Logique et théorie des ensembles

Cornou Jean Louis

9 septembre 2023

1 Logique

1.1 Notion de prédicat

Définition 1 *On appelle **assertion** tout énoncé mathématique pouvant être VRAI (V) ou FAUX (F).*

Exemple 1 *L'assertion « Tout nombre réel est positif ou négatif » est vraie. L'assertion « $\sqrt{2}$ est rationnel » est fausse.*

Notation
*Lorsqu'une assertions $\mathcal{P}$ dépend des valeurs prises par un objet x, on notifie cette dépendance via $\mathcal{P}(x)$, on parle également de **prédicat** dans ce cadre.*

Exemple 2 *Soit x un nombre réel. L'assertion $\mathcal{P}(x)$: « $x^2 + 3x - 4 < 0$ » peut être vraie ou fausse selon les valeurs prises par le réel x. $\mathcal{P}(0)$ est VRAIE, tandis que $\mathcal{P}(1)$ est FAUSSE.*

Définition 2 *On dit que deux assertions sont équivalentes quand elles ont même valeur de vérité, i.e elles sont simultanément VRAIES ou simultanément FAUSSES.*

Notation
Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux assertions. On note $\mathcal{P} \sim \mathcal{Q}$ ou encore $\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$ le fait que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes.

Exemple 3 *Soit x un réel strictement positif. Les assertions « $\ln(x) \geq 1$ » et « $x \geq e$ » sont équivalentes.*

☞ **Remarque**
Nous verrons plus loin que la logique permet de définir des ensembles en compréhension, i.e l'ensemble des objets a tels qu'un assertion donnée $\mathcal{P}(a)$ est VRAIE.

1.2 Opération sur les prédicats

Définition 3 *Soit $\mathcal{P}$ une assertion. On appelle **négation** de $\mathcal{P}$ l'assertion ayant les valeurs de vérité opposées. On la note $\neg\mathcal{P}$ ou non($\mathcal{P}$). On la définit via la table de vérité*

$\mathcal{P}$	$\neg\mathcal{P}$
V	F
F	V

Exemple 4 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}$ l'assertion « La fonction f ne s'annule jamais ». La négation de $\mathcal{P}$ est l'assertion « Il existe un réel x tel que $f(x) = 0$ ». Soit n un entier naturel non nul, la négation de « n est un entier premier » est « Le nombre de diviseurs positifs de n est différent de 2 ».*

Propriété 1 *Soit $\mathcal{P}$ une assertion. Alors $\neg\neg\mathcal{P} \sim \mathcal{P}$.*

Démonstration. On dresse la table de vérité suivante :

$\mathcal{P}$	$\neg\mathcal{P}$	$\neg\neg\mathcal{P}$
V	F	V
F	V	F

Propriété 2 *Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux assertions équivalentes. Alors*

$$\neg\mathcal{P} \sim \neg\mathcal{Q}$$

Démonstration. Il suffit de dresser les tables de vérité.

Définition 4 *Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux prédicats. On appelle* **conjonction** *de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, notée $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ou $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ l'assertion étant VRAIE si, et seulement si, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont toutes deux VRAIES. On dresse la table de vérité*

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Définition 5 *Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux prédicats. On appelle* **disjonction** *de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, notée $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ ou $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ l'assertion étant VRAIE si, et seulement si, $\mathcal{P}$ est VRAIE ou $\mathcal{Q}$ est VRAIE. On dresse la table de vérité*

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

⚠ **Attention**
Le « ou » mathématique est inclusif au contraire de la langue française.

✎ **Méthode**
Pour démontrer qu'une disjonction d'assertions est vraie, il suffit de supposer que l'une des assertions est FAUSSE et démontrer que l'autre est VRAIE.

Exemple 5 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles géométrique de raison q convergente. L'assertion « q=1 ou $|q| < 1$ » est VRAIE.*

Propriété 3 *Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ des assertions. On a alors les équivalences d'assertions suivantes :*

$\neg(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \sim (\neg\mathcal{P}) \vee (\neg\mathcal{Q})$.

$\neg(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \sim (\neg\mathcal{P}) \wedge (\neg\mathcal{Q})$.

