Déterminants

Cornou Jean-Louis

31 mai 2024

L'objectif de ce cours est de construire un scalaire qui permette « facilement » de déterminer si une famille est une base, si une matrice est inversible. Cela se base sur la notion de volume du parallélotope engendré par les vecteurs de cette base.
On fixe E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ un corps (de caractéristique différente de 2).

1 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base.

1.1 Formes multilinéaires alternées.

Définition 1 *Soit n un entier naturel non nul et $f \in \mathcal{F}(E^n, \mathbb{K})$. On dit que f est une forme n-linéaire (ou multilinéaire) sur E lorsque*

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \forall (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in E^{n-1}, g : E \mapsto \mathbb{K}, x \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$$

Autrement dit, lorsque qu'on fixe $n-1$ variables, « l'application de la dernière variable » est une forme linéaire.

Exemple 1 *L'application $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod_{i=1}^n x_i$ est n-linéaire. Lorsque $n = 2$, on dit que l'application est bilinéaire. Par exemple, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \to \mathbb{K}, (A, B) \mapsto Tr(AB)$ est bilinéaire.*

Notation
On note $\mathcal{L}^n(\mathbb{K})$ l'ensemble de ces applications. Notation non officielle.

Propriété 1 *$\mathcal{L}^n(\mathbb{K})$ est un sev de $\mathcal{F}(E^n, \mathbb{K})$.*

Démonstration. Inintéressante.

Définition 2 *Soit $f \in \mathcal{L}^n(\mathbb{K})$. On dit que f est*

— *symétrique lorsque*

$$\forall \sigma \in S_n, \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \dots, x_n)$$

— *antisymétrique lorsque*

$$\forall \sigma \in S_n, \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_n)$$

— *alternée lorsque*

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \exists (i, j) \in [\![1, j]\!]^2, i \neq j, x_i = x_j \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Notation
On note l'ensemble des formes n linéaires alternées $\Lambda^n(E)$. C'est un sev de $\mathcal{L}^n(E)$.

Exemple 2 *L'application $(\mathbb{K}^2)^2 \to \mathbb{K}, ((a, b), (c, d)) \mapsto ad - bc$ est bilinéaire antisymétrique. Elle est également alternée.*

Propriété 2 *Soit $f \in \mathcal{L}^n(\mathbb{K})$. Alors on a les équivalences :*

- *f est symétrique ssi pour toute transposition τ de S_n,*

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n, f(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

- *f est antisymétrique ssi pour toute transposition τ de S_n,*

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n, f(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}) = -f(x_1, \ldots, x_n)$$

Démonstration. — Si f est symétrique, la définition de la symétrie de f est valable pour toute permutation, a fortiori pour toute transposition. Réciproquement, supposons pour toute transposition τ de S_n,

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n, f(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

Soit $\sigma \in S_n$, alors σ est produit de transpositions. On en déduit par récurrence sur le nombre de transpositions que

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n, f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

donc que f est symétrique.

— Soit τ une tranposition, alors $\varepsilon(\tau) = -1$, ce qui donne le sens direct. Pour le sens indirect, supposons que pour toute transposition τ de S_n,

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n, f(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}) = -f(x_1, \ldots, x_n)$$

Soit $\sigma \in S_n$, alors σ est produit de transpositions, disons de k transpositions. Alors par récurrence sur k.

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n, f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = (1)^k f(x_1, \ldots, x_n)$$

Comme la signature est un morphisme de groupes, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$, ce qui donne le résultat attendu.

Propriété 3 *Soit $f \in \mathcal{L}^n(\mathbb{K})$. Alors f est antisymétrique ssi elle est alternée.*

Démonstration. Supposons f antisymétrique. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ tel que $\exists (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j, x_i = x_j$. On note alors τ la transposition $(i\, j)$. Cela entraîne

$$f(x_1, \ldots, x_n) = -f(x_\tau(1), \ldots, x_{\tau(n)}) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = -f(x_1, \ldots x_n)$$

puisque $x_i = x_j$. On en déduit que $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, donc que f est alternée.
Réciproquement, supposons f alternée. Soit τ une transposition de S_n. Notons-la $(i\, j)$ avec $i < j$ dans $[\![1,n]\!]$. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. Comme f est alternée, $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + x_j, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_i + x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) = 0$ où on a choisi $x_i + x_j$ en i-ième et j-ième place. On développe par bilinéarité, ce qui donne

$$0 = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_i + x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) + f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_i + x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

On continue en allégeant les notations

$$0 = f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) + f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$$

Comme f est alternée, $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = 0$ et $f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = 0$. Au final,

$$f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = -f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$$

soit encore

$$f(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(i)}, \ldots, x_{\tau(i)}, \ldots, x_{\tau(n)}) = -f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$$

D'après la propriété précédente, cela suffit à établir que f est antisymétrique.

Propriété 4 *Soit $f \in \Lambda^n(\mathbb{K})$ une forme n-linéaire alternée et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille liée. Alors $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.*

Démonstration. Notons $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$. Comme ce n-uplet de scalaires est non nul, il existe un indice j dans $[\![1,n]\!]$ tel que $\lambda_j \neq 0$, ce qui permet d'écrire

$$x_j = \sum_{i=1, i \neq j} -\frac{\lambda_i}{\lambda_j} x_i = \sum_{i=1, i \neq j}^n \mu_i x_i$$

On utilise alors la multilinéarité de f via

$$f(x_1, \ldots, \sum_{i=1, i \neq j} \mu_i x_i, \ldots, x_n) = \sum_{i=1, i \neq j}^n \mu_i f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$$

Dans cette dernière écriture, pour chaque i dans $[\![1,n]\!]$ distinct de j, le vecteur x_i est placé en j-ième place. Comme f est alternée, $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = 0$ puisque x_i apparaît en i-ième et en j-ième place. Conclusion, $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1, i \neq j}^n \mu_i 0 = 0$.

1.2 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base.

