Problème : Ouverts de $\mathbb{R}$

1. (a) Soit $x \in]\alpha,\beta[$. On pose $\varepsilon = \min(\beta - x, x - \alpha)$. Il est bien strictement positif car $x < \beta$ et $\alpha < x$. Montrons que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset]\alpha,\beta[$. Soit $y \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$. Alors $y > x-\varepsilon > x-(x-\alpha) = \alpha$. D'autre part, $y < x+\varepsilon < x+\beta-x = \beta$. Conclusion, $y \in]\alpha,\beta[$, et ce pour tout y dans $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$. On a donc l'inclusion $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset]\alpha,\beta[$. On a construit un réel $\varepsilon > 0$ satisfaisant pour tout x dans $]\alpha,\beta[$. Donc $]\alpha,\beta[$ est ouvert.

   (b) On se concentre sur le réel b. Soit $\varepsilon > 0$, alors $b-\varepsilon/2 \in]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$, alors que $b-\varepsilon/2 < b$ n'appartient pas à $[b,+\infty[$. Par conséquent, $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$ n'est pas inclus dans $[b,+\infty[$ et ce, pour tout $\varepsilon > 0$. Conclusion, $[b,+\infty[$ n'est pas ouvert.

   (c) Considérons le rationnel 0. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]-\varepsilon,\varepsilon[$ est ouvert non vide. D'après la densité de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, il contient un irrationnel, donc n'est pas inclus dans $\mathbb{Q}$, et ce, pour tout $\varepsilon > 0$. Conclusion, $\mathbb{Q}$ n'est pas ouvert.

2. (a) Soit $x \in A_1 \cup A_2$. Plaçons nous dans le cas $x \in A_1$. Comme A_1 est ouvert, on dispose d'un réel $\varepsilon_1 > 0$ tel que $]a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1[\subset A_1$, mais alors $]a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1[\subset A_1 \cup A_2$. De même dans le cas $x \in A_2$, on dispose d'un réel $\varepsilon_2 > 0$ tel que $]a-\varepsilon_2, a+\varepsilon_2[\subset A_2 \subset A_1 \cup A_2$. Conclusion, $A_1 \cup A_2$ est ouvert.

   (b) Soit $(A_j)_{j\in J}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$. Soit $x \in \bigcup_{j\in J} A_j$, alors on dispose d'un indice k tel que $x \in A_k$. Comme A_k est ouvert, on dispose d'un réel $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A_k$. Mais alors $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \bigcup_{j\in J} A_j$. Ainsi, $\bigcup_{j\in J} A_j$ est ouvert.

   (c) Soit $x \in A_1 \cap A_2$. Comme précédemment, on dispose de réels ε_1 et ε_2 strictement positifs tels que $]a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1[\subset A_1$ et $]a-\varepsilon_2, a+\varepsilon_2[\subset A_2$. On pose alors $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ qui est bien strictement positif. Il vérifie de plus, $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset A_1 \cap A_2$. Conclusion, $A_1 \cap A_2$ est ouvert.

   (d) Soit $(A_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ une famille finie d'ouverts. Soit $x \in \bigcap_{j=1}^{n} A_j$. Pour tout j dans $[\![1,n]\!]$, on dispose d'un réel $\varepsilon_j > 0$ tel que $]x-\varepsilon_j, x+\varepsilon_j[\subset A_j$. On pose alors $\varepsilon = \min_{j\in[\![1,n]\!]} \varepsilon_j$ qui est bien strictement positif. Il vérifie $\forall j \in [\![1,n]\!],]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A_j$, donc $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \bigcap_{j=1}^{n} A_j$. Ainsi, $\bigcap_{j=1}^{n} A_j$ est ouvert.

   (e) L'inclusion $\{0\} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$ est claire car $\forall n \in \mathbb{N}^*, |0| < 1/n$. Réciproquement, Soit $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, |x| \leq 1/n$. Comme $1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on en déduit $|x| = 0$, soit $x = 0$, donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[\subset \{0\}$. Mais alors pour tout réel $\varepsilon > 0$, $]-\varepsilon,\varepsilon[$ contient des réels non nuls donc n'est pas inclus dans $\{0\}$, donc $\{0\}$ n'est pas ouvert.

3. (a) La borne supérieure de A est le plus petit des majorants de A.

   (b) Comme A est ouvert et $\sup(A) \in A$, on dispose de $\varepsilon > 0$ tel que $]\sup(A)-\varepsilon, \sup(A)+\varepsilon[\subset A$. Cela entraîne $\sup(A)+\varepsilon/2 \in A$ et $\sup(A)+\varepsilon/2 > \sup(A)$.

