IPESUP 2023/2024

Colle 7 MPSI/MP2I Jeudi 30 novembre 2023

⋆⋆⋆

Planche 1

⋆⋆⋆

1. Théorème de Bolzano-Weierstrass. Énoncé et démonstration. Démonstration dans le cas réel.
2. La suite $\left(\sqrt{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet -elle une limite ?
3. Soit $(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $a\leqslant b$. On définit par récurrence deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ via

$$a_0=a,\quad b_0=b\quad \text{et}\quad \forall n\in\mathbb{N}, a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n},\quad b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$$

Montrer que cette définition est légitime puis que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

⋆⋆⋆

Planche 2

⋆⋆⋆

1. Théorème de convergence monotone. Énoncé et démonstration.
2. La suite $\left(e^{e^{e^{-n}}}-e\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet-elle une limite ?
3. Soit $\theta\in\mathbb{R}2\backslash\pi\mathbb{Z}$. Montrer que la suite $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

⋆⋆⋆

Planche 3

⋆⋆⋆

1. Théorème d'encadrement. Énoncé et démonstration.
2. On définit la suite u via $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\cos(u_n)$. Étudier la suite u.
3. Soit a une suite réelle positive bornée et u la suite définie par récurrence via

$$u_0>0\quad \text{et}\quad \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\frac{1}{u_n+a_n+1}$$

Montrer que u converge si et seulement si a converge.

⋆⋆⋆

Bonus

⋆⋆⋆

Étude de u définie par $u_0>0, \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\dfrac{1}{2-\sqrt{u_n}}$.