On fixe dans cette partie $n = \dim(\mathrm{E})$ non nul. On va étudier les formes n-linéaires sur E, donc ayant même nombre d'arguments que la dimension de E.

Théorème 1 *Soit $b = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de* E *et $f \in \Lambda^n(\mathrm{E})$. Alors il existe un scalaire λ tel que*

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{E}^n, f(x_1, \ldots, x_n) = \lambda \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} x_{\sigma(j),j}$$

où, pour tout j dans $[\![1, n]\!]$, on décompose x_j dans la base b sous la forme $\sum_{i=1}^n x_{i,j} e_i$.

Exemple 3 *Cas particulier $n = 2$ avec la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{K}^2$. Notons $x_1 = (x_{1,1}, x_{2,1})$ et $x_2 = (x_{1,2}, x_{2,2})$.*

Démonstration. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{E}^n$ avec $\forall j \in [\![1, n]\!], x_j = \sum_{i=1}^n x_{i,j} e_i$. Par multilinéarité de f, on a

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} x_{i_1,1} x_{i_2,2} \ldots x_{i_n,n} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n})$$

Comme f est alternée, on sait que $f(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n})$ est nul dès que deux indices i_k, i_l sont égaux parmi $i_1, i_2, \ldots, i_n$. Autrement dit, on peut sélectionner dans cette somme les familles d'indices $i_1, \ldots, i_n$ deux à deux distincts, autrement dit les applications $[\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!], k \mapsto i_k$ injectives, ce qui revient à sélectionner les applications bijectives de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$, i.e S_n. Ainsi,

$$\begin{aligned}
f(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} x_{\sigma(1),1} x_{\sigma(2),2} \cdots x_{\sigma(n),n} f(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \left(\prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i),i} \right) (\varepsilon(\sigma) f(e_1, \ldots, e_n)) \quad \text{puisque f est antisymétrique} \\
&= f(e_1, \ldots, e_n) \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i),i} \right)
\end{aligned}$$

En posant $\lambda = f(e_1, \ldots, e_n)$, on obtient le résultat attendu.

Propriété 5 *L'ensemble $\Lambda^n(\mathrm{E})$ est un espace vectoriel est de dimension* 1.

Démonstration. $\mathcal{L}^n(\mathrm{E}, \mathrm{K})$ est un espace vectoriel. La stabilité par combinaison linéaire de $\Lambda^n(\mathrm{E})$ est laissée à votre soin. On note $\Delta : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n x_{\sigma(j),j}$ avec les notations de la décomposition précédente. La n-linéarité est vérifiée puisque c'est une somme de fonctions n-linéaires. Vérifions qu'elle est antisymétrique. Soit $\rho \in \mathrm{S}_n$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{E}^n$. Alors

$$\begin{aligned}
\Delta(x_{\rho(1)}, \ldots, x_{\rho(n)}) &= \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} x_{\sigma(j),\rho(j)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} x_{\sigma \circ \rho^{-1}(j),k} \quad \text{changement de variable } k = \rho(j) \text{ dans le produit} \\
&= \sum_{\sigma' \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma' \circ \rho^{-1}) \prod_{k=1}^{n} x_{\sigma'(k),k} \quad \text{changement de variable } \sigma' = \sigma \circ \rho^{-1} \text{ dans la somme} \\
&= \varepsilon(\rho) \Delta(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{car } \varepsilon(\rho^{-1}) = \varepsilon(\rho)
\end{aligned}$$

De plus, pour tout entier j dans $[\![1, n]\!]$, $e_j = \sum_{i=1}^n \delta_{i,j} e_i$, donc

$$\Delta(e_1, \ldots, e_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} \delta_{\sigma(j),j}$$

Soit $\sigma \in \mathrm{S}_n$. La seule possibilité pour que le produit $\prod_{j=1}^n \delta_{\sigma(j),j}$ soit non nul est que $\forall j \in [\![1, n]\!], \sigma(j) = j$, i.e $\sigma = \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$, dont la signature vaut 1. Ainsi, $\Delta(e_1, \ldots, e_n) = 1$. D'après le théorème précédent, on vient de prouver que $\Lambda^n(\mathrm{E}) = \mathrm{Vect}(\Delta)$ avec Δ non nul. C'est donc bien une droite.

Définition 3 *Soit $b = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. L'unique forme n-linéaire alternée f telle que $f(e_1, \ldots, e_n) = 1$ s'appelle le déterminant dans la base b, noté $\det_b$.*

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{E}^n, \det_b(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} x_{\sigma(j),j}$$

où, pour tout j dans $[\![1, n]\!]$, on décompose x_j dans la base b sous la forme $\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} e_i$.

☞ **Remarque**
A l'aide de la base duale $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$, on peut écrire (je vous le déconseille)

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{E}^n, \det_b(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} e_{\sigma(j)}^*(x_j)$$

Exemple 4 *Déterminant dans la base canonique dans $\mathbb{K}^2$: $((a, b), (c, d)) \mapsto ad - bc$.*
Déterminant dans la base canonique dans $\mathbb{K}^3$: $((a, b, c), (d, e, f), (g, h, i)) \mapsto aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$.

Propriété 6 *Soit $b = (x_1, \ldots, x_n)$ et $b' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ deux bases de E. Alors*

$$\det_b = \det_b(x'_1, \ldots, x'_n) \det_{b'} = \det_b(b') \det_{b'}$$

Démonstration. On sait que $\det_b$ est une forme n-linéaire alternée non nulle, puisqu'elle vaut 1 en b. De même, $\det_{b'}$ est une forme n-linéaire alternée non nulle. Comme $\Lambda^n(\mathrm{E})$ est de dimension 1, il existe un un scalaire λ tel que $\det_b = \lambda \det_{b'}$. On évalue en b', ce qui donne $\lambda = \det_b(b')$.

