IPESUP 2023/2024

Colle 9 MPSI/MP2I Jeudi 14 décembre 2023

⋆⋆⋆

Planche 1

⋆⋆⋆

1. Caractérisation séquentielle de la limite en un point. Énoncé général. Démonstration dans le cas d'une limite finie en un réel.
2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)^2 = 1$.
3. Soit f, g deux fonctions continues sur $[0, 1]$ telles que

$$\forall x \in [0, 1], 0 < f(x) < g(x)$$

Montrer que $\exists C > 1, \forall x \in [0, 1], Cf(x) \leqslant g(x)$.

⋆⋆⋆

Planche 2

⋆⋆⋆

1. Théorème des valeurs intermédiaires. Énoncé et démonstration.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique, i.e $\exists T > 0, \forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$. On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est constante.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On note $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \lfloor x \rfloor + f(x - \lfloor x \rfloor)$. A quelle condition nécessaire et suffisante sur f, la fonction g est-elle continue ?

⋆⋆⋆

Planche 3

⋆⋆⋆

1. Théorème des bornes atteintes. Énoncé et démonstration.
2. On note $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$. Étudier les limites éventuelles de f en 0 et $+\infty$.
3. Étudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$.

⋆⋆⋆

Bonus

⋆⋆⋆

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Montrer que $\{y \in \mathbb{R} | \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, xy - f(x) \leqslant M\}$ est un intervalle. Le déterminer lorsque f est continue sur un segment.