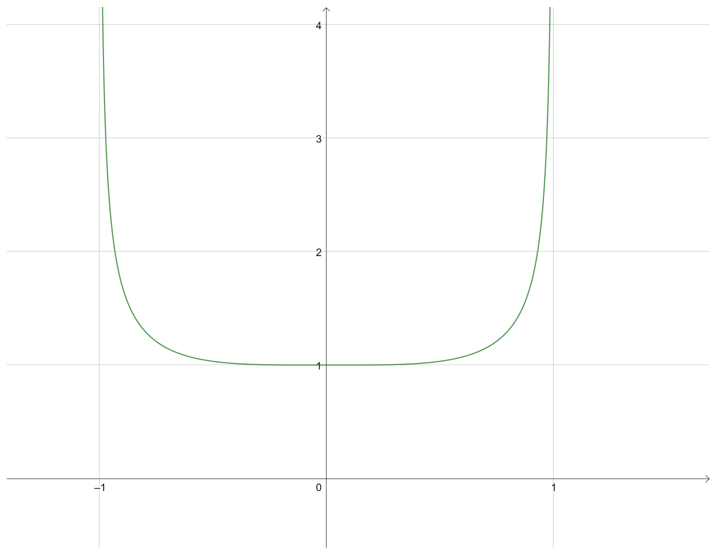
Problème : étude d'une fonction réciproque.

1. (a) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un intervalle I et $a \in I$. Alors l'application $F : I \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable et $F' = f$.

   (b) La fonction $f^{-1} : J \to I$ est dérivable en tout point x de J tel que $f'\left(f^{-1}(x)\right) \neq 0$. En un tel réel x, $\left(f^{-1}\right)'(x) = 1/f'\left(f^{-1}(x)\right)$.

2. a) Graphe de $t \mapsto 1/\sqrt{1-t^4}$.



   b) On remarque que la fonction $]-1,1[\to \mathbb{R}, t \mapsto 1/\sqrt{1-t^4}$ est continue. D'après le théorème fondamental du calcul intégral, L est dérivable et $\forall x \in]-1,1[, L'(x) = 1/\sqrt{1-x^4} > 0$. On en déduit que L est strictement croissante.

   c) Soit x dans $]-1,1[$. En effectuant le changement de variable $u = -t$, on obtient

$$L(-x) = \int_0^{-x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^x \frac{-du}{\sqrt{1-(-u)^4}} = -\int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = -L(x)$$

   Cela démontre que la fonction L est impaire.

   d) Soit $x \in [0,1[$, puis $t \in [0,x]$. Alors $t^4 \leq t^2 \leq 1$, donc $0 < 1-t^2 \leq 1-t^4$. On en déduit que $\frac{1}{\sqrt{1-t^4}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Par croissance de l'intégrale, comme x a été choisi positif, on en déduit $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}dt \leq \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$. On reconnaît alors $L(x) \leq \arcsin(x)$. On en déduit que $\forall x \in [0,1[, L(x) \leq \pi/2$. Ainsi, L est croissante et majorée, donc admet une limite en 1. L'imparité de L assure qu'elle admet également une limite en -1.

   e) L'application L est continue sur $]-1,1[$ car dérivable sur cet intervalle. Le prolongement en -1 et 1 proposé assure sa continuité en ces points. Ce prolongement est également strictement croissant. Le théorème de la bijection entraîne qu'il s'agit bien d'une bijection de $[-1,1]$ dans $[-\sigma,\sigma]$.

   f) Commençons par démontrer l'indication. Soit t dans $[0,1[$. Alors $1+t+t^2+t^3 \leq 4$, ce qui entraîne $1-t^4 = (1-t)(1+t+t^2+t^3) \leq 4(1-t)$ puisque $1-t \geq 0$. Comme $u \mapsto 1/\sqrt{u}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit $\frac{1}{\sqrt{1-t^4}} \geq \frac{1}{2\sqrt{1-t}}$.

