Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Il est rappelé qu'il est tenu compte dans l'évaluation de la présentation et la rédaction des copies.

Ce devoir est très long. Ne vous découragez pas et privilégiez la qualité à la précipitation.

Premier problème : une équation fonctionnelle polynomiale.

On travaille dans $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. Comme $\mathbb{R}$ est un corps infini, on peut confondre polynôme et fonction polynomiale associée, qui sont ainsi désignés par le même symbole. On se propose dans ce problème de déterminer tous les couples (P,Q) de polynômes à coefficients réels tels que

$$P^2 + (1-X^2)Q^2 = 1$$

1. Déterminer tous les couples (P,Q) solutions tels que P est constant.
2. Dans tout ce qui suit, on considère un couple (P,Q) solution tel que P est non constant. On note $m = d(P)$ le degré de P.
   (a) Montrer que $P(1) = \pm 1$.
   (b) Démontrer que $P \wedge Q = 1$.
   (c) Montrer que Q divise P'.
   (d) Montrer que $d(P) = d(Q) + 1$, puis qu'il existe λ un réel non nul tel que $P' = \lambda Q$.
   (e) On note a_m le coefficient dominant de P. Déterminer le coefficient dominant de $P^2 + (1-X^2)Q^2$ en fonction de a_m, m et λ.
   (f) Déduire des questions précédentes que $P'^2 = m^2 Q^2$.
   (g) En déduire qu'alors $(X^2-1)P'' + XP' = m^2 P$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation différentielle

$$(E_n) \quad (x^2-1)f'' + xf' = n^2 f$$

   d'inconnue $f : [-1,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ deux fois dérivable.
   (a) Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Montrer que f est solution de (E_n) si et seulement si l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto f(\cos(t))$ vérifie l'équation différentielle

$$(E_n') \quad g'' = -n^2 g.$$

   (b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation diffrentielle (E_n').
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère S un polynôme non nul dont la fonction polyômiale est solution de (E_n).
   (a) Montrer que $d(S) = n$.
   (b) On note $S = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Montrer que $a_{n-1} = 0$, puis que

$$\forall k \in [\![0, n-2]\!], (k^2 - n^2)a_k = (k+1)(k+2)a_{k+2}.$$

   (c) Démontrer qu'alors

$$\forall p \in [\![0, \lfloor n/2 \rfloor]\!], a_{n-(2p+1)} = 0, \quad \text{et} \quad a_{n-2p} = \left(\frac{-1}{4}\right)^p \frac{(n-p-1)!}{p!(n-2p)!} n a_n.$$

   (d) En déduire l'ensemble des solutions polynomiales de (E_n).
5. On définit une suite de polynômes à coefficients réels $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ via

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X, \quad \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

(a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, d(T_n) = n, T_n \in \mathbb{Z}[X], \mathrm{dom}(T_n) = 2^{n-1}$.

(b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$.

(c) Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme P de degré n tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, P(\cos(t)) = \cos(nt).$$

(d) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est solution de (E_n).

(e) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des solutions polynomiales de l'équation différentielle (E_n) est l'ensemble des fonctions proportionnelles à T_n.

6. Résolution finale

(a) Déterminer pour tout entier n non nul, $T_n(1)$.

(b) Soit (P, Q) un couple de polynôme tel que $P^2 + (1 - X^2)Q^2 = 1$ et $d(P) > 0$. On note $n = d(P)$. Montrer qu'alors $P = T_n$ ou $P = -T_n$ et $Q = \frac{1}{n}T_n'$ ou $Q = -\frac{1}{n}T_n'$.

(c) Donner l'ensemble des solutions de l'équation fonctionnelle polynomiale

$$P^2 + (1 - X^2)Q^2 = 1.$$

Deuxième problème : la fonction dilogarithme

Dans tout le problème, ln désigne le logarithme népérien. On considère la fonction f définie sur $]-\infty, 1[$ par

$$\forall t \in]-\infty, 1[, f(t) = \begin{cases} -\dfrac{\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Dans ce problème, on s'intéresse à la fonction dilogarihtme définie par

$$\forall x \in [-1, 1[, \quad L(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

I. Calcul de $\zeta(2)$.

On rappelle que la cotangente est définie par

$$\forall t \in \mathbb{R} \backslash \{\pi\mathbb{Z}\}, \mathrm{cotan}(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k X^{n-k}$.