Démonstration. On dresse les tables de vérité suivantes

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$	$\neg(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	¬P	$\neg\mathcal{Q}$	$(\neg\mathcal{P}) \vee (\neg\mathcal{Q})$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Ceci démontre le premier point. En l'appliquant aux assertions $\neg\mathcal{P}$ et $\neg\mathcal{Q}$, il vient

$$\neg(\neg\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q}) \sim (\neg\neg\mathcal{P}) \vee (\neg\neg\mathcal{Q}) \sim \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$$

La négation implique alors

$$\neg\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q} \sim \neg(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}),$$

ce qui prouve le second point.

Exemple 6 *Soit x et y deux réels. La négation de « $x = 0$ ou $y = 0$ » est « $x \neq 0$ et $y \neq 0$ ». Soit deux droites du plan, l'assertion « Ces droites sont parallèles et sécantes » a pour négation « Elles ne sont pas parallèles ou elles sont d'intersection vide ».*

Propriété 4 *Soit $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ trois assertions. On a les équivalences d'assertions suivantes :*

$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} \sim \mathcal{Q} \wedge \mathcal{P}$

$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \sim \mathcal{Q} \vee \mathcal{P}$

$(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R} \sim \mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$
$(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \vee \mathcal{R} \sim \mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$
$\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) \sim (\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee (\mathcal{P} \wedge \mathcal{R})$
$\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R}) \sim (\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{P} \vee \mathcal{R})$

Démonstration. Laissée à titre d'exercice, établissez soigneusement les tables de vérité correspondantes (8 cas possibles).

⚠ **Attention**
Prêtez attention au parenthésage. L'assertion $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} \vee \mathcal{R}$ n'a aucun sens.

1.3 Implications

Définition 6 *Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux assertions. On définit l'assertion « $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$ » par « $(\neg\mathcal{P})$ ou $\mathcal{Q}$ », i.e $\mathcal{Q}$ ne peut être fausse quand $\mathcal{P}$ est vraie. Elle est notée $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$. Cela correspond à la table de vérité suivante :*

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

*En langue française, on dit « Si $\mathcal{P}$, alors $\mathcal{Q}$ ». Quand l'implication est vraie, l'assertion $\mathcal{Q}$ est une condition **nécessaire** de $\mathcal{P}$: si $\mathcal{P}$ est vraie, nécessairement $\mathcal{Q}$ est vraie. En outre, l'assertion $\mathcal{P}$ est une condition **suffisante** de $\mathcal{Q}$: il suffit de démontrer que $\mathcal{P}$ est vraie pour démontrer que $\mathcal{Q}$ est vraie.*

⚠ **Attention**
L'étude de l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ ne préjuge pas de la valeur de vérité de $\mathcal{P}$. Soit x et y deux réels, la mutiplication par 0 assure que l'implication « $x = y \Rightarrow 0 = 0$ » est vraie. Toutefois, on peut tout à fait choisir des réels x et y distincts.

⚠ **Attention**
L'implication est différente du « donc » en langue française. En particulier, les enchaînements de calculs ne sont pas des implications. Le « $\mathcal{P}$ donc $\mathcal{Q}$ » donc est en réalité la conjonction $\mathcal{P} \wedge (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$.

✎ **Méthode**
Lorsqu'on souhaite démontrer l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, on commence par écrire « Supposons $\mathcal{P}$, montrons $\mathcal{Q}$ ».

Définition 7 *Soit $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ une implication. L'implication $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ est appelée implication **réciproque** de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.*

Exemple 7 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles. L'implication « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente $\Rightarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée » est vraie. Toutefois, son implication réciproque « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée $\Rightarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente » ne l'est pas toujours. Nous préciserons cela plus tard avec la quantification.*

Définition 8 *Soit $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ une implication. L'implication $\neg\mathcal{Q} \Rightarrow \neg\mathcal{P}$ est appelée **contraposée** de l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.*

Exemple 8 *Soit z un complexe non nul. La contraposée de $|z| = 1 \Rightarrow \overline{z} = 1/z$ est $\overline{z} \neq 1/z \Rightarrow |z| \neq 1$.*

Propriété 5

$$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q} \sim \neg\mathcal{Q} \Rightarrow \neg\mathcal{P}$$

Démonstration.

$$\neg\mathcal{Q} \Rightarrow \neg\mathcal{P} \sim \neg\neg\mathcal{Q} \vee \neg\mathcal{P} \sim \neg\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \sim \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$$

✎ **Méthode**
Pour démontrer une implication, il peut être plus facile de démontrer sa contraposée. Soit x un rationnel. Alors l'implication « y irrationnel $\Rightarrow x + y$ irrationnel » est vraie. En effet, si $x + y$ est rationnel, alors $y = (x + y) - x$ est différence de deux rationnels donc rationnel.

