

Les questions de cours portent sur les éléments du chapitre 7 : topologie réelle, précédés d'un astérisque. Toutes les définitions doivent être connues sans erreur ! Les exercices portent sur le chapitre 7 : topologie réelle.

## Chapitre 7 : Topologie réelle.

- Ensembles  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ . Droite réelle achevée  $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \leq)$ . Approximations décimales à l'ordre  $n$  par excès (resp. par défaut) d'un réel  $x$  donné. (★) Encadrement et convergence. Intervalle ouvert. Une partie  $X$  de  $\mathbb{R}$  est dense dans  $\mathbb{R}$  ssi elle rencontre tout intervalle ouvert non vide. (★) Caractérisation séquentielle de la densité. (★)  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  sont denses dans  $\mathbb{R}$ . Application aux fonctions additives. Tout intervalle ouvert non vide contient une infinité de rationnels et une infinité d'irrationnels.
- Toute partie non vide majorée de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure. (★) Caractérisation pour  $X$  non vide majorée et  $a$  réel :  $a = \sup(X) \iff (\forall x \in X, x \leq a) \wedge (\forall y < a, \exists x \in X, y < x)$ . Convention  $\sup \emptyset = -\infty$  si  $X$  vide et  $\sup(X) = +\infty$  si  $X$  non vide non majorée. (★) Si  $X$  admet un maximum,  $\sup(X) = \max(X)$ . Croissance de la borne supérieure par rapport à l'inclusion sur les parties non vides majorées de  $\mathbb{R}$ . (★) Caractérisation séquentielle de la borne supérieure pour  $X$  non vide majorée et  $a$  réel :  $a = \sup(X) \iff (\forall x \in X, x \leq a) \wedge (\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, x_n \rightarrow a)$ . Les étudiants peuvent « passer au sup » dans les inégalités  $\forall x \in X, x \leq a \Rightarrow \sup(X) \leq a$  mais doivent savoir l'expliquer à l'oral. Exemple  $\sup(A+B), \sup(\lambda A)$  pour  $\lambda > 0$ .
- Borne inférieure d'une partie non vide minorée de  $\mathbb{R}$ . (★) Toute partie non vide minorée de  $\mathbb{R}$  admet une borne inférieure et  $\inf(A) = -\sup(-A)$ . Traductions de toutes les propriétés précédentes.  $\inf(\emptyset) = +\infty$  pour  $X$  vide, et  $\inf(X) = -\infty$  et non vide non minorée. Caractérisations, cas de la borne inf atteinte, décroissance pour l'inclusion. Exemple  $d(y, X) = \inf\{|y - x| \mid x \in X\}$ . Étude de la fonction  $x \mapsto d(x, \mathbb{Z})$ . Même remarque pour les « passages à l'inf ».
- On rappelle que les intervalles de  $\mathbb{R}$  ont été définis par une liste de dix cas. Partie convexe de  $\mathbb{R}$ . Tout intervalle est convexe (★) Toute partie convexe de  $\mathbb{R}$  est un intervalle. Démonstration de la bonne définition de la partie entière d'un réel  $x$ . Croissance de la partie entière.  $\mathbb{R}$  est archimédien.
- Bornes supérieure et inférieure d'une application à valeurs réelles. Étude de la norme infinie  $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$  sur l'ensemble des fonctions bornées de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

★ ★ ★ ★ ★