Exercice 1 : automorphismes du Vierergruppe.

1. L'énoncé admet que la loi $\star$ est associative. Pour prouver que $(V,\star)$ est un groupe, il nous suffit de prouver l'existence d'un neutre et l'inversibilité de tous les éléments de V pour la loi $\star$.
   - D'après la table de Cayley de V, l'élément e de V vérifie
   $$\forall x \in V, x \star e = e \star x = x$$
   Par conséquent, $(V,\star)$ est unifère.
   - En lisant la table de Cayley, on constate que
   $$e \star e = e, a \star a = e, b \star b = e, c \star c = e$$
   Par conséquent, tout élément de V possède un inverse, à savoir lui-même.

   En conclusion, $(V,\star)$ est un groupe, de neutre e.
2. Il s'agit de la loi de composition des applications.
3. Comme f est un automorphisme de V, f est bijective et $f(e) = e$. Comme f est en particulier injective et $\forall x \in X, x \neq e$, alors $\forall x \in X, f(x) \neq f(e) = e$, i.e $\forall x \in X, f(x) \in X$. Ainsi, l'application restreinte $f_{|X}$ est bien à valeurs dans X. De plus, elle est toujours injective puisque f l'est. Comme X est de cardinal fini égal à 3, on en déduit que $\tilde{f} = f_{|X}^{|X}$ est une bijection.
4. Soit $(x,y) \in V^2$. Calculons $g(x \star y)$ en distinguant différents cas.
   - $x = y$. Alors $g(x \star y) = g(x^2) = g(e) = e = g(x)^2 = g(x) \star g(y)$.
   - $x \neq y$.
     - $x = e$ et $y \in X$. Alors $g(e \star y) = g(y) = e \star g(y) = g(e) \star g(y)$.
     - $x \in X$ et $y = e$ se traite de même par commutativité de $\star$.
     - $x \in X$ et $y \in X$. D'après la table de Cayley de V, $X = \{x, y, x \star y\}$ puisque x et y sont différents. Mais alors par injectivité de σ, $X = \{\sigma(x), \sigma(y), \sigma(x) \star \sigma(y)\}$. Or par surjectivité de σ, $X = \sigma(X) = \{\sigma(x), \sigma(y), \sigma(x \star y)\}$. On en déduit $\sigma(x \star y) = \sigma(x) \star \sigma(y)$, i.e $g(x \star y) = g(x) \star g(y)$.

   Conclusion, $g(x \star y) = g(x) \star g(y)$, et ce pour tout $(x,y) \in V^2$. Donc g est un morphisme de groupes de V dans V. De plus, il est clairement injectif puisque σ l'est et $X \cap \{e\} = \emptyset$. Comme V est de cardinal fini, g est bijectif.
5. Notons $\Phi : \mathrm{Aut}(V) \to \mathfrak{S}(X), f \mapsto \tilde{f}$ l'application construite en question 3, et $\Psi : \mathfrak{S}(X) \to \mathrm{Aut}(V), \sigma \mapsto g$ l'application construite en question 4. Il est clair que $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}_{\mathfrak{S}(X)}$ et $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{\mathrm{Aut}(V)}$. Par conséquent, Φ et Ψ sont bijectives. Soit à présent g, h deux automorphismes de V. On a $(h \circ g)_{|X}^{|X} = h_{|X}^{|X} \circ g_{|X}^{|X}$, soit encore $\Phi(h \circ g) = \Phi(h) \circ \Phi(g)$. Ainsi, Φ est un morphisme de groupes bijectif de $\mathrm{Aut}(V)$ dans $\mathfrak{S}(X)$, donc ces deux groupes sont isomorphes.
6. On sait que le neutre de G commute avec tout élément de G, donc $Z(G)$ n'est pas vide. Soit $(x,y) \in Z(G)^2$ et $z \in G$. Alors
   $$(xy)z = x(yz) = x(zy) = (xz)y = (zx)y = z(xy)$$
   et ce pour tout z dans G. Donc $xy \in Z(G)$. Ainsi, $Z(G)$ est stable par la loi de G. D'autre part, en multipliant $xz = zx$ par x^{-1} à gauche, on obtient $z = x^{-1}zx$. En multipliant ensuite à droite par x, on déduit $zx^{-1} = x^{-1}z$, et ce pour tout z dans G, donc $x^{-1} \in Z(G)$. Ainsi, $Z(G)$ est stable par inverse. Donc $Z(G)$ est un sous-groupe de G d'après la première caractérisation des sous-groupes.
7. Notons $\varphi : G \to H$ un isomorphisme de groupes de G vers H. Soit $x \in Z(G)$. Montrons que $\varphi(x) \in Z(H)$. Soit $h \in H$. Notons $y = \varphi^{-1}(h)$. Alors
   $$\varphi(x)h = \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy) = \varphi(yx) = \varphi(y)\varphi(x) = h\varphi(x)$$
   Par conséquent, $\varphi(x) \in Z(H)$ et ce pour tout x dans $Z(G)$. Ainsi, $\varphi(Z(G)) \subset Z(H)$. On en déduit $Z(G) \subset \varphi^{-1}(Z(H))$. Or en appliquant ce qui précède à l'aide de l'isomorphisme $\varphi^{-1} : H \to G$, on a également $\varphi^{-1}(Z(H)) \subset Z(G)$. En conclusion, $\varphi^{-1}(Z(H)) = Z(G)$, donc ces deux groupes sont isomorphes.

