**IPESUP 2023/2024**

Colle 3 MPSI/MP2I    Jeudi 19 octobre 2023

⋆⋆⋆

Planche 1

⋆⋆⋆

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, $n \in \mathbb{N}$. Factoriser $a^n - b^n$.
2. Soit $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np(1-p) + n^2 p^2$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note pour tout réel $x$, $\mathrm{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Déterminer une fonction polynomiale $T_n$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(nx) = T_n(\mathrm{ch}(x))$$

⋆⋆⋆

Planche 2

⋆⋆⋆

1. Formule du binôme. Énoncé et démonstration.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Faire l'étude de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1 + x^{2n+1}}{1 + x^{2n}}$. Montrer en particulier que

$$\forall x > 1, 0 < x - f(x) < \frac{1}{2n}$$

3. On note pour tous entiers naturels $n, p$, $S_n^p = \sum_{k=0}^{n} k^p$. Montrer que

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, (p+1)S_n^p = (n+1)^{p+1} - \sum_{q=0}^{p-1} \binom{p+1}{q} S_n^q$$

⋆⋆⋆

Planche 3

⋆⋆⋆

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Définition de la partie entière de $x$, la caractériser via un encadrement.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence via

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \cos(2^n x) u_n.$$

   (a) Pour quelles valeurs de $x$, cette suite est-elle géométrique ?
   (b) Déterminer une expression simple de cette suite et donner sa limite le cas échéant.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer

$$\sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant n} k_2 k_1 = \binom{n+1}{3} \frac{3n+2}{4}$$

⋆⋆⋆

Bonus

Soit $f$ et $g$ deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ infiniment dérivables. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (gf)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

⋆⋆⋆