Exercice 1 : un peu de calcul

1. (a) $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = \exp(4i\pi/3) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Il en résulte $1 + j + j^2 = 0$. D'après Moivre, on a également $j^3 = \exp(2i\pi) = 1$.

   (b) On factorise $X^3 + 1 = (X+1)(X+j)(X+j^2)$. Comme les racines de X^3+1 sont simples, on peut écrire
$$F = \frac{3}{3(-1)^2}\frac{1}{X+1} + \frac{3}{3(-j)^2}\frac{1}{X+j} + \frac{3}{3(-j^2)^2}\frac{1}{X+j^2} = \frac{1}{X+1} + \frac{j}{X+j} + \frac{j^2}{X+j^2}$$

   (c) On regroupe les deux derniers termes, ce qui donne
$$F = \frac{1}{X+1} + \frac{j(X+j^2)+j^2(X+j)}{X^2+(j+j^2)X+j^3} = \frac{1}{X+1} + \frac{2-X}{X^2-X+1}$$

   (d) Grâce à la mise sous forme canonique, $X^2 - X + 1 = (X-1/2)^2 + 3/4$, on a
$$\int_0^1 \frac{(2-x)dx}{x^2-x+1} = \int_0^1 \frac{3/2-(x-1/2)}{(x-1/2)^2+3/4}dx = \frac{3}{2}\int_{-1/2}^{1/2}\frac{du}{u^2+3/4} - \int_{-1/2}^{1/2}\frac{u}{u^2+3/4}$$
à l'aide du changement de variable $u = x - 1/2$. Le deuxième terme est nul car l'intervalle est centré en 0 et l'intégrande impaire. En outre, via $u = v\sqrt{3}/2$,
$$\frac{3}{2}\int_{-1/2}^{1/2}\frac{du}{u^2+3/4} = \frac{3}{2}\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}/2}{\frac{3}{4}(v^2+1)}dv = \sqrt{3}\left[\arctan(v)\right]_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\arctan(1/\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}\frac{\pi}{6} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$$
On en déduit
$$\int_0^1 F(x)dx = [\ln(x+1)]_0^1 + \frac{\pi\sqrt{3}}{3} = \ln(2) + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$$
Conclusion,
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1} = \frac{\ln(2)}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-k\right) = \frac{(-1)^n}{2^n}\prod_{k=0}^{n-1}(1+2k) = \frac{(-1)^n}{2^n}\prod_{k=0}^{n-1}(1+2k)\frac{\prod_{k=1}^n(2k)}{\prod_{k=1}^n(2k)} = \frac{(-1)^n}{2^n}\frac{\prod_{j=1}^{2n} j}{2^n\prod_{k=1}^n k} = \frac{(-1)^n(2n)!}{4^n n!}$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On utilise le développement limité usuel
$$(1+u)^{-1/2} = \sum_{k=0}^n \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-k\right)}{k!}u^k + o(u^n)$$
En composant par $x \mapsto -4x^2$ et en exploitant le résultat précédent, il vient
$$\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k(2k)!}{4^k k!}\frac{1}{k!}(-4x^2)^k + o((-4x^2)^n) = \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k}x^{2k} + o(x^{2n})$$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que l'arcsinus est de dérivée $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur un voisinage de 0. D'après ce qui précède,
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}x^{2k} + o(x^{2n})$$

On en déduit d'après la primitivation des développements limités,

$$\arcsin(x) = \arcsin(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

Les plus aguerris d'entre vous reconnaîtront les nombres de Catalan dans ce développement limité.

