

Topologie et Calcul Différentiel

Djalil Chafaï

2023 - 2024

Contents

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Espaces Topologiques | 3 |
| 1.1 | Espaces à produit scalaire, espaces normés, espaces métriques, espaces topologiques. | 3 |
| 1.2 | Fermés | 3 |
| 1.3 | Voisinages, convergence et continuité. | 3 |
| 1.4 | Bases de topologie | 4 |
| 1.5 | Axiomes de Séparation | 4 |
| 1.6 | Topologies | 5 |
| 1.6.1 | Topologie Trace | 5 |
| 1.6.2 | Topologie Produit | 5 |
| 1.6.3 | Topologies Initiale et Finale | 5 |
| 1.6.4 | Topologie Quotient | 5 |
| 2 | Compacité | 6 |
| 2.1 | Quasi-Compacité | 6 |
| 2.2 | Théorème de Tykhonov | 6 |
| 2.3 | Compacité Métrique | 6 |
| 2.4 | Compacité Locale | 6 |
| 2.5 | Compactification d'Alexandrov | 7 |
| 2.6 | Théorème de Baire | 7 |
| 3 | Complétude | 7 |
| 3.1 | Suites de Cauchy | 7 |
| 3.2 | Espaces Polonais, de Banach, de Hilbert | 8 |
| 3.3 | Complétion | 8 |
| 4 | Connexité | 8 |
| 4.1 | Connexité, connexité par arcs, composantes connexes | 8 |
| 4.2 | Connexité Métrique | 8 |
| 5 | Espaces de fonctions continues sur un métrique compact | 9 |
| 6 | Opérateurs Linéaires Bornés | 9 |
| 6.1 | Définitions et Duéalité | 9 |
| 6.2 | Banach-Steinhaus | 10 |
| 6.3 | Hahn-Banach | 10 |
| 6.4 | Banach-Schauder | 10 |
| 6.5 | Algèbres de Banach, Rayon Spectral, Inverse | 10 |
| 6.6 | Intégrale de Riemann pour les fonctions de la variable réelle à valeurs dans un Banach | 11 |
| 7 | Espaces de Hilbert | 11 |
| 7.1 | Projection Orthogonale sur un Convexe Fermé | 11 |
| 7.2 | Théorème de Représentation de Riesz | 12 |
| 7.3 | Bases Hilbertiennes et Parseval | 12 |
| 8 | Dérivation dans les Espaces Vectoriels Normés | 12 |
| 8.1 | Dérivée, Dérivées Partielles, Gradient | 13 |
| 8.2 | Inégalité des Accroissements Finis, Jacobienne | 14 |
| 8.3 | Dérivées successives, lemme de Schwarz, formule de Taylor, extrema | 14 |
| 8.4 | Théorème d'inversion Locale et Théorème des Fonctions Implicites | 15 |

1 Espaces Topologiques

1.1 Espaces à produit scalaire, espaces normés, espaces métriques, espaces topologiques.

Définition 1.1.1. Un produit scalaire sur un \mathbb{K} -ev est une forme linéaire, symétrique (ou hermitienne) et définie positive. Quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on dit que le produit scalaire est sesquilinéaire.

Proposition 1.1.1. • Relation de Pythagore : $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re(\langle x, y \rangle)$

• Identité du Parallélogramme : $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

• Inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$

Définition 1.1.2. Une norme sur un \mathbb{K} -ev ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) est une forme positive sous-additive homogène séparée.

Définition 1.1.3. Une distance ou une métrique sur un ensemble est une forme positive séparée symétrique vérifiant l'inégalité triangulaire.

Définition 1.1.4. Une topologie $\mathcal{O} \in \mathcal{P}(X)$ sur un ensemble X est une collection de partie de X stable par réunion quelconque, intersections finies, contenant l'espace et le vide. On appelle ses éléments des ouverts

1.2 Fermés

Définition 1.2.1. • Un ensemble A est fermé si et seulement si A^c est ouvert.

• L'adhérence d'un ensemble est le plus petit fermé le contenant :

$$\overline{A} = \bigcap_{A \subset F, F \text{ fermé}} F = \{x \in X, \forall O \in \mathcal{O}, x \in O \rightarrow O \cap A \neq \emptyset\}$$

• L'intérieur de A est le plus grand ouvert qu'il contient :

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{O \subset A, O \text{ ouvert}} O = \{x \in X, \exists O \in \mathcal{O}, x \in O \subset A\}$$

• La frontière de A est : $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$

• A est dense si d'adhérence égale à X .

Définition 1.2.2. • x est intérieur à A si $x \in \overset{\circ}{A}$.

• x est adhérent à A lorsque $x \in \overline{A}$. On dit alors que x est isolé lorsqu'il existe O_x voisinage ouvert de x d'intersection x avec A . Sinon, x est d'accumulation.

1.3 Voisinages, convergence et continuité.

Définition 1.3.1. Un voisinage d'un point x est une partie qui contient un ouvert contenant x .

Définition 1.3.2. Une suite converge vers x pour une topologie lorsque pour tout voisinage de x , la suite appartient à ce voisinage à pcr.

Proposition 1.3.1. Si F fermé, $x_n \in F \rightarrow x$, alors $x \in F$. La réciproque est fausse en générale.

Théorème 1.3.1. Dans un espace métrique, $x_n \rightarrow x$ ssi $d(x_n, x) \rightarrow 0$

Définition 1.3.3. Une application f est dite :

• continue en x lorsque pour tout voisinage V de $f(x)$, il existe un voisinage W de x tel que $f(W) \subset V$.

