# None

Null

26 septembre 2023

## Table des matières



# 1 TD1

# 2 Mesures Additives et $\sigma$-additives

## 2.1 Exercice 1

On pose $\tilde{A_0} = A_0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\tilde{A_{n+1}} = A_{n+1} \setminus \tilde{A_n}$.
On a alors : $\mu \left( \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \right) = \mu \left( \bigsqcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \tilde{A_n} \right)$ car ces unions sont égales.
Mais, par $\sigma$-additivité de $\mu$ : $\mu \left( \bigsqcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \tilde{A_n} \right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(\tilde{A_n}\right)$
Par croissance/positivité : $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(\tilde{A_n}\right) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(A_n\right)$.
Donc : $\mu \left( \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \right) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(A_n\right)$

## 2.2 Exercice 2

Il est clair que $\mathcal{G}$ est stable par intersections finies et contient $\varnothing$ et $E$. Par ailleurs, si $A_i$ est une famille d'éléments de $\mathcal{G}$, en posant $\tilde{A_n}$ l'union des $n$ premiers $A_i$, la suite $\tilde{A_i}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{G}$

## 2.3 Exercice 3

### 2.3.1 Question 1

$\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n$ est l'ensemble des éléments qui sont dans tous les $A_k$ àpcr.
$\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$ est l'ensemble des éléments qui sont apparaissent une infinité de fois dans les $A_k$.

### 2.3.2 Question 2

$$\text{On a : } \left(\liminf_{n\to+\infty} A_n\right)^{\complement} \left(\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k\right)^{\complement} = \left(\bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right)^{\complement}\right) = \left(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k^{\complement}\right) = \limsup_{n\to+\infty} A_n^{\complement}$$

### 2.3.3 Question 3

On a : $1_{\liminf A_n} = \liminf 1_{A_n}$. De même pour $\limsup$

### 2.3.4 Question 4

Par 1. on a :

1. $\liminf A_n = F \cup G$ et $\limsup A_n = F \cap G$
2. $\liminf A_n = ]0,3] \cup [-1,2] = [-1,3]$ et $\limsup A_n = ]0,2]$

### 2.3.5 Question 5

Par continuité croissante : $\mu\left(\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k\right) = \sup_n \mu\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right) \leq \liminf_n \mu\left(A_n\right)$

On pose : $A_k = [k; k+1]$. Alors, $\blacksquare$.

### 2.3.6 Question 6

Par continuité décroissante : $\mu\left(\limsup_n A_n\right) = \inf_n \mu\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$ Par $\sigma$-additivité, on obtient bien le résultat.