Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Il est rappelé qu'il est tenu compte dans l'évaluation de la présentation et la rédaction des copies.

Problème : étude d'une fonction réciproque.

L'objet de ce problème est l'étude d'une fonction définie comme réciproque d'une primitive, méthode très classique en analyse. L'exponentielle peut être définie par exemple comme réciproque de la primitive de la fonction inverse s'annulant en 1. Notre fonction d'étude, notée sl ci-après, ressemble très fortement à la fonction sinus, mais en diffère à plusieurs égards. Les propriétés que vous allez établir sont des parallèles du sinus et de π en remplaçant sl par sin et σ par $\pi/2$.

On rappelle un cas du théorème de convergence monotone : soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone définie sur un intervalle. Si elle est bornée, alors elle admet des limites finies aux bords de son intervalle de définition.

1. Questions de cours : les démonstrations ne sont pas attendues.
   (a) Énoncer le théorème fondamental du calcul intégral.
   (b) On considère I et J deux intervalles réels, puis une fonction $f : I \mapsto J$ bijective et dérivable. En quels points de J sa réciproque est-elle dérivable ? Donner en ces points une expression de la dérivée de f^{-1}.

2. On définit pour tout réel x dans $]-1,1[$, $L(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$.
   a) Tracer le graphe de l'application $]-1,1[\to \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^4}}$.
   b) Justifier que l'application $L :]-1,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto L(x)$ est strictement croissante.
   c) Démontrer que L est impaire.
   d) Démontrer que $\forall x \in [0,1[, L(x) \leq \arcsin(x)$ et en déduire que l'application L admet des limites finies en 1 et en -1.

   On note $\sigma = \lim\limits_{x\to 1^-} L(x)$ que l'on ne cherchera pas à calculer. On prolonge l'application L en -1 et 1 en posant $L(1) = \sigma$ et $L(-1) = -\sigma$. On note encore L cette application.

   e) Montrer que l'application L ainsi étendue est une bijection de $[-1,1]$ dans $[-\sigma,\sigma]$.
   f) Démontrer que pour tous réels x, y dans $[0,1[$ tels que $x \leq y$, on a l'inégalité $L(y)-L(x) \geq \sqrt{1-x}-\sqrt{1-y}$.
   Indication : commencer par montrer que $\forall t \in [0,1[, \dfrac{1}{\sqrt{1-t^4}} \geq \dfrac{1}{2\sqrt{1-t}}$.
   g) En déduire que l'application L n'est pas dérivable en 1.

3. On note $\mathrm{sl} : [-\sigma,\sigma] \to [-1,1]$ la réciproque de l'application L précédente, prolongée par symétrie par rapport à l'axe d'équation $x = \sigma$, puis par 4σ-périodicité. Un graphe de cette fonction est produit en dernière page pour vous aider, mais celui-ci ne peut être utilisé pour démontrer ce qui suit.
   a) Calculer $\mathrm{sl}(k\sigma)$ pour tout k dans $\mathbb{Z}$.
   b) Montrer que la fonction sl est continue sur $\mathbb{R}$.
   c) Montrer que la fonction sl est dérivable sur $]-\sigma,\sigma[$ et vérifie
   $$\forall x \in]-\sigma,\sigma[, \mathrm{sl}'(x) = \sqrt{1-\mathrm{sl}^4(x)}$$
   d) En assemblant le taux d'accroissement de sl en σ, démontrer que sl est dérivable en σ et préciser la valeur de $\mathrm{sl}'(\sigma)$.
   e) Donner une relation entre $\mathrm{sl}'(x)$ et $\mathrm{sl}(x)$ pour tout x dans $[\sigma, 3\sigma]$.

f) Démontrer que sl est deux fois dérivable sur $]-\sigma,\sigma[$ et donner une relation simple entre sl'' et sl sur cet intervalle.

On admet que sl *est deux fois dérivable sur* $\mathbb{R}$ *entier et que la relation entre* sl'' *et* sl *est valable sur* $[-\sigma,\sigma]$.

4. On considère un intervalle I d'intérieur non vide et on note (E) l'équation différentielle $y''+2y^3=0$ d'inconnue $y : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable.

   a) Montrer que la fonction sl est solution de (E) sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

   Soit f *une solution de* (E). *On note* $H=(f')^2+f^4$.

   b) Montrer que H est constante.

