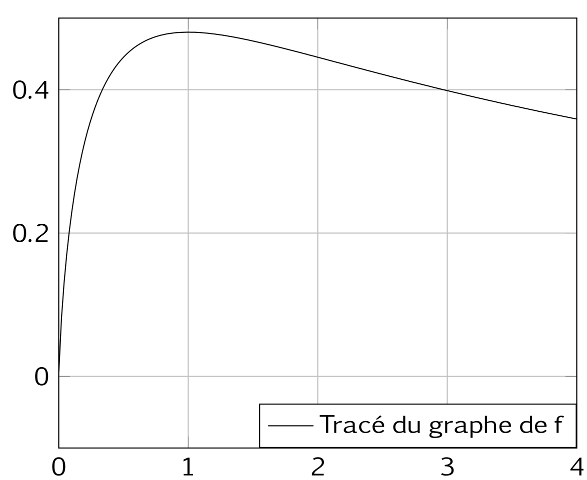
Exercice 1 : une étude de fonction

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $f(1/x) = \ln(1+1/x)\ln(1+1/(1/x)) = \ln(1+x)\ln(1+1/x) = f(x)$.
2. Comme f et la fonction inverse sont dérivables, on peut dériver l'égalité de fonctions précédente, ce qui donne
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{-1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$$
On spécifie en $x = 1$ cette assertion, cela entraîne $f'(1) = -1f'(1/1) = -f'(1)$, soit encore $2f'(1) = 0$. On en déduit $f'(1) = 0$.
3. On applique les règles de dérivation des produits et des composées, ce qui donne
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1}{1+x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \ln(1+x)\frac{-1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2+x}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \ln(1+x)\right]$$
4. La fonction $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, y \mapsto \ln(1+y) - y$ est dérivable de dérivée $h' : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, y \mapsto \dfrac{1}{1+y} - 1 = \dfrac{-y}{1+y}$ de signe négatif. Par conséquent, h est décroissante. Or $h(0) = 0$, donc h est de signe négatif. Le calcul de dérivée de g donne
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) = \ln(1+\frac{1}{x}) + x\frac{-1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} - \frac{1}{1+x} = \ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{2}{1+x}$$
On en déduit
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) \leq \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} = \frac{1-x}{x(1+x)}$$
5. L'inégalité précédente entraîne $\forall x \geq 1, g'(x) \leq 0$, donc g est décroissante sur $[1,+\infty[$. Or $g(1) = \ln(2)-\ln(2) = 0$, donc g est négative sur $[1,+\infty[$. Comme $\forall x \geq 1, x^2 + x \geq 0$, on en déduit que f' est négative sur $[1,+\infty[$, donc que f est décroissante sur $[1,+\infty[$.

   D'autre part, pour tout x dans $]0,1]$, $1/x$ appartient à $[1,+\infty[$, ce qui entraîne $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}f'(1/x) \geq 0$, donc f est croissante sur $]0,1]$. On en déduit que f admet un maximum en 1, et que celui-ci vaut $f(1) = \ln(2)^2$.
6. On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}\dfrac{\ln(1+1/x)}{1/x}$. D'après les limites remarquables du logarithme (son taux d'accroissement en 1), $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$. D'autre part, les croissances comparées du logarithme et des fonctions puissances donnent $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{\ln(1+y)}{y} = 0$, soit $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+1/x)}{1/x} = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. D'autre part, comme $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = f(1/x)$, les limites de f en 0 et $+\infty$ sont égales. Par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.



Exercice 2 : logique

1. Rappelons que pour toutes assertions P et Q, la négation de l'implication $P \Rightarrow Q$ est $P \wedge \neg Q$. Les règles de négation des quantificateurs donnent alors

$$\begin{aligned}
\neg(C) &\sim \neg\left(\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq A_\varepsilon \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon\right) \\
&\sim \exists \varepsilon > 0, \neg\left(\exists A_\varepsilon \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq A_\varepsilon \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon\right) \\
&\sim \exists \varepsilon > 0, \forall A_\varepsilon \in \mathbb{R}, \neg\left(\forall x \in \mathbb{R}, x \geq A_\varepsilon \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon\right) \\
&\sim \exists \varepsilon > 0, \forall A_\varepsilon \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \neg\left(x \geq A_\varepsilon \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon\right) \\
&\sim \exists \varepsilon > 0, \forall A_\varepsilon \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x \geq A_\varepsilon \wedge \neg\left(|f(x)| \leq \varepsilon\right) \\
&\sim \exists \varepsilon > 0, \forall A_\varepsilon \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x \geq A_\varepsilon \wedge |f(x)| > \varepsilon
\end{aligned}$$

2. On procède de même pour écrire la négation de l'assertion (D).

$$\neg(D) \sim \forall A \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R}, x \geq A \wedge |f(x)| > \varepsilon$$

