

Topologie et Calcul Différentiel

Djalil Chafaï

2023 - 2024

Table des matières

1	Espaces Topologiques	3
1.1	Espaces à produit scalaire, espaces normés, espaces métriques, espaces topologiques.	3
1.2	Fermés	3
1.3	Voisinages, convergence et continuité.	3
1.4	Bases de topologie	4
1.5	Axiomes de Séparation	4
1.6	Topologies	5
1.6.1	Topologie Trace	5
1.6.2	Topologie Produit	5
1.6.3	Topologies Initiale et Finale	5
1.6.4	Topologie Quotient	5
2	Compacité	6
2.1	Quasi-Compacité	6
2.2	Théorème de Tykhonov	6
2.3	Compacité Métrique	6
2.4	Compacité Locale	6
2.5	Compactification d'Alexandrov	7
2.6	Théorème de Baire	7
3	Complétude	7
3.1	Suites de Cauchy	7
3.2	Espaces Polonais, de Banach, de Hilbert	8
3.3	Complétion	8
4	Connexité	8
4.1	Connexité, connexité par arcs, composantes connexes	8
4.2	Connexité Métrique	8
5	Espaces de fonctions continues sur un métrique compact	9
6	Opérateurs Linéaires Bornés	9
6.1	Définitions et Duéalité	9
6.2	Banach-Steinhaus	10
6.3	Hahn-Banach	10
6.4	Banach-Schauder	10
6.5	Algèbres de Banach, Rayon Spectral, Inverse	10
6.6	Intégrale de Riemann pour les fonctions de la variable réelle à valeurs dans un Banach	11
7	Espaces de Hilbert	11
7.1	Projection Orthogonale sur un Convexe Fermé	11

1 Espaces Topologiques

1.1 Espaces à produit scalaire, espaces normés, espaces métriques, espaces topologiques.

Définition 1.1.1. Un produit scalaire sur un \mathbb{K} -ev est une forme linéaire, symétrique (ou hermitienne) et définie positive. Quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on dit que le produit scalaire est sesquilinéaire.

Proposition 1.1.1. • Relation de Pythagore : $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re(\langle x, y \rangle)$
• Identité du Parallélogramme : $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$
• Inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$

Définition 1.1.2. Une norme sur un \mathbb{K} -ev ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) est une forme positive sous-additive homogène séparée.

Définition 1.1.3. Une distance ou une métrique sur un ensemble est une forme positive séparée symétrique vérifiant l'inégalité triangulaire.

Définition 1.1.4. Une topologie $\mathcal{O} \in \mathcal{P}(X)$ sur un ensemble X est une collection de partie de X stable par réunion quelconque, intersections finies, contenant l'espace et le vide. On appelle ses éléments des ouverts

1.2 Fermés

Définition 1.2.1. • Un ensemble A est fermé si et seulement si A^c est ouvert.

- L'adhérence d'un ensemble est le plus petit fermé le contenant :

$$\overline{A} = \bigcap_{A \subset F, F \text{ fermé}} F = \{x \in X, \forall O \in \mathcal{O}, x \in O \rightarrow O \cap A \neq \emptyset\}$$

- L'intérieur de A est le plus grand ouvert qu'il contient :

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{O \subset A, O \text{ ouvert}} O = \{x \in X, \exists O \in \mathcal{O}, x \in O \subset A\}$$

- La frontière de A est : $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$
- A est dense si d'adhérence égale à X .

Définition 1.2.2. • x est intérieur à A si $x \in \overset{\circ}{A}$.

- x est adhérent à A lorsque $x \in \overline{A}$. On dit alors que x est isolé lorsqu'il existe O_x voisinage ouvert de x d'intersection x avec A . Sinon, x est d'accumulation.

1.3 Voisinages, convergence et continuité.

Définition 1.3.1. Un voisinage d'un point x est une partie qui contient un ouvert contenant x .

Définition 1.3.2. Une suite converge vers x pour une topologie lorsque pour tout voisinage de x , la suite appartient à ce voisinage à pcr.

Proposition 1.3.1. Si F fermé, $x_n \in F \rightarrow x$, alors $x \in F$. La réciproque est fausse en générale.

