# Mathe Nachhilfe

## Analytische Geometrie - Vektoren

# Analytische Geometrie - Vektoren

- Null-, Einheits-, Gegenvektor, Kartesisches Koordinatensystem
- Grundrechenarten
  - Addition, Subtraktion
  - Multiplikation mit Skalar / Skalierung
- Kollinearität, Parallellität
- Linearkombination, Lineare (Un)Abhängigkeit, Komplanarität
- Skalarprodukt
  - Winkel zwischen Vektoren
- Vektorprodukt / Kreuzprodukt
  - Flächeninhalt von Parallelogrammen / Dreiecken
- Spatprodukt
  - Spat? WTF?
  - Volumen eines Spates

# Analytische Geometrie - Vektoren

- Null-, Einheits-, Gegenvektor, Kartesisches Koordinatensystem
- Grundrechenarten
  - Addition, Subtraktion
  - Multiplikation mit Skalar / Skalierung
- Kollinearität, Parallellität
- Linearkombination, Lineare (Un)Abhängigkeit, Komplanarität
- Skalarprodukt
  - Winkel zwischen Vektoren
- Vektorprodukt / Kreuzprodukt
  - Flächeninhalt von Parallelogrammen / Dreiecken
- Spatprodukt
  - Spat? WTF?
  - Volumen eines Spates

# Nullvektor, Einheitsvektor, Gegenvektor, Kartesisches Koordinatensystem

**Nullvektor:**

**Einheitsvektor:**

**Gegenvektor zu $\vec{a}$:**

**Kartesisches Koordinatensystem:**

# Nullvektor, Einheitsvektor, Gegenvektor, Kartesisches Koordinatensystem

**Nullvektor:** $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Einheitsvektor:**

**Gegenvektor zu $\vec{a}$:**

**Kartesisches Koordinatensystem:**

# Nullvektor, Einheitsvektor, Gegenvektor, Kartesisches Koordinatensystem

**Nullvektor:** $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Einheitsvektor:** Vektor mit $|\vec{v}| = 1$

**Gegenvektor zu $\vec{a}$:**

**Kartesisches Koordinatensystem:**

# Nullvektor, Einheitsvektor, Gegenvektor, Kartesisches Koordinatensystem

**Nullvektor:** $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Einheitsvektor:** Vektor mit $|\vec{v}| = 1$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Gegenvektor zu $\vec{a}$:**

**Kartesisches Koordinatensystem:**

# Nullvektor, Einheitsvektor, Gegenvektor, Kartesisches Koordinatensystem

**Nullvektor:** $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Einheitsvektor:** Vektor mit $|\vec{v}| = 1$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Gegenvektor zu $\vec{a}$:** $-\vec{a}$

**Kartesisches Koordinatensystem:**

# Nullvektor, Einheitsvektor, Gegenvektor, Kartesisches Koordinatensystem

**Nullvektor:** $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Einheitsvektor:** Vektor mit $|\vec{v}| = 1$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Gegenvektor zu $\vec{a}$:** $-\vec{a}$

**Kartesisches Koordinatensystem** (auch Orthonormiertes)**:**

# Nullvektor, Einheitsvektor, Gegenvektor, Kartesisches Koordinatensystem

**Nullvektor:** $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Einheitsvektor:** Vektor mit $|\vec{v}| = 1$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Gegenvektor zu $\vec{a}$:** $-\vec{a}$

**Kartesisches Koordinatensystem** (auch Orthonormiertes)**:**
Koordinatensystem $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ mit

# Nullvektor, Einheitsvektor, Gegenvektor, Kartesisches Koordinatensystem

**Nullvektor:** $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Einheitsvektor:** Vektor mit $|\vec{v}| = 1$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Gegenvektor zu $\vec{a}$:** $-\vec{a}$

**Kartesisches Koordinatensystem** (auch Orthonormiertes)**:**
Koordinatensystem $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ mit

- $|\vec{x}| = |\vec{y}| = |\vec{z}| = 1$

# Nullvektor, Einheitsvektor, Gegenvektor, Kartesisches Koordinatensystem

**Nullvektor:** $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Einheitsvektor:** Vektor mit $|\vec{v}| = 1$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Gegenvektor zu $\vec{a}$:** $-\vec{a}$

**Kartesisches Koordinatensystem** (auch Orthonormiertes)**:**
Koordinatensystem $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ mit

- $|\vec{x}| = |\vec{y}| = |\vec{z}| = 1$
- $\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) = \sphericalangle(\vec{y}, \vec{z}) = \sphericalangle(\vec{z}, \vec{x}) = 90^\circ$

# Nullvektor, Einheitsvektor, Gegenvektor, Kartesisches Koordinatensystem

**Nullvektor:** $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Einheitsvektor:** Vektor mit $|\vec{v}| = 1$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Gegenvektor zu $\vec{a}$:** $-\vec{a}$

**Kartesisches Koordinatensystem** (auch Orthonormiertes)**:**
Koordinatensystem $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ mit

- $|\vec{x}| = |\vec{y}| = |\vec{z}| = 1$
- $\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) = \sphericalangle(\vec{y}, \vec{z}) = \sphericalangle(\vec{z}, \vec{x}) = 90^\circ$
- $\vec{x}, \vec{y} und \vec{z}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem (Rechte-Hand-Regel).

# Aufgaben

- Geben Sie den Nullvektor an.
- Sind folgende Vektoren Einheitsvektoren?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}$$

- Geben Sie die Gegenvektoren zu $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ an.

# Aufgaben

- Geben Sie den Nullvektor an. $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Sind folgende Vektoren Einheitsvektoren?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}$$

- Geben Sie die Gegenvektoren zu $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ an.

# Aufgaben

- Geben Sie den Nullvektor an. $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Sind folgende Vektoren Einheitsvektoren?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \checkmark$$

- Geben Sie die Gegenvektoren zu $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ an.

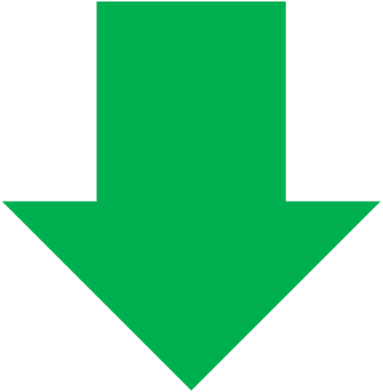
# Aufgaben

- Geben Sie den Nullvektor an. $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Sind folgende Vektoren Einheitsvektoren?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \checkmark$$

- Geben Sie die Gegenvektoren zu $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ an.

$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad -\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad -\vec{c} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$



facebook.com/JeanHilftDir
Skype: JeanHilftDir

Folien: github.com/JeanHilftDir/Mathe

# Mathe Nachhilfe

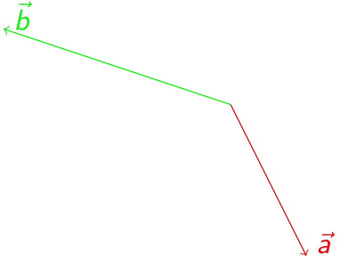
## Analytische Geometrie - Vektoren

# Analytische Geometrie - Vektoren

- Null-, Einheits-, Gegenvektor, Kartesisches Koordinatensystem
- Grundrechenarten
  - Addition, Subtraktion
  - Multiplikation mit Skalar / Skalierung
- Kollinearität, Parallellität
- Linearkombination, Lineare (Un)Abhängigkeit, Komplanarität
- Skalarprodukt
  - Winkel zwischen Vektoren
- Vektorprodukt / Kreuzprodukt
  - Flächeninhalt von Parallelogrammen / Dreiecken
- Spatprodukt
  - Spat? WTF?
  - Volumen eines Spates

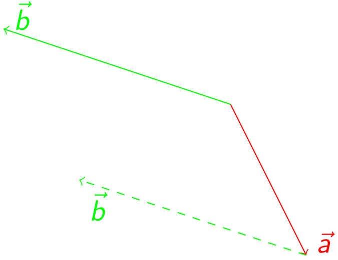
# Addition, Subtraktion

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$



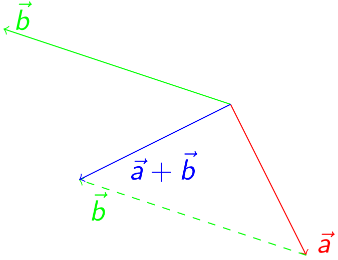
# Addition, Subtraktion

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$



# Addition, Subtraktion

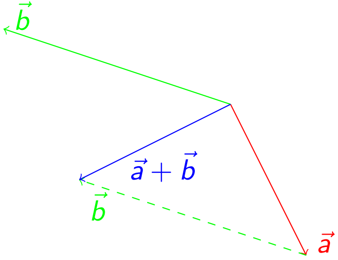
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$



# Addition, Subtraktion

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

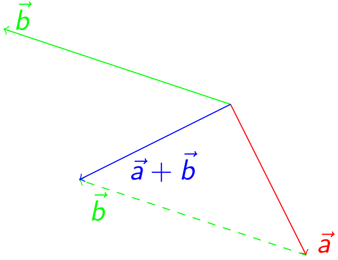
$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \\ z_a + z_b \end{pmatrix}$$



# Addition, Subtraktion

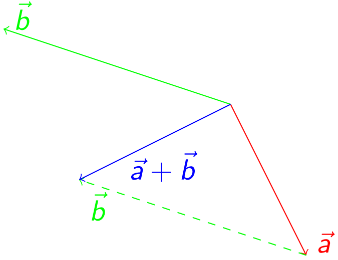
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \\ z_a + z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2 \\ 3-2 \\ 0+2 \end{pmatrix}$$



# Addition, Subtraktion

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$




$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \\ z_a + z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 2 \\ 3 - 2 \\ 0 + 2 \end{pmatrix}$$