- séquentiellement continue en x lorsque pour toute suite $x_n \rightarrow x$, $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Proposition 1.3.2. *La continuité implique la continuité séquentielle.*

Proposition 1.3.3. *Soit $f : X \rightarrow Y$. On a équivalence entre :*

- f est continue
- Les images réciproques par f des ouverts de Y sont des ouverts de X .
- Les images réciproques par f des fermés de Y sont des fermés de X .

Définition 1.3.4 (Propriété de Fréchet-Urysohn). *X vérifie la propriété de Fréchet-Urysohn si :*

$$\forall A \subset X, x \in \overline{A}, \text{ il existe } x_n \in A^{\mathbb{N}}, x_n \rightarrow x$$

Théorème 1.3.2. *Si X vérifie la propriété de Fréchet-Urysohn, pour tout espace Y et tout $f : X \rightarrow Y$, la continuité équivaut à la continuité séquentielle.*

Définition 1.3.5. *Un homéomorphisme est une bijection continue de réciproque continue.*

1.4 Bases de topologie

Définition 1.4.1. *Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ une famille d'ouverts. \mathcal{B} est une base de \mathcal{O} quand : $\forall O \in \mathcal{O}, \exists (B_i)_i \in \mathcal{B}, O = \cup_i B_i$ ou de manière équivalente quand $\forall O \in \mathcal{O}, x \in O, \exists B \in \mathcal{B}, x \in B \subset O$.*

Théorème 1.4.1. *Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ une base. On a :*

- $X = \cup_{B \in \mathcal{B}} B$
- $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, x \in B_1 \cap B_2, \exists B_3 \in \mathcal{B}, x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Réciproquement, si une famille vérifie ces propriétés, alors $\mathcal{O} = \{\cup_{B \in \mathcal{A}} B\}_{\mathcal{A} \subset \mathcal{B}}$ est la plus petite topologie qui contient \mathcal{B} , appelée topologie engendrée par \mathcal{B} .

Définition 1.4.2. *Une base locale au point x est une famille d'ouverts contenant x et dont au moins l'un est inclus dans chaque ouvert contenant x .*

Définition 1.4.3. *Un espace topologique est :*

- à base dénombrable de voisinages si tout point possède une base dénombrable de voisinages.
- à base dénombrable lorsqu'il possède une base dénombrable (c'est plus fort !)
- séparable lorsqu'il existe une partie dénombrable dense.

Théorème 1.4.2. *Un espace à base dénombrable est toujours séparable. La réciproque est vraie pour un espace métrisable.*

Théorème 1.4.3. *Tout espace à base dénombrable de voisinages (en particulier tout espace métrisable) est un espace de Fréchet-Urysohn.*

1.5 Axiomes de Séparation

Définition 1.5.1. *Axiome T2 : Tous deux points peuvent être séparés par deux ouverts distincts.*

Théorème 1.5.1. *Pour tout espace topologique métrisable :*

- Les singletons sont fermés.
- Pour tous fermés F_0, F_1 , il existe f continue valant 1 sur F_0 et 0 sur F_1 .

Lemme 1.5.2. *Dans un espace métrique, F est fermé si et seulement si $d(x, F) = 0 \Rightarrow x \in F$.*

1.6 Topologies

1.6.1 Topologie Trace

Définition 1.6.1. On appelle topologie trace la topologie induite par la topologie de X sur $A \subset X$ est la topologie la moins fine sur A qui rend l'inclusion canonique continue.

Proposition 1.6.1. • La restriction de la métrique induit la topologie trace.

- La définition est emboîtable.
- La fermeture d'un ensemble pour la topologie trace est la trace de sa fermeture. Ce n'est pas vrai pour l'intérieur.
- Si $x_n \rightarrow x_* \in A$ ssi $x_n \rightarrow x_*$ dans X .
- Si \mathcal{O} est à base dénombrable (resp. de voisinages), \mathcal{O}_A l'est aussi
- Si \mathcal{O} est séparée (axiome T2), \mathcal{O}_A aussi.
- Si \mathcal{O} est métrisable est séparable, alors \mathcal{O}_A est métrisable est séparable.

1.6.2 Topologie Produit

Définition 1.6.2. On appelle topologie produit ou cylindrique sur $X = \prod_{i \in I} X_i$ la topologie engendrée par les $\prod_{i \in I} O_i$ avec $O_i \neq X_i$ sur un nombre fini de i . C'est la topologie la moins fine sur X qui rend les projections canoniques continues.

Lemme 1.6.1. On a : $x_n \rightarrow x$ si et seulement si $x_{n,i} \rightarrow x_i$ pour tout i .

Proposition 1.6.2. • Si tous les X_i vérifient T2, X vérifie T2

- Si I est au plus dénombrable, et tous les X_i sont à base dénombrable (de voisinages), X l'est aussi.
- Si I est au plus dénombrable ou a le cardinal de \mathbb{R} , et si les X_i sont tous séparables, X aussi.
- Si I est au plus dénombrable, et si les X_i sont métrisables par les d_i , X est métrisable par :
 - $\max_i(d_i)$ si I est fini
 - $\max_i \min(d_i, 2^{-i})$ si I est infini dénombrable.

1.6.3 Topologies Initiale et Finale

Définition 1.6.3. • Soient $f_i : X \rightarrow X_i$. La topologie engendrée sur X par les $f_i^{-1}(O_i)$ où O_i est ouvert dans X_i est appelée topologie initiale. C'est la moins fine qui rend f_i continue pour tout i .

- Soient $g_i : X_i \rightarrow X$. La topologie engendrée par les ensembles O tels que $g_i^{-1}(O)$ est ouvert dans X_i est appelée topologie finale. C'est la plus fine qui rend g_i continue pour tout i .