Théorème 1.3.1. Dans un espace métrique, $x_n \rightarrow x$ ssi $d(x_n, x) \rightarrow 0$

Définition 1.3.3. Une application f est dite :

- continue en x lorsque pour tout voisinage V de $f(x)$, il existe un voisinage W de x tel que $f(W) \subset V$.
- séquentiellement continue en x lorsque pour toute suite $x_n \rightarrow x$, $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Proposition 1.3.2. *La continuité implique la continuité séquentielle.*

Proposition 1.3.3. *Soit $f : X \rightarrow Y$. On a équivalence entre :*

- f est continue
- Les images réciproques par f des ouverts de Y sont des ouverts de X .
- Les images réciproques par f des fermés de Y sont des fermés de X .

Définition 1.3.4 (Propriété de Fréchet-Urysohn). *X vérifie la propriété de Fréchet-Urysohn si :*

$$\forall A \subset X, x \in \overline{A}, \text{ il existe } x_n \in A^{\mathbb{N}}, x_n \rightarrow x$$

Théorème 1.3.2. *Si X vérifie la propriété de Fréchet-Urysohn, pour tout espace Y et tout $f : X \rightarrow Y$, la continuité équivaut à la continuité séquentielle.*

Définition 1.3.5. *Un homéomorphisme est une bijection continue de réciproque continue.*

1.4 Bases de topologie

Définition 1.4.1. *Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ une famille d'ouverts. \mathcal{B} est une base de \mathcal{O} quand : $\forall O \in \mathcal{O}, \exists (B_i)_i \in \mathcal{B}, O = \cup_i B_i$ ou de manière équivalente quand $\forall O \in \mathcal{O}, x \in O, \exists B \in \mathcal{B}, x \in B \subset O$.*

Théorème 1.4.1. *Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ une base. On a :*

- $X = \cup_{B \in \mathcal{B}} B$
- $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, x \in B_1 \cap B_2, \exists B_3 \in \mathcal{B}, x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Réciproquement, si une famille vérifie ces propriétés, alors $\mathcal{O} = \{\cup_{B \in \mathcal{B}} B\}_{\mathcal{A} \subset \mathcal{B}}$ est la plus petite topologie qui contient \mathcal{B} , appelée topologie engendrée par \mathcal{B} .

Définition 1.4.2. *Une base locale au point x est une famille d'ouverts contenant x et dont au moins l'un est inclus dans chaque ouvert contenant x .*

Définition 1.4.3. *Un espace topologique est :*

- à base dénombrable de voisinages si tout point possède une base dénombrable de voisinages.
- à base dénombrable lorsqu'il possède une base dénombrable (c'est plus fort !)
- séparable lorsqu'il existe une partie dénombrable dense.

Théorème 1.4.2. *Un espace à base dénombrable est toujours séparable. La réciproque est vraie pour un espace métrisable.*

Théorème 1.4.3. *Tout espace à base dénombrable de voisinages (en particulier tout espace métrisable) est un espace de Fréchet-Urysohn.*

1.5 Axiomes de Séparation

Définition 1.5.1. *Axiome T2 : Tous deux points peuvent être séparés par deux ouverts distincts.*

Théorème 1.5.1. *Pour tout espace topologique métrisable :*

- Les singletons sont fermés.
- Pour tous fermés F_0, F_1 , il existe f continue valant i sur F_i .

Lemme 1.5.2. *Dans un espace métrique, F est fermé si et seulement si $d(x, F) = 0 \Rightarrow x \in F$.*

1.6 Topologies

1.6.1 Topologie Trace

Définition 1.6.1. On appelle topologie trace la topologie induite par la topologie de X sur $A \subset X$ est la topologie la moins fine sur A qui rend l'inclusion canonique continue.

Proposition 1.6.1. • La restriction de la métrique induit la topologie trace.

- La définition est emboîtable.
- La fermeture d'un ensemble pour la topologie trace est la trace de sa fermeture. Ce n'est pas vrai pour l'intérieur.
- Si $x_n \rightarrow x_* \in A$ ssi $x_n \rightarrow x_*$ dans X .
- Si \mathcal{O} est à base dénombrable (resp. de voisinages), \mathcal{O}_A l'est aussi
- Si \mathcal{O} est séparée (axiome T_2), \mathcal{O}_A aussi.
- Si \mathcal{O} est métrisable est séparable, alors \mathcal{O}_A est métrisable est séparable.