Propriété 7 *Soit b une base de E, et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. Alors $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E si et seulement si $\det_b(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.*

Démonstration. Supposons que $b' = (x_1, \ldots, x_n)$ est une base. D'après ce qui précède, $\det_{b'}(b) \det_b(b') = 1$, donc $\det_b(b') = \det_b(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$. Si $(x_1 \ldots, x_n)$ n'est pas une base, alors elle est liée (la liberté suffirait à établir que c'est une base au vu de sa longueur). Comme $\det_b$ est une forme n-linéaire alternée, $\det_b(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Exemple 5 *Soit $n \geq 3$. Soit $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$. Pour tout j dans $[\![1, n]\!]$, on note $x_j = \sum_{i=1}^{n} \cos(a_i + a_j) e_i$. Montrons que $\det_{(e_1, \ldots, e_n)}(x_1, \ldots, x_n) = 0$. On introduit pour cela $u = \sum_{i=1}^{n} \cos(a_i) e_i$ et $v = \sum_{i=1}^{n} \sin(a_i) e_i$. Les formules d'addition du cosinus entraînent alors $\forall j \in [\![1, n]\!], x_j = \cos(a_j) u - \sin(a_j) v \in \mathrm{Vect}(u, v)$. On en déduit que le rang de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ vaut au plus 2, alors que $n > 3$. Cette famille n'est pas génératrice, donc n'est pas une base. Par conséquent, $\det_{(e_1, \ldots, e_n)}(x_1, \ldots, x_n) = 0$.*

Propriété 8 *Soit b et b' deux bases de E. Alors $\det_b(b') \det_{b'}(b) = 1$.*

Démonstration. Rappelons que $\det_b(b) = 1$ par définition du déterminant d'une famille de vecteurs dans la base b. En évaluant l'égalité $\det_b = \det_b(b') \det_{b'}$ sur la base b, il vient

$$1 = \det_b(b') \det_{b'}(b)$$

2 Déterminant.

On fixe toujours $n = \dim(\mathrm{E})$. On va voir qu'on peut s'affranchir des dépendances dans les bases quand on considère des matrices ou des endomorphismes.

2.1 Déterminant d'un endomorphisme.

Propriété 9 *Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Alors pour toute base $b = (e_1, \dots, e_n)$ de* E*, le scalaire* $\det_b(u(e_1), \dots, u(e_n))$ *ne dépend pas de la base b choisie. On l'appelle déterminant de u, noté* $\det(u)$.

Démonstration. Soit b une base de E. Notons $f : \mathrm{E}^n \to \mathbb{K}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \det_b(u(x_1), \dots, u(x_n))$. Cette application est n-linéaire alternée (démontrez-le!). Il existe alors un scalaire λ tel que $f = \lambda \det_b$. En évaluant en b, on trouve $\lambda = f(b)$. Soit b' une base de E. On écrit alors via la formule $\det_{b'} = \det_{b'}(b) \det_b$,

$$\begin{aligned}\det_{b'}(u(e'_1), \dots, u(e'_n)) &= \det_{b'}(b) \det_b(u(e'_1), \dots, u(e'_n)) \\ &= det_{b'}(b) f(e'_1, \dots, e'_n) \\ &= \det_{b'}(b) f(b) \det_b(b') \\ &= \det_b(u(e_1), \dots, u(e_n))\end{aligned}$$

Exemple 6 *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u = \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E}$ l'homothétie de rapport λ. Alors* $\det(u) = \det_{e_1, \dots, e_n}(\lambda e_1, \dots, \lambda e_n) = \lambda^n \det_{(e_1, \dots, e_n)}(e_1, \dots, e_n) = \lambda^n$.

⚠ **Attention**
L'application $\mathcal{L}(\mathrm{E}) \to \mathbb{K}, u \mapsto \det(u)$ n'est PAS linéaire !

Exemple 7 *On note $\mathrm{T} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{A} \mapsto \mathrm{A}^\mathrm{T}$ l'application linéaire de transposition. On connaît la somme directe $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, de sorte qu'en choisissant une base adaptée à cette décomposition, on dispose d'une base $b = (\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_{n(n+1)/2}, \mathrm{E}_{n(n+1)/2+1}, \dots, \mathrm{E}_{n^2})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que*

$$\forall j \in [\![1, n(n+1)/2]\!], \mathrm{T}(\mathrm{E}_i) = \mathrm{E}_i, \quad \forall j \in [\![n(n+1)/2+1, n^2]\!], \mathrm{T}(\mathrm{E}_i) = -\mathrm{E}_i$$

Le déterminant de T *est alors donné par*

$$\det(\mathrm{T}) = \det_b(\mathrm{T}(\mathrm{E}_1), \dots, \mathrm{T}(\mathrm{E}_{n(n+1)/2}), \mathrm{T}(\mathrm{E}_{n(n+1)/2+1}), \dots, \mathrm{T}(\mathrm{E}_{n^2})) = (-1)^{n(n-1)/2} \det_b(b) = (-1)^{n(n-1)/2}$$

Propriété 10 *Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et b une base de* E*. Alors*

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{E}^n, \det_b(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det(u) \det_b(x_1, \dots x_n)$$

Démonstration. Notons $b = (e_1, \dots, e_n)$. Comme vu précédemment, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \det_b(u(x_1), \dots, u(x_n))$ est n-linéaire alternée, donc de la forme $\lambda \det_b$ avec $\lambda = \det_b(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \det(u)$.

Propriété 11 (Multiplicativité du déterminant) *Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})^2$. Alors* $\det(uv) = \det(u)\det(v)$.

Démonstration. Soit $b = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors

$$\begin{aligned}\det(uv) &= \det_b(uv(e_1), \dots, uv(e_n)) \\ &= \det(u) \det_b(v(e_1), \dots, v(e_n)) \\ &= \det(u) \det(v) \det_b(e_1, \dots, e_n) \\ &= \det(u) \det(v)\end{aligned}$$

Corollaire
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer ce qui précède avec u et $v = \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E}$.

