

Applications linéaires

Cornou Jean-Louis

5 avril 2024

Dans tout ce chapitre, on fixe \mathbb{K} un corps, E, F, G trois espaces vectoriels sur \mathbb{K} . On a vu dans le cours sur les structures algébriques le concept de morphisme (de groupe, d'anneau). Les morphismes relatifs à la structure d'espace vectoriels s'appellent des applications linéaires.

1 Applications linéaires

1.1 Premières propriétés

Définition 1 Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$. On dit que f est linéaire (ou un morphisme de \mathbb{K} -espaces vectoriels) lorsque

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in E^2, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

L'ensemble de ces applications est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Exemple 1 L'application nulle $E \rightarrow F, x \mapsto 0_F$ est linéaire.

La transposition $T: M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K}), A \mapsto A^T$ est linéaire.

L'application $f: \mathbb{C}^2 \mapsto \mathbb{C}^3, (z_1, z_2) \mapsto (iz_1 - z_2, 2z_2, z_1 + z_2)$ est linéaire.

La dérivée seconde $D_2: \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X], P \mapsto P''$ est linéaire.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, l'homothétie de rapport $\lambda, E \rightarrow E, x \mapsto \lambda x$ est linéaire.

Propriété 1 (Règle de calcul) Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $f(0_E) = 0_F$ et f est un morphisme de groupes de $(E, +)$ dans $(F, +)$.

Démonstration. On choisit $\lambda = 1, x = 0_E, \mu = 0_K, y = 0_E$, ce qui donne d'après les règles de calculs dans les espaces vectoriels,

$$f(0_E) = 0_K f(0_E) = 0_F$$

La définition de la linéarité avec $\lambda = \mu = 1$ donne le caractère morphique de f .

Exemple 2 Les translations $x \mapsto x + u$ de vecteur u non nul sont non linéaires.

Les applications $\Re: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, \Im: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ sont \mathbb{R} -linéaires, mais non \mathbb{C} -linéaires.

Exercice 1 On fixe Q un polynôme de degré supérieur ou égal à 2 dans $\mathbb{K}[X]$ et on considère les applications $f: \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X], P \mapsto P \circ Q, g: \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X], P \mapsto Q \circ P$. Sont-elles tous deux linéaires?

Propriété 2 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que f est bijective. Alors sa réciproque f^{-1} est linéaire. Dans ce cas, on dit que f est un isomorphisme de \mathbb{K} -espace vectoriels, puis que E et F sont isomorphes.

Démonstration. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, (x, y) \in F^2$. On assemble

$$\begin{aligned} f(\lambda f^{-1}(x) + \mu f^{-1}(y)) &= \lambda f(f^{-1}(x)) + \mu f(f^{-1}(y)) \quad \text{car } f \text{ est linéaire} \\ &= \lambda x + \mu y \quad \text{car } f \circ f^{-1} = \text{Id}_F \end{aligned}$$

On applique f^{-1} à cette dernière égalité :

$$f^{-1}(f(\lambda f^{-1}(x) + \mu f^{-1}(y))) = f^{-1}(\lambda x + \mu y)$$

Comme $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$, on en déduit

$$\lambda f^{-1}(x) + \mu f^{-1}(y) = f^{-1}(\lambda x + \mu y)$$

ce qui donne bien la linéarité de f^{-1} .

Exemple 3 Soit $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, $E = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0\}$. Alors l'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}^2, u \mapsto (u_0, u_1)$ est un isomorphisme de \mathbb{K} -ev.

Exercice 2 Montrer que $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, (z_1, z_2) \mapsto (2z_1 - 3z_2, z_1 - iz_2)$ est un isomorphisme de \mathbb{C} -ev.

Propriété 3 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, A un sous-espace vectoriel de E , B un sous-espace vectoriel de F . Alors

- $f(A)$ est un sev de F .
- $f^{-1}(B)$ est un sev de E .

Démonstration. — Comme A est un sev, 0_E appartient à A , donc $0_F = f(0_E)$ appartient à $f(A)$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, (x, y) \in f(A)^2$. On note $(a, b) \in A^2$ tel que $x = f(a)$ et $y = f(b)$. On en déduit par linéarité de f que

$$\lambda x + \mu y = \lambda f(a) + \mu f(b) = f(\lambda a + \mu b)$$

Or A est un sev de E , donc $\lambda a + \mu b$ appartient à A . Par conséquent, $\lambda x + \mu y$ possède un antécédent dans A , donc appartient à $f(A)$. Conclusion, $f(A)$ est un sev de F .

- Comme $f(0_E) = 0_F$ et 0_F appartient à B (c'est un sev de F), 0_E appartient à $f^{-1}(B)$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, (x, y) \in f^{-1}(B)$. Alors, par linéarité de f ,

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

Or $f(x)$ et $f(y)$ appartiennent à B , comme c'est un sev de F , $\lambda f(x) + \mu f(y) \in B$. Ainsi, $f(\lambda x + \mu y)$ appartient à B , donc $\lambda x + \mu y \in f^{-1}(B)$. Conclusion, $f^{-1}(B)$ est un sev de E .

Exemple 4 Soit $A = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | f'' + f = 0\}$ et $\varphi : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f \mapsto (x \mapsto \int_0^x f(t) dt)$. Alors $\varphi(A)$ est un sev de $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Démontrez à titre d'exercice que $A = \text{Vect}(\cos, \sin)$ et que $\varphi(A) = \text{Vect}(\sin)$. Soit $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 0\}$ et $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x - y + z, y - z, x)$. Que vaut $f^{-1}(B)$? Vérifier qu'il s'agit d'un sev de \mathbb{R}^3 .

Propriété 4 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, A une partie de E , B une partie de F . Alors

- $f(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(f(A))$.
- $f^{-1}(\text{Vect}(B)) \supset \text{Vect}(f^{-1}(B))$.

Démonstration. — Soit $x \in f(\text{Vect}(A))$. Alors il existe y dans $\text{Vect}(A)$ tel que $x = f(y)$. On sait d'après la description des espaces engendrés par une partie que :

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \exists (a_1, \dots, a_n) \in A^n, y = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$$

Mais alors, par linéarité de f ,

$$x = f(y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i)$$

Ainsi, x est combinaison linéaire d'éléments de $f(A)$ (les $(f(a_i))_i$), donc $x \in \text{Vect}(f(A))$.

Réciproquement, soit $x \in \text{Vect}(f(A))$, alors

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, \exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \exists (y_1, \dots, y_n) \in f(A)^n, x = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Or

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists a_i \in A, y_i = f(a_i)$$

On en déduit par linéarité de f que

$$x = \sum_{i=1}^n x_i f(a_i) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i a_i\right)$$

De plus, $\sum_{i=1}^n x_i a_i$ est une combinaison linéaire d'éléments de A , donc appartient à $\text{Vect}(A)$. Ainsi, x est image par f d'un élément de $\text{Vect}(A)$, i.e $x \in f(\text{Vect}(A))$.

— Soit $x \in \text{Vect}(f^{-1}(B))$, alors il existe une famille à support fini $(\lambda_a)_{a \in f^{-1}(B)}$ telle que

$$x = \sum_{a \in f^{-1}(B)} \lambda_a a$$

On en déduit par linéarité de f

$$f(x) = \sum_{a \in f^{-1}(B)} \lambda_a f(a)$$

Or pour tout a dans $f^{-1}(B)$, $f(a) \in B$, donc $f(x)$ est CL d'éléments de B , ie. $f(x) \in \text{Vect}(B)$. Conclusion, $x \in f^{-1}(\text{Vect}(B))$.

Définition 2 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle noyau de f , l'ensemble $f^{-1}(\{0\})$, noté $\ker(f)$. On appelle image de f , l'ensemble $f(E)$, noté $\text{Im}(f)$.

Propriété 5 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Le noyau de f est un sev de E . L'image de f est un sev de F .

Démonstration. L'espace nul $\{0_F\}$ est un sev de F , donc $\ker(f) = f^{-1}(\{0_F\})$ est un sev de E . E est un sev de E , donc $\text{Im}(f) = f(E)$ est un sev de F .

Exemple 5 $\{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \int_0^2 (f(t) + f'(t)e^t) dt = 0\}$ est un sev de $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. L'espace $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ peut être vu comme le noyau de $A \mapsto A^T + A$.

Exercice 3 Déterminer le noyau de $\mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X], P \mapsto XP' - P(0)$.

Propriété 6 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0\}$.

Démonstration. Supposons injective. Soit $x \in \ker(f)$. Alors $f(x) = 0_F = f(0_E)$. D'après l'injectivité de f , $x = 0_E$. Réciproquement, $f(0_E) = 0_F$, donc $0_E \in \ker(f)$. Ainsi, $\ker(f) = \{0_E\}$. Réciproquement, supposons $\ker(f) = \{0_E\}$. Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Par linéarité de f , $f(x - y) = 0_F$, donc $x - y \in \ker(f)$. Ainsi, $x - y = 0_E$ et $x = y$. Conclusion, f est injective.