(a) Quel est le degré de P_n ?

(b) A l'aide de la formule de Moivre, montrer que

$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \ P_n(\mathrm{cotan}^2(t)) = \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin^{2n+1}(t)}$$

(c) En déduire $\forall k \in [[1, n]], P_n\left(\mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right) = 0$.

(d) En déduire une factorisation du polynôme P_n. Est-il scindé ? simplement scindé ?

(e) Démontrer

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

2. Montrer que

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \sin(t) \leq t \leq \tan(t)$$

3. Montrer que

$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \text{cotan}^2(t) \leq \frac{1}{t^2} \leq 1 + \text{cotan}^2(t)$$

4. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n(2n-1)}{3} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{\pi^2 k^2} \leq n + \frac{n(2n-1)}{3}$$

5. Démontrer alors la limite

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$$

II. Étude de la régularité de f.

1. On note $g :]-\infty, 1[, t \mapsto -\ln(1-t)$.
   (a) Déterminer pour tout entier naturel n non nul, pour tout réel $t < 1$, $g^{(n)}(t)$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t^k$ pour tout réel t. En déduire par intégration,

$$\forall x \in]-\infty, 1[, \quad -\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $R_n : [-1, 1[\to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$. Démontrer que

$$\forall x \in [0, 1[, \quad 0 \leq R_n(x) \leq \frac{1}{1-x} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\forall x \in [-1, 0], \quad 0 \leq |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

2. (a) Montrer la limite $\displaystyle\frac{\ln(1-x) + x + x^2/2}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.
   (b) En déduire que f est continue en 0.
   (c) f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, préciser le nombre dérivé $f'(0)$.
   (d) Calculer pour tout x dans $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$, $f'(x)$.
   (e) Prouver que la fonction f est de classe C^1 sur $]-\infty, 1[$.

III. Étude de L et de son prolongement en 1.

On rappelle que la fonction dilogarithme est définie pour tout x de $[-1, 1[$ par $L(x) = \displaystyle\int_0^x f(t) dt$ où la fonction f est de classe C^1 sur $[-1, 1[$ (d'après la partie II).

1. Dérivée de L
   (a) Vérifier que la fonction L est bien définie et de classe C^2 sur $[-1, 1[$.
   (b) Déterminer pour tout x de $[-1, 1[$, $L'(x)$. En déduire l'éventuelle monotonie de L.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $x \mapsto R_n(x)/x$ admet un prolongement continu en 0 et que

$$\forall x \in [-1, 1[, f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k+1} + \frac{R_n(x)}{x}$$

   (b) Démontrer

$$\forall x \in [-1, 1[, \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$$

3. Prolongement par continuité de L en 1.

   (a) Montrer qu'on dispose d'un réel α positif tel que $\forall t \in [0,1[, f(t) \leq \dfrac{\alpha}{\sqrt{1-t}}$. *Indication : utiliser les croissances comparées.*

   (b) En déduire que $\forall x \in [0,1[, L(x) \leq 2\alpha$.

   (c) Montrer alors que L possède une limite finie en 1, que l'on note ℓ.

   (d) Montrer que $\ell = \dfrac{\pi^2}{6}$. *Cette question est délicate, tout excès de formalisme vaudra zéro.*

IV. Application au calcul d'intégrales

1. Pour tout réel a strictement positif, on considère l'intégrale $J_a = \displaystyle\int_a^{1/a} \frac{x}{e^x - 1}\,dx$. Effectuer le changement de variable $t = 1 - e^{-x}$, puis déterminer la limite de J_a quand a tend vers 0^+ en fonction de π.

2. (a) Montrer que pour tout x dans $]-1,1[$, $L(x) + L(-x) = \dfrac{L(x^2)}{2}$. *Indication : procéder par dérivation.*

   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{-\ln(1-t)}{t}\,dt$ en fonction de π.

3. (a) Démontrer que $\forall x \in]0,1[, L(1-x) + L(x) = \dfrac{\pi^2}{6} - \ln(x)\ln(1-x)$.

   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{-\ln(1-t)}{t}\,dt$.