Logique

Silvain Rideau-Kikuchi*

21 septembre 2023

1 Logique propositionnelle

1.1 Algèbres de Boole et dualité de Stone

Définition 1.1. Un ensemble ordonné $(A, \leqslant)$ est appelé une algèbre de Boole si :

- Tout sous-ensemble fini de A a une borne supérieure[1] et une borne inférieure[2]. En particulier,
  - A a un plus petit élément $\bot = \sup(\varnothing)$;
  - A a un plus grand élément $\top = \inf(\varnothing)$;
  - tous $a, b \in A$ ont une borne supérieure $a \vee b$;
  - tous $a, b \in A$ ont une borne inférieure $a \wedge b$.
- Tout $a \in A$ admet un complément $\neg a \in A$, tel que :

$$a \vee \neg a = \top \text{ et } a \wedge \neg a = \bot.$$

- $\wedge$ distribue sur $\vee$, et réciproquement.

Le complément est unique. En effet, si b et b' sont deux compléments de a, on a :

$$b = b \wedge \top = b \wedge (a \vee b') = \bot \vee (b \wedge b') = b \wedge b' = b'.$$

Exemple 1.2.
- $\{\bot, \top\}$ avec $\bot \leqslant \top$ est une algèbre de Boole.
- Pour tout ensemble X, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ est une algèbre de Boole.
- $\{Y \subseteq X$ finis ou de complémentaire fini$\}$ est une sous-algèbre de Boole de $\mathcal{P}(X)$.
- Si $(R, +, \cdot)$ est un anneau commutatif unitaire tel que, pour tout $x \in R$, $x^2 = x$, alors la relation $a \leqslant b$ sur R définie par $ab = a$ est un ordre qui fait de R une algèbre de Boole. On a alors $\bot = 0$, $\top = 1$, $a \wedge b = ab$, $a \vee b = a + b + ab$ et $\neg a = 1 - a$. On dit que R est un anneau de Boole.

---

1. C'est-à-dire un plus petit majorant.
2. C'est-à-dire un plus grand minorant

Réciproquement, si $(A, \leqslant)$ est une algèbre de Boole, alors si, pour tout $a, b \in A$, on définit $a \Delta b = (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg a)$, alors, $(A, \Delta, \wedge)$ est un anneau commutatif unitaire et pour tous $a \in A$, $a^2 = a \wedge a = a$. De plus, itérer ces deux constructions nous ramène à l'algèbre ou l'anneau de départ ; ce sont des équivalences de catégories.
- Si $(A, \leqslant)$ est une algèbre de Boole, $(A, \geqslant)$ est aussi une algèbre de Boole, appelée l'algèbre duale. Le complément est un isomorphisme[3] entre $(A, \leqslant)$ et $(A, \geqslant)$.

Soit $(A, \leqslant)$ une algèbre de Boole. On souhaite maintenant isoler une notion de « partie cohérente de A » :

Définition 1.3. Une partie $F \subseteq A$ est un filtre si, pour tous $a, b \in A$:
- $\bot \notin F$ et $\top \in F$;
- si $a \in F$ et $a \leqslant b$, alors $b \in F$;
- si $a, b \in F$ alors $a \wedge b \in F$.

Un filtre maximal pour l'inclusion est appelé un ultrafiltre.

Remarque 1.4. Soit I un filtre pour l'algèbre duale $A, \geqslant$. On a donc :
- $\top \notin I$ et $\bot \in I$ — c'est-à-dire $1 \notin I$ et $0 \in I$ dans l'anneau associé ;
- si $a \in I$ et $b \leqslant a$, alors $b \in I$ — c'est-à-dire, pour tout $c \in I$, comme $ac \leqslant a$, $ac \in I$;
- si $a, b \in I$ alors $a \vee b \in I$ — et donc $a + b = a(1 - b) \vee b(1 - a) \in I$. Réciproquement, si $I \subseteq A$ est clos par addition, alors, pour tous $a, b \in I$, $a \vee b = a + b + ab \in I$.

La notion de filtre est donc la notion duale de celle d'idéal, et les ultrafiltres sont les idéaux maximaux de l'algèbre duale — et donc aussi les idéaux premiers. En effet, la seule algèbre de Boole intègre est le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, puisque $x^2 - x = 0$ pour tout $x \in A$, et donc les idéaux premiers sont tous maximaux.

Proposition 1.5. *Tout filtre F de A est inclus dans un ultrafiltre.*

Démonstration. Montrons que l'ensemble des filtres contenant un filtre F est inductif pour l'inclusion. La proposition suivra alors par le lemme de Zorn. Soit donc $(F_i)_{i \in I}$ une chaîne de filtres contenant F. Alors $E = \bigcup_i F_i$ est un filtre qui contient F. En effet, $\bot \notin E$, $\top \in E$ et pour tous $a \in E$, $b \in A$ et $i \in I$ tels que $a \in F_i$ et $a \leqslant b$, alors $b \in F_i \subseteq E$. Enfin, si $a, b \in E$, comme les F_i forment une chaîne, on trouve i tel que $a, b \in F_i$ et donc $a \wedge b \in F_i \subseteq E$. $\square$

Proposition 1.6. *Soit $X \subseteq A$ dont toute partie finie a une borne inférieure distincte de $\bot$. Alors*

$$F = \{b \geqslant \bigwedge_{i<n} a_i : a_i \in X\}$$

est le plus petit filtre contenant X.

On l'appelle le filtre engendré par X et un tel X est appelé une base de filtre.

Démonstration. Vérifions que F est un filtre. Tout d'abord, l'intersection de la famille vide étant $\top$, on a bien $\top \in F$. Si on avait $\bot \in F$, alors il existerait $a_i \in X$, pour $i < n$, tels que $\bot \geqslant \bigwedge_{i<n} a_i$

3. Un morphisme d'algèbre de Boole est une application croissante. Un isomorphisme est une bijection croissante d'inverse croissante.

et donc $\bigwedge_{i<n} a_i = \bot$, ce qui contredit que X est une base de filtre. De plus, si $b \geqslant \bigwedge_{i<n} a_i$ et $c \bigwedge_{i<m} c_i$, avec $a_i, c_i \in X$, alors $b \wedge c \geqslant \bigwedge_{i<n} a_i \wedge \bigwedge_{i<m} c_i$ et donc $c \wedge b \in F$. Enfin, si $c \geqslant b \bigwedge_{i<n} a_i$, alors on a bien $c \in F$. Donc F est un filtre.