Propriété 12 *Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. L'endomorphisme u est inversible si et seulement si* $\det(u) \neq 0$*, auquel cas*

$$\det(u^{-1}) = \det(u)^{-1}$$

Démonstration. Supposons u inversible, alors $\det(u)\det(u^{-1}) = \det(uu^{-1}) = \det(\mathrm{Id}_E) = 1 \neq 0$, donc $\det(u) \neq 0$. Réciproquement, supposons $\det(u) \neq 0$, soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Alors $\det(u) = \det_b(u(e_1),\dots,u(e_n)) \neq 0$. Par conséquent, la famille $(u(e_1),\dots,u(e_n))$ est une base de E. Comme u envoie une base sur une base, c'est un isomorphisme.
Dans ce cas de figure, on a prouvé que $\det(u)\det(u^{-1}) = 1$, i.e $\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det(u)}$.

Corollaire
L'application $\mathrm{GL}(E) \to \mathbb{K}\backslash\{0\}, u \mapsto \det(u)$ *est un morphisme de groupes.*

Exercice 1 *Pour tout t dans $\mathbb{R}$, on note $R_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x\cos(t) + y\sin(t), -x\sin(t) + y\cos(t))$. Montrer que pour tout réel t, $\det(R_t) = 1$. L'ensemble de ces endomorphismes de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ forme-t-il un groupe pour la loi de composition ? Existe-t-il d'autres endomorphismes de R^2 de déterminant 1 ?*

2.2 Déterminant d'une matrice.

Définition 4 *Soit $A = (a_{i,j})_{1\le i\le n, 1\le j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant de A est le déterminant de ses colonnes dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, i.e*

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=i}^{n} a_{\sigma(j),j}$$

Notation
On note classiquement ce déterminant sous la forme

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Exemple 8
— *Déterminant de matrice diagonale, notons $D = (d_j\delta_{i,j})_{1\le i\le n, 1\le j\le n}$ une matrice diagonale. Alors*

$$\det(D) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=i}^{n} d_j\delta_{\sigma(j),j}$$

Le seul terme a priori non nul est celui pour la permutation σ identique de signature 1, donc

$$\det(D) = \prod_{j=1}^{n} d_j$$

Autrement dit, le déterminant d'une matrice diagonale est le produit de ses termes diagonaux.

— *Déterminant de de matrice triangulaire. Notons $T = (t_{i,j})_{1\le i\le n, 1\le j\le n}$ une matrice triangulaire supérieure. On commence par établir un petit lemme sur les permutations distinctes de l'identité. Soit $\sigma \in S_n$. Supposons que $\forall j[\![1,n]\!], \sigma(j) \le j$. Alors,*

$$\sum_{j=1}^{n} (j - \sigma(j)) = \sum_{j=1}^{n} j - \sum_{k=1}^{n} k = 0$$

est une somme nulle de termes tous positifs. Donc tous ces termes sont nuls. Par conséquent, $\forall j \in [\![1,n]\!], \sigma(j) = j$ et σ est l'identité. Par contraposition, si σ est différente de l'identité, il existe un entier j dans $[\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(j) > j$.

$$\det(T) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} t_{\sigma(j),j}$$

Soit $\sigma \in S_n$. Si σ est différente de l'identité, il existe un entier j tel que $\sigma(j) > j$. Comme T est triangulaire supérieure, $t_{\sigma(j),j)} = 0$, donc le produit correpondant à σ est nul. Il ne reste donc que le terme pour la permutation identitique, soit

$$\det(T) = \prod_{j=1}^{n} t_{j,j}$$

Autrement dit, le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est le produit de ses éléments diagonaux.

Propriété 13 *Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Pour toute base b de* E*,* $\det u = \det(\mathrm{M}(u)_b)$*.*

Démonstration. Soit b une base de E, notons $b = (e_1, \dots, e_n)$. On sait que $\det(u) = \det_b(u(e_1), \dots, u(e_n))$. On décompose alors pour tout entier j dans $[\![1, n]\!]$, $u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$, ce qui donne $\det(u) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(j),j}$. On reconnaît alors le déterminant de la matrice $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ qui n'est autre que la matrice de u dans la base b.

Propriété 14
— *Soit* $(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\det(\mathrm{MN}) = \det(\mathrm{M}) \det(\mathrm{N})$.
— *Soit* $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. M *est inversible si et seulement si* $\det(\mathrm{M}) \neq 0$.

Démonstration.
— On passe aux endomorphismes canoniquement associés et on note b la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\det(\mathrm{MN}) = \det(\mathrm{M}(f_{\mathrm{MN}})_b) = \det(f_{\mathrm{MN}}) = \det(f_{\mathrm{M}} \circ f_{\mathrm{N}}) = \det(f_{\mathrm{M}}) \det(f_{\mathrm{N}}) = \det(\mathrm{M}) \det(\mathrm{N})$$

— Si M est inversible, alors $\det(\mathrm{M}) \det(\mathrm{M}^{-1}) = \det(\mathrm{MM}^{-1}) = \det(\mathrm{I}_n) = 1 \neq 0$, donc $\det(\mathrm{M}) \neq 0$. Réciproquement, si $\det(\mathrm{M}) \neq 0$, alors son endomorphisme canoniquement associé est de déterminant non nul, donc inversible. Par conséquent, M est inversible.

Propriété 15 *L'application déterminant induit un morphisme de groupes de* GL(E) *(respectivmeent* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$*) sur* $\mathbb{K}^*$*.*

Exemple 9 *L'ensemble des matrices de déterminant* 1 *est un sous-groupe de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$*, appelé groupe spécial linéaire, noté* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$*.*

Propriété 16 *Deux matrices semblables ont même déterminant.*

Propriété 17

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}) = \det(\mathrm{M})$$

Démonstration. Notons $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ et $\mathrm{M}^{\mathrm{T}} = (m'_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ de sorte que $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, m_{i,j} = m'_{j,i}$. Alors

$$\begin{aligned}
\det(\mathrm{M}) &= \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n m_{\sigma(j),j} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n m'_{j,\sigma(j)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n m'_{\sigma^{-1}(k),k} \quad \text{changement de variable } k = \sigma(j) \\
&= \sum_{\sigma' \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma'^{-1}) \prod_{k=1}^n m'_{\sigma'(k),k} \quad \text{changement de variable } \sigma' = \sigma^{-1} \\
&= \sum_{\sigma' \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma') \prod_{k=1}^n m'_{\sigma'(k),k} \quad \text{puisque } \varepsilon(\sigma'^{-1}) = 1/\varepsilon(\sigma') = \varepsilon(\sigma') \\
&= \det(\mathrm{M}^{\mathrm{T}})
\end{aligned}$$

