgue λ correspond *intuitivement* à la taille de l'ensemble A puisqu'en particulier $\lambda([a, b]) = b - a$.

2 Modélisation Mathématique

2.1 Situation Initiale

2.1.1 Combinatoire

Ici, on représente le gâteau de manière continue par le segment $[0, 1]$. On dit que c'est une description continue du problème puisque l'ensemble considéré n'est pas dénombrable.
Puisque la faim de chacun ne dépend pas de la position autour de la table, on doit pouvoir résoudre

le problème, quel que soit l'ordre des mangeurs, i.e. quelle que soit la permutation [1] de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ des mangeurs.
On cherche alors une partition du gâteau, i.e. du segment $[0, 1]$, dépendant de la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ des mangeurs.

2.1.2 Mesures et Probabilités

Supposons notre gâteau hétérogène (mettons, un gâteau marbré). Chacun de nos mangeurs ayant sa préférence, on représente leur appétance pour les parties du gâteau par une mesure de probabilité à densité sur ce gâteau.
La part que l'un de nos mangeurs va manger est alors, par définition de l'intégrale par rapport à une mesure :

$$\mu_i(X_i) = \int_{X_i} f_i \, \mathrm{d}\mu_i$$

Intuitivement, c'est une somme [2] sur chaque petite portion du gâteau de l'appétance du mangeur i pour cette portion.

2.2 Objectif

On a plusieurs manières de juger de la manière de couper le gâteau :

- Proportionellement : $\forall i \in [\![1, n]\!], \mu_i(X_i) \geq \frac{1}{n}$
- Exactement : $\forall i \forall j, \mu_i(X_j) = \frac{1}{n}$
- Sans Avarice : $\forall i, \forall j, \mu_i(X_i) \geq \mu_i(X_j)$
- Equitablement : $\forall i, \forall j, \mu_i(X_i) = \mu_j(X_j)$

On choisit ici de s'intéresser au partage Équitable du gâteau, mais des résultats existent sur les autres types de partage.
On veut alors démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.1: de Partage des Nouilles [a]

a. Notation Étudiante

Pour toutes fonctions de densités f_i et permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on considère le système $(\star)$ suivant :

$$\int_0^{x_1} f_{\sigma(1)}(x)\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} f_{\sigma(2)}(x)\mathrm{d}x = \ldots = \int_{x_n}^{1} f_{\sigma(n)}(x)\mathrm{d}x \qquad (\star)$$

Celui-ci a une solution.

3 La Démonstration

3.1 Quelques Lemmes

Définition 3.1: Catégorie de Lusternick-Schnirelmann

On définit la Catégorie de Lusternick-Schnirelmann d'un espace X noté $\mathrm{cat}(X)$ comme le nombre minimal (moins 1) d'ensembles ouverts contractables en un point suffisant à le recouvrir. Un ensemble est contractable à un point si il se déforme continuement en un point.

1. Ceci n'a en réalité presqu'aucune importance, il s'agit plus d'un prétexte pour parler de permutations...
2. C'est une vision très physicienne/historique de l'intégrale

Lemme 3.2: Catégorie des Espaces Projectifs

On a : $\text{cat}(\mathbb{R}P^n) = n$

Démonstration. On a $H^\star(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 [X_1] / \left(x_1^{n+1}\right)$. Donc $\text{cup}(\mathbb{R}P^n) = n$ et comme on a toujours : $\text{cup}(X) \leq \text{cat}(X) \leq \dim(X)$ d'où : $n = \text{cup}(\mathbb{R}P^n) \leq \text{cat}(\mathbb{R}P^n) \leq \dim(\mathbb{R}P^n) = n$ ■

Théorème 3.3: de Lusternick-Schnirelmann

Si S^n est recouvert par des ensembles ouverts $C_0, \ldots, C_{n-1}$, alors au moins l'un d'entre eux contient des points antipodaux.

Démonstration. Supposons qu'aucun ne contiennent de points antipodaux. Soit $A_i \subseteq B^{n+1}$ l'ensemble fermé des rayons aux points de C_i. En notant la relation $\sim$ d'indentification de S^n aux antipodes, on a : $\mathbb{R}P^{n+1} = B^{n+1}/\sim$. Par hypothèse comme C_i n'a pas de points antipodaux, $A_i \hookrightarrow \mathbb{R}P^{n+1}$ est injective et donc, A_i se contractant en un point, $\mathbb{R}P^{n+1}$ est recouvert par $A_0, \ldots, A_{n-1}$, ce qui contredit le théorème précédent. ■

Une conséquence assez directe de résultat est le théorème suivant :

Théorème 3.4: Borsuk-Ulam

Si f est une fonction continue sur une sphère de dimension n à valeurs dans un espace euclidien de dimension n, il existe deux points antipodaux sur cette sphère de même image par f. Autrement dit, à isomorphisme près :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0 \left(S^n, \mathbb{R}^n\right), \ \exists x_0 \in S^n, \ f(x_0) = f(-x_0)$$

Remarque 3.5

En physique, on considère que toutes les fonctions de l'espace (pression, température, humidité...) sont continues, dérivables et même à peu près tout ce dont on a envie.
Mais, puisque toutes les sphères s'obtiennent par homothétie et translation les unes par rapport aux autres, le théorème de Borsuk-Ulam est valide sur toute sphère.
Et, en physique, on connaît quelque chose qui ressemble très fortement à une sphère.
Ainsi, à tout instant, il existe sur Terre deux points antipodaux qui ont même pression, même température et même taux d'humidité.