1.6.4 Topologie Quotient

Définition 1.6.4. Soit \sim une relation d'équivalence sur X . La topologie quotient sur X/\sim est la plus fine qui rend la projection canonique continue : $O \subset X/\sim$ est ouvert ssi $[\cdot]^{-1}(O) = \{x \in X \mid [x] \in O\}$ est ouvert dans X . C'est la topologie finale de la projection canonique.

2 Compacité

2.1 Quasi-Compacité

Définition 2.1.1. Un espace est dit quasi-compact lorsqu'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue : De tout recouvrement par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini. Un espace est dit compact lorsqu'il est quasi-compact et séparé.

Définition 2.1.2. Un sous ensemble est quasi-compact lorsqu'il est quasi compact pour la topologie trace.

Proposition 2.1.1.

Dans \mathbb{R}^n , K est compact si et seulement si il est fermé borné.

Si K_1, K_2 sont quasi compacts, $K_1 \cup K_2$ est quasi compact.

Théorème 2.1.1.

Si F est fermé dans K quasi compact, F est quasi compact.

Si K est quasi compact dans X séparé, K est fermé.

Définition 2.1.3. Si X est séparé, $A \subset X$ est relativement compact lorsque \overline{A} est compact.

Théorème 2.1.2. • Si $f : X \rightarrow Y$ est continue, X est quasi compact, alors $f(X)$ est quasi-compact.

• Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $X \neq \emptyset$ est quasi compact, alors, $\exists x_* \in X$, $f(x_*) = \sup_{x \in X} f(x) < \infty$.

Théorème 2.1.3. Si $f : X \rightarrow Y$ est une bijection continue avec X quasi compact et Y séparé, f^{-1} est continue.

2.2 Théorème de Tykhonov

Théorème 2.2.1. Tout produit de (quasi-)compacts est (quasi-)compact.

2.3 Compacité Métrique

Définition 2.3.1. Un ε -réseau est un ensemble A fini tel que tout point est à distance au plus ε d'un point de A .

Lemme 2.3.1. Un espace métrique compact possède un ε -réseau fini pour tout ε .

Théorème 2.3.2. Pour un espace métrisable, on a équivalence entre :

1. X est compact
2. De toute suite de X on peut extraire une sous-suite convergent dans X .

Dans ce cas on a :

Lemme de Lebesgue : pour tout recouvrement par des ouverts O_i , il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in X$, il existe i_x tel que $B(x, r) \subset O_{i_x}$.

2.4 Compacité Locale

Définition 2.4.1. Un espace est localement compact lorsque tout point possède un voisinage quasi-compact.

Définition 2.4.2. Un espace est dénombrable à l'infini s'il admet un recouvrement dénombrable par des quasi-compacts (qu'on peut supposer croissants sans perte de généralité).

Lemme 2.4.1. Un espace métrisable compact est localement compact et dénombrable à l'infini, et cela est vrai pour tout ouvert pour la topologie induite.

Théorème 2.4.2. Si un espace est localement compact et dénombrable à l'infini, il existe une suite K_n de quasi-compacts croissante d'union X et tel que tout quasi-compact inclus dans X est inclus dans au moins l'un des K_n . On parle de suite exhaustive de compacts.

2.5 Compactification d'Alexandrov

Théorème 2.5.1. Soit X un espace topologique et un point à l'infini $\infty \notin X$. Soit $X^* = X \cup \{\infty\}$, $\mathcal{O}^* \subset \mathcal{P}(X^*)$ formé par les ouverts de X et les complémentaires dans X^* des quasi-compacts fermés de X . Alors :

1. \mathcal{O}^* est une topologie sur X^* .
2. X^* est quasi-compact
3. L'injection canonique est continue et ouverte
4. X^* est séparé si et seulement si X est séparé et localement compact.
5. X est dense dans X^* si et seulement si X n'est pas quasi-compact fermé.

2.6 Théorème de Baire

Lemme 2.6.1. Pour X un espace topologique, X est quasi-compact si et seulement si pour toute famille de fermés $(F_i)_{i \in I}$ telle que $\bigcap_{i \in I'} F_i \neq \emptyset$ pour tout $I' \subset I$ fini, on a : $\bigcap_i F_i \neq \emptyset$.

Lemme 2.6.2. Si X est quasi-compact éparé alors :

- Tout point et tout fermé ne le contenant pas sont séparables par des ouverts.
- Pour tout $x \in X$ et tout ouvert $O \ni x$, il existe $O' \ni x$ tel que $\overline{O'} \subset O$.

Théorème 2.6.3. Si X est quasi-compact alors il est de Baire : toute intersection d'une suite d'ouverts denses est dense.

3 Complétude

3.1 Suites de Cauchy

Définition 3.1.1. Une suite x_n est de Cauchy lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N = N_\varepsilon$ tel que pour tous $n, m \geq N$, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Un espace métrique est complet lorsque toute suite de Cauchy converge.

Lemme 3.1.1. Si X est complet, $F \subset X$ est fermé, alors F est complet. Si $A \subset X$ est complet, alors A est fermé.

Lemme 3.1.2. Soit X complet et $X = F_0 \supset F_1 \supset \dots$ une suite décroissante de fermés non vides et de diamètres tendant vers 0. Alors leur intersection est un certain point $x \in X$.

Théorème 3.1.3. Un espace métrique est compact si et seulement si il est complet et admet un ε -réseau pour tout ε .

Théorème 3.1.4. • Les \mathbb{R}^n sont complets

- Les l^p pour $p \in [1, \infty]$ sont complets.

Théorème 3.1.5. • Si K est compact et Y métrique complet, alors $\mathcal{C}(K, Y)$ est métrique complet.

- Si X est localement compact à base dénombrable de voisinages et Y métrique complet alors $\mathcal{C}(X, Y)$ est métrisable complet.