1.6.2 Topologie Produit

Définition 1.6.2. On appelle topologie produit ou cylindrique sur $X = \prod_{i \in I} X_i$ la topologie engendrée par les $\prod_{i \in I} O_i$ avec $O_i \neq X_i$ sur un nombre fini de i . C'est la topologie la moins fine sur X qui rend les projections canoniques continues.

Lemme 1.6.1. On a : $x_n \rightarrow x$ si et seulement si $x_{n,i} \rightarrow x_i$ pour tout i .

Proposition 1.6.2. • Si tous les X_i vérifient T_2 , X vérifie T_2

- Si I est au plus dénombrable, et tous les X_i sont à base dénombrable (de voisinages), X l'est aussi.
- Si I est au plus dénombrable ou a le cardinal de \mathbb{R} , et si les X_i sont tous séparables, X aussi.
- Si I est au plus dénombrable, et si les X_i sont métrisables par les d_i , X est métrisable par :
 - $\max_i(d_i)$ si I est fini
 - $\max_i \min(d_i, 2^{-i})$ si I est infini dénombrable.

1.6.3 Topologies Initiale et Finale

Définition 1.6.3. • Soient $f_i : X \rightarrow X_i$. La topologie engendrée sur X par les $f_i^{-1}(O_i)$ où O_i est ouvert dans X_i est appelée topologie initiale. C'est la moins fine qui rend f_i continue pour tout i .

- Soient $g_i : X_i \rightarrow X$. La topologie engendrée par les ensembles O tels que $g_i^{-1}(O)$ est ouvert dans X_i est appelée topologie finale. C'est la plus fine qui rend g_i continue pour tout i .

1.6.4 Topologie Quotient

Définition 1.6.4. Soit \sim une relation d'équivalence sur X . La topologie quotient sur X/\sim est la plus fine qui rend la projection canonique continue : $O \subset X/\sim$ est ouvert ssi $[\cdot]^{-1}(O) = \{x \in X \mid [x] \in O\}$ est ouvert dans X . C'est la topologie finale de la projection canonique.

2 Compacité

2.1 Quasi-Compacité

Définition 2.1.1. Un espace est dit quasi-compact lorsqu'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue : De tout recouvrement par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini. Un espace est dit compact lorsqu'il est quasi-compact et séparé.

Définition 2.1.2. Un sous ensemble est quasi-compact lorsqu'il est quasi compact pour la topologie trace.

Proposition 2.1.1.

Dans \mathbb{R}^n , K est compact si et seulement si il est fermé borné.

Si K_1, K_2 sont quasi compacts, $K_1 \cup K_2$ est quasi compact.

Théorème 2.1.1.

Si F est fermé dans K quasi compact, F est quasi compact.

Si K est quasi compact dans X séparé, K est fermé.

Définition 2.1.3. Si X est séparé, $A \subset X$ est relativement compact lorsque \overline{A} est compact.

Théorème 2.1.2. • Si $f : X \rightarrow Y$ est continue, X est quasi compact, alors $f(X)$ est quasi-compact.

• Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $X \neq \emptyset$ est quasi compact, alors, $\exists x_* \in X$, $f(x_*) = \sup_{x \in X} f(x) < \infty$.

Théorème 2.1.3. Si $f : X \rightarrow Y$ est une bijection continue avec X quasi compact et Y séparé, f^{-1} est continue.

2.2 Théorème de Tykhonov

Théorème 2.2.1. Tout produit de (quasi-)compacts est (quasi-)compact.

2.3 Compacité Métrique

Définition 2.3.1. Un ε -réseau est un ensemble A fini tel que tout point est à distance au plus ε d'un point de A .

Lemme 2.3.1. Un espace métrique compact possède un ε -réseau fini pour tout ε .

Théorème 2.3.2. Pour un espace métrisable, on a équivalence entre :

1. X est compact
2. De toute suite de X on peut extraire une sous-suite convergent dans X .

Dans ce cas on a :

Lemme de Lebesgue : pour tout recouvrement par des ouverts O_i , il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in X$, il existe i_x tel que $B(x, r) \subset O_{i_x}$.