Propriété 6 *Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux assertions.*

$$\neg(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \sim \mathcal{P} \wedge \neg(\mathcal{Q})$$

1.4 Équivalences

Définition 9 *Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux assertions. L'assertion $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P})$ est notée $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$. C'est l'**équivalence** entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$. La table de vérité correspondante est la suivante :*

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

En langue française, on dit « $\mathcal{P}$ si et seulement si (abrégé en ssi) $\mathcal{Q}$ », ou encore « il faut et il suffit que $\mathcal{P}$ soit vraie pour que $\mathcal{Q}$ soit vraie ».

Exemple 9 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante. L'équivalence « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente $\iff$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée » est vraie.*

Définition 10 *Lorsque l'équivalence $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ est vraie, on dit que $\mathcal{P}$ est une **condition nécessaire et suffisante** (CNS) pour $\mathcal{Q}$.*

Proposition 1

$$\mathcal{P} \iff \mathcal{Q} \sim \neg\mathcal{P} \iff \neg\mathcal{Q}$$

⚠ **Attention**
Lors d'un enchaînement de calculs, il ne faut pas écrire de symboles d'équivalences abusifs. Soit x un réel, on a bien l'implication $x = 0$ ou $x = 2\pi \Rightarrow \cos(x) = 1$, mais pas l'équivalence $x = 0$ ou $x = 2\pi \iff \cos(x) = 1$.

✎ **Méthode**
La plupart du temps, pour démontrer une équivalence, on démontre séparement une implication, puis sa réciproque. La rédaction propre d'équivalences est délicate !

2 Théorie des ensembles

2.1 Objets, parties

Définition 11 *Un ensemble est une collection d'objets, les **éléments** de cet ensemble. Un élément x d'un ensemble E **appartient** à celui-ci, cette relation est notée $x \in \mathrm{E}$.*

Exemple 10 *Les ensembles de nombres usuels : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.*

Définition 12 *L'ensemble ne contenant aucun élément est appelé **ensemble vide**. Il est noté $\emptyset$.*

Définition 13 *Soit E et F deux ensembles. On dit que E et F sont égaux lorsque tout élément de E appartient à F et réciproquement.*

Exemple 11 *Dans le plan réel muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$, le cercle de centre O et de rayon 1 est égal à l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$.*

Définition 14 *Soit E et F deux ensembles. On dit que E est **inclus** dans F lorsque tout élément de E appartient à F. On note $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$.*

Exemple 12 *Soit a et b deux entiers naturels tels que a divise b. Alors l'ensemble des multiples de b est inclus dans l'ensemble des multiples de a.*

✎ **Méthode**
Pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux, on pourra procéder en deux temps : montrer que E est inclus dans F, puis montrer que F est inclus dans E. On procède par « double inclusion ».

Définition 15 *Soit* E *un ensemble. On appelle* ***partie*** *de* E *tout ensemble inclus dans* E*. L'ensemble des parties de* E *est noté* $\mathcal{P}(\mathrm{E})$*.*

Définition 16 *Soit* E *un ensemble et* F *une partie de* E*. On définit le* ***complémentaire*** *de* F *dans* E *comme l'ensemble des éléments de* E *n'appartenant pas à* F*. On le note*

$$\mathrm{C_E(F)} = \mathrm{E}\backslash\mathrm{F} = \{x \in \mathrm{E} | x \notin \mathrm{F}\}$$

Notation
S'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble E*, on rencontre la notation* F^c *ou encore* $\overline{\mathrm{F}}$*.*