Définition 3.1.2. On définit la distance de Hausdorff entre deux fermés d'un espace métrique de diamètre fini par :

$$d_H(F_1, F_2) < r \Leftrightarrow \text{pour tout } x \in F_{1,2}, \exists y \in F_{2,1}, d(x, y) < r$$

On note $\mathcal{F}(X)$ l'ensemble des fermés non-vides de X , et $\mathcal{K}(X)$ l'ensemble des compacts non-vides.

Théorème 3.1.6. • Si X complet, $\mathcal{F}(X)$ et $\mathcal{K}(X)$ sont complets.

- Si X est compact, $\mathcal{K}(X)$ est compact.

3.2 Espaces Polonais, de Banach, de Hilbert

Définition 3.2.1. *Un espace topologique est :*

- polonais lorsqu'il est séparable et métrisable complet
- de Banach lorsque c'est un ev normé complet
- de Hilbert lorsque c'est un ev à produit scalaire complet

Théorème 3.2.1. *Un ev normé est un espace de Banach ssi toute série absolument convergente est convergente.*

3.3 Complétion

Définition 3.3.1. *Soit X un espace métrique non complet. Son complété (X', d') est un espace métrique complet tel que $X \subset X'$ et X est dense dans X' . On le construit ainsi :*

- Soit \tilde{X} l'ensemble des suites de Cauchy, muni de la relation : $x_n \sim y_n$ ssi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang pour lequel les suites sont à distance au plus ε .
- On considère $X' = \tilde{X} / \sim$. On considère la quantité $d'((x_n), (y_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$. C'est bien une métrique compatible avec la topologie de X' .

Remarque 3.3.0.1. *Tous deux complétés sont isomètres.*

Lemme 3.3.1. *Si $f : X \rightarrow Y$ est uniformément continue, Y est complet, il existe une unique fonction continue prolongée sur le complété de X et égale à f sur X .*

Théorème 3.3.2. *Si X est complet, alors il est de Baire.*

4 Connexité

4.1 Connexité, connexité par arcs, composantes connexes

Définition 4.1.1. *Un espace est :*

- connexe lorsqu'il n'est pas partitionnable en deux ouverts non-vides
- connexe par arcs lorsque les points sont reliés par des arcs

Théorème 4.1.1. • *X est connexe ssi \emptyset et X sont les seules parties à la fois ouvertes et fermées.*

- *X est connexe ssi il n'est pas partitionnable en deux fermés non-vides.*
- *Si $f : X \rightarrow Y$ est continue et X connexe (resp. par arcs), alors $f(X)$ est connexe (resp. par arcs)*
- *Si X est connexe par arcs, alors il est connexe, et la réciproque est fausse.*
- *Si $\cap_i A_i \neq \emptyset$ avec les A_i connexes (resp. par arcs), $\cup_i A_i$ est connexe (resp. par arcs)*
- *Si les X_i sont connexes (resp. par arcs), alors $\prod_i X_i$ est connexe (resp. par arcs).*

Définition 4.1.2. *La composante connexe C_x de $x \in X$ est la plus grande partie connexe de X contenant x . Un espace est totalement discontinu si $C_x = \{x\}$ pour tout x .*

4.2 Connexité Métrique

Définition 4.2.1. *Un espace métrique est bien échaîné lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, et tous $x, y \in X$ il existe une suite finie $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ telle que $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ pour tout i .*

Théorème 4.2.1. *Si un espace est connexe alors il est bien échaîné, et la réciproque est fausse mais devient vraie en ajoutant la compacité..*

5 Espaces de fonctions continues sur un métrique compact

Définition 5.0.1. Pour une suite f_n dans $\mathcal{C}(K, Y)$ et f dans $\mathcal{C}(K, Y)$:

- $f_n \rightarrow f$ ponctuellement lorsque pour tout $x \in K$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$
- $f_n \rightarrow f$ uniformément lorsque la convergence a lieu dans $\mathcal{C}(K, Y)$.

Théorème 5.0.1 (De Dini). Si $Y = \mathbb{R}$, si la suite f_n est croissante, et f est continue, la convergence ponctuelle implique la convergence uniforme.

Théorème 5.0.2 (De Heine). Toute fonction $f \in \mathcal{C}(K, Y)$ est uniformément continue.

Théorème 5.0.3 (de Arzelà-Ascoli). $A \subset \mathcal{C}(K, Y)$ a une adhérence compacte ssi les deux conditions suivantes sont réalisées :

- Compacité Ponctuelle : $\forall x \in K, \{f(x) \mid f \in A\}$ a une adhérence compacte dans Y .
- La famille A est uniformément équicontinue : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $f \in A$, et tous $x, y \in K$, si $d_K(x, y) < \eta$, alors $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Théorème 5.0.4 (de Stone-Weierstrass). Soit \mathcal{A} une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. vérifiant la propriété de prescription de valeurs arbitraires en deux points arbitraires : pour tous $x, y \in K$, $a, b \in \mathbb{R}$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) = a$ et $f(y) = b$. Alors \mathcal{A} est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.

Corollaire 5.0.4.1 (Théorème de Weierstrass). Pour tout n , $K \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.

Corollaire 5.0.4.2 (de Stone-Weierstrass Complexe). Si de plus la famille \mathcal{A} est stable par conjugaison et à valeurs complexes, elle est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$.

Corollaire 5.0.4.3. Pour tout n , $K \subset \mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n, \overline{z_1}, \dots, \overline{z_n}]$ est dense. En particulier, $\mathbb{C}[e^{i\theta}, e^{-i\theta}]$ est dense dans $\mathcal{C}(S^1, \mathbb{C})$.

