

Le cours d'Ariane Mézard

Ariane Mézard

26 mars 2024



Table des matières

I	Fonctions Holomorphes	2
1	Fonctions Analytiques	2
1.1	Séries Entières	2
1.2	Fonctions Analytiques	4
1.3	Détermination du Logarithme	5
2	Théorie de Cauchy	6
2.1	Homotopie et Simple Connexité	6
2.2	Intégrales sur un Chemin	7
2.3	Théorème de Cauchy	8
2.4	Formule de Cauchy	9
2.5	Inégalités de Cauchy, Premières Applications	12
3	Fonctions Holomorphes	13
3.1	Définitions	13
3.2	Différentiabilité	14
3.3	Intégrale sur le bord d'un Compact	16
3.4	Formule de Green-Riemann	17
3.5	Analyticité des Fonctions Holomorphes	21
4	Propriétés Élémentaires des Fonctions Holomorphes	24
4.1	Théorème d'inversion locale	24
4.2	Théorème de l'Application Ouverte	25
4.3	Lemme de Schwarz	26
4.4	Disque Unité et Inversion Locale Effective	27
5	Espaces de Fonctions Holomorphes	29
5.1	Convergence de Suites de Fonctions Holomorphes	29
5.2	Théorèmes de Runge	30
5.3	Théorème de Montel	33
5.4	Compacts de $O(U)$	34

6	Aparté Réel	36
6.1	Méthode de Laplace	36
6.2	Comportement Asymptotique d'une Intégrale	36
6.3	Fonctions Harmoniques	36
6.4	Formule de Poisson	39
6.5	Couronnes du Plan	41
II	Fonctions Méromorphes	41
7	Théorème des Résidus	41
7.1	Développement en Séries de Laurent	41
7.2	Théorème des Résidus	42
7.3	Résidus à l'Infini	45
8	Singularités	46
8.1	Étude Locale	46
8.2	Grand Théorème de Picard	47



Première partie

Fonctions Holomorphes

1 Fonctions Analytiques

1.1 Séries Entières

Définition 1.1: Série Entière

Une série entière est une série de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ où $z \in \mathbb{C}$ et $a_n \in \mathbb{C}$.
Le domaine de convergence de la série entière est l'ensemble Δ des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels la série converge.

Proposition 1.1: Critère de Cauchy

Soient a_n une suite complexe et $0 < r < r_0$. S'il existe $M > 0$ tel que

$$|a_n| r_0^n \leq M, n \geq 0$$

alors $a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0, r)$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \overline{D}(0, r)$ on a :

$$|a_n z^n| \leq |a_n| r^n \leq M \left(\frac{r}{r_0} \right)^n$$

Comme $0 < r < r_0$, $M \left(\frac{r}{r_0} \right)^n$ est le terme d'une série géométrique convergente. ■

Corollaire 1.1: Rayon de Convergence

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ défini par

$$R = \sup \{r \geq 0 \text{ tel que la suite } (|a_n| r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ soit bornée}\}$$

Alors le domaine de convergence Δ de la série vérifie :

$$D(0, R) \subseteq \Delta \subseteq \overline{D}(0, R)$$

Définition 1.2: Rayon de Convergence

On appelle le nombre R défini ci-dessus rayon de convergence.

Proposition 1.2: Rayon d'Hadamard

Le rayon de convergence est donné par

$$R = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|a_n|^{1/n}}$$

Avec la convention $1/0 = \infty$

Lemme 1.1: Lemme d'Abel

Soit u_n une suite réelle décroissante vers 0 et v_n une suite complexe telle que les sommes partielles $s_n = \sum_{k=0}^n v_k$ soient bornées. Alors la série $\sum u_n v_n$ converge.

Proposition 1.3: Principe des Zéros Isolés

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Si au moins un des coefficients a_n n'est pas nul, il existe $r \in]0, +\infty[$ tel que f ne s'annule pas pour $|z| \in]0, r[$.

Démonstration. Soit $l = \min\{n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0\}$, on a :

$$f(z) = \sum_{n \geq l} a_n z^n = z^l g(z)$$

avec $g(z) = a_l + a_{l+1}z + \dots$ et $g(0) \neq 0$. ■

Définition 1.3: Dérivée Complexe

Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ admet une dérivée par rapport à la variable complexe au point z_0 si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Cette limite est alors appelée dérivée de f en z_0 .

Proposition 1.4: Dérivée d'une Série Entière

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, les dérivées l -ièmes de f ont pour rayon de convergence R et pour expression :

$$f^{(l)}(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(n+l)!}{n!} a_{n+l} z^n$$

Corollaire 1.2: Primitive

Une série entière $f(z) = \sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ admet sur $D(0, R)$ une primitive complexe

$$F(z) = \sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

Proposition 1.5: S

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $z_0 \in D(0, R)$. La série entière

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \omega^n$$

a un rayon de convergence supérieur à $R - |z_0|$ et pour tout $z \in D(z_0, R - |z_0|)$,

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n$$

1.2 Fonctions Analytiques**Définition 1.4: Fonction Analytique**

Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est dite analytique si elle est DSE au voisinage de chaque point de U .

Proposition 1.6: Dérivabilité

Une fonction analytique sur un ouvert U de \mathbb{C} admet des dérivées de tous ordres qui sont des fonctions analytiques sur U . De plus, pour tout $z_0 \in U$, f est somme de sa série de Taylor en z_0 sur un voisinage de z_0 .

Corollaire 1.3: Unicité du DSE

Une fonction analytique sur U admet un unique développement en série entière au voisinage de chaque point de U .

Lemme 1.2: Nullité

Si U est connexe et f est analytique sur U , nulle sur un ouvert non-vide de U , alors f est identiquement nulle sur U .

Proposition 1.7: Zéros Isolés

Soit f une fonction analytique sur un ouvert connexe U . Si f n'est pas identiquement nulle, ses zéros sont isolés, i.e. si $z_0 \in U$ avec $f(z_0) = 0$, alors il existe $r > 0$ tel que z_0 soit le seul zéro de f sur $D(z_0, r)$

Théorème 1.1: Prolongement Analytique

Soit U un ouvert connexe de \mathbb{C} , f, g des fonctions analytiques sur U . Si f, g coïncident sur une partie Σ de U qui a un point d'accumulation dans U , alors elles coïncident sur U .

Définition 1.5: Primitive

Etant donnée une fonction analytique f sur U , une fonction analytique F de U dans \mathbb{C} est dite primitive de f si $F'(z) = f(z)$ sur U .

1.3 Détermination du Logarithme**Définition 1.6: Détermination de l'Argument**

Soit $U \subseteq \mathbb{C}^*$ ouvert. Une fonction continue $\arg : U \rightarrow \mathbb{R}$ est dite détermination continue de l'argument sur U si pour tout $z \in U$, $\exp(i \arg(z)) = \frac{z}{|z|}$

Définition 1.7: Détermination Principale

La détermination continue de l'argument

$$\begin{aligned} \mathbb{C} - \mathbb{R}_- &\longrightarrow]-\pi, \pi[\\ z &\mapsto 2 \arctan \left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right) \end{aligned}$$

en prenant la racine carrée de z appartenant au demi-plan $\Re z > 0$ est appelée détermination principale de l'argument.

Définition 1.8: Logarithme

Soit $U \subseteq \mathbb{C}^*$ ouvert. Une fonction continue $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est dite détermination du logarithme sur U si

$$\forall z \in U, \exp(f(z)) = z$$

Définition 1.9: Détermination Principale du Log

On définit pour $\theta \in \mathbb{R}$ la fonction

$$\log_\theta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} - e^{i\theta}, \log_\theta(w) = \log|w| + i \arg_\theta(w)$$

La fonction \log_0 est appelée détermination principale du logarithme et notée \log .

Proposition 1.8: DSE du Logarithme

\log est DSE sur $D(1, 1)$ et sur $D(0, 1)$ on a

$$\log(1+z) = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$$

Par conséquent, sur $D(z_0, |z_0|)$,

$$g(z) = \log z_0 + i\theta_0 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{z - z_0}{z_0} \right)^n$$

est une détermination analytique du logarithme.

Proposition 1.9: Analyticité des Déterminations

Il y a équivalence sur un ouvert connexe U de \mathbb{C}^* pour une application continue l entre :

- l est une détermination du logarithme à l'addition d'une constante près
- l est une primitive analytique de $\frac{1}{z}$ sur U .

Définition 1.10: Détermination

Soit $U \subseteq \mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Une détermination continue de z^α est une application continue g de U dans \mathbb{C} telle qu'il existe une détermination du logarithme $l(z)$ de z telle que $g(z) = \exp^{\alpha l(z)}$.

2 Théorie de Cauchy

2.1 Homotopie et Simple Connexité

Définition 2.1: Chemin

Soit $[a, b]$ un intervalle de \mathbb{R} . Un chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est une application continue. Le point $\gamma(a)$ est appelé origine et le point $\gamma(b)$ est dit extrémité. On orientera par défaut un chemin dans le sens des paramètres croissants. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, le chemin est dit lacet d'origine $\gamma(a)$.

Définition 2.2: Opérations

1. Si γ est constant, son image est réduite à un point. Il est alors appelé chemin (ou lacet) constant.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto e^{2i\pi\alpha t}$ est un chemin dont l'image est une partie du cercle unité $\partial D(0, 1)$. Si $\alpha = n \in \mathbb{Z}^*$, $\gamma([0, 1])$ est le cercle tout entier parcouru n fois.
3. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est un chemin, le chemin opposé

$$\gamma^0 : t \in [a, b] \mapsto \gamma(a + b - t)$$

est γ parcouru en sens inverse.

4. La juxtaposition de γ_1, γ_2 tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(a)$ est le chemin $\gamma = \gamma_1 \wedge \gamma_2 : [a, d + b - c] \rightarrow \mathbb{C}$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{pour } a \leq t \leq b \\ \gamma_2(t - b + c) & \text{pour } b \leq t \leq d + b - c \end{cases}$$

Définition 2.3: Homotopie

Soit U un ouvert de \mathbb{C} , $\gamma_i : I \rightarrow U$, $i \in \{1, 2\}$ deux chemins. Une homotopie de γ_1 à γ_2 dans U est une application continue φ de $I \times J$ dans U où $I = [a, b]$ et $J = [c, d]$ sont deux intervalles de \mathbb{R} telle que :

$$\varphi(t, c) = \gamma_1(t) \text{ et } \varphi(t, d) = \gamma_2(t), t \in I$$

Définition 2.4: Simple Connexité

Un espace topologique X connexe par arcs est dit simplement connexe si tout lacet dans X est homotope à un point dans X .

Proposition 2.1

- Un espace topologique est simplement connexe si et seulement si tous les chemins de même extrémités sont homotopes.
- Un ouvert étoilé par rapport à un point est simplement connexe. En particulier, dans \mathbb{C} , le plan, un demi-plan, un disque ouvert, l'intérieur d'un rectangle ou d'un triangle sont simplement connexes.
- Le demi-plan ouvert $\Im z > 0$ auquel nous ôtons un nombre fini de demi-droites fermées $z = t + i\beta_k$, $t \in]-\infty, \alpha_k]$ est simplement connexe non étoilé.
- \mathbb{C}^* n'est pas simplement connexe car le cercle unité n'est pas homotope à un chemin constant.

2.2 Intégrales sur un Chemin

Dorénavant, les chemins sont supposés \mathcal{C}^1 par morceaux.

Définition 2.5: Equivalence de Chemins

Deux chemins $\gamma_i : I_i \rightarrow \mathbb{C}$ sont dits équivalents s'il existe une bijection croissante $\varphi : I_2 \rightarrow I_1$ continue de réciproque continue et \mathcal{C}^1 par morceaux telle que :

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(\varphi(t)), t \in I_2$$

Définition 2.6: Intégrale le long d'un Chemin

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ continue et $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin avec $\gamma(I) \subseteq U$. Alors, la fonction $t \mapsto f(\gamma(t))\gamma'(t)$ est continue par morceaux dans $[a, b]$. On appelle intégrale de f le long du chemin γ :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt$$

Définition 2.7: Longueur

La longueur d'un chemin est le réel :

$$long(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

Proposition 2.2: Propriétés

- Si F est une primitive de f , pour tout chemin γ :

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

- Si $\gamma_1 \sim \gamma_2$ alors

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

- Si $[Z_0, z_1] \subseteq U$, nous notons $\int_{[z_0, z_1]} f(z) \, dz = \int_{\gamma} f(z) \, dz$ où $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto (1-t)z_0 + tz_1$.
- Si $\partial D(z_0, r) \subseteq U$, soit le lacet $\gamma : \theta \in [0, 2\pi] \mapsto z_0 + re^{i\theta}$. On a :

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = \int_{\partial D(z_0, r)} f(z) \, dz = \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) ire^{i\theta} \, d\theta$$

- En séparant parties réelles et imaginaires, $f = P + iQ$ et $\gamma = u + iv$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) \, dz &= \int_a^b ((P \circ \gamma) u' - (Q \circ \gamma) v') \, dt + i \int_a^b ((Q \circ \gamma) u' + (P \circ \gamma) v') \, dt \\ &= \int_{\gamma} (P \, dx - Q \, dy) + i \int_{\gamma} (P \, dy + Q \, dx) \end{aligned}$$

- On a :

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = - \int_{\gamma^0} f(z) \, dz$$

- On a :

$$\left| \int_{\gamma} f(z) \, dz \right| \leq \text{long}(\gamma) \max_{\gamma} |f|$$

2.3 Théorème de Cauchy

Théorème 2.1: de Cauchy

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe et f une fonction analytique dans U . Si γ_1, γ_2 sont deux lacets homotopes dans U , alors

$$\int_{\gamma_1} f(z) \, dz = \int_{\gamma_2} f(z) \, dz$$

En particulier, si U est simplement connexe, l'intégrale sur un lacet de f est nulle.

Théorème 2.2: Primitives Analytiques

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe.

1. Toute fonction analytique dans U admet une primitive.
2. Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}^*$ est analytique, alors il existe $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytique tel que $\exp(g) = f$ sur U .

2.4 Formule de Cauchy

Lemme 2.1: Intégrité de l'Indice

Soit $\gamma : I = [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ un lacet et $a \notin \gamma(I)$. Alors

$$j(a, \gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a} \in \mathbb{Z}$$

Démonstration. Pour $t \in [c, d]$ on pose

$$h(t) = \int_c^t \frac{\gamma'(s) ds}{\gamma(s) - a}$$

On a $h'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a}$, sauf en un nombre fini de points de I .

Remarquons que $g(t) = e^{-h(t)}(\gamma(t) - a)$ a pour dérivée

$$g'(t) = -h'(t)e^{-h(t)}(\gamma(t) - a) + \gamma'(t)e^{-h(t)} = 0$$

sauf en un nombre fini de points de I . Comme g est continue, elle est constante et $g(c) = g(d)$. Or, $h(c) = 0$ donc $g(c) = \gamma(c) - a = g(d) = e^{-h(d)}(\gamma(d) - a)$. Mais γ est un lacet, donc $\gamma(c) = \gamma(d)$. Donc $h(d) = 2in\pi$. Donc $j(a, \gamma) = n \in \mathbb{Z}$. ■

Définition 2.8: Indice

L'entier $j(a, \gamma)$ est appelé indice de a par rapport au lacet γ et s'interprète comme le nombre de fois que le lacet tourne autour de a lorsque a est intérieur au lacet.

