La syntaxe et son importance

November 2023

1 Introduction

Ce document a été rédigé par un étudiant de L2 mathématiques au mois de Novembre, aussi n'a t-il aucune valeur académique ou pédagogique avérée. Il s'adresse à tous ceux qui sont intéressés par ce sujet, et en particulier aux non-mathématiciens étrangers aux concepts évoqués ici, mais les parties 2 et 3 sont plus faciles à comprendre pour un étudiant qui connait un peu les objets dont il est question, même si leur définition est rappelée. Dans mon (trop) court voyage au pays de l'informatique théorique, la leçon la plus importante que j'ai l'impression d'avoir compris est l'importance de la syntaxe. On peut facilement avoir l'impression, en mathématiques, qu'on manipule des idées, des intuitions, puis qu'on les formalise pour obtenir un résultat mathématique. Cependant, on oublie que tout ce qui se passe sur une copie (et idéalement, dans une boîte crânienne) n'est qu'une manipulation de symboles, en suivant des règles très précises. C'est une idée très déconcertante, quand on y pense. Toutes ces fonctions qu'on a l'impression de visualiser, ces groupes qu'on a l'impression de comprendre, tout ça n'est théoriquement qu'un empilement de symboles, qui interragissent entre eux de façon parfois étonnante. En premier lieu, nous expliquerons la différence entre syntaxe et sémantique (cette définition sera assez informelle, proche du sens usuel), puis nous donnerons trois exemples (par difficulté croissante de compréhension) qui illustrent la syntaxe qui se tapit derrière le sens des objets qu'on manipule. Le premier portera sur l'addition des entiers naturels, le second portera sur les groupes, et le troisième sera une introduction au λ-calcul, mets de choix pour les amateurs de beauté syntaxique.

2 La syntaxe et la sémantique

D'après CNTRL, la syntaxe c'est l'"Arrangement des mots et construction des propositions dans la phrase selon les règles de la grammaire." Il s'agit d'une définition qui convient pour le langage usuel, le français. Cependant, il existe une flagrante analogie entre ce qu'on dit en français et ce qu'on dit en mathématiques. D'ailleurs, la plupart des résultats mathématiques peuvent se dire en français, et en modélisant bien les problèmes décrits par des phrases en français on peut très souvent les décrire mathématiquement. Quand on était petit, on se demandait si l'on "avait le droit" de faire quelque chose. "Est-ce qu'on a le droit de passer à l'inverse dans une égalité ?" Oui, pour des membres non nuls. "Est-ce qu'on a le droit d'inverser dans une inégalité ?" Non. Cette idée d'avoir le "droit" retranscrit bien l'idée de syntaxe : depuis un résultat, on a besoin d'avoir une règle précise pour arriver à un autre résultats. Et c'est de cette façon qu'on construit toute la théorie : on part de ces règles "originelles" (qu'on appelle axiomes), puis on en construit de nouvelles (qu'on appelle lemme, théorème, résultat, identité, j'en oublie sûrement). C'est ce qui se passe aussi bien lorsqu'on écrit 1+1=2, que lorsqu'on démontre le théorème de pythagore. Toujours d'après CNTRL (cette fois ci j'ai choisi la définition la plus proche possible du sens usuel), la sémantique est l'"Étude d'une langue ou des langues considérées du point de vue de la signification; théorie tentant de rendre compte des structures et des phénomènes de la signification dans une langue ou dans le langage". C'est donner du sens aux mots, étudier leur signification. Par exemple, un isomorphisme entre deux structures algébriques est une application bijective qui préserve leur structure, mais nous l'interprétons comme une preuve de similitude : les deux structures sont en fait deux représentations d'un même objet, c'est le sens que nous donnons à l'isomorphisme. Souvent, on manipule des objets très basiques par leur sémantique, bien avant de les définir syntaxiquement. Par exemple, au lycée on manipule des entiers naturels depuis plus de 10 ans, mais très peu de lycéens peuvent donner une définition formelle, syntaxique, de ces derniers. C'est normal, bien sûr : nous sommes des humains et non des machines, nous manipulons bien mieux les "idées", le "sens", que des objets formels (à mon avis, ça s'explique assez facilement d'ailleurs. Une machine formelle aurait eu beaucoup de mal à traverser le processus évolutif par lequel l'espèce humaine passe depuis 300 000 ans).