8. Commençons par montrer $Z(\mathfrak{S}(X)) = \{\mathrm{Id}_X\}$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(X)$ tel que $\sigma \neq \mathrm{Id}_X$. Alors on dispose de $x \in X$ tel que $\sigma(x) \neq x$. On note alors y l'unique élément de $X \backslash \{x, \sigma(x)\}$, puis $\tau : X \to X, x \mapsto x, \sigma(x) \mapsto y, y \mapsto \sigma(x)$. L'application τ est bien une application injective de X dans X de cardinal fini 3, donc bijective. De plus, $(\tau \circ \sigma)(x) = \tau(\sigma(x)) = y$, tandis que $(\sigma \circ \tau)(x) = \sigma(x) \neq y$. Par conséquent, $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$, donc $\sigma \notin Z(\mathfrak{S}(X))$. Comme le neutre est toujours dans le centre, on en déduit que $Z(\mathfrak{S}(X)) = \{\mathrm{Id}_X\}$. D'après les questions 5 et 7, on en déduit que $Z(\mathrm{Aut}(V))$ est isomorphe à $\{\mathrm{Id}_X\}$, donc réduit à $\{\mathrm{Id}_V\}$.

Exercice 2 : étude de deux suites.

1. (a) La fonction f est dérivable comme produit des fonctions dérivables. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3e^{-x^2} - 6x^2 e^{-x^2} = 3e^{-x^2}\left(1 - 2x^2\right)$$