Propriété 18 *Pour toute matrice* $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, on note* $(\mathrm{L}_1(\mathrm{A}), \dots, \mathrm{L}_n(\mathrm{A}))$ *ses lignes. En notant b la base canonique de* $\mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{K})$*, alors* $\det_b(\mathrm{L}_1(\mathrm{A}), \dots, \mathrm{L}_n(\mathrm{A})) = \det(\mathrm{A})$*. En particulier, l'application* $\mathrm{A} \mapsto \det_b(\mathrm{L}_1(\mathrm{A}), \dots, \mathrm{L}_n(\mathrm{A}))$ *est n-linéaire alternée.*

3 Calcul de déterminants

3.1 Méthode du pivot

Propriété 19 (Déterminant des matrices d'opérations élémentaires) — *Soit* $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j$, $\lambda \in \mathbb{K}$. *Alors* $\det(T_{i,j}(\lambda)) = \det(I_n + \lambda E_{i,j}) = 1$.

— *Soit* $i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$. *Alors* $\det(D_i(\lambda)) = \det(I_n + (\lambda-1)E_{i,i}) = \lambda$.

— *Soit* $\sigma \in S_n$. *Alors,* $\det(P_\sigma) = \det((\delta_{i,\sigma(j)})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} = \varepsilon(\sigma)$. *En particulier, la matrice d'une transposition est de déterminant* -1.

Démonstration. — Une matrice de transvection est triangulaire. Son déterminant vaut le produit de ses coefficient diagonaux, donc vaut 1.

— Une matrice de dilatation est diagonale. Son déterminant vaut le produit de ses coefficient diagonaux, donc vaut λ.

— On utilise la base canonique b de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, notée $(E_1,\dots,E_n)$. L'endomorphisme u canoniquement associé à P_σ vérifie $\forall j \in [\![1,n]\!], u(E_j) = E_{\sigma(j)}$. Mais alors, $\det_b(u(E_1),\dots,u(E_n)) = \det_B(E_{\sigma(1)},\dots,E_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\det_b(b) = \varepsilon(\sigma)$ puisque le déterminant est antisymétrique. Ainsi, $\det(P_\sigma) = \det(u) = \varepsilon(\sigma)$.

Autre version bien trop longue : On introduit l'application $g : S_n \to \mathbb{K}^*, \sigma \mapsto \det(P_\sigma)$. C'est un morphisme de groupe car $\forall (\sigma,\sigma') \in (S_n)^2, P_{\sigma\sigma'} = P_\sigma P_{\sigma'}$ (le vérifier sur la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) et le déterminant est un morphisme de groupe. Si $n = 1$, la propriété est claire. Si $n \geq 2$, on considère la matrice

$$A = P_{(1\,2)} = \begin{pmatrix} B & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & I_{n-2} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de A est le déterminant des colonnes de A dans la base canonique (notée b), i.e $\det_b(E_2,E_1,E_3,\dots,E_n) = -\det_b(E_1,E_2,E_3,\dots,E_n) = -\det(I_n) = -1$. Par conséquent, le morphisme g est non trivial, donc c'est la signature.

✎ **Méthode**

Au bout des transvections et échanges de lignes/colonnes élémentaires menant à l'échelonnement d'une matrice A, on finit sur une matrice triangulaire (diagonale si vous voulez l'inversibilité et l'éventuel inverse). Son déterminant vaut donc le produit des éléments diagonaux de cette dernière matrice au signe près (la parité du nombre de transpositions de lignes/colonnes effectuées).

Exemple 10

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -3 \\ 7 & -6 & -18 \end{vmatrix} \quad C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1,\ C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1 \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -3 \\ 7 & -6 & -6 \end{vmatrix} \quad C_3 \leftarrow C_3 - 3C_2 \\
&= 18
\end{aligned}$$

Exemple 11 *Soit* $a \in \mathbb{C}$. *On considère* $n \geq 2$.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ a+n-1 & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ a+n-1 & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow \sum_{i=1}^{n} C_i \\
&= (a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant les opérations élémentaires $\forall i \geq 2, C_i \leftarrow C_i - C_1$, on obtient

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & a-1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)^{n-1}$$

Conclusion, $\begin{vmatrix} a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix} = (a+n-1)(a-1)^{n-1}$.

3.2 Développement par rapport à une ligne/colonne

On suppose $n \geq 2$.

Définition 5 *Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$. On appelle*

- *mineur de position (k,l) de A le déterminant de la matrice $(a_{i,j})_{i \neq k, j \neq l} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en supprimant sa k-ième ligne et sa l-ième colonne. Il est souvent noté $\Delta_{k,l}$.*
- *cofacteur de position (k,l) de A le scalaire $(-1)^{k+l}\Delta_{k,l}$.*

Propriété 20 *Avec les notations précédentes,*

- *Développement selon une colonne :*

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

- *Développement selon une ligne :*

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

Lemme 1 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$, alors* $\begin{vmatrix} A & 0_{1,n-1} \\ L & 1 \end{vmatrix} = \det(A)$.