Réciproquement, si E est un filtre qui contient X, alors, pour tous $a_i \in X$, pour $i < n$, on a (par récurrence), $\bigwedge_{i<n} a_i \in E$ et donc si $b \geqslant \bigwedge_{i<n} a_i$, on $b \in E$. D'où $F \subseteq E$. □

Proposition 1.7. *Soit F un filtre de A, sont équivalents :*
(i) F est un ultrafiltre ;
(ii) pour tout $a \in A$, $a \in F$ ou $\neg a \in F$.

Démonstration. Supposons tout d'abord que F est un ultrafiltre est que $\neg a \notin F$. Montrons alors que $F \cup \{a\}$ est une base de filtre. En effet, s'il existe $c \in F$ tel que $a \wedge c = \bot$, alors $c = c \wedge \top = c \wedge (a \vee \neg a) = (c \wedge a) \vee (c \wedge \neg a) = \bot \vee (c \wedge \neg a) = c \wedge \neg a$ et donc $c \leqslant \neg a$ et donc $\neg a \in F$, ce qui contredit notre hypothèse. Comme F est maximal, le filtre engendré par $F \cup \{a\}$ est F lui-même et donc $a \in F$.

Réciproquement, supposons que pour tout $a \in A$, $a \in F$ ou $\neg a \in F$ et soit $E \supseteq F$ un filtre. Si $a \in E \setminus F$, on a $\neg a \in F$ et donc $\bot = a \wedge \neg a \in E$, ce qui contredit le fait que E est un filtre. Donc $E \subseteq F$ et F est bien maximal. □

Remarque 1.8. Un ultrafiltre décide donc pour toute proposition $a \in A$ si elle est vraie ou fausse en respectant la relation de conséquence. On peut donc voir un ultrafiltre F comme un « modèle » de A. Pour tout $a \in A$, on note alors $F \vDash a$ — F est un modèle de A — si $a \in F$.

On rappelle que les filtres maximaux sont exactement les filtres duaux des idéaux premiers et donc que F est un ultrafiltre si pour tout $a, b \in A$ tels que $a \vee b \in F$, on a $a \in F$ ou $b \in F$.

Rappel 1.9. Soit X un ensemble.
- Une partie $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ est appelé une topologie si elle est close par intersection finie et union quelconque (en particulier, elle contient $\varnothing$ et X).
- Une partie $U \in \tau$ est appelé un ouvert et le complémentaire d'un ouvert est dit fermé.
- Étant donné $B \subseteq \mathcal{P}(X)$, la topologie engendrée par B est la plus petite topologie τ contenant B. On a
$$\tau = \{\bigcup_i \bigcap_{j<n_i} U_{ij} : U_{ij} \in B\}.$$
- Soient X et Y des espaces topologiques. Une application $f : X \to Y$ est continue si, pour tout $U \subseteq Y$ ouvert, $f^{-1}(U)$ est ouvert. C'est un homéomorphisme si elle est bijective et que son inverse est aussi continu. En d'autres termes, pour tout $U \subseteq Y$, U est ouvert si et seulement si $f^{-1}(U)$ est ouvert.

Définition 1.10. On note $\mathcal{S}(A)$ l'ensemble des ultrafiltres de A. On le munit de la topologie engendrée par les $[a] = \{F \in \mathcal{S}(A) : a \in F\}$, pour tout $a \in A$.

Proposition 1.11. *La topologie sur $\mathcal{S}(A)$ est :*
- *séparée : pour tous $x, y \in \mathcal{S}(A)$ distincts, il existe des ouverts $U, V \subseteq \mathcal{S}(A)$ disjoints tels que $x \in U$ et $y \in V$;*
- *engendrée par des ensembles ouverts fermés ;*

- *(quasi-)compacte : pour tout recouvrement* $\bigcup_{i\in I} U_i = \mathcal{S}(A)$ *d'ouverts, il existe* $I_0 \subseteq I$ *fini tel que* $\bigcup_{i\in I_0} U_i = \mathcal{S}(A)$ *— de manière équivalente, toute famille* $(X_i)_{i\in I}$ *de fermés de* $\mathcal{S}(A)$*, dont toute intersection finie est non vide*[4]*, a une intersection non vide.*

On dit que $\mathcal{S}(A)$ est un espace de Stone. On remarque que la séparation peut être renforcée : pour tout $x, y \in \mathcal{S}(A)$ distincts, il existe un ouvert fermé U tel que $x \in U$ et $y \notin U$.

Démonstration. On remarque tout d'abord que pour tout $a \in A$, $[\neg a] = \mathcal{S}(A) \smallsetminus [a]$. En effet, un ultrafiltre ne peut pas contenir à la fois a et $\neg a$ et s'il ne contient pas a, il contient $\neg a$, par la proposition 1.7. Il s'ensuit que $[a]$ est ouvert fermé, ce qui conclut la deuxième affirmation. De plus, si F et E sont des ultrafiltres distincts de A, Il existe $a \in F \smallsetminus E$ et on a donc $F \in [a]$ et $E \in [\neg a]$.

Enfin, soient $X_i \subseteq \mathcal{S}(A)$ des fermés, pour $i \in I$, dont toute intersection finie est non vide. On a $X_i = \bigcap_j [a_{ij}]$ et il suffit donc de montrer que $\bigcap_{ij}[a_{ij}]$ est non vide. Notons de plus que pour tous I_0 et J_{i0} finis, on a $\bigcap_{i\in I_0, j\in J_{i0}}[a_{ij}] \supseteq \bigcap_{i\in I_0} X_i \neq \varnothing$. Donc, quitte à remplacer les X_i par les $[a_{ij}]$, on peut donc supposer que $X_i = [a_i]$. L'ensemble $\{a_i : i \in I\}$ est alors une base de filtre. En effet, s'il existe $I_0 \subseteq I$ fini tel que $\bigwedge_{i\in I_0} a_i = \bot$, alors $\bigcap_{i\in I_0}[a_i] = \{F \in \mathcal{S}(A) : a_i \in F,$ pour tout $i \in I_0\} \subseteq \{F \in \mathcal{S}(A) : \bot \in F\}$ est vide.

Soit donc F un ultrafiltre contenant le filtre engendré par les a_i. Pour tout i, on a $a_i \in F$ et donc $F \in [a_i]$. □

Exemple 1.12. Pour tout ensemble X, l'ensemble 2^X muni de la topologie produit — engendrée par les $\{f : f(x) = \varepsilon\}$ pour tout $x \in X$ et $\varepsilon \in \{0, 1\}$ — est un espace de Stone. Sa compacité n'est pas évidente mais elle est assurée par le théorème de Tychonoff. Par ailleurs, on verra plus tard qu'il est homéomorphe à l'espace de Stone d'une algèbre de Boole dont on vient de démontrer la compacité.