6 Opérateurs Linéaires Bornés

6.1 Définitions et Duéalité

Définition 6.1.1. Soient X, Y des \mathbb{K} ev normés avec $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

- $u : X \rightarrow Y$ est un opérateur linéaire borné lorsque u est linéaire et qu'il est $M \in [0, \infty[$ tel que pour tout $x \in X$, $\|u(x)\|_Y \leq M \|x\|_X$.
- On note $L(X, Y)$ l'ev des opérateurs linéaires bornés $X \rightarrow Y$.
- $L(X, Y)$ est normé par la norme d'opérateur, et a une structure d'algèbre.

Lemme 6.1.1. Pour u linéaire, on a équivalence entre :

1. $u \in L(X, Y)$
2. u est Lipschitz
3. u est uniformément continue
4. u est continue
5. u est continue en 0.

Lemme 6.1.2. Si Y est un Banach, $L(X, Y)$ est un Banach.

Définition 6.1.2. Si X est un \mathbb{K} -Banach, $L(X, \mathbb{K})$ est appelé dual de X , noté X' ou X^* .

Théorème 6.1.3. Si $p \in [1, \infty)$ et $q = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}$ est le conjugué de Hölder de p , alors :

$$\Phi : \mathbb{R}^q \rightarrow (\mathbb{R}^p)' , y \mapsto \left(x \mapsto \sum_n x_n y_n \right)$$

est une bijection linéaire isométrique : $(\mathbb{R}^p)'$ est isomorphe à \mathbb{R}^q .

Lemme 6.1.4. Une forme linéaire est continue ssi son noyau est fermé.

6.2 Banach-Steinhaus

Théorème 6.2.1. Si X est un Banach, et Y un evn, alors pour tout $A \subset L(X, Y)$, la bornitude ponctuelle est équivalente à la bornitude uniforme :

$$\forall x \in X, \sup_{u \in A} \|u(x)\|_Y < \infty \Leftrightarrow \sup_{u \in A} \|u\|_{L(X, Y)} < \infty$$

Corollaire 6.2.1.1. Soit u_n dans $L(X, Y)$, où X est un Banach et Y un evn. La convergence ponctuelle entraîne la continuité de la limite.

6.3 Hahn-Banach

Théorème 6.3.1. Soit $X \subset \tilde{X}$ un sous-espace d'un evn sur $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Soit $u \in L(X, \mathbb{K})$ une forme linéaire. Alors il existe $\tilde{u} \in L(\tilde{X}, \mathbb{K})$ telle que $\tilde{u}|_X = u$ et $\|\tilde{u}\| = \|u\|$.

Corollaire 6.3.1.1. Si X est un Banach, et X'' est son bidual, l'injection canonique $\iota : X \rightarrow X''$ est une isométrie linéaire : $\|\iota(x)\| = \|x\|$.

Corollaire 6.3.1.2. L'application $\Phi : \mathbb{R}^1 \rightarrow (\mathbb{R}^\infty)'$, $\Phi(y)(x) = \sum_n x_n y_n$ est une isométrie linéaire non surjective. En d'autres termes :

$$\mathbb{R}^1 \subsetneq (\mathbb{R}^\infty)' = (l^1)''$$

6.4 Banach-Schauder

Théorème 6.4.1 (de Banach-Schauder ou de l'application ouverte). Si X et Y sont des Banach et si $u \in L(X, Y)$ est surjective, alors u est une application ouverte.

Corollaire 6.4.1.1. • **(inverse continu)** : Si X et Y de Banach et $u \in L(X, Y)$ est bijective, alors $u^{-1} \in L(Y, X)$. On parle de Théorème d'Isomorphisme de Banach.

- **(équivalence des normes)** : Si $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ sont deux normes qui font d'un même espace vectoriel normé X un espace de Banach. S'il existe $c \in (0, \infty)$ telle que $\|\cdot\| \leq c \|\cdot\|'$ alors il existe $C \in (0, \infty)$ telle que $\|\cdot\|' \leq C \|\cdot\|$.
- **(théorème du graphe fermé)** : Si X et Y sont deux Banach et $u : X \rightarrow Y$ est linéaire, alors $u \in L(X, Y)$ si et seulement si son graphe est fermé dans $X \times Y$.
- **(structure des Banach séparables)** : tout Banach séparable est isomorphe à quotient de \mathbb{R}^1 par un sous-espace fermé.

6.5 Algèbres de Banach, Rayon Spectral, Inverse

Définition 6.5.1. Si X est un Banach, on définit l'espace vectoriel $L(X)$ normé par $\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$. Le produit naturel $uv = u \circ v$ en fait une algèbre de Banach : $\|uv\| \leq \|u\| \|v\|$. Le rayon spectral de $u \in L(X)$ est $\rho(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u^n\|^{1/n} \leq \|u\|$.

Remarque 6.5.0.1. • **Lemme de Fekete** : Si a_n est sous-additive, $\lim_n \frac{1}{n} a_n = \inf_n \frac{1}{n} a_n$. La formule de ρ fait sens en prenant $a_n = \log \|u^n\|$.

- Le rayon spectral est inchangé avec une norme équivalente.
- On généralise les algèbres de matrices à la dimension infinie.
- En dimension finie, $L(X)$ est isomorphe à \mathcal{M}_n et le rayon spectral est égal au maximum des modules des valeurs propres par décomposition de Jordan.
- Lorsque X est de dimension infinie, il n'y a pas vraiment d'analogue à la décomposition de Jordan. L'équation aux valeurs propres n'est pas une bonne manière de définir le spectre des opérateurs et on définit plutôt :

$$\text{spec}(u) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid u - \lambda \text{Id n'est pas inversible à inverse continu}\}$$

Alors, $\rho(u) = \sup \{|\lambda| \mid \lambda \in \text{spec}(u)\}$.