Exemple 13 $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

Propriété 7 *Soit* E *un ensemble fini et* A *une partie de* E*. Alors* $\mathrm{A} = \mathrm{E} \iff \mathrm{A}$ *a autant d'éléments que* E*.*

Démonstration. Supposons $\mathrm{A} = \mathrm{E}$, alors la liste des éléments de A est la même que celle des éléments de E. Il y en a autant dans A que dans E. Supposons $\mathrm{A} \neq \mathrm{E}$. Alors il existe un élément de E qui n'appartient pas à A, comme tous les éléments de A sont dans E, A possède strictement moins d'éléments que E. Nous reverrons ce point lors du chapitre sur le dénombrement.

2.2 Extension, compréhension

Définition 17 *Définir un ensemble en* ***extension****, c'est donner la liste de ses éléments*

Exemple 14 $\{3k+1 | k \in \mathbb{Z}\}$, $\{\ln(1+e^x) | x \in \mathbb{R}\}$.

Définition 18 *Définir un ensemble en* ***compréhension****, c'est définir ses éléments selon un (ou plusieurs) critère(s). Soit* E *un ensemble, et* $\mathcal{P}(x)$ *une assertion dépendant d'un objet* x *de* E*. On note* $\{x \in \mathrm{E} | \mathcal{P}(x)\}$ *l'ensemble des éléments de* E *qui vérifient que l'assertion* $\mathcal{P}(x)$ *est vraie.*

Exemple 15
- $\{x \in \mathbb{R} | x + \sqrt{x^2+1} > 1\} =]0, +\infty[$.
- $\{(x,y,z) \in (\mathbb{N}^*)^3 | x^3 + y^3 = z^3\} = \emptyset$.
- $\{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\} = \{e^{it} | t \in \mathbb{R}\}$.

⚠ **Attention**
Soit x *un élément d'un ensemble* E*. L'ensemble constitué du seul élément* x *est noté* $\{x\}$ *(on l'a défini en extension. L'ensemble* $\{x\}$ *est une partie de* E*, ce qui se note* $\{x\} \subset \mathrm{E}$*, tandis que* x *est un élément de* E*, ce qui se note* $x \in \mathrm{E}$*.*

2.3 Opérations sur les ensembles

Définition 19 *Soit* E *et* F *deux ensembles. L'ensemble des éléments appartenant à la fois à* E *et à* F *est appelé l'****intersection*** *de* E *et* F*. Il est noté* $\mathrm{E} \cap \mathrm{F}$*.*

Définition 20 *Soit* E *et* F *deux ensembles. L'ensemble des éléments appartenant à* E *ou à* F *est appelé l'****union*** *de* E *et* F*. Il est noté* $\mathrm{E} \cup \mathrm{F}$*.*

Définition 21 *Soit* E *un ensemble, puis* A *et* B *deux parties de* E*. La* ***différence*** *de* A *par* B *est l'ensemble des éléments de* A *n'appartenant pas à* B*, i.e* $\{x \in \mathrm{A} | x \notin \mathrm{B}\}$*. Il est noté* $\mathrm{A}\backslash\mathrm{B}$*.*

Définition 22 *Soit* E *un ensemble, puis* A *et* B *deux parties de* E*. La* ***différence symétrique*** *de* A *et* B *est l'ensemble des éléments de* E *n'appartenant qu'à une seule de ces deux parties, soit encore* $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})\backslash(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$*. Elle est notée* $\mathrm{A}\Delta\mathrm{B}$*.*

Propriété 8 *Avec les mêmes notations que précédemment,* $\mathrm{A}\Delta\mathrm{B} = (\mathrm{A}\backslash\mathrm{B}) \cup (\mathrm{B}\backslash\mathrm{A})$*.*