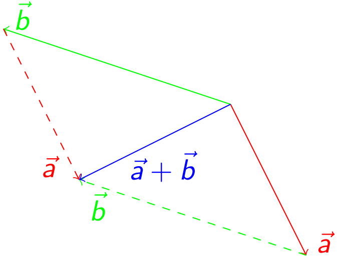
$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

# Addition, Subtraktion

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \\ z_a + z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2 \\ 3-2 \\ 0+2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

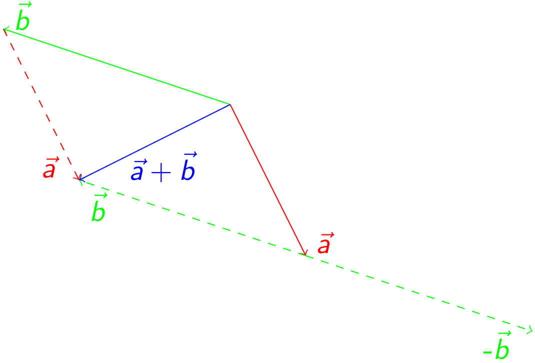


# Addition, Subtraktion

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

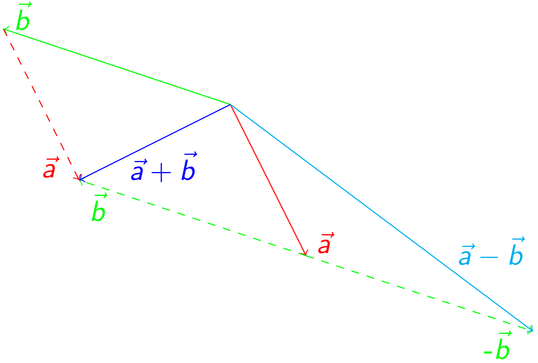
$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \\ z_a + z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2 \\ 3-2 \\ 0+2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



# Addition, Subtraktion

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

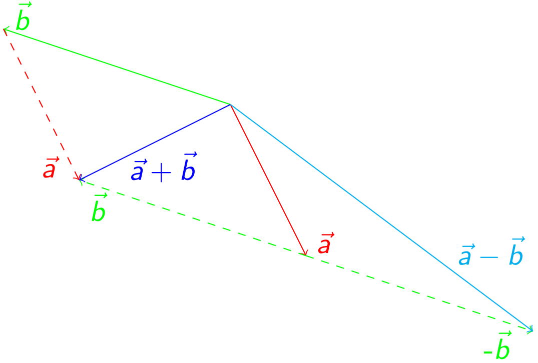



$$\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \\ z_a + z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2 \\ 3-2 \\ 0+2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

# Addition, Subtraktion

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$



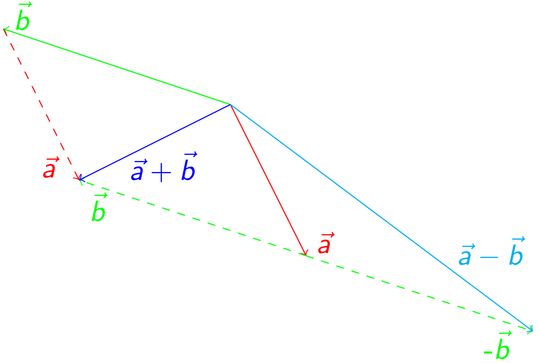

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \\ z_a + z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2 \\ 3-2 \\ 0+2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$$

# Addition, Subtraktion

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$



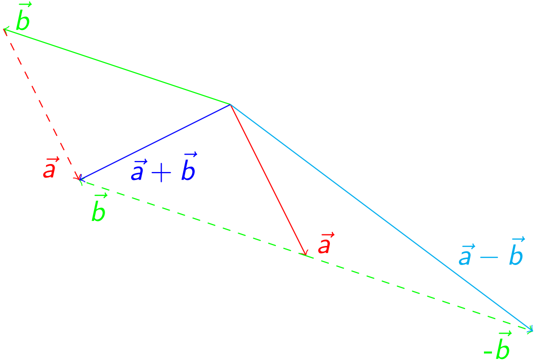

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \\ z_a + z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2 \\ 3-2 \\ 0+2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right) = \begin{pmatrix} x_a + (-x_b) \\ y_a + (-y_b) \\ z_a + (-z_b) \end{pmatrix}$$

# Addition, Subtraktion

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$




$$\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \\ z_a + z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2 \\ 3-2 \\ 0+2 \end{pmatrix}$$

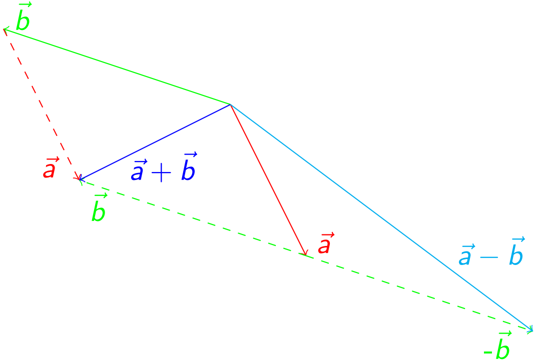
$$\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}-\vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right) = \begin{pmatrix} x_a + (-x_b) \\ y_a + (-y_b) \\ z_a + (-z_b) \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \\ z_a - z_b \end{pmatrix}$$

# Addition, Subtraktion

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$




$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \\ z_a + z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2 \\ 3-2 \\ 0+2 \end{pmatrix}$$

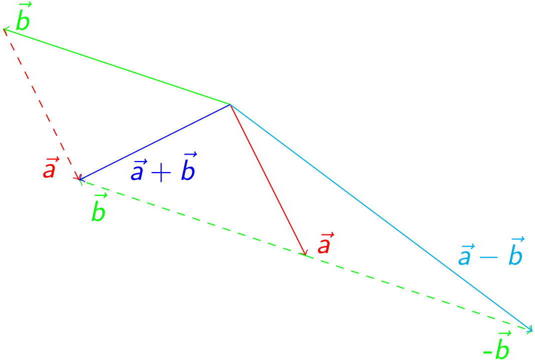
$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right) = \begin{pmatrix} x_a + (-x_b) \\ y_a + (-y_b) \\ z_a + (-z_b) \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \\ z_a - z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 3+2 \\ 0-2 \end{pmatrix}$$

# Addition, Subtraktion

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$




$$\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \\ z_a + z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2 \\ 3-2 \\ 0+2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

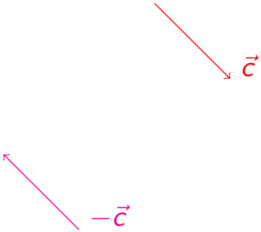
$$\vec{a}-\vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right) = \begin{pmatrix} x_a + (-x_b) \\ y_a + (-y_b) \\ z_a + (-z_b) \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \\ z_a - z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 3+2 \\ 0-2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

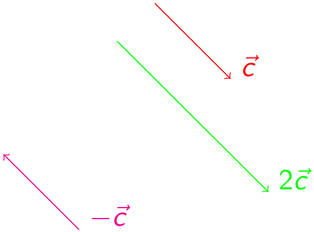
# Multiplikation mit Skalar / Skalierung

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$



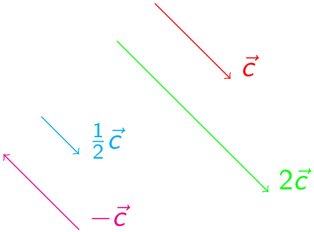
# Multiplikation mit Skalar / Skalierung

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$



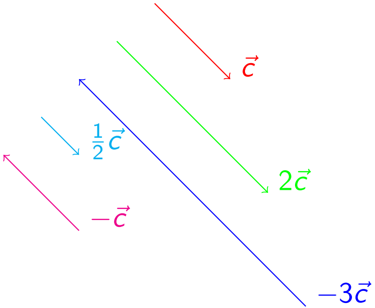
# Multiplikation mit Skalar / Skalierung

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$



# Multiplikation mit Skalar / Skalierung

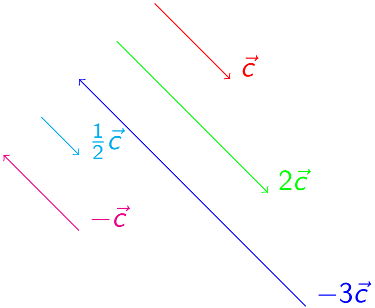
$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$



# Multiplikation mit Skalar / Skalierung

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} r \cdot x \\ r \cdot y \\ r \cdot z \end{pmatrix}$$

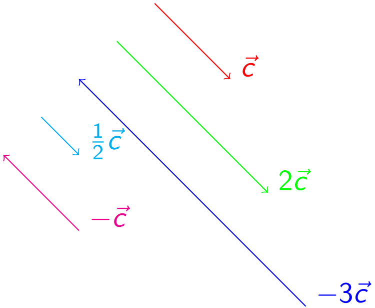


# Multiplikation mit Skalar / Skalierung

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

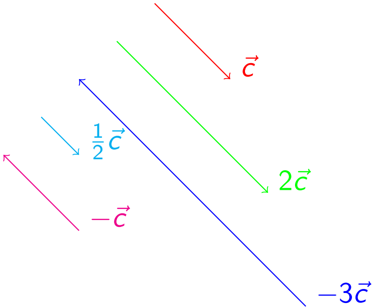
$$r \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} r \cdot x \\ r \cdot y \\ r \cdot z \end{pmatrix}$$

$$-\vec{c} = -1 \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$



# Multiplikation mit Skalar / Skalierung

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$




$$r \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} r \cdot x \\ r \cdot y \\ r \cdot z \end{pmatrix}$$

$$-\vec{c} = -1 \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

$$2\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

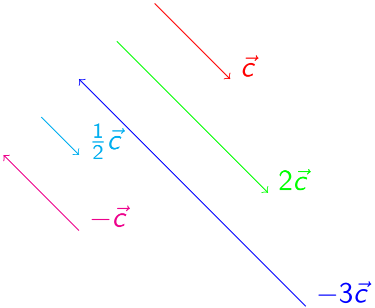
# Multiplikation mit Skalar / Skalierung