   (c) $\sup(A)$ est un majorant de A. Si $\sup(A) \in A$, d'après ce qui précède, $\sup(A)$ n'est plus un majorant de A, ce qui est absurde. Conclusion, $\sup(A) \notin A$.

   (d) On remarque que A est ouvert si et seulement si $-A$ est ouvert. Par conséquent, $\inf(A) \notin A$.

4. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Il est de la forme $(\inf(I), \sup(I))$, où les parenthèses désignent des crochets ouvrants ou fermants. D'après ce qui précède, si $\sup(I)$ est réel, $\sup(I) \notin I$. De même, si $\inf(I)$ est réel, $\inf(I) \notin I$, sinon I possèderait des éléments strictement plus petits que sa borne inférieure, ce qui est absurde. Par, conséquent, $I =]\inf(I), \sup(I)[$. On retrouve alors les cinq cas listés selon les valeurs finies ou non de $\inf(I)$ et $\sup(I)$.

5. $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ sont ouverts d'après la description précédente des intervalles ouverts. D'après la question 2.a) $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_-^* \cup \mathbb{R}_+^*$ est ouvert, différent de $\mathbb{R}$. En outre, la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ tend vers 0. Tous les réels non nuls sont limites de suites constantes non nulles, donc $\mathbb{R}^*$ est dense dans $\mathbb{R}$.

6. Soit A une partie ouverte non vide de $\mathbb{R}$. On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ suivante sur A :

$$\forall(a_1,a_2)\in A^2, a_1\mathcal{R}a_2 \iff [\min(a_1,a_2),\max(a_1,a_2)]\subset A$$

   (a) Réflexivité : Soit $a\in A$. Alors $\{a\}=[a,a]\subset A$, donc $a\mathcal{R}a$. Symétrie : Soit $(a_1,a_2)\in A^2$ tel que $a_1\mathcal{R}a_2$. Alors $[\min(a_2,a_1),\max(a_2,a_1)]=[\min(a_1,a_2),\max(a_1,a_2)]\subset A$, donc $a_2\mathcal{R}a_1$. Transitivité : soit $(a_1,a_2,a_3)\in A^3$ tel que $a_1\mathcal{R}a_2$ et $a_2\mathcal{R}a_3$. Dans le cas où $a_1\le a_2$, on a $[a_1,a_2]\subset A$. Si de plus, $a_2\le a_3, [a_2,a_3]\subset A$, mais alors $[a_1,a_2]\cup[a_2,a_3]\subset A$, i.e $[a_1,a_3]\subset A$, soit encore $a_1\mathcal{R}a_3$. Si $a_2\ge a_3$, alors $[a_1,a_3]\subset[\min(a_1,a_3),a_2]\subset A$, donc $a_1\mathcal{R}a_3$. Les deux autres cas se traîtent de manière similaire. Conclusion, $\mathbb{R}$ est une relation d'équivalence.

   (b) Montrons que $C(a)$ est convexe. Cela suffira à démontrer que c'est un intervalle d'après la caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $(x,y)\in C(a)^2$ tel que $x\le y$. Montrons que $[x,y]\subset C(a)$. Soit donc $z\in[x,y]$. Prenons le cas où $x\le a\le y$. Alors $[x,a]\subset A$ et $[a,y]\subset A$, donc $[\min(a,z),\max(a,z)]\subset[x,a]\cup[y,a]\subset A$. Si $a\le x\le y$, alors $[a,y]\subset A$, donc $[a,z]\subset[a,y]\subset A$. Enfin, si $a\ge y\ge x$, alors $[z,a]\subset[x,a]\subset A$. Dans tout les cas, $z\mathcal{R}a$, donc $z\in C(a)$ et ce, pour tout z dans $[x,y]$. Conclusion, $[x,y]\subset C(a)$ et ce, pour tout $(x,y)\in C(a)^2$ tel que $x\le y$. Conclusion, $C(a)$ est un convexe, donc $C(a)$ est un intervalle.

   (c) Soit $z\in C(a)$. Comme $z\in A$, et que A est ouvert, on dispose de $\varepsilon>0$ tel que $]z-\varepsilon,z+\varepsilon[\subset A$. Dans le cas $a\le z$, on a alors $[a,z+\varepsilon[=[a,z]\cup[z,z+\varepsilon[\subset A$, car $[a,z]\subset A$. Quitte à rapetisser ε pour que $z-\varepsilon>a$, $]z-\varepsilon,z+\varepsilon[\subset C(a)$. L'autre cas $z\le a$ se traite de manière similaire via $]z-\varepsilon,z]$. Conclusion, $C(a)$ est ouvert.

