Ipesup 2023/2024

Colle 17 MPSI/MP2I Jeudi 07 mars 2024

★★★

Planche 1

★★★

1. Théorème des bornes atteintes.
2. On note $T : [0,1] \to [0,1], x \mapsto \dfrac{1}{x} - \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ si $x \neq 0$ et 0 si $x = 0$. Soit $x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q}$.
   (a) Justifier la bonne définition de $a_1 = \lfloor 1/x \rfloor$ et $a_j = \lfloor 1/T^{j-1}(x) \rfloor$ pour tout $j \geqslant 2$.
   (b) On définit par récurrence $p_0 = 0$, $p_1 = 1$, $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$ et
   $$\forall n \geqslant 2, \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$
   Justifier le produit matriciel
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix}$$
   (c) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$.
   (d) Démontrer que $p_n/q_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$.

★★★

Planche 2

★★★

1. Théorème de Bolzano-Weierstrass.
2. On note f l'unique application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)^3 = x$. On note également $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto t\cos(t)$.
   (a) Justifier la bonne définition de f et étudier sa dérivabilité.
   (b) Étudier la dérivabilité de $g \circ f$ et déterminer les éventuelles limites de $(g \circ f)'$ en 0 et en $+\infty$.
   (c) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $k\pi \geqslant |x|$. Contruire $y_k \in [k\pi, (k+1)\pi[$ tel que $g(y_k) = x$.
   (d) En considérant $n_k = \lfloor y_k^3 \rfloor$, démontrer que $(g \circ f)(\mathbb{N})$ est dense dans $\mathbb{R}$.

★★★

Planche 3

★★★

1. Caractérisation de la convexité d'une fonction dérivable sur un intervalle.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que P est unitaire, que $n = d(P) \geqslant 2$ et que toutes ses racines sont réelles. On les ordonne en les notant $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_p$. Leurs multiplicités sont notées $m_1, \ldots, m_p$. On note enfin $g : [\lambda_1, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto x - P(x)/P'(x)$ si $x > \lambda_1$, λ_1 si $x = \lambda_1$.
   (a) Montrer que $\forall x > \lambda_1, \forall k \in [\![0, n]\!], P^{(k)}(x) > 0$.
   (b) Montrer que g est de classe C^∞.
   (c) Montrer que $\forall x > \lambda_1, \lambda_1 < g(x) < x$.
   (d) Soit $b > \lambda_1$. On définit par récurrence $x_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{k+1} = g(x_k)$. Montrer que cette suite décroît et converge vers λ_1.