Démonstration. Procédons par double inclusion. Soit $x \in \mathrm{A}\Delta\mathrm{B}$. Supposons que $x \notin \mathrm{A}\backslash\mathrm{B}$ et montrons que $x \in \mathrm{B}\backslash\mathrm{A}$. Comme $x \notin \mathrm{A}\backslash\mathrm{B}$, $x \in \mathrm{B}$ ou $x \notin \mathrm{A}$. Or $x \in \mathrm{A}\Delta\mathrm{B}$, donc x appartient à $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$. Par conséquent, $x \in \mathrm{B}$ et $x \notin \mathrm{A}$, ce qui signifie $x \in \mathrm{B}\backslash\mathrm{A}$. Ainsi, $\mathrm{A}\Delta\mathrm{B} \subset (\mathrm{A}\backslash\mathrm{B}) \cup (\mathrm{B}\backslash\mathrm{A})$. Réciproquement, soit $x \in (\mathrm{A}\backslash\mathrm{B}) \cup (\mathrm{B}\backslash\mathrm{A})$. Premier cas $x \in \mathrm{A}\backslash\mathrm{B}$. Comme $\mathrm{A} \subset \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, $x \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$. De plus, comme $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \subset \mathrm{B}$, et $x \notin \mathrm{B}$, $x \notin \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$. Cela signifie $x \in (\mathrm{A} \cup \mathrm{B})\backslash(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$. Le second cas $x \in \mathrm{B}\backslash\mathrm{A}$ se traite de manière symétrique. Dans tous les cas, $x \in \mathrm{A}\Delta\mathrm{B}$, ce qui prouve l'inclusion $(\mathrm{A}\backslash\mathrm{B}) \cup (\mathrm{B}\backslash\mathrm{A}) \subset \mathrm{A}\Delta\mathrm{B}$.

Exemple 16 *Dans un lancer de dé à 6 faces, les événéments* A =« *le dé donne un nombre pair* » *et* B =« *le dé donne un nombre supérieur ou égal à* 4 » *vérifient* $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{2,4,5,6\}$*,* $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{4,6\}$*,* $\mathrm{A}\backslash\mathrm{B} = \{2\}$*,* $\mathrm{B}\backslash\mathrm{A} = \{5\}$*,* $\mathrm{A}\Delta\mathrm{B} = \{2,5\}$*.*

3 Quantification

Comme vu précédemment, les objets manipulés peuvent modifiés la valeur de vérité d'une assertion qui en dépend. On peut même utiliser ce fait pour définir des ensembles en compréhension. Dans toute la suite de cette partie, on se donne E un ensemble, et $\mathcal{P}(x)$ une assertion dont la valeur de vérité dépend d'un élément x de E.

Définition 23 *L'assertion*

$$\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$$

est définie comme vraie lorsque $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout x dans E. Le symbole $\forall$ est appelé ***quantificateur unversel****. En langue française, cela se lit, « pour tout élément x de E, on a $\mathcal{P}(x)$ ».*

☞ **Remarque**
Le symbole x utilisé dans l'écriture précédente est « muet ». Il peut être remplacé par n'importe quel autre symbole.

Exemple 17 $[E \subset F] \iff [\forall y \in E, y \in F]$.

$[\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x - 1 \geq 0]$ *est fausse.*

Définition 24 *L'assertion*

$$\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$$

est définie comme vraie lorsque $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E. Le symbole $\exists$ est appelé ***quantificateur existentiel****. En langue française, cela se lit, « il existe un élément x de E tel qu'on a $\mathcal{P}(x)$ ».*

Exemple 18 *En notant $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles, l'assertion « $\exists u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, u non majorée et qui ne tend pas vers $+\infty$ » est vraie.*

$[E \cap F \neq \emptyset] \iff [\exists x \in E, x \in F]$.

Convention
L'assertion $\exists x \in \emptyset, \mathcal{P}(x)$ est toujours fausse. L'assertion $\forall x \in \emptyset, \mathcal{P}(x)$ est toujours vraie.

Définition 25 *L'assertion*

$$\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$$

est définie comme vraie lorsque

- $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$ *est vraie, et*
- $\{x \in E | \mathcal{P}(x)\}$ *est réduit à un seul élément.*

On lit « Il existe un unique élément x de E tel qu'on a $\mathcal{P}(x)$ ».

Propriété 9

$$\exists! x \in E, \mathcal{P}(x) \sim [\exists x \in E, \mathcal{P}(x)] \wedge [\forall y \in E \forall z \in E, [\mathcal{P}(y) \wedge \mathcal{P}(z)] \Rightarrow y = z]$$

Propriété 10

$$\neg(\forall x \in E, \mathcal{P}(x)) \sim \exists x \in E, \neg\mathcal{P}(x)$$

$$\neg(\exists x \in E, \mathcal{P}(x)) \sim \forall x \in E, \neg\mathcal{P}(x)$$

⚠ **Attention**
La négation ne change pas le symbole d'appartenance !