Exercice 2 : algèbre linéaire

1. D'après la définiton de F, la famille (a,b) est génératrice de F. Montrons qu'elle est libre. Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda a + \mu b = 0$, alors $(\mu, 2\lambda + 2\mu, \lambda, 2\lambda - \mu) = (0,0,0,0)$. Les première et troisième composante entraînent alors $\mu = 0$ et $\lambda = 0$. Conclusion, cette famille est libre, donc une base de F. On en déduit que $\dim(F) = 2$.
2. On procède comme précédemment. Soit $(\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda u + \mu v + \nu w = 0$. Alors $(\lambda, \lambda - \mu + 2\nu, \nu, \mu + 3\nu) = (0,0,0,0)$. La première et la troisième composante entraînent $\lambda = 0$, puis $\nu = 0$. La quatrième composante implique alors $\nu = 0$. Conclusion, la famille (u,v,w) est libre. Comme elle engendre G, c'est une base de G, donc $\dim(G) = 3$.
3. Notons $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x - y + 5z - t = 0\}$. Par une vérification rapide, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. De plus, V contient u, v et w par un calcul sans difficulté. Ainsi, V contient l'espace engendré par cette famille, i.e G, donc $\dim(V) \geq 3$. De plus, $V \neq \mathbb{R}^4$ puisque $(1,1,1,1) \notin V$. On en déduit que $\dim(V) = 3$. Comme $G \subset V$ et $\dim(G) = 3$, on a l'égalité $G = V$. Les composantes de a vérifient $0 - 2 + 5 \cdot 1 - 2 = 1 \neq 0$, donc $a \notin G$.
4. Les composantes de b vérifient $1 - 2 + 5 \cdot 0 + 1 = 0$, donc $b \in G$. Cela entraîne $b \in F \cap G = H$. Comme $b \neq 0$, $\dim(H) \geq 1$. D'autre part, $H \subset F$, donc $\dim(H) \leq 2$. Or $b \notin G$, donc $b \notin H$. Ainsi, $H \neq F$, d'où $\dim(H) = 1$.
5. D'après la formule de Grassmann, $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2 + 3 - 1 = 4$.
6. D'après le cas d'égalité des inclusions de sev, $F + G = \mathbb{R}^4$ puisqu'ils sont tous deux de dimension 4. Toutefois, $F \cap G = H \neq \{0\}$. Il n'y a donc pas somme directe entre F et G.

Problème : Noyau de Poisson

A. Intégrale de P_r, calcul direct

1. Soit $t \in [\pi, \pi]$. Alors
$$\frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}} = \frac{\left(1 + re^{it}\right)\left(1 - re^{-it}\right)}{(1 - re^{it})(1 - re^{-it})} = \frac{1 - r^2 + 2ir\sin(t)}{1 - 2r\cos(t) + r^2}$$
Comme le dénominateur est réel, il vient $P_r(t) = \dfrac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t) + r^2}$.
2. $$\frac{1 - u^2}{1 + u^2} = \frac{1 - \tan^2(t/2)}{1 + \tan^2(t/2)} = \frac{\cos^2(t/2) - \sin^2(t/2)}{\cos^2(t/2) + \sin^2(t/2)} = \frac{\cos(2t/2)}{1} = \cos(t)$$
$$\frac{2u}{1 + u^2} = \frac{2\tan(t/2)}{1 + \tan^2(t/2)} = \frac{2\cos(t/2)\sin(t/2)}{\cos^2(t/2) + \sin^2(t/2)} = \frac{\sin(2t/2)}{1} = \sin(t)$$
3. Soit (a,b) dans $\mathbb{R}^2$ tel que $-\pi < a < b < \pi$. On effectue le changement de variable $u = \varphi(t) = \tan(t/2)$ qui est bien C^1 sur $[a,b]$. Il vient alors
$$\int_a^b P_r(t)dt = \int_a^b \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t) + r^2}dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\frac{1-u^2}{1+u^2} + r^2}\frac{2du}{1 + u^2} = 2\int_{\tan(a/2)}^{\tan(b/2)} \frac{1 - r^2}{(1-r)^2 + u^2(1+r)^2}du$$
4. On poursuit le calcul précédent via une primitive
$$\int_a^b P_r(t)dt = 2\left[\arctan\left(\frac{u(1+r)}{1-r}\right)\right]_{\tan(a/2)}^{\tan(b/2)} = 2\arctan\left(\frac{\tan(b/2)(1+r)}{1-r}\right) - 2\arctan\left(\frac{\tan(a/2)(1+r)}{1-r}\right)$$

