IPESUP 2023/2024

Colle 11 MPSI/MP2I Jeudi 11 janvier 2024

★★★

Planche 1

★★★

1. Théorème de la limite de la dérivée : énoncé et démonstration.
2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (x-a)^n(x-b)^n$. Calculer la dérivée n-ième de f. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]0,1]$. On suppose que $\exists \ell \in \mathbb{R}, xf'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \ell$. Déterminer ℓ.

★★★

Planche 2

★★★

1. Formule de Leibniz : énoncé et démonstration.
2. Soit $a > 0$ et $f : [0,a] \to \mathbb{R}$, continue, dérivable sur $]0,a]$ telle que $f(0) = 0$ et $f(a)f'(a) < 0$. Montrer que
$$\exists c \in]0,a[, f'(c) = 0$$
3. Soit $x \in [0,1[$ et $\psi : [0,\pi/2[\to \mathbb{R}, t \mapsto \arcsin\left(\dfrac{(1+x)\sin(t)}{1+x\sin^2(t)}\right)$. Montrer que ψ est dérivable et exprimer ψ'.

★★★

Planche 3

★★★

1. Théorème de Rolle : énoncé et démonstration.
2. On note $g :]0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^x$. Prolonger g par continuité en 0 et étudier la dérivabilité de ce prolongement.
3. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists! y \in \mathbb{R}, \int_x^y e^{t^2} dt = 1$$
Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto y$ ainsi construite est de classe C^1.

★★★

Bonus

Pour tout réel x, on note $x^{1/3}$ l'unique réel dont le cube vaut x. Montrer que
$$E = \left\{ n^{1/3} \cos\left(n^{1/3}\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$
est dense dans $\mathbb{R}$.

★★★