Si X est dénombrable, on l'appelle l'espace de Cantor.

Proposition 1.13. *Pour tout espace de Stone* X*, l'ensemble* $\mathfrak{B}(X)$ *des ouverts fermés de* X *forme une sous-algèbre de Boole de* $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$.

Démonstration. Les ensembles X et $\varnothing$ sont bien ouverts et fermés. Et si $Y, Z \subseteq X$ sont ouverts fermés, alors c'est aussi le cas de $Y \cap Z$, $Y \cup Z$ et $X \smallsetminus Y$. □

Théorème 1.14 (Dualité de Stone). *Soit* A *une algèbre de Boole et* X *un espace de Stone. Alors :*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \to & \mathfrak{B}(\mathcal{S}(A)) \\ a & \mapsto & [a] \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \to & \mathcal{S}(\mathfrak{B}(X)) \\ x & \mapsto & F_x = \{\text{ouverts fermés contenant } x\} \end{array} \right.$$

sont, respectivement, un isomorphisme d'algèbre de Boole et un homéomorphisme.

Démonstration. Montrons tout d'abord que si $a, b \in A$, alors

$$a \leqslant b \text{ si et seulement si } [a] \subseteq [b].$$

On suppose tout d'abord que $a \leqslant b$. Soit $F \in [a]$, c'est-à-dire $a \in F$. On a alors $b \in F$ et donc $F \in [b]$. Réciproquement, supposons que $[a] \subseteq [b]$. Tout filtre qui contient a contient

4. C'est-à-dire que c'est une base de filtre dans l'algèbre $(\mathcal{P}(\mathcal{S}(A)), \subseteq)$.

donc aussi b et donc $\{a, \neg b\}$ n'est pas une base de filtre. c'est-à-dire $a \wedge \neg b = \bot$. On a donc $a = a \wedge (b \vee \neg b) = (a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b) = a \wedge b$ et donc $a \leqslant b$.

On a dont prouvé que l'application f est strictement croissante — en particulier, injective. Il reste à montrer sa surjectivité. Soit $X \subseteq \mathcal{S}(A)$ un ouvert fermé. Comme X est ouvert, on a donc $X = \bigcup_{i \in I} [a_i]$, où $a_i \in A$. Comme $\mathcal{S}(A) = (\mathcal{S}(A) \setminus X) \cup \bigcup_i X_i$ est un recouvrement ouvert, il existe donc un ensemble fini $I_0 \subseteq I$ tel que $\mathcal{S}(A) = (\mathcal{S}(A) \setminus X) \cup \bigcup_{i \in I_0} X_i$. On a donc $X = \bigcup_{i \in I_0} [a_i] = [\vee_{i \in I_0} a_i]$. L'application f est donc bien surjective.

Considérons maintenant l'application g. Pour tout x, on vérifie que F_x est un ultrafiltre : il contient X et pas $\varnothing$, il est clos par sur-ensemble et intersection, et pour tout ouvert fermé $Y \subseteq X$, x appartient soit à X, soit à son complémentaire (qui est lui aussi ouvert fermé). De plus, si $x, y \in X$ sont distincts, comme la topologie de X est séparée et engendrée par des ouverts fermés, il existe un ouvert fermé $Y \subseteq x$ tel que $x \in Y$ et $y \notin Y$. On a donc $Y \in F_x \setminus F_y$. L'application g est donc injective. Enfin, si F est un ultrafiltre de $\mathfrak{B}(X)$, par compacité, $\bigcap_{Y \in F} Y$ contient un point x. On a alors $F \subseteq F_x$, et comme F est maximal, $F = F_x$. Donc g est surjective.

Il reste à montrer qu'elle est bicontinue. Soit donc $U \subseteq X$ un ouvert fermé. On a

$$f(U) = \{F_x : x \in U\} = \{F_x : U \in F_x\} = [U],$$

puisque f est surjective. Ceci conclut la preuve. □

1.2 Formules propositionelles

On va maintenant introduire une algrèbre de Boole importante : l'algèbre de Boole des formules propositionnelles. On fixe V un ensemble (dénombrable).

Définition 1.15. L'ensemble des formules en les variables V est le plus petit ensemble $\mathfrak{F}(V)$ qui contient :

- X, pour tout $X \in V$;
- $\bot$;
- $\varphi \to \psi$, pour tous φ et $\psi \in \mathfrak{F}(V)$.

On considère, étant donné une formule, que l'on sait de quelle forme elle est (c'est une variable, $\bot$ ou l'implication entre deux formules). En terme de représentation concrète, on peut considérer que les formules sont certains mots sur l'alphabet $V \sqcup \{\bot, \to\}$, mais se posent alors des questions (pénibles) de lecture unique et potentiellement de parenthèses. On considèrera donc plutôt les formules comme des arbres binaires dont les feuilles sont étiquetées par $V \sqcup \{\bot\}$.

Par définition, on peut raisonner par induction sur les formules : pour définir une fonction f sur $\mathfrak{F}(V)$, il suffit de préciser $f(X)$, pour tout $X \in V$, $f(\bot)$ et $f(\varphi \to \psi)$ en fonction de $f(\varphi)$ et $f(\psi)$.

On souhaite donner un « sens » aux formules en les interprétant comme des fonctions qui associent à chaque assignation des variables aux valeurs 0 ou 1, une valeur égale à 0 ou 1. On définit donc la sémantique (naturelle) suivante :

Définition 1.16. Soit $\varphi \in \mathfrak{F}(V)$. On définit $[\![\varphi]\!] : \{0,1\}^V \to \{0,1\}$ par induction sur φ. Pour tout $\alpha : V \to \{0,1\}$ on pose :

- $[\![X]\!](\alpha) = \alpha(X)$;

- $[\![\bot]\!](\alpha) = 0$;
- $[\![\varphi \to \psi]\!](\alpha) = \max\{1-[\![\varphi]\!](\alpha), [\![\psi]\!](\alpha)\} = \begin{cases} 0 & \text{si } [\![\varphi]\!](\alpha) = 1 \text{ et } [\![\psi]\!](\alpha) = 0 \\ 1 & \text{sinon — c'est-à-dire } [\![\varphi]\!](\alpha) \leqslant [\![\psi]\!](\alpha). \end{cases}$

Soit $\Psi \subseteq \mathfrak{F}(V)$. On dit que Ψ est valide pour l'assignation α, ce qu'on note $\alpha \vDash \Psi$, si, pour tout $\psi \in \Psi$, $[\![\psi]\!](\alpha) = 1$ — en d'autre termes $[\![\Psi]\!](\alpha) = \inf_{\psi\in\Psi}[\![\psi]\!](\alpha) = 1$ avec comme convention que $\inf\varnothing = 1$. Soit $\varphi \in \mathfrak{F}(V)$, on dit que φ est une conséquence (sémantique) de Ψ, ce qu'on note $\Psi \vDash \varphi$, si, pour tout α tel que $[\![\Psi]\!](\alpha) = 1$, on ait $[\![\varphi]\!](\alpha) = 1$ — c'est-à-dire $[\![\Psi]\!](\alpha) \leqslant [\![\varphi]\!](\alpha)$.

