Dénombrement

Cornou Jean-Louis

14 mai 2024

On ne définit pas $\mathbb{N}$, mais on utilise les propriétés du bon ordre de $\mathbb{N}$ pour définir la notion de cardinal fini. Une approche plus rigoureuse partirait de la notion de cardinal (très abstraite, les cardinaux ne forment pas un ensemble) puis en déduirait une construction de $\mathbb{N}$, ce qui dépasse largement notre cadre de travail.

1 Ensembles finis

On rappelle la propriété du bon ordre de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

Propriété 1 *$(\mathbb{N}, \leqslant)$ est un ensemble totalement ordonné. Soit $\mathrm{A} \subset \mathbb{N}$. Alors*

— *si $\mathrm{A} \neq \varnothing$, A possède un minimum.*

— *si $\mathrm{A} \neq \varnothing$ et A est majorée, A possède un maximum.*

Cette propriété est à l'origine des preuves par récurrence.

Définition 1 *Soit E un ensemble. On dit que E est fini si $\mathrm{E} = \varnothing$ ou s'il existe un entier naturel n non nul et une bijection de $[\![1,n]\!]$ dans E. On dit que E est infini s'il n'est pas fini.*

1.1 Parties finies de $\mathbb{N}$

Propriété 2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, toute partie de $[\![1,n]\!]$ est finie.*

Démonstration. Procédons par récurrence forte sur n. On note pour tout entier naturel n, $\mathcal{H}_n$: « Pour toute partie A de $[\![1,n]\!]$, A est finie. »
Initialisation : $n = 0$. Soit A une partie de $[\![1,0]\!]$. Alors $\mathrm{A} = \varnothing$, donc A est finie.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété $\mathcal{H}_k$ est vraie pour tout entier k entre 0 et n. Démontrons $\mathcal{H}_{n+1}$. Soit A une partie de $[\![1,n+1]\!]$. Si $\mathrm{A} = \varnothing$, A est finie. Sinon, elle est non vide, majorée par $n+1$, donc possède un maximum, que nous notons M. Distinguons deux cas :

— $\mathrm{M} \neq n+1$. Alors $\mathrm{A} \subset [\![1,n]\!]$, donc A est finie d'après l'hypothèse de récurrence.

— $\mathrm{M} = n+1$. On note alors $\mathrm{A}' = \mathrm{A} \backslash \{\mathrm{M}\}$.

  — Si $\mathrm{A}' = \varnothing$, alors $\mathrm{A} = \{\mathrm{M}\}$, on peut alors considérer $f : \{\mathrm{M}\} \to [\![1,1]\!], \mathrm{M} \mapsto 1$ qui est une bijection, ce qui entraîne que A est finie.

  — Sinon, A' est une partie non vide de $[\![1,n]\!]$. D'après $\mathcal{H}_n$, on dispose d'un entier k non nul et d'une bijection $\varphi : \mathrm{A}' \to [\![1,k]\!]$. On construit alors l'application

$$\psi : \mathrm{A} \to [\![1,k+1]\!], x \mapsto \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in \mathrm{A}' \\ k+1 & \text{si } x = \mathrm{M} \end{cases}$$

  Montrons que ψ est bijective. Surjectivité : soit $y \in [\![1,k+1]\!]$. Si $y = k+1$, alors M est un antécédent de $k+1$ dans A. Sinon, comme φ est surjective, on dispose de x dans A' tel que $\varphi(x) = y$. Mais alors $\psi(x) = y$. Injectivité : soit $(x,x') \in \mathrm{A}^2$ tel que $\psi(x) = \psi(x')$. Si $\psi(x) = k+1$, alors nécessairement $x = \mathrm{M}$, car $\forall z \in \mathrm{A}', \psi(x) = \varphi(x) < k+1$. Alors $x' = \mathrm{M} = x$. Sinon, $(x,x') \in \mathrm{A}'^2$, mais alors $\varphi(x) = \varphi(x')$. Comme φ est injective, il vient $x = x'$. Conclusion, ψ est bijective, donc A est finie.

