IPESUP 2023/2024

Colle 15 MPSI/MP2I Jeudi 08 février 2024

★★★

Planche 1

★★★

1. Division euclidienne de polyômes. Énoncé et preuve
2. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $P = X^4 - X^3 + aX - 4$. Chercher une condition nécessaire et suffisante sur a pour que P possède deux racines opposées. Les exprimer toutes dans ce cas de figure.
3. Soit $x = 5^{1/2} + 2^{1/3}$. Chercher un polynôme non nul Q à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel que $Q(x) = 0$.

★★★

Planche 2

★★★

1. Relations coefficients-racines, dites formules de Viète. Énoncé et preuve.
2. Soit $P = X^5 - 2X^4 + X^3 - X^2 + 2X - 1$. Montrer que 1 est racine de P. Déterminer la multiplicité de 1 dans P et factoriser P au maximum.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système d'équations d'inconnue (x, y, z) suivant :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,\ x^4 + y^4 + z^4 = 0,\ x^5 + y^5 + z^5 = 2$$

★★★

Planche 3

★★★

1. Soit P un polynôme non nul. Que dire de l'ensemble de ses racines ? Le démontrer.
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $P = X^3 + aX^2 + bX + c$. On admet qu'il est scindé et on note x_1, x_2, x_3 ses racines. Déterminer le polynôme unitaire de plus petit degré dont les racines sont $x_1 + x_3$, $x_2 + x_3$, $x_1 + x_2$.
3. Soit $Q = 3X^4 - 56X^3 - X^2 - 2$. Déterminer les racines rationnelles de Q.

★★★

Bonus

★★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $P_n = \left\{\exp\left(\dfrac{2i\pi k}{n}\right) | k \in [\![0, n-1]\!], k \wedge n = 1\right\}$. On considère

$$\Phi_n = \prod_{\omega \in P_n} (X - \omega)$$

Montrer que Φ_n est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.