Exemple 6 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $f : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), X \mapsto AX$. Elle est linéaire d'après la bilinéarité du produit matriciel. Vérifions que f est injective. Soit $X = (x, y, z)^T \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0$. Alors

$$\begin{cases} x + y &= 0 \\ -x + 2z &= 0 \\ x + z &= 0 \end{cases}$$

L'opération $L_2 + L_3$ entraîne $3z = 0$, donc $z = 0$, puis $x = 0$. Alors L_1 donne $y = 0$. Conclusion, $X = 0$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et f est injective.

1.2 Opérations dans $\mathcal{L}(E, F)$.

Rappelons que comme F est un espace vectoriel, $\mathcal{F}(E, F)$ possède une structure d'espace vectoriel via

$$\forall (f, g) \in \mathcal{F}(E, F), \forall x \in E, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall f \in \mathcal{F}(E, F), \forall x \in E, (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

Théorème 1 L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$.

Démonstration. L'application nulle de E dans F , $x \mapsto 0_F$ est linéaire comme vu dans les exemples précédents. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, (f, g) \in (\mathcal{L}(E, F))^2$, soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2, (x, y)^2 \in E$,

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)(ax + by) &= \lambda f(ax + by) + \mu g(ax + by) && \text{définition de la CL de deux applications à valeurs dans } F \\ &= \lambda (af(x) + bf(y)) + \mu (ag(x) + bg(y)) && \text{linéarités de } f \text{ et } g \\ &= a(\lambda f(x) + \mu g(x)) + b(\lambda f(y) + \mu g(y)) && \text{règles de calculs dans les ev} \\ &= a(\lambda f + \mu g)(x) + b(\lambda f + \mu g)(y) && \text{définition de la CL de deux applications à valeurs dans } F \end{aligned}$$

On a ainsi montré que l'application $\lambda f + \mu g$ est linéaire, donc que $\mathcal{L}(E, F)$ est un sev de $\mathcal{F}(E, F)$.

Propriété 7 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

Démonstration. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, (x, y) \in E^2$,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\lambda x + \mu y) &= g[f(\lambda x + \mu y)] \quad \text{définition de la composée d'application} \\ &= g[\lambda f(x) + \mu f(y)] \quad \text{linéarité de } f \\ &= \lambda g(f(x)) + \mu g(f(y)) \quad \text{linéarité de } g \\ &= \lambda(g \circ f)(x) + \mu(g \circ f)(y) \quad \text{définition de la composée d'applications}\end{aligned}$$

Ainsi, $g \circ f$ est linéaire.

Exemple 7 Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3(x, y) \mapsto (x, x - y, y + x)$ et $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto 2x - y + z$. Déterminer la composée $g \circ f$.

Dans $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on note $D : f \mapsto f'$ et $P : f \mapsto (x \mapsto \int_0^x f(t) dt)$, puis $Z : f \mapsto f(0)$ (la fonction constante égale à $f(0)$). Alors $P \circ D = \text{id}_E - Z$ et $D \circ P = \text{id}_E$.

Propriété 8 (Bilinéarité de la composition) Soit $(f_1, f_2) \in (\mathcal{L}(E, F))^2$ et $(g_1, g_2) \in (\mathcal{L}(F, G))^2$, puis $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Alors

$$(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) \circ f_1 = \lambda_1 (g_1 \circ f_1) + \lambda_2 (g_2 \circ f_1)$$

et

$$g_1 \circ (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 (g_1 \circ f_1) + \lambda_2 (g_1 \circ f_2)$$

Démonstration. Les deux preuves sont différentes contrairement à ce qu'on pourrait penser. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}[(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) \circ f_1](x) &= (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)(f_1(x)) \quad \text{définition de la composition d'applications} \\ &= \lambda_1 g_1(f_1(x)) + \lambda_2 g_2(f_1(x)) \quad \text{définition de CL d'applications à valeurs dans } G \\ &= \lambda_1 (g_1 \circ f_1)(x) + \lambda_2 (g_2 \circ f_2)(x) \quad \text{définition de la composition d'applications} \\ &= [\lambda_1 (g_1 \circ f_1) + \lambda_2 (g_2 \circ f_2)](x) \quad \text{définition de la CL d'applications à valeurs dans } G\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[g_1 \circ (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)](x) &= g_1[(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x)] \quad \text{définition de la composition d'applications} \\ &= g_1[\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)] \quad \text{définition de la CL d'applications à valeurs dans } F \\ &= \lambda_1 g_1(f_1(x)) + \lambda_2 g_1(f_2(x)) \quad \text{linéarité de } g_1 \\ &= \lambda_1 (g_1 \circ f_1)(x) + \lambda_2 (g_1 \circ f_2)(x) \quad \text{définition de la composée d'applications} \\ &= [\lambda_1 (g_1 \circ f_1) + \lambda_2 (g_1 \circ f_2)](x) \quad \text{définition de la CL d'applications à valeurs dans } G\end{aligned}$$

Exemple 8 Calculer $D \circ (P + Z)$ et $(Z + \text{id}(E)) \circ (D + P)$ avec les notations de l'exemple précédent.

Exemple 9 Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer l'équivalence $v \circ u = 0 \iff \text{Im}(u) \subset \ker(v)$.

1.3 Application linéaire et familles de vecteurs

Propriété 9 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(x_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de E . Alors la famille $(f(x_i))_{i \in I}$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$.

Démonstration. Comme vu précédemment, $f(\text{Vect}(x_i)_{i \in I}) = \text{Vect}(f(x_i)_{i \in I})$. On en déduit

$$f(E) = \text{Im}(f) = \text{Vect}(f(x_i)_{i \in I})$$

Autrement dit, la famille $f(x_i)_{i \in I}$ est génératrice de $\text{Im}(f)$.

Propriété 10 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(x_i)_{i \in I}$ une famille libre de E . On suppose que f est injective. Alors la famille $(f(x_i))_{i \in I}$ est libre dans F .

Démonstration. Soit $(\lambda_i)_{i \in I} \in K^{(I)}$ une famille de scalaires à support fini tel que $\sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i) = 0_F$. On en déduit par linéarité

$$f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right) = 0_F$$

Comme f est injective, son noyau est réduit à $\{0_E\}$. Ce qui précède implique donc

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E$$

Or la famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre, donc $\forall i \in I, \lambda_i = 0_K$. Conclusion, la famille $(f(x_i))_{i \in I}$ est libre dans F .

Propriété 11 Soit $(x_i)_{i \in I}$ une base de E , f un isomorphisme de E dans F , alors $f(x_i)_{i \in I}$ est une base de F .

Définition 3 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que f est de rang fini lorsque $\text{Im}(f)$ est un espace vectoriel de dimension fini. Dans ce cas, on appelle rang de f , la dimension de $\text{Im}(f)$, noté $\text{rg}(f)$.

Propriété 12 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. On suppose que f ou g est de rang fini, alors $g \circ f$ est de rang fini et

$$\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(g), \text{rg}(f))$$

Démonstration. Supposons f de rang fini n . On note alors $(f_i)_{1 \leq i \leq n} = f(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de $\text{Im}(f)$. En particulier, elle est génératrice de $\text{Im}(f)$. Mais alors, d'après la propriété 10, la famille $g(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est génératrice de $g(\text{Im}(f)) = g(f(E)) = (g \circ f)(E) = \text{Im}(g \circ f)$. Ainsi, $\text{Im}(g \circ f)$ est de dimension finie, de dimension inférieure ou égale à n , ie. $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(f)$.

Supposons g de rang fini p . Alors $g(\text{Im}(f)) \subset \text{Im}(g)$. Comme $\text{Im}(g)$ est de dimension finie, $g(\text{Im}(f))$ est de dimension finie inférieure ou égale à p , ie $(g \circ f)(E) = \text{Im}(g \circ f)$ est de dimension inférieure ou égale à p . Ainsi, $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(p)$.

Propriété 13 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

— Si f est de rang fini et g un isomorphisme, alors $g \circ f$ est de rang fini et $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$.

— Si f est un isomorphisme et g de rang fini, alors $g \circ f$ est de rang fini et $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(g)$.

Démonstration. — Le fait que le rang est fini a déjà été démontré puisque f est de rang fini. La démonstration précédente montre que $(g \circ f)(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de $\text{Im}(g \circ f)$ puisque g est un isomorphisme. Ainsi, $\text{rg}(g \circ f) = n$.

— Comme f est surjective, $(g \circ f)(E) = g(f(E)) = g(F)$. On en déduit $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$, donc $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(g)$.

Exercice 4 Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ tels que u et v sont tous deux de rang fini. Montrer que $u + v$ est de rang fini et que $\text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$. En déduire (sans se fatiguer) que $|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u + v)$.

