*Les calculatrices ne sont pas autorisées.*

*Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.*

*Il est rappelé qu'il est tenu compte dans l'évaluation de la présentation et la rédaction des copies.*

## Exercice 1 : automorphismes du Vierergruppe.

On considère $V$ un ensemble à quatre éléments. On note $V = \{e, a, b, c\}$ la liste de ces quatre éléments. On munit $V$ d'une loi de composition interne $\star$ donnée par la table de Cayley suivante :

| $\star$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $a$ | $a$ | $e$ | $c$ | $b$ |
| $b$ | $b$ | $c$ | $e$ | $a$ |
| $c$ | $c$ | $b$ | $a$ | $e$ |

On admet que cette loi de composition interne est associative. On note de plus $X = \{a, b, c\}$.

1. Démontrer que $(V,\star)$ est un groupe. Préciser en particulier son neutre.
2. Pour quelle loi de composition interne, l'ensemble $\mathrm{Aut}(V)$ des automorphismes de $V$, est-il un groupe ? (On ne demande pas de le démontrer)
3. Soit $f$ un automorphisme de $V$ . Montrer que $f$ induit une bijection $\tilde{f}$ de $X$ dans $X$.
4. Soit $\sigma$ une permutation de $X$. On définit
$$g : V \to V, x \mapsto \begin{cases} \sigma(x) & \text{si } x \in X, \\ e & \text{si } x = e \end{cases}.$$
Montrer que $g$ est un morphisme de groupes de $V$ dans $V$, puis qu'il est bijectif. *Indication : on pourra remarquer que pour tous $x, y$ distincts dans $X$, $X = \{x, y, x \star y\}$.*
5. Démontrer qu'alors $\mathrm{Aut}(V)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}(X)$.
6. Pour tout groupe $G$ noté multiplicativement, on note $Z(G) = \{x \in G | \forall y \in G, xy = yx\}$. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de $G$.
7. Soit $G$ et $H$ deux groupes isomorphes. Montrer que $Z(G)$ et $Z(H)$ sont isomorphes.
8. En déduire que $Z(\mathrm{Aut}(V)) = \{\mathrm{Id}_V\}$.

## Exercice 2 : étude de deux suites.

On rappelle que $e = \exp(1) \in ]2, 3[$.

1. On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 3xe^{-x^2} - 1$.
   (a) Donner les variations de $f$ (intervalles de monotonie, limites)
   (b) Montrer que $f$ est deux fois dérivable et donner une expression de $f''(x)$ pour tout réel $x$. En particulier que vaut $f''(0)$ ?
   (c) Étudier les positions relatives de $f$ et de sa tangente en 0.
2. Pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2, on note $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 3x^n e^{-x^2} - 1$. Soit $n \geq 2$.
   (a) Quel est le signe de $f_n(0)$ ? celui de $f_n(1)$ ?
   (b) Étudier les variations de $f_n$ sur $\mathbb{R}_+$ et les limites de $f_n$ sur cet intervalle. Montrer en particulier qu'il existe un unique couple, noté $(u_n, v_n)$ dans $[0, 1[\times]1, +\infty[$ tel que $f_n(u_n) = 0$ et $f_n(v_n) = 0$.
3. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ admet une limite et la préciser.
4. Étude de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.

(a) Calculer pour tout entier $n \geq 2$, $\exp(-u_n^2)$ en fonction de $u_n^n$.

(b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ pour tout $n \geq 2$.

(c) Déduire de ce qui précède la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.

(d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est convergente. On note $\ell$ sa limite.

(e) Démontrer que $\ell = 1$. *Indication : on pourra introduire* $g_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(3) + n\ln(x) - x^2$.

## Exercice 3 : des suites récurrentes.

1. Étude d'une fonction. On note $f : ]0,+\infty[ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{1/x}$.

   (a) Étudier les variations de $f$, notamment les limites éventuelles de $f$ en 0 et $+\infty$, puis les extrema s'il en existe.

   (b) Montrer qu'on peut prolonger $f$ par continuité en 0. Ce prolongement est encore noté $f$. Préciser la valeur de $f$ en 0.

   (c) La fonction $f$ est -elle dérivable en 0 ?

   (d) Montrer que $f$ induit une bijection de $[0, e]$ sur $[0, e^{1/e}]$.

   (e) La réciproque de cette bijection est-elle continue ? dérivable ?

2. Étude d'une famille de suites. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\Phi_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto x^t$ et on définit une suite $(t_n^x)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence via
$$t_0^x = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, t_{n+1}^x = \Phi_x(t_n^x)$$
   Si cette suite est convergente, on note $h(x)$ sa limite.

   a) Que dire de la convergence de la suite $(t_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ ?

   b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(t_n^x)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Démontrer qu'alors $h(x) = \Phi_x(h(x))$ et en déduire que $f(h(x)) = x$.

   Dans les quatre prochaines questions, on considère $x > 1$.

   c) Montrer que $\Phi_x$ est strictement croissante.

   d) Démontrer qu'alors $\forall n \in \mathbb{N}, t_n^x < t_{n+1}^x$.

   e) Démontrer que si $x \in ]1, e^{1/e}]$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, t_n^x \leq e$. En déduire que la suite $(t_n^x)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

   f) Démontrer que si $x > e^{1/e}$, alors la suite $(t_n^x)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

   Dans les six prochaines questions, on considère $x \in ]0, 1[$.

   g) Montrer que $\Phi_x$ est strictement décroissante. Qu'en déduire que la monotonie de $\Phi_x \circ \Phi_x$ ?

   h) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, t_{2n+1}^x < t_{2n}^x$.

   i) Démontrer que la suite $(t_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, puis que la suite $(t_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   j) Démontrer que ces deux suites sont convergentes et que leur limite ne peut être qu'un point fixe de $\Phi_x \circ \Phi_x$ dans $[0, 1]$.

   k) Montrer que si $x \in [1/e, 1[$, alors la suite est $(t_n^x)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

   l) *Question facultative : étudier la convergence ou divergence de la suite* $(t_n^x)_{n\in\mathbb{N}}$ *lorsque* $x \in [e^{-e}, 1/e[$, *puis lorsque* $x \in ]0, e^{-e}[$.