Théorème 6.5.1. Soit X un Banach, et $u \in L(X)$.

1. Si $\rho(u) < 1$, alors $\text{Id} - u$ est inversible dans $L(X)$ et

$$(\text{Id} - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$$

2. Si u est inversible et $\|v\| \leq \|u^{-1}\|^{-1}$ alors $u - v$ est inversible dans $L(X)$ et :

$$(u - v)^{-1} = (\text{Id} - u^{-1}v)^{-1} u^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (u^{-1}v)^n u^{-1}$$

3. L'ensemble des $u \in L(X)$ inversibles (groupe linéaire) est un ouvert de $L(X)$.

6.6 Intégrale de Riemann pour les fonctions de la variable réelle à valeurs dans un Banach

Théorème 6.6.1. Soit X un Banach, $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On note $\mathcal{A}([a, b], X) \subset \mathcal{C}([a, b], X)$ l'ensemble des fonctions affines par morceaux. C'est un sev de $\mathcal{C}([a, b], X)$. Il existe une unique application linéaire continue $I : \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow X$ telle que pour tout fonction $f \in \mathcal{A}([a, b], X)$ affine par morceaux associée à une subdivision $a = a_0 < \dots < a_n = b$ et à des valeurs $f_0, \dots, f_n \in X$:

$$I(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \frac{f_i + f_{i+1}}{2}$$

On note : $\int_a^b f(t) dt = I(f)$. De plus pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b], X)$:

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$

7 Espaces de Hilbert

7.1 Projection Orthogonale sur un Convexe Fermé

Théorème 7.1.1. Si X est un Hilbert, $C \subseteq X$ un convexe fermé, pour tout $x \in X$, il existe un unique $p_C(x) \in C$ tel que :

$$\|x - p_C(x)\| = d(x, C)$$

Corollaire 7.1.1.1. Si X est un Hilbert et F est un sev de X fermé alors :

1. p_F est linéaire

2. $p_F(x)$ est caractérisé par $x - p_F(x) \perp F$
3. p_F est 1-Lipschitz donc continue
4. Si $\dim F = n < \infty$, $p_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$
5. $X = F \oplus F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp = F$.

7.2 Théorème de Représentation de Riesz

Théorème 7.2.1 (de Représentation de Riesz des formes linéaires continues). *Si X est un Hilbert sur $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$:*

1. Pour tout $u \in X' = L(X, \mathbb{K})$, il existe un unique $a \in X$ tel que $u(x) = \langle x, a \rangle$.
2. L'application $a \in X \mapsto \langle \cdot, a \rangle \in X'$ est un isomorphisme anti-linéaire et une isométrie.

Remarque 7.2.1.1. • Les formes linéaires continues sur $X = \uparrow^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ sont de la forme :

$$x \in \uparrow^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \mapsto \sum_n x_n \overline{y_n} \text{ pour un } y \in \uparrow^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$$

- Le dual topologique X' d'un Hilbert est un Hilbert : si $u, v \in X'$ alors $\langle u, v \rangle_{X'} = \langle a_v, a_u \rangle$
- Théorème de Hahn-Banach sur un Hilbert : Si F est un sev d'un Hilbert X et $u \in L(F, \mathbb{K})$, alors il existe $u_X \in X' = L(X, \mathbb{K})$ tel que $u_{X|_F} = u$ et $\|u_X\| = \|u\|$.
- Si F est un sev d'un Hilbert non dense, alors pour tout $x \notin \overline{F}$ il existe $u \in X'$ nulle sur F valant 1 en x .
- Un sev F d'un Hilbert est dense si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.
- Pour toute application linéaire continue $u \in L(X, X)$ sur X un Hilbert, il existe un unique $u^* \in L(X, X)$ appelé adjoint de u tel que, pour tous x, y :

$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

7.3 Bases Hilbertiennes et Parseval

Définition 7.3.1. Une base hilbertienne d'un Hilbert X est une suite e_n finie ou pas d'éléments de X vérifiant :

- Orthonormalité : pour tous m, n , $\langle e_m, e_n \rangle = \mathbf{1}_{n=m}$
- L'espace vectoriel engendré par (e_n) est dense dans X .

Théorème 7.3.1 (Séparabilité et Identité de Parseval). 1. Un Hilbert X admet une base hilbertienne ssi il est séparable.

2. Tout \mathbb{K} Hilbert séparable de dimension ∞ est isomorphe isométriquement à $\uparrow^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$
3. Si e_n est une base hilbertienne de X :

- Pour tout $x \in X$, $x = \sum_n \langle x, e_n \rangle e_n$
- Pour tout $x \in X$: $\|x\|^2 = \sum_n |\langle x, e_n \rangle|^2$
- $\sum_n \lambda_n e_n$ converge si et seulement si $\sum_n \lambda_n^2 < \infty$

8 Dérivation dans les Espaces Vectoriels Normés

Ici, X, X_1, \dots, X_n, Y, Z sont des evn réels.

8.1 Dérivée, Dérivées Partielles, Gradient

Définition 8.1.1. Soit $O \subset X$ un ouvert. Une application $f : O \rightarrow Y$ est dérivable ou différentiable en $a \in O$ lorsqu'il existe $u \in L(X, Y)$ tel que :

$$f(x) = f(a) + u(x - a) + o(x - a) \text{ quand } x \rightarrow a$$

On note $u = (Df)(a)$ et on dit que $(Df)(a)$ est la dérivée ou différentielle de f en a . On dit que f est $C^1(O, Y)$ quand f est dérivable en tout point de O et que $Df : O \rightarrow L(X, Y)$ est continue

Définition 8.1.2. La dérivée directionnelle de f en a par rapport à la direction h est définie lorsqu'il existe $(Df)(a, h) \in Y$ tel que :

$$f(a + th) = f(a) + t(Df)(a, h) + o(t) \text{ quand } t \rightarrow 0$$

Etre dérivable dans toutes les directions n'est pas équivalent à être dérivable. On ne demande par ailleurs pas la linéarité ni la continuité en h .