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} r \cdot x \\ r \cdot y \\ r \cdot z \end{pmatrix}$$

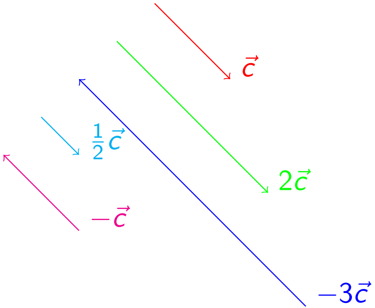
$$-\vec{c} = -1 \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

$$2\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$



# Multiplikation mit Skalar / Skalierung

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$




$$r \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} r \cdot x \\ r \cdot y \\ r \cdot z \end{pmatrix}$$

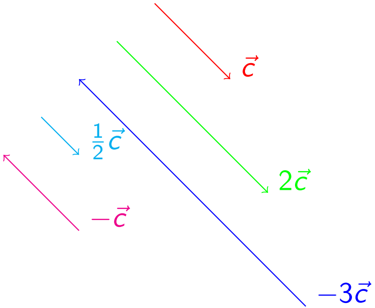
$$-\vec{c} = -1 \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

$$2\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$-3\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 4 \\ -3 \cdot 3 \\ -3 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

# Multiplikation mit Skalar / Skalierung

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$




$$r \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} r \cdot x \\ r \cdot y \\ r \cdot z \end{pmatrix}$$

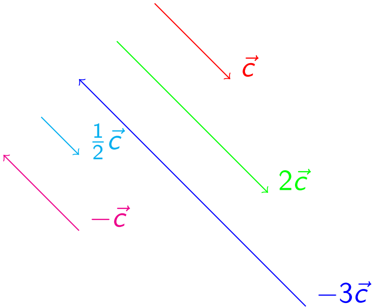
$$-\vec{c} = -1 \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

$$2\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$-3\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 4 \\ -3 \cdot 3 \\ -3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

# Multiplikation mit Skalar / Skalierung

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$




$$r \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} r \cdot x \\ r \cdot y \\ r \cdot z \end{pmatrix}$$

$$-\vec{c} = -1 \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

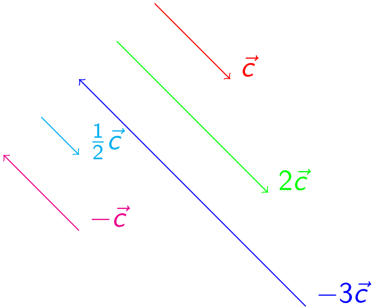
$$2\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$-3\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 4 \\ -3 \cdot 3 \\ -3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 4 \\ \frac{1}{2} \cdot 3 \\ \frac{1}{2} \cdot 1 \end{pmatrix}$$

# Multiplikation mit Skalar / Skalierung

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$




$$r \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} r \cdot x \\ r \cdot y \\ r \cdot z \end{pmatrix}$$

$$-\vec{c} = -1 \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

$$2\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$-3\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 4 \\ -3 \cdot 3 \\ -3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 4 \\ \frac{1}{2} \cdot 3 \\ \frac{1}{2} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

# Aufgaben

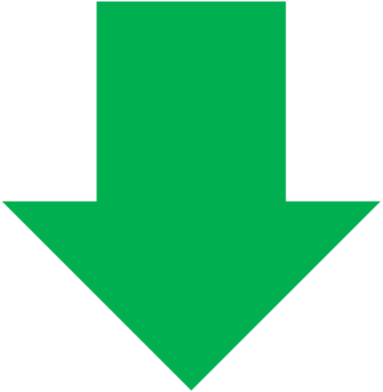
$\vec{q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\vec{r} = \begin{pmatrix} 27 \\ 10 \\ 150 \end{pmatrix}$ $\vec{s} = \begin{pmatrix} 30 \\ 90 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ $\vec{t} = \begin{pmatrix} 256 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ Berechne.

- $\vec{q} + \vec{r} =$
- $25\vec{s} =$
- $\vec{q} - \vec{s} =$
- $2\vec{q} =$
- $\vec{t} - \vec{q} =$
- $4\vec{q} - 3\vec{t} =$
- $-\vec{r} + \vec{s} =$
- $100\vec{q} - \vec{r} + \vec{s} =$
- $\vec{t} - \vec{t} =$
- $0\vec{t} =$

# Aufgaben

$\vec{q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\vec{r} = \begin{pmatrix} 27 \\ 10 \\ 150 \end{pmatrix}$ $\vec{s} = \begin{pmatrix} 30 \\ 90 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ $\vec{t} = \begin{pmatrix} 256 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ Berechne.

- $\vec{q} + \vec{r} = \begin{pmatrix} 31 \\ 13 \\ 157 \end{pmatrix}$
- $\vec{q} - \vec{s} = \begin{pmatrix} -26 \\ -87 \\ 6,5 \end{pmatrix}$
- $\vec{t} - \vec{q} = \begin{pmatrix} 252 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$
- $-\vec{r} + \vec{s} = \vec{s} - \vec{r} = \begin{pmatrix} -226 \\ 86 \\ -1,5 \end{pmatrix}$
- $\vec{t} - \vec{t} = \vec{o}$
- $25\vec{s} = \begin{pmatrix} 750 \\ 2250 \\ 12,5 \end{pmatrix}$
- $2\vec{q} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix}$
- $4\vec{q} - 3\vec{t} = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ 28 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 768 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -752 \\ 0 \\ 22 \end{pmatrix}$
- $100\vec{q} - \vec{r} + \vec{s} = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 700 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -226 \\ 86 \\ -1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 174 \\ 386 \\ 698,5 \end{pmatrix}$
- $0\vec{t} = \vec{o}$



facebook.com/JeanHilftDir
Skype: JeanHilftDir

Folien: github.com/JeanHilftDir/Mathe

# Mathe Nachhilfe

## Analytische Geometrie - Vektoren

# Analytische Geometrie - Vektoren

- Null-, Einheits-, Gegenvektor, Kartesisches Koordinatensystem
- Grundrechenarten
  - Addition, Subtraktion
  - Multiplikation mit Skalar / Skalierung
- Kollinearität, Parallellität
- Linearkombination, Lineare (Un)Abhängigkeit, Komplanarität
- Skalarprodukt
  - Winkel zwischen Vektoren
- Vektorprodukt / Kreuzprodukt
  - Flächeninhalt von Parallelogrammen / Dreiecken
- Spatprodukt
  - Spat? WTF?
  - Volumen eines Spates

# Kollinearität

# Kollinearität

# Kollinearität


$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -3 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

# Kollinearität


$\vec{v}_1,\vec{v}_2$ **kollinear**, wenn $\vec{v}_1 + r\cdot\vec{v}_2 = \vec{o}$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -3 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

# Kollinearität


$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -3 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ **kollinear**, wenn $\vec{v}_1 + r \cdot \vec{v}_2 = \vec{o}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot x_2 \\ r \cdot y_2 \\ r \cdot z_2 \end{pmatrix} = \vec{o}$$

# Kollinearität


$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -3 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ **kollinear**, wenn $\vec{v}_1 + r \cdot \vec{v}_2 = \vec{o}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot x_2 \\ r \cdot y_2 \\ r \cdot z_2 \end{pmatrix} = \vec{o}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + r \cdot x_2 \\ y_1 + r \cdot y_2 \\ z_1 + r \cdot z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Kollinearität


$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ **kollinear**, wenn $\vec{v}_1 + r \cdot \vec{v}_2 = \vec{o}$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -3 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot x_2 \\ r \cdot y_2 \\ r \cdot z_2 \end{pmatrix} = \vec{o}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + r \cdot x_2 \\ y_1 + r \cdot y_2 \\ z_1 + r \cdot z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 + r \cdot (-1,5) \\ 6 + r \cdot (-3) \\ 1 + r \cdot (-0,5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Kollinearität


$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -3 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ **kollinear**, wenn $\vec{v}_1 + r \cdot \vec{v}_2 = \vec{o}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot x_2 \\ r \cdot y_2 \\ r \cdot z_2 \end{pmatrix} = \vec{o}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + r \cdot x_2 \\ y_1 + r \cdot y_2 \\ z_1 + r \cdot z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 + r \cdot (-1,5) \\ 6 + r \cdot (-3) \\ 1 + r \cdot (-0,5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3 + r \cdot (-1,5) = 0$$
$$6 + r \cdot (-3) = 0$$
$$1 + r \cdot (-0,5) = 0$$

# Kollinearität


$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -3 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ **kollinear**, wenn $\vec{v}_1 + r \cdot \vec{v}_2 = \vec{o}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot x_2 \\ r \cdot y_2 \\ r \cdot z_2 \end{pmatrix} = \vec{o}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + r \cdot x_2 \\ y_1 + r \cdot y_2 \\ z_1 + r \cdot z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

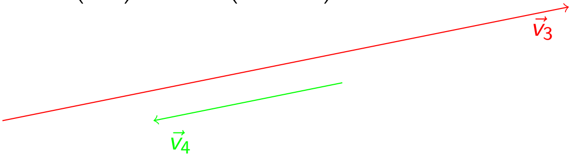
$$\begin{pmatrix} 3 + r \cdot (-1,5) \\ 6 + r \cdot (-3) \\ 1 + r \cdot (-0,5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l|l} 3 + r \cdot (-1,5) = 0 & r = -2 \\ 6 + r \cdot (-3) = 0 & r = -2 \\ 1 + r \cdot (-0,5) = 0 & r = -2 \end{array}$$

