

Les questions de cours portent sur les éléments entre accolades et en gras. On attend une maîtrise de l'ensemble des notions du programme de colle.

## Chapitre 14 : Convexité

### Parties convexes, barycentres

Système fini de points massiques de  $\mathbb{R}^2$ . Existence et unicité du barycentre lorsque la somme des masses est non nulle. Homogénéité du barycentre. Segment  $[A, B] = \{(1-t)A + tB | t \in [0, 1]\}$  de  $\mathbb{R}^2$ . Partie convexe de  $\mathbb{R}^2$ . Combinaison linéaire convexe d'éléments de  $\mathbb{R}^2$ . **[Une partie de  $\mathbb{R}^2$  est convexe ssi elle est stable par combinaison linéaire convexe ssi elle est stable par barycentrage à masses positives].**

### Fonctions convexes

$f$  désigne une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , non vide et non réduit à un point.

#### Premières caractérisations

Notion de fonction convexe, de fonction concave. Epigraphe d'une fonction, noté  $\text{Epi}(f)$ . **[ $f$  est convexe ssi son épigraphe est une partie convexe de  $\mathbb{R}^2$ ].** Inégalité de Jensen discrète. Position des cordes :  $f$  est convexe ssi  $\forall a < b \in I, \forall x \in [a, b], f(x) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$ . **[Croissance des taux d'accroissement :  $f$  est convexe ssi pour tout  $x_0$  dans  $I$ ,  $\tau_{x_0} : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$  est croissante].** Inégalités des trois pentes.

#### Utilisation de la dérivabilité

**[On suppose  $f$  dérivable. Alors  $f$  est convexe ssi  $f'$  est croissante].** **[Position des tangentes :  $f$  est convexe ssi  $\forall x \in I, \forall a \in I, f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$ ].** Caractérisation dans le cas  $f$  deux fois dérivable.

#### Exemples de référence

Exponentielle :  $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x \leq e^x$ . Sinus sur  $[0, \pi/2]$  :  $\forall x \in [0, \pi/2], \frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x$ . Logarithme népérien :  $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$ . Racine carrée  $\forall x \geq -1, \sqrt{1+x} \leq 1+x/2$ . Fonctions puissance :  $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^\alpha$  est convexe ssi  $\alpha \geq 1$  ou  $\alpha \leq 0$ , concave ssi  $\alpha \in [0, 1]$ .

## Compléments

Ces résultats sont hors-programme, mais ont été abordés en cours. Si  $f$  est convexe, alors  $f$  est dérivable à gauche et à droite. De plus, pour tout  $(a, b)$  dans l'intérieur de  $I$  tel que  $a < b, f'_g(a) \leq f'_d(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_g(b) \leq f'_d(b)$ . Les dérivées gauches et droites sont croissantes et  $f$  est continue sur l'intérieur de  $I$ .

★ ★ ★ ★ ★