Propriété 3 *Toute partie d'un ensemble fini est finie.*

Démonstration. Soit E un ensemble fini et F une partie de E. Si $\mathrm{E} = \varnothing$, $\mathrm{F} = \varnothing$ est finie. Sinon, on dispose de $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi : \mathrm{E} \to [\![1,n]\!]$ bijective. Mais alors $\varphi(\mathrm{F})$ est une partie de $[\![1,n]\!]$, donc finie d'après la propriété précédente. Si $\varphi(\mathrm{F}) = \varnothing$, $\mathrm{F} = \varnothing$ est finie. Sinon, on dispose de $p \in \mathbb{N}^*$ et $\psi : \varphi(\mathrm{F}) \to [\![1,p]\!]$ bijective. Mais alors $\psi \circ \varphi_{|\mathrm{F}} : \mathrm{F} \to [\![1,p]\!]$ est bijective comme composée d'applications bijectives, ce qui prouve que F est finie.

1.2 Intervalles d'entiers

Propriété 4 *Soit $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Alors il existe une injection entre $[\![1,p]\!]$ et $[\![1,q]\!]$ ssi $p \leqslant q$.*

Démonstration. Supposons $p \leqslant q$, alors $[\![1,p]\!] \to [\![1,q]\!], n \mapsto n$ est une injection.
On démontre la réciproque par récurrence sur p. Notons pour tout entier naturel p non nul, $\mathcal{H}_p$: « Pour tout q dans $\mathbb{N}^*$, s'il existe une injection de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,q]\!]$, alors $p \leqslant q$. »
Initialisation : $p = 1$. Soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel qu'on dispose d'une injection de $[\![1,1]\!]$ dans $[\![1,q]\!]$. Alors $q \geqslant 1$, donc $q \geqslant p$.
Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{H}_p$ est vrai. Soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel qu'on dispose d'une injection φ de $[\![1,p+1]\!]$ dans $[\![1,q]\!]$.

- Premier cas : $\varphi(p+1) = q$ ou q n'a pas d'antécédent. Alors $\varphi\Big|_{[\![1,p]\!]}^{[\![1,q-1]\!]}$ est une injection comme restriction d'une injection. D'après $\mathcal{H}_p$, on en déduit que $p-1 \leqslant q$, donc $p+1 \leqslant q$.
- Deuxième cas : $\varphi(p+1) < q$ et q possède un antécédent par φ. Notons $a = \varphi(p+1)$ et b l'unique antécédent de q par φ (unique car φ est injective). On est assuré que $b \neq p+1$. On construit alors la transposition qui échange b et $p+1$
$$\sigma : [\![1,p+1]\!] \to [\![1,p+1]\!], n \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \notin \{b, p+1\} \\ p+1 & \text{si } n = b \\ b & \text{si } n = p+1 \end{cases}$$
Elle est injective. Mais alors $\psi = \varphi \circ \sigma$ vérifie $\psi(p+1) = \varphi(b) = q$, donc on peut considérer $\psi\Big|_{[\![1,p]\!]}^{[\![1,q-1]\!]}$ qui est injective comme composée d'injections. D'après $\mathcal{H}_p$, $p \leqslant q-1$, donc $p+1 \leqslant q$, ce qui prouve $\mathcal{H}_{p+1}$.

Propriété 5 *Soit $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Alors, il existe une surjection entre $[\![1,p]\!]$ et $[\![1,q]\!]$ ssi $p \geqslant q$.*

Démonstration. Supposons $p \geqslant q$. On considère alors l'application
$$f : [\![1,p]\!] \to [\![1,q]\!], n \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \leqslant q \\ q & \text{si } n > q \end{cases}$$
Cette application est surjective, car $\forall n \in [\![1,q]\!], n = f(n)$.
Réciproquement, supposons qu'il existe une surjection $\varphi : [\![1,p]\!] \to [\![1,q]\!]$. On considère alors l'application
$$\psi : [\![1,q]\!] \to [\![1,p]\!], n \mapsto \min\left(\varphi^{-1}(\{n\})\right)$$
Cette application est bien définie, car pour tout n dans $[\![1,q]\!]$, $\varphi^{-1}(\{n\})$ est une partie non vide (par surjectivité de φ) de $[\![1,p]\!]$. Montrons l'injectivité de ψ. Soit $(n,n') \in [\![1,q]\!]^2$ tel que $\psi(n) = \psi(n')$. Alors $\varphi^{-1}(\{n\})$ et $\varphi^{-1}(\{n'\})$ possèdent en commun l'élément $\psi(n) = \psi(n')$. Comme il s'agit de classes d'équivalences, elles sont soit égales, soit disjointes. Ainsi, $\varphi^{-1}(\{n\}) = \varphi^{-1}(\{n'\})$ et elles ont même minimum, donc $n = n'$. La propriété précédente entraîne alors $q \leqslant p$.