Exemple 19 *Soit f une fonction réelle de la variable réelle.*

La fonction f est constante : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) = f(y) \iff \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in R, f(x) = C$.

La fonction f est de signe constant : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) \geq 0$.

La fonction f n'est pas majorée : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \geq M$.

La fonction f est la fonction nulle : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.

La fonction f s'annule : $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.

La fonction f s'annule une seule fois : $\exists! x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.

La fonction f s'annule sur $\mathbb{R}^+$: $\exists x \in \mathbb{R}^+, f(x) = 0$.

La fonction f ne s'annule que sur $\mathbb{R}^+$: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \Rightarrow x \geq 0$.

La fonction f ne prend que des valeurs positives : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.

La fonction f ne prend des valeurs positives que sur $\mathbb{R}^+$: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$.

La fonction f est croissante : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

Tout réel possède un antécédent par f : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y$.

La fonction f prend des valeurs deux à deux distinctes : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ *ou encore* $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

4 Modes de raisonnement

Outre les implications et leurs enchaînements déjà vus précédemment, on dispose d'autres méthodes pour démontrer la véracité d'énoncés mathématiques.

4.1 Disjonction de cas

Soit $\mathcal{P}(x)$ une assertion dépendant d'un objet x dans un ensemble E. Pour démontrer $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$, on peut distinguer différentes possibilités pour les valeurs de x et démontrer que $\mathcal{P}(x)$ est vraie dans chaque cas.

Exemple 20 *Montrer que pour tout entier naturel n, 2 divise $n(n+1)$. Soit n est un entier naturel pair. Alors il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$. Mais alors, $n(n+1) = 2k(n+1)$ est divisible par 2. Soit n est un entier naturel impair, auquel cas il existe un entier naturel k' tel que $n = 2k'+1$. Alors, on a $n(n+1) = n(2k'+2) = 2n(k'+1)$ est divisible par 2.*

4.2 Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer une assertion, on peut supposer sa négation et chercher une absurdité.

Exemple 21 *Démontrons que* $\ln 3/\ln 2$ *est irrationnel par l'absurde. Supposons donc que* $\ln 3/\ln 2$ *est un rationnel. Alors il existe deux entiers relatifs a et b avec b non nul tels que* $\ln 3/\ln 2 = a/b$. *Mais alors,* $\ln(3^b) = \ln(2^a)$ *et* $3^b = 2^a$. *On a alors l'égalité de l'entier impair* 3^b *avec l'entier pair* 2^a*, ce qui absurde. Ainsi* $\ln 3/\ln 2$ *est irrationnel.*

4.3 Analyse-synthèse

Pour répondre à un problème d'existence, ou déterminer les éléments d'un ensemble, il peut être adapté de procéder par analyse-synthèse. La phase d'analyse consiste à supposer l'existence d'un tel objet ou considérer un élément de cet ensemble, puis à en déterminer des propriétés. On parvient parfois (souvent) à démontrer qu'un tel objet est unique. La phase de synthèse consiste à démontrer que les candidats déterminés auparavant satisfont effectivement les critères attendus ou appartiennent effectivement à l'ensemble de départ.

Exemple 22 *Démontrer qu'il existe une unique fonction dérivable f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x)$$

Analyse : Soit f une telle fonction. Alors la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)\exp(-x)$ est dérivable comme produit de fonctions dérivables et elle vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = f'(x)\exp(-x) - f(x)\exp(x) = f(x)\exp(-x) + f(x)\exp(-x) = 0$$

Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, cela signifie que g est constante égale à $g(0) = f(0)\exp(-0) = 1$. On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \exp(x)$$

Cette phase d'analyse a démontré qu'il y a au plus une fonction satisfaisant les critères attendus. Synthèse : On pose $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x)$. Alors h est dérivable puisque l'exponentielle est dérivable et elle vérifie $h' = h$. De plus, $h(0) = \exp(0) = 1$. Ainsi, la fonction h convient, ce qui prouve l'existence et l'unicité de la fonction attendue.