2 Endomorphismes

2.1 Structure d'anneau

Notation

On note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$. Les éléments de $\mathcal{L}(E)$ s'appellent des endomorphismes de E .

Propriété 14 L'application id_E est linéaire.

Démonstration. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, (x, y) \in E^2$.

$$\text{id}_E(\lambda x + \mu y) = \lambda x + \mu y = \lambda \text{id}_E(x) + \mu \text{id}_E(y)$$

Théorème 2 La structure $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau. Il est non commutatif dès que E est dimension infinie ou finie supérieure ou égale à 2.

Démonstration. Comme vu précédemment, l'identité est linéaire et c'est le neutre de la composition dans $\mathcal{L}(E, E)$. D'autre part, comme c'est un sev, $(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ est un espace vectoriel, c'est un groupe commutatif. La stabilité par composition a été vue en proposition 7 et la bilinéarité de la composition d'applications linéaires a été vue en proposition 8, ce qui assure la distributivité. Dans le cas où E de dimension infinie ou supérieure ou égale à 2, on se donne (e_1, e_2) une famille libre de E . On note alors $f : x_1 e_1 + x_2 e_2 \mapsto x_1 e_2$ et $g : x_1 e_1 + x_2 e_2 \mapsto x_2 e_1$ des applications linéaires définies sur $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$ sev de E . Alors $(g \circ f)(e_2) = g(f(e_2)) = g(0) = 0$ tandis que $(f \circ g)(e_2) = f(g(e_2)) = f(e_1) = e_2$ de sorte que $f \circ g \neq g \circ f$.

⚠ Attention

$(\mathcal{F}(E, E), +, \circ)$ n'est pas un anneau car on perd l'une des distributivités sans hypothèse de linéarité.

Notation

On omet parfois le symbole \circ dans la composition. Attention toutefois à garder en tête la signification de gf .

📖 Remarque

Toutes ces opérations font de $\mathcal{L}(E)$ une structure appelée algèbre sur \mathbb{K} .

Exemple 10 (Application aux calculs de suites récurrentes) Soit $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (3x + y, 3y)$ et $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (y, 0)$. Alors $u = 3\text{Id}_{\mathbb{R}^2} + v$. Comme v et $\text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ commutent, on peut appliquer le binôme puisque $\mathcal{L}(E)$ est un anneau. On remarque

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, v^2(x, y) = v(y, 0) = (0, 0)$$

soit $v^2 = 0$. On déduit que pour tout entier naturel n ,

$$u^n = 3^n \text{Id}_{\mathbb{R}^2} + n3^{n-1}v$$

Soit à présent deux réels x_0 et y_0 et les suites récurrentes définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = 3x_n + y_n, y_{n+1} = 3y_n \quad \text{soit encore } (x_{n+1}, y_{n+1}) = u(x_n, y_n)$$

On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, (x_n, y_n) = u^n(x_0, y_0) = (3^n x_0 + n3^{n-1} y_0, 3^n y_0)$$

Exercice 5 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est une homothétie si et seulement si $\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K}, u(x) = \lambda x$.

Exemple 11 Soit λ, μ deux scalaires distincts.

- Montrons que $\ker(u - \lambda \text{Id})$ et $\ker(u - \mu \text{Id})$ sont en somme directe. Soit $x \in \ker(u - \lambda \text{Id}) \cap \ker(u - \mu \text{Id})$. Alors

$$u(x) = \lambda x \quad \text{et} \quad u(x) = \mu x$$

ce qui entraîne $\lambda x = \mu x$. Comme on a supposé $\lambda \neq \mu$, cela implique $x = 0$. Ainsi, la somme est directe.

- Montrons que $\ker((u - \lambda \text{Id})^2)$ et $\ker((u - \mu \text{Id})^2)$ sont en somme directe. Soit $x \in \ker((u - \lambda \text{Id})^2) \cap \ker((u - \mu \text{Id})^2)$. Alors

$$(u - \lambda \text{Id})^2(x) = u^2(x) - 2\lambda u(x) + \lambda^2 x = 0 \quad \text{et} \quad (u - \mu \text{Id})^2(x) = u^2(x) - 2\mu u(x) + \mu^2 x = 0$$

La soustraction de ces deux égalités amène

$$2(\lambda - \mu)u(x) = (\lambda^2 - \mu^2)x = (\lambda - \mu)(\lambda + \mu)x$$

Comme on a supposé $\lambda \neq \mu$, on en déduit $2u(x) = (\lambda + \mu)x$. On en déduit par linéarité de u , $u^2(x) = \frac{1}{2}(\lambda + \mu)u(x) = \frac{(\lambda + \mu)^2}{4}x$. D'autre part, $\mu(u - \lambda \text{Id})^2(x) - \lambda(u - \mu \text{Id})^2(x) = 0$ fournit

$$(\mu - \lambda)u^2(x) + (\lambda^2 \mu - \lambda \mu^2)x = 0$$

soit encore, puisque $\lambda \neq \mu$,

$$u^2(x) = \lambda \mu x$$

Les deux expressions de $u^2(x)$ obtenues entraînent $4\lambda \mu x = (\lambda + \mu)^2 x$, soit encore $(\lambda - \mu)^2 x = 0$. Comme $\lambda \neq \mu$, $x = 0$ et la somme de sev est directe.

2.2 Projecteurs et symétries

Définition 4 Soit $f \in \mathcal{F}(E, E)$. On dit que f est un projecteur (ou une projection) lorsqu'on dispose de sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires dans E tels que

$$\forall x \in E, \exists ! (x_F, x_G) \in F \times G, x = x_F + x_G, f(x) = x_F$$

Dans ce cas, on dit que f est la projection sur F parallèlement à G (ou de direction G)

 **Remarque**

Cette définition est légitime puisqu'on dispose de l'existence et unicité de la décomposition de x dans $F + G$.

Propriété 15 Tout projecteur est linéaire.

Démonstration. Soit $(x, y) \in E^2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On note $x = x_F + x_G$ l'unique décomposition de x dans $E = F \oplus G$ et $y = y_F + y_G$ celle de y . Alors $\lambda x + \mu y = (\lambda x_F + \mu y_F) + (\lambda x_G + \mu y_G)$. Comme F et G sont des sev, $\lambda x_F + \mu y_F \in F$ et $\lambda x_G + \mu y_G \in G$. Par conséquent, cette dernière écriture est la décomposition de $\lambda x + \mu y$ dans $F \oplus G$. On en déduit $p(\lambda x + \mu y) = \lambda x_F + \mu y_F = \lambda p(x) + \mu p(y)$.

Définition 5 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est idempotent lorsque $f^2 = f$ (i.e $f \circ f = f$).

Théorème 3 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est un projecteur si et seulement si $f^2 = f$. Dans ce cas, f est le projecteur sur son image parallèlement à son noyau.

Démonstration. Supposons que f est un projecteur. On note F et G les sev supplémentaires dans E correspondants. Soit $x \in E$ que l'on écrit $x = x_F + x_G$ avec des notations évidentes. Alors $f(x) = x_F$. En particulier, $f(x)$ appartient à F , donc $f(x) = x_F + 0$ est la décomposition de $f(x)$ dans $F \oplus G$. On en déduit que $f(f(x)) = x_F$. Ainsi, $f(f(x)) = f(x)$. Conclusion, $f^2 = f$.

Réciproquement, supposons que $f^2 = f$. On pose alors $F = \text{Im}(f)$ et $G = \ker(f)$. Démontrons que f est le projecteur sur F parallèlement à G . Démontrons tout d'abord que F et G sont supplémentaires dans E .

- Soit $x \in E$. On écrit $x = f(x) + (x - f(x))$. Notons $y = f(x)$ et $z = x - f(x)$. Il est clair que $y \in \text{Im}(f) = F$. De plus, par linéarité, $f(z) = f(x) - f(f(x))$. Or, $f^2 = f$, donc $f(z) = f(x) - f(x) = 0$ et $z \in \ker(f) = G$. On vient de démontrer que $F + G = E$.
- Soit $x \in F \cap G$, alors il existe un élément a de E tel que $x = f(a)$. Mais alors $f(x) = f(f(a)) = f(a)$ puisque $f^2 = f$. Comme $x \in G$, $f(x) = 0$, donc $f(a) = 0$. On en déduit $x = 0$. Ainsi, $F \cap G = \{0\}$.

Conclusion, $F \oplus G = E$. De plus, nous avons démontré que $x = f(x) + (x - f(x))$ est l'unique décomposition de x dans $F \oplus G$. Ainsi, $f(x)$ est bien la composante dans F de cette décomposition, i.e f est le projecteur sur F parallèlement à G .

Remarque

On a prouvé au passage que $f^2 = f$ implique $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = E$.

Exemple 12 Soit $A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ et $f : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), A \mapsto AX$. Démontrer que f est un projecteur. Donner son image et sa direction.