Proposition 8.1.1. • Si $\|\cdot\|$ est hilbertienne, alors : $f(x) = \|x\|^2$ est dérivable partout et $(Df)(a)(h) = \langle 2a, h \rangle$.

- La norme n'est jamais dérivable en 0.
- Si $m \in \mathbb{N}$, $f : x \in L(X, X) \mapsto x^m$ est dérivable partout et

$$(Df)(a)(h) = \sum_{k=0}^{m-1} a^k h a^{m-1-k}$$

- On sait que sur un Banach X , $O = \{x \in L(X, X) \mid x^{-1} \text{ existe}\}$ est un ouvert et que $f : x \in O \rightarrow x^{-1} \in L(X, X)$ est bien définie. On a alors :

$$(Df)(a)(h) = -a^{-1} h a^{-1}$$

Théorème 8.1.1. • Linéarité : Si f, g sont dérivables en a alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(D(\lambda f + g))(a) = \lambda(Df)(a) + (Dg)(a)$$

- Composition : Si $f : O \subseteq X \rightarrow Y$ et $g : O' \subseteq Y \rightarrow Z$ avec f différentiable en a et g différentiable en $f(a)$, $g \circ f$ est différentiable en a et :

$$(Dg \circ f)(a) = (Dg)(f(a)) \circ Df(a)$$

Proposition 8.1.2. • Espace de départ est de dimension 1 : Comme $L(\mathbb{R}, Y)$ est isomorphe isométriquement à Y , $u \in L(\mathbb{R}, Y) \rightarrow u(1) \in Y$, si $f : O \subseteq \mathbb{R} \rightarrow Y$ est dérivable en a , alors $Df(a)$ est identifiable à $Df(a)(1) = f'(a)$ et $(Df)(a)(h) = (Df)(1)h$

- Espace de départ Hilbert et espace d'arrivée de dimension 1. Par théorème de Représentation de Riesz, pour tout $a \in O$, il existe un vecteur de X noté $\nabla f(a)$ appelé gradient de f en a tel que $(Df)(a)(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$.

- Si $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ et $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ avec X un Hilbert, dérivables en a et $f(a)$ respectivement, on a :

$$(g \circ f)'(a) = \langle (\nabla g)(f(a)), f'(a) \rangle$$

Définition 8.1.3. Soit $O \subseteq X_1 \times \cdots \times X_n$ un ouvert. Pour $a \in O$, $1 \leq i \leq n$, on note :

$$O^{\hat{a}_i} = \{x_i \mid x \in O, x_j = a_j, j \neq i\}$$

et

$$f^{\hat{a}_i} : x_i \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

f admet des dérivées partielles en a lorsque ces applications sont dérivables et on note :

$$(D_{x_i} f)(a) = (Df^{\hat{a}_i})(a_i)$$

et parfois : $\frac{\partial}{\partial x_i} f$ ou $\partial_{x_i} f$ voire $\partial_i f$

Proposition 8.1.3. Si f est dérivable en a , les dérivées partielles existent toutes mais la réciproque est fautive, l'existence de dérivées partielles n'impliquant même pas la continuité.

8.2 Inégalité des Accroissements Finis, Jacobienne

Lemme 8.2.1. *Si O est un ouvert, $[a, b] \subseteq O$ et $f : O \rightarrow Y$ est dérivable en tout point de $[a, b]$ alors :*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{x \in [a, b]} \|Df(x)\|_{L(X, Y)} \|b - a\|$$

Proposition 8.2.1. *Si $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, X)$ où $I \subseteq \mathbb{R}$ est ouvert et X un Banach, alors, pour tout $t \in I$:*

$$\varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} (D\varphi)(t) dt$$

Corollaire 8.2.1.1. *Si une fonction f sur O possède des dérivées partielles sur O continues en a alors elle est dérivable en a et :*

$$(Df)(a)(h) = \sum_{i=1}^n (D_{x_i} f)(a)(h_i)$$

Définition 8.2.1. *Si $f : O \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $(Df)(a)$ est identifiable à une matrice $n \times m$ appelée jacobienne :*

$$(\text{Jac } f)(a) = (\partial_{x_i} f_j(a))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} = (\nabla f_1, \dots, \nabla f_m)$$

8.3 Dérivées successives, lemme de Schwarz, formule de Taylor, extrema

Définition 8.3.1. • *$u : X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$ est multilinéaire lorsqu'elle est linéaire en chaque X_i*

- On note $L(X_1, \dots, X_m; Y)$ l'ensemble des applications multilinéaires continues.
- On note $L_m(X, Y)$ les applications multilinéaires continues sur X^m .

Remarque 8.3.0.1. • *u multilinéaire est continue si et seulement si elle est bornée.*

- $L(X_1, \dots, X_m; Y)$ est un evn
- $L(X, L(X, Y))$ et $L(X, X; Y)$ sont isomorphes.
- Un polynôme de degré $n : (h_1, \dots, h_n) \in X^n \mapsto \sum_{m=0}^n u_m(h_1, \dots, h_m) \in Y$

Définition 8.3.2. • *Pour $m \geq 1$, une fonction $f : O \subseteq X \rightarrow Y$ est dérivable m fois en $a \in O$ lorsque $f \in \mathcal{C}^{m-1}(O', Y)$ avec $a \in O' \subseteq O$ et $D^{m-1}(f) : O' \rightarrow L_{m-1}(X, Y)$ est dérivable en a .*

- On dit que f est un \mathcal{C}^m -difféomorphisme lorsque c'est un homéomorphisme et f et f^{-1} sont \mathcal{C}^m .

