Ipesup 2023/2024

Colle 1 MPSI/MP2I Jeudi 5 octobre 2023

⋆⋆⋆

Planche 1

⋆⋆⋆

1. Formules d'addition du cosinus et du sinus. Énoncé et démonstration.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'ensemble des complexes z vérifiant $(z+i)^n = (z-i)^n$.
3. Le plan est muni d'un repère orthonormé. Pour tout réel m, on note C_m le cercle d'équation cartésienne
$$x^2 + y^2 - 4mx - 2my + \frac{9m^2}{2} - m - \frac{1}{2} = 0$$
dans ce repère. Montrer qu'il existe deux tangentes communes à tous les cercles $(C_m)_{m\in\mathbb{R}}$, en donner des équations cartésiennes dans le repère considéré.

⋆⋆⋆

Planche 2

⋆⋆⋆

1. Énoncé et démonstration de l'inégalité triangulaire et de ses cas d'égalité dans $\mathbb{C}$.
2. En s'aidant de l'irrationnel $\sqrt{2}$, montrer que
$$\exists (a,b) \in (\mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{Q})^2, a^b \in \mathbb{Q}$$
3. Déterminer l'ensemble des complexes z vérifiant $16z^4 - 20z^2 + 5 = 0$. En déduire une expression de $\cos(\pi/10)$ et $\cos(\pi/5)$.

⋆⋆⋆

Planche 3

⋆⋆⋆

1. Soit p et q deux réels. Comment factoriser $e^{ip} - e^{iq}$? Le démontrer et l'appliquer à la factorisation de $\sin(p) - \sin(q)$.
2. Pour toutes assertions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, on note $\mathcal{P}|\mathcal{Q}$ l'assertion $\neg(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})$. Le séparateur $|$ est appelé « barre de Sheffer ». Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux assertions, exprimer les assertions $\neg(\mathcal{A})$ et $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ uniquement à l'aide de la barre de Sheffer.
3. Étudier la transformation du plan complexe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto 2\overline{z} + 1 - 2i$.

⋆⋆⋆

Bonus

⋆⋆⋆

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On construit extérieurement à ce quadrilatère les quatre carrés s'appuyant sur ses côté. On note P, Q, R et Q les centres des carrés ainsi construits. Montrer que le quadrilatère $PQRS$ possède des diagonales orthogonales de même longueur.