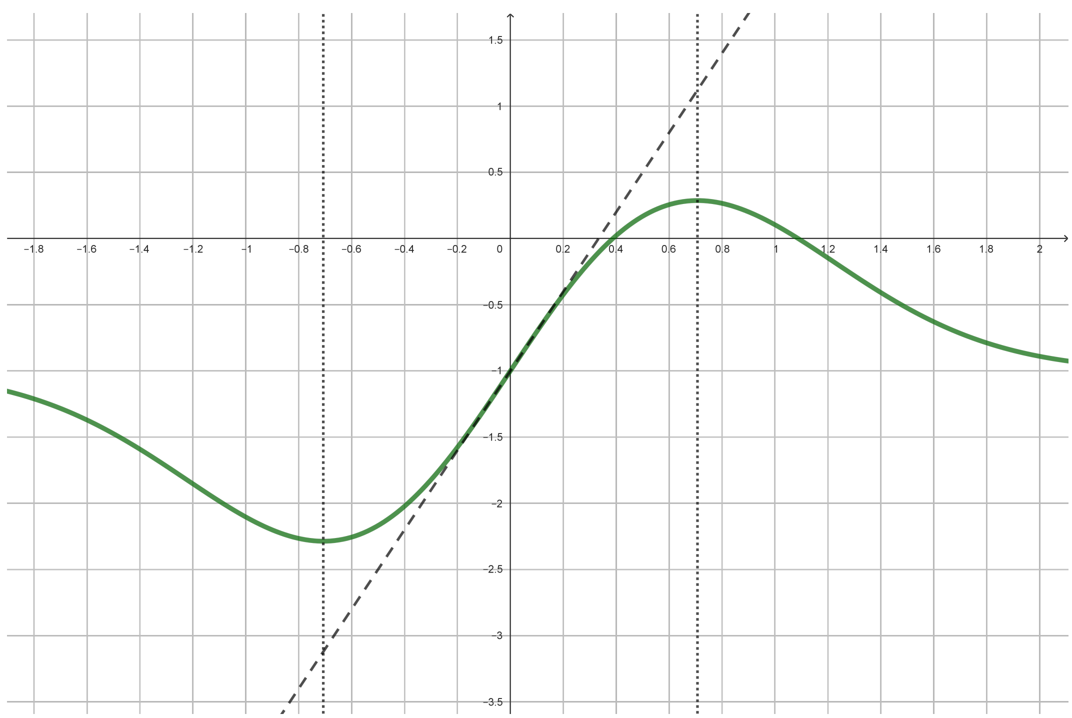
On en déduit que f' est négative sur $]-\infty, -1/\sqrt{2}[$, positive sur $]-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}[$, négative sur $]1/\sqrt{2}, +\infty[$, donc que f est décroissante sur $]-\infty, -1/\sqrt{2}[$, croissante sur $]-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}[$, décroissante sur $]1/\sqrt{2}, +\infty[$. D'après les croissances comparées, $xe^{-x^2} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$, donc $f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} -1$.

(b) L'expression de f' précédente indique que f' est dérivable et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 3e^{-x^2}\left(-4x - 2x(1 - 2x^2)\right) = -6xe^{-x^2}(3 - 2x^2)$$

En particulier, $f''(0) = 0$.

(c) On note $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - f(0) - f'(0)x = f(x) + 1 - 3x = 3x(e^{-x^2} - 1)$. Or $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x^2} \leq -1$, donc pour tout réel x, $g(x)$ est du signe de $-x$. Ainsi, g est négative sur $\mathbb{R}_+$ et positive sur $\mathbb{R}_-$. Ainsi, le graphe de f est au-dessus de sa tangente en 0 sur $\mathbb{R}_-$ et en-dessous de sa tangente en 0 sur $\mathbb{R}_+$. On retrouve qu'il y a un point d'inflexion en 0, ce qui est cohérent avec $f''(0) = 0$.



2. (a) $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = \dfrac{3}{e} - 1 = \dfrac{3 - e}{e} > 0$ d'après le rappel de l'énoncé.

(b) La fonction f_n est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = 3nx^{n-1}e^{-x^2} + 3x^n(-2x)e^{-x^2} = 3e^{-x^2}x^{n-1}(n - 2x^2)$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors $f_n'(x)$ est du signe de $n-2x^2$. Ainsi, $f_n'(x)>0 \iff n-2x^2>0 \iff x<\sqrt{n/2}$ puisque $x>0$. On en déduit que f_n est strictement croissante sur $[0,\sqrt{n/2}]$ et strictement décroissante sur $[\sqrt{n/2},+\infty[$. De plus, par croissances comparées, $f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -1$.

Comme $n \geq 2$, $\sqrt{n/2} \geq 1$, donc f_n est strictement croissante sur $[0,1]$. Comme est elle est continue, le théorème de la bijection nous indique que f_n induit une bijection de $[0,1[$ dans $[f_n(0),f_n(1)[=[-1,\dfrac{3-e}{e}[$. Comme $-1 \leq 0 < \dfrac{3-e}{e}$, il existe un unique antécédent de 0 par f_n dans $[0,1[$, que nous notons u_n. De même, f_n induit une bijection de $[\sqrt{n/2},+\infty[$ dans $]-1,f_n(\sqrt{n/2})]$, puisque strictement décroissante et continue. Or $f_n(\sqrt{n/2}) \geq f_n(1)>0$, donc il existe un unique antécédent de 0 par f_n dans $]\sqrt{n/2},+\infty[$, que nous notons v_n. Cet antécédent appartient a fortiori à $]1,+\infty[$.

