PRODUCTO PUNTO

Para el estudio de la topologia en $\mathbb{R}^n$ tenemos que estudiar una operación dentro de nustro espacio vectorial que es de mucha utilidad para definir una norma y con ello una métrica que llamamos Producto punto y tiene la siguiente

Definición :

El `Producto punto` es una función $<;>$ que en general $<;>: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que si $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y $\vec{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ entonces

$$< \vec{x}; \vec{y} >= \vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

De donde salen cuatro propiedades: Consideremos los vectores $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ & $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces

1. $\vec{v} \cdot \vec{0} = 0$
2. $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$
3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
4. $(\alpha \vec{v}) \cdot \vec{w} = \alpha(\vec{v} \cdot \vec{w})$

Dem. de 1:

Sean $\vec{v}, \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ & $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces, $\vec{0} = (0, 0, \cdots, 0)$, n-veces, es decir un vector con todas sus entradas iguales a cero.

$$\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \vec{0} &= (v_1, v_2, \cdots, v_n) \cdot (0, 0, \cdots, 0) \\
&= (v_1)0 + (v_2)0 + (v_3)0 + \cdots + (v_n)0 && Def.de <;> \\
&= 0 + 0 + 0 + \cdots + 0 && \text{Propiedades en } \mathbb{R} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\therefore \vec{v} \cdot \vec{0} = 0$$

■

y continuaremos con los siguientes incisos.

Dem. de 2:

$$\text{Sean } \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \vec{w} &= (v_1, v_2, \cdots, v_n) \cdot (w_1, w_2, \cdots, w_n) \\
&= (v_1)w_1 + (v_2)w_2 + (v_3)w_3 + \cdots + (v_n)w_n && Def.de <;> \\
&= w_1(v_1) + w_2(v_2) + w_3(v_3) + \cdots + w_n(v_n) && \text{Propiedades en } \mathbb{R} \\
&= (w_1, w_2, \cdots, w_n) \cdot (v_1, v_2, \cdots, v_n) && Def.de <;> \\
&= \vec{w} \cdot \vec{v}
\end{aligned}$$

$$\therefore \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$$

■

Dem. de 3:

$$\text{Sean } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= (u_1, u_2, \cdots, u_n) \cdot [(v_1, v_2, \cdots, v_n) + (w_1, w_2, \cdots, w_n)] \\
&= (u_1, u_2, \cdots, u_n) \cdot (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \cdots, v_n + w_n) \\
&= u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2) + u_3(v_3 + w_3) + \cdots + u_n(v_n + w_n) && Def.de <;> \\
&= u_1(v_1) + u_1(w_1) + u_2(v_2) + u_2(w_2) + \cdots + u_n(v_n) + u_n(w_n) && \text{Propiedades en } \mathbb{R} \\
&= u_1(v_1) + u_2(v_2) + \cdots + u_n(v_n) + u_1(w_1) + u_2(w_2) + \cdots + u_n(w_n) && Reacomodamos \\
&= (u_1, u_2, \cdots, u_n) \cdot (v_1, v_2, \cdots, v_n) + (u_1, u_2, \cdots, u_n) \cdot (w_1, w_2, \cdots, w_n) && Def.de <;> \\
&= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}
\end{aligned}$$

$$\therefore \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$\blacksquare$

Por último. *Dem. de 4:*

$$\text{Sean } \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n \text{ y } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
(\alpha\vec{v}) \cdot \vec{w} &= [\alpha(v_1, v_2, \cdots, v_n)] \cdot (w_1, w_2, \cdots, w_n) && \\
&= (\alpha v_1, \alpha v_2, \cdots, \alpha v_n) \cdot (w_1, w_2, \cdots, w_n) && Def.\text{de las operaciones en el } E.V. \\
&= (\alpha v_1)w_1 + (\alpha v_2)w_2 + (\alpha v_3)w_3 + \cdots + (\alpha v_n)w_n && Def.de <;> \\
&= \alpha(v_1w_1) + \alpha(v_2w_2) + \alpha(v_3w_3) + \cdots + \alpha(v_nw_n) && \text{Propiedades en } \mathbb{R} \\
&= \alpha[(v_1, v_2, \cdots, v_n) \cdot (w_1, w_2, \cdots, w_n)] && Def.de <;> \\
&= \alpha(\vec{v} \cdot \vec{w}) &&
\end{aligned}$$

$$\therefore (\alpha\vec{v}) \cdot \vec{w} = \alpha(\vec{v} \cdot \vec{w})$$

$\blacksquare$