Les questions de cours portent sur les éléments du chapitre 8 : suites numériques précédés d'un astérisque. Les exercices portent sur le chapitre 8 : suites numériques. Le sens direct de la caractérisation séquentielle de la continuité peut être utilisé, même si nous n'avons pas encore étudié les limites et la continuité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Chapitre 8 : suites numériques.

K désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Exemples de suites numériques : suites numériques, majorées, minorées, bornées. u est bornée ssi $|u|$ est majorée. Suites monotones, opérations sur les suites monotones. Propriétés vérifiées à partir d'un certain rang. Suite $a^n/n!$ avec $a \in \mathbb{R}_+$ est décroissante àpcr, suites stationnaires. Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$. ($\star$) Si f est croissante, u est monotone selon le signe de $u_0 - u_1$. Si f est décroissante, $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones de monotonies contraires, selon le signe de $u_0 - u_2$. Si $x \mapsto x - f(x)$ est de signe constant, u est monotone selon ce signe. Si f est continue et u convergente, sa limite est un point fixe de f. Suites implicites, arithmético-géométriques. Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants. Polynôme caractéristique. ($\star$) Forme générale des solutions complexes. Fomes générale des solutions réelles.

Limites finies et infinies

$$\forall u \in K^{\mathbb{N}}, \forall l \in K, u \to l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$$

u tend vers l ssi tout invervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de la suite u à partir d'un certain rang. Suite convergente. ($\star$) Unicité de la limite. Suite divergente. ($\star$) Opérations sur les limites finies, combinaison linéaire, produit, quotient. Si u est convergente, elle est bornée. Si u est bornée et v de limite nulle, uv est de limite nulle. ($\star$) Passage à la limite dans les inégalités. Dans le cas réel,

$$u \to +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$$

$$u \to -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq A$$

u tend vers $+\infty$ ssi $-u$ tend vers $-\infty$. Dans le cas complexe,

$$u \to \infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n| \geq A$$

u tend vers ∞ ssi $|u|$ tend vers $+\infty$. ($\star$) Opérations sur les limites infinies.

Conditions nécessaires et/ou suffisantes de convergence u tend vers $l \iff u - l$ tend vers $0 \iff |u - l|$ tend vers 0. Convergente implique bornée. Limite infinie implique non bornée. En cas de limite non nulle, u est de signe constant àpcr. ($\star$) Théorème d'encadrement (gendarmes). Si u tend vers l, $|u|$ tend vers $|l|$ et $\overline{u}$ tend vers $\overline{l}$. u à valeurs complexes est convergente ssi $\mathfrak{Re}(u)$ et $\mathfrak{Im}(u)$ sont convergentes. u tend vers $+\infty$ ssi elle est minorée àpcr par une suite v de limite $+\infty$. u tend vers $-\infty$ ssi elle est majorée àpcr par une suite v de limite $-\infty$.

Exemples fondamentaux de suites convergentes/divergentes Limites des suites arithmétiques, ($\star$) géométriques. ($\star$) Théorème de convergence monotone : les quatre cas doivent être sus. Suites adjacentes. ($\star$) Théorème de convergence des suites adjacentes. Extractrice, sous-suite. Si u est convergente, toutes ses sous-suites sont convergentes de même limite. Il suffit que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ soient convergentes de même limite pour que u converge. ($\star$) Théorème de Bolzano-Weierstrass, démonstration par dichotomie. Dans le cas réel, si u est non majorée (resp. non minorée), il existe une sous-suite de u de limite $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Vocabulaire de topologie Boule ouverte, notion d'ouvert, de voisinage d'un scalaire, de $\pm\infty$ dans $\mathbb{R}$, de ∞ dans $\mathbb{C}$, de $+\infty$ dans $\mathbb{N}$. Traduction des limites en termes de voisinage. Point adhérent à une partie.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