None

Null

12 avril 2024

Table des matières

1 Exercice 1

1.1 Question 1

- Relation $\varnothing \vdash \bot$, $S \vdash (a, b) \Leftrightarrow \forall x \in S, a \leq x \leq b$
- Concrétisation : $\gamma(\bot) = \varnothing$, $\gamma((a, b)) = \{a, \ldots, b\}$ et on a bien, si $c \vdash a$, $c \subseteq \gamma(a)$.
- Abstraction : $\alpha(\varnothing) = \bot$, $\alpha(S) = (\inf S, \sup S)$ et on a bien, si $c \vdash a$, $\alpha(c) \preceq a$.
- On a : $\gamma(C) \sqsubseteq \gamma(C)$ donc $\alpha(\gamma(C)) \preceq C$. De même, $\gamma(\alpha(S)) \sqsubseteq S$.

1.2 Question 2

On considère les opérations au sens de Minkowski.
On définit déjà $(a, b) \cup (c, d) = \min(a, c), \max(b, d)$

- Pour l'addition on prend la convention $(-\infty, a) + (b, +\infty) = (-\infty, +\infty)$ où, a, b sont quelconques et $\bot + S = \bot$. Il est clair qu'on a bien la sûreté par une sur-estimation puisqu'on sur-estime les ensembles par des intervalles au départ et qu'il y a une correspondance exacte pour les intervalles.
- Pour la multiplication $(-\infty, a < 0) \times (b > 0, c) = (-\infty, b \times a)$, $(-\infty, a) \times (b, c < 0) = (a \times b, +\infty)$, $(a < 0, b > 0) \times (c < 0, d > 0) = (\min(bc, ad), \max(ac, bd))$.
- Pour la division euclidienne, si $(a, b) \div (c < 0, d > 0) = a \div (c, -1) \cup a \div (1, d) \cup (+\infty, +\infty) \cup (-\infty, -\infty)$ avec les valeurs positives si $b > 0$, négatives si $a < 0$. Sinon, on a $(a, b) \div (c > 0, d > 0) = (a \div d, b \div c)$, et $(a, b) \div (c < 0, d < 0) = (a \div d, b \div c)$
- Pour le modulo, $(a, b) \mod (c < 0, d > 0) = (a, b) \mod (c, -1) \cup (a, b) \mod (1, d) \cup (0, 0)$. Sinon, on considère $\{x \mod y \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.

1.3 Question 3

On définit déjà $(a, b) \cup (c, d) = \min(a, c), \max(b, d)$. Il n'est pas exact car $(1, 2) \cup (4, 5) = \{1, 2, 4, 5\} \neq (1, 5)$.
De plus

$$(a, b) \cap (c, d) = \begin{cases} \perp & \text{si } b < c \vee a > d \\ (\max(a, c), \min(b, d)) & \text{sinon} \end{cases}$$

Cet opérateur est exact.

2 Exercice 3

2.1 Question 1

Oui car $\gamma((a, b)) = \{a, \ldots, b\}$ et $\alpha(\{a, \ldots, b\}) = (a, b)$. De plus $\gamma((-\infty, a)) = \{\ldots, a\}$ et $\alpha(\{\ldots, a\}) = (-\infty, a)$.