3. Supposons (D) vraie, on dispose alors d'un réel A qui vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq A \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon$$

   Démontrons que (C) est vraie. Soit $\varepsilon > 0$. On cherche à construire un réel A_ε tel que $\forall x \in A_\varepsilon, x \geq A_\varepsilon \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon$. On propose pour cela le réel A donné par l'assertion (D), il vérifie bien d'après (D), $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq A \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon$. Ainsi, (C) est également vraie. Conclusion, l'implication $(D) \Rightarrow (C)$ est vraie.
4. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles vérifiant (D). On dispose d'un réel A tel que $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq A \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq A$. Supposons par l'absurde que $f(x) \neq 0$. Alors $|f(x)|/2 > 0$, ce qui permet d'écrire d'après l'assertion (D) en l'appliquant à $\varepsilon = |f(x)|/2 : |f(x)| \leq |f(x)|/2$, soit encore $2 < 1$, ce qui absurde. Conclusion, $f(x) = 0$. En conclusion, $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq A \Rightarrow f(x) = 0$.

   Réciproquement, soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles vérifiant $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq A \Rightarrow f(x) = 0$. Montrons que f vérifie (D). Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors le réel A fourni par l'hypothèse permet d'écrire $|f(x)| = 0 \leq \varepsilon$. Ainis, f vérifie (D).
5. Comme g est un quotient dont le numérateur ne s'annule jamais, elle ne s'annule jamais, donc ne vérifie pas la propriété (D) d'après ce qui précède. Démontrons que g vérifie (C). Soit $\varepsilon > 0$. Dans le cas où $\varepsilon \geq 1$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{1}{x^2+1} \leq 1 \leq \varepsilon$. Ainsi, tout réel A convient. Dans le cas où $\varepsilon < 1$, on propose $A = \sqrt{1/\varepsilon - 1}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq A$. Comme la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit $x^2 \geq \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$, soit encore $\dfrac{1}{x^2+1} \leq \varepsilon$, puis $|g(x)| \leq \varepsilon$. Conclusion, g vérifie la propriété (C).

Exercice 3 : divers

1. On note pour tout entier n non nul, l'assertion $P(n) : 1 \leq u_n \leq n^2$ et on démontre sa validité par récurrence double. Initiliations en $n = 1$ et $n = 2 : 1 \leq u_1 = 1 \leq 1^2$, donc $P(1)$ est vraie. $u_2 = u_1 + 2u_0/(0+2) = u_1 + u_0 = 2$ donc $1 \leq u_2 \leq 2^2$, ce qui entraîne $P(2)$. Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies. Démontrons que $P(n+2)$ est vraie. D'une part, $u_n \geq 1 \geq 0$, donc $u_{n+2} \geq u_{n+1} \geq 1$. D'autre part,

$$u_{n+2} - (n+2)^2 = u_{n+1} + 2\frac{u_n}{n+2} - (n+2)^2 \leq (n+1)^2 + 2\frac{n^2}{n+2} - (n+2)^2 = \frac{2n^2}{n+2} - 2n - 3 = -\frac{7n+6}{n+2} \leq 0$$

   Par conséquent, $u_{n+2} \leq (n+2)^2$ et $P(n+2)$ est vraie. La propriété annoncée est vraie pour tout entier n non nul.
2. Supposons par l'absurde que $\forall i \in [\![0, n-1]\!], |x_{i+1} - x_i| = x_{i+1} - x_i > 1/n$. En sommant toutes ces inégalités, il vient

$$(x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_1 - x_0) > \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}$$

   soit encore $x_n - x_0 > 1$, ce qui contredit $x_n - x_0 \leq 1$. Conclusion, il existe un entier i dans $[\![0, n-1]\!]$ tel que $x_{i+1} - x_i \leq 1/n$, ce qui fournit deux réels dans la liste distants d'au plus $1/n$.

3. Si $x=0$, alors d'après (a), $y>0$. L'implication (c) donne alors $z>0$, ce qui fournit deux réels de même signe dans la liste et est absurde. Ainsi, $x\neq 0$. Supposons $x>0$, d'après (b), $y<0$. En particulier $y\neq 0$, donc $z>0$ d'après (c). Mais alors x et z sont de même signe, ce qui est absurde. Conclusion, $x<0$. Supposons $y\neq 0$. Alors $y>0$ puisque $x<0$. D'après (c), $z>0$, ce qui fournit encore deux réels de même signe. Conclusion, $y=0$ et $z>0$.
4. Soit x un réel. On a les équivalences $\cos(2x)=\sin(x) \iff 1-2\sin^2(x)-\sin(x)=0 \iff \sin(x)$ est racine du polynôme $2X^2+X-1$. Ce trinôme a pour discriminant 9 et racines -1 et $1/2$. Poursuivons les équivalences $\cos(2x)=\sin(x) \iff \sin(x)=-1 \vee \sin(x)=1/2 \iff x\equiv -\pi/2[2\pi] \vee x\equiv \pi/6[2\pi] \vee x\equiv 5\pi/6[2\pi]$.