   Soit à présent, x et y deux réels dans $[0,1[$ tels que $x \leq y$. La relation de Chasles entraîne $L(y)-L(x) = \int_x^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$.

   Comme $y \geq x$, la croissance de l'intégrale et l'inégalité précédente impliquent $L(y)-L(x) \geq \int_x^y \frac{dt}{2\sqrt{1-t}} = \left[-\sqrt{1-t}\right]_x^y = \sqrt{1-x} - \sqrt{1-y}$.

g) Soit $x \in [0,1[$, comme L admet une limite en 1, on peut passer à la limite dans l'inégalité précédente lorsque y tend vers 1, ce qui assure que $L(1) - L(x) \geq \sqrt{1-x} - 0$. Le taux d'accroissement de L entre x et 1 vérifie alors, puique $1 - x > 0$,

$$\frac{L(1)-L(x)}{1-x} \geq \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

Comme $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 1} \frac{L(1)-L(x)}{1-x} = +\infty$, donc que L n'est pas dérivable en 1.

3. (a) Comme sl est 4σ-périodique, il suffit de calculer $\mathrm{sl}(k\sigma)$ pour $k \in \{-1,0,1,2\}$, donc de résoudre les équations $L(x) = k\sigma$ d'inconnue $x \in [-1,1]$.

   - Premier cas $k = 0$: On sait que $L(0) = 0$ et que $0 \in [-1,1]$ donc $\mathrm{sl}(0) = 0$. On en déduit $\mathrm{sl}(k\sigma) = 0$ pour tout entier relatif k congru à 0 modulo 4.
   - Deuxième cas $k = 1$. On a défini L de sorte que $L(1) = \sigma$. Comme $1 \in [-1,1]$, on en déduit $\mathrm{sl}(\sigma) = 1$. Cela entraîne $\mathrm{sl}(k\sigma) = 1$ pour tout entier relatif k congru à 1 modulo 4.
   - Troisième cas $k = 2$. On remarque que $2\sigma - \sigma = \sigma - 0$. Comme sl a été étendue par symétrie par rapport à σ, on en déduit que $\mathrm{sl}(2\sigma) = \mathrm{sl}(0) = 0$. Cela entraîne $\mathrm{sl}(k\sigma) = 0$ pour tout entier relatif k congru à 2 modulo 4.
   - Quatrième cas $k = -1$. Comme $L(-1) = -\sigma$, et $-1 \in [-1,1]$, on en déduit $\mathrm{sl}(-\sigma) = -1$. Cela entraîne $\mathrm{sl}(k\sigma) = -1$ pour tout entier relatif k congru à -1 modulo 4.

   (b) La fonction est continue sur $[-\sigma,\sigma]$ comme réciproque de la fonction continue L. Sa réflexion par rapport à l'axe $x = \sigma$ implique $\forall x \in [\sigma,3\sigma], \mathrm{sl}(x) = \mathrm{sl}(2\sigma - x)$, ce qui implique sa continuité par composition sur $[\sigma,3\sigma]$. De même, pour tout intervalle de la forme $[-\sigma + 2k2\sigma, 3\sigma + 2k2\sigma]$ avec $k \in \mathbb{Z}$, la périodicité de sl assure sa continuité sur cet intervalle. Conclusion, sl est continue sur $\mathbb{R}$.

   (c) On sait que L est dérivable sur $]-1,1[$ et que $\forall x \in]-1,1[, L'(x) = 1/\sqrt{1-x^4} \neq 0$. On en déduit que sl est dérivable sur $]-\sigma,\sigma[$ et

$$\forall x \in]-\sigma,\sigma[, \mathrm{sl}'(x) = \frac{1}{L'(\mathrm{sl}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(x)}}} = \sqrt{1-\mathrm{sl}^4(x)}$$

   On sait que sl est continue en σ et $\mathrm{sl}(\sigma) = 1$. Par conséquent, la continuité de la racine et de la puissance quatrième entraînent $\lim\limits_{x\to\sigma} \sqrt{1-\mathrm{sl}^4(x)} = 0$. Ainsi, sl' possède une limite nulle en σ.