Propriété 6 *Soit $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Alors il existe une bijection entre $[\![1,p]\!]$ et $[\![1,q]\!]$ ssi $p = q$.*

Démonstration. Conséquence des deux propriétés précédentes.

1.3 Notion de cardinal fini

Théorème 1 *Soit E un ensemble fini non vide. Alors il existe un **unique** entier naturel non nul n tel que E et $[\![1,n]\!]$ sont en bijection. Cet unique entier est appelé cardinal de E, noté $|\mathrm{E}|$ ou Card(E). On convient que l'ensemble vide est de cardinal 0.*

Démonstration. Soit n, n' deux entiers naturels non nuls tels qu'on dispose de bijections $\varphi : \mathrm{E} \to [\![1,n]\!]$ et $\varphi' : \mathrm{E} \to [\![1,n']\!]$. Alors $\varphi' \circ \varphi^{-1} : [\![1,n]\!] \to [\![1,n']\!]$ est une bijection. D'après la propriété précédente, cela entraîne $n = n'$.

Propriété 7 *Soit E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et q. Alors*

- *Il existe une injection de E de F ssi $p \leqslant q$.*
- *Il existe une surjection de E de F ssi $p \geqslant q$.*
- *Il existe une bijection de E de F ssi $p = q$.*

Démonstration. Exercice de rédaction laissé à votre soin car il faut tenir compte des cas $p = 0$ ou $q = 0$.

2 Opérations sur les cardinaux finis

Propriété 8 *Soit* E *et* F *deux ensembles finis disjoints. Alors* $E \cup F$ *est fini et* $|E \cup F| = |E| + |F|$.

Démonstration. Notons $p = |E|$ et $q = |F|$. On dispose de bijections $\varphi : E \to [\![1, p]\!]$ et $\psi : F \to [\![1, q]\!]$. On considère alors

$$\chi : E \cup F \to [\![1, p+q]\!], x \mapsto \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in E \\ p + \psi(x) & \text{si } \in F \end{cases}$$

Montrons que χ est une bijection. Soit $n \in [\![1, p+q]\!]$. Si $n \leqslant p$, $\varphi^{-1}(n) \in E$ et $\chi(\varphi^{-1}(n)) = n$. Si $n \geqslant p+1$, alors $n - p \in [\![1, q]\!]$ et $\psi^{-1}(n-p) \in F$, donc $\chi(\psi^{-1}(n-p)) = p + n - p = n$. On note alors

$$\omega : [\![1, p+q]\!] \to E \cup F, n \mapsto \begin{cases} \varphi^{-1}(n) & \text{si } n \leqslant p \\ \psi^{-1}(n-p) & \text{si } n \geqslant p+1 \end{cases}$$

On vient de démontrer que $\chi \circ \omega = \mathrm{Id}_{[\![1,p+q]\!]}$. L'autre composition est laissée à votre soin. Conclusion, $E \cup F$ est isomorphe à $[\![1, p+q]\!]$, donc $|E \cup F| = p + q = |E| + |F|$.

Corollaire
Soit E *un ensemble et* $(F_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *un recouvrement disjoint fini de* E. *On suppose que pour tout* i *dans* $[\![1, n]\!]$, F_i *est fini. Alors* E *est fini et*

$$|E| = \sum_{i=1}^{n} |F_i|$$

Démonstration. Récurrence sur n laissée à votre soin.

☞ **Remarque**
C'est en particulier vrai pour les partitions finies de E.

Propriété 9 *Soit* E *un ensemble fini et* F *une partie de* E. *Alors* $E \backslash F$ *est fini de cardinal* $|E| - |F|$. *De plus,* $|F| \leqslant |E|$ *avec égalité si et seulement si* $F = E$.

Démonstration. F et $E \backslash F$ sont des parties de E qui est un ensemble fini. D'après le tout début du chapitre, F et et $E \backslash F$ sont finis. Ils sont de plus disjoints et $E = F \cup (E \backslash F)$. D'après la propriété précédente, $|E| = |F| + |E \backslash F|$, ce qui entraîne $|E \backslash F| = |E| - |F|$. De plus, comme les cardinaux finis sont des entiers naturels alors $|E| \geqslant |F|$. Si $|F| = |E|$, alors $|E \backslash F|$ est de cardinal 0, c'est donc l'ensemble vide, d'où $E = F$.

