Les questions de cours portent sur les éléments du chapitre 9 : groupes précédés d'un astérisque. Les exercices portent sur le chapitre 9 : groupes.

Chapitre 9 : Groupes

Loi de composition interne

Loi de composition interne (abrégé en lci), magma $(M,\star)$. Table de Cayley dans le cas d'un ensemble fini. Associativité, neutre d'une lci. Unicité du neutre. Inverse d'un élément dans un magma unifère. Commutation. Partie stable par une lci. Un monoïde est un magma associatif unifère. Dans un monoïde, $(\star)$ Unicité de l'inverse en cas d'inversibilité. Si x et y inversibles, alors $x\star y$ est inversible d'inverse $y^{-1}\star x^{-1}$. Si x est inversible, x^{-1} est inversible d'inverse x.

Structure de groupe

Un groupe un monoïde dont tous les éléments sont inversibles. Notion de groupe commutatif. Notations additives, multiplicatives. Exemples de groupes. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un groupe. $(\star)$ L'ensemble des bijections d'un ensemble X, noté S_X ou $\mathfrak{S}(X)$ est un groupe pour la loi de composition. Transport de la structure de groupe G sur $\mathcal{F}(X,G)$. $(\star)$ Groupe produit. Etude de petits groupes via des tables de Cayley. $(\star)$ Pour tout g dans G, $R_g : G \to G, x \mapsto x\star g$ et $L_g : G \to G, x \mapsto g\star x$ sont des bijections.

Sous-groupes

Soit $(G,\star)$ un groupe. On appelle sous-groupe de G, toute partie H de G telle que H est stable par $\star$ et H muni de la loi induite $\star_H$ est un groupe. Le neutre d'un sous-groupe est le même que le neutre du groupe cadre. $(\star)$ Première caractérisation des sous-groupes. H partie de G est un sous-groupe de G ssi H est non vide, stable par $\star$ et stable par inverse. $(\star)$ Deuxième caractérisation des sous-groupes : H partie de G est un sous-groupe de G ssi H non vide et $\forall (x,y) \in H^2, x\star y^{-1} \in H$. Sous groupe engendré par un élément g défini comme $\{g^n | n \in \mathbb{Z}\}$. C'est le plus petit sous-groupe de G qui contient g. Exemples de groupes monogènes et non monogènes.

Morphismes de groupes

Morphisme de groupes. $(\star)$ Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes, alors $f(e_G) = e_H$ et $\forall x \in G, f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$. La composée d'un morphisme de groupes est un morphisme de groupes. La réciproque d'un morphisme de groupes bijectif est un morphisme de groupes. Sous-groupe des automorphismes de G, noté $\mathrm{Aut}(G)$. Exemples d'isomorphismes. $(\star)$ L'image directe d'un sous-groupe de G est un sous-groupe de H, l'image réciproque d'un sous-groupe de H est un sous-groupe de G. Image, noyau d'un morphisme. $(\star)$ Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité à l'aide du noyau et de l'image. Un morphisme de groupes de G vers H induit un morphisme de groupes entre $\mathcal{F}(X,G)$ et $\mathcal{F}(X,H)$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