2.4 Compacité Locale

Définition 2.4.1. Un espace est localement compact lorsque tout point possède un voisinage quasi-compact.

Définition 2.4.2. Un espace est dénombrable à l'infini s'il admet un recouvrement dénombrable par des quasi-compacts (qu'on peut supposer croissants sans perte de généralité).

Lemme 2.4.1. Un espace métrisable compact est localement compact et dénombrable à l'infini, et cela est vrai pour tout ouvert pour la topologie induite.

Théorème 2.4.2. Si un espace est localement compact et dénombrable à l'infini, il existe une suite K_n de quasi-compacts croissante d'union X et tel que tout quasi-compact inclus dans X est inclus dans au moins l'un des K_n . On parle de suite exhaustive de compacts.

2.5 Compactification d'Alexandrov

Théorème 2.5.1. Soit X un espace topologique et un point à l'infini $\infty \notin X$. Soit $X^* = X \cup \{\infty\}$, $\mathcal{O}^* \subset \mathcal{P}(X^*)$ formé par les ouverts de X et les complémentaires dans X^* des quasi-compacts fermés de X . Alors :

1. \mathcal{O}^* est une topologie sur X^* .
2. X^* est quasi-compact
3. L'injection canonique est continue et ouverte
4. X^* est séparé si et seulement si X est séparé et localement compact.
5. X est dense dans X^* si et seulement si X n'est pas quasi-compact fermé.

2.6 Théorème de Baire

Lemme 2.6.1. Pour X un espace topologique, X est quasi-compact si et seulement si pour toute famille de fermés $(F_i)_{i \in I}$ telle que $\bigcap_{i \in I'} F_i \neq \emptyset$ pour tout $I' \subset I$ fini, on a : $\bigcap_i F_i \neq \emptyset$.

Lemme 2.6.2. Si X est quasi-compact éparé alors :

- Tout point et tout fermé ne le contenant pas sont séparables par des ouverts.
- Pour tout $x \in X$ et tout ouvert $O \ni x$, il existe $O' \ni x$ tel que $\overline{O'} \subset O$.

Théorème 2.6.3. Si X est quasi-compact alors il est de Baire : toute intersection d'une suite d'ouverts denses est dense.

3 Complétude

3.1 Suites de Cauchy

Définition 3.1.1. Une suite x_n est de Cauchy lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N = N_\varepsilon$ tel que pour tous $n, m \geq N$, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Un espace métrique est complet lorsque toute suite de Cauchy converge.

Lemme 3.1.1. Si X est complet, $F \subset X$ est fermé, alors F est complet. Si $A \subset X$ est complet, alors A est fermé.

Lemme 3.1.2. Soit X complet et $X = F_0 \supset F_1 \supset \dots$ une suite décroissante de fermés non vides et de diamètres tendant vers 0. Alors leur intersection est un certain point $x \in X$.

Théorème 3.1.3. Un espace métrique est compact si et seulement si il est complet et admet un ε -réseau pour tout ε .

Théorème 3.1.4. • Les R^n sont complets

- Les l^p pour $p \in [1, \infty]$ sont complets.

Théorème 3.1.5. • Si K est compact et Y métrique complet, alors $\mathcal{C}(K, Y)$ est métrique complet.

- Si X est localement compact à base dénombrable de voisinages et Y métrique complet alors $\mathcal{C}(X, Y)$ est métrisable complet.

Définition 3.1.2. On définit la distance de Hausdorff entre deux fermés d'un espace métrique de diamètre fini par :

$$d_H(F_1, F_2) < r \Leftrightarrow \text{pour tout } x \in F_{1,2}, \exists y \in F_{2,1}, d(x, y) < r$$

On note $\mathcal{F}(X)$ l'ensemble des fermés non-vides de X , et $\mathcal{K}(X)$ l'ensemble des compacts non-vides.

Théorème 3.1.6. • Si X complet, $\mathcal{F}(X)$ et $\mathcal{K}(X)$ sont complets.

- Si X est compact, $\mathcal{K}(X)$ est compact.