Exemple 23 *Démontrer qu'il n'existe aucune fonction dérivable f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, xf'(x) = -f(x)$$

Indication : si f désigne une telle fonction, introduire la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto xf(x)$

4.4 Récurrences

Théorème 1 (admis) *Toute partie A non vide de $\mathbb{N}$ admet un unique minimum, i.e il existe un unique élément a de A tel que*

$$\forall x \in A, a \leq x$$

Propriété 11 *Soit A une partie de $\mathbb{N}$. On suppose que A n'est pas vide et que*

$$\forall n \in A, n+1 \in A.$$

Alors, en notant a le minimum de A, $A = \{x \in \mathbb{N} | a \leq x\}$.

Démonstration. D'après la définition du minimum, pour tout élément x de A, $x \geq a$, donc $A \subset \{x \in \mathbb{N} | a \leq x\}$. D'autre part, si l'inclusion réciproque n'est pas vérifiée, la partie $B = \{x \in \mathbb{N} | a \leq x\} \setminus A$ de $\mathbb{N}$ n'est pas vide, donc admet un minimum b qui n'est pas dans A. Comme a appartient à A, b est strictement plus grand que a, donc non nul. Mais alors, par négation de la propriété d'hérédité de A, $b-1$ n'appartient pas à A et $b-1 \geq a$, ce qui contredit la notion de minimum de B. Ainsi $\{x \in \mathbb{N} | a \leq x\} \subset A$ et l'égalité de parties de $\mathbb{N}$ est prouvée.

Méthode (Récurrence simple)
Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant d'un entier naturel n. On suppose que $\exists n_0, \mathcal{P}(n_0)$ est vraie, puis que $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Alors $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exemple 24 *Soit a un réel supérieur ou égal à -1. Démontrons par récurrence que pour tout entier n,*

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

Initialisation : $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \cdot a = 1$, donc $(1+a)^0 \geq 1 + 0 \cdot a$. Hérédité : Soit n un entier naturel tel que $(1+a)^n \geq 1 + na$. Alors, $(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a)$. Comme $(1+a) \geq 0$, on peut multiplier l'inégalité $(1+a)^n \geq 1 + na$ par $(1+a)$ sans changer le sens de l'inégalité, soit

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a$$

puisque na^2 est un réel positif. On a ainsi démontré l'hérédité.

Méthode (Récurrence double)
Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant d'un entier naturel n. On suppose que $\exists n_0, \mathcal{P}(n_0) \wedge \mathcal{P}(n_0+1)$ est vraie, puis que $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \wedge \mathcal{P}(n+1) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)$ est vraie. Alors $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exemple 25 *On se donne une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n$$

Démontrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (1-2n)(-1)^n$$

Initialisations :

$$(1 - 2 \times 0)(-1)^0 = 1 \times 1 = 1 = u_0$$

$$(1-2\times 1)(-1)^1 = (-1)\times(-1) = 1 = u_1$$

Hérédité : soit n un entier tel que u_n et u_{n+1} vérifient l'égalité souhaitée. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= -2(1-2(n+1))(-1)^{n+1} - (1-2n)(-1)^n \\ &= (-1)^n\left[2(-1-2n)-1+2n\right] \\ &= (-1)^n\left[-3-2n\right] \\ &= (-1)^{n+2}\left[1-2(n+2)\right] \end{aligned}$$

Exemple 26 (prévu dans le TD de Youval) *On se donne une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = 0$, $u_0 = 1$ et,*

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Démontrons que,

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Initialisations :

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = \frac{1}{\sqrt{5}}1 - \frac{1}{\sqrt{5}}1 = 0 = u_0$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = u_1$$

Hérédité : Soit n un entier tel que u_n et u_{n+1} vérifient l'égalité souhaitée. Alors

$$u_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

On note alors $\Phi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. Ce réel vérifie

$$\Phi^2 = \frac{1}{4}(1+5+2\sqrt{5}) = 1+\Phi$$

dont on déduit que

$$\Phi^n + \Phi^{n+1} = \Phi^n(1+\Phi) = \Phi^n\Phi^2 = \Phi^{n+2}$$

De même, le réel $\Psi = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ vérifie $\Psi^2 = 1+\Psi$ et $\Psi^n + \Psi^{n+1} = \Psi^{n+2}$. Ainsi,

$$u_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2},$$

ce qui démontre l'hérédité.