# Kollinearität


$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ **kollinear**, wenn $\vec{v}_1 + r \cdot \vec{v}_2 = \vec{o}$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -3 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$




$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot x_2 \\ r \cdot y_2 \\ r \cdot z_2 \end{pmatrix} = \vec{o}$$

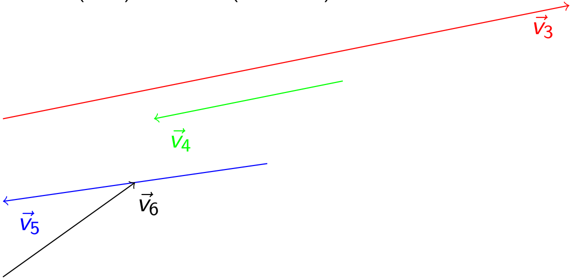
$$\begin{pmatrix} x_1 + r \cdot x_2 \\ y_1 + r \cdot y_2 \\ z_1 + r \cdot z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 + r \cdot (-1,5) \\ 6 + r \cdot (-3) \\ 1 + r \cdot (-0,5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l|l} 3 + r \cdot (-1,5) = 0 & r = -2 \\ 6 + r \cdot (-3) = 0 & r = -2 \\ 1 + r \cdot (-0,5) = 0 & r = -2 \end{array}$$

# Kollinearität


$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -3 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$




$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ **kollinear**, wenn $\vec{v}_1 + r \cdot \vec{v}_2 = \vec{o}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot x_2 \\ r \cdot y_2 \\ r \cdot z_2 \end{pmatrix} = \vec{o}$$

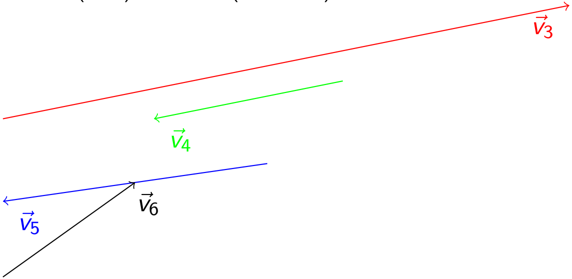
$$\begin{pmatrix} x_1 + r \cdot x_2 \\ y_1 + r \cdot y_2 \\ z_1 + r \cdot z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 + r \cdot (-1,5) \\ 6 + r \cdot (-3) \\ 1 + r \cdot (-0,5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l|l} 3 + r \cdot (-1,5) = 0 & r = -2 \\ 6 + r \cdot (-3) = 0 & r = -2 \\ 1 + r \cdot (-0,5) = 0 & r = -2 \end{array}$$

# Kollinearität


$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -3 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$




$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ **kollinear**, wenn $\vec{v}_1 + r \cdot \vec{v}_2 = \vec{o}$
**parallel**, wenn $r > 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot x_2 \\ r \cdot y_2 \\ r \cdot z_2 \end{pmatrix} = \vec{o}$$

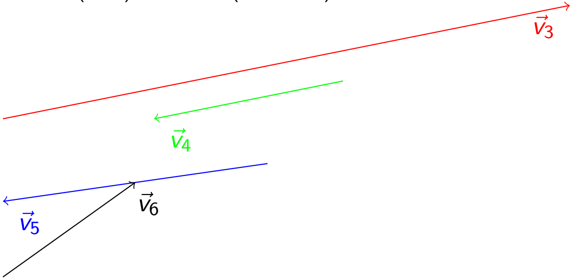
$$\begin{pmatrix} x_1 + r \cdot x_2 \\ y_1 + r \cdot y_2 \\ z_1 + r \cdot z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 + r \cdot (-1,5) \\ 6 + r \cdot (-3) \\ 1 + r \cdot (-0,5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l|l} 3 + r \cdot (-1,5) = 0 & r = -2 \\ 6 + r \cdot (-3) = 0 & r = -2 \\ 1 + r \cdot (-0,5) = 0 & r = -2 \end{array}$$

# Kollinearität


$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -3 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$




$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ **kollinear**, wenn $\vec{v}_1 + r \cdot \vec{v}_2 = \vec{o}$
**parallel**, wenn $r > 0$
**antiparallel**, wenn $r < 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot x_2 \\ r \cdot y_2 \\ r \cdot z_2 \end{pmatrix} = \vec{o}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + r \cdot x_2 \\ y_1 + r \cdot y_2 \\ z_1 + r \cdot z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 + r \cdot (-1,5) \\ 6 + r \cdot (-3) \\ 1 + r \cdot (-0,5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l|l} 3 + r \cdot (-1,5) = 0 & r = -2 \\ 6 + r \cdot (-3) = 0 & r = -2 \\ 1 + r \cdot (-0,5) = 0 & r = -2 \end{array}$$

# Aufgaben

Untersuchen Sie folgende Vektorpaare auf Kollinearität und parallellität.

- $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -3 \\ -0,5 \end{pmatrix}$
- $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\vec{e} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{f} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$
- $\vec{g} = \begin{pmatrix} 9 \\ 27 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\vec{h} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$
- $\vec{j} = \begin{pmatrix} 4 \\ 28 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{k} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -0,25 \end{pmatrix}$
- $\vec{l} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\vec{m} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$
- $\vec{o} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ $\vec{p} = \begin{pmatrix} 9 \\ 25 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\vec{q} = \begin{pmatrix} 9k \\ 81 \\ 18 \end{pmatrix}$ $\vec{r} = \begin{pmatrix} -k \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix}$

# Aufgaben

Untersuchen Sie folgende Vektorpaare auf Kollinearität und parallellität.

- $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -3 \\ -0,5 \end{pmatrix}$ $\checkmark$, a
- $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\vec{e} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{f} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\checkmark$, p
- $\vec{g} = \begin{pmatrix} 9 \\ 27 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\vec{h} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $\checkmark$, a
- $\vec{j} = \begin{pmatrix} 4 \\ 28 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{k} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -0,25 \end{pmatrix}$
- $\vec{l} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\vec{m} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\checkmark$, p
- $\vec{o} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ $\vec{p} = \begin{pmatrix} 9 \\ 25 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\vec{q} = \begin{pmatrix} 9k \\ 81 \\ 18 \end{pmatrix}$ $\vec{r} = \begin{pmatrix} -k \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\checkmark$, a

# Analytische Geometrie - Vektoren

- Null-, Einheits-, Gegenvektor, Kartesisches Koordinatensystem
- Grundrechenarten
  - Addition, Subtraktion
  - Multiplikation mit Skalar / Skalierung
- Kollinearität, Parallellität
- Linearkombination, Lineare (Un)Abhängigkeit, Komplanarität
- Skalarprodukt
  - Winkel zwischen Vektoren
- Vektorprodukt / Kreuzprodukt
  - Flächeninhalt von Parallelogrammen / Dreiecken
- Spatprodukt
  - Spat? WTF?
  - Volumen eines Spates

# Linearkombination

# Linearkombination

$\vec{d}$ heißt **Linearkombination** von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, wenn $\exists r, s, t \in \mathbb{R}$, sodass gilt:
$\vec{d} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$

# Linearkombination

$\vec{d}$ heißt **Linearkombination** von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, wenn $\exists r, s, t \in \mathbb{R}$, sodass gilt:
$\vec{d} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

# Linearkombination

$\vec{d}$ heißt **Linearkombination** von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, wenn $\exists r, s, t \in \mathbb{R}$, sodass gilt:
$\vec{d} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

# Linearkombination

$\vec{d}$ heißt **Linearkombination** von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, wenn $\exists r, s, t \in \mathbb{R}$, sodass gilt:
$\vec{d} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \; \vec{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

# Linearkombination

$\vec{d}$ heißt **Linearkombination** von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, wenn $\exists r, s, t \in \mathbb{R}$, sodass gilt:
$\vec{d} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \vec{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

# Linearkombination

$\vec{d}$ heißt **Linearkombination** von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, wenn $\exists r, s, t \in \mathbb{R}$, sodass gilt:
$\vec{d} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \; \vec{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

# Linearkombination

$\vec{d}$ heißt **Linearkombination** von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, wenn $\exists r, s, t \in \mathbb{R}$, sodass gilt:
$\vec{d} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \; \vec{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 7 + 16 \\ 1 + 3 + 2 \\ 6 + 6 + 5 \end{pmatrix}$$

# Linearkombination

$\vec{d}$ heißt **Linearkombination** von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, wenn $\exists r, s, t \in \mathbb{R}$, sodass gilt:
$\vec{d} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \; \vec{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+7+16 \\ 1+3+2 \\ 6+6+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 6 \\ 17 \end{pmatrix}$$

# Linearkombination

$\vec{d}$ heißt **Linearkombination** von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, wenn $\exists r, s, t \in \mathbb{R}$, sodass gilt:
$\vec{d} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+7+16 \\ 1+3+2 \\ 6+6+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 6 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_2 = 3 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b} - 4 \cdot \vec{c}$$

# Linearkombination

$\vec{d}$ heißt **Linearkombination** von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, wenn $\exists r, s, t \in \mathbb{R}$, sodass gilt:
$\vec{d} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \; \vec{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+7+16 \\ 1+3+2 \\ 6+6+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 6 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_2 = 3 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b} - 4 \cdot \vec{c} = 3 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