La relation $\varphi \vDash \psi$ est un préordre[5] : on a $\varphi \vDash \psi$ si et seulement si, pour tout $\alpha : V \to \{0,1\}$, $[\![\varphi]\!](\alpha) \leqslant [\![\psi]\!](\alpha)$. Soit $\equiv$ la relation d'équivalence associée — on a donc $\varphi \equiv \psi$ si, pour tout $\alpha : V \to \{0,1\}$, $[\![\varphi]\!](\alpha) = [\![\psi]\!](\alpha)$.

On peut alors vérifier que $\mathfrak{F}_{\vDash}(V) = (\mathfrak{F}(V)/\equiv, \vDash)$ est une algèbre de Boole :

- le plus petit élément est (la classe de) $\bot$;
- le plus grand est $\bot \to \bot$;
- le supremum de φ et ψ est $(\varphi \to \bot) \to \psi$;
- l'infimum de φ et ψ est $(\varphi \to (\psi \to \bot)) \to \bot$.

Par exemple, $[\![(\varphi \to \bot) \to \psi]\!](\alpha) = 0$ si et seulement si $[\![\psi]\!](\alpha) = 0$ et $[\![\varphi \to \bot]\!](\alpha) = 1$ — c'est-à-dire $[\![\varphi]\!](\alpha) = 0$. C'est donc bien le supremum pour $\vDash$.

Dans la suite, on sera surtout intéressé par les formules à équivalence près et on identifiera souvent une formule avec sa classe dans l'algèbre de Boole $\mathfrak{F}_{\vDash}(V)$.

Remarque 1.17. L'algèbre de Boole $\mathfrak{F}_{\vDash}(V)$ est l'algèbre de Boole libre sur V. Elle vérifie la propriété universelle suivante : si A est une algèbre de Boole et $f : V \to A$ une fonction, il existe un unique morphisme d'algèbre de Boole $\mathfrak{F}_{\vDash}(V) \to A$ qui étend f.

La sémantique définie dans la définition 1.16 est exactement cet unique prolongement des assignations de variables dans l'algèbre de Boole $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

On vérifie que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathfrak{F}_{\vDash}(V)) & \simeq & 2^V \\ F & \mapsto & \mathbb{1}_{X\in F} \\ \{\varphi : [\![\varphi]\!](\alpha) = 1\} & \leftarrow\!\shortmid & \alpha \end{array}$$

où 2^V est muni de la topologie produit. Un point crucial est de vérifier, par induction sur φ, que :

$$\varphi \in F \text{ si et seulement si } [\![\varphi]\!](\mathbb{1}_{X\in F}) = 1.$$

Par définition, on a $[\![X]\!](\mathbb{1}_{X\in F}) = 1$ si et seulement si $X \in F$. De plus, $[\![\bot]\!](\mathbb{1}_{X\in F}) = 0$ et $\bot \notin F$. Enfin, Supposons que $[\![\varphi \to \psi]\!](\mathbb{1}_{X\in F}) = 1$, et donc, par induction $\varphi \notin F$ ou $\psi \in F$. On vérifie alors (par calcul) que $\neg\varphi \vDash \varphi \to \psi$ et $\psi \vDash \varphi \to \psi$, et donc, dans les deux cas, $\varphi \to \psi \in F$. Réciproquement, si $\varphi \to \psi \in F$ et $[\![\varphi]\!](\mathbb{1}_{X\in F}) = 1$ (et donc $\varphi \in F$), comme $\varphi \wedge (\varphi \to \psi) \vDash \psi$, on a $\psi \in F$, et donc $[\![\psi]\!](\mathbb{1}_{X\in F}) = 1$. On a donc bien que si $\varphi \to \psi \in F$, alors $[\![\varphi \to \psi]\!](\mathbb{1}_{X\in F}) = 1$.

Définition 1.18. Une partie $\Psi \subseteq \mathfrak{F}(V)$ est dite consistante s'il existe $\alpha : V \to \{0,1\}$ telle que $\alpha \vDash \Psi$ — en d'autres termes $\Psi \nvDash \bot$.

5. Elle est transitive et réflexive.

En effet, $\Psi \not\models \bot$ si et seulement s'il existe $\alpha : V \to \{0,1\}$ telle que $[\![\Psi]\!](\alpha) = 1 > 0 = [\![\bot]\!](\alpha)$.

Corollaire 1.19 (Compacité de la logique propositionnelle)**.** *Soit $\Psi \subseteq \mathfrak{F}(V)$ et soit $\varphi \in \mathfrak{F}(V)$.*

1. *La partie Ψ est consistante si et seulement si, toute $\Psi_0 \subseteq \Psi$ finie est consistante.*
2. *On a $\Psi \models \varphi$ si et seulement s'il existe $\Psi_0 \subseteq \Psi$ finie telle que $\Psi_0 \models \varphi$.*

Démonstration. Supposons que toute $\Psi_0 \subseteq \Psi$ est consistante et montrons que Ψ est consistante — la réciproque est claire puisque toute partie d'un ensemble consistant est consistante. Comme Ψ_0 est consistante, $\bigwedge_{\psi \in \Psi_0} \psi \not\equiv \bot$ et donc Ψ est une base de filtre de $\mathfrak{F}_{\models}(V)$. Elle est donc incluse dans un ultrafiltre F. Pour tout $\psi \in \Psi$, on a $[\![\psi]\!](\mathbb{1}_{X \in F}) = 1$; c'est-à-dire $\mathbb{1}_{X \in F} \models \Psi$ et donc Ψ est consistante.

La deuxième assertion découle alors de la première et du fait que $\Psi \models \varphi$ si et seulement si $\Psi \cup \{\neg\varphi\}$ n'est pas consistante. En effet, pour tout $\alpha : V \to \{0,1\}$ telle que $[\![\Psi]\!](\alpha) = 1$, $[\![\varphi]\!](\alpha) = 1$ — et donc $\Psi \models \varphi$ — si et seulement si $[\![\neg\varphi]\!](\alpha) = 0$ — et donc $\Psi \cup \{\neg\varphi\}$ n'est pas consistante. $\square$

2 Logique du premier ordre

2.1 Langages, structures, formules

Définition 2.1. Un langage (du premier ordre) est la donnée, pour chaque entier $n \geqslant 0$,

- D'un ensemble $\mathfrak{F}_n$ — les fonctions d'arité n ;
- D'un ensemble $\mathfrak{R}_n$ — les relations d'arité n.