3. D'après la question précédente, $\forall n \geq 2, v_n \geq \sqrt{n/2}$. Or $\sqrt{n/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. On en déduit par théorème de comparaison, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

4. (a) Soit $n \geq 2$. L'égalité $f_n(u_n)=0$ entraîne $3u_n^n e^{-u_n^2}-1=0$. Or $u_n>0$ puisque $f_n(0)<0$, on en déduit $\exp(-u_n^2)=\dfrac{1}{3u_n^n}$.

   (b) Soit $n \geq 2$. Comme $u_n<1$, on a
$$f_{n+1}(u_n)=3u_n^{n+1}e^{-u_n^2}-1=3u_n^{n+1}\frac{1}{3u_n^n}-1=u_n-1<0$$

   (c) Soit $n \geq 2$. D'après ce qui précède, $f_{n+1}(u_n)<0=f_{n+1}(u_{n+1})$. Or f_{n+1} est strictement croissante sur $[0,1[$, donc la réciproque induite de $[0,1[$ dans $[-1,(3-e)/e[$ est strictement croissante, i.e $u_n<u_{n+1}$. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.

   (d) On sait que $\forall n \geq 2, u_n<1$. Donc, la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est majorée. D'après le théorème de la limite monotone, cette suite est convergente.

   (e) Soit $n \geq 2$. Alors $u_n>0$, donc $g_n(u_n)=\ln\left(3u_n^n e^{-u_n^2}\right)=\ln(1)=0$. On en déduit $\ln(u_n)=\dfrac{u_n^2-\ln(3)}{n}$. Le numérateur tend vers $\ell^2-\ln(3)$ par opérations sur les limites finies, donc $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On en déduit via les limites de l'exponentielle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Ainsi, $\ell=1$.

Exercice 3 : des suites récurrentes.

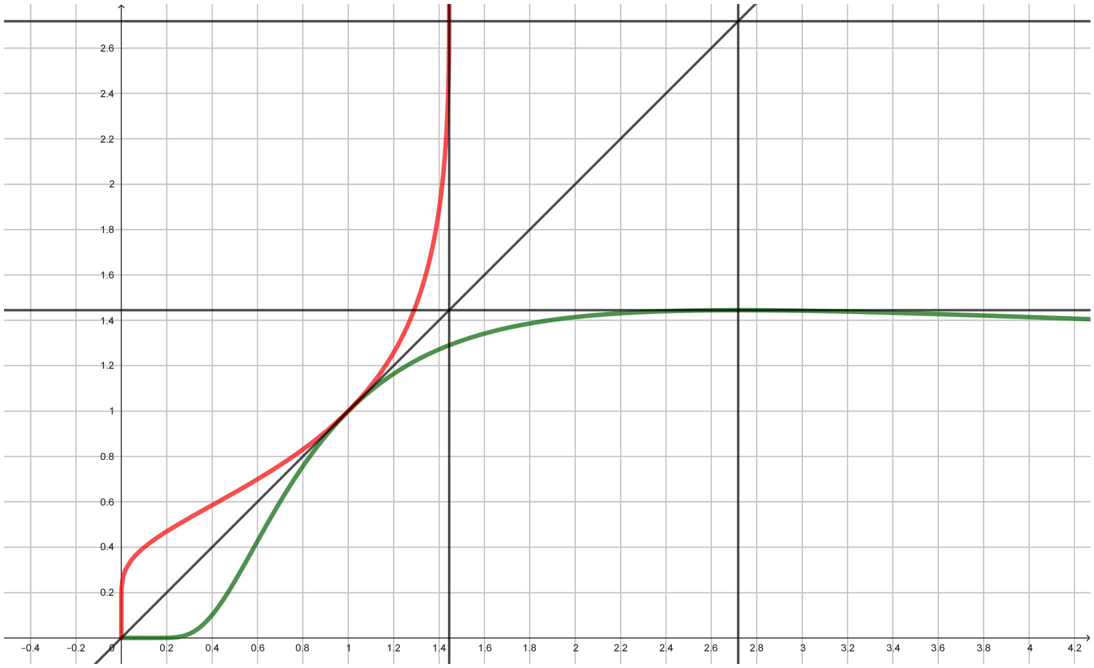
1. (a) Pour tout réel $x>0$, $f(x)=\exp\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$, donc f est dérivable. De plus,
$$\forall x>0, f'(x)=\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\ln(x)}{x^2}\right)f(x)=(1-\ln(x))\frac{f(x)}{x^2}.$$
   On en déduit que f' est positive sur $]0,e]$ et négative sur $[e,+\infty[$, donc que f est croissante sur $]0,e]$ et décroissante sur $[e,+\infty[$. On en déduit que f atteint un maximum global en e, égal à $e^{1/e}$. De plus, par croissances comparées, $\dfrac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, d'après les limites de l'exponentielle, on en déduit par composition des limites que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. En 0^+, il n'y pas de formes indéterminées, $\dfrac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to0^+]{} -\infty$, d'où $f(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} 0$.