Démonstration (Preuve du lemme). Notons M la matrice définie par blocs plus haut et notons $(m_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ ses coefficients de sorte que $\forall i \in [\![1,n]\!], m_{i,n} = \delta_{i,n}$. Alors

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} m_{\sigma(j),j}$$

Soit $\sigma \in S_n$, si $\sigma(n) \neq n$, alors $\prod_{i=1}^{n} m_{\sigma(i),i} = 0$, puisque le seul coefficient non nul de la n-ième colonne est celui de ligne n. Par conséquent, la somme porte uniquement sur les permutations qui fixent n. Cet ensemble est en bijection avec S_{n-1}, de plus la permutation σ' induite sur $[\![1,n-1]\!]$ possède le même nombre d'inversions, puisque n est fixé, donc possède la même signature. Conclusion,

$$\det(M) = \sum_{\sigma' \in S_n} \varepsilon(\sigma') \prod_{j=1}^{n-1} m_{\sigma'(j),j} = \det(A)$$

Démonstration (Preuve du développement en lignes/colonnes). Preuve à schémas.
Prouvons d'abord le développement selon une colonne. Soit $j \in [\![1,n]\!]$. On note $C_1, C_2, \dots, C_n$ les colonnes de A. On note alors $(E_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, de sorte de $C_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} E_i$. On en déduit par n-linéarité du déterminant que

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \det(C_1, \dots, C_{j-1}, E_i, C_{j+1}, \dots, C_n)$$

On exploite alors le cycle $(j\; j+1\; \dots\; n-1\; n)$ de signature $(-1)^{n-j}$ (ou son inverse de même signature), ce qui donne par antisymétrie du déterminant,

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{n-j} \det(C_1,\dots,C_{j-1},C_{j+1},\dots,C_n,E_i)$$

Soit $i \in [\![1,n]\!]$, notons B_i la matrice de colonnes $(C_1,\dots,C_{j-1},C_{j+1},\dots,C_n,E_i)$ et présentons-la avec ses lignes $L_1,\dots L_n$. Comme on sait que le déterminant est invariant par transposition, $\det(B_i) = \det(L_1,\dots,L_n)$. On utilise alors le cycle $(i\; i+1\; \dots\; n-1\; n)$ de signature $(-1)^{n-i}$ pour permuter ces lignes (ou son inverse de même signature), ce qui donne

$$\det(B_i) = (-1)^{n-i} \det(L_1,\dots,L_{i-1},L_{i+1},\dots,L_n,L_i).$$

Notons cette dernière matrice M_i. La dernière colonne de M_i est E_n et le bloc carré des $n-1$ premières lignes et $n-1$ premières colonnes est la matrice extraite de A en supprimant sa j-ième et i-ième colonne. D'après le lemme précédent, $\det(B_i)$ vaut le déterminant cette matrice extraite, i.e le mineur $\Delta_{i,j}$ Conclusion,

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

Le développement selon une ligne découle de l'invariance du déterminant par transposition.

Exemple 12 *Un déterminant tridiagonal. Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à déterminer*

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & 0 & \dots & 0 \\ b & a+b & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}$$

On établit $D_1 = a+b$ et $D_2 = (a+b)^2 - ab = a^2 + b^2 + ab$, puis une relation de récurrence double via un développement par rapport à la première ligne. Soit $n \geq 3$.

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - a \begin{vmatrix} b & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a+b & a & \ddots & \vdots \\ 0 & b & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}$$

On développe alors ce dernier déterminant par rapport à la première colonne, ce qui donne

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

On doit alors étudier une récurrence linéaire double homogène à coefficients constants, de polynôme caractéristique $X^2 - (a+b)X + ab = (X-a)(X-b)$. Si $a \neq b$, il existe deux complexes λ, μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, D_n = \lambda a^n + \mu b^n$$

Les valeurs initiales entraînent $\lambda = -a/(b-a)$ et $\mu = b/(b-a)$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, D_n = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a}$$

Si $a = b$, il existe deux complexes λ, μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, D_n = (\lambda + \mu n)a^n$$

Les valeurs initiales entraînent $\lambda = \mu = 1$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, D_n = (1+n)a^n$$

Propriété 21 (Déterminant de Vandermonde) *Soit $(a_i)_{1\leq i\leq n}\in\mathrm{K}^n$. On note $\mathrm{V}_n(a_1,\dots,a_n)=(a_i^{j-1})_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq n}$ la matrice dite de Vandermonde de la famille $(a_i)_{1\leq i\leq n}$. Alors*

$$\det \mathrm{V}_n(a_1,\dots,a_n)=\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j-a_i)$$

Démonstration. On effectue les opérations élémentaires pour i allant de n à 2, $\mathrm{C}_i\leftarrow \mathrm{C}_i-a_1\mathrm{C}_{i-1}$ (attention à l'ordre!), ce qui donne

$$\det \mathrm{V}_n(a_1\dots,a_n)=\begin{vmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & a_2-a_1 & \dots & a_2^{n-2}(a_2-a_1)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_n-a_1 & \dots & a_n^{n-2}(a_n-a_1)\end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première ligne

$$\det \mathrm{V}_n(a_1\dots,a_n)=\begin{vmatrix}a_2-a_1 & \dots & a_2^{n-2}(a_2-a_1)\\ \vdots & & \vdots\\ a_n-a_1 & \dots & a_n^{n-2}(a_n-a_1)\end{vmatrix}$$

Par multilinéarité du déterminant par rapport aux colonnes, on obtient

$$\det \mathrm{V}_n(a_1\dots,a_n)=\prod_{k=2}^{n}(a_k-a_1)\mathrm{V}_{n-1}(a_2,\dots,a_n)$$

Par récurrence, on obtient alors

$$\det \mathrm{V}_n(a_1,\dots,a_n)=\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j-a_i)$$

Exemple 13 *Ce déterminant intervient dans les polynômes interpolateurs de Lagrange. Notons $a_1,\dots,a_n$ n réels distincts. L'application $\varphi:\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]\to\mathbb{R}^n,\mathrm{P}\mapsto(\mathrm{P}(a_1),\dots,\mathrm{P}(a_n))$ est alors un isomorphisme d'espaces vectoriels. Elle est injective car si un polynôme de degré au plus $n-1$ s'annule aux points $a_1,\dots,a_n$ qui sont tous distincts, alors P possède strictement plus de racines que son degré, donc est nul. Comme les dimensions sont égales et finies, φ est un isomorphisme. Par conséquent, sa matrice dans les bases canoniques est inversible. On retrouve en effet la matrice de Vandermonde $\mathrm{V}_n(a_1,\dots,a_n)$ de déterminant non nul puisqu'on a supposé les $(a_1,\dots,a_n)$ deux à deux distincts.*