Voir [HL19, Exemple 2.1.1].

Remarque 2.2. La définition ci-dessus est un cas particulier de *langage du premier ordre avec sortes* qui est la donnée :

- D'un ensemble $\mathfrak{X}$ de sortes ;
- Pour tout uplet de sortes $X = (X_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$, d'un ensemble $\mathfrak{F}_X$ des fonctions $\prod_{i>0} S_i \to S_0$;
- Pour tout uplet de sortes $X = (X_i)_{0 < i \leqslant n}$, d'un ensemble $\mathfrak{R}_X$ des relations sur $\prod_{i>0} S_i$.

La définition 2.1 est le cas particulier où l'ensemble des sortes est un singleton. Toutes les définitions et les résultats que l'on prouvera par la suite s'adaptent à ce cadre général mais on s'en tiendra aux langages à une sorte pour alléger les notations.

On fixe, à présent, un langage $\mathfrak{L}$.

Définition 2.3. Une $\mathfrak{L}$-structure M est la donnée :

- D'un ensemble $\mathrm{A}(M)$ non vide[6] ;
- Pour tout $F \in \mathfrak{F}_n$, d'une fonction $F^M : \mathrm{A}(M)^n \to \mathrm{A}(M)^n$;
- Pour tout $R \in \mathfrak{R}_n$, d'une partie $R^M \subseteq \mathrm{A}(M)^n$.

Voir [HL19, Exemple 2.1.2].

Définition 2.4. Soient M et N deux structures et $f : \mathrm{A}(M) \to \mathrm{A}(N)$ une fonction.

6. On pourrait tout à fait autoriser les structures vides, mais cela compliquerait un peu certaines constructions par la suite. On se permettra donc d'ignorer ici cette (unique) structure.

- C'est un morphisme[7] si, pour tout $a = (a_i)_{i<n} \in \mathrm{A}(M)^n$, tout $F \in \mathfrak{F}_n$ et tout $R \in \mathfrak{R}_n$,
$$f(F^M(a)) = F^N(f(a)) \text{ et si } a \in R^M \text{ alors } f(a) \in R^N$$
où $f(a) = (f(a_i))_{i<n}$.
- C'est un plongement si f est injective et si, pour tout $a = (a_i)_{i<n} \in \mathrm{A}(M)^n$, tout $F \in \mathfrak{F}_n$ et tout $R \in \mathfrak{R}_n$,
$$f(F^M(a)) = F^N(f(a)) \text{ et } a \in R^M \text{ si et seulement si } f(a) \in R^N.$$
- C'est un isomorphisme si c'est un c'est un plongement surjectif.

Remarque 2.5. Un isomorphisme est exactement un plongement inversible, dont l'inverse est encore un plongement. C'est aussi exactement un morphisme inversible, dont l'inverse est un morphisme.

On fixe, à présent, un ensemble infini (dénombrable) V de variables.

Définition 2.6. L'ensemble $\mathfrak{T}^{\mathfrak{L}}(V)$ des termes du langage $\mathfrak{L}$ en les variables V est le plus petit ensemble qui contient :
- x, pour tout $x \in V$;
- $Ft_1 \dots t_n$, pour tout $F \in \mathfrak{F}_n$ et tous $t_1, \dots, t_n \in \mathfrak{T}^{\mathfrak{L}}(V)$.

Définition 2.7. L'ensemble $\mathfrak{F}^{\mathfrak{L}}(V)$ des formules du langage $\mathfrak{L}$ en les variables V est le plus petit ensemble qui contient :
- $Rt_1 \dots t_n$, pour tout $R \in \mathfrak{R}_n$ et tous $t_1, \dots, t_n \in \mathfrak{T}^{\mathfrak{L}}(V)$;
- $t_1 = t_2$, pour tous t_1 et $t_2 \in \mathfrak{T}^{\mathfrak{L}}(V)$;
- $\bot$;
- $\varphi \to \psi$, pour tous φ et $\psi \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{L}}(V)$;
- $\forall x\, \varphi$, pour tout $x \in V$ et $\varphi \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{L}}(V)$.

On considère de nouveau que l'on sait distinguer entre ces cinq formes. La question de la représentation concrète des formules est ici plus cruciale puisque la manière dont on décide de gérer les variables liées par des quantificateurs aura des conséquences sur la suite. Ici, on choisit de les représenter comme des arbres où les variables liées sont remplacée par un lien vers leur quantificateur. Techniquement, les formules sont donc des graphes orientés pointés dont les sommets sont annotés par $V \sqcup \{=, \bot, \to, \forall\} \sqcup \bigsqcup_n (\mathfrak{F}_n \sqcup \mathfrak{R}_n)$.

L'intérêt de cette représentation et que pour tous φ et $\psi \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{L}}(V)$ et tous x et $y \in V$,
$$\forall x\, \varphi = \forall y\, \psi \text{ si et seulement si } \psi = \varphi(y/x)$$
qui est la formule obtenue en remplaçant toutes les occurences de x par y. Cette représentation sera aussi très pratique pour définir la substitution puisqu'elle évite la capture de variables par des quantificateurs.

On interpréte la « vérité » d'une formule suivant la sémantique naturelle suivante :

7. On utilisera très peu cette notion.

Définition 2.8. Soit M une structure et $t \in \mathfrak{T}^{\mathfrak{L}}(V)$. On définit $[\![t]\!]_M : M^V \to M$ par induction sur t. Pour tout $\alpha : V \to M$, on pose :
- $[\![x]\!]_M(\alpha) = \alpha(x)$;
- $[\![Ft_1 \dots t_n]\!]_M(\alpha) = F^M([\![t_1]\!]_M(\alpha), \dots, [\![t_1]\!]_M(\alpha))$.