   (b) D'après l'étude précédente, f admet une limite finie égale à 0 en 0. On peut ainsi la prolonger par continuité en 0 par $f(0)=0$.

   (c) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors le taux d'accroissement de f en 0 vérifie $\tau_0(f)(x)=\dfrac{x^{1/x}-0}{x-0}=x^{1/x-1}=\exp\left[\ln(x)\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\right]$. Pas de formes indéterminées ici, $\ln(x)\left(\dfrac{1}{x}-1\right) \xrightarrow[x\to+0^+]{} -\infty$, donc $\tau_0(f)(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} 0$. On en déduit que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=0$.
   On peut également passer par le théorème de la limite de la dérivée, l'étude de la limite à étudier n'est pas plus simple que celle du taux d'accroissement.

(d) L'étude des variations montre que f est strictement croissante sur $[0, e]$. Comme elle y est continue, elle induit donc une bijection de $[0, e]$ sur $[f(0), f(e)]$, i.e $[0, e^{1/e}]$.

(e) On sait que la réciproque d'une bijection continue est continue. On sait que la réciproque d'une bijection dérivable est dérivable uniquement aux réels y tels que $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$. D'après l'étude précédente, f' s'annule uniquement en 0 et e, donc f^{-1} est dérivable sur $[f(0), f(e)] \setminus \{f(0), f(e)\}$, i.e $]0, e^{1/e}[$.



2. a) L'application Φ_1 est l'application constante égale à 1. Par conséquent, la suite $(t_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1, donc convergente de limite 1. On en déduit $h(1) = 1$.

   b) L'application Φ_x est continue, donc $\Phi_x(t_n^x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi_x(h(x))$. D'autre part, $t_{n+1}^x \xrightarrow[n\to+\infty]{} h(x)$ comme suite extraite de $(t_n^x)_{n\in\mathbb{N}}$. Par unicité de la limite, $\Phi_x(h(x)) = h(x)$, soit encore $x^{h(x)} = h(x)$. Comme $x > 0$, $x^{h(x)} \neq 0$, donc $h(x) \neq 0$. On peut alors appliquer la puissance $1/h(x)$ à cette égalité, ce qui fournit $x = h(x)^{1/h(x)} = f(h(x))$.

   c) $\ln(x) > 0$, donc $t \mapsto t\ln(x)$ est strictement croissante. Comme l'exponentielle est strictement croissante, on en déduit que Φ_x est strictement croissante.

   d) On remarque que $\Phi_x(t_0^x) = \Phi_x(1) = x^1 = x > 1 = t_0^x$. On en déduit par récurrence, d'après la stricte croissante de Φ_x, $\forall n \in \mathbb{N}, t_n^x < t_{n+1}^x$.