Propriété 10 *Soit* E *et* F *deux ensembles finis. Alors* $E \cup F$ *est fini et* $|E \cup F| = |E| + |F| - |E \cap F|$.

Démonstration. On découpe $E \cup F$ en trois morceaux disjoints : $E \backslash (E \cap F)$, $E \cap F$ et $F \backslash (E \cap F)$. Ils sont tous finis comme parties de E ou de F eux-mêmes finis. Leur union est donc finie et

$$|E \cup F| = |E \backslash (E \cap F)| + |E \cap F| + |F \backslash (E \cap F)| = |E| - |E \cap F| + |E \cap F| + |F| - |E \cap F| = |E| + |F| - |E \cap F|$$

Propriété 11 (Formule du crible, hors-programme) *Soit* $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *une famille finie d'ensembles finis. Alors*

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} E_i \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \left| \bigcap_{j=1}^{n} E_{i_j} \right|$$

Démonstration. Récurrence technique laissée à titre d'exercice.

Propriété 12 *Soit* E *et* F *deux ensembles finis. Alors* $E \times F$ *est fini et* $|E \times F| = |E| \times |F|$.

Démonstration. il suffit de le faire pour des intervalles d'entiers. Notons $p = |E|$ et $q = |F|$. Si $q = 0$, alors $E \times \varnothing = \varnothing$, ce qui donne l'égalité souhaitée. Si $q \neq 0$, on considère

$$\varphi : [\![1, p]\!] \times [\![1, q]\!] \to [\![1, pq]\!], (n, m) \mapsto (n-1)q + m$$

D'après le théorème de la division euclidienne, φ est bijective, donc $|E \times F| = pq$.

Propriété 13 *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$, *soit* $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *une famille finie d'ensembles finies. Alors* $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ *est fini et*

$$|E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n| = |E_1| \times |E_2| \times \ldots, \times |E_n|$$

Démonstration. Récurrence laissée à votre soin.

Propriété 14 *Soit* E *un ensemble fini et soit* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{X}$ *une application injective. Alors* $f(\mathrm{E})$ *est fini et* $|f(\mathrm{E})| = |\mathrm{E}|$.

Démonstration. Comme f est injective, la corestriction $f^{|f(\mathrm{E})} : \mathrm{E} \to f(\mathrm{E})$ est bijective. Ainsi, $f(\mathrm{E})$ est en bijection avec un ensemble fini, donc est fini et $|\mathrm{E}| = |f(\mathrm{E})|$.

Théorème 2 *Soit* E *et* F *deux ensembles finis de même cardinal et* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$. *Alors* f *est bijective ssi* f *est injective ssi* f *est surjective.*

Démonstration. Supposons f est injective. Alors $|f(\mathrm{E})| = |\mathrm{E}| = |\mathrm{F}|$. Or $f(\mathrm{E}) \subset \mathrm{F}$, donc $f(\mathrm{E}) = \mathrm{F}$, ce qui entraîne la surjectivité de f.
Supposons f surjective. Pour tout y dans F, on dispose d'un antécédent x. On choisit l'un d'entre eux, ce qui permet de construire une application $g : \mathrm{F} \to \mathrm{E}, y \to x$. Celle-ci vérifie alors $f \circ g = \mathrm{Id}_\mathrm{F}$. Mais alors g est injective, donc bijective d'après ce qui précède. On en déduit que f est bijective, puisque de réciproque g.

3 Méthodes de dénombrement

3.1 Partitions

Commençons par un rappel sur les relations d'équivalence :

Propriété 15 *Soit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *une application. Alors la relation binaire* $\mathcal{R}$ *définie par*

$$\forall (x, x') \in \mathrm{X}^2, \quad \left[x\mathcal{R}x' \iff f(x) = f(x') \right]$$

est une relation d'équivalence. Son ensemble quotient est donné par

$$\mathrm{X}/\mathcal{R} = \left\{ f^{-1}(\{y\}) \,|\, y \in f(\mathrm{X}) \right\}.$$

Définition 2 *Soit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *une application et* $y \in \mathrm{Y}$. *On appelle fibre de* f *en* y *l'ensemble* $f^{-1}(\{y\})$, *i.e l'ensemble des éléments de* X *d'image* y *par* f.