Proposition 8.3.1. • *Pour $f(u) = u^m$,*

$$(D^2)f(a)(h_1, h_2) = \sum_{l_i \in \{a, h_1, h_2\} |i| l_i = h_1 |i| l_i = h_2 |i| = 1} l_1 \dots l_m$$

- *Pour $f(u) = u^{-1}$:*

$$(D^2f)(a)(h_1, h_2) = a^{-1}h_1a^{-1}h_2a^{-1} + a^{-1}h_2a^{-1}h_1a^{-1}$$

Lemme 8.3.1. *Soit $0, 0 \in O \subseteq X = \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^1(O, Y)$, en particulier, $\partial_{x_1} f$ et ∂_{x_2} existent sur O . Si $\partial_{x_1} f$ admet une dérivée partielle par rapport à x_2 dans un voisinage de $0, 0$ et de même pour $\partial_{x_2} f$:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial_{x_1} \partial_{x_2}}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial_{x_2} \partial_{x_1}}(0, 0)$$

Définition 8.3.3. On note $L_m^{sym}(X, Y)$ le sev de $L_m(X, Y)$ formé des applications multilinéaires continues symétriques.

Théorème 8.3.2. Soit O un ouvert de X , $f \in \mathcal{C}^m(O, Y)$, $m \geq 2$. Alors $D^m f \in \mathcal{C}(O, L_m^{sym}(X, Y))$

Corollaire 8.3.2.1. Si $f \in \mathcal{C}^2(O, Y)$, pour tous $a \in O$, $h, k \in X$ et $1 \leq i, j \leq n$.

$$(\partial_{x_i} \partial_{x_j} f)(a)(h, k) = (\partial_{x_j} \partial_{x_i} f)(a)(h, k)$$

Remarque 8.3.2.1. Si $u \in L_2^{sym}(X, Y)$ alors $u(h_1, h_2) = \frac{1}{4}(u(h_1 + h_2, h_1 + h_2)) - \frac{1}{4}(u(h_1 - h_2, h_1 - h_2))$

Définition 8.3.4. Si f est \mathcal{C}^2 et $a \in O$, dans la base canonique, la forme bilinéaire $(D^2 f)(a)$ est identifiable à la matrice symétrique $(\partial_{x_i} \partial_{x_j} f(a))_{1 \leq i, j \leq n}$. On note $Hess(f)(a)$ ou $\nabla^2 f(a)$ cette matrice, qui est égale à $Jac \nabla f(a)$.

Théorème 8.3.3 (Formule de Taylor). Si $f \in \mathcal{C}^{m-1}(O \subseteq X, Y)$, $m \geq 1$, si $a \in O$ et $(D^m f)(a)$ existe alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} (D^k f)(a)(x - a, \dots, x - a) + r_a(x) \text{ où } r_a(x) = o_{x \rightarrow a}(\|x - a\|^m)$$

et si $D^m f$ existe sur tout le segment $[a, x]$ alors :

$$\|r_a(x)\| \leq \frac{\|x - a\|^{m+1}}{(m+1)!} \sup_{y \in [a, x]} \|(D^{m+1} f)(y)\|$$

Lemme 8.3.4. Si I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $[0, 1] \subset I$, $F : I \rightarrow Y$ et $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont dérivables en tout point de $[0, 1]$ et telles que $\|F'(t)\| \leq G'(t)$ pour tout t , alors $\|F(1) - F(0)\| \leq G(1) - G(0)$.

Corollaire 8.3.4.1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(O \subset X, \mathbb{R})$, $a \in O$ telle que $(D^2 f)(a) \in L_2^{sym}(X, \mathbb{R})$ existe.

- Si a est un extremum local de f alors : $(Df)(a) = 0$ et :
 - Quand a est un minimum : $\forall h \in X, (D^2 f)(a)(h, h) \geq 0$
 - Quand a est un maximum : $\forall h \in X, (D^2 f)(a)(h, h) \leq 0$
- Si $(Df)(a) = 0$ et s'il existe c telle que :
 - $(D^2 f)(a)(h, h) \geq c \|h\|^2$ alors a est un minimum local de f
 - $(D^2 f)(a)(h, h) \leq -c \|h\|^2$ alors a est un maximum local de f .

Lorsque $X = \mathbb{R}^n$ ces conditions portent sur le gradient et la hessienne.

8.4 Théorème d'inversion Locale et Théorème des Fonctions Implicites

Lemme 8.4.1 (de point fixe de Picard). Si X, d est métrique complet non vide et si $f : X \rightarrow X$ est une contraction, elle admet un unique point fixe.

Lemme 8.4.2. Soit X un Banach, O un ouvert de X , $g : O \subseteq X \rightarrow X$ c -contractante. Alors $f : x \mapsto x + g(x)$ est un homéomorphisme entre O et $f(O)$ et $\|f^{-1}\|_{Lip} \leq (1 - c)^{-1}$.

Théorème 8.4.3 (Inversion Locale). Soient X et Y des Banach, $O \subseteq X$ et $a \in O$. Soit $f \in \mathcal{C}^m(O, Y)$, $m \geq 1$.

Si $(Df)(a)$ est une bijection à inverse borné $[(Df)(a)]^{-1} \in L(Y, X)$ alors il existe $O' \subseteq X$ tel que $a \in O' \subseteq O$ et $f : O' \rightarrow f(O')$ est un \mathcal{C}^m -difféomorphisme et pour tout $x \in O'$:

$$(Df^{-1})(f(x)) = [(Df)(x)]^{-1}$$