Proposition 2.3: Propriétés

1. Soit $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ des lacets de même origine dont les lacets ne contiennent pas a . Alors,
$$j(a, \gamma^0) = -j(a, \gamma) \text{ et } j(a, \gamma_1 \wedge \gamma_2) = j(a, \gamma_1) + j(a, \gamma_2)$$
2. En appliquant le théorème de Cauchy à la fonction analytique $1/(z - a)$ dans $\mathbb{C} - \{a\}$, nous obtenons $j(a, \gamma_1) = j(a, \gamma_2)$ si γ_1, γ_2 sont homotopes dans $\mathbb{C} - \{a\}$.
3. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe et $\gamma \subset U$. Si $a \notin U$, alors $j(a, \gamma) = 0$.
4. Si γ est un lacet dans \mathbb{C} , pour tout ouvert connexe U de $\mathbb{C} - \gamma(I)$, la fonction $z \mapsto j(z, \gamma)$ est constante dans U .
5. Soit $\gamma_n : t \mapsto e^{int}$, on a :

$$j(z_0, \gamma_n) = \begin{cases} n & \text{si } |z_0| < 1 \\ 0 & \text{si } |z_0| > 1 \end{cases}$$

Démonstration du point iv. Soit $z \in D(z_0, r) \subseteq U$,

$$j(z, \gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{du}{u - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{du}{u - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{du}{u - z_0} = j(z_0, \gamma)$$

pour $\gamma_1 : t \mapsto \gamma(t) + (z - z_0)$ qui est homotopie à γ via

$$\varphi(t, s) = \gamma(t) + s(z - z_0), 0 \leq s \leq 1$$

Donc $j(\cdot, \gamma)$ est localement constante donc constante sur U connexe. ■

Théorème 2.3: Formule de Cauchy

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe, $\gamma : I \rightarrow U$ un lacet dans U . Soit f analytique sur U . Pour tout $w \in U \setminus \gamma(I)$

$$j(w, \gamma) f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz$$

Démonstration. La fonction

$$g : z \in U \mapsto \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & \text{si } z \neq w \\ f'(w) & \text{si } z = w \end{cases}$$

est analytique sur U . En effet pour $r > 0$ assez petit, f admet un développement de Taylor sur $D(w, r) \subseteq U$ et donc pour $z \in D(w, r)$:

$$g(z) = f'(w) + \frac{f''(w)}{2!} (z-w) + \dots + \frac{f^{(n)}(w)}{n!} (z-w)^{n-1} + \dots$$

Comme U est simplement connexe, le théorème de Cauchy donne $\int_{\gamma} g = 0$ et comme $w \notin \gamma(I)$, $\int_{\gamma} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} dz = 0$ c'est à dire :

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz = f(w) \int_{\gamma} \frac{dz}{z-w} = 2i\pi j(w, \gamma) f(w)$$

■

Corollaire 2.1: Valeur en un point

On a :

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(z)}{z-w} dz, w \in D(z_0, r)$$

Proposition 2.4: Continuité sur un Lacet

Soit $\gamma : I = [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ un lacet et $g : \gamma(I) \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie et continue sur $\gamma(I)$. Alors :

$$f(z) = \int_{\gamma} \frac{g(u)}{u-z} du$$

est définie et analytique dans $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$.

Précisément, pour tout $w \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$c_n = \int_{\gamma} \frac{g(u)}{(u-w)^{n+1}} du$$

nous avons un développement en série entière convergente

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z-w)^n$$

dans tout disque ouvert de centre w et de rayon $r = d(w, \gamma(I))$ et

$$f^{(n)}(w) = n! c_n = n! \int_{\gamma} \frac{g(u)}{(u-w)^{n+1}} du$$

Démonstration. Pour tout $u \in \gamma(I)$, $z \in D(w, qr)$, $q \in [0, 1]$, la série

$$\frac{1}{u-z} = \frac{1}{u-w} \frac{1}{1 - \frac{z-w}{u-w}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-w)^n}{(u-w)^{n+1}}$$

est convergente. Comme $(g \circ \gamma) \gamma'$ est continue par morceaux sur $[c, d]$ il existe M tel que

$$|g(\gamma(t)) \gamma'(t)| \leq M$$

Donc :

$$\left| g(\gamma(t)) \gamma'(t) \frac{(z-w)^n}{(\gamma(t)-w)^{n+1}} \right| \leq M \frac{q^n}{r}, t \in [c, d]$$

Finalement, la série sous l'intégrale est normalement convergente et :

$$f(z) = \int_c^d \frac{g(\gamma(t)) \gamma'(t) dt}{\gamma(t) - z} = \int_c^d g(\gamma(t)) \gamma'(t) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-w)^n}{(\gamma(t)-w)^{n+1}} \right) dt$$

et donc $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-w)^n$ ■

Proposition 2.5: Dérivée n -ième

Soit f analytique sur U et γ le bord de $\overline{D}(w, r) \subseteq U$. D'après la formule de Cauchy :

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \frac{f(w + re^{it})}{e^{nit}} dt$$

Corollaire 2.2

1. Soit f analytique sur U . Pour tout $a \in U$, la série de Taylor de f au voisinage de a est convergente et a pour somme $f(z)$ dans le plus grand disque ouvert de centre a contenu dans U
2. Si f est analytique sur \mathbb{C} , sa série de Taylor en tout point de \mathbb{C} est convergente sur \mathbb{C} .

Démonstration. On applique la formule de Cauchy sur le contour γ d'un disque $D(a, r)$ contenu dans U . Pour $z \in D(a, r)$, $j(z, \gamma) = 1$ et

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dz$$

La proposition 2.4 donne un développement en série entière de f en $z-a$ convergeant sur $D(a, r)$. Par unicité du développement, il s'agit de la série de Taylor. En faisant tendre r vers $d(a, \mathbb{C} - U)$, nous obtenons le résultat annoncé. ■

Corollaire 2.3: Constance Locale

Supposons U connexe, $a \in U$ et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytique. Si pour tout $k > 0$, $f^{(k)}(a) = 0$, alors f est constante sur U .

Démonstration. D'après le corollaire 2.2, f est localement somme de sa série de Taylor. Donc f est constante sur un ouvert contenant a . Soit $\Omega = \{w \in U, \forall k > 0, f^{(k)}(w) = 0\}$. Cet ensemble est ouvert, non vide, et fermé. Par connexité de U , $\Omega = U$, $f' = 0$ sur U et f est constante sur U . ■

Théorème 2.4: Multiplicité

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytique non constante au voisinage de $a \in U$. Si $f(a) = 0$, il existe un unique entier $m \geq 1$ et $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ analytique sur un voisinage V de a tels que

$$f(z) = (z - a)^m g(z), g(a) \neq 0, z \in V$$

En particulier, le point a possède un voisinage dans lequel il est l'unique zéro de f .

Démonstration. D'après le corollaire 2.3, si f n'est pas constante dans un voisinage de a , il existe $m \geq 1$ tel $f^{(m)}(a) \neq 0$ et $f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0$. Comme $f(a) = 0$, on peut alors factoriser $(z - a)^m$ dans le développement en série de Taylor de f en a . ■

Définition 2.9: Ordre

L'entier m du théorème précédent est dit ordre de f en a , noté $\text{ord}(f, a)$.

2.5 Inégalités de Cauchy, Premières Applications

Proposition 2.6: Inégalités de Cauchy

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytique, $\overline{D}(w, r) \subset U, r > 0$. On a, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| f^{(n)}(w) \right| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{z \in \partial D(w, r)} |f(z)|$$

Démonstration. On a :

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \frac{f(w + re^{it})}{e^{nit}} dt$$

On en déduit immédiatement le résultat. ■

Lemme 2.2: Bornitude et Polynomialité

Soit f analytique sur \mathbb{C} . Supposons qu'il existe $A, B \geq 0$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq A(1 + |z|)^B$$

Alors f est un polynôme de degré $\leq B$.

Démonstration. Soit $n \geq [B] + 1 > B$. Par les inégalités de Cauchy, puisque

$$\sup_{\partial D(z, r)} |f(z)| \leq A(1 + |z| + r)^B$$

on a :

$$\left| f^{(n)}(z) \right| \leq \frac{n!}{r^n} A(1 + |z| + r)^B$$

En faisant tendre r vers $+\infty$, par croissance comparée, $f^{(n)}(w) = 0$ pour $n \geq B$. Localement, f étant somme de sa série de Taylor, c'est localement un polynôme de degré au plus B , ce qui est donc le résultat. ■

Théorème 2.5: Liouville

Une fonction analytique bornée sur \mathbb{C} est constante.

Théorème 2.6: d'Alembert-Gauss

Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[z]$ de degré ≥ 1 admet une racine dans \mathbb{C} .

Démonstration. Par l'absurde, si $P(z) = \sum_{i=0}^d a_i z^i$ ne s'annule pas, $f = 1/P$ est analytique sur \mathbb{C} et $|f(z)| \sim \frac{1}{|a_d||z|^d}$ tend vers 0 quand $|z|$ tend vers $+\infty$. En particulier, f est bornée sur \mathbb{C} donc constante d'après le théorème de Liouville. Ainsi, $P = 1/f$ est constant, ce qui est absurde. ■

Théorème 2.7: Topologie

Les ouverts \mathbb{C} et $D(0, 1)$ sont homéomorphes mais pas isomorphes.

3 Fonctions Holomorphes

3.1 Définitions

Définition 3.1: Holomorphicité

Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est dite holomorphe en $z_0 \in U$ si la limite

$$\lim_{h \in \mathbb{C} \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existe. On la note $f'(z_0)$.

On définit $\mathcal{O}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes.

Proposition 3.1: Exemples Holomorphe

- Si f est constante, f est holomorphe et $f' = 0$
- Si f est un polynôme, f est holomorphe
- Si f est analytique, f est holomorphe
- \sin, \cos, \exp, \tan sont holomorphes sur \mathbb{C} .
- $z \mapsto \bar{z}$ n'est pas holomorphe en aucun point :

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$$

n'a pas de limite en 0.

- $f(z) = |z|^2$ n'est holomorphe que pour $z = 0$:

$$\frac{(z+h)(\bar{z}+\bar{h}) - z\bar{z}}{h} = \frac{h\bar{z} + \bar{h}z + h\bar{h}}{h}$$

n'a une limite que si $z = 0$.

3.2 Différentiabilité

Définition 3.2: Forme Différentielle

Une 1-forme différentielle sur Ω est une application $\alpha : \Omega \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.
En particulier, les $dx_i \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ qui à $a \mapsto dx_i(a) = a_i$ permettent d'écrire :

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) dx_i$$

où $\alpha_i : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. On a alors :

$$\alpha(x)(a) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) dx_i(a)$$

On dit que α est de classe \mathcal{C}^k si et seulement si tous les α_i sont de classe \mathcal{C}^k .

Définition 3.3: \mathbb{R} Différentiabilité

Une fonction f d'un ouvert connexe Ω de \mathbb{R}^n est dite \mathbb{R} -différentiable sur Ω si et seulement si il existe une 1-forme différentielle $df : \Omega \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ telle que

$$f(z+h) = f(z) + df(z)(h) + o(h)$$

On pose $dx f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i$.

Dans la suite on travaille dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ et pour $h \in \mathbb{C}$, on note $h = k + il = (k, l)$ et pour $z \in U = \Omega$, $z = x + iy = (x, y)$.

Proposition 3.2: Différentielle dans une base

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ différentiable de différentielle $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$. On a $\forall z \in U$:

$$dz f = \frac{\partial f}{\partial x}(z) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z) dy$$

En $h = k + il$:

$$dz f(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) k + \frac{\partial f}{\partial y}(z) l$$

On définit

$$dz = dx + i dy \text{ et } d\bar{z} = dx - i dy$$

On a alors :

$$df = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\bar{z}$$

ce qu'on écrit aussi :

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

On a par ailleurs

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$$

Proposition 3.3: Exemples

1. Si $f(z) = z$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 1$ et $\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0$. A l'inverse, $\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0$.
2. Pour $P(x, y) = \sum_{0 \leq \alpha, \beta \leq d} c_{\alpha, \beta} x^\alpha y^\beta$. En notant $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, on a :

$$P(z) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha, \beta} z^\alpha \bar{z}^\beta$$

où on a

$$a_{\alpha, \beta} = \frac{1}{\alpha! \beta!} \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} P(0)$$

On retrouve que P est holomorphe si on a $a_{\alpha, \beta} = 0$ pour $\beta \geq 1$.

Théorème 3.1: Lien \mathbb{C} -dérivabilité et \mathbb{R} -différentiabilité

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. On a équivalence entre :

1. $f \in \mathcal{O}(U)$
2. f est \mathbb{R} -différentiable sur U et $d_z f$ est \mathbb{C} -linéaire pour tout $z \in U$
3. f est \mathbb{R} -différentiable sur U et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ pour tout $z \in U$

Démonstration. $i \Rightarrow ii$ $f(z+h) = f(z) + hf'(z) + o(h) \Rightarrow f$ est \mathbb{R} -différentiable en z et $d_z f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ qui à $h \mapsto hf'(z)$ est \mathbb{C} -linéaire.

$ii \Rightarrow iii$ On a :

$$\begin{aligned} d_z f(h) &= \frac{\partial f}{\partial z}(z) dz(h) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) d\bar{z}(h) \\ &= \frac{\partial f}{\partial z}(z) h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \bar{h} \\ d_z f(h) &= \frac{\partial f}{\partial z} h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \bar{h} \end{aligned}$$

On a alors : $d_z f(ih) = \frac{\partial f}{\partial z} ih - i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \bar{h}$. Mais $d_z f$ est \mathbb{C} -linéaire par hypothèse. Donc :

$$d_z f(ih) = i d_z f(h) = i \frac{\partial f}{\partial z} h + i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \bar{h}$$

Ainsi : $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

$iii \Rightarrow i$ On a :

$$d_z f(h) = \frac{\partial f}{\partial z} h$$

D'où

$$f(z+h) = f(z) + \frac{\partial f}{\partial z} h + o(h)$$

Ainsi :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

et f est holomorphe en z . ■

Proposition 3.4: Équations de Cauchy-Riemann

On note $f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ où $P, Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est holomorphe, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

i.e.

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Ce sont les équations de Cauchy-Riemann.

Démonstration. On a :

$$d_z f(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) dx(h) + \frac{\partial f}{\partial y}(z) dy(h) = f'(z)h = f'(z)(k + il)$$

On obtient

$$f'(z)(k + il) = \frac{\partial f}{\partial x}(z)k + \frac{\partial f}{\partial y}(z)l$$

et donc :

$$\begin{cases} f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) \\ if'(z) = \frac{\partial f}{\partial y}(z) \end{cases}$$

On obtient ainsi la première égalité en identifiant.

