Cours TalENS 2023-2024

Dérivée, Volume, Aire, Périmètre

Matthieu Boyer

6 Avril 2024

Plan

Rappels Mathématiques

- Dérivation
- Polygones Réguliers et Solides de Platon

Constatations

Généralisation

Dérivée par rapport à une variable

Définition 1.1: Dérivabilité

f est dérivable si $f'(x) = \lim_{\mathrm{d}x \to 0} \frac{f(x+\mathrm{d}x)-f(x)}{\mathrm{d}x}$ existe. $f'(x)$ est la pente de la tangente à la courbe de f en x.

Dérivée par rapport à une variable

Définition 1.1: Dérivabilité

f est dérivable si $f^{'}(x) = \lim_{\mathrm{d}x \to 0} \frac{f(x+\mathrm{d}x) - f(x)}{\mathrm{d}x}$ existe. $f'(x)$ est la pente de la tangente à la courbe de f en x.

Proposition 1.1: Règles de dérivation usuelles

- $\forall n \in \mathbb{Z}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f)\, g + f \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g)$

Règle de la chaîne - Changement de Variable

Théorème 1.1: Règle de la Chaîne

Soit f dérivable, g dérivable : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(g(x))) = g'(x) \times f'(g(x))$.

Définition 1.2: Changement de Variable

On appelle poser dans f le changement de $x = g(y)$ le fait d'écrire : $f(x) = f(g(y))$.
On a alors : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(g(y)))$

Plan

Polygones Réguliers : Aire et Périmètre

Un n-gone régulier est un polygone (convexe) à n côtés de même longueur c.

Théorème 1.2: Formule de l'Aire et du Périmètre

En notant ρ l'apothème du polygone (la distance du centre à un côté) :

- $P(n, c) = nc$
- $A(n, c) = n\frac{c\rho}{2} = P(n, c)\frac{\rho}{2}$

ρ est une fonction de c.

Un catalogue des Solides de Platon

Définition 1.3: Solides de Platon

Les solides de Platon sont les polyèdres réguliers convexes, i.e. des solides dont les faces sont planes polygonales régulières, similaires et se rencontrent selon des segemnts appelés arêtes.

Un catalogue des Solides de Platon

Définition 1.3: Solides de Platon

Les solides de Platon sont les polyèdres réguliers convexes, i.e. des solides dont les faces sont planes polygonales régulières, similaires et se rencontrent selon des segemnts appelés arêtes.

Exhaustivité

Théorème 1.3: Liste des Solides de Platons

Il y en a 5 et seulement 5 : Le Tétraèdre (pyramide à 4 faces), le cube (hexaèdre), l'octaèdre, le dodécaèdre, l'icosaèdre.

Démonstration.

On a toujours : $S - A + F = 2$ et $pF = 2A = qS$, où p est le nombre de côtés des faces, et q le nombre de face se rejoignant à chaque sommet. On en déduit qu'on doit avoir : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$. Mais comme $p, q \geq 3$, on n'a bien que 5 possibilités qui sont autant de solides.

■

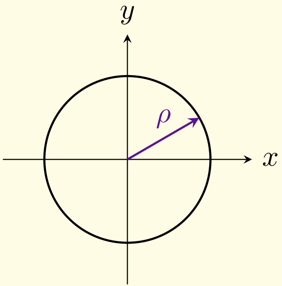
Plan

Le Cercle

Proposition 2.1: Relation Rayon-Périmètre-Aire pour le Cercle

- On a $P(\rho) = 2\pi\rho$
- On a $A(\rho) = \pi\rho^2$
- On a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}A(\rho) = P(\rho)$$

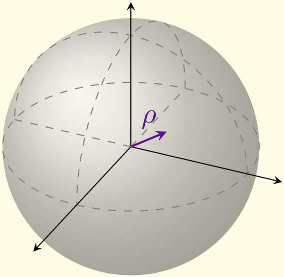


La Sphère

Proposition 2.2: Relation Rayon-Aire-Volume pour la Sphère

- On a $A(\rho) = 4\pi\rho^2$
- On a $V(\rho) = \frac{4}{3}\pi\rho^3$
- On a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}V(\rho) = A(\rho)$$



