IPESUP 2023/2024

Colle 22 MPSI/MP2I Jeudi 25 avril 2024

★★★

Planche 1

★★★

1. Formule de Taylor avec reste intégral. Énoncé et démonstration.
2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On note pour tout n dans $\mathbb{N}$, $J_n = \int_0^1 f(x^n)\,dx$. Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. Soit P un polynôme complexe non constant. Montrer que

$$\left\{x \in \mathbb{R} \middle| \int_0^x P(t)e^{it}dt = 0\right\}$$

est un ensemble fini.

★★★

Planche 2

★★★

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. On suppose que f ou g est de rang fini. Que dire du rang de $g \circ f$? Le démontrer
2. Soit a et b deux réels strictement positfs. Soit $f : [0,a] \to [0,b]$ une bijection de classe C^1 strictement croissante. Montrer que

$$ab = \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy$$

Interpréter géométriquement.
3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer la limite de

$$\frac{1}{n^2}\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n} f\left(\frac{k}{n}\right)f\left(\frac{l}{n}\right)$$

quand n tend vers $+\infty$.

★★★

Planche 3

★★★

1. Définition d'un projecteur. Caractérisation. Énoncé et démonstration.
2. Pour tout n non nul, on note $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. En notant ℓ sa limite, déterminer un équivalent simple de $u_n - \ell$ quand n tend vers $+\infty$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et 2π périodique. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour tout x dans $\mathbb{R}$, on note $D_n = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t)f(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$