Les questions de cours portent sur les éléments entre accolades et en gras. On attend une maîtrise de l'*ensemble* des notions du programme de colle. Les exercices ne portent que sur les **deux** premières parties du chapitre. On pourra, si besoin, faire admettre certains résultats.

Chapitre 15 : Polynômes et fractions rationnlles

K désigne un corps, la plupart du temps un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Anneau des polynômes à une indéterminée.

Produit de Cauchy de deux suites numériques, structure d'anneau en découlant sur $K^{\mathbb{N}}$. Suite à support fini, sous-anneau des suites à support fini $K^{(\mathbb{N})}$. Indéterminée $X = (\delta_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}$. Anneau des polynômes $K[X]$, écriture $P = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n X^n$. Composée de polynômes. Degré d'un polynôme. [**Degré d'une somme, d'un produit, d'une composée de polynômes.**] Intégrité de $K[X]$. Notation $K_n[X]$ des polynômes de degré au plus n. Stabilité par combinaison linéaire. Inversibles de $K[X]$. Relation de divisibilité dans $K[X]$. [**Théorème de la division euclidienne**].

Racines d'un polynôme.

Fonction polynomiale associée à un polynôme. Compatibilité avec les opérations de $\mathcal{F}(K,K)$. Racine d'un polynôme. [**Soit $P \in K[X]$, $a \in K$. a est racine de P ssi $X - a$ divise P**]. [**Soit $P \in K[X]$ un polynôme non nul. Alors l'ensemble $Z(P)$ de ses racines est fini et $|Z(P)| \leq d(P)$.**] Tout polynôme possèdant un nombre de racines strictement plus grand que son degré est le polynôme nul. Dans le cas où K est infini, l'application $P \mapsto \tilde{P}$ qui à tout polynôme associe sa fonction polynomiale est injective. Multiplicité $\omega_P(a) = \max\{k \in \mathbb{N}, (X-a)^k | P\}$ de a dans P. Notion de polynôme scindé, simplement scindé. Si P possède n racines distinctes $a_1, \dots, a_n$ alors $\prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$ divise P. Fonctions symétriques élémentaires. [**Relations coefficients-racines**] dites formules de Viète. [**Interpolation de Lagrange**]. Ensemble des polynômes vérifiant les contraintes $S(x_i) = y_i$ sans condition de degré.

Dérivation dans $K[X]$.

On suppose que K est de caractéristique nulle. Dérivée formelle d'un polynôme. [**Degré de la dérivée, caractérisation des polynômes de degré 0, linéarité, dérivée d'un produit, d'une composée de polynômes**]. Dérivées successives. Formule de Leibniz. [**Formule de Taylor polynomiale.**]

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Les notions suivantes sur les polynômes n'ont PAS été abordées en cours : caractérisation de la multiplicité par les dérivées successives, arithmétique : pgcd, ppcm, polynômes irréductibles, factorialité, corps $K(X)$. Je vous remercie de ne pas aborder d'exercices connexes.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