Propriété 16 Soit f un projecteur de E et $x \in E$. Alors $x \in \text{Im}(f) \iff f(x) = x$. Autrement dit, $\text{Im}(f) = \ker(f - \text{id}_E)$.

Démonstration. Si x appartient à $\text{Im}(f)$. Alors il existe un vecteur a tel que $x = f(a)$. Mais alors, $f(x) = f^2(a) = f(a) = x$. Réciproquement, si $f(x) = x$, alors x est antécédent de x par f , donc $x \in \text{Im}(f)$.

Exemple 13 L'application partie réelle $\Re : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \Re(z)$ est une projection sur \mathbb{R} parallèlement à $i\mathbb{R}$.

Propriété 17 Soit F, G deux sev supplémentaires dans E . Soit f le projecteur sur F parallèlement à G . Alors $\text{id}_E - f$ est le projecteur sur G parallèlement à F .

Démonstration. Notons $g = \text{id}_E - f$. Alors comme id_E et f commutent, $g^2 = \text{id}_E^2 - 2\text{id}_E \circ f + f^2 = \text{id}_E - 2f + f = \text{id}_E - f = g$. On en déduit que g est le projecteur sur son image relativement à son noyau. Or $\text{Im}(g) = \ker(g - \text{id}_E) = \ker(f) = G$ et $\ker(g) = \ker(f - \text{id}_E) = \text{Im}(f) = F$. Ainsi, g est le projecteur sur G parallèlement à F .

Définition 6 Soit $f \in \mathcal{F}(E, E)$. On dit que f est une symétrie lorsqu'on dispose de F et G deux sev supplémentaires dans E tels que

$$\forall x \in E, \exists! (x_F, x_G) \in F \times G, x = x_F + x_G, f(x) = x_F - x_G$$

Dans ce cas, on dit que f est la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

Propriété 18 Toute symétrie est linéaire.

Démonstration. Laissée à titre d'exercice.

Théorème 4 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est une symétrie si et seulement si $f^2 = \text{id}_E$. Dans ce cas, f est la symétrie par rapport à $\ker(f - \text{id}_E)$ parallèlement à $\ker(f + \text{id}_E)$. On appelle $\ker(f - \text{id}_E)$ son espace invariant et $\ker(f + \text{id}_E)$ son espace anti-invariant.

Démonstration. Supposons que f est une symétrie. On note alors F et G des sev supplémentaires de E tels que f est la symétrie par rapport à F parallèlement à G . Soit $x \in E$, on note $x = x_F + x_G$ sa décomposition dans $F \oplus G$, ce qui entraîne $f(x) = x_F - x_G$. Mais alors, comme $-x_G$ appartient à G (c'est un sev de E), on reconnaît la décomposition du vecteur $f(x)$ dans $F \oplus G$. Ainsi, $f(f(x)) = x_F - (-x_G) = x_F + x_G = x$. Conclusion, $f^2 = \text{id}_E$.

Réciproquement, supposons $f^2 = \text{id}_E$. Notons $F = \ker(f - \text{id}_E)$ et $G = \ker(f + \text{id}_E)$, ce sont des sev de E puisque des noyaux d'applications linéaires. Montrons que F et G sont supplémentaires dans E . Soit $x \in E$, on note $y = \frac{1}{2}(x + f(x))$ et $z = \frac{1}{2}(x - f(x))$ qui vérifient $y + z = x$. De plus, $f(y) = \frac{1}{2}(f(x) + f^2(x)) = \frac{1}{2}(f(x) + x) = y$, donc $y \in F$. En outre, $f(z) = \frac{1}{2}(f(x) - f^2(x)) = \frac{1}{2}(f(x) - x) = -z$, donc $z \in G$. Ceci prouve que $F + G = E$. Soit $x \in F \cap G$, alors $f(x) = x$ et $f(x) = -x$, donc $2x = 0$, d'où $x = 0$. Par conséquent, cette somme de sev est directe et $F \oplus G = E$. Soit $x \in E$, d'après ce qui précède, x se décompose sous la forme $y + z = \frac{1}{2}(x + f(x)) + \frac{1}{2}(x - f(x))$ dans cette somme directe. On a vu que $f(y) = y$ et $f(z) = -z$. donc f est bien la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

Remarque

On a prouvé au passage que $s^2 = \text{id}_E$ implique $\ker(s - \text{id}_E) \oplus \ker(s + \text{id}_E) = E$.

Exemple 14 La transposition matricielle est une symétrie. Son espace invariant est l'espace des matrices symétriques, son espace anti-invariant est l'espace des matrices antisymétriques.

Propriété 19 Soit F et G deux sev supplémentaires dans E . Soit p un projecteur sur F parallèlement à G , alors $2p - \text{id}_E$ est la symétrie par rapport à F parallèlement à G . Réciproquement, si s est une symétrie par rapport à F parallèlement à G , alors $\frac{1}{2}(s + \text{id}_E)$ est le projecteur sur F parallèlement à G .

Démonstration. Pour tout x de E , on note $x_F + x_G$ sa décomposition dans $F \oplus G$. Alors $p(x) = x_F$ et $(2p - \text{id}_E)(x) = 2x_F - x = x_F - x_G$, donc $2p - \text{id}_E$ est bien la symétrie annoncée. Réciproquement, si s est la symétrie sur F parallèlement à G , $\frac{1}{2}(s + \text{id}_E)(x) = \frac{1}{2}(x_F + x_G + x_F - x_G) = x_F$, donc cet endomorphisme est la projection sur F parallèlement à G .

Exemple 15 On considère \mathbb{C} comme un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension un. On se donne $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. A quelle CNS, l'application $z \mapsto az + b\bar{z}$ est-elle une symétrie? Donner son espace invariant et anti-invariant le cas échéant.

2.3 Automorphismes

Définition 7 On appelle automorphisme de E tout endomorphisme de E bijectif. Leur ensemble est noté $\text{GL}(E)$, appelé groupe linéaire.

Exemple 16 Toute symétrie est un automorphisme.

Propriété 20 L'ensemble $(\text{GL}(E), \circ)$ est un groupe.

Démonstration. C'est le groupe des inversibles de $\mathcal{L}(E)$.

Exemple 17 Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\Phi : E \times F \rightarrow E \times F, (x, y) \mapsto (x, y - u(x))$. Montrons que Φ est un automorphisme de $E \times F$. La vérification de la linéarité est laissée à titre d'exercice. Soit $((x, y), (x', y')) \in (E \times F)^2$.

$$\begin{aligned}(x', y') = \Phi(x, y) &\iff x' = x \quad \wedge \quad y' = y - u(x) \\ &\iff x = x' \quad \wedge \quad y = y' + u(x')\end{aligned}$$

Par conséquent, tout élément (x', y') de $E \times F$ possède exactement un antécédent dans $E \times F$ par Φ , à savoir $(x', y' + u(x'))$, ce qui prouve la bijectivité de Φ .

Exercice 6 Soit $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x + 2y, 4x - y, -2x + 2y + 3z)$. Montrer que u est un automorphisme de \mathbb{R}^3 .

Exercice 7 Déterminer toutes les projections qui sont des automorphismes.

3 Détermination d'une application linéaire

On vient de voir qu'on peut définir une application linéaire à l'aide de décomposition dans des sev supplémentaires. On généralise cette technique à l'aide de bases.

Théorème 5 Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E et $(f_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F . Alors il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$\forall i \in I, u(e_i) = f_i$$

Démonstration. Rappelons que comme $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E , pour tout x dans E , il existe une unique famille de scalaires $(x_i)_{i \in I}$ à support fini telle que $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$. Avec ces notations, on définit de manière univoque l'application u en posant pour tout x dans E , $u(x) = \sum_{i \in I} x_i f_i$. Montrons qu'alors u est linéaire et vérifie le critère attendu. Soit $(x, y) \in E^2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On note $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$ et $y = \sum_{i \in I} y_i e_i$ les décompositions uniques de x et y dans la base $(e_i)_{i \in I}$. On remarque qu'alors

$$\lambda x + \mu y = \sum_{i \in I} (\lambda x_i + \mu y_i) e_i$$

donc que les $(\lambda x_i + \mu y_i)_{i \in I}$ sont les coordonnées du vecteur $\lambda x + \mu y$ dans la base $(e_i)_{i \in I}$. Avec la définition de u que l'on a donnée, cela entraîne

$$u(\lambda x + \mu y) = \sum_{i \in I} (\lambda x_i + \mu y_i) f_i = \lambda \sum_{i \in I} x_i f_i + \mu \sum_{i \in I} y_i f_i = \lambda u(x) + \mu u(y)$$

Ainsi, u est linéaire. De plus, soit $i \in I$, alors $e_i = \sum_{j \in J} \delta_{i,j} e_j$ est l'unique décomposition de (e_i) dans la base $(e_j)_{j \in J}$. On en déduit

$$u(e_i) = \sum_{j \in J} \delta_{i,j} f_j = f_i$$

L'existence est bien prouvée. Montrons à présent l'unicité. Soit f et g deux applications linéaires telles que

$$\forall i \in I, f(e_i) = g(e_i) = f_i$$

Soit $x \in E$, on écrit la décomposition de x dans la base $(e_i)_{i \in I}$ via $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$. D'après la linéarité de f et g ,

$$f(x) = \sum_{i \in I} x_i f(e_i) = \sum_{i \in I} x_i f_i \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{i \in I} x_i g(e_i) = \sum_{i \in I} x_i f_i$$

Par conséquent, $f(x) = g(x)$, et ce pour tout x de E , donc $f = g$.