On réécrit ceci avec $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

■

Proposition 3.5: Constance sur un Connexe

Si f est holomorphe sur U connexe on a équivalence entre :

- f est constante sur U
- $\Re f$ l'est
- $\Im f$ l'est
- $|f|$ l'est
- \bar{f} est holomorphe

3.3 Intégrale sur le bord d'un Compact

Définition 3.4: Classe du Bord d'un Compact

Soit K un compact de \mathbb{R}^2 . K est dit à bord compact de classe \mathcal{C}^1 par morceaux si pour tout élément $z_0 \in \partial K$, il existe des coordonnées (u, v) associées à un repère affine de \mathbb{R}^2 d'origine z_0 orienté positivement par rapport à l'orientation canonique de \mathbb{R}^2 et un rectangle ouvert $R = \{-\delta < u < \delta\} \times \{-\eta < v < \eta\}$ tel que :

$$K \cap R = \{(u, v) \in R, v \geq h(u)\}$$

où h est une fonction réelle \mathcal{C}^1 par morceaux sur $[-\delta, \delta]$ avec $h(0) = 0$ et $\sup |h| < \eta$.

Définition 3.5: Orientation du Bord

Soit K un compact à bord de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. On appelle orientation canonique du bord l'orientation donnée par les arcs $u \mapsto (u, h(u))$ avec u croissant.

Lemme 3.1: Existence de l'Orientation

La définition a du sens.

Lemme 3.2: Recouvrement de Rectangles

Soit R, R' des rectangles ouverts tels que $\partial K \cap R \cap R' \neq \emptyset$.

On définit

$$K \cap R = \{(u, v) \in R, v \geq h(u)\}$$

et

$$K \cap R' = \{(u', v') \in R', v' \geq l(u')\}$$

Alors, les orientations sur $\partial K \cap R \cap R'$ coïncident.

Démonstration. Soit $z_0 \in \partial K \cap R \cap R'$. h et l sont \mathcal{C}^1 par morceaux. En évitant un nombre fini de points de $\partial K \cap R \cap R'$ on peut supposer h et l \mathcal{C}^1 en z_0 . Autrement dit, le bord admet une tangente en z_0 . On a deux repères affines orientés (z_0, e_1, e_2) et (z_0, e'_1, e'_2) qui génèrent des coordonnées (u, v) et (u', v') . Quitte à remplacer h par $h(u) - h'(0)u$ on peut supposer que $h'(0) = l'(0) = 0$. Ainsi, e_1 et e'_1 sont colinéaires. Puisqu'on a supposé que (e_1, e_2) et (e'_1, e'_2) sont orientés positivement par rapport à l'orientation canonique de \mathbb{R}^2 et puisque e_2 et e'_2 doivent être dans le même sens (i.e. à l'intérieur du compact), on a bien le fait que e_1 et e'_1 sont dans le même sens. Finalement, les orientations sur $\partial K \cap R \cap R'$ coïncident. ■

3.4 Formule de Green-Riemann

Soit $p, n \in \mathbb{N}^*$. On note $\Lambda_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{R}^n)$ le \mathbb{R} -ev des formes p -linéaires alternées sur \mathbb{R}^n . Toute forme $S \in \Lambda_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{R}^n)$ s'écrit de manière unique

$$S = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} c_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

Définition 3.6: Produit Extérieur

Pour $S \in \Lambda_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{R}^n), T \in \Lambda_{\mathbb{R}}^q(\mathbb{R}^n)$ on définit le produit extérieur de S et T noté $S \wedge T \in \Lambda_{\mathbb{R}}^{p+q}(\mathbb{R}^n)$ comme :

$$S \wedge T(v_1, \dots, v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) S(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) T(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)})$$

Proposition 3.6: Exemples

La paire (dx, dy) forme une base de $\Lambda_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{C})$. Les seuls produits extérieurs à considérer sont :

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0, \quad dx \wedge dy = -dy \wedge dx$$

De plus, $dx \wedge dy$ est la forme bilinéaire alternée déterminant dans la base canonique.

Définition 3.7: 2-forme différentielle

Une 2-forme différentielle β sur un ouvert U de \mathbb{C} est une application continue de U dans $\Lambda_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{C}) : \beta = w(x, y) dx \wedge dy$ pour w continue.

Définition 3.8: Intégrale d'une 2-forme

Soit $\beta = w(x, y) dx \wedge dy$ une 2-forme différentielle sur U . On définit :

$$\int_U \beta = \int_U w(x, y) dx dy$$

Définition 3.9: Différentielle d'une Différentielle

Soit $\alpha = u(x, y) dx + v(x, y) dy$ une 1-forme différentielle \mathcal{C}^1 sur U . La différentielle $d\alpha$ de α est la 2-forme différentielle

$$d\alpha = du \wedge dx + dv \wedge dy = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

Proposition 3.7: Exemples

1. Soit α une 1-forme différentielle sur U et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^1 . Alors

$$d(f\alpha) = df \wedge \alpha + f d\alpha$$

2. Si on écrit la 1-forme différentielle \mathcal{C}^1 $\alpha = f dz + g d\bar{z}$ on a :

$$d(f dz + g d\bar{z}) = (\partial_z g - \partial_{\bar{z}} f) dz \wedge d\bar{z} = -2i (\partial_z - \partial_{\bar{z}} f) dx \wedge dy$$

En particulier, si $\alpha = f dz$ avec f holomorphe, alors $\partial_{\bar{z}} f = 0$ et $d\alpha = 0$.

Lemme 3.3: Formule de Green-Riemann sur un rectangle

Soit K un compact de \mathbb{C} à bord de classe \mathcal{C}^1 par morceaux orienté canoniquement. Soit $\alpha = u(x, y) dx + v(x, y) dy$ une forme 1-différentielle de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert de K à support dans un rectangle $R = [-\delta, \delta] \times [-\eta, \eta] \subseteq K$. Alors

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_K d\alpha \text{ i.e. } \int_{\partial K} u(x, y) dx + v(x, y) dy = \int_K \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$$

Démonstration. Comme K est compact, $R \subseteq \overset{\circ}{K}$ ou bien $\partial K \cap R$ est le graphe d'une fonction h et $K \cap R$ est la partie située à l'intérieur du graphe.

Supposons $R \subseteq \overset{\circ}{K}$, alors $u = v = 0$ sur ∂R et

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) dx = v(\delta, y) - v(-\delta, y) = 0$$

$$\int_{-\eta}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dy = u(x, \eta) - u(x, -\eta) = 0$$

et

$$\int_K d\alpha = \int_R d\alpha = \int_{-\delta \leq x \leq \delta, -\eta \leq y \leq \eta} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

Puisque le support de α ne rencontre pas ∂K on a $\int_{\partial K} \alpha = 0 = \int_K d\alpha$.
Si $K \cap R = \{(x, y) \in R \mid y \leq h(x)\}$, alors

$$\begin{aligned} \int_K d\alpha &= \int_{K \cap R} d\alpha = \int_{-\delta}^{\delta} dx \int_{h(x)}^{\eta} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{h(x)}^{\eta} v(x, y) dx \right) + v(x, h(x)) h'(x) - (u(x, \eta) - u(x, h(x))) \right) dx \\ &= \int_{h(\delta), \eta} v(\delta, y) dy - \int_{h(-\delta)}^{\eta} v(-\delta, y) dy + \int_{-\delta}^{\delta} (v(x, h(x)) h'(x) + u(x, h(x))) dx \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} (v(x, h(x)) h'(x) + u(x, h(x))) dx \end{aligned}$$

car $u(x, \eta) = v(\delta, y) = v(-\delta, y) = 0$. Par ailleurs, comme $\partial K \cap R$ est paramétré par $y = h(x)$,

$$\int_{\partial K \cap R} \alpha = \int_{\partial K \cap R} u(x, y) dx + v(x, y) dy = \int_{-\delta}^{\delta} (v(x, h(x)) h'(x) + u(x, h(x))) dx$$

Le support de α est inclus dans R . Nous concluons donc :

$$\int_K d\alpha = \int_{\partial K} \alpha$$

■

Définition 3.10: Partition de l'unité

Soit K un compact de \mathbb{C} recouvert par un nombre fini d'ouverts U_i . Une partition de l'unité de classe \mathcal{C}^1 subordonnée au recouvrement U_i est une famille φ_i de fonctions de K dans $[0, 1]$ de classe \mathcal{C}^1 à support dans U_i telles que $\sum \varphi_i(x) = 1$ pour tout $x \in K$.

Lemme 3.4: Unité sur un Voisinage

Soit $z \in U$. Il existe V un voisinage de z avec $\overline{V} \subseteq U$ et une fonction \mathcal{C}^1 φ_U à support dans U valant 1 sur V .

Démonstration. Soit $r > r' > 0$ tel que $D(z, r') \subset D(z, r) \subset U$. On définit les fonctions \mathcal{C}^∞

$$f_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_r(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t^2 - r^2}} & \text{si } |t| < r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$g_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g_r(s) = \frac{\int_{-\infty}^s f_r(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} f_r(t) dt}$$

En particulier :

$$g_r(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq -r \\ 1 & \text{si } s \geq r \end{cases}$$

Alors, $V = D(z, r')$ et $\varphi_U(w) = f_r\left(r + \frac{2r}{r-r'}(r' - |w - z|)\right)$ conviennent. ■

Lemme 3.5: Existence d'une Partition

Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ un compact et (U_i) un recouvrement fini par des ouverts de K . Il existe une partition de l'unité \mathcal{C}^1 subordonnée au recouvrement U_i

Démonstration. Pour tout $z \in K \setminus U_j$ il existe i tel que $z \in U_i$. Par le lemme 3.4 on construit ψ_z^j de classe \mathcal{C}^1 qui vaut 1 sur un voisinage ouvert W_z^j de z et dont le support est dans l'ouvert $U_i \cap (K \setminus U_j)$. Le support de ψ_z^j est un fermé de K donc est compact.

On obtient donc un recouvrement ouvert W_z^j du compact $K \setminus U_j$ donc on extrait un sous-recouvrement fini $\{W_{z_1}^j, \dots, W_{z_{j_l}}^j\}$.

On procède de même pour tout $j \leq n$. En réindexant on obtient une famille finie $(\psi_l)_{1 \leq l \leq N}$ de fonctions dont l'union des supports recouvre K , i.e. pour tout $z \in K$, il existe l tel que $\psi_l(z) > 0$. On pose alors

$$\psi = \sum \psi_l \text{ et pour } l \leq N, \rho_l = \frac{\psi_l}{\psi}$$

Ainsi, ρ_l est une partition de l'unité de classe \mathcal{C}^1 de K telle que pour tout l il existe $1 \leq i \leq n$ tel que le support de ρ_l soit inclus dans U_i . ■

Théorème 3.2: Formule de Green-Riemann

Soit K un compact de \mathbb{C} à bord de classe \mathcal{C}^1 par morceaux orienté canoniquement. Soit α une 1-forme différentielle de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert de K . On a alors

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_K d\alpha$$

Démonstration. Comme K est compact, il est recouvert par un nombre fini de rectangles ouverts R_j qui vérifient $R_j \subseteq \mathring{K}$ ou $\partial(K \cap R_j)$ est le graphe d'une fonction h_j et $K \cap R_j$ est la partie située à l'intérieur du graphe. Soit (χ_j) une partition de l'unité subordonnée au recouvrement R_j . Écrivons $\alpha = \sum \alpha_j$ où les 1-formes différentielles $\alpha_j = \chi_j \alpha$ sont de classes \mathcal{C}^1 à support dans R_j . On se ramène alors au cas du lemme 3.3 ■

Théorème 3.3: Cauchy

Soit U un ouvert de \mathbb{C} , K un compact à bord de classe \mathcal{C}^1 par morceaux inclus dans U , avec l'orientation canonique du bord. Alors pour toute fonction holomorphe de classe \mathcal{C}^1 sur K nous avons

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 0$$

Démonstration. On applique la formule de Green-Riemann 3.2 à $\alpha = f(z) dz$, 1-forme différentielle de classe \mathcal{C}^1 . On a $d\alpha = -\partial_{\bar{z}} f dz \wedge d\bar{z} = 0$. ■

Corollaire 3.1: Analyticité Holomorphe \mathcal{C}^1

Soit f holomorphe de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert U . Alors f est analytique sur U .

Démonstration. Soit $\overline{D}(w, r) \subseteq U$ et γ le lacet $t \mapsto w + re^{it}$. Pour $\lambda \leq 1$, on pose

$$g(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z + \lambda(u - z))}{u - z} du = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \lambda(w + re^{it} - z))}{w + re^{it} - z} e^{it} dt$$

Ainsi, g est continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ de dérivée

$$g'(\lambda) = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(z + \lambda(w + re^{it} - z)) e^{it} dt = \left[\frac{1}{2i\pi\lambda} f(z + \lambda(w + re^{it} - z)) \right]_{t=0}^{2\pi} = 0$$

Donc g est constante avec

$$g(1) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(u) du}{u - z} \text{ et } g(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z) du}{u - z} = f(z)$$

D'où, par la proposition 2.4, f est analytique ■

3.5 Analycité des Fonctions Holomorphes

Lemme 3.6: Goursat

Soient $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et T un triangle inclus dans U . Pour toute fonction holomorphe sur U

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0$$

Démonstration. Nous découpons T en quatre triangles T_i dont les sommets sont ceux de T et les milieux des côtés de T . Nous orientons les arêtes opposées des triangles T_k de telle façon que

$$I = \int_{\partial T} f(z) dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\partial T_k} f(z) dz$$

Il existe donc un indice k avec $\left| \int_{\partial T_k} f(z) dz \right| \geq |I|/4$. De cette façon, nous construisons une suite de triangles emboîtés $T'_0 = T, T'_1 = T_k$ avec $\text{diam} T'_n = \text{diam} T / 2^n$ et $\left| \int_{\partial T'_n} f(z) dz \right| \geq |I|/4^n$. L'intersection des triangles emboîtés T'_n est réduite à un point z_0 . Comme f est holomorphe en z_0 :

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + (z - z_0) \varepsilon(z)$$

avec $\varepsilon(z)$ qui tend vers 0 quand z tend vers z_0 . On a ainsi :

$$\left| \int_{\partial T'_n} f(z) dz \right| = \left| \int_{\partial T'_n} (z - z_0) \varepsilon(z) dz \right| \leq \text{long}(\partial T'_n) \sup_{\partial T'_n} |z - z_0| |\varepsilon(z)|$$

et donc

$$\left| \int_{\partial T'_n} f(z) dz \right| \leq 3 (\text{diam} T'_n)^2 \sup_{\partial T'_n} |\varepsilon(z)|$$