# Linearkombination

$\vec{d}$ heißt **Linearkombination** von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, wenn $\exists r, s, t \in \mathbb{R}$, sodass gilt:
$\vec{d} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \; \vec{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+7+16 \\ 1+3+2 \\ 6+6+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 6 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_2 = 3 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b} - 4 \cdot \vec{c} = 3 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_2 = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 + 2 \cdot 7 - 4 \cdot 16 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 6 + 2 \cdot 6 - 4 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

# Linearkombination

$\vec{d}$ heißt **Linearkombination** von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, wenn $\exists r, s, t \in \mathbb{R}$, sodass gilt:
$\vec{d} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \; \vec{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+7+16 \\ 1+3+2 \\ 6+6+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 6 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d_2} = 3 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b} - 4 \cdot \vec{c} = 3 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d_2} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 + 2 \cdot 7 - 4 \cdot 16 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 6 + 2 \cdot 6 - 4 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 + 14 - 64 \\ 3 + 6 - 6 \\ 18 + 12 - 20 \end{pmatrix}$$

# Linearkombination

$\vec{d}$ heißt **Linearkombination** von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, wenn $\exists r, s, t \in \mathbb{R}$, sodass gilt:
$\vec{d} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+7+16 \\ 1+3+2 \\ 6+6+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 6 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d_2} = 3 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b} - 4 \cdot \vec{c} = 3 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d_2} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 + 2 \cdot 7 - 4 \cdot 16 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 6 + 2 \cdot 6 - 4 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 + 14 - 64 \\ 3 + 6 - 6 \\ 18 + 12 - 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -38 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

# Linearkombination

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \; \vec{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{d}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ist $\vec{d}_3$ Linearkombinationen von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

# Linearkombination

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \; \vec{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{d}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ist $\vec{d}_3$ Linearkombinationen von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

$$\vec{d}_3 = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$$

# Linearkombination

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{d}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ist $\vec{d}_3$ Linearkombinationen von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

$$\vec{d}_3 = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

# Linearkombination

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \vec{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{d}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ist $\vec{d}_3$ Linearkombinationen von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

$$\vec{d}_3 = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} 5 = 4r + 7s + 16t \\ 2 = r + 3s + 2t \\ 3 = 6r + 6s + 5t \end{array} \right.$$

# Linearkombination

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{d_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ist $\vec{d_3}$ Linearkombinationen von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

$$\vec{d_3} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} 5 = 4r + 7s + 16t \\ 2 = r + 3s + 2t \\ 3 = 6r + 6s + 5t \end{array} \right.$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & 16 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & 5 & 3 \end{array} \right)$$

# Linearkombination

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \vec{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{d}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ist $\vec{d}_3$ Linearkombinationen von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

$$\vec{d}_3 = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} 5 = 4r + 7s + 16t \\ 2 = r + 3s + 2t \\ 3 = 6r + 6s + 5t \end{array} \right.$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & 16 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & 5 & 3 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} -4II \\ \\ -6II \end{array}$$

# Linearkombination

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{d_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ist $\vec{d_3}$ Linearkombinationen von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

$$\vec{d_3} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} 5 = 4r + 7s + 16t \\ 2 = r + 3s + 2t \\ 3 = 6r + 6s + 5t \end{array} \right.$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & 16 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & 5 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} -4II \\ \\ -6II \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & 8 & -3 \\ 0 & -12 & -7 & -9 \end{array} \right)$$

# Linearkombination

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{d_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ist $\vec{d_3}$ Linearkombinationen von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

$$\vec{d_3} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} 5 = 4r + 7s + 16t \\ 2 = r + 3s + 2t \\ 3 = 6r + 6s + 5t \end{array} \right.$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & 16 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & 5 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{c} -4II \\ \\ -6II \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & 8 & -3 \\ 0 & -12 & -7 & -9 \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ \\ -\frac{12}{5}II \end{array}$$

# Linearkombination

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \; \vec{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{d_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ist $\vec{d_3}$ Linearkombinationen von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

$$\vec{d_3} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} 5 = 4r + 7s + 16t \\ 2 = r + 3s + 2t \\ 3 = 6r + 6s + 5t \end{array} \right.$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & 16 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & 5 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{c} -4II \\ \\ -6II \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & 8 & -3 \\ 0 & -12 & -7 & -9 \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ \\ -\frac{12}{5} II \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{131}{5} & -\frac{9}{5} \end{array} \right)$$

# Linearkombination

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{d}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ist $\vec{d}_3$ Linearkombinationen von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

$$\vec{d}_3 = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} 5 = 4r + 7s + 16t \\ 2 = r + 3s + 2t \\ 3 = 6r + 6s + 5t \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & 16 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & 5 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} -4II \\ \\ -6II \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & 8 & -3 \\ 0 & -12 & -7 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -\frac{12}{5}II \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{131}{5} & -\frac{9}{5} \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \cdots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{35}{131} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{93}{131} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{131} \end{array}\right)$$

# Linearkombination

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{d}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ist $\vec{d}_3$ Linearkombinationen von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$? ✓

$$\vec{d}_3 = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} 5 = 4r + 7s + 16t \\ 2 = r + 3s + 2t \\ 3 = 6r + 6s + 5t \end{array} \right.$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & 16 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & 5 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{c} -4II \\ \\ -6II \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & 8 & -3 \\ 0 & -12 & -7 & -9 \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ \\ -\frac{12}{5}II \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{131}{5} & -\frac{9}{5} \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \cdots \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{35}{131} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{93}{131} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{131} \end{array} \right)$$

# Lineare (Un)Abhängigkeit, Komplanarität

# Lineare (Un)Abhängigkeit, Komplanarität

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ heißen **Linear unabhängig**, wenn $\exists r, s, t \in \mathbb{R}$, sodass $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{o}$ nur für $r = s = t = 0$ lösbar ist.

# Lineare (Un)Abhängigkeit, Komplanarität

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ heißen **Linear unabhängig**, wenn $\exists r, s, t \in \mathbb{R}$, sodass
$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{o}$ nur für $r = s = t = 0$ lösbar ist.

**Gleichungssystem:** $\left( \begin{array}{ccc|c} x_a & x_b & x_c & 0 \\ y_a & y_b & y_c & 0 \\ z_a & z_b & z_c & 0 \end{array} \right)$

# Lineare (Un)Abhängigkeit, Komplanarität

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ heißen **Linear unabhängig**, wenn $\exists r, s, t \in \mathbb{R}$, sodass
$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{o}$ nur für $r = s = t = 0$ lösbar ist.

**Gleichungssystem:** $\left(\begin{array}{ccc|c} x_a & x_b & x_c & 0 \\ y_a & y_b & y_c & 0 \\ z_a & z_b & z_c & 0 \end{array}\right) \rightarrow \cdots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 \end{array}\right)$

# Lineare (Un)Abhängigkeit, Komplanarität

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ heißen **Linear unabhängig**, wenn $\exists r, s, t \in \mathbb{R}$, sodass
$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{o}$ nur für $r = s = t = 0$ lösbar ist.

**Gleichungssystem:** $\left(\begin{array}{ccc|c} x_a & x_b & x_c & 0 \\ y_a & y_b & y_c & 0 \\ z_a & z_b & z_c & 0 \end{array}\right) \rightarrow \cdots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 \end{array}\right)$

Anderenfalls heißen die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ **linear abhängig** bzw. **komplanar**.

# Lineare (Un)Abhängigkeit, Komplanarität

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ heißen **Linear unabhängig**, wenn $\exists r, s, t \in \mathbb{R}$, sodass $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{o}$ nur für $r = s = t = 0$ lösbar ist.

**Gleichungssystem:** $\left(\begin{array}{ccc|c} x_a & x_b & x_c & 0 \\ y_a & y_b & y_c & 0 \\ z_a & z_b & z_c & 0 \end{array}\right) \rightarrow \cdots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 \end{array}\right)$

Anderenfalls heißen die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ **linear abhängig** bzw. **komplanar**.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ heißen **Linear abhängig** bzw. **komplanar**, wenn sich einer der Vektoren durch Linearkombination der anderen darstellen lässt.

# Lineare (Un)Abhängigkeit, Komplanarität

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ heißen **Linear unabhängig**, wenn $\exists r, s, t \in \mathbb{R}$, sodass
$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{o}$ nur für $r = s = t = 0$ lösbar ist.

**Gleichungssystem:** $\left(\begin{array}{ccc|c} x_a & x_b & x_c & 0 \\ y_a & y_b & y_c & 0 \\ z_a & z_b & z_c & 0 \end{array}\right) \rightarrow \cdots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 \end{array}\right)$

Anderenfalls heißen die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ **linear abhängig** bzw. **komplanar**.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ heißen **Linear abhängig** bzw. **komplanar**, wenn sich einer der Vektoren durch Linearkombination der anderen darstellen lässt.

**Beispiel**: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

# Lineare (Un)Abhängigkeit, Komplanarität

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ heißen **Linear unabhängig**, wenn $\exists r, s, t \in \mathbb{R}$, sodass
$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{o}$ nur für $r = s = t = 0$ lösbar ist.

**Gleichungssystem:** $\left(\begin{array}{ccc|c} x_a & x_b & x_c & 0 \\ y_a & y_b & y_c & 0 \\ z_a & z_b & z_c & 0 \end{array}\right) \rightarrow \cdots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 \end{array}\right)$

Anderenfalls heißen die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ **linear abhängig** bzw. **komplanar**.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ heißen **Linear abhängig** bzw. **komplanar**, wenn sich einer der Vektoren durch Linearkombination der anderen darstellen lässt.

**Beispiel**: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 \end{array}\right)$$

# Lineare (Un)Abhängigkeit, Komplanarität

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ heißen **Linear unabhängig**, wenn $\exists r, s, t \in \mathbb{R}$, sodass
$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{o}$ nur für $r = s = t = 0$ lösbar ist.