   (d) Soit $x \in [0,\sigma[$. On note $y = \mathrm{sl}(x)$ qui appartient à $[0,1[$, il vérifie $L(y) = x$ et $y < 1$. Le taux d'accroissement de sl entre x et σ vaut alors

$$\frac{\mathrm{sl}(x)-\mathrm{sl}(\sigma)}{x-\sigma} = \frac{y-1}{L(y)-L(1)} = \frac{1}{\frac{L(y)-L(1)}{y-1}}$$

   Or on a vu en 2.g) que $\frac{L(y)-L(1)}{y-1} \xrightarrow[y\to 1]{} +\infty$, ce qui entraîne $\frac{\mathrm{sl}(x)-\mathrm{sl}(\sigma)}{x-\sigma} \xrightarrow[x\to\sigma^-]{} 0$, donc que sl est dérivable à gauche en σ. Sa réflexion par rapport à l'axe $x = \sigma$ entraîne qu'elle a même dérivée à droite en σ. Conclusion, sl est dérivable en σ et $\mathrm{sl}'(\sigma) = 0$.

   On remarque par imparité que sl est également dérivable en $-\sigma$ et que $\mathrm{sl}'(-\sigma) = 0$.

   (e) Soit $x \in [\sigma,3\sigma]$, Alors $2\sigma - x \in [-\sigma,\sigma]$ et $\mathrm{sl}(2\sigma - x) = \mathrm{sl}(x)$. Comme $x \mapsto 2\sigma - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sl est dérivable sur $[\sigma,\sigma]$, on en déduit par composition que sl est dérivable sur $[\sigma,3\sigma]$. En dérivant cette égalité de fonctions, on obtient

$$\mathrm{sl}'(x) = -\mathrm{sl}'(2\sigma - x) = -\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(2\sigma - x)} = -\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(x)}$$

   (f) Comme $\mathrm{sl}^4 \neq 1$ sur $]-\sigma,\sigma[$, $\sqrt{1-\mathrm{sl}^4}$ est dérivable sur cet intervalle, ce qui entraîne que sl' est dérivable, donc que sl est deux fois dérivable. En dérivant de nouveau, on obtient

$$\forall x \in]-\sigma,\sigma[, \mathrm{sl}''(x) = \frac{-4\mathrm{sl}'(x)\mathrm{sl}^3(x)}{2\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(x)}} = -2\mathrm{sl}^3(x)$$

4. a) On a vu précédemment que la fonction sl vérifie cette équation différentielle sur l'intervalle $]-\sigma,\sigma[$. On a admis que c'était encore le cas en $\pm\sigma$. De plus, $\forall x \in [\sigma,3\sigma], \mathrm{sl}(x) = \mathrm{sl}(2\sigma - x)$, entraîne après double dérivation

$$\forall x \in [\sigma,3\sigma], \mathrm{sl}''(x) = (-1)^2\mathrm{sl}''(2\sigma - x) = \mathrm{sl}''(2\sigma - x) = 2\mathrm{sl}^3(2\sigma - x) = 2\mathrm{sl}^3(x).$$

   Par conséquent, sl vérifie encore l'équation différentielle sur $[\sigma,3\sigma]$, puis sur tout $\mathbb{R}$ par 4σ-périodicité.

b) La fonction H est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables et

$$\forall x \in I, H'(x) = 2f'(x)f''(x) + 4f'(x)f^3(x) = 2f'(x)\Big(f''(x) + 2f^3(x)\Big) = 0$$

Comme I est un intervalle, on en déduit que H est constante.