Soit $\varphi \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{L}}(V)$. On définit aussi $[\![\varphi]\!]_M : M^V \to \{0,1\}$ par induction sur φ. Pour tout $\alpha : V \to M$, on pose :
- $[\![Rt_1 \dots t_n]\!]_M(\alpha) = \mathbb{1}_{R^M}([\![t_1]\!]_M(\alpha), \dots, [\![t_1]\!]_M(\alpha))$;
- $[\![t_1 = t_2]\!]_M(\alpha) = \mathbb{1}_{[\![t_1]\!]_M(\alpha) = [\![t_2]\!]_M(\alpha)}$;
- $[\![\bot]\!]_M(\alpha) = 0$;
- $[\![\varphi \to \psi]\!]_M(\alpha) = \max\{1 - [\![\varphi]\!]_M(\alpha), [\![\psi]\!]_M(\alpha)\}$;
- $[\![\forall x\, \varphi]\!]_M(\alpha) = \inf_{a \in \mathrm{A}(M)} [\![\varphi]\!]_M(\alpha_{x \mapsto a})$[8] où $\alpha_{x \mapsto a}(x) = a$ et $\alpha_{x \mapsto a}(y) = \alpha(y)$ si $y \neq x$.

Si $[\![\varphi]\!]_M(\alpha)$, on dit que φ est satisfaite par α dans M, ce que l'on note $M \vDash \varphi(\alpha)$.

Remarque 2.9. On peut vérifier, par induction sur φ, que $[\![\varphi]\!]_M(\alpha)$ ne dépend que des valeurs de α pour les variables qui apparaissent dans φ ; on rappelle que, par construction, les variables liées par des quantificateurs n'apparaissent pas dans la formule φ.

On écrira $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ pour indiquer que les variables de φ apparaissent toutes parmi les variables (distinctes deux à deux) $x_1, \dots, x_n$. Pour tout $a_1, \dots, a_n \in \mathrm{A}(M)$ on écrit alors $M \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n)$ pour signifier que $M \vDash \varphi(\alpha)$ pour tout choix de $\alpha : V \to \mathrm{A}(M)$ telle que $\alpha(x_i) = a_i$, pour tout $i \leqslant n$.

Comme pour la logique propositionelle, la relation $\varphi \vDash \psi$ est un préordre et on note $\equiv$ la relation d'équivalence associée. L'ensemble ordonné $\mathfrak{F}^{\mathfrak{L}}_{\vDash}(V) = (\mathfrak{F}^{\mathfrak{L}}(V)/\equiv, \vDash)$ est alors une algèbre de Boole. Pour toutes formules φ et ψ, on a :
- un complément $\neg\varphi \equiv \varphi \to \bot$;
- un supremum $\varphi \vee \psi \equiv (\neg\varphi) \to \psi$;
- un infimum $\varphi \wedge \psi \equiv \neg(\varphi \to (\neg\psi))$.

On introduit aussi le quantificateur existentiel $\exists x\, \varphi \equiv \neg\forall x\, \neg\varphi$.

On peut alors calculer la sémantique de ces nouveaux symboles. Pour toute structure M et toute $\alpha : V \to M$, on a :
- $[\![\neg\varphi]\!]_M(\alpha) = 1 - [\![\varphi]\!]_M(\alpha)$;
- $[\![\varphi \vee \psi]\!]_M(\alpha) = \max\{[\![\varphi]\!]_M(\alpha), [\![\psi]\!]_M(\alpha)\}$;
- $[\![\varphi \wedge \psi]\!]_M(\alpha) = \min\{[\![\varphi]\!]_M(\alpha), [\![\psi]\!]_M(\alpha)\}$;
- $[\![\exists x\, \varphi]\!]_M(\alpha) = \sup_{a \in \mathrm{A}(M)} [\![\varphi]\!]_M(\alpha_{x \mapsto a})$.

2.2 Ultraproduits

On fixe un language $\mathfrak{L}$. Soient $(M_i)_{i \in I}$ des structures et $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre sur l'algèbre de Boole $(P(I), \subseteq)$.

Définition 2.10. L'ultraproduit $N = \prod_{i \to fU} M_i$ est la $\mathcal{L}$-structure avec :

8. Pour être parfaitement correct, puisque $\forall x\, \varphi$ n'est défini qu'à renommage de x près, il faudrait plutôt considérer $\inf_{a \in \mathrm{A}(M), y} [\![\varphi(y/x)]\!]_M(\alpha_{y \mapsto a})$. Mais on peut vérifier, *a posteriori*, par induction sur φ que ces deux quantités sont égales.

- ensemble sous-jacent $\mathrm{A}(N) = \prod_i \mathrm{A}(M_i)/\equiv$ où

$$a \equiv b \text{ si et seulement si } \{i \in I : a_i = b_i\} \in \mathfrak{U};$$

- pour tout symbole de fonction $F \in \mathfrak{F}_n$ d'arité n et $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{A}(N)$,

$$F^N(a_1, \ldots, a_n) = (F^{M_i}(a_{1,i}, \ldots, a_{n,i}))/\equiv,$$

  où $a_j = (a_{j,i})/\equiv$;
- pour tout symbole de relation $R \in \mathfrak{R}_n$ d'arité n et $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{A}(N)$,

$$(a_1, \ldots, a_n) \in R^N \text{ si et seulement si } \{i \in I : (a_{1,i}, \ldots, a_{n,i}) \in R^{M_i}\} \in \mathfrak{U},$$

  où $a_j = (a_{j,i})_i/\equiv$.

Il faut tout de même montrer que $\equiv$ est bien une relation d'équivalence et que les définitions de F^N et R^N ne dépendent pas de choix de coordonnées.

Démonstration. Vérifions d'abord que $\equiv$ est bien une relation d'équivalence. Elle est réflexive puisque pour tout $a \in \prod_i \mathrm{A}(M_i)$, $\{i \in I : a_i = a_i\} = I \in \mathfrak{U}$. Elle est aussi symétrique puisque, pour tout $b \in \prod_i \mathrm{A}(M_i)$, $\{i \in I : a_i = b_i\} = \{i \in I : b_i = a_i\}$. Montrons enfin qu'elle est transitive. Pour tout $c \in \prod_i \mathrm{A}(M_i)$, si $a \equiv b$ et $b \equiv c$, on a $X = \{i \in I : a_i = b_i\} \in \mathfrak{U}$ et $Y = \{i \in I : a_i = b_i\} \in \mathfrak{U}$. On a alors

$$X \cap Y \subseteq \{i \in I : a_i = c_i\}$$

qui est donc aussi un élément de $\mathfrak{U}$. On a donc bien $a \equiv c$ et $\equiv$ est transitive.

