Ipesup 2023/2024

Kholle 2 filière MP   Mardi 26 septembre 2023

★★★

Planche 1

★★★

1. Énoncer le théorème d'intégration des relations de comparaison. Le démontrer dans le cas de la relation de prépondérance (les « petits o ») sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$.
2. Étudier, suivant les valeurs du réel α, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/e}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha}\frac{dx}{x}$.
3. Chercher un équivalent simple quand x tend vers $+\infty$ de

$$\int_0^x\left(\int_0^t \frac{1-u^2}{(1+u^2)\sqrt{1+u^4}}\,du\right)dt$$

★★★

Planche 2

★★★

1. Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt$.
2. Calcul de $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dx}{2+\cos(x)}$.
3. On note pour tout réel x, $f(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$
   (a) Justifier la bonne définition de f.
   (b) Démontrer l'équivalent au voisinage de $+\infty$, $f(x)\sim_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x^2}}{2x}$.
   (c) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

★★★

Planche 3

★★★

1. Définition de la convergence normale, de la convergence uniforme d'une série de fonctions. Démontrer que l'une implique l'autre.
2. Calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^2}$.
3. On note $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto xe^{-x^3|\sin(x)|}$. Étudier son intégrabilité.
4. On considère une fonction $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue par morceaux, décroissante, d'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ convergente non nulle. Montrer que pour tout $t>0$, la série $\sum f(nt)$ est convergente, et donner un équivalent quand t tend vers 0^+ de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(nt)$.

★★★

Bonus

★★★

Déterminer, pour tout entier n non nul, un développement asymptotique à n termes de la fonction $Li : [2, +\infty[, x \mapsto \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$ quand x tend vers $+\infty$.