3.2 Espaces Polonais, de Banach, de Hilbert

Définition 3.2.1. *Un espace topologique est :*

- polonais lorsqu'il est séparable et métrisable complet
- de Banach lorsque c'est un ev normé complet
- de Hilbert lorsque c'est un ev à produit scalaire complet

Théorème 3.2.1. *Un ev normé est un espace de Banach ssi toute série absolument convergente est convergente.*

3.3 Complétion

Définition 3.3.1. *Soit X un espace métrique non complet. Son complété (X', d') est un espace métrique complet tel que $X \subset X'$ et X est dense dans X' . On le construit ainsi :*

- Soit \tilde{X} l'ensemble des suites de Cauchy, muni de la relation : $x_n \sim y_n$ ssi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang pour lequel les suites sont à distance au plus ε .
- On considère $X' = \tilde{X} / \sim$. On considère la quantité $d'((x_n), (y_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$. C'est bien une métrique compatible avec la topologie de X' .

Remarque 3.3.0.1. *Tous deux complétés sont isomètres.*

Lemme 3.3.1. *Si $f : X \rightarrow Y$ est uniformément continue, Y est complet, il existe une unique fonction continue prolongée sur le complété de X et égale à f sur X .*

Théorème 3.3.2. *Si X est complet, alors il est de Baire.*

4 Connexité

4.1 Connexité, connexité par arcs, composantes connexes

Définition 4.1.1. *Un espace est :*

- connexe lorsqu'il n'est pas partitionnable en deux ouverts non-vides
- connexe par arcs lorsque les points sont reliés par des arcs

Théorème 4.1.1. • *X est connexe ssi \emptyset et X sont les seules parties à la fois ouvertes et fermées.*

- *X est connexe ssi il n'est pas partitionnable en deux fermés non-vides.*
- *Si $f : X \rightarrow Y$ est continue et X connexe (resp. par arcs), alors $f(X)$ est connexe (resp. par arcs)*
- *Si X est connexe par arcs, alors il est connexe, et la réciproque est fausse.*
- *Si $\cap_i A_i \neq \emptyset$ avec les A_i connexes (resp. par arcs), $\cup_i A_i$ est connexe (resp. par arcs)*
- *Si les X_i sont connexes (resp. par arcs), alors $\prod_i X_i$ est connexe (resp. par arcs).*

Définition 4.1.2. *La composante connexe C_x de $x \in X$ est la plus grande partie connexe de X contenant x . Un espace est totalement discontinu si $C_x = \{x\}$ pour tout x .*

4.2 Connexité Métrique

Définition 4.2.1. *Un espace métrique est bien échaîné lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, et tous $x, y \in X$ il existe une suite finie $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ telle que $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ pour tout i .*

Théorème 4.2.1. *Si un espace est connexe alors il est bien échaîné, et la réciproque est fausse mais devient vraie en ajoutant la compacité..*

5 Espaces de fonctions continues sur un métrique compact

Définition 5.0.1. Pour une suite f_n dans $\mathcal{C}(K, Y)$ et f dans $\mathcal{C}(K, Y)$:

- $f_n \rightarrow f$ ponctuellement lorsque pour tout $x \in K$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$
- $f_n \rightarrow f$ uniformément lorsque la convergence a lieu dans $\mathcal{C}(K, Y)$.

Théorème 5.0.1 (De Dini). Si $Y = \mathbb{R}$, si la suite f_n est croissante, et f est continue, la convergence ponctuelle implique la convergence uniforme.

Théorème 5.0.2 (De Heine). Toute fonction $f \in \mathcal{C}(K, Y)$ est uniformément continue.

Théorème 5.0.3 (de Arzelà-Ascoli). $A \subset \mathcal{C}(K, Y)$ a une adhérence compacte ssi les deux conditions suivantes sont réalisées :

- Compacité Ponctuelle : $\forall x \in K, \{f(x) \mid f \in A\}$ a une adhérence compacte dans Y .
- La famille A est uniformément équicontinue : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $f \in A$, et tous $x, y \in K$, si $d_K(x, y) < \eta$, alors $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Théorème 5.0.4 (de Stone-Weierstrass). Soit \mathcal{A} une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. vérifiant la propriété de prescription de valeurs arbitraires en deux points arbitraires : pour tous $x, y \in K$, $a, b \in \mathbb{R}$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) = a$ et $f(y) = b$. Alors \mathcal{A} est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.

Corollaire 5.0.4.1 (Théorème de Weierstrass). Pour tout n , $K \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.