Méthode (Récurrence forte)

Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant d'un entier naturel n. On suppose que $\exists n_0, \mathcal{P}(n_0)$ est vraie, puis que

$$\forall n \geq n_0, \bigwedge_{k=n_0}^{n} \mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$$

est vraie. Alors $\forall n\geq n_0, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exemple 27 *On se donne une suite réelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence via $b_0 = 1$ et*

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, b_n = -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b_k}{(n-k+1)!}$$

Démontrons par récurrence forte que

$$\forall n\in\mathbb{N}, |b_n| \leq 1$$

Initialisation : $|b_0| = 1 \leq 1$. Hérédité. Soit n un entier non nul tel que $\forall k\in[\![0, n-1]\!], |b_k| \leq 1$. Alors

$$|b_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{|b_k|}{(n-k+1)!} \leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k-n+1)!} = \sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j!} \leq e-2 \leq 1$$

5 Fonctions indicatrices

J'anticipe légèrement sur le 3e chapitre et la notion de fonction, mais cela apporte un éclairage plus « calculatoire » aux notions précédentes. Dans toute cette partie, on fixe E un ensemble.

Définition 26 *Soit* A *une partie de* E. *On appelle fonction indicatrice de* A *l'application* $\mathbb{1}_A : E \to \{0,1\}$, $x \mapsto 1$ *si* $x \in A$ *et* 0 *si* $x \notin A$.

Propriété 12

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \forall x \in E, (x \in A \iff \mathbb{1}_A(x) = 1)$$

Propriété 13 *Soit* A *et* B *deux parties de* E. *Alors on a les égalités d'applications :*

— $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

— $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

Démonstration. — Soit $x \in A\cap B$. Alors x appartient à A, donc $\mathbb{1}_A(x) = 1$. De même, x appartient à B, donc $\mathbb{1}_B(x) = 1$. On obtient alors $\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = 1\times 1 = 1 = \mathbb{1}_{A\cap B}(x)$. Soit $x \notin A\cap B$. Alors x n'appartient pas à A ou n'appartient pas à B, donc $\mathbb{1}_A(x) = 0$ ou $\mathbb{1}_B(x) = 0$. Quel que soit le terme nul, le produit $\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = 0 = \mathbb{1}_{A\cap B}(x)$. Dans tous les cas, on a l'égalité $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$. Ainsi, on a l'égalité de fonctions $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

— Procédons différement et dressons un table donnant les quatre cas possibles. Soit $x \in E$.

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A\cup B$	$\mathbb{1}_A(x) = 1$	$\mathbb{1}_B(x) = 1$	$\mathbb{1}_A(x)+\mathbb{1}_B(x)-\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = 1$	$\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1$
$x \notin A$	$x \in B$	$x \in A\cup B$	$\mathbb{1}_A(x) = 0$	$\mathbb{1}_B(x) = 1$	$\mathbb{1}_A(x)+\mathbb{1}_B(x)-\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = 1$	$\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1$
$x \in A$	$x \notin B$	$x \in A\cup B$	$\mathbb{1}_A(x) = 1$	$\mathbb{1}_B(x) = 0$	$\mathbb{1}_A(x)+\mathbb{1}_B(x)-\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = 1$	$\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1$
$x \notin A$	$x \notin B$	$x \notin A\cup B$	$\mathbb{1}_A(x) = 0$	$\mathbb{1}_B(x) = 0$	$\mathbb{1}_A(x)+\mathbb{1}_B(x)-\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = 0$	$\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0$

Dans tous les cas, il y a égalité entre $\mathbb{1}_{A\cup B}(x)$ et $\mathbb{1}_A(x)+\mathbb{1}_B(x)-\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$, d'où l'égalité de fonctions $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$.

Exercice 1 *Démontrer*

— $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$,

— $\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A(1 - \mathbb{1}_B)$,

— $\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$.