3.3 Calcul par blocs

Propriété 22 *Soit $r\in[\![2,n-1]\!]$, $\mathrm{A}\in\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, $\mathrm{B}\in\mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{K})$, $\mathrm{C}\in\mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$. Alors*

$$\begin{vmatrix}\mathrm{A} & \mathrm{B}\\ 0_{n-r,r} & \mathrm{C}\end{vmatrix}=\det(\mathrm{A})\det(\mathrm{C})$$

Démonstration. On commence par écrire

$$\begin{pmatrix}\mathrm{I}_r & 0_{n-r,r}\\ 0_{n-r,r} & \mathrm{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{A} & \mathrm{B}\\ 0_{n-r,r} & \mathrm{I}_{n-r}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{A} & \mathrm{B}\\ 0_{n-r,r} & \mathrm{C}\end{pmatrix}$$

De plus, en développant par rapport aux r premières lignes, on remarque que

$$\begin{vmatrix}\mathrm{I}_r & 0_{n-r,r}\\ 0_{n-r,r} & \mathrm{C}\end{vmatrix}=\det(\mathrm{C})$$

De même, en développant par rapport aux $n-r$ dernières lignes, on obtient

$$\begin{vmatrix}\mathrm{A} & \mathrm{B}\\ 0_{n-r,r} & \mathrm{I}_{n-r}\end{vmatrix}=\det(\mathrm{A})$$

Par multiplicativité du déterminant, on obtient bien

$$\begin{vmatrix}\mathrm{A} & \mathrm{B}\\ 0_{n-r,r} & \mathrm{C}\end{vmatrix}=\det(\mathrm{A})\det(\mathrm{C})$$

☞ **Remarque**
Le résultat s'étend naturellement à un nombre de blocs finis pour une matrice triangulaire par blocs. Attention, $\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{vmatrix} = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{D}) - \det(\mathrm{B})\det(\mathrm{C})$ *est totalement faux!*

Exemple 14

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)9 = -9$$

3.4 Méthodes polynomiales

Exemple 15 *Soit $n \geq 2$. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. On cherche à calculer le déterminant de taille n suivant :*

$$\mathrm{D}(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & c & \dots & c \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}$$

Pour cela, on introduit la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, x \mapsto \mathrm{D}(a+x, b+x, c+x)$. D'après la formule générale du déterminant, elle est polynomiale de degré au plus n. Soit $x \in \mathbb{C}$, on effectue les opérations élémentaires $\mathrm{C}_j \leftarrow \mathrm{C}_j - \mathrm{C}_1$ pour tout $j \in [\![2,n]\!]$ dans la matrice

$$\begin{pmatrix} a+x & c+x & \dots & c+x \\ b+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c+x \\ b+x & \dots & b+x & a+x \end{pmatrix}.$$

Les nouvelles colonnes $(\mathrm{C}'_j)_{2 \leq j \leq n}$ ne dépendent plus de x. On note de plus, $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ \vdots \\ b \end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. *Ainsi, par multilinéarité du déterminant,*

$$f(x) = \det(\mathrm{C} + x\mathrm{J}_1, \mathrm{C}'_2, \mathrm{C}'_3, \dots, \mathrm{C}'_n) = \det(\mathrm{C}, \mathrm{C}'_2, \dots, \mathrm{C}'_n) + x\det(\mathrm{J}, \mathrm{C}'_2, \dots, \mathrm{C}'_n)$$

Par conséquent, la fonction polynomiale f est de degré au plus 1, de la forme $\alpha + \beta\mathrm{X}$. Supposons dans un premier temps b différent de c, $f(-b)$ est un déterminant triangulaire de valeur $(a-b)^n$. De même, $f(-c) = (a-c)^n$. On en déduit que

$$\alpha c + \beta(-b)c = (a-b)^n c \quad \text{et} \quad \alpha b + \beta(-c)b = (a-c)^n b$$

soit encore, après soustraction,

$$\mathrm{D}(a,b,c) = f(0) = \alpha = \frac{(a-c)^n b - (a-b)^n c}{b-c}$$

Pour obtenir la valeur de $\mathrm{D}(a,b,c)$ quand $b = c$, on remarque que la fonction $b \mapsto \mathrm{D}(a,b,c)$ est polynomiale donc continue. Il suffit donc de prendre la limite de l'expression précédente quand b tend vers c. On reconnaît alors la dérivée en c de $y \mapsto (a-c)^n y - (a-y)^n c$, i.e $(a-c)^n + cn(a-c)^{n-1} = (a-c)^{n-1}(a-c+cn) = (a-c)^{n-1}(a+(n-1)c)$. Conclusion,

$$\mathrm{D}(a,c,c) = (a-c)^{n-1}(a+(n-1)c)$$

Exercice 2 *Démontrer la formule du déterminant de Vandermonde en étudiant le caractère polynomial de $a_n \mapsto \det \mathrm{V}_n(a_1, \dots, a_n)$.*

4 Applications du déterminant

4.1 Calcul d'inverse

Définition 6 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *On appelle comatrice de* A *la matrice de ses cofacteurs, elle est notée* $com(A)$.

Propriété 23

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), com(A)^T A = A com(A)^T = \det(A) I_n$$

Démonstration. Notons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ et $\text{com}(A) = ((-1)^{i+j} \Delta_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ les coefficients de A et de sa comatrice. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Le coefficient de place (i,j) de la matrice $\text{com}(A)^T A$ vaut, en reconnaissant le développement par rapport à la j-ième colonne d'une matrice modifiée,

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \Delta_{k,i} a_{k,j} = \det_b(C_1, \ldots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \ldots, C_n)$$

avec $(C_j)_{1 \leq j \leq n}$ les colonnes de A et b la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Si $i \neq j$, alors ce déterminant possède deux colonnes identiques donc est nul. Sinon, on reconnaît le déterminant de A. En conclusion,

$$\left(\text{com}(A)^T A\right)_{i,j} = \delta_{i,j} \det(A)$$

i.e $\text{com}(A)^T A = \det(A) I_n$. On procède de même en reconnaissant un développement par rapport à une ligne pour l'autre produit.