**Gleichungssystem:** $\left(\begin{array}{ccc|c} x_a & x_b & x_c & 0 \\ y_a & y_b & y_c & 0 \\ z_a & z_b & z_c & 0 \end{array}\right) \rightarrow \cdots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 \end{array}\right)$

Anderenfalls heißen die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ **linear abhängig** bzw. **komplanar**.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ heißen **Linear abhängig** bzw. **komplanar**, wenn sich einer der Vektoren durch Linearkombination der anderen darstellen lässt.

**Beispiel**: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \\ -I \\ -II \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

# Lineare (Un)Abhängigkeit, Komplanarität

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ heißen **Linear unabhängig**, wenn $\exists r, s, t \in \mathbb{R}$, sodass $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{o}$ nur für $r = s = t = 0$ lösbar ist.

**Gleichungssystem:** $\left(\begin{array}{ccc|c} x_a & x_b & x_c & 0 \\ y_a & y_b & y_c & 0 \\ z_a & z_b & z_c & 0 \end{array}\right) \rightarrow \cdots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 \end{array}\right)$

Anderenfalls heißen die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ **linear abhängig** bzw. **komplanar**.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ heißen **Linear abhängig** bzw. **komplanar**, wenn sich einer der Vektoren durch Linearkombination der anderen darstellen lässt.

**Beispiel**: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -I \\ -II \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \cdot 3 - II \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -17 & 0 \end{array}\right)$$

# Aufgaben

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \; \vec{r} = \begin{pmatrix} 550 \\ 620 \\ 150 \end{pmatrix} \; \vec{s} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; \vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sind $\vec{q}, \vec{r}, \vec{s}$ linear unabhängig?

Sind $\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}$ linear unabhängig?

# Aufgaben

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \; \vec{r} = \begin{pmatrix} 550 \\ 620 \\ 150 \end{pmatrix} \; \vec{s} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; \vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sind $\vec{q}, \vec{r}, \vec{s}$ linear unabhängig?

- ist $\vec{q}$ Linearkombination von $\vec{r}, \vec{s}$?
- ist $\vec{r}$ Linearkombination von $\vec{s}, \vec{q}$?
- ist $\vec{s}$ Linearkombination von $\vec{q}, \vec{r}$?

Sind $\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}$ linear unabhängig?

# Aufgaben

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 550 \\ 620 \\ 150 \end{pmatrix} \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sind $\vec{q}, \vec{r}, \vec{s}$ linear unabhängig?

- ist $\vec{q}$ Linearkombination von $\vec{r}, \vec{s}$? ×
- ist $\vec{r}$ Linearkombination von $\vec{s}, \vec{q}$? ×
- ist $\vec{s}$ Linearkombination von $\vec{q}, \vec{r}$? ×

Sind $\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}$ linear unabhängig?

# Aufgaben

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 550 \\ 620 \\ 150 \end{pmatrix} \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sind $\vec{q}, \vec{r}, \vec{s}$ linear unabhängig? ✓

- ist $\vec{q}$ Linearkombination von $\vec{r}, \vec{s}$? ×
- ist $\vec{r}$ Linearkombination von $\vec{s}, \vec{q}$? ×
- ist $\vec{s}$ Linearkombination von $\vec{q}, \vec{r}$? ×

Sind $\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}$ linear unabhängig?

# Aufgaben

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 550 \\ 620 \\ 150 \end{pmatrix} \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sind $\vec{q}, \vec{r}, \vec{s}$ linear unabhängig? ✓

- ist $\vec{q}$ Linearkombination von $\vec{r}, \vec{s}$? ×
- ist $\vec{r}$ Linearkombination von $\vec{s}, \vec{q}$? ×
- ist $\vec{s}$ Linearkombination von $\vec{q}, \vec{r}$? ×

Sind $\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}$ linear unabhängig?

- ist $\vec{r}$ Linearkombination von $\vec{s}, \vec{t}$?
- ist $\vec{s}$ Linearkombination von $\vec{t}, \vec{r}$?
- ist $\vec{t}$ Linearkombination von $\vec{r}, \vec{s}$?

# Aufgaben

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \; \vec{r} = \begin{pmatrix} 550 \\ 620 \\ 150 \end{pmatrix} \; \vec{s} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; \vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sind $\vec{q}, \vec{r}, \vec{s}$ linear unabhängig? $\checkmark$

- ist $\vec{q}$ Linearkombination von $\vec{r}, \vec{s}$? $\times$
- ist $\vec{r}$ Linearkombination von $\vec{s}, \vec{q}$? $\times$
- ist $\vec{s}$ Linearkombination von $\vec{q}, \vec{r}$? $\times$

Sind $\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}$ linear unabhängig?

- ist $\vec{r}$ Linearkombination von $\vec{s}, \vec{t}$? $\checkmark$
- ist $\vec{s}$ Linearkombination von $\vec{t}, \vec{r}$?
- ist $\vec{t}$ Linearkombination von $\vec{r}, \vec{s}$?

# Aufgaben

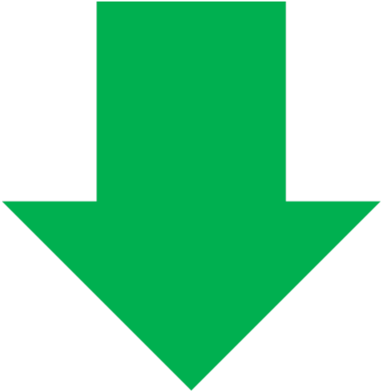
$$\vec{q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \; \vec{r} = \begin{pmatrix} 550 \\ 620 \\ 150 \end{pmatrix} \; \vec{s} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; \vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sind $\vec{q}, \vec{r}, \vec{s}$ linear unabhängig? ✓

- ist $\vec{q}$ Linearkombination von $\vec{r}, \vec{s}$? x
- ist $\vec{r}$ Linearkombination von $\vec{s}, \vec{q}$? x
- ist $\vec{s}$ Linearkombination von $\vec{q}, \vec{r}$? x

Sind $\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}$ linear unabhängig? x

- ist $\vec{r}$ Linearkombination von $\vec{s}, \vec{t}$? ✓
- ist $\vec{s}$ Linearkombination von $\vec{t}, \vec{r}$?
- ist $\vec{t}$ Linearkombination von $\vec{r}, \vec{s}$?



facebook.com/JeanHilftDir
Skype: JeanHilftDir

Folien: github.com/JeanHilftDir/Mathe

# Mathe Nachhilfe

## Analytische Geometrie - Vektoren

# Analytische Geometrie - Vektoren

- Null-, Einheits-, Gegenvektor, Kartesisches Koordinatensystem
- Grundrechenarten
  - Addition, Subtraktion
  - Multiplikation mit Skalar / Skalierung
- Kollinearität, Parallellität
- Linearkombination, Lineare (Un)Abhängigkeit, Komplanarität
- Skalarprodukt
  - Winkel zwischen Vektoren
- Vektorprodukt / Kreuzprodukt
  - Flächeninhalt von Parallelogrammen / Dreiecken
- Spatprodukt
  - Spat? WTF?
  - Volumen eines Spates

# Skalarprodukt - Berechnung

# Skalarprodukt - Berechnung

$$c = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$$

# Skalarprodukt - Berechnung

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ bzw. $\vec{a} \circ \vec{b}$ ist eine Reelle Zahl $c$, für die gilt:

$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$c = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$

# Skalarprodukt - Berechnung

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ bzw. $\vec{a} \circ \vec{b}$ ist eine Reelle Zahl $c$, für die gilt:
$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$c = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$

**Eigenschaften:**

# Skalarprodukt - Berechnung

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ bzw. $\vec{a} \circ \vec{b}$ ist eine Reelle Zahl $c$, für die gilt:
$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$c = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$

**Eigenschaften:**

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

# Skalarprodukt - Berechnung

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ bzw. $\vec{a} \circ \vec{b}$ ist eine Reelle Zahl $c$, für die gilt:
$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$c = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$

**Eigenschaften:**

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot (\vec{a} + \vec{c})$

# Skalarprodukt - Berechnung

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ bzw. $\vec{a} \circ \vec{b}$ ist eine Reelle Zahl $c$, für die gilt:
$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$c = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$

**Eigenschaften:**

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot (\vec{a} + \vec{c})$
- $r\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = (r\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \left(r\vec{b}\right)$

# Skalarprodukt - Berechnung

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ bzw. $\vec{a} \circ \vec{b}$ ist eine Reelle Zahl $c$, für die gilt:
$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$c = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$

**Eigenschaften:**

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot (\vec{a} + \vec{c})$
- $r\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = (r\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \left(r\vec{b}\right)$
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

# Skalarprodukt - Berechnung

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ bzw. $\vec{a} \circ \vec{b}$ ist eine Reelle Zahl $c$, für die gilt:
$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$c = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$

**Eigenschaften:**

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot (\vec{a} + \vec{c})$
- $r\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = (r\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \left(r\vec{b}\right)$
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

**Beispiel:**

# Skalarprodukt - Berechnung

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ bzw. $\vec{a} \circ \vec{b}$ ist eine Reelle Zahl $c$, für die gilt:
$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$c = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$

**Eigenschaften:**

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot (\vec{a} + \vec{c})$
- $r\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = (r\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \left(r\vec{b}\right)$
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

**Beispiel:**

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

# Skalarprodukt - Berechnung

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ bzw. $\vec{a} \circ \vec{b}$ ist eine Reelle Zahl $c$, für die gilt:
$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$c = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$

**Beispiel:**

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$c = 2 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 0$

**Eigenschaften:**

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot (\vec{a} + \vec{c})$
- $r\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = (r\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \left(r\vec{b}\right)$
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

# Skalarprodukt - Berechnung

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ bzw. $\vec{a} \circ \vec{b}$ ist eine Reelle Zahl $c$, für die gilt:
$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$c = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$

**Eigenschaften:**

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot (\vec{a} + \vec{c})$
- $r\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = (r\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \left(r\vec{b}\right)$
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

**Beispiel:**

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$c = 2 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 0 = 12 + 12 + 0$

# Skalarprodukt - Berechnung

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ bzw. $\vec{a} \circ \vec{b}$ ist eine Reelle Zahl $c$, für die gilt:
$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$c = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$

**Eigenschaften:**

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot (\vec{a} + \vec{c})$
- $r\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = (r\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \left(r\vec{b}\right)$
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

**Beispiel:**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c = 2 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 0 = 12 + 12 + 0 = 24$$

# Skalarprodukt - Berechnung

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ bzw. $\vec{a} \circ \vec{b}$ ist eine Reelle Zahl $c$, für die gilt:
$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$c = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$

**Eigenschaften:**

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot (\vec{a} + \vec{c})$
- $r\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = (r\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \left(r\vec{b}\right)$
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

**Beispiel:**

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$c = 2 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 0 = 12 + 12 + 0 = 24$

Stehen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht zueinander?