Remarque

Pour vérifier que deux applications linéaires sont égales, il suffit de vérifier qu'elles coïncident sur une base de l'espace de départ.

Exemple 18 Pour vérifier qu'une application linéaire est nulle, il suffit de vérifier qu'elle annule une base de E . Soit (a, b, c) un triplet de réels. A quelle condition nécessaire est suffisante, l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto ((a^2 + b + c)x + (2a - 2b)y + cz, 2cx - (2b^2 + c^2)y + az, (a + c)x - c^2z)$ est-elle l'application nulle ? En utilisant la base canonique de \mathbb{R}^3 , on constate que cela équivaut à $a^2 + b + c = 0, (2a - 2b) = 0, c = 0, 2c = 0, (2b^2 + c^2) = 0, a = 0, a + c = 0, c^2 = 0$, soit encore $a = b = c = 0$.

Propriété 21 Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E et $(f_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F . Soit u l'unique application dans $\mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$\forall i \in I, u(e_i) = f_i$$

- u est injective si et seulement si $(f_i)_{i \in I}$ est libre dans F .
- u est surjective si et seulement si $(f_i)_{i \in I}$ est génératrice dans F .
- u est un isomorphisme si et seulement si $(f_i)_{i \in I}$ est une base de F .

Démonstration. — Supposons u injective et montrons que $(f_i)_{i \in I}$ est libre. Soit $(\lambda_i)_{i \in I} \in K^{(I)}$ tel que $\sum_{i \in I} \lambda_i f_i = 0$. On écrit alors par linéarité de u ,

$$\sum_{i \in I} \lambda_i u(e_i) = u\left(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i\right) = 0$$

Ainsi, $\sum_{i \in I} \lambda_i e_i \in \ker(u)$. Par injectivité de u , $\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0$. Comme $(e_i)_{i \in I}$ est une base, elle est libre, donc $\forall i \in I, \lambda_i = 0$. Ainsi, la famille $(f_i)_{i \in I}$ est libre.

Réciproquement supposons la famille $(f_i)_{i \in I}$ libre et montrons que u est injective. Comme elle est linéaire, il suffit de prouver $\ker(u) = \{0\}$. Soit $x \in E$ tel que $u(x) = 0$. On note $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$ la décomposition de x dans la base $(e_i)_{i \in I}$. Par linéarité de u , $0 = u(x) = \sum_{i \in I} x_i u(e_i) = \sum_{i \in I} x_i f_i$. Comme la famille $(f_i)_{i \in I}$ est libre, on en déduit $\forall i \in I, x_i = 0$. Par conséquent, $x = 0$ et u est injective.

— Supposons u surjective. Soit $y \in F$. Comme u est surjective, il existe un vecteur x dans E tel que $y = u(x)$. On écrit la décomposition de x dans la base E : $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$, ce qui entraîne par linéarité de u , $y = \sum_{i \in I} x_i u(e_i) = \sum_{i \in I} x_i f_i$. Ainsi, on a trouvé une famille $(x_i)_{i \in I}$ de scalaires à support fini qui établit que y est combinaison linéaire des $(f_i)_{i \in I}$. Comme cela est valable pour tout y dans F , cette famille est génératrice.

Réciproquement, si la famille $(f_i)_{i \in I}$ est génératrice, on montre que u est surjective. Soit $y \in F$. Alors il existe une famille $(y_i)_{i \in I} \in K^{(I)}$ telle que $y = \sum i \in I y_i f_i$. On pose alors $x = \sum_{i \in I} y_i e_i$, ce vecteur de E vérifie par linéarité de u , $u(x) = \sum_{i \in I} y_i u(e_i) = \sum_{i \in I} y_i f_i = y$. Par conséquent, y possède un antécédent par u , et ce, pour tout y dans F . Ainsi, u est surjective.

— Conséquence des deux points précédents.

Remarque

Ne pas oublier le point important, il suffit qu'une application linéaire transporte une base sur une base pour être un isomorphisme, auquel cas elle envoie toute base sur une base.

Théorème 6 Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors E et F sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.

Démonstration. Supposons E et F isomorphes et notons $u \in \mathcal{L}(E, F)$ un isomorphisme. Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E avec $n = \dim(E)$. D'après ce qui précède, la famille $u(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de F , donc $\dim(F) = n = \dim(E)$. Réciproquement, supposons que E et F ont même dimension que l'on note n . On note $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E et $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de F . On peut alors définir de manière univoque l'application linéaire u qui envoie la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ sur la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ puisque celles-ci ont même longueur. D'après ce qui précède, u est alors un isomorphisme, donc E et F sont isomorphes.

Exemple 19 Tout espace de dimension finie n est isomorphe à \mathbb{K}^n . Autrement dit, tout espace vectoriel de dimension finie n « se comporte comme » l'espace \mathbb{K}^n . C'est bien sûr faux en dimension infinie, au sens où il existe des espaces de dimension infinie non isomorphes : par exemple, $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ et $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Théorème 7 Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E et F sont de dimension finie et que $\dim(E) = \dim(F)$. Alors, on a l'équivalence : u bijective ssi u injective ssi u surjective.

Démonstration. Les sens directs sont clairs. Supposons u injective. Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E avec $n = \dim(E)$. Alors la famille $(u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ est libre dans F qui est de dimension n . Par conséquent, c'est une base de F . D'après ce qui précède, u est alors un isomorphisme. Supposons à présent u surjective. la famille $(u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ est alors génératrice dans F qui est de dimension n , donc c'est une base de F . On en déduit que u est un isomorphisme.

Attention

Ne pas oublier le critère sur la dimension. C'est faux en dimension infinie, la dérivation dans $\mathbb{K}[X]$ est surjective, mais non injective.

Théorème 8 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose E de dimension finie. Alors on a l'équivalence f est inversible ssi f est inversible à gauche ssi f est inversible à droite.

Démonstration. Les sens directs sont clairs. Supposons f inversible à gauche. On note g un endomorphisme de E tel que $gf = \text{id}_E$. Montrons qu'alors f est injective, cela suffit à démontrer qu'elle est inversible d'après ce qui précède. Soit $x \in E$ tel que $f(x) = 0$. Alors $g(f(x)) = g(0) = 0$, soit encore $\text{id}_E(x) = x = 0$. Supposons à présent f inversible à droite. Notons g un endomorphisme de E tel que $fg = \text{id}_E$. Montrons qu'alors f est surjective, cela suffit à prouver que c'est un isomorphisme d'après ce qui précède. Soit $x \in E$, alors $f(g(x)) = x$, donc $g(x)$ est un antécédent de x par f , ce qui prouve la surjectivité de f .

Propriété 22 Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \dim(F)$.

Démonstration. On note $n = \dim(E)$, (e_1, \dots, e_n) une base de E , puis $p = \dim(F)$ et (f_1, \dots, f_p) une base de F . Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$. On définit de manière univoque une application linéaire $u_{i,j}$ en posant

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_{i,j}(e_k) = \delta_{i,k} f_j$$

Montrons que la famille d'applications linéaires $(u_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ ainsi définie est une base de $\mathcal{L}(E, F)$.

- Soit $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in \mathbb{K}^{np}$ une famille de scalaires telle que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \lambda_{i,j} u_{i,j} = 0$. Fixons k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et évaluons cette dernière application linéaire en le vecteur e_k . Cela entraîne

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \lambda_{i,j} \delta_{i,k} f_j = 0$$

La sélection des indices via le symbole de Kronecker entraîne

$$\sum_{j=1}^p \lambda_{k,j} f_j = 0$$

Or la famille $(f_j)_{1 \leq j \leq p}$ est une base donc libre. Cela entraîne $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_{k,j} = 0$, et ce, pour tout k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Ainsi, la famille de scalaires est nulle, ce qui entraîne la liberté des $(u_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$.

- Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On cherche à décomposer u selon la famille précédente. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on décompose le vecteur $u(e_k)$ dans la base $(f_j)_{1 \leq j \leq p}$, ce qui fournit l'existence d'une famille $(\lambda_{k,j})_{1 \leq j \leq p} \in \mathbb{K}^p$ telle que

$$u(e_k) = \sum_{j=1}^p \lambda_{k,j} f_j$$

On a ainsi construit une famille $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$. Vérifions que $u = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \lambda_{i,j} u_{i,j}$. Pour cela, fixons $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \lambda_{i,j} u_{i,j} \right) (e_k) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \lambda_{i,j} u_{i,j}(e_k) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \lambda_{i,j} \delta_{i,k} f_j \\ &= \sum_{j=1}^p \lambda_{k,j} f_j \\ &= u(e_k) \end{aligned}$$

Par conséquent, les applications linéaires u et $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \lambda_{i,j} u_{i,j}$ coïncident sur une base, donc sont égales. La famille $(u_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ est alors génératrice.

Propriété 23 Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces supplémentaires dans E , $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$, $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$. Alors il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ qui coïncide avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2 .

Démonstration. Pour tout x dans E , on note $x = x_1 + x_2$ son unique décomposition dans $E_1 \oplus E_2$. On définit alors $u : x \mapsto u_1(x_1) + u_2(x_2)$, ce qui définit bien u de manière univoque puisque la décomposition de x est unique. Montrons que u satisfait les critères attendus.

- Soit $(x, y) \in E^2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Avec des notations évidentes, $\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2)$ est l'unique décomposition du vecteur $\lambda x + \mu y$ dans $E_1 \oplus E_2$, puisque E_1 et E_2 sont des sev de E . On en déduit

$$\begin{aligned} u(\lambda x + \mu y) &= u_1(\lambda x_1 + \mu y_1) + u_2(\lambda x_2 + \mu y_2) \quad \text{définition de } u \\ &= \lambda u_1(x_1) + \mu u_1(y_1) + \lambda u_2(x_2) + \mu u_2(y_2) \quad \text{linéarité de } u_1 \text{ et } u_2 \\ &= \lambda u(x) + \mu u(y) \quad \text{définition de } u \end{aligned}$$

Conclusion u est linéaire.

- Soit $x \in E_1$, alors $x = x + 0$ est l'unique décomposition de x dans $E_1 \oplus E_2$. Donc $u(x) = u_1(x) + u_2(0) = u_1(x)$. De même, pour tout x dans E_2 , $x = 0 + x$ est l'unique décomposition de x dans $E_1 \oplus E_2$, donc $u(x) = u_1(0) + u_2(x) = u_2(x)$.

L'existence est bien établie. Démontrons l'unicité. Soit v une autre application linéaire satisfaisant les mêmes critères et $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x_1) + u(x_2) \quad \text{linéarité de } u \\ &= u_1(x_1) + u_2(x_2) \quad \text{restrictions de } u \\ &= v(x_1) + v(x_2) \quad \text{restrictions de } v \\ &= v(x) \quad \text{linéarité de } v \end{aligned}$$

Donc $u = v$ et l'unicité est démontrée.

Propriété 24 Soit $q \in \mathbb{N}^*$, E_1, \dots, E_q des sev de E tels que $\bigoplus_{i=1}^q E_i = E$, puis $(u_i)_{1 \leq i \leq q} \in \prod_{i=1}^q \mathcal{L}(E_i, F)$. Alors il existe une unique application linéaire u dans $\mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, q \rrbracket, u|_{E_i} = u_i$$

Démonstration. Récurrence à l'aide de la propriété précédente.

Théorème 9 (Théorème du rang : forme géométrique) Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on suppose qu'il existe un supplémentaire S de $\ker(u)$ dans E . Alors u induit un isomorphisme de S dans $\text{Im}(u)$.

Démonstration. On note u_S l'application linéaire $S \rightarrow \text{Im}(u)$, $x \mapsto u(x)$.

- Surjectivité : Soit $y \in \text{Im}(u)$, alors on dispose de $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Comme $E = S \oplus \ker(u)$, on peut décomposer x sous la forme $x = x_S + x_K$. Mais alors $u(x) = u(x_S) + u(x_K) = u(x_S)$. On a donc trouvé un antécédent de y dans S , donc u_S est surjective.
- Injectivité : Montrons que u_S est injective. Soit $x \in S$ tel que $u_S(x) = 0$. Alors $u_S(x) = u(x) = 0$, donc $x \in \ker(u)$. Alors $x \in \ker(u) \cap S$. Or $S \cap \ker(u) = \{0\}$ puisque S et $\ker(u)$ sont supplémentaires dans E . Ainsi $x = 0$ et u_S est injective. Conclusion, l'application u_S est un isomorphisme de S dans $\text{Im}(u)$.

Théorème 10 (Théorème du rang) Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose E de dimension finie. Alors u est de rang fini et

$$\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \text{rg}(u)$$

Démonstration. Comme E est de dimension finie, on sait que le sev $\ker(u)$ de E possède un supplémentaire S dans E . D'après ce qui précède, S et $\text{Im}(u)$ sont alors isomorphes. Comme S est de dimension finie, on en déduit que $\text{Im}(u)$ aussi, donc que u est de rang fini égal à $\dim(S)$. Or $\dim(S) + \dim(\ker(u)) = \dim(E)$, donc $\text{rg}(u) + \dim(\ker(u)) = \dim(E)$.

⚠ Attention

C'est la dimension de l'espace de départ qui intervient dans le théorème du rang.

4 Dualité

Définition 8 Une application linéaire de E dans \mathbb{K} est appelée forme linéaire. L'ensemble des formes linéaires $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est appelé dual de E , noté E^* .

Exemple 20 L'application $\mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}, P \mapsto P'(0)$ est une forme linéaire. L'application trace $M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, A \mapsto \sum_{i=1}^n [A]_{i,i}$ est une forme linéaire.

📖 Remarque

La notation \mathbb{K}^* est ambiguë. Dans le cadre des espaces vectoriels, on note $E \setminus \{0\}$ pour désigner l'ensemble des vecteurs non nuls.

Propriété 25 Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E . Soit $i \in I$. L'application $E \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto \lambda_i$ avec $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$ l'unique décomposition de x dans la base $(e_i)_{i \in I}$ est une forme linéaire, appelée i -ième forme coordonnée relativement à cette base, notée e_i^* .

Démonstration. Il s'agit de l'application linéaire uniquement déterminée par la donnée de la base $(e_j)_{j \in I}$ et de la famille $(\delta_{i,j})_{j \in I}$.

📖 Remarque

On peut écrire la décomposition d'un vecteur x de E dans une base $(e_i)_{i \in I}$ sous la forme $x = \sum_{i \in I} e_i^*(x) e_i$. Il est pratique de retenir la définition des formes coordonnées via $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in I^2$.

Théorème 11 Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E . Alors la famille $(e_i^*)_{i \in I}$ est une famille libre de E .

Démonstration. Soit $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ une famille de scalaires à support fini telle que $\sum_{i \in I} \lambda_i e_i^* = 0$. Soit $j \in I$. On évalue la forme linéaire précédente en e_j , ce qui entraîne $0 = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i^*(e_j) = \sum_{i \in I} \lambda_i \delta_{i,j} = \lambda_j$, et ce pour tout $j \in I$. Par conséquent, la famille de scalaires est nulle, ce qui prouve la liberté de la famille.

Théorème 12 On suppose E de dimension finie n , doté d'une base (e_1, \dots, e_n) . Alors la famille (e_1^*, \dots, e_n^*) est une base de E^* appelée base duale de la base (e_1, \dots, e_n) .

Démonstration. La liberté a déjà été prouvée dans l'énoncé précédent. Soit $\varphi \in E^*$. Pour tout i dans $[[1, n]]$, on pose $\lambda_i = \varphi(e_i)$. On vérifie ensuite que $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*$ en les évaluant sur la base (e_1, \dots, e_n) . Soit $j \in [[1, n]]$.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^* \right)(e_j) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*(e_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{i,j} \\ &= \lambda_j \\ &= \varphi(e_j) \end{aligned}$$

Comme ces applications linéaires coïncident sur une base, elles sont égales, ce qui prouve que la famille est génératrice.

⚠ Attention

C'est faux pour une base infinie, la famille des formes coordonnées n'est pas génératrice. La forme $\varphi : \sum_{i \in I} x_i e_i \mapsto \sum_{i \in I} x_i$ ne peut s'exprimer comme une somme finie des formes coordonnées.

Exemple 21 Décrivons le dual de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Je prétends que pour toute forme linéaire φ de E , il existe une matrice B de E telle que

$$\forall A \in E, \varphi(A) = \text{tr}(BA)$$

Vérifions tout d'abord que ces applications sont bien des formes linéaires. Soit $B \in E$. Par bilinéarité du produit matriciel,

$$\forall (A_1, A_2) \in E^2, \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2, B(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) = \lambda_1 B A_1 + \lambda_2 B A_2$$

La linéarité de la trace entraîne alors

$$\forall (A_1, A_2) \in E^2, \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2, \text{tr}(B(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)) = \lambda_1 \text{tr}(B A_1) + \lambda_2 \text{tr}(B A_2)$$

Ainsi, $A \mapsto \text{tr}(BA)$ est bien linéaire à valeurs dans \mathbb{K} .