Corollaire 5.0.4.2 (de Stone-Weierstrass Complexe). Si de plus la famille \mathcal{A} est stable par conjugaison et à valeurs complexes, elle est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$.

Corollaire 5.0.4.3. Pour tout n , $K \subset \mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n, \overline{z_1}, \dots, \overline{z_n}]$ est dense. En particulier, $\mathbb{C}[e^{i\theta}, e^{-i\theta}]$ est dense dans $\mathcal{C}(S^1, \mathbb{C})$.

6 Opérateurs Linéaires Bornés

6.1 Définitions et Duéalité

Définition 6.1.1. Soient X, Y des \mathbb{K} ev normés avec $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

- $u : X \rightarrow Y$ est un opérateur linéaire borné lorsque u est linéaire et qu'il est $M \in [0, \infty[$ tel que pour tout $x \in X$, $\|u(x)\|_Y \leq M \|x\|_X$.
- On note $L(X, Y)$ l'ev des opérateurs linéaires bornés $X \rightarrow Y$.
- $L(X, Y)$ est normé par la norme d'opérateur, et a une structure d'algèbre.

Lemme 6.1.1. Pour u linéaire, on a équivalence entre :

1. $u \in L(X, Y)$
2. u est Lipschitz
3. u est uniformément continue
4. u est continue
5. u est continue en 0.

Lemme 6.1.2. Si Y est un Banach, $L(X, Y)$ est un Banach.

Définition 6.1.2. Si X est un \mathbb{K} -Banach, $L(X, \mathbb{K})$ est appelé dual de X , noté X' ou X^* .

Théorème 6.1.3. Si $p \in [1, \infty)$ et $q = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}$ est le conjugué de Hölder de p , alors :

$$\Phi : \uparrow^q \rightarrow (\uparrow^p)', y \mapsto \left(x \mapsto \sum_n x_n y_n \right)$$

est une bijection linéaire isométrique : $(\uparrow^p)'$ est isomorphe à \uparrow^q .

Lemme 6.1.4. Une forme linéaire est continue ssi son noyau est fermé.

6.2 Banach-Steinhaus

Théorème 6.2.1. Si X est un Banach, et Y un evn, alors pour tout $A \subset L(X, Y)$, la bornitude ponctuelle est équivalente à la bornitude uniforme :

$$\forall x \in X, \sup_{u \in A} \|u(x)\|_Y < \infty \Leftrightarrow \sup_{u \in A} \|u\|_{L(X, Y)} < \infty$$

Corollaire 6.2.1.1. Soit u_n dans $L(X, Y)$, où X est un Banach et Y un evn. La convergence ponctuelle entraîne la continuité de la limite.

6.3 Hahn-Banach

Théorème 6.3.1. Soit $X \subset \tilde{X}$ un sous-espace d'un evn sur $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Soit $u \in L(X, \mathbb{K})$ une forme linéaire. Alors il existe $\tilde{u} \in L(\tilde{X}, \mathbb{K})$ telle que $\tilde{u}|_X = u$ et $\|\tilde{u}\| = \|u\|$.

Corollaire 6.3.1.1. Si X est un Banach, et X'' est son bidual, l'injection canonique $\iota : X \rightarrow X''$ est une isométrie linéaire : $\|\iota(x)\| = \|x\|$.

Corollaire 6.3.1.2. L'application $\Phi : \uparrow^1 \rightarrow (\uparrow^\infty)'$, $\Phi(y)(x) = \sum_n x_n y_n$ est une isométrie linéaire non surjective. En d'autres termes :

$$\uparrow^1 \subsetneq (\uparrow^\infty)' = (l^1)''$$

6.4 Banach-Schauder

Théorème 6.4.1 (de Banach-Schauder ou de l'application ouverte). Si X et Y sont des Banach et si $u \in L(X, Y)$ est surjective, alors u est une application ouverte.

Corollaire 6.4.1.1. • (**inverse continu**) : Si X et Y de Banach et $u \in L(X, Y)$ est bijective, alors $u^{-1} \in L(Y, X)$. On parle de Théorème d'Isomorphisme de Banach.