# Skalarprodukt - Berechnung

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ bzw. $\vec{a} \circ \vec{b}$ ist eine Reelle Zahl $c$, für die gilt:
$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$c = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$

**Eigenschaften:**

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot (\vec{a} + \vec{c})$
- $r\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = (r\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \left(r\vec{b}\right)$
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

**Beispiel:**

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$c = 2 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 0 = 12 + 12 + 0 = 24$

Stehen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht zueinander?
Nein, denn $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$

# Winkel zwischen Vektoren

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ bzw. $\vec{a} \circ \vec{b}$ ist eine Reelle Zahl $c$,
für die gilt:
$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

# Winkel zwischen Vektoren

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ bzw. $\vec{a} \circ \vec{b}$ ist eine Reelle Zahl $c$,
für die gilt:
$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{c}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

# Winkel zwischen Vektoren

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ bzw. $\vec{a} \circ \vec{b}$ ist eine Reelle Zahl $c$,
für die gilt:
$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{c}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

# Winkel zwischen Vektoren

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ bzw. $\vec{a} \circ \vec{b}$ ist eine Reelle Zahl $c$,
für die gilt:
$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{c}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

# Winkel zwischen Vektoren

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ bzw. $\vec{a} \circ \vec{b}$ ist eine Reelle Zahl $c$,
für die gilt:
$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{c}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

**Beispiel:**

# Winkel zwischen Vektoren

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ bzw. $\vec{a} \circ \vec{b}$ ist eine Reelle Zahl $c$, für die gilt:
$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{c}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \cos^{-1} \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right)$$

**Beispiel:**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c = 2 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 0 = 12 + 12 + 0 = 24$$

# Winkel zwischen Vektoren

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ bzw. $\vec{a} \circ \vec{b}$ ist eine Reelle Zahl $c$, für die gilt:

$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{c}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

**Beispiel:**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c = 2 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 0 = 12 + 12 + 0 = 24$$

$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

# Winkel zwischen Vektoren

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ bzw. $\vec{a} \circ \vec{b}$ ist eine Reelle Zahl $c$, für die gilt:

$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{c}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

**Beispiel:**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c = 2 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 0 = 12 + 12 + 0 = 24$$

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \cos^{-1}\left(\frac{24}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 5^2} \cdot \sqrt{6^2 + 3^2}}\right)$$

# Winkel zwischen Vektoren

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ bzw. $\vec{a} \circ \vec{b}$ ist eine Reelle Zahl $c$, für die gilt:

$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{c}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

**Beispiel:**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c = 2 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 0 = 12 + 12 + 0 = 24$$

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \cos^{-1}\left(\frac{24}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 5^2} \cdot \sqrt{6^2 + 3^2}}\right)$$

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \cos^{-1}\left(\frac{24}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{45}}\right)$$

# Winkel zwischen Vektoren

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ bzw. $\vec{a} \circ \vec{b}$ ist eine Reelle Zahl $c$, für die gilt:

$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{c}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

**Beispiel:**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c = 2 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 0 = 12 + 12 + 0 = 24$$

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \cos^{-1}\left(\frac{24}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 5^2} \cdot \sqrt{6^2 + 3^2}}\right)$$

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \cos^{-1}\left(\frac{24}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{45}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{24}{45}\right)$$

# Winkel zwischen Vektoren

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ bzw. $\vec{a} \circ \vec{b}$ ist eine Reelle Zahl $c$, für die gilt:
$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{c}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

**Beispiel:**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c = 2 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 0 = 12 + 12 + 0 = 24$$

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \cos^{-1}\left(\frac{24}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 5^2} \cdot \sqrt{6^2 + 3^2}}\right)$$

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \cos^{-1}\left(\frac{24}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{45}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{24}{45}\right)$$

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 57,769^\circ$$

# Aufgaben

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie.

- $\vec{p} \cdot \vec{q} =$
- $\vec{q} \cdot \vec{r} =$
- $\vec{r} \cdot \vec{s} =$
- $5\,(\vec{q} \cdot \vec{r}) =$
- $5\vec{r} \cdot \vec{q} =$
- $20\vec{q} \cdot 20\vec{r} =$
- $100\vec{q} \cdot 20\vec{r} =$

Stehen die folgenden Vektorpaare senkrecht zueinander?

- $\vec{p}, \vec{r}$
- $\vec{q}, \vec{s}$
- $\vec{p}, \vec{s}$

Berechnen Sie.

- $\sphericalangle(\vec{p}, \vec{q}) \approx$
- $\sphericalangle(\vec{p}, \vec{r}) \approx$
- $\sphericalangle(\vec{r}, \vec{s}) \approx$

# Aufgaben

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie.

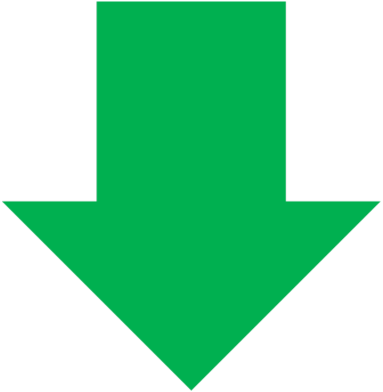
- $\vec{p} \cdot \vec{q} = 63$
- $\vec{q} \cdot \vec{r} = 38$
- $\vec{r} \cdot \vec{s} = 42{,}5$
- $5\,(\vec{q} \cdot \vec{r}) = 190$
- $5\vec{r} \cdot \vec{q} = 190$
- $20\vec{q} \cdot 20\vec{r} = 400\,(\vec{q} \cdot \vec{r}) = 15200$
- $100\vec{q} \cdot 20\vec{r} = 20\,(5\vec{q} \cdot \vec{r}) = 190$

Stehen die folgenden Vektorpaare senkrecht zueinander?

- $\vec{p}, \vec{r}$ ✗
- $\vec{q}, \vec{s}$ ✓
- $\vec{p}, \vec{s}$ ✗

Berechnen Sie.

- $\sphericalangle(\vec{p}, \vec{q}) \approx 67{,}415^\circ$
- $\sphericalangle(\vec{p}, \vec{r}) \approx 42{,}328^\circ$
- $\sphericalangle(\vec{r}, \vec{s}) \approx 19{,}638^\circ$



facebook.com/JeanHilftDir
Skype: JeanHilftDir

Folien: github.com/JeanHilftDir/Mathe

# Mathe Nachhilfe

## Analytische Geometrie - Vektoren

# Analytische Geometrie - Vektoren

- Null-, Einheits-, Gegenvektor, Kartesisches Koordinatensystem
- Grundrechenarten
  - Addition, Subtraktion
  - Multiplikation mit Skalar / Skalierung
- Kollinearität, Parallellität
- Linearkombination, Lineare (Un)Abhängigkeit, Komplanarität
- Skalarprodukt
  - Winkel zwischen Vektoren
- Vektorprodukt / Kreuzprodukt
  - Flächeninhalt von Parallelogrammen / Dreiecken
- Spatprodukt
  - Spat? WTF?
  - Volumen eines Spates

# Vektorprodukt - Berechnung

# Vektorprodukt - Berechnung

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix}$$

# Vektorprodukt - Berechnung

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix}$$

# Vektorprodukt - Berechnung

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix}$$

# Vektorprodukt - Berechnung

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix}$$

# Vektorprodukt - Berechnung

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix}$$

# Vektorprodukt - Berechnung

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix}$$

# Vektorprodukt - Berechnung

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix}$$

# Vektorprodukt - Berechnung

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix}$$

# Vektorprodukt - Berechnung

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \\ {\color{gray} x_a}\end{array} \times \begin{array}{c}\begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} \\ {\color{gray} x_b}\end{array} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix}$$

# Vektorprodukt - Berechnung

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \\ x_a \end{array} \; 1. \; \begin{array}{c}\begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} \\ x_b \end{array} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix}$$

# Vektorprodukt - Berechnung

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \\ x_a \end{array} \begin{array}{c} \\ 1. \\ 2. \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} \\ x_b \end{array} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix}$$

# Vektorprodukt - Berechnung

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \\ x_a \end{array} \begin{array}{c} 3. \\ 1. \\ 2. \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} \\ x_b \end{array} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix}$$

# Vektorprodukt - Berechnung

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 3. \\ 1. \\ 2. \end{array} & \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} \\ x_a & & x_b \end{array} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix}$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ ist ein Vektor $\vec{c}$ für den gilt:

# Vektorprodukt - Berechnung

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 3. \\ 1. \\ 2. \end{array} & \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} \\ x_a & & x_b \end{array} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix}$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ ist ein Vektor $\vec{c}$ für den gilt:

- $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| sin\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

# Vektorprodukt - Berechnung

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} & \begin{matrix} 3. \\ 1. \\ 2. \end{matrix} & \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} \\ x_a & & x_b \end{array} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix}$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ ist ein Vektor $\vec{c}$ für den gilt:

- $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| sin\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$
- $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$

# Vektorprodukt - Berechnung

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \\ x_a \end{array} \begin{array}{c} 3. \\ 1. \\ 2. \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} \\ x_b \end{array} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix}$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ ist ein Vektor $\vec{c}$ für den gilt:

- $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| sin\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$
- $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$
- $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem (falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig)

# Vektorprodukt - Berechnung

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} x_a \\ y_a \\ z_a \end{array}\right) \\ x_a \end{array} \begin{array}{c} 3. \\ 1. \\ 2. \end{array} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} x_b \\ y_b \\ z_b \end{array}\right) \\ x_b \end{array} = \left(\begin{array}{c} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{array}\right)$$

**Eigenschaften**

$\vec{a} \times \vec{b}$ ist ein Vektor $\vec{c}$ für den gilt:

- $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| sin\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$
- $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$
- $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem (falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig)

# Vektorprodukt - Berechnung

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \\ {\color{gray} x_a} \end{array} \begin{array}{c} 3. \\ 1. \\ 2. \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} \\ {\color{gray} x_b} \end{array} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix}$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ ist ein Vektor $\vec{c}$ für den gilt:

- $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$
- $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$
- $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem (falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig)

**Eigenschaften**

- $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

# Vektorprodukt - Berechnung

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \\ x_a \end{array} \begin{array}{c} 3. \\ 1. \\ 2. \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} \\ x_b \end{array} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix}$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ ist ein Vektor $\vec{c}$ für den gilt:

- $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| sin\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$
- $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$
- $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem (falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig)

**Eigenschaften**

- $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

# Vektorprodukt - Berechnung

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \\ x_a \end{array} \begin{array}{c} 3. \\ 1. \\ 2. \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} \\ x_b \end{array} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix}$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ ist ein Vektor $\vec{c}$ für den gilt:

- $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| sin\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$
- $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$
- $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem (falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig)

**Eigenschaften**

- $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- $r(\vec{a} \times \vec{b}) = (r\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (r\vec{b})$

# Vektorprodukt - Berechnung

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 3. \\ 1. \\ 2. \end{array} & \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} \\ x_a & & x_b \end{array} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix}$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ ist ein Vektor $\vec{c}$ für den gilt:

- $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| sin\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$
- $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$
- $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem (falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig)

**Eigenschaften**

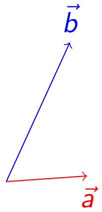
- $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- $r(\vec{a} \times \vec{b}) = (r\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (r\vec{b})$
- $\vec{a}, \vec{b}$ kollinear $\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$

# Flächeninhalte

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

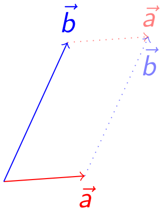
# Flächeninhalte

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$



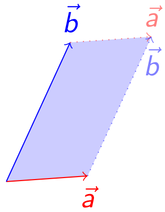
# Flächeninhalte

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$



# Flächeninhalte

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

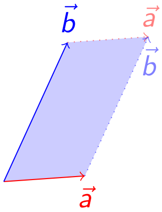


# Flächeninhalte

**Parallellogramm:**

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$



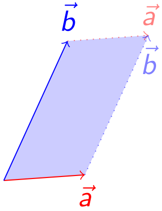
# Flächeninhalte

**Parallelogramm:**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$A = \left| \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ 5 \end{array} \times \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ 3 \end{array} \right|$$



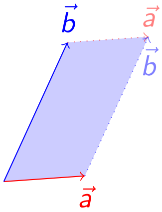
# Flächeninhalte

**Parallellogramm:**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$A = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$



# Flächeninhalte

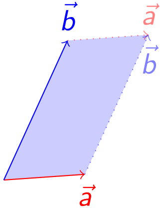
**Parallelogramm:**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$A = \left| \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \color{gray}{5} \end{array} \times \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \color{gray}{3} \end{array} \right| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$A = \sqrt{5^2 + (-9)^2 + 1^2}$$



# Flächeninhalte

**Parallellogramm:**

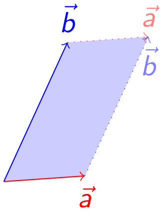
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$A = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$\begin{matrix} 5 & & 3 \end{matrix}$$

$$A = \sqrt{5^2 + (-9)^2 + 1^2} = \sqrt{107}$$



# Flächeninhalte

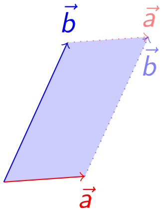
**Parallellogramm:**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$A = \left| \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ 5 \end{array} \times \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ 3 \end{array} \right| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$A = \sqrt{5^2 + (-9)^2 + 1^2} = \sqrt{107} \approx 10,344 FE$$



# Flächeninhalte

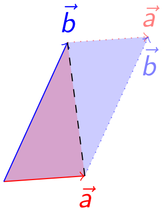
**Parallellogramm:**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$A = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 5 \end{matrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 3 \end{matrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$A = \sqrt{5^2 + (-9)^2 + 1^2} = \sqrt{107} \approx 10,344 FE$$



# Flächeninhalte

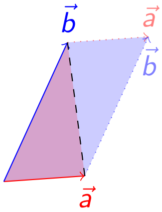
**Parallellogramm:**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$A = \left| \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ 5 \end{array} \times \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ 3 \end{array} \right| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$A = \sqrt{5^2 + (-9)^2 + 1^2} = \sqrt{107} \approx 10,344 FE$$




**Dreieck:**

$$A = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{2}$$

# Flächeninhalte

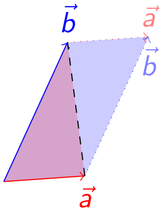
**Parallelogramm:**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$A = \left| \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ 5 \end{array} \times \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ 3 \end{array} \right| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$A = \sqrt{5^2 + (-9)^2 + 1^2} = \sqrt{107} \approx 10,344 FE$$




**Dreieck:**

$$A = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{2}$$

$$A \approx \frac{10,344}{2} \approx 5,172 FE$$

# Aufgaben

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \vec{s} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \vec{t} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Flächeninhalte der von den Vektoren aufgespannten Parallelogrammen und Dreiecke.

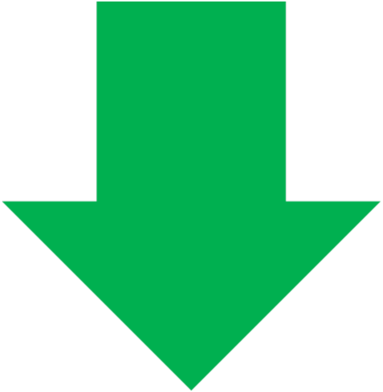
- $\vec{q}, \vec{r}$
- $\vec{r}, \vec{s}$
- $\vec{s}, \vec{t}$
- $\vec{t}, \vec{q}$
- $\vec{q}, \vec{s}$
- $\vec{r}, \vec{t}$

# Aufgaben

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \vec{s} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \vec{t} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Flächeninhalte der von den Vektoren aufgespannten Parallelogrammen und Dreiecke.

- $\vec{q}, \vec{r}$ $\quad A_{\Diamond} \approx 24{,}495 FE \quad A_{\triangle} \approx 12{,}247 FE$
- $\vec{r}, \vec{s}$ $\quad A_{\Diamond} \approx 22{,}450 FE \quad A_{\triangle} \approx 11{,}225 FE$
- $\vec{s}, \vec{t}$ $\quad A_{\Diamond} \approx 86{,}116 FE \quad A_{\triangle} \approx 43{,}058 FE$
- $\vec{t}, \vec{q}$ $\quad A_{\Diamond} \approx 19{,}209 FE \quad A_{\triangle} \approx 9{,}605 FE$
- $\vec{q}, \vec{s}$ $\quad A_{\Diamond} \approx 22{,}450 FE \quad A_{\triangle} \approx 11{,}225 FE$
- $\vec{r}, \vec{t}$ $\quad A_{\Diamond} \approx 103{,}097 FE \quad A_{\triangle} \approx 51{,}549 FE$



facebook.com/JeanHilftDir
Skype: JeanHilftDir

Folien: github.com/JeanHilftDir/Mathe

# Mathe Nachhilfe

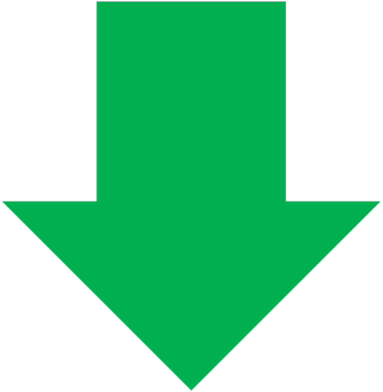
## Analytische Geometrie - Vektoren

# Analytische Geometrie - Vektoren

- Null-, Einheits-, Gegenvektor, Kartesisches Koordinatensystem
- Grundrechenarten
  - Addition, Subtraktion
  - Multiplikation mit Skalar / Skalierung
- Kollinearität, Parallellität
- Linearkombination, Lineare (Un)Abhängigkeit, Komplanarität
- Skalarprodukt
  - Winkel zwischen Vektoren
- Vektorprodukt / Kreuzprodukt
  - Flächeninhalt von Parallelogrammen / Dreiecken
- Spatprodukt
  - Spat? WTF?
  - Volumen eines Spates

# Spat? WTF?

# Volumen eines Spates



facebook.com/JeanHilftDir
Skype: JeanHilftDir

Folien: github.com/JeanHilftDir/Mathe