Théorème 3 (Principe des bergers) *Soit* E *un ensemble fini et* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$. *On suppose que*

$$\exists p \in \mathbb{N}^*, \forall y \in \mathrm{F}, \left| f^{-1}(\{y\}) \right| = p$$

Autrement dit, toutes les fibres de f *ont le même cardinal. Alors* F *est fini et* $|\mathrm{E}| = p|\mathrm{F}|$.

Démonstration. Comme p est non nul, aucune fibre de f n'est vide. Comme rappelé précédemment, les fibres de f sont les classes d'équivalence de la relation d'équivalence induite par f, donc forment une partition de E. On en déduit que $|\mathrm{E}|$ est égal au nombre de fibres par le cardinal de chacune d'entre elles, i.e $|\mathrm{F}|p$.

Exemple 1 *L'un des cas les plus fréquents d'application du principe des bergers vient de la théorie des groupes, où les bijections sont légion. Soit* G *un groupe fini et* H *un sous-groupe de* G. *Soit* $g \in \mathrm{G}$. *On note* $g\mathrm{H} = \{gh | h \in \mathrm{H}\}$, *i.e l'image de* H *par l'application* L_g *de multiplication à gauche par* g. *Notons que* L_g *est une bijection de* G *dans* G, *puisque de réciproque* $\mathrm{L}_{g^{-1}}$. *Comme* H *est fini (comme partie de* G *lui-même fini), on en déduit que* $\mathrm{L}_g(\mathrm{H})$ *est une partie finie de* G *et* $|g\mathrm{H}| = |\mathrm{L}_g(\mathrm{H})| = |\mathrm{H}|$.
On introduit alors $\varphi : \mathrm{G} \to \mathcal{P}(\mathrm{G}), g \mapsto g\mathrm{H}$. *Soit* $g \in \mathrm{G}$ *et* $g' \in \mathrm{G}$. *Si* $g\mathrm{H} = g'\mathrm{H}$, *alors* $g' = g'e \in g'\mathrm{H} = g\mathrm{H}$, *donc on dispose de* h *dans* H *tel que* $g' = gh$. *Réciproquement, si l'on dispose de* h *dans* H *tel que* $g' = g\mathrm{H}$, *alors* $g'\mathrm{H} = gh\mathrm{H} = g\mathrm{H}$, *puisque* H *est stable par la loi de* G *et* h *est inversible. Ainsi,* $g\mathrm{H} = g'\mathrm{H}$ *ssi* $g' \in g\mathrm{H}$. *On en déduit que la fibre* $\varphi^{-1}(\{g\mathrm{H}\})$ *vaut* $g\mathrm{H}$. *En particulier, cette fibre est en bijection avec* $g\mathrm{H}$ *donc de cardinal* $|\mathrm{H}|$. *Ainsi, toutes les fibres non vides de* φ *ont le même cardinal* $|\mathrm{H}|$. *Par conséquent,* $|\mathrm{H}|$ *divise* $|\mathrm{G}|$.

Théorème 4 (Principe des tiroirs) *Soit* E *et* F *deux ensembles finis et* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$. *S'il existe un entier* k *dans* $\mathbb{N}^*$ *tel que* $|\mathrm{E}| > k|\mathrm{F}|$, *alors* f *possède une fibre de cardinal strictement plus grand que* k.
En particulier, si $|\mathrm{E}| > |\mathrm{F}|$, *alors il existe deux éléments distincts* x *et* x' *de* E *tels que* $f(x) = f(x')$.

Démonstration. On démontre la contraposée. Supposons que toutes les fibres de f sont de cardinal inférieur ou égal à k. Il y en a au plus $|\mathrm{F}|$. Comme elles forment une partition de E, on a $|\mathrm{E}| \leqslant k|\mathrm{F}|$. Dans le cas particulier $k = 1$, une des fibres de F est cardinal au moins 2, donc on dispose de deux éléments distincts x et x' qui appartiennent à la même fibre, i.e $f(x) = f(x')$.

3.2 Coefficients binomiaux

On propose ici une approche combinatoire de la notion de coefficient binomial et non une approche calculatoire par les factorielles.