Comme $r \in]-1,1[$, $\dfrac{1+r}{1-r} > 0$, mais alors $\tan(b/2)\dfrac{1+r}{1-r} \xrightarrow[b\to\pi]{} +\infty$, donc $2\arctan\left(\dfrac{\tan(b/2)(1+r)}{1-r}\right) \xrightarrow[b\to\pi]{} \pi$ par composition de limites. De même, $2\arctan\left(\dfrac{\tan(a/2)(1+r)}{1-r}\right) \xrightarrow[a\to-\pi]{} -\pi$, donc

$$\lim_{b\to\pi}\int_{-b}^{b} P_r(t)dt = 2\pi$$

Or, $[\pi,\pi] \to \mathbb{R}, t \mapsto P_r(t)$ est continue, donc $[\pi,\pi] \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_{-x}^{0} P_r(t)dt + \int_{0}^{x} P_r(t)dt$ est de classe C^1 d'après le théorème fondamental du calcul intégral, donc continue. Ainsi,

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt = \lim_{b\to\pi}\int_{-b}^{b} P_r(t)dt = 2\pi$$

B. Intégrale de P_r, calcul à l'aide d'une somme

1. (a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a affaire à deux sommes de suites géométriques de raisons respectives re^{it} et re^{-it} différentes de 1 car de module $|r|$ différent de 1. Ainsi,

$$\begin{aligned}
S_N(t) &= 1 + \sum_{n=1}^{N}\left(re^{it}\right)^n + \sum_{n=1}^{N}\left(re^{-it}\right)^n \\
&= 1 + \frac{re^{it} - \left(re^{it}\right)^{N+1}}{1-re^{it}} + \frac{re^{-it} - \left(re^{-it}\right)^{N+1}}{1-re^{-it}} \\
&= \frac{\left(1-re^{it}\right)\left(1-re^{-it}\right) + re^{it}\left(1-re^{-it}\right) + re^{-it}\left(1-re^{it}\right)}{(1-re^{it})(1-re^{-it})} - \left(\frac{(re^{it})^{N+1}}{1-re^{it}} + \frac{(re^{-it})^{N+1}}{1-re^{-it}}\right) \\
&= \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2} - \left(\frac{(re^{it})^{N+1}}{1-re^{it}} + \frac{(re^{-it})^{N+1}}{1-re^{-it}}\right) \\
&= P_r(t) - \left(\frac{(re^{it})^{N+1}}{1-re^{it}} + \frac{(re^{-it})^{N+1}}{1-re^{-it}}\right)
\end{aligned}$$

   (b) Soit N dans $\mathbb{N}^*$. En utilisant l'inégalité triangulaire inverse, on a $\left|1-re^{it}\right| \geq |1| - \left|re^{it}\right| = 1-|r| > 0$. On en déduit

$$\left|\frac{(re^{it})^{N+1}}{1-re^{it}}\right| = \frac{|r|^{N+1}}{|1-re^{it}|} \leq \frac{|r|^{N+1}}{1-|r|}$$

   De même, on a

$$\left|\frac{(re^{-it})^{N+1}}{1-re^{-it}}\right| = \frac{|r|^{N+1}}{|1-re^{-it}|} \leq \frac{|r|^{N+1}}{1-|r|}$$

   On en déduit

$$|S_N(t) - P_r(t)| \leq \left|\frac{(re^{it})^{N+1}}{1-re^{it}}\right| + \left|\frac{(re^{-it})^{N+1}}{1-re^{-it}}\right| \leq \frac{2|r|^{N+1}}{1-|r|}$$

2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_N(t)dt = \sum_{n=-N}^{N} r^{|n|}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}dt = \sum_{n=-N}^{N} r^{|n|}2\pi\delta_{n,0} = 2\pi r^{|0|} = 2\pi$$

3. Soit N dans $\mathbb{N}^*$. Les résultats précédents, la linéarité de l'intégrale et l'inégalité triangulaire entraînent

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt - 2\pi\right| &= \left|\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt - \int_{-\pi}^{\pi} S_N(t)dt\right| \\
&= \left|\int_{-\pi}^{\pi} (P_r(t)dt - S_N(t))\,dt\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |P_r(t) - S_N(t)|\,dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2|r|^{N+1}}{1-|r|}dt = \frac{4\pi|r|^{N+1}}{1-|r|}
\end{aligned}$$

4. Comme $|r|<1$, on a la limite $\frac{4\pi|r|^{N+1}}{1-|r|} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$. Par passage à la limite dans les inégalités, on en déduit $\left|\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt - 2\pi\right| \leq 0$, donc $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt = 2\pi$.