Donc $|I| \leq 4^n \left| \int_{\partial T'_n} f(z) dz \right| \leq 3 (\text{diam} T_n)^2 \sup_{\partial T'_n} |\varepsilon(z)|$ et donc $I = 0$. ■

Théorème 3.4: Goursat

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ ouvert et K un compact à bord de classe \mathcal{C}^1 avec l'orientation canonique du bord. Pour toute fonction holomorphe sur U on a :

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 0$$

Démonstration. On approche K par des compacts à bords polygonaux. Notons $\delta = d(K, \mathbb{C} \setminus U) > 0$. Paramétrisons ∂K par un nombre fini d'arcs \mathcal{C}^1 par morceaux. Pour chaque tel arc $\gamma : [a, b] \rightarrow U$, soit une subdivision $a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = b$ telle que $|\gamma(\tau_{j+1}) - \gamma(\tau_j)| \leq \varepsilon \leq \delta/2$. Chaque segment $[\gamma(\tau_{j+1}), \gamma(\tau_j)] \subset U$. Pour ε assez petit, la réunion de ces segments constitue le bord d'un compact K_ε à bord polygonal. $K_\varepsilon = \cup_i T_i$ est réunion de triangles adjacents et le lemme de Goursat 3.6 implique

$$\int_{\partial K_\varepsilon} f(z) dz = \sum_i \int_{\partial T_i} f(z) dz = 0$$

D'après la proposition, on a bien :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial K_\varepsilon} f(z) dz = \int_{\partial K} f(z) dz$$

D'où le résultat. ■

Théorème 3.5: Formule de Cauchy

Soit f holomorphe sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{C}$ et K un compact à bord orienté \mathcal{C}^1 par morceaux inclus dans U . Alors, pour tout $z \in K$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega$$

Démonstration. Soit $r > 0$ tel que $\overline{D(z, r)} \subset K^\circ$. On note $K_r = K \setminus D(z, r)$. K_r est un compact à bord orienté \mathcal{C}^1 par morceaux dont le bord est $\partial K_r = \partial K \cup \partial D^-(z, r)$ où ∂D^- signifie que ce cercle a l'orientation opposée à celle obtenue comme bord de $\overline{D(z, r)}$. La fonction $g(\omega) = f(\omega) / (\omega - z)$ est holomorphe sur $U \setminus \{z\}$. Le théorème de Goursat 3.4 appliqué à g sur le compact $K_r \subseteq U \setminus \{z\}$ donne

$$\int_{\partial K} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega - \int_{\partial D(z, r)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega = 0$$

En posant $\omega = z + re^{it}$ on a :

$$\int_{\partial D(z, r)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt$$

et cette dernière intégrale tend vers $2i\pi f(z)$ lorsque r tend vers 0 par continuité de f au point z . ■

Théorème 3.6: Équivalence Holomorphie-Analyticité

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. f est holomorphe sur U si et seulement si elle est analytique.

Démonstration. On a déjà l'implication analyticité holomorphie. Supposons f holomorphe sur U et $\overline{D}(z_0, r) \subset U$. Pour $z \in D(z_0, r)$, la formule de Cauchy 3.5 donne

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega$$

Or

$$\frac{1}{\omega - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\omega - z_0)^{n+1}}$$

De plus, pour $\omega = z_0 + re^{it}$,

$$\left| \frac{(z - z_0)^n}{(\omega - z_0)^{n+1}} \right| = \frac{1}{r} \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^n, \text{ avec } |z - z_0|/r < 1$$

Par convergence normale pour $t \in [0, 2\pi]$, on obtient :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0, r)} f(\omega) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\omega - z_0)^{n+1}} d\omega \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\omega)}{2i\pi (\omega - z_0)^{n+1}} d\omega (z - z_0)^n \\ &= \sum a_n (z - z_0)^n \end{aligned}$$

et la série entière ci-dessus converge normalement sur les compacts de $D(z_0, r)$. ■

Corollaire 3.2: Classe des Dérivées

Soit U un ouvert de \mathbb{C} . Toute fonction holomorphe sur U est de classe \mathcal{C}^∞ sur U .
Précisément, pour tout $K \subset U$ compact à bord de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et pour tout $z \in \overset{\circ}{K}$ nous avons :

1. $\forall n \geq 0, \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z) = f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(\omega)}{(\omega-z)^{n+1}} d\omega$
2. $\forall n \geq 0, \forall m \geq 0, \frac{\partial^{n+m} f}{\partial z^n \partial \bar{z}^m}(z) = 0$.

En particulier, une fonction holomorphe f admet des dérivées complexes $f^{(n)}$ d'ordre n arbitraire et les dérivées $f^{(n)}$ sont holomorphes.

Théorème 3.7: Morera

Soit f une fonction continue sur un ouvert U de \mathbb{C} . Nous supposons que $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$ pour tout triangle T inclus dans U . Alors f est holomorphe sur U .

Démonstration. Soit $z_0 \in U$ et $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r) \subset U$. Pour $z \in D(z_0, r)$, on pose

$$F(z) = \int_{[z_0, z]} f(\omega) d\omega$$

Soit $z \in D(z_0, r)$ et $h \neq 0$ tel que $z+h \in D(z_0, r)$. Comme le triangle de sommets $z_0, z, z+h$ est inclus dans $D(z_0, r)$, nous avons

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(\omega) d\omega = \int_0^1 f(z+th) dt$$

Comme f est continue au point z ,

$$\lim_{h \in \mathbb{C}^*, h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z)$$

Ainsi F est holomorphe sur $D(z_0, r)$ donc analytique d'après le théorème 3.6 et sa dérivée $f = F'$ l'est donc aussi. ■

Corollaire 3.3: Γ

La fonction Γ

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$$

est holomorphe pour $\Re s > 0$.

Démonstration. L'intégrale converge en $t = 0$ car $|t^{s-1} e^{-t}| \leq t^{\Re s - 1}$. À s fixé pour $t \in \mathbb{R}_+$ grand,

$$|t^{s-1} e^{-t}| = t^{\Re s - 1} e^{-t} \leq e^{t/2} e^{-t} = e^{-t/2}$$

Donc $\Gamma(s)$ est bien définie pour $\Re s > 0$. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \{s, \Re s > 0\}$ la courbe décrivant un triangle. Alors, d'après le théorème de Fubini

$$\int_\gamma \Gamma(s) ds = \int_\gamma \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt ds = \int_0^{+\infty} \left(\int_\gamma t^{s-1} ds \right) e^{-t} dt = 0$$

Ainsi, en appliquant le théorème de Morera 3.7, la fonction Γ est holomorphe sur le demi-plan $\Re s > 0$. ■

4 Propriétés Élémentaires des Fonctions Holomorphes

4.1 Théorème d'inversion locale

Théorème 4.1: Inversion Locale

Si $f \in \mathcal{O}(U)$, $a \in U$, $f'(a) \neq 0$, alors, $\exists V$ voisinage ouvert de a inclus dans U sur lequel f est biholomorphe sur $f(V)$ ouvert.

Démonstration. Comme $f \in \mathcal{O}(U)$, f est \mathbb{R} -différentiable. Donc il existe un voisinage V ouvert de U contenant a sur lequel $f|_V : V \rightarrow f(V)$ est un difféomorphisme. Alors, $d_{f(z)}(f^{-1}) = (d_z f)^{-1}$ et donc $f^{-1} \in \mathcal{O}(U)$. ■

Idée des Séries Majorantes. • On suppose d'abord $a = 0$, $f(a) = 0$, $f'(a) = 1$. On a

$$f(z) = z - \sum_{n \geq 2} a_n z^n, z \in D(0, r)$$

On veut résoudre $f(z) = \omega = z - \sum_{n \geq 2} a_n z^n$ i.e. $z = \omega + \sum_{n \geq 2} a_n z^n$. Mais, $\sum_{n \geq 2} a_n z^n = \mathcal{O}(\omega^2)$:

$$z = \omega + \sum_{n \geq 2} a_n (\omega + \mathcal{O}(\omega^2))^n = \omega + a_2 \omega^2 + \mathcal{O}(\omega^3)$$

On peut alors réinjecter :

$$z = \omega + a_2 \omega^2 + (2a_2^2 + a_3) \omega^3 + \mathcal{O}(\omega^4)$$

et ainsi de suite :

$$z = \omega + \sum_{n=2}^N P_n(a_2, \dots, a_n) \omega^n + \mathcal{O}(\omega^{N+1})$$

où les $P_n \in \mathbb{N}[X_2, \dots, X_n]$.

- Montrons maintenant que cette série converge lorsque $N \rightarrow \infty$. On sait que la série $\sum a_n z^n$ converge sur $D(0, r)$. Pour $r' < r$, $|a_n r'^n| \rightarrow 0$. Donc il existe $M > 0$ tel que $|a_n| \leq M^n$. Or,

$$z = \omega + \sum_{n=2}^{+\infty} P_n(M^2, \dots, M^n) \omega^n$$

est solution de :

$$\begin{aligned} \omega &= z - \sum_{n \geq 2} M^n z^n \\ &= z - \left(\frac{1}{1 - Mz} - 1 - Mz \right) \end{aligned}$$

Donc

$$(1 - Mz)\omega = z(1 - Mz) - 1 + 1 - Mz + Mz(1 - Mz)$$

C'est à dire :

$$z^2(M + M^2) + z(-M\omega - 1) + \omega = 0$$

ou

$$z = \frac{(M\omega + 1) - \sqrt{(1 + M\omega)^2 - 4\omega(M + M^2)}}{2(M + M^2)}$$

On prend ici pour $\sqrt{\cdot}$ la détermination holomorphe de $(\cdot)^{1/2}$ qui existe sur $D(1, 1)$ et pour laquelle $\sqrt{1} = 1$ de sorte que pour $\omega = 0$, $z = 0$.

La série définissant $\sqrt{\cdot}$ converge alors sur $D(0, R)$ où $R = \frac{1}{(1+\sqrt{2})M+4M^2}$. En effet, alors, on a

$$|M^2\omega^2| \leq M^2|\omega|R \leq \frac{M^2|\omega|}{(1+\sqrt{2})M} = (\sqrt{2}-1)M|\omega|$$

et donc

$$|(2M+4M^2)\omega - M^2\omega^2| \leq (2M+4M^2)|\omega| + |M^2\omega^2| \leq ((1+\sqrt{2})M+4M^2)|\omega| < 1$$

D'où la convergence de $g(\omega) = \omega + \sum_{n \geq 2} P_n(a_2, \dots, a_n)\omega^n$ sur $D(0, R)$. et $g(D(0, R)) \subset D(0, 1/M)$.

- Par identification de la série entière en zéro et principe du prolongement analytique, nous avons $f \circ g(\omega) = \omega$ pour $\omega \in D(0, R)$. De plus, par construction, g est injective sur $W = D(0, R)$ et l'image $\omega = f(z)$ atteint surjectivement W sur $g(W) \subseteq D(0, 1/M) \cap f^{-1}(W)$. Prenons V la composante connexe de 0 dans $D(0, 1/M) \cap f^{-1}(W)$. Alors $f(V) \subset W$ et $g(W) \subset V$. V, W sont ouverts et $f|_V \circ g|_W = id_W$. Par connexité de V et prolongement analytique, $g|_W \circ f|_V = id_V$. ■

4.2 Théorème de l'Application Ouverte

Théorème 4.2: Pré-Application Ouverte

Soit $f \in \mathcal{O}(U)$ non constante au voisinage de $a \in U$, $f(a) = 0$ et

$$m = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid f^{(k)}(a) \neq 0\}$$

Il existe alors un voisinage ouvert V de a , un voisinage ouvert W de 0 et un biholomorphisme $\varphi : V \rightarrow W$ tel que φ envoie a sur 0 et $f(z) = f(a) + \varphi(z)^m$.

Démonstration. D'après le théorème 2.4 il existe $U' \subseteq U$ un voisinage de a et $g \in \mathcal{O}(U')$ tels que pour tout $z \in U'$

$$f(z) - f(a) = \alpha(z-a)^m g(z)$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $g(a) = 1$.

Soit $V = \{z \in U' \mid |g(z) - 1| < 1\}$. C'est un voisinage de a sur lequel $\exp \frac{1}{m} \log(g(z))$ existe.

On a alors

$$\forall z \in V', f(z) = f(a) + (\varphi(z))^m$$

où

$$\varphi(z) = \alpha_m(z-a) \exp\left(\frac{1}{m} \log(g(z))\right)$$

où $\alpha_m^m = \alpha$. Alors, $\varphi \in \mathcal{O}(V')$ avec $\varphi(a) = 0$ et $\varphi'(a) = 1$. Par théorème d'inversion locale 4.1, on a un voisinage $V \subset V'$ de a sur lequel φ est un biholomorphisme. ■

Corollaire 4.1: Solutions d'une Équation

Soit $f \in \mathcal{O}(U)$ non constante au voisinage de $a \in U$ et

$$m = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid f^{(k)}(a) \neq 0\}$$

. Alors, $\exists r, \rho \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\forall \omega \in D(f(a), \rho) \setminus \{f(a)\}$ l'équation $f(z) = \omega$ a exactement m solutions dans $D(a, r)$.

Démonstration. On écrit par le théorème 4.2 précédent $f(z) = \omega = f(a) + \varphi(z)^m$ où $\varphi : V \rightarrow W$ est tel que $\varphi(a) = 0$. On suppose $\varphi(z) = (\omega - f(a))^{1/m}$ pour une certaine détermination de l'exponentielle. On prend r tel que $D(a, r) \subset V$. $\varphi(D(a, r))$ est un ouvert de W voisinage de 0.

Il existe un ρ' tel que $D(0, \rho')$ est inclus dans $\varphi(D(a, r))$. Alors, pour tout $\omega \in D(f(a), \rho'^m)$, $(\omega - f(a))^{1/m} \in D(0, \rho')$. Mézalor, $e^{2ik\pi/m}(\omega - f(a))^{1/m}$ sont dans $D(0, \rho')$. On obtient alors

$$z_k = \varphi^{-1}\left(e^{2ik\pi/m}(\omega - f(a))^{1/m}\right) \in D(a, r)$$

Les z_k sont solutions de $f(z) = \omega$ et donc il y en a bien exactement m .

De même, l'équation $f(z) = f(a)$ n'a qu'une solution $z = a$ dans $D(a, r)$ de multiplicité m . ■

Théorème 4.3: Application Ouverte

Une fonction holomorphe non constante sur un ouvert U connexe est une application ouverte.

Démonstration. Par le corollaire 4.1, tout point $z_0 \in U$ admet un voisinage $V_{z_0} \subset U$ tel que $f(V_{z_0}) = D(f(z_0), \rho(z_0))$. Ainsi, $f(U) = \cup D(f(z_0), \rho(z_0))$ est ouvert. ■

Théorème 4.4: Théorème d'Inversion Globale

Soit U un ouvert connexe et $f \in \mathcal{O}(U)$ injective. Alors :

1. $f(U)$ est un ouvert de \mathbb{C}
2. f' ne s'annule pas sur U
3. $f : U \rightarrow f(U)$ est un biholomorphisme

Démonstration. 1. D'après le théorème de l'application ouverte 4.3, f , injective donc non constante, est ouverte donc $f(U)$ est ouverte et f est une bijection continue ouverte de U dans $f(U)$, i.e., un homéomorphisme.