Réciproquement, soit φ une forme linéaire de E . On évalue φ sur la base canonique de E , notée $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ et on note

$$\forall (i, j) \in [[1, n]]^2, b_{i,j} = \varphi(E_{j,i})$$

Notons $B = (b_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in E$. Soit $(i, j) \in [[1, n]]^2$.

$$\begin{aligned} \text{tr}(B E_{i,j}) &= \text{tr} \left(\left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{k,l} E_{k,l} \right) E_{i,j} \right) \\ &= \text{tr} \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{k,l} E_{k,l} E_{i,j} \right) \\ &= \text{tr} \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{k,l} \delta_{l,i} E_{k,j} \right) \\ &= \text{tr} \left(\sum_{k=1}^n b_{k,i} E_{k,j} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n b_{k,i} \text{tr}(E_{k,j}) \\ &= \sum_{k=1}^n b_{k,i} \delta_{k,j} \\ &= b_{j,i} \\ &= \varphi(E_{i,j}) \end{aligned}$$

Par conséquent, les formes linéaires φ et $A \mapsto \text{tr}(BA)$ coïncident sur la base canonique de E , donc sont égales.

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décrire le dual de \mathbb{K}^n .

Définition 9 Soit $H \subset E$. On dit que H est un hyperplan de E lorsqu'il existe une forme linéaire **non nulle** φ telle que $H = \ker \varphi$.

Définition 10 On suppose E de dimension finie, muni d'une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$. Soit H un hyperplan et φ une forme linéaire non nulle telle que $H = \ker \varphi$. On appelle **équation** de H dans la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ l'écriture

$$x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) = 0$$

C'est une façon d'écrire

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{i=1}^n x_i e_i \in H \iff \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i) = 0$$

Propriété 26 Soit H un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H , alors $E = H \oplus D$.

Démonstration. Soit $a \in D \setminus H$ et $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$. Remarquons tout d'abord que a est non nul, puisque n'appartenant pas à H , donc que a est libre dans D , donc une base de D (car D de dimension 1). Soit $x \in E$, cherchons une décomposition de x dans $H + D$ par analyse-synthèse.

Analyse : soit $(y, z) \in H \times D$ tel que $x = y + z$. Alors $\varphi(x) = \varphi(y) + \varphi(z) = \varphi(z)$. Or il existe un unique scalaire λ tel que $z = \lambda a$ puisque $z \in D$. On en déduit que $\varphi(z) = \lambda \varphi(a)$. De plus, $\varphi(a) \neq 0$ puisque a n'appartient pas à H , ainsi $\lambda = \varphi(z)/\varphi(a) = \varphi(x)/\varphi(a)$ et

$$z = \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a \quad \text{et} \quad y = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a$$

Cette phase d'analyse prouve l'unicité.

Synthèse : soit $x \in E$. On pose $z = \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a$ et $y = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a$ puisque $\varphi(a) \neq 0$ comme vu précédemment. Il est clair que $y + z = x$. En outre, $z \in \text{Vect}(a) = D$. Enfin, $\varphi(y) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \varphi(a) = 0$, donc $y \in H$.

Propriété 27 Soit D une droite de E , et H un supplémentaire de D dans E . Alors H est un hyperplan.

Démonstration. Soit a une base de D (il revient au même de prendre un élément non nul de D). On note $a^* \in D^*$ la forme linéaire correspondante. Si l'on doit la détailler, on peut écrire pour tout x de D , $x = a^*(x)a$. On note de plus (abusivement) $0 : H \rightarrow \mathbb{R}, h \mapsto 0$ la forme linéaire nulle de H . Comme $H \oplus D = E$, on peut définir la forme linéaire $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ via $\forall x \in D, \varphi(x) = a^*(x)$ et $\forall x \in H, \varphi(x) = 0$.

- On remarque que $\varphi(a) = 1$, donc que φ est une forme linéaire non nulle.
- Soit $x \in \ker(\varphi)$, alors on note $x = d + h$ son unique décomposition dans $D \oplus H$. Alors par linéarité de φ , $0 = \varphi(x) = \varphi(d) + \varphi(h) = \varphi(d)$. Par conséquent, $d = \varphi(d)a = 0$ et $x = h$ appartient à H , donc $\ker(\varphi) \subset H$. Soit $x \in H$, alors $\varphi(x) = 0$ par définition de φ , donc $H \subset \ker(\varphi)$.

Conclusion, H est le noyau d'une forme linéaire non nulle, donc un hyperplan.

Propriété 28 On suppose E de dimension finie. Alors H sev de E est un hyperplan ssi $\dim(H) = \dim(E) - 1$.

Démonstration. Si H est de dimension $\dim(E) - 1$, notons (e_1, \dots, e_{n-1}) une base de H que l'on complète en base (e_1, \dots, e_n) de E . On reconnaît alors $H = \ker(e_n^*)$. Réciproquement, si H est un hyperplan, on note φ une forme linéaire non nulle telle que $H = \ker(\varphi)$. Comme E est de dimension finie, on peut appliquer le théorème du rang, qui donne $\dim(E) = \dim(\ker(\varphi)) + \text{rg}(\varphi) = \dim(H) + \text{rg}(\varphi)$. Or comme φ est non nulle, il existe un vecteur x dans E telle que $\varphi(x) \neq 0$. Par conséquent, pour tout λ dans \mathbb{K} , $\varphi(\frac{\lambda}{\varphi(x)} x) = \lambda$, donc φ est surjective. En conclusion, $\dim(E) = \dim(H) + 1$.

Propriété 29 Soit H un hyperplan et φ une forme linéaire non nulle telle que $\ker \varphi = H$. Soit $\psi \in E^*$. Alors $\ker \psi = H \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \psi = \lambda \varphi$.

Démonstration. Sens direct : supposons $\ker \varphi = \ker \psi$. Comme φ est non nulle, il existe un vecteur a dans E tel que $\varphi(a) \neq 0$. Comme $a \notin \ker(\varphi)$, $a \notin \ker(\psi)$, donc $\psi(a) \neq 0$. Posons alors $\lambda = \psi(a)/\varphi(a)$, ce scalaire est non nul. Vérifions que $\psi = \lambda \varphi$. Pour cela on remarque que $D = \text{Vect}(a)$ n'est pas incluse dans H , donc supplémentaire avec H . Comme ψ et $\lambda \varphi$ sont linéaires, il suffit de vérifier qu'elles sont égales sur D , puis sur H . Comme a est une base de D , et $\psi(a) = \lambda \varphi(a)$, φ et ψ coïncident sur D . D'autre part, les restrictions de ψ et φ à H sont toutes deux nulles, donc coïncident. Ainsi, $\psi = \lambda \varphi$.

Sens indirect : supposons qu'il existe un scalaire non nul λ tel que $\psi = \lambda \varphi$. Alors $\ker(\varphi) \subset \ker(\psi)$. De plus, $\varphi = \frac{1}{\lambda} \psi$, donc $\ker(\psi) \subset \ker(\varphi)$. Ainsi, $\ker(\psi) = \ker(\varphi) = H$.

Propriété 30 On suppose E de dimension finie n . Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Alors l'intersection de m hyperplans est un sev de E de dimension au moins $n - m$. Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n - m$ est l'intersection de m hyperplans.

Démonstration. Notons H_1, \dots, H_m une famille de m hyperplans de E . $H_1 + H_2$ est un sev de E , de dimension n , donc $\dim(H_1 + H_2) \leq n$. Par la formule de Grassmann, on en déduit $\dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 \cap H_2) \leq n$, soit $\dim(H_1 \cap H_2) \geq 2n - 2 - n = n - 2$. Ceci prouve le résultat pour $m = 2$, au rang $m = 1$, il est évident puisque $\dim(H_1) = m - 1$. Supposons que $\dim(H_1 \cap \dots \cap H_{m-1}) \geq n - (m - 1)$, Notons $F = H_1 \cap \dots \cap H_{m-1}$, alors $\dim(F + H_m) \leq n$, donc $\dim(F \cap H_m) \geq \dim(F) + \dim(H_m) - n \geq n - m + 1 + n - 1 - n = n - m$.