c) D'après l'hypothèse, $H \geq (f')^2 > 0$, donc l'expression $H^{-1/4}$. D'autre part, soit $x \in I$. On a $H \geq y^4(x)$, soit $(f(x)H^{-1/4})^4 \leq 1$. On en déduit par croissance de la fonction $t \mapsto t^{1/4}$ sur $\mathbb{R}^+$ que $|f(x)|H^{-1/4} \leq 1$. Par conséquent, $H^{-1/4}f(x) \in [-1,1]$, et $L(H^{-1/4}f(x))$ est bien défini.

d) Soit J un intervalle où f' ne s'annule pas. Alors $\forall x \in J, H > f^4(x)$, soit encore $\forall x \in J, H^{-1/4}f(x) \in]-1,1[$. Comme L est de classe C^1 sur $]-1,1[$, on en déduit que φ est de classe C^1 sur J et que

$$\forall x \in J, \varphi'(x) = H^{-1/4}f'(x)L'(H^{-1/4}f(x)) = \frac{H^{-1/4}\sqrt{H - f(x)^4}}{\sqrt{1 - H^{-1}f(x)^4}} = H^{1/4}$$

On en déduit, en posant $C = \varphi(0)$ que $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = C + H^{1/4}x$. On applique la fonction sl à l'expression précédente, ce qui entraîne

$$\forall x \in J, H^{-1/4}f(x) = \mathrm{sl}(C + H^{1/4}x)$$

soit encore

$$\forall x \in J, f(x) = H^{1/4}\mathrm{sl}(C + H^{1/4}x)$$

e) Supposons qu'il existe un intervalle $I =]\alpha, \beta[$ tel que $\beta - \alpha > 2\sigma H^{-1/4}$ et $f' > 0$ sur I. Le résultat précédent donnerait l'existence d'une réel C tel que

$$\forall x \in I, f(x) = H^{1/4}\mathrm{sl}(H^{1/4}x + C)$$

Quand x décrit I, $H^{1/4}x + C$ décrit un intervalle ouvert de longuer $H^{1/4}(\beta - \alpha) > 2\sigma$, qui contient nécessairement un multiple entier impair $(2k+1)\sigma$ de σ. Or on a vu $\mathrm{sl}'((2n+1)\sigma) = \pm\sqrt{1 - \mathrm{sl}^4((2n+1)\sigma)} = \pm\sqrt{1 - 1^4} = 0$ pour tout n dans $\mathbb{Z}$. Donc f' s'annule sur un tel intervalle, ce qui est contradictoire. Conséquent, f' s'annule ou prend un valeur strictement négative sur un tel intervalle. Dans le second cas, on applique ce qui précède à la fonction $-f$ et on obtient similairement que f' s'annule sur tout intervalle de longueur strictement supérieure à $2\sigma H^{-1/4}$.

5. (a) Soit x un réel. On a établi que $\mathrm{sl}'^2(x) + \mathrm{sl}^4(x) = 1$, ce qui entraîne

$$\mathrm{cl}^2(x) + \mathrm{sl}^2(x) + \mathrm{cl}^2(x)\mathrm{sl}^2(x) = (1 + \mathrm{sl}^2(x))\mathrm{cl}^2(x) + \mathrm{sl}^2(x) = \frac{\mathrm{sl}'^2(x)}{1 + \mathrm{sl}^2(x)} + \mathrm{sl}^2(x) = \frac{1 - \mathrm{sl}^4(x) + \mathrm{sl}^2(x) + \mathrm{sl}^4(x)}{1 + \mathrm{sl}^2(x)} = 1$$