- (**équivalence des normes**) : Si $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ sont deux normes qui font d'un même espace vectoriel normé X un espace de Banach. S'il existe $c \in (0, \infty)$ telle que $\|\cdot\| \leq c \|\cdot\|'$ alors il existe $C \in (0, \infty)$ telle que $\|\cdot\|' \leq C \|\cdot\|$.
- (**théorème du graphe fermé**) : Si X et Y sont deux Banach et $u : X \rightarrow Y$ est linéaire, alors $u \in L(X, Y)$ si et seulement si son graphe est fermé dans $X \times Y$.
- (**structure des Banach séparables**) : tout Banach séparable est isomorphe à quotient de \uparrow^1 par un sous-espace fermé.

6.5 Algèbres de Banach, Rayon Spectral, Inverse

Définition 6.5.1. Si X est un Banach, on définit l'espace vectoriel $L(X)$ normé par $\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$. Le produit naturel $uv = u \circ v$ en fait une algèbre de Banach : $\|uv\| \leq \|u\| \|v\|$. Le rayon spectral de $u \in L(X)$ est $\rho(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u^n\|^{1/n} \leq \|u\|$.

Remarque 6.5.0.1. • Lemme de Fekete : Si a_n est sous-additive, $\lim_n \frac{1}{n} a_n = \inf_n \frac{1}{n} a_n$. La formule de ρ fait sens en prenant $a_n = \log \|u^n\|$.

- Le rayon spectral est inchangé avec une norme équivalente.
- On généralise les algèbres de matrices à la dimension infinie.
- En dimension finie, $L(X)$ est isomorphe à \mathcal{M}_n et le rayon spectral est égal au maximum des modules des valeurs propres par décomposition de Jordan.
- Lorsque X est de dimension infinie, il n'y a pas vraiment d'analogue à la décomposition de Jordan. L'équation aux valeurs propres n'est pas une bonne manière de définir le spectre des opérateurs et on définit plutôt :

$$\text{spec}(u) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid u - \lambda \text{Id n'est pas inversible à inverse continu}\}$$

Alors, $\rho(u) = \sup \{|\lambda| \mid \lambda \in \text{spec}(u)\}$.

Théorème 6.5.1. Soit X un Banach, et $u \in L(X)$.

1. Si $\rho(u) < 1$, alors $\text{Id} - u$ est inversible dans $L(X)$ et

$$(\text{Id} - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$$

2. Si u est inversible et $\|v\| \leq \|u^{-1}\|^{-1}$ alors $u - v$ est inversible dans $L(X)$ et :

$$(u - v)^{-1} = (\text{Id} - u^{-1}v)^{-1} u^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (u^{-1}v)^n u^{-1}$$

3. L'ensemble des $u \in L(X)$ inversibles (groupe linéaire) est un ouvert de $L(X)$.

6.6 Intégrale de Riemann pour les fonctions de la variable réelle à valeurs dans un Banach

Théorème 6.6.1. Soit X un Banach, $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On note $\mathcal{A}([a, b], X) \subset \mathcal{C}([a, b], X)$ l'ensemble des fonctions affines par morceaux. C'est un sev de $\mathcal{C}([a, b], X)$. Il existe une unique application linéaire continue $I : \mathcal{C}([a, b], X) \rightarrow X$ telle que pour tout fonction $f \in \mathcal{A}([a, b], X)$ affine par morceaux associée à une subdivision $a = a_0 < \dots < a_n = b$ et à des valeurs $f_0, \dots, f_n \in X$:

$$I(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \frac{f_i + f_{i+1}}{2}$$

On note : $\int_a^b = I(f)$. De plus pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b], X)$:

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$

7 Espaces de Hilbert

7.1 Projection Orthogonale sur un Convexe Fermé

Théorème 7.1.1. Si X est un Hilbert, $C \subseteq X$ un convexe fermé, pour tout $x \in X$, il existe un unique $p_C(x) \in C$ tel que :

$$\|x - p_C(x)\| = d(x, C)$$

Corollaire 7.1.1.1. Si X est un Hilbert et F est un sev de X fermé alors :

1. p_F est linéaire
2. $p_F(x)$ est caractérisé par $x - p_F(x) \perp F$
3. p_F est 1-Lipschitz donc continue
4. Si $\dim F = n < \infty$, $p_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$
5. $X = F \oplus F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp = F$.