C. Un calcul d'intégrale de Poisson

Pour tout t dans $[\pi,\pi]$, tout r dans $]-1,1[$, on note $f_t(r) = \ln(r^2 - 2r\cos(t)+1)$.

1. Soit $t \in [-\pi,\pi]$.
   (a) Soit $r \in]-1,1[$. Alors $r^2 - 2r\cos(t)+1 = (r-e^{it})(r-e^{-it}) > 0$ car $|r| \neq 1$. Le logarithme de cette quantité est bien défini. D'autre part, f_t est un composée de fonctions deux fois dérivable (un logarithme et un polynôme) donc deux fois dérivable. De plus,

   $$f_t'(r) = \frac{2r-2\cos(t)}{r^2-2r\cos(t)+1}$$

   On en déduit

   $$f_t''(r) = \frac{2(r^2-2r\cos(t)+1) - 2(r-\cos(t))(2r-2\cos(t))}{(r^2-2r\cos(t)+1)^2}$$

   On majore brutalement le numérateur

   $$\left|2(r^2-2r\cos(t)+1) - 2(r-\cos(t))(2r-2\cos(t))\right| \leq 2(1+2+1)+2(2)(2+2) = 24$$

   On exploite l'inégalité triangulaire inverse et la croissance du carré sur $\mathbb{R}^+$ pour minorer le dénominateur

   $$\left|(r^2-2r\cos(t)+1)^2\right|^2 = \left(\left|1-re^{it}\right|\left|1-re^{-it}\right|\right)^2 \geq \left(|1|-|re^{it}|\right)^2\left(|1|-|re^{-it}|\right)^2 \geq (1-|r|)^4$$

   On en déduit

   $$|f_t''(r)| \leq \frac{24}{(1-|r|)^4}$$

   (b) Soit $R \in]0,1[$. Alors f_t est de classe C^2 sur le segment $[-R,R]$. On peut alors exploiter l'inégalité de Taylor-Lagrange. Soit $r \in]-R,R[$, $h \in]-R-r, R-r[$, alors $r+h \in]-R,R[$, donc

   $$\left|f_t(r+h) - f_t(r) - hf_t'(r)\right| \leq \frac{|h|^2}{2!} \sup_{u\in[-R,R]} \left|f_t''(u)\right|$$

   Or d'après le résultat précédent, $\forall u \in [-R,R], |f_t''(u)| \leq \frac{24}{(1-|u|)^4} \leq \frac{24}{(1-R)^4}$, ce qui entraîne

   $$\left|f_t(r+h) - f_t(r) - hf_t'(r)\right| \leq \frac{h^2}{2}\frac{24}{(1-R)^4}$$

2. Soit $r \in]-1,1[$. On considère un voisinage $[-R,R]$ de r dans $]-1,1[$ et h non nul tel que $r+h \in [-R,R]$.

   $$\begin{aligned}
   \left|\frac{\psi(r+h)-\psi(r)}{h} - \int_{-\pi}^{\pi} f_t'(r)dt\right| &= \left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{f_t(r+h)-f_t(r)}{h} - f_t'(r)\right)dt\right| && \text{linéarité}\\
   &\leq \int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f_t(r+h)-f_t(r)}{h} - f_t'(r)\right|dt && \text{inégalité triangulaire}\\
   &\leq 2\pi\frac{12|h|}{(1-R)^4} && \text{résultat précédent}
   \end{aligned}$$

   Quand h tend vers 0, le majorant précédent tend vers 0. On en déduit par théorème d'encadrement que $\frac{\psi(r+h)-\psi(r)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \int_{-\pi}^{\pi} f_t'(r)dt$, donc que ψ est dérivable en r et que

   $$\psi'(r) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2(r-\cos(t))}{r^2-2r\cos(t)+1}dt$$