2. Supposons qu'il existe z_0 pour lequel $f'(z_0) = 0$. Dans le théorème 4.1, on a un entier $m \geq 2$ et donc f n'est pas injective au voisinage de z_0 ce qui est absurde. Donc f' ne s'annule pas sur U .

3. D'après les deux premiers points et le théorème 4.1 d'inversion locale, f^{-1} est holomorphe sur $f(U)$ et $f : U \rightarrow f(U)$ est un biholomorphisme. ■

4.3 Lemme de Schwarz

Théorème 4.5: Principe du Maximum

Soit $f \in \mathcal{O}(U)$

1. Si $|f|$ admet une maximum local en un point $a \in U$, alors f est constante sur la composante connexe contenant a .
2. Pour tout $K \subset U$

$$\max_K |f| = \max_{\partial K} |f|, \max_K \Re f = \max_{\partial K} \Re f, \max_K \Im f = \max_{\partial K} \Im f$$

Démonstration. 1. Supposons f non constante sur la composante connexe U_0 de U contenant a avec $|f(a)| = \sup_U |f| = \sup_{U_0} |f|$. D'après le théorème de l'application ouverte, f est ouverte sur U_0 . L'image $f(U_0)$ est un voisinage de $f(a)$ donc contient des points de module strictement supérieur à $|f(a)|$.

2. Si $\max_{\partial K} \Re f < \max_K \Re f$, il existe $z_0 \in \overset{\circ}{K}$ avec $\Re f(z_0) = \max_K \Re f$. Soit U_0 une composante connexe de z_0 dans $\overset{\circ}{K}$ et f non constante dans U_0 . Alors $f(U_0)$ est un ouvert qui contient

$f(z_0)$ et qui est contenue dans le demi-plan $\{w \mid \Re w \leq \Re f(z_0)\}$. Donc f est constante sur U_0 et $\Re f|_{\partial U_0} = \Re f(z_0)$ par continuité de f . Or

$$\emptyset \neq \partial U_0 \subset \partial \mathring{K} = \overline{\mathring{K}} \setminus \mathring{K} \subseteq \overline{K} \setminus \mathring{K} = \partial K$$

ainsi, $\max_K \Re f = \Re f(z_0)$ est atteint sur ∂K . Les cas $|f|$ et $\Im f$ sont analogues. ■

Théorème 4.6: Lemme de Schwarz

Soit f holomorphe sur $D(0, 1)$ avec $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq 1$ sur $D(0, 1)$. Alors, on a

$$\forall z \in D(0, 1), |f(z)| \leq |z| \text{ et } |f'(0)| \leq 1$$

De plus si

$$\exists z_0 \in D(0, 1) \setminus \{0\}, |f(z_0)| = |z_0| \text{ ou } |f'(0)| = 1$$

alors f est une rotation : $f(z) = az$ pour $a \in \mathbb{C}, |a| = 1$.

Démonstration. L'application $g(z) = f(z)/z$ est holomorphe sur $D(0, 1)$ et vérifie $g(0) = f'(0)$. En appliquant le principe du maximum à la fonction g sur $D(0, r), r < 1$, on obtient :

$$\sup_{D(0, r)} |g| = \sup_{\partial D(0, r)} |g| = \sup_{\partial D(0, r)} |f|/r \leq 1/r$$

En faisant tendre r vers 1, nous obtenons

$$\sup_{D(0, 1)} |g| \leq 1 \iff \begin{cases} |f(z)| \leq |z| & \forall z \in D(0, 1) \setminus \{0\} \\ |f'(0)| \leq 1 \end{cases}$$

De plus, si $\exists z_0 \in D(0, 1) \setminus \{0\}, |f(z_0)| = |z_0|$ ou si $|g(0)| = |f'(0)| = 1$, alors $|g|$ admet un maximum local en z_0 ou 0 donc $g = a$ est constante avec $|a| = 1$. ■

Corollaire 4.2: Point Fixe

Soit $f : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$ holomorphe, $f \neq \text{Id}$. Alors f a au plus un point fixe.

Démonstration. Supposons que nous ayons $a \neq b \in D(0, 1)$ avec $f(a) = a$ et $f(b) = b$. Si $a = 0, f(0) = 0, f(b) = b$, le lemme de Schwarz montre que $f = e^{i\theta}z$ et comme $f(b) = b, f = \text{Id}$. On peut donc supposer $a \neq 0$. Posons $\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ et

$$g = \varphi_a \circ f \circ \varphi_a^{-1} \text{ et } \lambda = \varphi_a(b) \neq 0$$

Ainsi, $g : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$ avec deux points fixes $g(0) = 0, g(\lambda) = \lambda$. Donc $g = \text{Id} = f$. Absurde. ■

4.4 Disque Unité et Inversion Locale Effective

Définition 4.1: Automorphisme

Un automorphisme de U est une bijection holomorphe de U dans U . On note $\text{Aut } U$ l'ensemble des automorphismes de U .

1. C'est la fonction du jour !

On rappelle que le groupe unitaire de signature (n, m) est le groupe des matrices préservant une forme hermitienne de signature (n, m) . Il est isomorphe au groupe $U(n, m)$ préservant la forme hermitienne diagonale de signature (n, m) :

$$U(n, m) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \text{GL}_{n+m}(\mathbb{C}) \left| \begin{array}{l} AA^* - BB^* = I_n \\ DD^* - CC^* = I_m \\ AC^* = BD^* \end{array} \right. \right\}$$

Théorème 4.7: Automorphisme du Disque Unité

$$\text{Aut } D(0, 1) = \left\{ \varphi_\alpha : z \mapsto e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \mid \theta \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{C}, |a| < 1 \right\} = \text{PSU}(1, 1)$$

Démonstration. • Nous vérifions que $\varphi_\alpha \in \text{Aut } D$. Soit $f \in \text{Aut } D$. On note $a = f(0)$. On a $\varphi_\alpha \circ f(0) = 0$ et pour tout $z \in D$, $|\varphi_\alpha \circ f(z)| < 1$. Le lemme de Schwarz 4.6 implique alors que $g = \varphi_\alpha \circ f$ vérifie $|g(z)| \leq |z|$ et de même $|g^{-1}(z)| \leq |z|$ donc $|g(z)| = |z|$ pour $z \in D$. Donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $g(z) = e^{i\theta} z$.

- L'application :

$$\varphi_\alpha \mapsto \frac{1}{1 - |\alpha|^2} \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & -\alpha e^{i\theta/2} \\ -\bar{\alpha} e^{-i\theta/2} & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$$

induit un automorphisme

$$\text{Aut } D \rightarrow \text{PSU}(1, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ \bar{A} & \bar{B} \end{pmatrix} \mid |A|^2 - |B|^2 = 1 \right\} / \pm \text{Id}$$

■

Corollaire 4.3: Schwarz-Pick

Soit $f : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$ holomorphe. Pour $z \in D(0, 1)$ on a :

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

avec égalité si et seulement si $f \in \text{Aut } D(0, 1)$.

Démonstration. La dérivée de $\varphi_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \in \text{Aut } D$ vérifie :

$$\varphi'_\alpha(z) = \frac{1 - |\alpha|^2}{(1 - \bar{\alpha}z)^2}, \varphi'_\alpha(0) = 1 - |\alpha|^2, |\varphi'_\alpha(\alpha)| = \frac{1}{1 - |\alpha|^2}$$

Soit $z_0 \in D$ et $g = \varphi_{f(z_0)} \circ f \circ \varphi_{-z_0}$. On a $g(0) = 0$ et $g : D \rightarrow D$. Le lemme de Schwarz 4.6 implique que $|g(z)| \leq |z|$ et $|g'(0)| \leq 1$. L'inégalité attendue résulte de

$$g'(0) = \varphi_{f(z_0)}(f(z_0)) f'(z_0) \varphi'_{-z_0}(0) = \frac{1}{1 - |f(z_0)|^2} f'(z_0) (1 - |z_0|)^2$$

Le cas d'égalité correspond à $|g'(0)| = 1$. Alors g et donc f sont des automorphismes de D . ■

Théorème 4.8: Bloch-Landau

Soit $f \in \mathcal{O}(D(z_0, r))$ telle que $f'(z_0) \neq 0$. Alors il existe $U \subset D(z_0, r)$ tel que $f|_U$ est un biholomorphisme de U sur $f(U) = D(\omega_0, R)$ disque de rayon $R \geq \frac{r}{12} |f'(z_0)|$.

Démonstration. Quitte à considérer la restriction de f et à remplacer f par $f(z_0 + rz)$ on peut considérer définie au voisinage du disque fermé $\overline{D}(0, 1)$. On pose

$$m = \sup_{z \in \overline{D}(0,1)} \left(1 - |z|^2\right) |f'(z)| \geq |f'(0)|$$

La valeur m est atteinte en $\alpha \in D(0, 1)$ et alors $m = \left(1 - |\alpha|^2\right) |f'(\alpha)|$. Posons $h = f \circ \varphi_{-\alpha}$. On a :

$$h(0) = f(\alpha), h'(0) = f'(\alpha) \varphi_{-\alpha}'(0) = \left(1 - |\alpha|^2\right) f'(\alpha), |h'(0)| = m \geq |f'(0)|$$

De plus, pour $|z| < 1$, d'après le corollaire de Schwarz-Pick 4.3 :

$$\left(1 - |z|^2\right) |h'(z)| = \frac{\left(1 - |z|^2\right) |\varphi_{-\alpha}'(z)|}{1 - |\varphi_{-\alpha}(z)|^2} \left(1 - |\varphi_{-\alpha}(z)|^2\right) |f'(\varphi_{-\alpha}(z))| \leq m$$

Quitte à remplacer h par $\frac{1}{h'(0)}(h - h(0))$, on peut supposer $h(0) = 0$ et $m = h'(0) = 1$. Donc :

$$|h'(z)| \leq \frac{1}{1 - |z|^2}, z \in D(0, 1)$$

Le rayon de convergence du développement en série entière²

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$$

est supérieur à 1 et les inégalités de Cauchy appliquées à h' sur le disque $D(0, \rho)$ donnent

$$h^{(n)}(\omega) = \frac{(n-1)!}{2\pi\rho^{n-1}} \int_0^{2\pi} \frac{h'(\omega + re^{it})}{e^{i(n-1)t}} dt \text{ et } n|a_n| \leq \frac{1}{(1-\rho^2)\rho^{n-1}}$$

Or, $\rho \mapsto (1-\rho^2)\rho^{n-1}$ atteint son maximum en $\rho = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$. Pour ce ρ , on obtient :

$$|a_n| \leq \frac{n+1}{2n} \left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^{(n-1)/2}$$

et pour $M = 3^{3/4}/2$, $|a_n| \leq M^n$ si $n \geq 2$.

En reprenant la preuve du théorème d'inversion locale par la méthode des séries majorantes 4.1, on obtient que h est un biholomorphisme d'un ouvert U sur le disque $D(0, R)$ avec :

$$R = \frac{1}{(1+\sqrt{2})M + 4M^2} > \frac{1}{12}$$

■

5 Espaces de Fonctions Holomorphes

5.1 Convergence de Suites de Fonctions Holomorphes

On dit qu'une suite converge localement de manière uniforme lorsque

$$\forall x \in U, \exists r_x > 0, f_n \xrightarrow[D(x, r_x)]{\text{CU}} f$$

La convergence uniforme localement est équivalente à la convergence uniforme sur tout compact.

Démonstration. \Leftarrow K étant compact, on le recouvre par un nombre fini de disques.

2. DONC DE TAYLOR

⇒ En considérant un disque fermé inclus dans l'ouvert, on a convergence sur ce disque. ■

On rappelle que si $\sum f_n$ converge uniformément sur un compact et que les f_n sont holomorphes, $\sum f_n \in \mathcal{O}(K)$.

Théorème 5.1: Weierstrass

Soit $f_n \in \mathcal{O}(U)$, $f_n \xrightarrow[\forall K \subset U]{\text{CU}} f$. Alors, $f \in \mathcal{O}(U)$ et $\forall l \in \mathbb{N}$, $f_n^{(l)} \xrightarrow[\forall K \subset U]{\text{CU}} f^{(l)}$.

Démonstration. On considère $\overline{D(a, r)} \subset U$. On a :

$$f_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a, r)} \frac{f_n(\omega)}{\omega - z} d\omega$$

On échange limite et intégrale par convergence uniforme et on obtient les formules de Cauchy pour f . ■

5.2 Théorèmes de Runge

On cherche une suite de polynôme convergeant vers une fonction holomorphe.

Théorème 5.2: Runge - 1

Soit $f \in \mathcal{O}(D(z_0, R))$, $K \subseteq D(z_0, R)$. Alors, si $\varepsilon > 0$, il existe $P_\varepsilon \in \mathbb{C}[z]$ tel que

$$\max_K |f - P_\varepsilon| < \varepsilon$$

Démonstration. On suppose d'abord $z_0 = 0$. On pose $f(z) = \sum a_n z^n$ sur $D(0, R)$, on note R' son rayon de convergence. Par la formule d'Hadamard :

$$\frac{1}{R'} = \limsup |a_n|^{1/n}$$

Pour $\delta > 0$, il existe $N(\delta)$ tel que $|a_n|^{1/n} \leq 1/R' + \delta$. On choisit r assez petit pour que $0 < R - r < d(K, \mathbb{C} \setminus D(0, R))$. ■

Lemme 5.1: Approximation Rationnelle

Soit K un compact inclus dans U ouvert de \mathbb{C} . Pour $\gamma : [0, 1] \rightarrow U \setminus K$ un chemin de classe \mathcal{C}^1 . Nous notons

$$F_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $P, Q \in \mathbb{C}[Z]$ avec Q sans zéro dans K tels que

$$\max_{z \in K} \left| F_\gamma(z) - \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \varepsilon$$

Démonstration. Idée : La fonction

$$H : \begin{array}{ccc} K \times [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (z, t) & \longmapsto & \frac{1}{2i\pi} \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} \gamma'(t) \end{array}$$

est continue sur le compact $K \times [0, 1]$ donc uniformément continue. Par conséquent

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, |t_1 - t_2| \leq \delta(\varepsilon) \implies |H(z, t_1) - H(z, t_2)| \leq \varepsilon, \forall z \in K$$

Ainsi, pour n tel que $1/n \leq \delta(\varepsilon)$,

$$\left| F_{\gamma(z)} - \sum_{k=0}^{n-1} H(z, k/n) \frac{1}{n} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} |H(z, t) - H(z, k/n)| dt \leq \varepsilon$$

En posant

$$\frac{P}{Q} = \sum_{k=0}^{n-1} H(z, k/n) \frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2i\pi} \frac{f(\gamma(k/n))}{\gamma(k/n) - z} \gamma'(k/n) \frac{1}{n}$$

on obtient une fraction rationnelle qui approche F_γ sur K avec $Q(z) = \prod_{k=0}^{n-1} (\gamma(k/n) - z) \in \mathbb{C}[z]$. ■

Théorème 5.3: Runge - 2 - Rationnelle Edition

Soit $K \subseteq U$ un compact. Toute fonction $f \in \mathcal{O}(U)$ peut-être approchée uniformément sur K par des fractions rationnelles sans pôle sur K :

$$\forall f \in \mathcal{O}(U), \forall \varepsilon > 0, \exists P, Q \in \mathbb{C}[z] \text{ tels que } \max_{z \in K} \left| f(z) - \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \varepsilon$$

Démonstration. • Construction d'un contour de K . Soit $\alpha \in \left] 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right[$ et

$$\delta = \alpha d(K, \mathbb{C} \setminus U) > 0$$

Pour $k, l \in \mathbb{Z}$, nous notons le carré plein fermé de côté δ :

$$\overline{\Pi}_{k,l} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid k\delta \leq x \leq (k+1)\delta, l\delta \leq y \leq (l+1)\delta\}$$

et $\Pi_{k,l} = \overset{\circ}{\overline{\Pi}_{k,l}}$ le carré plein ouvert. Nous avons le pavage

$$\mathbb{C} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \bigcup_{l \in \mathbb{Z}} \overline{\Pi}_{k,l}$$

Nous notons $\overline{\Pi}_1, \dots, \overline{\Pi}_J$ la collection de tous les $\overline{\Pi}_{k,l}$ d'intersection non nulle avec K et $\gamma_1, \dots, \gamma_H$ les segments de longueur δ qui appartiennent au bord d'un unique $\overline{\Pi}_j$ sans appartenir à deux bords de deux carrés adjacents. Quitte à translater K et réduire δ , on peut supposer que K contient au moins un point à l'intérieur de chaque carré.

