Les questions de cours portent sur les éléments entre accolades et en gras. On attend une maîtrise de l'*ensemble* des notions du chapitre 15 sur les polynômes et fractions rationnelles.

Chapitre 15 : Polynômes et fractions rationnlles

$\mathbb{K}$ désigne un corps, la plupart du temps un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$.

On suppose que $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle. Dérivée formelle d'un polynôme. Degré de la dérivée, caractérisation des polynômes de degré 0, linéarité, dérivée d'un produit, d'une composée de polynômes. Dérivées successives. Formule de Leibniz. Formule de Taylor polynomiale. [**Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les dérivées successives**].

Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$.

Pour P non nul, l'ensemble des degrés des diviseurs de P est majoré par $d(P)$. $P \wedge Q$ défini comme le diviseur unitaire commun à P et Q de plus haut degré, $P \vee Q$ défini comme le multiple commun à P et Q unitaire non nul de plus petit degré. [**Caractérisation algébrique du pgcd et du ppcm :** $P\mathbb{K}[X] + Q\mathbb{K}[X] = (P \wedge Q)\mathbb{K}[X]$ **et** $P\mathbb{K}[X] \cap Q\mathbb{K}[X] = (P \vee Q)\mathbb{K}[X]$]. L'ensemble des diviseurs communs à P et Q est l'ensemble des diviseurs de $P \wedge Q$. Réduction pour se ramener à des polynômes premiers entre eux. Relation, Théorème de Bezout, Lemme de Gauss. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé. Alors P est simplement scindé ssi $P \wedge P' = 1$. Notion de plynôme irréductible. Lemme d'Euclide. Tout polynôme non constant possède une diviseur irréductible. [**Tout polynôme non nul se décompose en produit d'un scalaire non nul et d'un produit de facteurs irréductibles unitaires unique à l'ordre près.**] Théorème de D'Alembert-Gauss admis. Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant est scindé. [**Caractérisation des polynômes irréductibles dans** $\mathbb{C}[X]$**, puis dans** $\mathbb{R}[X]$]. CNS de divisibilité de polynômes dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide des racines.

Corps des fractions rationnelles à une indéterminée $\mathbb{K}(X)$.

On ne soulèvera pas de difficultés sur la définition des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$. Forme irréductible d'une fraction rationnelle, zéros, pôles d'une fraction rationnelle. Degré d'une fraction rationnelle. Partie entière d'une fraction rationnelle. Théorème de la décomposition en éléments simples. *La méthode des divisions par puissances croissantes n'a pas été abordée en cours.* [**Expression de l'élément simple d'un pôle simple de** F**.**] Décomposition en éléments simples de P'/P lorsque P est scindé.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