3. (a) Soit $r \in]-1,1[\setminus\{0\}$, $t \in [-\pi,\pi]$ et $N \in \mathbb{N}^*$. D'après $2\cos(nt)\cos(t) = \cos((n+1)t) + \cos((n-1)t)$, on a

$$\cos(t)S_N(t) = \cos(t)\left(1 + 2\sum_{n=1}^{N} r^n \cos(nt)\right) = \cos(t) + \sum_{n=1}^{N} r^n \cos((n+1)t) + \sum_{n=1}^{N} r^n \cos((n-1)t)$$
$$= \cos(t) + \frac{1}{r}\left(\frac{S_{N+1}(t)-1}{2} - r\cos(t)\right) + r\left(\frac{S_{N-1}(t)-1}{2} + 1\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{S_{N+1}(t)-1}{2}\right) + r\left(\frac{S_{N-1}(t)-1}{2}\right) + r$$

(b) Soit $r \in]-1,1[$. Si $r = 0$, alors l'intégrale vaut $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)dt = 0$. Sinon, soit $N \geq 2$. Alors, d'après ce qui précède

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)S_N(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{r}\left(\frac{S_{N+1}(t)-1}{2}\right)dt + \int_{-\pi}^{\pi} r\left(\frac{S_{N-1}(t)-1}{2}\right)dt + \int_{-\pi}^{\pi} r\,dt$$

D'après B.2, les deux premières intégrales sont nulles, on en déduit $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)S_N(t)dt = 2\pi r$. On procède comme en partie B.

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)P_r(t)dt - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)S_N(t)dt\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} 1|P_r(t) - S_N(t)|dt \leq \frac{4\pi|r|^{N+1}}{1-|r|} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

Cela entraîne par passage à la limite dans les inégalités,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r^2)\cos(t)}{r^2 - 2r\cos(t) + 1}dt - 2\pi r = 0$$

soit encore

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(t)}{r^2 - 2r\cos(t) + 1}dt = \frac{2\pi r}{1-r^2}$$

On constate ce que cette formule est encore valide pour $r = 0$.

4. Soit $r \in]-1,1[$. Ce qui précède entraîne

$$\psi'(r) = 2\left(\frac{r}{1-r^2}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(t)}{r^2 - 2r\cos(t)+1}dt\right) = 2\left(\frac{2\pi r}{1-r^2} - \frac{2\pi r}{1-r^2}\right) = 0$$

Comme $]-1,1[$ est un intervalle, on en déduit que ψ est constante égale à $\psi(0) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1)dt = 0$. Conclusion,

$$\forall r \in]-1,1[, \int_{-\pi}^{\pi} \ln(r^2 - 2r\cos(t) + 1)dt = 0$$

D. Noyau reproduisant

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que f est continue et 2π-périodique. Pour tout r dans $]-1,1[$, tout réel t, on note

$$T_r(f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)f(t-\theta)d\theta$$

L'objectif de cette partie est de démontrer le caractère « reproduisant » du noyau de Poisson, i.e la convergence (en un sens à préciser) de $T_r(f)$ vers f quand r tend vers 1 par valeurs inférieures.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue, sa restriction au segment $[-2\pi, 4\pi]$ est uniformément continue d'après le théorème de Heine. On dispose alors de $\delta > 0$ tel que $\forall (x,y) \in [-2\pi,4\pi]^2, |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Montrons que $\min(\delta, 2\pi)$ convient sur $\mathbb{R}$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|x-y| \leq \min(\delta, 2\pi)$. On note alors $n = \lfloor x/(2\pi) \rfloor$, Alors $x - 2n\pi \in [0, 2\pi]$ et $x - 2\pi \leq y \leq x + 2\pi$. On en déduit

$$-2\pi \leq x - 2n\pi - 2\pi \leq y - 2n\pi \leq x - 2n\pi + 2\pi \leq 4\pi$$

Enfin, $|(x-2n\pi) - (y-2n\pi)| = |x-y| \leq \delta$. On peut en déduire $|f(x-2n\pi) - f(y-2n\pi)| \leq \varepsilon$, ce qui entraîne par 2π-périodicité $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Ainsi, f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2. Comme f est continue, sa restriction au segment $[0,2\pi]$ est bornée d'après le théorème des bornes atteintes. Notons M un majorant de $|f_{|[0,2\pi]}|$. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $x - \lfloor x/(2\pi)\rfloor 2\pi \in [0,2\pi]$. On en déduit par 2π-périodicité de f,

$$|f(x)| = |f(x - \lfloor x/(2\pi)\rfloor 2\pi)| \leq M$$

et ce, pour tout réel x. Ainsi, $|f|$ est majorée, donc f est bornée.

