IPESUP 2023/2024

Colle 12 MPSI/MP2I Jeudi 18 janvier 2024

Planche 1

- 1. Caractérisation des sous-groupes de Z.
- 2. Déterminer le dernier chiffre dans l'écriture décimale de $1983^{1983^{1983}}$.
- 3. Soit *n* un entier naturel pair. Montrer que n+1 divise $\sum_{k=1}^{n} k^{n+1}$.

Planche 2

- 1. Théorème fondamental de l'arithmétique.
- 2. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Déterminer $(a + b) \land (a \lor b)$.
- 3. Déterminer

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 | x^2 + y^2 = 3z^2 \}$$

Planche 3

- 1. Petit théorème de Fermat.
- 2. Déterminer tous les entiers n tels que n-3 divise n^3-3 .
- 3. Déterminer tous les entiers a, b tels que $3^a 7^b \equiv 1[10]$.

Bonus

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que p est premier si et seulement si p divise (p-1)! + 1.