Soit maitnenant F un symbole de fonction d'arité n et $a, b \in N^n$ tels que, pour tous $j \leqslant n$, $a_j \equiv b_j$; et donc $X_j = \{i \in I : a_{j,i} = b_{j,i}\} \in \mathfrak{U}$, où $a_j = (a_{j,i})_{i \in I}/\equiv$ et $b_j = (b_{j,i})_{i \in I}/\equiv$. Comme

$$\bigcap_{j \leqslant n} X_j \subseteq \{i \in I : F^{M_i}(a_{1,i}, \ldots, a_{n,i}) = F^{M_i}(b_{1,i}, \ldots, b_{n,i})\}$$

ce dernier ensemble est un élément de $\mathfrak{U}$ et donc

$$(F^{M_i}(a_{1,i}, \ldots, a_{n,i}))_{i \in I} \equiv F^{M_i}(b_{1,i}, \ldots, b_{n,i});$$

c'est à dire que F^N est bien défini. De même, si R est un symbole de relation d'arité n,

$$\bigcap_{j \leqslant n} X_j \cap \{i \in I : (a_{1,i}, \ldots, a_{n,i}) \in R^{M_i}\} \subseteq \{i \in I : (b_{1,i}, \ldots, b_{n,i}) \in R^{M_i}\}$$

et donc, par symétrie,

$$\{i \in I : (a_{1,i}, \ldots, a_{n,i}) \in R^{M_i}\} \in \mathfrak{U} \text{ si et seulement si } \{i \in I : (b_{1,i}, \ldots, b_{n,i}) \in R^{M_i}\} \in \mathfrak{U};$$

ce qui montre que R^N est bien défini. □

On a pas encore utilisé que $\mathfrak{U}$ est un ultrafiltre, mais simplement que c'est un filtre. Le fait que c'est un ultrafiltre est cependant nécessaire pour le résultat suivant :

Théorème 2.11 (Łoš). *Pour toute formule φ et tous $\alpha_i : V \to M_i$, on a*

$$\prod_{i \to \mathfrak{U}} M_i \vDash \varphi(\alpha) \text{ si et seulement si } \{i : M_i \vDash \varphi(\alpha_i)\} \in \mathfrak{U},$$

où $\alpha(x) = (\alpha_i(x))_{i \in I}/\equiv$, pour tout $x \in V$.

En d'autres termes, la définition choisie pour l'interprétation des relations dans l'utraproduit s'étend aux formules.

Démonstration. Montrons tout d'abord que pour tout terme t, on a

$$[\![t]\!]_N(\alpha) = ([\![t]\!]_{M_i}(\alpha_i))_{i \in I}/\equiv$$

On procède par induction sur le terme t. Si t est une variable $x \in V$, $[\![x]\!]_N(\alpha) = (\alpha_i(x))_{i \in I}/\equiv = ([\![x]\!]_{M_i}(\alpha_i))_{i \in I}/\equiv$ par définition. Si t est de la forme $Ft_1 \dots t_n$, on a

$$\begin{aligned}
[\![t]\!]_N(\alpha) &= F^N([\![t_1]\!]_N(\alpha), \dots, [\![t_n]\!]_N(\alpha)) && \text{par définition de } \alpha(t) \\
&= F^N(([\![t_1]\!]_{M_i}(\alpha_i))_{i \in I}/\equiv, \dots, ([\![t_n]\!]_{M_i}(\alpha_i))_{i \in I}/\equiv) && \text{par induction} \\
&= (F^{M_i}([\![t_1]\!]_{M_i}(\alpha_i), \dots, [\![t_n]\!]_{M_i}(\alpha_i)))_{i \in I}/\equiv && \text{par définition de } F^N \\
&= ([\![Ft_1 \dots t_n]\!]_{M_i}(\alpha_i))_{i \in I}/\equiv && \text{par définition de } [\![t]\!].
\end{aligned}$$

On prouve alors le théorème par induction sur la formule φ. Si c'est une formule atomique de la forme $t_1 = t_2$, on a $N \vDash (t_1 = t_2)(\alpha)$ si et seulement si $[\![t_1]\!]_N(\alpha) = [\![t_2]\!]_N(\alpha)$, c'est à dire

$$\{i \in I : M_i \vDash (t_1 = t_2)(\alpha_i)\} = \{i \in I : [\![t_1]\!]_{M_i}(\alpha_i) = [\![t_2]\!]_{M_i}(\alpha_i)\} \in \mathfrak{U}.$$

Si φ est de la forme $Rt_1 \dots t_n$, par définition de R^N, on a $N \vDash (Rt_1 \dots t_n)(\alpha)$ si et seulement si

$$\{i \in I : M_i \vDash (Rt_1 \dots t_n)(\alpha_i)\} = \{i \in I : ([\![t_1]\!]_{M_i}(\alpha_i), \dots, [\![t_n]\!]_{M_i}(\alpha_i)) \in R^{M_i}\} \in \mathfrak{U}.$$

Si φ est $\bot$, on a $N \nvDash \bot(\alpha)$ et $\{i \in I : M_i \vDash \bot(\alpha_i)\} = \varnothing \notin \mathfrak{U}$.

Pour ce qui est des formules de forme $\psi_1 \to \psi_2$, on commence par considérer le cas des formules de la forme $\neg\psi$ et $\psi_1 \wedge \psi_2$. Le cas de l'implication en découle puisque $[\![\psi_1 \to \psi_2]\!] = [\![\neg(\psi_1 \wedge \neg\psi_2)]\!]$.

Si φ est de la forme $\neg\psi$,

$$\begin{aligned}
N \vDash (\neg\psi)(\alpha) &\leftrightarrow N \nvDash \psi(\alpha) \\
&\leftrightarrow \{i \in I : M_i \vDash \psi(\alpha_i)\} \notin \mathfrak{U} && \text{par induction} \\
&\leftrightarrow \{i \in I : M_i \nvDash \psi(\alpha_i)\} \in \mathfrak{U} && \text{puisque } \mathfrak{U} \text{ est un ultrafiltre} \\
&\leftrightarrow \{i \in I : M_i \vDash \neg\psi(\alpha_i)\} \in \mathfrak{U}.
\end{aligned}$$

Si φ est de la forme $\psi_1 \wedge \psi_2$,

$$\begin{aligned}
N \vDash (\psi_1 \wedge \psi_2)(\alpha) &\leftrightarrow N \vDash \psi_1(\alpha) \text{ et } N \vDash \psi_2(\alpha) \\
&\leftrightarrow X_j = \{i \in I : M_i \vDash \psi_1(\alpha_i)\} \in \mathfrak{U} \text{ pour } j = 1, 2 \\
&\leftrightarrow X_1 \cap X_2 \in \mathfrak{U} \\
&\leftrightarrow \{i \in I : M_i \vDash (\psi_1 \wedge \psi_2)(\alpha_i)\}.
\end{aligned}$$

La troisième équivalence découle du fait que $\mathfrak{U}$ est un filtre. En effet, si $X_1 \cap X_2 \in \mathfrak{U}$, alors comme $X_1 \cap X_2 \subseteq X_j$, on a bien $X_j \in \mathfrak{U}$. La réciproque est vraie par définition des filtres. Cela conclut le cas de la disjonction.