Pour tout j , il existe $z_j \in \Pi_j \cap K$. On a :

$$|z_j - w| \leq \sqrt{2}\delta \Rightarrow w \in \overline{\Pi}_j$$

Or, $\delta < \alpha d(K, \mathbb{C} \setminus U)$ donc

$$\sqrt{2}\delta < d(K, \mathbb{C} \setminus U)$$

Par conséquent, $\overline{\Pi}_j \subseteq \overline{D}(z_j, \sqrt{2}\delta) \subseteq U$ et

$$\bigcup_j \overline{\Pi}_j \subseteq U \text{ et } \bigcup_{1 \leq h \leq H} \gamma_h \subseteq U$$

De plus, pour tout $1 \leq h \leq H$, $\gamma_h \cap K = \emptyset$. Sinon, si $z \in \gamma_h \cap K$, il existe deux carrés adjacents tel que $\gamma_h = \overline{\Pi}_{k(h),l(h)} \cap \overline{\Pi}_{k'(h),l'(h)}$. Comme z appartient à chacun d'eux, les carrés $\overline{\Pi}_{k(h),l(h)}$ et $\overline{\Pi}_{k'(h),l'(h)}$ appartiennent tous deux à la collection des $\overline{\Pi}_i$. Donc γ_h est un bord commun à deux carrés de la collection ce qui est exclu.

- Pour tout $z \in K \setminus \bigcup_{j=1}^J \delta \Pi_j$, il existe un unique $j(z)$ avec $z \in \Pi_{j(z)}$. Pour tout $j' \neq j(z)$,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\delta \Pi_{j'}} \frac{f(w)}{w - z} dw = 0$$

et

$$f(z) = \sum_{j=1}^J \frac{1}{2i\pi} \int_{\delta\Pi_j} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

- Si $z \in K \setminus \bigcup_{j=1}^J \delta\Pi_j$, on a, par définitions des γ_h , les contributions des autres bords des $\delta\Pi_j$ s'annulent deux à deux :

$$f(z) = \sum_{j=1}^J \frac{1}{2i\pi} \int_{\delta\Pi_j} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{h=1}^H \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_h} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

Comme $\gamma_h \cap K = \emptyset$, les intégrales $\int_{\gamma_h} \frac{f(w)}{w-z} dw$ sont continues par rapport à $z \in K$. L'égalité précédente est donc encore satisfaite pour $z \in K \cap \bigcup_{j=1}^J \delta\Pi_j$.

D'après le lemme précédent 5.1, pour tout $1 \leq h \leq H$, il existe $P_h, Q_h \in \mathbb{C}[z]$, Q_h sans zéros dans K avec

$$\sup_{z \in K} \left| F_{\gamma_h}(z) - \frac{P_h(z)}{Q_h(z)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{H}$$

Posons alors $Q = \prod_{h=1}^H Q_h \in \mathbb{C}[z]$ et

$$P = Q \prod_{h=1}^H \frac{P_h}{Q_h} \in \mathbb{C}[z]$$

On obtient alors :

$$\left| f(z) - \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \varepsilon$$

■

Lemme 5.2: Approximation Polynomiale des Fractions Rationnelles

Si $K \subseteq \mathbb{C}$ compact a un complémentaire connexe, alors pour tout $z_0 \notin K$, la fonction rationnelle $\frac{1}{z-z_0}$ peut être approchée uniformément sur K par des polynômes de $\mathbb{C}[z]$.

Démonstration. • Comme K est compact, il est borné donc inclus dans un disque $D(0, R)$. Pour $z_1 \in \mathbb{C} \setminus D(0, R)$, on a :

$$\frac{1}{z-z_1} = -\frac{1}{z_1} \frac{1}{1-\frac{z}{z_1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{z^n}{z_1^{n+1}}$$

série uniformément convergente pour tout $z \in K$. Donc la fraction $\frac{1}{z-z_1}$ peut être approximée uniformément par des polynômes sur K . De même pour toute puissance.

- Comme $\mathbb{C} \setminus K$ est connexe de \mathbb{C} donc connexe par arcs, il existe un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus K$ avec $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma(1) = z_1$. L'image $\gamma([0, 1])$ est compacte disjointe de K donc $\rho = \frac{1}{2}d(\gamma([0, 1]), K) > 0$. Choisissons une subdivisions de $\gamma([0, 1])$ de pas au plus ρ . Pour toute paire de points $w, w' \in \gamma([0, 1])$ avec $|w - w'| \leq \rho$, pour $z \in K$, on a :

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-w'} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{w-w'}{z-w'} \right)^n$$

et cette somme est uniformément convergente car $\left| \frac{w-w'}{z-w'} \right| \leq 1/2$. Ainsi on a une approximation de $\frac{1}{z-w}$ par des polynômes en $\frac{1}{z-w'}$ par des polynômes en $\frac{1}{z-w'}$.

■

Théorème 5.4: Runge - 3 - Polynomial Edition

Soit $K \subseteq U$ compact de complémentaire connexe. Alors, les fonctions holomorphes dans U sont uniformément approximables sur K par des polynômes :

$$\forall f \in \mathcal{O}(U), \forall \varepsilon > 0, \exists P_\varepsilon \in \mathbb{C}[z] \text{ tel que } \max_{z \in K} |f(z) - P_\varepsilon(z)| \leq \varepsilon$$

Démonstration. Ceci découle du lemme 5.2 que l'on combine à la version rationnelle 5.3 du théorème de Runge ■

5.3 Théorème de Montel

Définition 5.1: Bornitude Uniforme

Une famille $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{O}(U)$ est uniformément bornée sur les compacts de U si pour tout $K \subseteq U$ compact, il existe $M_K \geq 0$ telle que

$$|f(z)| \leq M_K, z \in K, f \in \mathfrak{F}$$

Définition 5.2: Uniforme Équicontinuité

Une famille $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{O}(U)$ est uniformément équicontinue sur les compacts de U si pour tout $K \subseteq U$ compact, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(K, \varepsilon) > 0$ tel que

$$(z, w \in K \text{ avec } |z - w| \leq \delta) \implies |f(z) - f(w)| \leq \varepsilon, f \in \mathfrak{F}$$

Proposition 5.1: Exemples

1. Sur $\overline{D}(0, 1)$, la famille des (z^n) est uniformément bornée mais pas uniformément équicontinue. Elle l'est sur $D(0, 1)$.
2. Sur $[0, 1[$, la famille $(\sin(2\pi nx))$ est uniformément bornée par 1 mais n'est uniformément équicontinue sur aucun compact car les dérivées sont non bornées en n .

Définition 5.3: Normalité

Une famille $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{O}(U)$ est dite normale si pour toute suite de fonctions f_n , il existe une suite extraite uniformément convergente sur tout compact de U .

Définition 5.4: Exhaustivité

Une suite croissante de compacts (K_n) de U est exhaustive si tout compact de U est contenu dans un K_n .

Théorème 5.5: Suite Exhaustive

Pour tout ouvert U de \mathbb{C} , il existe une suite croissante de compacts exhaustive de réunion U .

Démonstration. Considérons la suite B_n des disques fermés contenus dans U dont les coordonnées du centre et le rayon sont rationnels. Ils forment un ensemble dénombrable. La suite des $K_i = \bigcup_{n=1}^i B_n$ convient ■

Théorème 5.6: Mantel

Soit $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{O}(U)$ une famille de fonctions uniformément bornées sur les compacts de U . Alors

1. \mathfrak{F} est uniformément équicontinue sur les compacts de U .
2. \mathfrak{F} est une famille normale.

Démonstration. 1. Soit K un compact de U , $r < \frac{1}{3}d(K, \mathbb{C} - U)$. Pour $w \in K$, la famille \mathfrak{F} est uniformément bornée sur $L = \{u \in U, d(u, K) \leq 2r\}$. Pour $z \in D(w, r)$ la formule de Cauchy donne :

$$f(z) - f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(w, 2r)} f(u) \left(\frac{1}{u-z} - \frac{1}{u-w} \right) du$$

Or, $|u-z| > r$ et

$$\left| \frac{1}{u-z} - \frac{1}{u-w} \right| = \frac{|z-w|}{|u-z|2r} \leq \frac{|z-w|}{2r^2}$$

Ainsi

$$|f(z) - f(w)| \leq \frac{1}{2\pi} M_L \frac{|z-w|}{2r^2} 2\pi 2r \propto |z-w|$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir convenablement $\delta < r$ de telle sorte qu'on a bien l'uniforme équicontinuité sur K .

2. Soit $r < \frac{1}{2}d(K, \mathbb{C} - U)$. On pose

$$K_r = \{z \in \mathbb{C}, d(z, K) \leq r\} \subseteq K_{2r} \subseteq U$$

Par hypothèses, $M_0 = \sup_{n \in \mathbb{N}, z \in K_{2r}} |f_n(z)| < +\infty$. Par l'inégalité de Cauchy,

$$M_1 = \sup_{n \in \mathbb{N}, z \in K_r} |f'_n(z)| \leq \frac{M_0}{r} < +\infty$$

Soient $z_1, z_2 \in K$. Si $d(z_1, z_2) \leq r$, alors $[z_1, z_2] \subseteq K_r$ et par théorème des accroissements finis

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| \leq M_1 d(z_1, z_2)$$

À l'inverse, si $d(z_1, z_2) \geq r$, on a :

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| \leq \frac{2M_0}{r} d(z_1, z_2)$$

Par théorème d'Ascoli, on peut extraire des $f_{n|_K}$ une suite uniformément convergente sur K . Pour $\nu \in \mathbb{N}^*$, on considère une suite croissante exhaustive de compacts (K_ν) . D'après ce qui précède, il existe une partie infinie $S_1 \subseteq \mathbb{N}$ telle que la suite $(f_n)_{n \in S_1}$ converge uniformément sur K_1 . Par récurrence sur ν , on construit une suite de parties infinies emboîtées $S_\nu \subseteq \dots \subseteq S_1 \subseteq \mathbb{N}$ telle que la sous-suite $(f_n)_{n \in S_\nu}$ converge uniformément sur K_ν . Par extraction diagonale, on construit une sous-suite $(f_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur tous les compacts K_ν . ■

5.4 Compacts de $\mathcal{O}(U)$

On munit $\mathcal{O}(U)$ de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. C'est une topologie invariante par translation dans laquelle les

$$V(K, \varepsilon) = \left\{ f \in \mathcal{O}(U) \mid \sup_{z \in K} |f(z)| < \varepsilon \right\}$$

pour K un compact de U et $\varepsilon > 0$ constituent un système de voisinage de 0. L'addition et l'homothétie sont continues pour cette topologie.

On définit de plus :

$$p_{K_n} : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}(U) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ f & \longmapsto & \sup_{z \in K_n} |f(z)| \end{array}$$

et

$$d(f, g) = \sum_{i \geq 1} 2^{-i} \min(1, p_{K_i}(f - g))$$

où les K_i forment une suite croissante exhaustive de compacts de U .

Lemme 5.3: Métrisabilité

La topologie de la convergence sur tout compact est métrisable par la distance d sur $\mathcal{O}(U)$.

Démonstration. • Soit K un compact. Soit $i \in \mathbb{N}$ tel que $K \subseteq K_i$. Alors, $d(f, 0) < 2^{-i}\varepsilon$ implique $p_{K_i}(f) < \varepsilon$. Donc : $B(0, 2^{-i}\varepsilon) \subseteq V(K_i, \varepsilon) \subseteq V(K, \varepsilon)$. Donc $V(K, \varepsilon)$ contient une boule centrée en 0 pour d .

- Soit $B(0, \varepsilon)$ une boule pour d . Soit $i \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-i} < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors, si $f \in V(K_i, \varepsilon/2)$

$$d(f, 0) \leq \sum_{j=1}^i 2^{-j} p_{K_j}(f) + \sum_{j=i+1}^{+\infty} 2^{-j} < \varepsilon/2 + 2^{-i} < \varepsilon$$

Donc $V(K_i, \varepsilon/2) \subseteq B(0, \varepsilon)$. ■

L'espace vectoriel $\mathcal{O}(U)$ localement convexe, métrisable et complet est un espace de Fréchet.

Théorème 5.7: Compacts de $\mathcal{O}(U)$

Les compacts de $\mathcal{O}(U)$ sont les fermés bornés.

Démonstration. • Soit $A \subseteq \mathcal{O}(U)$ une partie compacte. Comme $\mathcal{O}(U)$ est métrisable, il est séparé, et donc A est fermée. Soit $K \subseteq U$ compact. L'application p_K est continue sur $\mathcal{O}(U)$. Donc comme A est compacte, $p_K(A)$ est compacte donc bornée dans \mathbb{R} . Les applications $f \in A$ sont donc uniformément bornées sur K . Pour tout compact K de U , il existe donc $\varepsilon_A > 0$ tel que $A \subseteq V(K, \varepsilon_A)$. Ainsi pour tout $V(K, \varepsilon)$ d'un système fondamental de voisinages de 0, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ avec $A \subseteq V(K, \lambda\varepsilon)$. Donc A est bornée.

