Colle 2 MPSI/MP2I   Jeudi 12 octobre 2023

★★★

Planche 1

★★★

1. Caractériser la bijectivité d'une application via deux compositions.
2. On munit $\mathbb{N}^2$ de la relation $\prec$ définie par $\forall(a,b,n,m) \in \mathbb{N}^4, (a,b) \prec (n,m) \iff [a < n \vee (a = n \wedge b \leqslant m)]$. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre, puis donner les majorants de $\mathbb{N} \times \{0\}$, puis ceux de $\{0\} \times \mathbb{N}$. Que vaut $\sup(\{0\} \times \mathbb{N})$?
3. Donner l'image directe d'un cercle par une similitude complexe. Quelle est l'image réciproque d'un cercle par une similitude complexe ?

★★★

Planche 2

★★★

1. Soit $f : (E, \leqslant) \to (F, \subset)$ une bijection croissante avec E totalement ordonné. Que dire de sa réciproque ? Le démontrer.
2. Soit E un ensemble et A une partie de E. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ via

$$\forall(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2, X\mathcal{R}Y \iff X \cup A = Y \cup A$$

   Démontrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence, puis déterminer ses classes d'équivalences.
3. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\prec$ définie par

$$\forall(x,y,x',y') \in \mathbb{R}^2, (x,y) \prec (x',y') \iff |x'-x| \leqslant y'-y$$

   Démontrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre, puis démontrer que

$$\sup\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leqslant 1\right\} = (0, \sqrt{2}).$$

★★★

Planche 3

★★★

1. Montrer que les classes d'équivalence d'une relation d'équivalence forment une partition.
2. Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. On considère l'application $\Psi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B), X \mapsto (X \cap A, X \cap B)$.
   (a) Déterminer une condition nécessaire sur A et B pour que Ψ soit injective.
   (b) Déterminer si possible un antécédent de $(\emptyset, B)$.
   (c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que Ψ soit bijective.
3. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ et $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ deux injections. Montrer que $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, k \mapsto f(k)g(k)$ n'est pas une surjection.

★★★

Bonus

★★★

Soit E un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$, ni d'injection de $\mathcal{P}(E)$ dans E.