3.2 Démonstration du Théorème de Partage des Nouilles

On rappelle le Théorème :

Théorème 3.6: de Partage des Nouilles

Pour toutes fonctions de densités f_i et permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on considère le système $(\star)$ suivant :

$$\int_0^{x_1} f_{\sigma(1)}(x)\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} f_{\sigma(2)}(x)\mathrm{d}x = \ldots = \int_{x_n}^{1} f_{\sigma(n)}(x)\mathrm{d}x \tag{$\star$}$$

Celui-ci a une solution.

Démonstration. On introduit les fonctions $(F_i)_{i\in[\![1,n-1]\!]}$:

$$F_i : \begin{cases} S^{n-1} = \left\{ e = (e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = 1 \right\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ e \mapsto \operatorname{sgn}(e_{i+1}) \times \int_{e_1^2+\dots+e_i^2}^{e_1^2+\dots+e_i^2+e_{i+1}^2} f_{\sigma(i+1)}(x)\,\mathrm{d}x - \operatorname{sgn} e_1 \int_0^{e_1^2} f_{\sigma(1)}(x)\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

On définit alors $f(e) = (F_1(e), \dots, F_{n-1}(e))$. Il est clair que f est continue et antipodale, donc par le Théorème de Borsuk-Ulam, elle est nulle en un certain point $\tilde{e}$.
On pose alors $x_0 = 0$ puis $x_i = x_{i-1} + \tilde{e}_i^2$ ■

4 Extensions

4.1 De Borsuk-Ulam

Dans la suite, on ne détaille que certaines preuves intéressantes et plutôt graphiques Il existe de nombreuses démonstrations du théorème de Borsuk-Ulam se basant sur de nombreux domaines :

- Par la topologie algébrique : En réduisant le groupe fondamental (trivial) de la sphère (simplement connexe) à un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$ en étudiant l'image d'un lacet de S^2 par $g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{\|f(x)-f(-x)\|}$:

  Démonstration. On ne démontre ici que le cas en dimension 2, celui-ci se généralisant aisément par le lecteur curieux en dimension n. On raisonne par l'absurde, avec les notations ci-dessus. On rappelle que S^2 est simplement connexe et que son groupe fondamental est trivial. On définit sur S^2 :

  $$g : x \in S^2 \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$$

  g est bien définie puisqu'on suppose qu'il n'existe pas de point x_0 convenable. On considère le lacet α de S^2 défini par : $\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Comme g est impaire, on a, en notant g_* le morphisme du groupe fondamental de S^2 dans celui de S^1 induit par g :

  $$\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], g_*\alpha(t + 1/2) = -g_*\alpha(t) \tag{1}$$

  Par ailleurs, il existe une homotopie ρ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que le lacet $g_*\alpha$ de S^1 s'écrive :

  $$\forall t \in [0, 1], g_*\alpha(t) = (\cos(2\pi\rho(t)), \sin(2\pi\rho(t))), \text{avec } \rho(0) = 0$$

  De (**??**) on déduit alors :

  $$\forall t \in [0, 1/2] \;\; 2\nu(t) = 2(\rho(t + 1/2) - \rho(t)) \in \mathbb{Z}$$

  D'où, par continuité de la fonction ν, celle-ci étant définie sur un connexe et à valeurs dans un ensemble discret, elle est constante et s'écrit sous la forme $c/2$ où $c \mod 2 = 1$. On en déduit que :

  $$\rho(1) = \rho\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{c}{2} = \left(\rho(0) + \frac{c}{2}\right) + \frac{c}{2} = c$$

  Donc $\rho(1)$ est impair, différent de 0. En particulier, $g_*\alpha$ n'est pas homotope à un point, et fait c tours autour du cercle. Ainsi, l'image de g_* est différente de l'élément neutre, mais g_* est un morphisme du groupe trivial dans un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$, ce qui conclut le raisonnement par l'absurde. ■

- Par le Lemme de Tucker : Une triangulation antipodalement symétrique sur la boule contient une arête complémentaire. L'avantage de cette méthode étant qu'on connaît une démonstration algorithmique[3] de ce lemme.

3. Qui reste un peu hors de votre portée...

Le Théorème de Borsuk-Ulam est très, très, très utile, dans de nombreux domaines, comme l'indiquent ses multiples démonstrations :

- Théorème de Point Fixe de Brouwer :

Théorème 4.1: de Point Fixe de Brouwer

Toute fonction continue de D^n dans D^n a un point fixe.