(b) On a vu que sl est deux fois dérivable, donc cl est dérivable et, pour tout réel x,

$$\mathrm{cl}'(x) = \frac{\mathrm{sl}''(x)(1 + \mathrm{sl}^2(x) - 2\mathrm{sl}'^2(x)\mathrm{sl}(x)}{(1 + \mathrm{sl}^2(x))^2} = \frac{-2\mathrm{sl}^3(x)(1 + \mathrm{sl}^2(x)) - 2\mathrm{sl}(x)(1 - \mathrm{sl}^4(x))}{(1 + \mathrm{sl}^2(x))^2} = \frac{-2\mathrm{sl}(x)}{1 + \mathrm{sl}^2(x)}$$

Cela démontre que cl' est de nouveau dérivable, et l'on obtient

$$\mathrm{cl}''(x) = \frac{-2\mathrm{sl}'(x)(1 + \mathrm{sl}^2(x)) + 2\mathrm{sl}(x)2\mathrm{sl}'(x)\mathrm{sl}(x)}{(1 + \mathrm{sl}^2(x))^2} = -2\mathrm{sl}'(x)\frac{1 - \mathrm{sl}^2(x)}{(1 + \mathrm{sl}^2(x))^2}$$

Or $\mathrm{sl}'^2 = 1 - \mathrm{sl}^4 = (1 - \mathrm{sl}^2)(1 + \mathrm{sl}^2)$. On en déduit

$$\mathrm{cl}''(x) = -2\frac{\mathrm{sl}'^3(x)}{(1 + \mathrm{sl}^2(x))^3} = -2\mathrm{cl}^3(x)$$

Ainsi cl est également solution de (E).

(c) Comme cl est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, la question 4.b) entraîne que $\mathrm{cl}'^2 + \mathrm{cl}^4$ est constante. On détermine cette constante en évaluant en 0,

$$\mathrm{cl}'^2(0) + \mathrm{cl}^4(0) = \frac{4\mathrm{sl}^2(0)}{(1 + \mathrm{sl}^2(0))^2} + \frac{\mathrm{sl}'^4(0)}{(1 + \mathrm{sl}^2(0))^4} = 1$$

D'autre part, on connaît les variations de sl, donc on sait que $\mathrm{cl}' = -2\mathrm{sl}/(1 + \mathrm{sl}^2)$ ne s'annule pas sur $]0, 2\sigma[$. D'après la question 4.d), on a $H = 1$, et l'existence d'un réel C tel que

$$\forall x \in]0, 2\sigma[, \mathrm{cl}(x) = \mathrm{sl}(x + C)$$

Toutes fonctions continues, on peut passer à la limite quand x tend vers 0, ce qui donne $\mathrm{cl}(0) = \mathrm{sl}(C)$, soit $\mathrm{sl}(C) = 1$. Par conséquent, $C \equiv \sigma[4\sigma]$. On en déduit via la 4σ-périodicité de sl, puis la symétrie par rapport à l'axe $x = \sigma$ que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{cl}(x) = \mathrm{sl}(x+\sigma) = \mathrm{sl}(\sigma - x)$$

(d) Soit a un réel. On note $u : x \mapsto \mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}'(a-x) + \mathrm{sl}(a-x)\mathrm{sl}(x)$ et $v : x \mapsto 1 + \mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(a-x)$. D'après l'équation différentielle (E), on a après dérivation,

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) &= \mathrm{sl}'(x)\mathrm{sl}'(a-x) - \mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}''(a-x) - \mathrm{sl}'(a-x)\mathrm{sl}'(x) + \mathrm{sl}(a-x)\mathrm{sl}''(x)\\ &= 2\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}^3(a-x) - 2\mathrm{sl}(a-x)\mathrm{sl}^3(x)\\ &= 2\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}(a-x)\left[\mathrm{sl}^2(a-x) - \mathrm{sl}^2(x)\right]\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, v'(x) &= 2\mathrm{sl}'(x)\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}^2(a-x) - 2\mathrm{sl}'(a-x)\mathrm{sl}(a-x)\mathrm{sl}^2(x)\\ &= 2\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}(a-x)\left[\mathrm{sl}'(x)\mathrm{sl}(a-x) - \mathrm{sl}'(a-x)\mathrm{sl}(x)\right]\end{aligned}$$

