Les exercices et et le cours portent sur le chapitre 11 : dérivabilité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$. Les questions de cours portent sur les éléments entre accolades et en gras, et uniquement ceux-ci, même si on attend une maîtrise de l'ensemble des notions du chapitre.

Chapitre 11 : Dérivabilité de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$.

I intervalle réel non vide et non réduit à un point, $f : I \to \mathbb{K}$, $a \in I$.

Fonctions dérivables, fonction dérivée

Taux d'accroissement en a de f, $\tau_a(f) : I \backslash \{a\} \to \mathbb{K}, (f(x) - f(a))/(x - a)$. On dit que f est dérivable en a lorsque $\tau_a(f)$ admet une limite finie ℓ en a, auquel on note $f'(a) = \ell$. f est dérivable en a ssi elle admet un développement limité à l'ordre en 1 en a. La dérivabilité en a entraîne la continuité en a. Dérivabilité à gauche, à droite en a. Exemple de fonction dérivable de dérivée non continue. Dérivabilité sur un intervalle. Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit. Dérivabilité d'une composée. [**Dérivabilité d'une fonction réciproque**].

Extrema et derivation

Si f, dérivable en a, admet un extremum local en un point a intérieur à I, alors $f'(a) = 0$. Théorème de Darboux. [**Théorème de Rolle.** $a < b, f : [a, b] \to \mathbb{R}$**, continue, dérivable sur** $]a, b[$ **tel que** $f(a) = f(b)$**. Alors** $\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$]. Extensions sur des intervalles non bornés. Application au comptage et à la localisation de racines de fonctions, à la recherche de points fixes.

Accroissements finis

[**Egalité des accroissements finis :** $a < b, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **continue, dérivable sur** $]a, b[$**. Alors** $\exists c \in]a, b[, f'(c) = (f(b) - f(a))/(b - a)$]. Egalité généralisée des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis dans le cas des fonctions à valeurs réelles sous l'hypothèse f' bornée. Extension de l'inégalité des accroissements finis aux fonctions à valeurs complexes. [**f dérivable sur un intervalle est croissante ssi** $f' \geq 0$] f dérivable sur un intervalle est strictement croissante ssi $f' \geq 0$ et $(f')^{-1}(\{0\})$ est d'intérieur vide. Application à « l'intégration » d'inégalités même si les dérivées ne sont pas continues. [**Théorème de la limite de la dérivée : soit** $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ **continue, dérivable sur** $[a, b] \backslash \{c\}$**. On suppose que** f' **admet une limite finie** ℓ **en** c**. Alors** f **est dérivable en** c **et** $f'(c) = \ell$]. Règle de l'Hospital mentionnée, même si hors-programme.

Fonctions k-fois dérivables.

Fonction k-fois dérivable, indéfiniment dérivable. Dérivée k-ième d'une combinaison linéaire. [**Formule de Leibniz de la dérivée** k**-ième d'un produit**]. Stabilité des fonctions k-fois dérivables par composition, par quotient avec les bonnes hypothèses. k-dérivabilité de la réciproque d'une fonction bijective k-fois dérivable sous hypothèse de non-annulation de la dérivée première. Les formules de Faa Di Bruno et la réversion de Lagrange sont hors-programme. Théorème de la limite de la dérivée n-ième. Toute fonction de classe C^1 sur un segment est Lipschitzienne. Conditions nécessaires, conditions suffisantes d'extrema locaux à l'aide de la dérivée seconde.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