3. Soit $r \in]0,1[$, $\eta \in]0,\pi]$ et $\theta \in [\eta,\pi]$. Alors $\cos(\theta) \leq \cos(\eta)$ par décroissance du cosinus sur $[0,\pi]$. Comme $r > 0$, on en déduit $r^2 - 2r\cos(\theta) + 1 \geq r^2 - 2r\cos(\eta) + 1 > 0$. Comme $1 - r^2 > 0$ et l'intégrale est croissante,

$$0 \leq \int_\eta^\pi \frac{1-r^2}{r^2 - 2r\cos(\theta)+1} d\theta \leq \int_{-\pi}^\pi \frac{1-r^2}{r^2-2r\cos(\eta)+1} d\theta = \frac{2\pi(1-r^2)}{r^2-2r\cos(\eta)+1}.$$

Quand r tend vers 1 par valeurs inférieurs, on dispose des limites $r^2 - 2r\cos(\eta) + 1 \xrightarrow[r\to 1]{} 2(1-\cos(\eta)) \neq 0$ car $\eta \in]0,\pi]$ et $1 - r^2 \xrightarrow[r\to 1]{} 0$. D'après les opérations sur les limites de quotients, $\dfrac{2\pi(1-r^2)}{r^2-2r\cos(\eta)+1} \xrightarrow[r\to 1]{} 0$. On en déduit d'après le théorème d'encadrement,

$$\int_\eta^\pi P_r(\theta)d\theta \xrightarrow[r\to 1]{} 0$$

4. D'après la question D.1, f est uniformément continue. On dispose donc de $\delta > 0$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $r \in]0,1[$.

$$\begin{aligned}
|T_r(f)(t) - f(t)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_\pi^\pi P_r(\theta)f(t-\theta)d\theta - \int_{-\pi}^\pi P_r(\theta)d\theta f(t)\right| \quad \text{A.4}\\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^\pi P_r(\theta)\left(f(t-\theta) - f(t)\right)d\theta\right| \quad \text{linéarité}\\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi |P_r(\theta)||f(t-\theta)-f(t)|d\theta \quad \text{inégalité triangulaire}\\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(\theta)|f(t-\theta)-f(t)|d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi P_r(\theta)|f(t-\theta)-f(t)|d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^\delta P_r(\theta)|f(t-\theta)-f(t)|d\theta\\
&\text{positivité du noyau et relation de Chasles}\\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(\theta)2Md\theta + \frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi P_r(\theta)2Md\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^\delta P_r(\theta)\varepsilon d\theta \quad \text{borne de f et continuité uniforme de f}\\
&\leq \frac{1}{2\pi}2M\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(\theta)d\theta + \frac{1}{2\pi}2M\int_\delta^\pi P_r(\theta)d\theta + \varepsilon \quad \text{positivité du noyau et A.4}
\end{aligned}$$

5. Soit $r \in]0,1[$. D'après D.3, $\dfrac{1}{2\pi}2M\displaystyle\int_\delta^\pi P_r(\theta)d\theta \xrightarrow[r\to 1]{} 0$. On dispose donc de $\rho \in]0,1[$ tel que

$$\forall r \in]\rho,1[, \int_\delta^\pi P_r(\theta)d\theta \leq \varepsilon$$

De même, par parité du noyau de Poisson,

$$\forall r \in]\rho,1[, \int_{-\pi}^{-\delta} P_r(\theta)d\theta \leq \varepsilon$$

Soit $r \in]\rho,1[$. On a d'après D.4,

$$\forall t \in \mathbb{R}, |T_r(f)(t) - f(t)| \leq 3\varepsilon$$

En passant à la borne supérieure, on en déduit $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|T_r(f)(t) - f(t)| \leq 3\varepsilon$. Ainsi,

$$\lim_{r\to 1}\sup_{t\in\mathbb{R}}|T_r(f)(t) - f(t)| = 0$$