Via $\mathrm{sl}'^2 + \mathrm{sl}^4 = 1$, cela permet d'écrire, pour tout réel x,

$$\begin{aligned}u'(x)v(x) - u(x)v'(x) =& 2\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}(a-x)\left[\mathrm{sl}^2(a-x) - \mathrm{sl}^2(x)\right](1 + \mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(a-x))\\ &- 2\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}(a-x)\left[\mathrm{sl}'(x)\mathrm{sl}(a-x) - \mathrm{sl}'(a-x)\mathrm{sl}(x)\right](\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}'(a-x) + \mathrm{sl}(a-x)\mathrm{sl}(x))\\ =& 2\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}(a-x)\left[\mathrm{sl}^2(a-x) - \mathrm{sl}^2(x) + \mathrm{sl}^4(a-x)\mathrm{sl}^2(x) - \mathrm{sl}^4(x)\mathrm{sl}^2(a-x) - \mathrm{sl}'^2(x)\mathrm{sl}^2(a-x) + \mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}'^2(a-x)\right]\\ =& 2\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}(a-x)\left[\mathrm{sl}^2(x)\left(-1 + \mathrm{sl}^4(a-x) + \mathrm{sl}'^2(a-x)\right) + \mathrm{sl}^2(a-x)\left(1 - \mathrm{sl}^4(x) - \mathrm{sl}'^2(x)\right)\right]\\ =& 0\end{aligned}$$

On en déduit que la fonction dérivable G_a est de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc constante.

(e) Soit x et y deux réels. On pose $a = x + y$. La fonction G_a est constante égale à $G_a(0) = \dfrac{0 + \mathrm{sl}(a)\mathrm{sl}'(0)}{1+0} = \mathrm{sl}(x+y)$. Par conséquent,

$$\mathrm{sl}(x+y) = \frac{\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}'(y) + \mathrm{sl}(y)\mathrm{sl}(x)}{1 + \mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(y)} = \frac{\mathrm{sl}(x)(1 + \mathrm{sl}^2(y))\mathrm{cl}(y) + \mathrm{sl}(y)(1 + \mathrm{sl}^2(x))\mathrm{cl}(x)}{1 + \mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(y)}$$

(f) La formule d'addition précédente fournit la formule de duplication :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \mathrm{sl}(2y) = \frac{2\mathrm{sl}(y)\mathrm{cl}(y)(1 + \mathrm{sl}^2(y))}{1 + \mathrm{sl}(y)^4}$$

Soit $x \in [-1, 1]$ et appliquons cette formule de duplication à $y = L(x)$. Avec ce choix, $\mathrm{sl}(y) = x$, $\mathrm{sl}'(y) = \sqrt{1 - \mathrm{sl}^4(y)} = \sqrt{1 - x^4}$, dont on déduit $\mathrm{cl}(y) = \sqrt{1 - x^4}/(1 + x^2)$. Ainsi,

$$\forall x \in [-1, 1], \mathrm{sl}(2L(x)) = \frac{2x\sqrt{1 - x^4}}{1 + x^4}$$

Soit à présent x dans $[-\mathrm{sl}(\sigma/2), \mathrm{sl}(\sigma/2)]$. On a alors $-\dfrac{\sigma}{2} \leq L(x) \leq \dfrac{\sigma}{2}$ et $2L(x) \in [-\sigma, \sigma]$. Ainsi, $L(\mathrm{sl}(2L(x)) = 2L(x)$ et on obtient

$$2L(x) = L\left(\frac{2x\sqrt{1 - x^4}}{1 + x^4}\right)$$

En revenant à la définition de L, on conclut à

$$\forall x \in [-\mathrm{sl}(\sigma/2), \mathrm{sl}(\sigma/2)], \quad 2\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}} = \int_0^{\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}}$$