- Soit A une partie fermée bornée de $\mathcal{O}(U)$. Comme A est bornée, pour tout K compact de U , les applications $f \in A$ sont uniformément bornées sur K . Soit (f_n) une suite d'éléments de A . Par théorème de Mantel 5.6, cette suite est uniformément bornée donc admet une sous-suite convergente uniformément sur tout compact de U de limite $f \in \mathcal{O}(U)$. Comme A est fermée, $f \in A$ donc, A est séquentiellement compact pour une topologie métrisable, donc par théorème de Bolzano-Weierstrass est compact. ■

6 Aparté Réel

6.1 Méthode de Laplace

Théorème 6.1: Méthode de Laplace Réelle

Soient g, h deux fonctions réelles continues par morceaux dans $]0, +\infty[$ vérifiant

1. $\int_0^{+\infty} |g(x)| e^{h(x)} dx < +\infty$
2. Il existe $\delta_0 > 0$ tel que $\forall \delta < \delta_0$ et tout $x \geq \delta$, on a $h(x) \leq h(\delta)$.
3. Au voisinage de 0, on a les développements asymptotiques

$$g(x) \sim Ax^\alpha, h(x) = a - cx^\beta + o(x^\beta)$$

où $A \neq 0, \alpha > -1, \beta > 0, c > 0$. Alors,

$$I(t) \sim \frac{A}{\beta} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) e^{\alpha t} (ct)^{-(\alpha+1)/\beta}$$

Démonstration. Calcul. ■

Corollaire 6.1

Soit $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, des fonctions de classes \mathcal{C}^2 telles que

- $\int_{\mathbb{R}} |g(x)| e^{h(x)} dx$ converge
- h' ne change de signe qu'en un seul point $c \in \mathbb{R}$ où h atteint un maximum
- $g(c) \neq 0$ et $h''(c) < 0$

Alors, pour t au voisinage de $+\infty$,

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) e^{th(x)} dx \sim x \rightarrow +\infty \sqrt{pi} g(c) e^{th(c)} \sqrt{\frac{2}{-th''(c)}}$$

6.2 Comportement Asymptotique d'une Intégrale

Théorème 6.2: Laplace Complexe

Supposons que

$$\int_0^{+\infty} |g(\gamma(s))| e^{\Re h(\gamma(s))} |\gamma'(s)| ds$$

est convergente. Pour t au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\int_{\gamma} g(z) e^{th(z)} dz \sim \frac{A}{m} \Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right) (\rho t)^{-\frac{n+1}{m}} e^{at+(n+1)i\omega_k}$$

Démonstration. Calcul. Encore. ■

6.3 Fonctions Harmoniques

Ici, on identifie \mathbb{C} à \mathbb{R}^2

Définition 6.1: Fonctions Harmonique

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 . Le *Laplacien* de f est

$$\Delta f = \partial_{xx} f'' + \partial_{yy} f''$$

La fonction f est dite *harmonique* si $\Delta f = 0$.

Proposition 6.1: Harmonicité et Holomorphicité

Si U est simplement connexe, toute fonction harmonique sur U est la partie réelle d'une fonction holomorphe, unique à une constante imaginaire près.

Démonstration. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique. Alors $g = \partial_y f + i \partial_x f$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur U . La fonction g est holomorphe sur U car $g = P + iQ$ avec $\partial_x P = \partial_y Q = \partial_{xy} f$ et $\partial_y P = \partial_{yy} f = -\partial_{xx} f = -\partial_x Q$. Notons $G = A + iB$ une primitive de g sur U . Ainsi $G'(z) = \partial_x A + i \partial_x B = \partial_y B - i \partial_y A = g(z) = \partial_y f + i \partial_x f$. Les équations de Cauchy-Riemann montrent alors que $\varphi = f - iA$ est holomorphe. Si $f = \Re(\varphi) = \Re(\psi)$ avec $\varphi, \psi \in \mathcal{O}(U)$, alors $\varphi - \psi = c$ est constante sur U avec $\Re(c) = 0$. ■

Corollaire 6.2: Harmonicité Locale

Toute fonction harmonique est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe.

Corollaire 6.3: Classe Harmonique

Toute fonction harmonique est de classe \mathcal{C}^∞ .

Corollaire 6.4: Composition Harmonique

Soit $\varphi : U \rightarrow V$ holomorphe et $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ harmonique, alors $f \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ est harmonique.

Corollaire 6.5: Harmonicité sur l'Intérieur

Si deux fonctions harmoniques sur U connexe coïncident sur un sous-ensemble $V \subseteq U$ d'intérieur non vide, alors elles sont égales sur U .

Démonstration. Soit $u = f_1 - f_2$ la différence de deux fonctions satisfaisant les hypothèses du corollaire et

$$F = \{z \in U, u(z) = 0\}$$

Comme u est continue, F est fermé et d'intérieur non vide. Montrons que $F = \overset{\circ}{F}$. Soit $z' \in \partial F$ et (z_n) une suite à termes dans $\overset{\circ}{F}$ convergeant vers z' . Comme $z' \in U$ ouvert, il existe $r' > 0$ avec $D(z', r') \subseteq U$ et quitte à supprimer les premiers termes de la suite, $z_n \in D(z', r')$ pour $n \in \mathbb{N}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $r_n > 0$ avec $D(z_n, r_n) \subseteq \overset{\circ}{F} \cap D(z', r')$.

Par 6.1, $u = \Re f$ avec $f \in \mathcal{O}(D(z', r'))$. Donc f constante sur tout $D(z_n, r_n)$, f est constante sur $D(z', r')$, $u = 0$ sur $D(z', r')$ et enfin $z' \in \overset{\circ}{F}$.

L'ensemble F est un ouvert fermé non vide de U connexe donc $F = U$ et $u = 0$ sur U . ■

Définition 6.2: Moyenne

La fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ vérifie la propriété de la moyenne si pour tout $\overline{D(a, r)} \subseteq U$,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

Proposition 6.2: Moyenne d'une Fonction Harmonique

Si f est harmonique, alors elle vérifie la propriété de la moyenne.

Démonstration. D'après la proposition 6.1, sur l'ouvert simplement connexe $D(a, r + \varepsilon)$, $f = \Re \varphi$ avec $\varphi : D(a, r + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. D'après la formule de Cauchy

$$\varphi(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,r)} \frac{\varphi(u)}{u-a} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a + re^{i\theta}) d\theta$$

En passant à la partie réelle des deux côtés, on a le résultat. ■

Théorème 6.3: Harmonicité et Moyenne

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue qui vérifie la propriété de la moyenne. Alors f est harmonique.

Démonstration. Si f est de classe \mathcal{C}^∞ , écrivons son développement de Taylor au point a :

$$\begin{aligned} f(a + re^{i\theta}) &= f(a) + r \cos(\theta) \partial_x f(a) + r \sin \theta \partial_y f(a) + \\ &+ \frac{1}{2} (r^2 \cos^2(\theta) \partial_{x,x} f(a) + 2r^2 \cos \theta \sin \theta \partial_{x,y} f(a) + r^2 \sin^2 \theta \partial_{y,y} f(a)) + \varepsilon(r, \theta) \end{aligned}$$

avec $\varepsilon(r, \theta) = \mathcal{O}(r^3)$ pour $0 < r \leq R$ si $\overline{D(a, R)} \subset U$. En prenant la moyenne sur $\partial D(a, r)$, on a :

$$f(a) = f(a) + \frac{r^2}{4} (\partial_{x,x} f(a) + \partial_{y,y} f(a)) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon(r, \theta) d\theta$$

Donc $\Delta f = \frac{-2}{r^2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon(r, \theta) d\theta$ donc $\Delta f = 0$ et f est harmonique.

Pour conclure, il suffit donc de montrer que la propriété de la moyenne implique la classe \mathcal{C}^∞ . Notons

$$U_\varepsilon = \left\{ z \in U \mid d(z, U^c) > \sqrt{\varepsilon} \right\}$$

Soit $\psi_\varepsilon : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ de support inclus dans $[0, \varepsilon]$ et $\int_0^{+\infty} \psi_\varepsilon = 1$. Enfin, pour $z \in U_\varepsilon$, posons

$$F(z) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(u) \psi_\varepsilon(|u-z|^2) du$$

où du désigne la mesure de Lebesgue. D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, la fonction F est de classe \mathcal{C}^∞ sur U et

$$F(z) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(u-z) \psi_\varepsilon(|u|^2) du = \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \psi_\varepsilon(r^2) \left(\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta \right) r dr$$

D'après la propriété de la moyenne,

$$F(z) = 2\pi f(z) \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \psi_\varepsilon(r^2) r dr = \pi f(z)$$

Donc f est de classe \mathcal{C}^∞ comme F . ■

Corollaire 6.6: Fermeture des Fonctions Harmoniques

L'ensemble des fonctions harmoniques sur U est un fermé de $\mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact inclus dans U .

Théorème 6.4: Principe du Maximum

Soit $U \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue satisfaisant la propriété de la moyenne. Si $|f|$ admet un maximum local en $a \in U$, alors f est constante sur la composante connexe de U contenant a .

Démonstration. Si $f(a) = 0$, le résultat est clair. Supposons $f(a) \neq 0$. Quitte à multiplier f par une constante complexe, nous pouvons supposer $f(a) \in \mathbb{R}_+^*$. Choisissons $r \geq 0$ assez petit, tel que $M(r) = \sup_{\theta} |f(a + re^{i\theta})| \leq |f(a)|$. D'après la propriété de la moyenne,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

donc $f(a) = M(r)$. Ainsi, $g(z) = \Re(f(a) - f(z)) \geq 0$ pour $|z - a| = r$ et $g(z) = 0$ si et seulement si $f(z) = f(a)$. Or, la valeur moyenne de $g(z)$ sur le cercle de centre a et de rayon r est nulle. Comme g est continue positive, $g = 0$ sur ce cercle et donc $f = f(a)$ pour $|z - a| = r$. La fonction harmonique f coïncide avec une fonction constante à $f(a)$ sur $D(a, r)$. D'après le corollaire 6.5, $f = f(a)$ sur la composante connexe de U contenant a . ■

Corollaire 6.7: Bornitude et Constance

Supposons U connexe borné. Soit $f : \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$ continue possédant la propriété de la moyenne dans U . Soit $M = \sup_{z \in \partial U} |f(z)|$. Alors,

1. $|f(z)| \leq M, z \in U$
2. Si $|f(a)| = M$ en $a \in U$ alors f est constante.

Démonstration. Comme $z \mapsto |f(z)|$ est continue sur \bar{U} compact, il existe $a \in \bar{U}$ avec $|f(a)| = \sup_{z \in \bar{U}} |f(z)| = M'$. Si $a \in U$, par le principe du maximum, f est constante sur un ouvert fermé non vide de U connexe donc f est constante sur U . Comme f est continue, f est constante sur \bar{U} . Si $|f(a)| \neq M'$ pour tout $a \in U$, alors $M = M'$ et le corollaire suit. ■

6.4 Formule de Poisson

Proposition 6.3: Formule de Poisson

Soit $g : U \rightarrow \mathbb{R}$, harmonique et $\overline{D(a, R)} \subseteq U$. Alors, pour tout $z \in D(a, R)$,

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z - a|^2}{|a + Re^{i\theta} - z|^2} g(a + Re^{i\theta}) d\theta$$

Démonstration. Quitte à traduire, il suffit de traiter le cas $a = 0$. D'après le corollaire 6.1, dans le disque $D(0, R)$, g est la partie réelle d'une fonction holomorphe $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ uniquement déterminée par la condition $f(0) \in \mathbb{R}$.

$$g(re^{i\theta}) = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} r^n (a_n e^{in\theta} + \overline{a_n} e^{-in\theta})$$

la convergence étant normale par rapport à $\theta \in [0, 2\pi]$. Les coefficients sont donnés par les formules intégrales :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(Re^{i\theta}) d\theta \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(Re^{i\theta}) d\theta}{(Re^{i\theta})^n}, n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Ainsi, par convergence normale, nous pouvons échanger les signes somme et intégrale et

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(Re^{i\theta}) \left(1 + 2 \sum_{n \geq 1} \left(\frac{z}{Re^{i\theta}} \right)^n \right) d\theta$$

Or, $1 + 2 \sum_{n \geq 1} \left(\frac{z}{Re^{i\theta}} \right)^n = \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z}$, d'où, pour $|z| < R$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(Re^{i\theta}) \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} d\theta$$

D'où le résultat en prenant la partie réelle des deux membres de l'égalité. ■

Corollaire 6.8: Problème de Dirichlet Harmonique

Soit $u : \partial D(a, R) \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors, il existe une unique fonction continue $f : \overline{D(a, R)} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f|_{\partial D(a, R)} = u$ et f est harmonique sur $D(a, R)$.

Proposition 6.4: Inégalité d'Harnack

Soit $u : \overline{D(a, R)} \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue harmonique dans $D(a, R)$. Si, $|z - a| = r$, alors :

$$u(a) \frac{R-r}{R+r} \leq u(z) \leq u(a) \frac{R+r}{R-r}$$

Démonstration. Les deux inégalités sont analogues. Montrons celle de droite :

$$\begin{aligned} u(a + re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - t) + r^2} u(a + Re^{it}) dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R+r}{R-r} u(a + Re^{it}) dt = u(a) \frac{R+r}{R-r} \end{aligned}$$

Théorème 6.5: Harnack

Soit u_n une suite croissante de fonctions harmoniques sur U connexe. Alors, on a l'une des deux propositions suivantes

1. u_n converge uniformément sur tout compact de U vers u harmonique
2. u_n diverge vers $+\infty$.

Démonstration. Quitte à changer u_n en $u_n - u_0$, nous pouvons supposer que (u_n) est une suite de fonctions positives. Pour tout $z \in U$, la suite $u_n(z)$ est croissante donc convergente vers $u(z)$ ou divergente vers $+\infty$. Notons

$$A = \{z \in U, u_n(z) \rightarrow +\infty\}, B = \{z \in U, u_n(z) \rightarrow u(z)\}$$

Soit $a \in U$ et $\overline{D(a, R)} \subseteq U$. Pour $z \in \overline{D(a, R/2)}$, $\frac{1}{3}u_n(a) \leq u_n(z) \leq 3u_n(a)$. Donc A et B sont ouverts, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = U$ connexe donc $A = U$ ou $B = U$.

Si $a \in B$, soit $\varepsilon > 0$, il existe N tel que

$$0 \leq u_n(a) - u_m(a) < \frac{\varepsilon}{3}, n \geq m \geq N$$

Donc,

$$0 \leq u(z) - u_m(z) \leq \varepsilon, m \geq N, z \in D(a, R/2)$$

donc la convergence est uniforme sur tout compact de U .