Exemple 16 *Soit* $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$ *tel que* $ad-bc \neq 0$, *alors* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *est inversible d'inverse* $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. *Son déterminant vaut* $\det(A) = -3+4-2+4+1-6 = -2 \neq 0$, *donc* A *est inversible. On en déduit que son inverse vaut*

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -8 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ *(i.e à coefficients entiers). Montrer que* M *est inversible d'inverse à coefficients dans* $\mathbb{Z}$ *si et seulement si* $\det(M) = \pm 1$.

4.2 Résolution de système linéaire

Propriété 24 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. *On suppose* A *inversible. Alors l'unique solution* $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *du système linéaire* $AX = B$ *vérifie*

$$\forall i \in [\![1,n]\!], x_j = \frac{\det(C_1(A), \ldots, C_{i-1}(A), B, C_{i+1}(A), \ldots, C_n(A)}{\det(A)}$$

Démonstration. Comme $B = AX$, $B = \sum_{j=1}^{n} x_j C_j(A)$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. On a par multilinéarité du déterminant,

$$\begin{aligned}
\det(C_1(A), \ldots, C_{i-1}(A), B, C_{i+1}(A), \ldots, C_n(A)) &= \det(C_1(A), \ldots, C_{i-1}(A), \sum_{j=1}^{n} x_j C_j(A), C_{i+1}(A), \ldots, C_n(A)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \det(C_1(A), \ldots, C_{i-1}(A), C_j(A), C_{i+1}(A), \ldots, C_n(A)) \\
&= x_i \det(A)
\end{aligned}$$

☞ **Remarque**
Cette formule est inapplicable en pratique. La méthode de Gauss est bien plus efficace.

Exemple 17 *Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$ tel que $ad - bc \neq 0$. L'unique solution (x,y) du système*

$$\begin{cases} ax & + & by & = & \alpha \\ cx & + & dy & = & \beta \end{cases}$$

vaut

$$x = \frac{\alpha d - \beta b}{ad - bc}, \quad y = \frac{a\beta - ca}{ad - bc}$$

4.3 Caractérisation du rang

Définition 7 *Soit $r \in [\![1, \min(n,p)]\!]$ et $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle déterminant extrait d'ordre r de A, tout déterminant de la forme $\det((m_{i,j})_{i\in \mathrm{I}, j \in \mathrm{J}}$ où I et J sont des parties de $[\![1,n]\!]$ toutes deux de cardinal r.*

Exemple 18 *Les mineurs d'une matrice carrée sont les déterminants extraits d'ordre $n-1$.*

Propriété 25 *Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $r \in [\![1, \min(n,p)]\!]$. Le rang de M vaut r ssi il existe un déterminant extrait d'ordre r de M non nul et tous les déterminants extraits d'ordre $r+1$ de M sont nuls.*

Démonstration. On a déjà vu dans le chapitre sur les matrices que le rang de M est le maximum des tailles de matrices carrées inversibles extraites de A. Comme une matrice carrée est inversible ssi son déterminant est non nul, on a le résultat.

Exemple 19 *On considère une matrice surtriangulaire de la forme*

$$\begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$

Son mineur $\Delta_{1,n}$ est un déterminant triangulaire non nul, donc cette matrice est de rang au moins $n-1$.

Exemple 20 *Déterminons le rang de la comatrice. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Distinguons trois cas :*

— *Si $\mathrm{rg}(\mathrm{M}) = n$, M est inversible, donc $com(\mathrm{M})$ est inversible et $\mathrm{rg}(com(\mathrm{M})) = n$.*

— *Si $\mathrm{rg}(\mathrm{M}) = n-1$, alors M est non inversible et $\mathrm{M}com(\mathrm{M})^\mathsf{T} = 0$. Donc toutes les transposées des lignes de $com(\mathrm{M})$ sont dans le noyau de M, de dimension 1. Donc les lignes de $com(\mathrm{M})$ engendrent un espace de dimension au plus 1, et $\mathrm{rg}(com(\mathrm{M}) \leq 1$. De plus, $com(\mathrm{M})$ est non nul car il existe un mineur de M non nul d'après la caractérisation du rang de M. Ainsi, $\mathrm{rg}(com(\mathrm{M})) = 1$.*

— *Si $\mathrm{rg}(\mathrm{M}) \leq n-2$, alors tous les mineurs de M sont nuls et $com(\mathrm{M}) = 0$, donc $\mathrm{rg}(com(\mathrm{M})) = 0$.*

4.4 Équation d'hyperplan

Exemple 21 *Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u = (1,1,0,2)$, $v = (1,0,-1,0)$ et $w = (2,0,0,1)$. On considère la matrice A de la famille (u,v,w) dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, i.e*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sa matrice extraite $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire inversible car de déterminant -1 non nul. Par conséquent, $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 3$ et la famille (u,v,w) est libre. Déterminons une équation de l'hyperplan H engendré par (u,v,w). Soit $\alpha = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a l'équivalence $\alpha \in \mathrm{H} \iff \alpha \in \mathrm{Vect}(u,v,w) \iff$

(α, u, v, w) liée $\iff$ $\det_b(\alpha, u, v, w) = 0$ en notant b la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On calcule alors via un développement selon la dernière colonne

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ y & 1 & 0 & 0 \\ z & 0 & -1 & 0 \\ t & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} y & 1 & 0 \\ z & 0 & -1 \\ t & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} y & 1 \\ z & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} y & 1 \\ t & 2 \end{vmatrix} = -x - 3y + z + 2t$$

Conclusion,

$$\mathrm{Vect}(u, v, w) = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | -x - 3y + z - 2t = 0\right\}$$