Langages Formels, Calculabilité, Complexité

Mickaël Thomazo
Lucas Larroque

28 septembre 2023

Table des matières

Première partie
Cours 1 28/09

1 Langages, Automates, RegExp, Monoïdes finis

Définition 1.0.1. *On appelle* alphabet *un ensemble fini* Σ *de lettres.*
On appelle mot *une suite finie de lettres.*
On appelle langage *un ensemble de mots*

Définition 1.0.2. *On appelle* automate sur l'alphabet Σ *un graphe orienté dont les arêtes sont étiquetées par les lettres de l'alphabet* Σ
Formellement, c'est un quadruplet $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, I, F, \delta)$ *ou :*

- Q *est un ensemble fini d'états*
- Σ *est un alphabet*
- $I \subseteq Q$
- $F \subseteq Q$
- $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$

Un calcul de $\mathcal{A}$ *sur* $w = a_0 \dots a_n$ *est une séquence* $q_0 \dots q_n$ *telle que* $q_0 \in I,\ \forall i \geq 1,\ q_i \in \delta(q_{i-1}, a_i)$
On appelle Langage reconnu par $\mathcal{A}$ *l'ensemble* $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q_0 \dots q_n \text{ calcul de } \mathcal{A} \text{ sur } w \text{ où } q_n \in F\}$
On dit que $\mathcal{A}$ *est déterministe si :*

- $\forall q, a, |\delta(q, a)| \leq 1$
- $|I| = 1$

Définition 1.0.3. *Une expression régulière est de la forme :*

- $a \in \Sigma$
- $\varnothing$
- $r + r$ *(+ désigne l'union :* $L_1 + L_2 = \{w \in L_1 \cup L_2\}$*)*
- $r \cdot r$ *(· désigne la concaténation :* $L_1 \cdot L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1,\ w_2 \in L_2\}$*)*
- r^* *(∗ désigne l'étoile de Kleene,* $L^* = \left\{ \bigodot_{w \in s} w \;\middle|\; s \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n \right\}$*)*

Définition 1.0.4 (Automate des Parties)**.** *On pose, si* $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, I, F, \delta)$ *est un automate :*

- $\hat{Q} = 2^Q = \{q_S \mid S \subset Q\}$
- $\hat{I} = \{q_I\}$
- $\hat{F} = \{q_S \mid S \cap F \neq \varnothing\}$
- $\hat{\delta}(q_S, a) = \{q_{S'}\}$ *avec* $S^{'} = \bigcup\limits_{q \in S} \delta(q, a)$

Alors, $\hat{\mathcal{A}} = (\hat{Q}, \Sigma, \hat{I}, \hat{F}, \hat{\delta})$ *est un automate déterministe reconnaissant* $\mathcal{L}(\mathcal{A})$

Démonstration. On procède par double inclusion :

- ($\subset$) On introduit un calcul de $w \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ sur $\hat{\mathcal{A}}$ et on vérifie par récurrence que son dernier état est final.
- On procède de même pour la réciproque.

∎

Définition 1.0.5. *Un monoïde est un magma associatif unifère.*
Un morphisme de monoïde est une application $\varphi : (N, \cdot_N) \to (M, \cdot_M)$ *telle que :*

- $\varphi(1_N) = 1_M$
- $\varphi(n_1 n_2) = \varphi(n_1)\varphi(n_2)$

Un langage L *est reconnu par* $(M, \times)$ *ssi il existe* $P \subset M$ *tel que* $L = \varphi^{-1}(P)$ *où* φ *est un morphisme de* Σ^* *dans* M

Proposition 1.0.1. $L \subseteq \Sigma^*$ *est reconnu par un automate ssi* L *est reconnu par un monoïde fini.*

Démonstration.

- Soit L reconnu par un monoïde fini $(M, \times)$. Soit φ un morphisme tel que $L = \varphi^{-1}(P),\ P \subset M$. On pose $\mathcal{A} = (M, \Sigma, \{1\}, P, \delta)$ où $\delta(q, a) = q \times \varphi(a)$. Alors, $\mathcal{A}$ reconnaît L.
- Soit $\mathcal{A}$, déterministe, complet, reconnaissant L. Pour $a \in \Sigma$, $a \to \varphi_a : q \in Q \mapsto \delta(q, a)$ induit par induction un morphisme de $(\Sigma^*, \cdot)$ dans $(Q^Q, \circ)$. Alors, avec $P = \left\{f \in Q^Q \mid f(i) \in F_{\mathcal{A}}\right\}$. On a défini le monoïde des transitions de $\mathcal{A}$.

∎