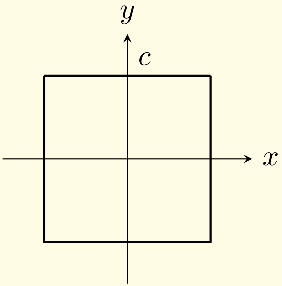
Plan

Le Carré

Proposition 2.3: Relation Rayon-Périmètre-Aire pour le Carré

- On a $P(\rho) = 4c$
- On a $A(\rho) = c^2$
- On a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} A(\rho) = \frac{1}{2} P(\rho)$$

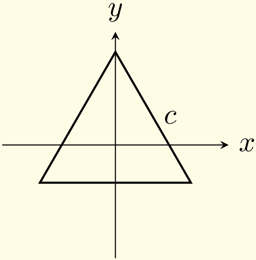


Le Triangle Equilatéral

Proposition 2.4: Relation Rayon-Périmètre-Aire pour le Triangle

- On a $P(\rho) = 3c$
- On a $A(\rho) = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$
- On a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}A(\rho) = \frac{2}{\sqrt{3}}P(\rho)$$

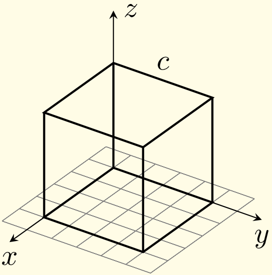


Le Cube

Proposition 2.5: Relation Rayon-Périmètre-Aire pour le Khûbe

- On a $A(\rho) = 6c^2$
- On a $V(\rho) = c^3$
- On a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} V(\rho) = \frac{1}{2} A(\rho)$$



Plan

Un Solide en d Dimensions

Définition 3.1: Solide à d Dimensions

On appelle Solide à d Dimensions une partie compacte dont les bords sont de mesure finie de l'espace à d dimensions.

Un Solide en d Dimensions

Définition 3.1: Solide à d Dimensions

On appelle Solide à d Dimensions une partie compacte dont les bords sont de mesure finie de l'espace à d dimensions.

On rappelle que la mesure d'un ensemble est sa *taille* par rapport à l'espace dans lequel il vit.

Mesure de Lebesgue et Volume

Définition 3.2: Volume d'un Pavé

Pour $\mathcal{P} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ un pavé, on définit son volume :

$$V(\mathcal{P}) = \prod_{i=1}^{n} |b_i - a_i|$$

Mesure de Lebesgue et Volume

Définition 3.2: Volume d'un Pavé

Pour $\mathcal{P} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ un pavé, on définit son volume :

$$V(\mathcal{P}) = \prod_{i=1}^{n} |b_i - a_i|$$

Théorème 3.1: Mesure de Lebesgue

Il existe une unique mesure sur $\mathbb{R}^d$ qui soit complète et coïncide sur les pavés avec leur volume. On la note λ_d.

Aire et Volume en d Dimensions

Définition 3.3: Volume et Aire d'une Partie

Étant donnée une partie $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^d$, on définit son volume par

$$V(\mathcal{P}) = \lambda_d(\mathcal{P}) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\mathcal{P}} \, \mathrm{d}\lambda_d$$

On définit de même son aire $A(\mathcal{P})$ par

$$A(\mathcal{P}) = \lambda_{d-1}(\partial\mathcal{P})$$

Plan

Famille de Lisse de Formes Uni-Paramétrées

On considère $\mathcal{F}$ une famille de formes uni-paramétrées sur un intervalle E de $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{F} = \left\{ R(s) \subset \mathbb{R}^d \;\middle|\; s \in E \right\}$$

On suppose que cette famille vient avec une fonction dérivable strictement croissante de volume $V : E \to \mathbb{R}^+$ et une fonction continue d'aire $A : E \to \mathbb{R}^+$.

Famille de Lisse de Formes Uni-Paramétrées

On considère $\mathcal{F}$ une famille de formes uni-paramétrées sur un intervalle E de $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{F} = \left\{ R(s) \subset \mathbb{R}^d \;\middle|\; s \in E \right\}$$

On suppose que cette famille vient avec une fonction dérivable strictement croissante de volume $V : E \to \mathbb{R}^+$ et une fonction continue d'aire $A : E \to \mathbb{R}^+$.
Par exemple, pour les carrés de côté > 0,
$\mathcal{C} = \left\{ [0, c] \times [0, c] \subset \mathbb{R}^2 \;\middle|\; s \in [0, +\infty[\right\}$, $V : s \mapsto s^2$ et $A : s \mapsto 6s$.