Réciproquement, soit F un sev de E de dimension $n - m$. On note (e_1, \dots, e_{n-m}) une base de F que l'on complète en (e_1, \dots, e_n) une base de E . On note alors pour tout i dans $[[n - m + 1, n]]$, $H_i = \ker(e_i^*)$. Montrons que $F = \bigcap_{i=n-m+1}^n H_i$. Soit $x \in F$, alors il est CL des $(e_i)_{1 \leq i \leq n-m}$.

$$\exists (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n-m} \in \mathbb{K}^{n-m}, x = \sum_{i=1}^{n-m} \lambda_i e_i$$

Soit $k \in [[n - m + 1, n]]$, la linéarité de la k -ième forme linéaire e_k^* entraîne

$$e_k^*(x) = \sum_{i=1}^{n-m} \lambda_i e_k^*(e_i) = \sum_{i=1}^{n-m} \lambda_i \delta_{i,k} = 0$$

puisque $\forall i \in [[1, n - m]]$, $i < k$, ce qui prouve $x \in H_k$. Ainsi, $F \subset \bigcap_{i=n-m+1}^n H_i$. Réciproquement, soit $x \in \bigcap_{i=n-m+1}^n H_i$. Comme (e_1, \dots, e_n) est une base de E ,

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$$

Soit $k \in [[n - m + 1, n]]$, d'après la définition de la base duale, $\lambda_k = e_k^*(x)$. Comme $x \in H_k = \ker(e_k^*)$, $\lambda_k = 0$. Mais alors

$$x = \sum_{i=1}^{n-m} \lambda_i e_i \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-m}) = F$$

Exemple 22 Soit $D = \{(t, -2t) | t \in \mathbb{R}\}$. Démontrer que D est un sev de \mathbb{R}^2 puis le décrire via une équation d'hyperplan ou une forme linéaire non nulle. Soit $P = \{(u + v, u - v, 2u + 3v) | (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer qu'il s'agit d'un hyperplan de \mathbb{R}^3 . Déterminer une forme linéaire φ non nulle telle que $P = \ker(\varphi)$. Soit $D' = \{(t, -t, 2t) | t \in \mathbb{R}\}$ décrire D' comme une intersection de deux hyperplans de \mathbb{R}^3 .

5 Géométrie affine

On ne traite pas le cas général car la notion d'espace affine nécessite trop de formalisme supplémentaire (notions d'actions de groupes libres et transitives).

Définition 11 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On appelle sous-espace affine de E , toute partie \mathcal{F} de E telle qu'il existe un élément x de E et un sous-espace vectoriel F de E vérifiant

$$\mathcal{F} = \{x + v | v \in F\} = x + F$$

Notation

On change légèrement les notations pour montrer qu'on raisonne sur une structure différente. Les éléments d'un sous-espace affine sont appelés points, notés avec des lettres latines majuscule, A, B, C , etc. Les éléments du sous-espace vectoriel F sous-jacent sont appelés vecteurs et notés avec des flèches \vec{u}, \vec{v} , etc.

Propriété 31 Soit \mathcal{F} un sous-espace affine de E . Alors il existe un unique sous-espace vectoriel F de E tel que

$$\forall A \in \mathcal{F}, \mathcal{F} = A + F$$

Ce sev de E est appelé direction de \mathcal{F} , noté $\vec{\mathcal{F}}$.

Démonstration. Soit A un point de \mathcal{F} , F et G deux sev de E tels que $\mathcal{F} = A + F = A + G$. Soit $\vec{u} \in F$, alors $A + \vec{u} \in \mathcal{F} = A + G$, donc il existe \vec{v} dans G tel que $A + \vec{u} = A + \vec{v}$. On en déduit que $\vec{u} = \vec{v} \in G$. Ainsi, $F \subset G$. On procède de même pour l'autre inclusion et $F = G$. Ceci prouve l'unicité.

Soit B un point de \mathcal{F} , alors il existe \vec{u} dans $\vec{\mathcal{F}}$ tel que $B = A + \vec{u}$. Mais alors pour tout C de $B + \vec{\mathcal{F}}$, il existe \vec{v} dans $\vec{\mathcal{F}}$ tel que $C = B + \vec{v}$. On en déduit $C = A + \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} + \vec{v} \in \vec{\mathcal{F}}$ puisque $\vec{\mathcal{F}}$ est un sev de E . Ainsi, $B + \vec{\mathcal{F}} \subset A + \vec{\mathcal{F}}$. On montre de même que $A + \vec{\mathcal{F}} \subset B + \vec{\mathcal{F}}$, d'où l'égalité $\forall B \in \mathcal{F}, \mathcal{F} = B + \vec{\mathcal{F}}$.

Exemple 23 *Droites affines, plans affines, hyperplans affines.* $\{(1+t, 2-3t, -2t) | t \in \mathbb{R}\}$ est une droite affine de \mathbb{R}^3 de direction $\text{Vect}(1, -3, -2)$ passant par $A = (1, 2, 0)$. L'ensemble $\{P \in \mathbb{K}[X] | P + P' = X\}$ est un hyperplan affine de $\mathbb{K}[X]$ de direction $\ker(\text{id} + D)$ passant par $A = X - 1$.

Propriété 32 Soit \mathcal{F} un sous-espace affine de E . Alors

$$\vec{\mathcal{F}} = \{B - A | (A, B) \in \mathcal{F}^2\}$$

Démonstration. Soit C un point de \mathcal{F} . Alors $\mathcal{F} = C + \vec{\mathcal{F}}$. Soit $(A, B) \in \mathcal{F}^2$. Il existe deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} dans $\vec{\mathcal{F}}$ tels que $A = C + \vec{u}$ et $B = C + \vec{v}$. Alors $B - A = \vec{v} - \vec{u} \in \vec{\mathcal{F}}$ puisque ce dernier est un sev de E . Réciproquement, soit $\vec{v} \in \vec{\mathcal{F}}$, alors $\vec{v} + C \in \mathcal{F}$. Donc il existe un point A de \mathcal{F} tel que $\vec{v} = A - C$.

Notation

On note parfois (souvent (quand ça nous arrange)) le vecteur $B - A$ sous la forme \overrightarrow{AB} .

Propriété 33 Soit $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ une famille de sea de E . Alors $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ est soit vide, soit un sea de E , de direction $\bigcap_{i \in I} \vec{\mathcal{F}}_i$.

Démonstration. Notons $\mathcal{F} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$. S'il est non vide, on dispose de $A \in \mathcal{F}$. On sait déjà que $\bigcap_{i \in I} \vec{\mathcal{F}}_i$ est un sev de E comme intersection de sev de E . On le note F . Montrons à présent que $\mathcal{F} = A + F$. On a vu précédemment que la direction de \mathcal{F} est l'ensemble des différences de points \mathcal{F} , ce qui donne le résultat attendu.

Remarque

Comme on dispose de la stabilité par intersection quelconque, on peut définir la notion de sous-espace affine engendré par une partie.

Propriété 34 Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $a \in F$. L'ensemble

$$u^{-1}(\{a\}) = \{x \in E | u(x) = a\}$$

est soit vide, soit un sous-espace affine de E , de direction $\ker u$.

Démonstration. Premier cas : $a \notin \text{Im}(u)$. Alors, cet ensemble est vide.

Deuxième cas : $a \in \text{Im}(u)$. On note $b \in E$ tel que $u(b) = a$. Montrons que alors que $u^{-1}(\{a\}) = b + \ker(u)$. Soit $x \in E$, on a les équivalences

$$x \in u^{-1}(\{a\}) \iff u(x) = a \iff u(x) = u(b) \iff u(x - b) = 0 \iff x - b \in \ker(u) \iff x \in b + \ker(u)$$

Exemple 24 — Dans $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on note $S : E \rightarrow E, (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ l'application linéaire de décalage (S pour « shift » en anglais) des suites numériques. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ et $u = S^2 + aS + b\text{id}_E \in \mathcal{L}(E)$. L'ensemble

$$\{u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = c\}$$

est l'ensemble $u^{-1}(\{c\})$ en identifiant le scalaire c et la suite constante égale à c . Il est vide ou un sous-espace affine de direction $\ker(v)$ l'ensemble des solutions homogènes.

— Dans $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on note D l'opérateur de dérivation. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $v = D^2 + aD + b\text{id}_E$. Soit $g \in E$, l'ensemble

$$\{f \in E | \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + af'(x) + bf(x) = g(x)\}$$

est l'ensemble $v^{-1}(\{g\})$, soit vide soit un sous-espace affine de direction $\ker(v)$, l'ensemble des solutions homogènes.

Définition 12 On suppose que E est de dimension finie de base (e_1, \dots, e_n) . Soit \mathcal{H} un hyperplan affine (i.e un sous-espace affine dont la direction est un hyperplan de E) et $A \in \mathcal{H}$ telle que $A = \sum_{i=1}^n a_i e_i$, et φ une forme linéaire non nulle telle que $\vec{\mathcal{H}} = \ker(\varphi)$. L'écriture

$$x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) = a_1 \varphi(e_1) + \dots + a_n \varphi(e_n)$$

est appelée équation affine de l'hyperplan affine \mathcal{H} . Elle traduit l'équivalence

$$\forall x \in E, x \in \mathcal{H} \iff \varphi(x) = \varphi(A)$$

à l'aide de la décomposition dans la base (e_1, \dots, e_n) .