Propriété 16 *Soit* E *un ensemble fini de cardinal n. Alors* $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ *est fini de cardinal* 2^n*.*

Démonstration. On introduit l'application

$$\psi : \mathcal{P}(\mathrm{E}) \to \{0,1\}^n, \mathrm{F} \mapsto (\mathbb{1}_{\mathrm{F}}(x))_{x\in\mathrm{E}}$$

Montrons que ψ est bijective.
Soit $(u_x)_{x\in\mathrm{E}} \in \{0,1\}^n$. On pose alors $\mathrm{F} = \{x \in \mathrm{E} | u_x = 1\}$, cette partie vérifie $\psi(\mathrm{F}) = (u_x)_{x\in\mathrm{E}}$, donc ψ est surjective.
Soit F, F' deux parties de E telles que $\psi(\mathrm{F}) = \psi(\mathrm{F}')$. Soit $x \in \mathrm{E}$. $x \in \mathrm{E}$. $x \in \mathrm{F} \iff \mathbb{1}_{\mathrm{F}}(x) = 1 \iff \mathbb{1}_{\mathrm{F}'}(x) = 1 \iff x \in \mathrm{F}'$.
Ainsi, $\mathrm{F} = \mathrm{F}'$ et ψ est injective. Conclusion, $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ est en bijection avec $\{0,1\}^n$. Comme ce dernier ensemble est fini de cardinal 2^n, $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ est fini de cardinal 2^n.

Définition 3 *Soit n et p deux entiers naturels. On appelle coefficient binomial « p parmi n », noté* $\binom{n}{p}$ *le nombre de parties à p éléments de l'ensemble* $[\![1, n]\!]$*.*

Notation
Pour tout ensemble fini E*, tout k dans* $\mathbb{N}$*, on note* $\mathcal{P}_k(\mathrm{E})$ *l'ensemble des parties de* E *à k éléments.*

☞ **Remarque**
On peut remplacer $[\![1, n]\!]$ *par n'importe quel ensemble fini de cardinal n.*

Propriété 17 (Symétrie) *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $p \in [\![0, n]\!]$*. Alors* $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$*.*

Démonstration. On introduit l'application $\Phi : \mathcal{P}([\![1, n]\!]) \to \mathcal{P}([\![1, n]\!]), \mathrm{A} \mapsto \mathrm{A}^c$. Cette application est une involution, donc bijective. Elle induit une bijection de $\mathcal{P}_p([\![1, n]\!])$ dans $\mathcal{P}_{n-p}([\![1, n]\!])$. Par conséquent, ces deux ensembles ont même cardinal, i.e $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Propriété 18 (Triangle de Pascal) *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $p \in [\![0, n]\!]$*. Alors* $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$*.*

Démonstration. On note $\chi : \mathcal{P}_{p+1}([\![1, n+1]\!]) \to \{0,1\}, \mathrm{F} \to \mathbb{1}_{\mathrm{F}}(1)$. Alors $\chi^{-1}(0)$ est l'ensemble des parties à $p+1$ éléments ne contenant pas 1, il est en bijection avec les parties à $p+1$ éléments de $[\![2, n+1]\!]$, donc de cardinal $\binom{n}{p+1}$. $\chi^{-1}(1)$ est l'ensemble des parties à $p+1$ éléments contenant 1, il est en bijection avec les parties à p éléments de $[\![2, n]\!]$, donc de cardinal $\binom{n}{p}$. Comme ces images réciproques constituent une partition de $\mathcal{P}_{p+1}([\![1, n+1]\!])$ qui est de cardinal $\binom{n+1}{p+1}$, on en déduit $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$.

Théorème 5 (Binôme de Newton)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $(a,b) \in \mathrm{C}^2$. On développe par mutilinéarité :

$$(a+b)^n = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\{0,1\}^n} c_{i_1} c_{i_2} \ldots c_{i_n}$$

avec la notation $c_0 = a$ et $c_1 = b$. Pour tout $\mathrm{I} = (i_1, \ldots, i_n) \in \{0,1\}^n$, on note $\mathrm{K}(\mathrm{I}) = |\{k \in [\![1, n]\!] | i_k = 0\}|$. On constate alors par commutativité du produit dans $\mathbb{C}$ que

$$(a+b)^n = \sum_{\mathrm{I}\in\{0,1\}^n} a^{\mathrm{K}(\mathrm{I})} b^{n-\mathrm{K}(\mathrm{I})}$$

Mais alors $\mathrm{K} : \{0,1\}^n \to [\![0, n]\!], (i_1, \ldots, i_n) \mapsto \mathrm{K}(\mathrm{I})$ vérifie pour tout k dans $[\![0, n]\!]$: $\mathrm{K}^{-1}(\{k\})$ est en bijection avec les parties de $[\![1, n]\!]$ de cardinal k, donc de cardinal $\binom{n}{k}$. En regroupant les termes de cette partition, on obtient

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

3.3 Applications entre ensembles finis

Dans tout ce qui suit, on fixe E un ensemble fini de cardinal p et F un ensemble fini de cardinal n.

