

Chaque colle comporte une question de cours ainsi qu'un ou plusieurs exercices. Les questions de cours portent sur les éléments précédés d'un astérisque (★) sur le chapitre 3 : applications et relations. Les exercices porteront sur le chapitre 3, mais peuvent exploiter des notions des chapitres précédents ou les notions de terminale sur les fonctions réelles de la variable réelle (y compris le TVI).

Chapitre 3 : Applications et relations

Applications

Notion de couple d'éléments. Produit cartésien d'ensemble. Un graphe ensembliste est une partie de $E \times F$. Graphe fonctionnel, domaine de définition d'un graphe fonctionnel. Notion de fonction, d'application. Famille d'objets, extension du produit cartésien. Union quelconque de parties, intersection quelconque de parties. Pour f application de E dans F , image directe d'une partie de E par une application f , image réciproque d'une partie de F par une application f . (★) image directe d'une union, d'une intersection, image réciproque d'une union, d'une intersection de parties. Injections, surjections, bijections. (★) f est bijection ssi $\forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y$. Application réciproque d'une application bijective. Composée d'applications, d'applications injectives, d'applications surjectives. (★) f est bijective ssi $\exists g \in \mathcal{F}(F, E), f \circ g = \text{Id}_F \wedge g \circ f = \text{Id}_E$ auquel cas $g = f^{-1}$. Réciproque d'une composée d'applications bijectives. Caractérisation des applications bijectives dans le cas $|E| = |F| < +\infty$.

Relations binaires

Notation $x \mathcal{R} y$. Relation d'équivalence, exemple des congruences. Recouvrement, disjoint, partition d'un ensemble. Classe d'équivalence, notée $C(x)$ plutôt que \bar{x} . (★) Les classes d'équivalences d'une relation d'équivalence forment une partition. (★) Relation d'équivalence associée à une partition, ensemble de ses classes. Cas de la relation d'équivalence $x \mathcal{R} y \iff f(x) = f(y)$ induite par une application f .

Relation d'ordre, partielle, totale. Cas de la relation \leq sur \mathbb{R} , de l'inclusion sur $\mathcal{P}(E)$, de la divisibilité sur \mathbb{N} . Ordre strict, opposé. Majorants, minorants, maximum, minimum. (★) unicité du maximum/minimum en cas d'existence. Borne supérieure, inférieure. Application (strictement) (dé)croissante. Soit $f : E \rightarrow F$ une application monotone injective, alors f est strictement monotone. (★) Si E est totalement ordonné, f strictement monotone est injective. (★) Dans le cas E totalement ordonné, monotonie de la réciproque d'une fonction bijective monotone. Composée d'applications monotones.

★ ★ ★ ★ ★