   e) $t_0^x = 1 \leq e$, De plus, $x \leq e^{1/e}$, donc $\ln(x) \leq \dfrac{1}{e}$. On en déduit que pour tout réel t dans $[0, e]$, $t\ln(x) \leq 1$, puis $0 \leq \Phi_x(t) \leq e$. Ainsi, Φ_x stabilise $[0, e]$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, t_n^x \leq e$. (On peut également raisonner par récurrence). Mais alors la suite $(t_n^x)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, croissante d'après la question précédente, donc convergente.

   f) Comme prouvé en question 2.c), cette suite est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, cette suite est convergente ou tend vers $+\infty$. Supposons par l'absurde qu'elle converge. Alors d'après 2.b), sa limite $h(x)$ vérifie $x = f(h(x))$, donc $f(h(x)) > e^{1/e}$. Cependant, d'après les variations de f étudiées en 1), f a pour maximum $e^{1/e}$. Cette absurdité entraîne que la suite $(t_n^x)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

   g) $\ln(x) < \ln(1) = 0$, donc $t \mapsto t\ln(x)$ est strictement décroissante. Comme l'exponentielle est croissante, on en déduit que Φ_x est décroissante. Mais alors $\Phi_x \circ \Phi_x$ est strictement croissante.

   h) $t_1^x = \Phi_x(t_0^x) = \Phi_x(1) = x < 1 = t_0^x$. Comme $\Phi_x \circ \Phi_x$ est strictement croissante, on en déduit par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, t_{2n+1}^x < t_{2n}^x$.

   i) Comme $x \in]0, 1[$, donc $\ln(x)/x \leq 0$. On en déduit $t_2^x = \Phi_x(t_1^x) = \Phi_x(x) = x^x = \exp(\ln(x)/x) \leq \exp(0) = 1 = t_0^x$. Ainsi, $t_2^x \leq t_0^x$, donc la suite $(t_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. La suite $(t_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est de monotonie contraire, i.e croissante.

j) Pour tout t dans $[0,1]$, $0 \leq \Phi_x(t) \leq 1$, donc Φ_x stabilise $[0,1]$. Par conséquent, ces deux suites monotones bornées, donc convergentes. Comme leur itératrice est la fonction continue $\Phi_x \circ \Phi_x$, leur limite est nécessairement un point fixe de $\Phi_x \circ \Phi_x$ dans $[0,1]$.

k) On note $g : [0,1] \to \mathbb{R}, (\Phi_x \circ \Phi_x)(t) - t$. Comme Φ_x est dérivable, et $\forall t \in [0,1], \Phi_x'(t) = \ln(t)\Phi_x(t)$, g est dérivable et

$$\forall t \in [0,1], g'(t) = \ln(x)\Phi_x(t)\ln(x)\Phi_x(\Phi_x(t)) - 1 = \ln(x)^2\Phi_x(t)(\Phi_x \circ \Phi_x)(t) - 1$$

On en déduit que g est deux fois dérivable et que

$$\forall t \in [0,1], g'(t) = \ln(x)^3\Phi_x(t)(\Phi_x \circ \Phi_x)(t)(1 + \ln(x))$$

Comme $x \in [1/e, 1[$, $(1 + \ln(x)) \geq 0$. On en déduit que g'' est négative, donc que g' est décroissante sur $[0,1]$. Or $g'(0) = \ln(x)^2 x - 1$. Or $0 < \ln(x)^2 \leq 1$ et $0 \leq x < 1$, donc $g'(0) < 0$. Ainsi, g' est strictement négative sur $[0,1]$, donc g est strictement décroissante sur $[0,1]$. De plus, $g(0) = x > 0$ et $g(1) = x^x - 1 = \exp(x\ln(x)) - 1 < 0$. Comme g est continue, il existe un unique zéro α de g dans $[0,1]$, i.e un unique point fixe de $\Phi_x \circ \Phi_x$ dans $[0,1]$. D'après la question précédente, les suites $(t^x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t^x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ont alors la même limite. Ainsi, $(t^x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.