Ainsi, u est harmonique par théorème de dérivation des limites. ■

6.5 Couronnes du Plan

Lemme 6.1: Biholomorphisme de Couronnes

Soit $R_1, R_2 > 1$ et $\varphi : A_1 \rightarrow A_2$ un biholomorphisme entre les deux couronnes

$$A_1 = \{z \in \mathbb{C} | 1 < |z| < R_1\} \text{ et } A_2 = \{z \in \mathbb{C} | 1 < |z| < R_2\}$$

Pour toutes suites ω_j, ω'_j de A_1 qui convergent respectivement vers $\omega, \omega' \in \partial A_1$, avec $|\omega| = 1$ et $|\omega'| = R_1$, on a l'une des deux propositions suivantes :

1. $|\varphi(\omega_j)| \rightarrow 1$ et $|\varphi(\omega'_j)| \rightarrow R_2$
2. $|\varphi(\omega_j)| \rightarrow R_2$ et $|\varphi(\omega'_j)| \rightarrow 1$

Théorème 6.6: Biholomorphisme de Couronnes

Soit $R_1, R_2 > 1$. Les couronnes $A_1 = C(0, 1, R_1)$ et $A_2 = C(0, 1, R_2)$ sont biholomorphes si et seulement si $R_1 = R_2$.

Deuxième partie

Fonctions Méromorphes

7 Théorème des Résidus

7.1 Développement en Séries de Laurent

Définition 7.1: Série de Laurent

Une série de Laurent est une série de la forme

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (z - a)^n$$

Pour qu'elle ait un sens, il faut que $\sum_{n \geq 0} a_n (z - a)^n$ ait un rayon de convergence $R_2 > 0$ et que $\sum_{n \leq 0} a_n (z - a)^n$ ait un rayon de convergence $\frac{1}{R_1}$ où on a

$$0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$$

Théorème 7.1: Séries de Laurent et Fonctions Holomorphes

Si $f \in \mathcal{O}(U)$, si $V = \{z \mid R_1 < |z - a| < R_2\}$ est une couronne incluse dans U , $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - a)^n$ sur V , les coefficients a_n étant uniques.

Démonstration. **Unicité** Pour $f = 0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - a)^n$. Mais, si $R_1 < r < R_2$

$$\int_{\partial D(0, r)} z^n dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi & n = -1 \end{cases}$$

Comme de plus :

$$\int_{\partial D(0, r)} f(\omega) \omega^{-p-1} d\omega = a_p 2\pi = 0$$

On a bien, pour tout p , $a_p = 0$.

Donc on a bien l'unicité du développement en prenant la différence des deux développements.

Existence Pour $R_1 < r_1 < |z - a| < r_2 < R_2$, on a :

$$2i\pi f(z) = \int_{\partial D(a, r_2)} \frac{f(u)}{u - z} du - \int_{\partial D(a, r_1)} \frac{f(u)}{u - z} du$$

- Sur $\partial D(a, r_2)$,

$$\frac{1}{u - z} = \frac{1}{u - a - (z - a)} = \sum_{n \geq 0} \frac{(z - a)^n}{(u - a)^{n+1}}$$

$$\int_{\partial D(a, r_2)} \frac{f(z)}{u - z} dz = \sum_{n \geq 0} (z - a)^n \int_{\partial D(a, r_2)} \frac{f(u)}{(u - a)^{n+1}} du$$

- De même, sur $\partial D(a, r_1)$, on a :

$$\begin{aligned} - \int_{\partial D(a, r_1)} \frac{f(u)}{u - z} du &= - \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(z - a)^{n+1}} \int_{\partial D(a, r_1)} f(u) (u - a)^n du \\ &= - \sum_{n \leq -1} (z - a)^n \int_{\partial D(a, r_1)} \frac{f(u)}{(u - a)^{n+1}} du \end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \left(\sum_{n \geq 0} (z - a)^n \int_{\partial D(a, r_2)} \frac{f(u)}{(u - a)^{n+1}} du - \sum_{n \leq -1} (z - a)^n \int_{\partial D(a, r_1)} \frac{f(u)}{(u - a)^{n+1}} du \right)$$

■

Définition 7.2: Singularité

Soit $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Le point a est dit singularité de f . Il existe $r > 0$ tel que $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - a)^n$ pour $0 < |z| < r$.

1. Si $a_n = 0, n < 0$, la singularité en a est dite *singularité apparente* et f se prolonge en une fonction holomorphe sur U .
2. S'il existe $k < 0$ tel que $a_n = 0, n < k$, le point a est dit *pôle* d'ordre k ou *singularité isolée* et la fonction $(z - a)^k f(z)$ est holomorphe sur U .
3. Si $a_n \neq 0$ pour une infinité de $n < 0$, alors, la singularité en a est dite *singularité essentielle*.

7.2 Théorème des Résidus

Définition 7.3: Résidu d'une fonction

Soit $f : \{z | R_1 < |z - a| < R_2\} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Le résidu de f au point a est le coefficient a_{-1} de son développement de Laurent

$$\text{Res}(f, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(u) du$$

avec $\gamma = \partial D(a, r)$ pour $R_1 < r < R_2$.

Proposition 7.1: Exemple Très Utile

1. Si $f(z) = \frac{f_1(z)}{(z-a)^m}$ où $f_1 \in \mathcal{O}(V_a)$, $f_1(a) \neq 0$, alors $\text{Res}(f, a)$ est le coefficient $(z-a)^{m-1}$ du développement en série de Taylor de f_1 , $\text{Res}(f, a) = \frac{f_1^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$. Pour un pôle simple, c'est simplement $f_1'(a)$.
Par exemple, $f(z) = \frac{z}{(z^2+1)^2}$ s'écrit $\frac{f_1(z)}{(z-i)^2}$ avec $f_1(z) = \frac{z}{(z+i)^2}$. On a donc $\text{Res}(f, i) = f_1'(i) = 0$.
2. Si $f = \frac{g}{h}$, avec $g(a) \neq 0$ et h a une racine simple en a , alors $\text{Res}(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}$.

Théorème 7.2: des Résidus

Soit U un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} , $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_i \in U$ n points distincts de U . Soit f holomorphe sur $U \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ et γ un lacet de U évitant les a_i . Alors,

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = 2i\pi \sum_{i=1}^n \text{Res}(f, a_i) j(a_i, \gamma)$$

Démonstration. La fonction f admet un développement en série de Laurent dans un voisinage de chacun des points a_k : $f(z) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l^{(k)} (z - a_k)^l$. Posons

$$u_k(z) = \sum_{l=1}^{\infty} b_{-l}^{(k)} \frac{1}{(z - a_k)^l}, \quad 1 \leq k \leq n \text{ et } g(z) = f(z) - u_1(z) - \dots - u_n(z)$$

La fonction g est holomorphe sur $U \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ et les a_i sont des singularités apparentes de g . En effet, si $D(a_k, r) \subseteq U \setminus \{a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n\}$, sur $D(a_k, r) \setminus \{a_k\}$:

$$g(z) = (f(z) - u_k(z)) - \sum_{j \neq k} u_j(z)$$

est prolongeable en une fonction holomorphe sur $D(a_k, r)$, donc g est prolongeable en une fonction holomorphe sur U . Comme U est simplement connexe, le théorème de Cauchy 2.1 sur le lacet γ de U implique

$$\int_{\gamma} g(z) \, dz = 0$$

Mais, pour $1 \leq k \leq n$, $\int_{\gamma} u_k(z) \, dz = 2i\pi \text{Res}(u_k, a_k) j(a_k, \gamma)$. D'où

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = 2i\pi \sum_{i=1}^n \text{Res}(f, a_i) j(a_i, \gamma)$$

■

Proposition 7.2: Quelques Applications - 1

Intégrale Trigonométriques Soit $a \in]1, +\infty[$,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t}$$

En posant $z = e^{it}$, on a :

$$I = \int_{|z|=1} \frac{2 dz}{z^2 - 1 + 2aiz}$$

Les pôles sont en $z_{\pm} = -ai \pm i\sqrt{a^2 - 1}$ et seul $|z_+| < 1$. Ainsi, $j(z_+, \partial D(0, 1)) = 1$ et $j(z_-, \partial D(0, 1)) = 0$. Par le théorème des résidus 7.2, on obtient

$$I = 2i\pi \operatorname{Res}(f, z_+) = 2i\pi \left(\frac{2}{(z^2 - 1 + 2aiz)'} \right) (z_+) = 2i\pi \frac{2}{2z_+ + 2ai} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

Intégrale d'une Fonction Rationnelle Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg Q \geq \deg P + 2$ et Q sans racine réelle. Soit

$$f = \frac{P}{Q} \text{ et } I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

Les hypothèses garantissent que I converge et

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

Considérons la fonction de la variable complexe f et le contour $\gamma_R = [-R, R] \cup S_R$ où S_R désigne le demi-cercle de centre 0 de rayon R sur le demi-plan $\Im z \geq 0$ parcouru dans le sens trigonométrique. Par théorème des Résidus 7.2, on a :

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{S_R} f(z) dz = 2i\pi \sum_{a_j, |a_j| < R, \Im(a_j) > 0} \operatorname{Res}(f, a_j)$$

où les a_j sont les racines de Q . Posons

$$\alpha = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^2 |f(x)|$$

Quand $R \rightarrow \infty$, $\left| \int_{S_R} f dz \right| \leq \pi R \frac{\alpha+1}{R^2}$ tend vers 0. Donc,

$$I = 2i\pi \sum_{a_j, \Im a_j > 0} \operatorname{Res} \left(\frac{P}{Q}, a_j \right)$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} &= 2i\pi \left(\operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^4 + 1}, e^{i\pi/4} \right) + \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^4 + 1}, e^{3i\pi/4} \right) \right) \\ &= 2i\pi \left(e^{-3i\pi/4}/4 + e^{-i\pi/4} \right) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Proposition 7.3: Quelques Applications - 2

Intégrales de Fourier On calcule la transformée de Fourier pour f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ sans singularité sur l'axe réel avec $\lim_{|z| \rightarrow \infty, \Im(z) \geq 0} f(z) = 0$ et telle que l'intégrale soit absolument convergente.

On considère γ_R comme pour l'intégrale d'une fonction rationnelle. On montre de même que

$$\int_{S_R} e^{iz} f(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

On obtient alors $I = 2i\pi \sum_{a_j, \Im(a_j) > 0} \text{Res}(f(z) e^{iz}, a_j)$.

Intégrale Logarithmique On calcule

$$I = \int_0^{+\infty} f(x) \log(x) dx$$

où $f \in \mathbb{R}(X)$ de degré ≤ -2 . On introduit le contour $\gamma_{r,R} = C_r \cup L_- \cup C_R \cup L_+$ où C_r, C_R sont les cercles de centre 0 et de rayon r (resp. R) privés d'un petit arc de cercle pour éviter le demi arc réel positif. Les notations L_- et L_+ désignent

$$L_+ = \{z = t + i\varepsilon \mid r \leq t \leq R\} \text{ et } L_- = \text{conj}(L_+)$$

pour ε que l'on fait tendre vers 0. En calculant avec le théorème des résidus quand $r \rightarrow 0$ et $R \rightarrow \infty$, on trouve :

$$\int_0^{+\infty} \ln(x) f(x) dx = -\frac{1}{2} \sum_a \text{Res}\left((\log z - i\pi)^2 f(z), a\right)$$

où la somme porte sur les zéros de Q .

Transformation de Mellin On calcule, pour $\alpha \in]0, 1[$ l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{F(x)}{x^\alpha} dx$$

On prolonge x^α par la fonction $z^\alpha = \exp(\alpha \log(z))$ où $\log(\rho e^{it}) = \log \rho + it$ pour $t \in]0, 2\pi[$. On reprend alors le contour utilisé pour les intégrales logarithmiques. On obtient alors

$$I(1 - e^{-2i\pi\alpha}) = 2i\pi \sum_a \text{Res}\left(\frac{F(z)}{z^\alpha}, a\right)$$

pour a les singularités de F .

7.3 Résidus à l'Infini

Définition 7.4: Singularité Isolée

La fonction holomorphe $f : \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq R\} \rightarrow \mathbb{C}$ admet une singularité isolée en ∞ si la fonction

$$g : \begin{array}{ccc} D(0, \frac{1}{R}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f(\frac{1}{z}) \end{array}$$

admet 0 comme singularité isolée.

Définition 7.5: Résidu à l'Infini

Soit f holomorphe admettant une singularité isolée en ∞ . Le résidu à l'infini de f est défini par

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=\rho} f \, dz, \rho > R$$

Lemme 7.1: Résidu de l'Inverse

Soit f holomorphe admettant une singularité isolée en ∞ et soit $g(z) = f(1/z)$. Alors

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \operatorname{Res}\left(-g(\omega) \frac{1}{\omega^2}, 0\right).$$

Démonstration. Pour $\rho > R$, on a :

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=\rho} f \, dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\omega|=\frac{1}{\rho}} \frac{-g(\omega)}{\omega^2} \, d\omega = \operatorname{Res}\left(g(\omega) \frac{1}{\omega^2}, 0\right)$$

■

Corollaire 7.1: Singularité Isolées

Si f n'a que des singularités isolées en $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et éventuellement en ∞ , alors

$$\sum_{a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}} \operatorname{Res}(f, a) = 0$$

Démonstration. Soit R tel que $R \geq |a_i|$. On a :

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=R} f \, dz = -\sum_{j=1}^n \operatorname{Res}(f, a_j)$$

D'où le résultat.

■

8 Singularités

8.1 Étude Locale

Théorème 8.1: du Prolongement de Riemann

Soit $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Si f est bornée au voisinage de a alors a est une singularité apparente.

Démonstration. Les coefficients de Laurent vérifient les inégalités de Cauchy :

$$|a_n| \leq \frac{\sup_{\partial D(a,r)} |f(z)|}{r^n}$$

Donc pour $n < 0$, si f est bornée au voisinage de a en faisant tendre r vers 0, nous obtenons $a_n = 0, n < 0$.

■

Théorème 8.2: de Weierstrass

Soit U ouvert, $a \in U$, f holomorphe sur $U \setminus \{a\}$ avec a une singularité essentielle de f . Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $f(\{z | 0 < |z - a| < \varepsilon\})$ est dense dans \mathbb{C} .

Démonstration. Raisonnons par l'absurde en supposant

$$\exists b \in \mathbb{C}, r > 0, f(\{z \mid 0 < |z - a| < \varepsilon\}) \cap D(b, r) = \emptyset$$

Alors la fonction $g : D(a, \varepsilon) \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ qui à z associe $\frac{1}{f(z)-b}$ est holomorphe bornée au voisinage de a donc admet un prolongement holomorphe sur $D(a, \varepsilon)$ et un développement de la forme $g(z) = \sum_{n \geq 0} b_n (z - a)^n$. Notons b_k le premier coefficient non nul de g . On a :

$$f(z) = b + \frac{1}{g(z)} = b + \frac{1}{b_k(z - a)^k \left(1 + \sum_{n \geq k+1} \frac{b_n}{b_k} (z - a)^{n-k}\right)}$$

Donc f admet un développement de Laurent avec un pôle d'ordre k en a , ce qui est absurde. ■

8.2 Grand Théorème de Picard