Propriété 19 *L'ensemble F^{E} des applications de E dans F est fini et $|\mathrm{F}^{\mathrm{E}}| = n^p$.*

Démonstration. Une application $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est entièrement déterminée par la donnée de ses images $(f(x))_{x\in\mathrm{E}} \in \mathrm{F}^{\mathrm{E}}$. Comme F est de cardinal fini n et E de cardinal fini p, F^{E} est de cardinal fini n^p.

Propriété 20 *L'ensemble des injections de E dans F est fini. Son cardinal vaut 0 si $p > n$, $\frac{n!}{(n-p)!}$ sinon.*

Démonstration. Notons I_n^p l'ensemble des injections de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$. Soit $f \in \mathrm{I}_n^{p+1}$. Alors f induit une injection de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]\backslash\{f(p+1)\}$. Réciproquement, si on dispose d'une injection g de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]\backslash\{b\}$ et de b, on peut construire une injection de $[\![1,p+1]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$. Ainsi, $\mathrm{I}_n^{p+1} \to \mathrm{I}_n^p \times [\![1,n]\!], f \mapsto (f_{|[\![1,p]\!]}, f(p+1))$ est une bijection. On en déduit $|\mathrm{I}_n^{p+1}| = n|\mathrm{I}_n^p|$. Or $\mathrm{I}_n^1 = [\![1,n]\!]^1$ est de cardinal n. On en déduit la formule annoncée par récurrence.

☞ Remarque

Dans des références francophones du 20e, on trouve le terme « arrangement » pour désigner les applications injectives de E dans F.

Corollaire

Le nombre de bijections entre deux ensembles finis de cardinal n est $n!$.

Démonstration. On sait que si $n = p$, il suffit d'être injectif pour être bijectif. Ce cardinal vaut donc $n!/0! = n!$.

Propriété 21 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0,n]\!]$. Alors $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.*

Démonstration. On partitionne les permutations de $[\![1,n]\!]$ selon leur image du segment d'entiers $[\![1,p]\!]$, i.e on introduit

$$\Xi : \mathrm{S}_n \to \mathcal{P}([\![1,n]\!]), \sigma \mapsto \sigma([\![1,p]\!])$$

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{P}([\![1,n]\!])$, et $\sigma \in \mathrm{S}_n$. Pour que $\sigma([\![1,p]\!]) = \mathrm{A}$, il faut et il suffit que σ induise une bijection de $[\![1,p]\!]$ dans A et $\sigma_{|[\![p+1,n]\!]}$ réalise une bijection dans le complémentaire de A. Ainsi, la fibre en A est en bijection avec $\mathrm{S}_p \times \mathrm{S}_{n-p}$, donc de cardinal $p!(n-p)!$. D'autre part, l'image de Ξ est en bijection avec les parties à p éléments de $[\![1,n]\!]$, donc de cardinal $\binom{n}{p}$. D'après le principe des bergers, $n! = |\mathrm{S}_n| = \binom{n}{p} p!(n-p)!$.

Exercice 1

1. *Soit $f : [\![1,p]\!] \to [\![1,n]\!]$ croissante. Montrer que $\tilde{f} : [\![1,p]\!] \to [\![1,n+p-1]\!], i \mapsto f(i)+i-1$ est strictement croissante.*
2. *Soit $g : [\![1,p]\!] \to [\![1,n+p-1]\!]$ strictement croissante. Construire $f : [\![1,p]\!] \to [\![1,n]\!]$ croissante telle que $\tilde{f} = g$.*
3. *En déduire que le cardinal des applications croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ vaut $\binom{n+p-1}{p}$.*

Exercice 2 *Soit $p \leqslant n$ dans $\mathbb{N}^*$. On note $\mathrm{S}_{n,p}$ le nombre de surjection de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$.*

1. *Montrer que $p^n = \sum_{q=1}^{n} \binom{p}{q} \mathrm{S}_{n,q}$.*
2. *En déduire que $\mathrm{S}_{n,p} = (-1)^p \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} k^n$.*