3 Les entiers naturels

Intuitivement, les entiers naturels sont les nombres que l'on pourrait compter sur nos doigts si l'on avait une infinité de mains. Cependant, lorsqu'on définit les entiers naturels par récurrence, on adopte la définition suivante : "Un entier naturel est soit 0, soit le successeur d'un entier naturel". On peut écrire cette définition de façon formelle via la "BNF" (Forme de Backus-Naur) suivante : $n ::= 0|Sn'$. Cette écriture au premier abord un peu barbare a des fondations théoriques parfaitement claires, mais un peu trop longues pour ce document. Le lecteur intéressé pourra consulter la page wikipedia, voire un cours sur l'induction, mais nous allons décortiquer ici brièvement le sens qu'on donne à cette notation. Elle décrit l'ensemble des entiers naturels par n, la barre indique une disjonction : n est soit 0 soit S n'. On considère que n' est un entier naturel, et que S n' est son successeur. Voilà qui colle bien à notre définition par récurrence : un entier naturel n est soit 0, soit le successeur d'un autre entier naturel n'. Alors, le nombre 1 est simplement un raccourci pour S 0, 2 est un raccourci pour S (S 0), etc. Maintenant qu'on a des entiers naturels, on peut essayer de construire l'addition. L'addition est techniquement une fonction. Ce mot a différentes définitions (la troisième partie de ce document en parle un peu), mais ici on considère une fonction comme un processus qu'on peut suivre à partir d'un ou plusieurs arguments pour obtenir un résultat. Notons que cette définition ne garantit pas que le processus peut être suivi en un temps fini (ça, c'est une fonction calculable), ni n'inclut des considérations mathématiques usuelles (par exemple une fonction peut donner deux résultat différent sur un même élément. On peut dire que la fonction qui à une vache associe le résultat d'un dé qu'on aura lancé peut donner les résultats 1 et 3 sur la même vache...). Elle est donc assez légère. On définit la fonction addition suivante :

```
addition (a : entier naturel) (b : entier naturel) :
        si a = 0, b
        si a = S a', addition a' (S b)
```

Pour se convaincre que cette définition est correcte, le lecteur pourra essayer de faire des additions simples en se collant à cette définition, par exemple 0 + 3, 1+1, ou pour les plus téméraires 5 + 0. On a donc vu que la définition intuitive qu'on avait de l'addition colle parfaitement à cette définition syntaxique, pourtant au fond le sens qu'on manipule reste le même. On a donc "mis sous le tapis" (et c'est une bonne chose au début) cet aspect formel, syntaxique, de l'addition qu'on utilise. Cependant, on n'a fait ici qu'effleurer la théorie derrière les additions. On sait que pour un entier naturel a, a + 0 = 0. Le lecteur pourra essayer de le prouver avec cette définition de l'addition, mais c'est un exercice assez difficile. Pour le traiter, et d'autres du même genre, on pourra s'essayer à Coq, un logiciel de preuves, notamment au chapitre 1 et 2 de 'Software Foundations' (https://softwarefoundations.cis.upenn.edu/lf-current/toc.html).

4 Les groupes, les mots

Un monoïde est la donnée de 2 objets : un ensemble M, et une loi (qu'on ne note pas, ici. On pourrait par exemple la note $\times$, mais on considère que ab est l'élément obtenu en appliquant la loi à a et b) qui a les propriétés suivantes :

- associativité : Pour tous éléments a, b, c de M, (ab)c = a(bc)
- la loi est interne : Pour tous éléments a et b de M, ab appartient à M
- existence d'un neutre : il existe un élément neutre, généralement noté e, tel que pour tout élément x de M, ex = xe = x

Voici quelques exemples de monoïdes : $\mathbb{N}, +; \mathbb{N}, \times; \mathbb{R}^*, \times$... On s'intéresse à un monoïde particulier : un langage. On se donne un alphabet (qui est simplement un ensemble de symboles) et un symbole "neutre" noté e, et on considère le monoïde formé par les "mots" de cet alphabet : tout ce qu'on peut obtenir en concaténant des lettres de notre alphabet. Par exemple, avec un alphabet a,b,c,e (où e est le neutre), ab, abc, ccccccccccccccccccc, ou e sont des mots de notre langage. Un groupe est un monoïde auquel on ajoute une règle : tous les éléments de notre ensemble (qu'on appelle désormais G) doivent avoir un inverse, c'est à dire que pour tout élément $g \in G$, il existe dans G un élément g^{-1} tel que $gg^{-1} = e$. Voici quelques exemples de groupe $\mathbb{Z}, +; \mathbb{Q}^*, \times$ les positions de la petite aiguille sur l'horloge (de 0 à 11), munie de l'addition... Pour un groupe dont l'ensemble sous jacent est $\{g_1, ..., g_n, g_1^{-1}, ..., g_n^{-1}\}$ (rappelons que l'un des g_i est le neutre) on peut dire que le groupe vaut $< g_1, ..., g_n >$. Cette notation peut être définie de plusieurs façons (notamment : $< g_i, ..., g_k >$ est le plus petit sous groupe contenant $g_1, ..., g_k$, ou encore l'intersection de tous les groupes contenant $g_1, ..., g_k$) , mais une définition appropriée ici est la suivante : $< g_1, ..., g_n >$ est l'ensemble des éléments qu'on peut générer avec $\{g_1, ..., g_n, g_1^{-1}, ..., g_n^{-1}\}$. D'un point de vue syntaxique, si on prend $\{g_1, ..., g_n, g_1^{-1}, ..., g_n^{-1}\}$ pour alphabet, on voit que le langage qu'on obtient est exactement $< g_1, ..., g_n >$. Cependant, ce langage est un ensemble, et donc il contient notamment e et $g_1 g_1^{-1}$. Ce n'est pas incohérent : du point de vue du monoïde ces éléments sont bien différents. Mais si l'on adopte la sémantique du groupe, $g_1 g_1^{-1}$ et e sont des éléments identiques. L'ajout de la règle de l'inversion nous fait donc passer du sens qu'on donne $g_1 g_1^{-1}$ à une égalité syntaxique $g_1 g_1^{-1} = e$.

5 Lambda calcul non typé