- Théorème du Sandwich au Jambon :

Théorème 4.2: du Sandwich au Jambon

Etant données n parties Lebesgue-Mesurables d'un espace de dimension n, il existe au moins un hyperplan affine divisant chaque parties en deux sous-ensembles de mesure égales.

Démonstration. On se donne n parties de $\mathbb{R}^n$ notées X_i de mesure[4] $\lambda(X_i)$. Soient $s \in S^{n-1}$ et $t \in \mathbb{R}$. On considère

$$H^+(s,t) = \{z \in R^n, \langle z, s\rangle > t\}$$

Pour une valeur de s et pour i fixés, $f : t \mapsto \lambda(X_i \cap H^+(s,t))$ est continue et satisfait la condition de partionnage des X_i puisque $H^+(-s,-t) = \overline{H^+(s,t)}^{\complement}$.
Cette fonction est aussi décroissante sur son domaine et prend donc toutes les valeurs entre $\lambda(X_i)$ et 0. Donc il existe une valeur de t pour laquelle f *coupe* X_i en deux. De plus la fonction g telle que $\lambda(X_1 \cap H^+(s, g(s))) = \frac{\lambda(X_1)}{2}$ est continue en s. Cette fonction partage pour tout point de la sphère X_1 en deux parts égales.
On pose alors :

$$\begin{array}{rccl} h: & S^{n-1} & \to & \mathbb{R}^{n-1} \\ & s & \mapsto & (\lambda(X_2 \cap H^+(s,g(s))), \ldots, \lambda(X_n \cap H^+(s,g(s)))) \end{array}$$

et on conclut par récurrence, puisque h possède une valeur s pour laquelle $h(s) = h(-s)$. Pour ce point, l'hyperplan $\{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, s\rangle = g(s)\}$ divise chacun des X_i en parts égales. ■

- Théorème de Lovász :

Théorème 4.3: de Lovász

Si le complexe de voisinage d'un graphe est k-connecté, alors $\chi(G) \geq k+3$.

Démonstration. Ceci est beaucoup, beaucoup trop compliqué pour la portée de ce cours, mais je vous laisse un squelette de démonstration partielle pour le jour où vous comprendrez les mots écrits :

— On associe à $\mathcal{N}(G)$ un complexe simplicial $L(G)$ qui est une rétraction.
— Pour $m \geq \chi(G)$, on a une carte équivariante de $L(G)$ vers le complexe $B(K_m)$. D'où $\chi(G) \geq \mathrm{ind}L(G) + 1$
— Mais un complexe simplicial k-connecté à un indice d'équivariance supérieur à $k+1$ donc $\chi(G) \geq k+1+2 = k+3$

■

De part ces corollaires, on peut appliquer le Théorème de Borsuk-Ulam a un grand nombre de problèmes sans rapport immédiat :

4. Attention, ce n'est pas le cardinal !

- Au jeu de Hex, inventé par John Conway :

Théorème 4.4: Nullité du Jeu

La partie nulle du jeu de Hex n'existe pas.

Démonstration. C'est une application du Théorème de Point Fixe de Brouwer. Pour cela, on étudie la fonction qui a une tuile associe un coup possible selon sa position en utilisant le fait qu'un polygone convexe est homéomorphe [5] au disque unité. Cette démonstration est assez longue, et peu intéressante. ∎

- On définit le problème du collier : Deux voleurs ont dérobé un collier fait de n types de perles et souhaitent le partager également en deux [6].

Théorème 4.5: Solution du Problème du Collier

Le problème du collier dérobé a une solution en n coupes

Démonstration. On considère la courbe des moments $\gamma : t \mapsto (t, \dots, t^n)$. Tout hyperplan touche $\gamma(t)$ en au plus n points. En effet, si H est l'hyperplan donné par :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$$

ces points sont les racines de l'équation polynomiale de degré n :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i t^i = b$$

En discrétisant le théorème du Sandwich au Jambon, on obtient un hyperplan qui divise chacun des n ensembles de pierres en 2. En plaçant le collier sur la courbe γ, on a bien le résultat en au plus n coupes. ∎

- A la Coloration des Graphes : on parlera sans doute de ce sujet plus en détail dans un prochain cours, mais voici tout de même un résultat sur la coloration des graphes qui découle du théorème de Borsuk-Ulam :

Théorème 4.6: Nombre Chromatique des Graphes de Kesner

On peut partitionner les $\binom{n}{k}$ parties à k éléments d'un ensemble de n éléments en $n - 2k + 2$ classes de sorte que dans chacune des classes, on ne peut choisir deux sous-ensembles disjoints. Autrement dit, si on note $KN(n, k)$ le graphe de ces parties, $\chi(KN(n, k)) = n - 2k + 2$.

5. A la même forme que
6. Le lecteur attentif remarquera les similarités de ce problème et du théorème de partage des nouilles.