Il reste à traiter le cas où φ est de la forme $\forall x\, \varphi$. Pour cela on considère d'abord le cas où φ est de la forme $\exists x\, \varphi$. Le cas du quantificateur universel s'en déduit puisque $[\![\forall x\, \varphi]\!] = [\![\neg \exists x\, \neg\varphi]\!]$.

Si φ est de la forme $\exists x\, \psi$. On a,

$$\begin{aligned} N \vDash (\exists x\, \psi)(\alpha) &\leftrightarrow \text{ il existe } a \in N \text{ tel que } N \vDash \varphi(\alpha_{x\mapsto a}) \\ &\leftrightarrow \text{il existe } a_i \in \prod_i M_i \text{ tel que } X_{a_i} = \{i \in I : M_i \vDash \varphi(\alpha_{x\mapsto a_i})\} \in \mathfrak{U} \\ &\leftrightarrow Y = \{i \in I : M_i \vDash \exists x\, \varphi(\alpha)\} \in \mathfrak{U}. \end{aligned}$$

La deuxième équivalence découle de l'induction. Pour ce qui est de la dernière équivalence, l'implication de haut en bas suit du fait que $X_{a_i} \subseteq Y$. Pour la réciproque, pour tout $i \in Y$, soit a_i tel que $M_i \vDash \varphi(\alpha_{x\mapsto a_i})$ et a_i quelconque sinon. On a alors $Y \subseteq X_{a_i}$, ce qui prouve l'implication de bas en haut. Ceci conclut la preuve. □

Définition 2.12. Soit Φ un ensemble de formules et ψ une formule.

- On dit que Φ est consistant s'il existe une structure M et une assignation $\alpha : V \to M$ telles que, pour tout $\varphi \in \Phi$, $M \vDash \varphi(\alpha)$; c'est à dire $[\![\Phi]\!]_M(\alpha) = \inf_{\varphi\in\Phi} [\![\varphi]\!]_M(\alpha) = 1$. On dit aussi que α satisfait Φ dans M et on écrit $M \vDash \Phi(\alpha)$.
- On dit que Φ est finiment consistant si toute $\Phi_0 \subseteq \Phi$ finie est consistante.
- On dit que Φ a pour conséquence (sémantique) ψ — ce qu'on note $\Phi \vDash \psi$ — si, pour toute structure M et toute assignation $\alpha : V \to M$, on a :

$$[\![\Phi]\!]_M(\alpha) \leqslant \alpha(\psi).$$

Théorème 2.13 (Compacité de la logique du premier ordre)**.** *Soit Φ un ensemble de formules et ψ une formule.*

1. *L'ensemble Φ est consistant si et seulement s'il est finiment consistant.*
2. *On a $\Phi \vDash \psi$ si et seulement s'il existe $\Phi_0 \subseteq \Phi$ finie telle que $\Phi_0 \vDash \psi$.*

Démonstration. Montrons tout d'abord la première assertion et supposons que Φ est finiment consistant et prouvons qu'il est consitant — la réciproque découle du fait que toute partie d'un ensemble consistant est elle-même consistante. Soit I l'ensemble des formules consistantes. Pour tout $\varphi \in I$, soit M_φ une structure et $\alpha_\varphi : V \to M_\varphi$ une assignation telles que $M_\varphi \vDash \varphi(\alpha_\varphi)$. Pour tout $\varphi \in I$, on note $\langle\varphi\rangle = \{\psi \in I : \psi \vDash \varphi\}$. L'ensemble $\langle\Phi\rangle = \{\langle\varphi\rangle : \varphi \in \Phi\}$ est alors une base de filtre. En effet, comme Φ est finiment consistante, pour tout ensemble fini $\Phi_0 \subseteq \Phi$, la formule $\bigwedge_{\varphi\in\Phi_0} \varphi$ est consistante et, pour tout φ dans Φ_0, elle appartient à $\langle\varphi\rangle$.

Soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre qui contient $\langle\Phi\rangle$, $M = \prod_{\varphi\to\mathfrak{U}} M_\varphi$ et $\alpha : V \to M$ définie par $x \mapsto (\alpha_\varphi(x))/\equiv$. Par le théorème de Łoš (théorème 2.11), pour toute formule $\varphi \in \Phi$, on a :

$$M \vDash \varphi(\alpha) \text{ si et seulement si } \{\psi : M_\psi \vDash \varphi(\alpha_\psi)\} \in \mathfrak{U}.$$

Mais si $\psi \in \langle\varphi\rangle$, comme $\psi \vDash \varphi$, on a $M_\psi \vDash \varphi(\alpha_\psi)$ et donc

$$\{\psi : M_\psi \vDash \varphi(\alpha_\psi)\} \supseteq \langle\varphi\rangle \in \mathfrak{U}.$$

Il s'ensuit que, $M \vDash \Phi(\alpha)$, ce qui conclut la preuve de la première assertion.

La seconde assertion en découle puisque $\Phi \vDash \psi$ si et seulement si $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ n'est pas consistante. En effet, on a $\Psi \vDash \varphi$ si et seulement si, pour toute structure M et $\alpha : V \to M$ telle que $\inf_{\varphi\in\Phi} \alpha(\varphi) = 1$, on ait $[\![\psi]\!](\alpha) = 1$ et donc $[\![\neg\psi]\!](\alpha) = 0$; ce qui est équivalent au fait que $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ n'est pas consistante. □

Remarque 2.14. Il n'existe pas d'ensemble de formules Φ tel que :

$$M \vDash \Phi \leftrightarrow M \text{ est fini.}$$

En effet, soit ψ_n les formule $\exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i\neq j} \neg x_i = x_j$. On a

$$M \vDash \psi_n \leftrightarrow M \text{ est de taille au moins } n.$$

L'ensemble $\Phi \cup \{\psi_n : n \geqslant 1\}$ est finiment consistant, en effet, n'importe quelle M de cardinal N satisfait $\Phi \cup \{\psi_n : n \leqslant N\}$. Par le théorème 2.13, il est alors satisfait par une structure M. Cette structure est finie puisque M satisfait Φ, mais elle est aussi infinie puisque M satisfait ψ_n pour tout $n \geqslant 1$. C'est une contradiction et Φ ne peut donc pas exister.

Références

[1] M. Hils et F. Loeser. *A first journey through logic*. T. 89. Stud. Math. Libr. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2019.