Dérivée du Volume par Rapport à...

Théorème 3.2: Relation de Dérivation Volume-Aire

Soit $\mathcal{F}$ une famille uni-paramétrée lisse de régions compactes de l'espace. Alors, il y a un changement de variable dérivable $r(s) : E \to r(E)$ défini par

$$r(s) = \int \frac{V'(s)}{A(s)} \, \mathrm{d}s$$

unique à constante près tel que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} V[s(r)] = A[s(r)], r \in r(E)$$

Preuve du Théorème Précédent

Démonstration.

Puisque V est monotone et A est positive, le signe de

$$r'(s) = \frac{V'(s)}{A(s)}$$

est constant et r est un changement de variable dérivable de E dans $r(E)$.

Par la règle de la chaîne :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} V[s(r)] = V'[s(r)]s'(r) = \frac{V'[s(r)]}{r'[s(r)]} = A[s(r)]$$

$\blacksquare$

Interprétation Géométrique - 1

- Pour une famille de carrés, $r(s) = \frac{s}{2} + k, k \in \mathbb{R}^+$

Interprétation Géométrique - 1

- Pour une famille de carrés, $r(s) = \frac{s}{2} + k, k \in \mathbb{R}^+$
- Pour une famille de cubes, $r(s) = \frac{s}{2} + k$

Interprétation Géométrique - 1

- Pour une famille de carrés, $r(s) = \frac{s}{2} + k, k \in \mathbb{R}^+$
- Pour une famille de cubes, $r(s) = \frac{s}{2} + k$
- Pour une famille de rectangles de largeur $a > 0$ et de longueur s,

$$r(s) = \frac{a}{s}\ln(2s + 2a) + k$$

Interprétation Géométrique - 1

- Pour une famille de carrés, $r(s) = \frac{s}{2} + k, k \in \mathbb{R}^+$
- Pour une famille de cubes, $r(s) = \frac{s}{2} + k$
- Pour une famille de rectangles de largeur $a > 0$ et de longueur s,
$$r(s) = \frac{a}{s} \ln(2s + 2a) + k$$
- Pour une famille de rectangles de longueur s et de largeur as où $0 < a < 1$,
$$r(s) = \frac{a}{a+1} s + k$$

Interprétation Géométrique - 2

Théorème 3.3: Famille Homogène

Dans le cas où V et A sont homogènes de degré d et $d-1$, i.e. $V(ts) = t^d V(s)$ et $A(ts) = t^{d-1}A(s)$, on a $r(s) = \mathrm{d}\frac{V(s)}{A(s)}$.

Théorème 3.4: Interprétation Géométrique

Si P est un polytope de volume V et d'aire A qu'on dilate d'une distance r centrée en p. On a alors

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = A \iff \mathbb{S}(p, r) \subseteq P$$

Preuve

Démonstration.

Soit V le volume d'un polytope P dont les faces sont d'aires A_i. On considère des cônes du point arbitraire p de P vers les faces de O et on prend r un rayon provisoire à la face la plus proche, d'aire A_0. Il existe des constantes a_i et k_i telles que $A_i = a_i A_0$ et $h_i = k_i r$ où h_i est la hauteur du i-ème cône. Ces relations subsistent par dilatation et on a toujours $k_i \geq 1$. ■

Preuve

Démonstration.

Notons que $A = \sum_i A_i = \left(\sum_i a_i\right) A_0$. De plus :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} &= \sum \frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}r} = \sum \frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}h_i} = \sum k_i A_i \\ &= \sum k_i a_i A_0 = \frac{\sum a_i k_i}{\sum a_i} \left(\sum a_i\right) A_0 \\ &= \frac{\sum k_i a_i}{\sum a_i} A\end{aligned}$$

On choisit alors un point qui minimise ce facteur en une valeur supérieure ou égale à 1. Celle-ci vaut 1 si tous les k_i valent 1, c'est à dire si P circonscrit la sphère de centre p et de rayon r. ■

Bibliographie

John Emert and Roger Nelson.
Volume and surface area for polyhedra and polytopes.
Mathematics Magazine, 70(5) :365–371, 1997.

Jean-Luc Marichal and Michael Dorff.
Derivative relationships between volume and surface area of compact regions.
ROCKY MOUNTAIN JOURNAL OF MATHEMATICS, (37) :552–571, 2007.