   On se place dans le cas où $f'>0$ *dans les deux prochaines questions.*

   c) Justifier la bonne définition de l'expression $L(H^{-1/4}f(x))$ pour tout réel x dans I.

   d) Montrer que $\varphi : I \to \mathbb{R}, x \mapsto L(H^{-1/4}f(x))$ est de classe C^1 sur tout intervalle où f' ne s'annule pas. En déduire qu'il existe une constante réelle b telle que pour tout réel x dans un tel intervalle,

   $$f(x)=H^{1/4}\mathrm{sl}\left(H^{1/4}x+b\right)$$

   e) En déduire que f' s'annule au moins une fois tout intervalle ouvert de longueur supérieure à $2\sigma H^{-1/4}$.

5. On note $\mathrm{cl} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{\mathrm{sl}'(x)}{1+\mathrm{sl}^2(x)}$.

   (a) Simplifier pour tout réel x, $\mathrm{cl}^2(x)+\mathrm{sl}^2(x)+\mathrm{cl}^2(x)\mathrm{sl}^2(x)$.

   (b) Démontrer que cl est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

   (c) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{sl}(\sigma - x)=\mathrm{cl}(x)$.

   (d) Démontrer que pour tout réel a, la fonction $G_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}'(a-x)+\mathrm{sl}(a-x)\mathrm{sl}'(x)}{1+\mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(a-x)}$ est constante.

   (e) En déduire une expression pour tous réels x, y de $\mathrm{sl}(x+y)$ en fonction de $\mathrm{cl}(x)$, $\mathrm{cl}(y)$, $\mathrm{sl}(x)$ et $\mathrm{sl}(y)$.

   (f) Démontrer la formule de Fagnano (1750)

   $$\forall x \in [-\mathrm{sl}(\sigma/2), \mathrm{sl}(\sigma/2)], \quad 2\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^{\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

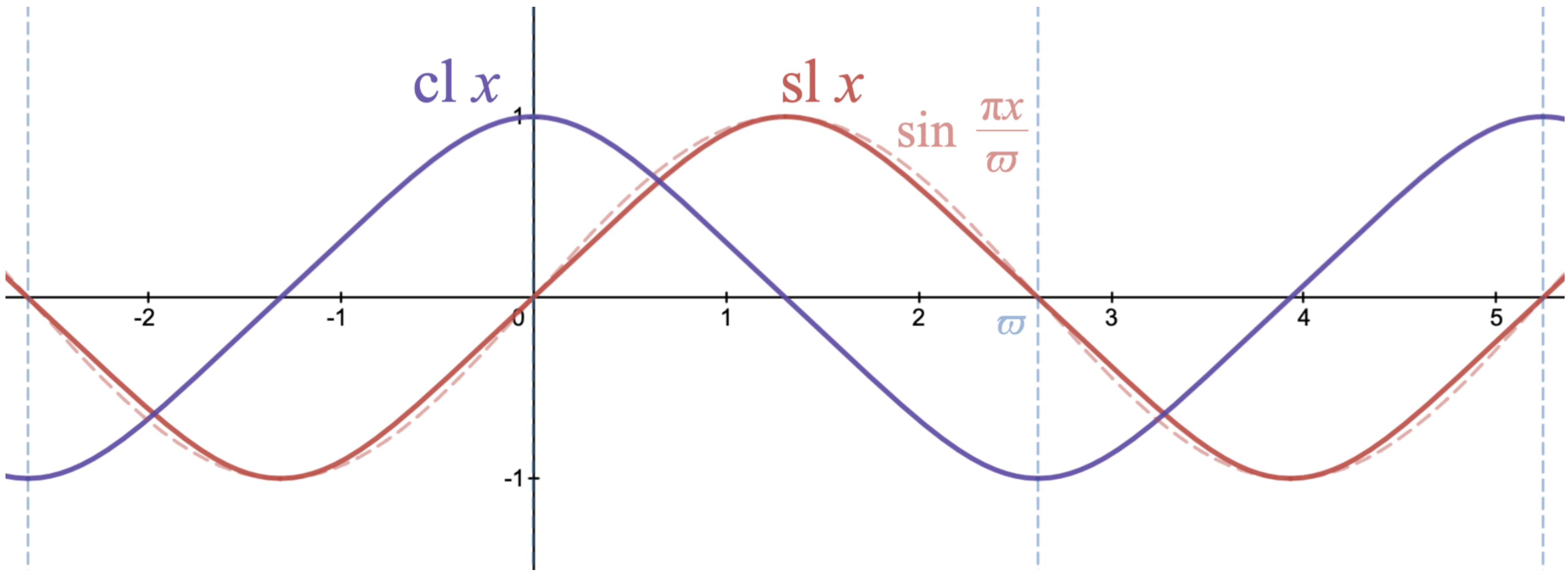

FIGURE 1 – Graphe des fonctions sl et cl avec la notation $\varpi = 2\sigma$.