   (d) Comme $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, l'ensemble des classes d'équivalence forment une partition de A. D'après les deux questions précédentes, ses classes d'équivalence sont des intervalles ouverts. De plus, ils sont non vides comme classes d'équivalence. Il reste à démontrer qu'il y en a un nombre au plus dénombrable. Soit C une classe pour cette relation. Comme c'est un intervalle ouvert non vide, elle contient un rationnel q_C d'après la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. On construit ainsi une injection de $A/\mathcal{R}$ dans $\mathbb{Q}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, cela fournit une famille au plus dénombrable $(q_C)_{C\in A/\mathcal{R}}$ pour lister les classes de cette relation d'équivalence.

7. (a) Comme V_0 est dense dans $\mathbb{R}$, on dispose de $x\in I\cap V_0$, mais alors $I\cap V_0$ est ouvert d'après 2.c), donc on dispose de $\varepsilon>0$ tel que $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\subset I\cap V_0$. On note alors $u_0=x-\varepsilon/2$ et $v_0=x+\varepsilon/2$. Ils vérifient $[u_0,v_0]\subset I\cap V_0$ et $u_0<v_0$ car $\varepsilon>0$. Mais alors $]u_0,v_0[$ est un intervalle ouvert non vide, donc $]u_0,v_0[\cap V_1$ est non vide car V_1 est dense dans $\mathbb{R}$. On dispose de $x_1\in]u_0,v_0[\cap V_1$. Comme $]u_0,v_0[\cap V_1$ est ouvert, on dispose de $\varepsilon_1>0$ tel que $]x_1-\varepsilon,x_1+\varepsilon_1[\subset]u_0,v_0[\cap V_1$. On pose alors $u_1=x_1-\varepsilon_1/2$ et $v_1=x_1+\varepsilon_2$. Ils vérifient $u_0<u_1<v_1<u_0$ et $]u_1,v_1[\subset]u_0,v_0[\cap V_1$.

   Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons construits u_n et v_n comme attendu. Alors $]u_n,v_n[$ est un intervalle ouvert non vide. Par densité de V_{n+1}, on dispose de x_{n+1} dans $]u_n,v_n[\cap V_{n+1}$. Comme $]u_n,v_n[\cap V_{n+1}$ est ouvert, on dispose de $\varepsilon_{n+1}>0$ tel que $]x_{n+1}-\varepsilon_{n+1},x_{n+1}+\varepsilon_{n+1}[\subset]u_n,v_n[\cap V_{n+1}$. On pose alors $u_{n+1}=x_{n+1}-\varepsilon_{n+1}/2$ et $v_{n+1}=x_{n+1}+\varepsilon_{n+1}/2$. Ils vérifient tous les critères attendus.

   (b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ précédemment construite est strictement croissante et majorée par v_0, donc convergente. De même, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et minorée par u_0 donc convergente. Or $\forall n\in\mathbb{N}, u_n<v_n$, donc $\lim u\le\lim v$. Soit alors $x\in[\lim u,\lim v]$, il vérifie $\forall n\in\mathbb{N}, u_n<x<v_n$. D'après la construction de ces suites, $\forall n\in\mathbb{N},]u_n,v_n[\subset V_n$, d'où $\forall n\in\mathbb{N}, x\in V_n$, donc $x\in B$. On en déduit que $[\lim u,\lim v]\subset B$, donc que $I\cap B$ est non vide.

   (c) On vient de prouver que pour tout intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$, $I\cap B$ est non vide. Ainsi B est dense dans $\mathbb{R}$.

   (d) Notons $D=\{x_n|n\in\mathbb{N}\}$ une partie dénombrable de réels. Soit $n\in\mathbb{N}$, on pose $V_n'=V_n\backslash\{x_n\}=(V_n\cap]-\infty,x_n[)\cup(V_n\cap]x_n,+\infty[)$. D'après la section 2, V_n est un ouvert. De plus, il est encore dense dans $\mathbb{R}$, soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, alors $I\cap V_n'=(I\cap V_n\cap]-\infty,x_n[)\cup(I\cap V_n\cap]x_n,+\infty[)$. Or $I\cap]-\infty,x_n[$ et $I\cap]x_n,+\infty[$ sont des intervalles ouverts et au moins l'un d'entre eux est non vide (sinon I est réduit à $\{x_n\}$ qui n'est pas ouvert). Conclusion, $I\cap V_n'\neq\emptyset$. D'après le résultat précédent, $B\backslash\{x_n|n\in\mathbb{N}\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}V_n'$ est dense dans $\mathbb{R}$.