Exercice 4 : quelques complexes

1. Soit z' un complexe dans D. On remarque que $z+i\neq 0$, puisque $|-i|=1$. Procédons par analyse-synthèse pour construire un complexe z dans P tel que $z'=\dfrac{z-i}{z+i}$.

   Analyse : soit z un réel dans P tel que $z'=\dfrac{z-i}{z+i}$. Alors $(z+i)z'=(z-i)$, soit encore $zz'+iz'=z-i$, puis $z(z'-1)=-i(1+z')$. On veut diviser par $z'-1$, mais on doit s'assurer d'abord que $z'-1$ est non nul. Pour cela, on utilise le fait que z' est dans D, donc de module strictement plus petit que 1. Comme 1 est de module 1, cela signifie que $z'\neq 1$. On en déduit que $z=i\dfrac{1+z'}{1-z'}$. Cette phase d'analyse montre l'unicité sous réserve d'existence d'un complexe z satisfaisant.

   Synthèse : On considère le complexe $z=i\dfrac{1+z'}{1-z'}$ et on montre qu'il remplit tous les critères attendus. En premier lieu, sa définition est légitime puisque, $z'\neq 1$, comme vu précédemment. Le fait qu'il vérifie $z'=\dfrac{z-i}{z+i}$ s'obtient en effectuant les mêmes calculs que précédemment. Il est à présent crucial de vérifier que z' appartient à P. On calcule alors

$$\mathfrak{Im}(z)=\mathfrak{Im}\left(i\frac{1+z'}{1-z'}\right)=\mathfrak{Re}\left(\frac{1+z'}{1-z'}\right)=\mathfrak{Re}\frac{(1+z')(1-\overline{z'})}{(1-z')(1-\overline{z'})}=\mathfrak{Re}\frac{1-2i\,\mathfrak{Im}(z)-|z'|^2}{|z'-1|^2}=\frac{1-|z'|^2}{|z'-1|^2}$$

   Cette dernière quantité est bien strictement positive, puisque z' appartient à D, ce qui entraîne $|z'|^2<1$. Conclusion, on a montré l'existence et l'unicité d'un complexe z satisfaisant.
2. Soit z un complexe non réel. Cela assure que $cz+d\neq 0$ et donc $|cz+d|^2\neq 0$. L'apparition du dénominateur $|cz+d|^2$ incite fortement à multiplier « haut et bas » par $\overline{cz+d}$. Comme c et d sont réels, on calcule dans un premier temps

$$(az+b)\overline{(cz+d)}=(az+b)(c\overline{z}+d)=ac|z|^2+bc\overline{z}+adz+bd=ac|z|^2+bd+(bc+ad)\mathfrak{Re}(z)+i(ad-bc)\mathfrak{Im}(z)$$

   Hormis le i, toutes les quantités précédentes sont réelles, ce qui entraîne

$$\mathfrak{Im}((az+b)\overline{(cz+d)})=(ad-bc)\mathfrak{Im}(z)$$

   On termine alors le calcul en remarquant que $|cz+d|^2$ est réel donc que

$$\mathfrak{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=\mathfrak{Im}\left(\frac{(az+b)\overline{(cz+d)}}{|cz+d|^2}\right)=\frac{1}{|cz+d|^2}\mathfrak{Im}((az+b)\overline{(cz+d)})=\frac{(ad-bc)\mathfrak{Im}(z)}{|cz+d|^2}$$

3. L'égalité précédente incite fortement à examiner le critère $ad-bc>0$. On va donc établir l'équivalence

$$ad-bc>0 \iff \left[\forall z\in P, \exists z'\in P, z'=\frac{az+b}{cz+d}\right]$$

   Supposons $ad-bc>0$. Soit $z\in P$, on propose le complexe $z'=\dfrac{az+b}{cz+d}$ qui est bien défini, puisque z n'est pas réel (sa partie imaginaire est non nulle, car strictement positive). D'après la question précédente, $\mathfrak{Im}(z')=(ad-bc)\mathfrak{Im}(z)/|cz+d|^2$ est un produit de réels tous strictement positifs, donc strictement positif, ce qui prouve que z' appartient bien à P.

Réciproquement, supposons $\forall z \in P, \exists z' \in P, z' = \dfrac{az+b}{cz+d}$. On remarque que le complexe i est de partie imaginaire strictement positive, donc appartient à P, on lui applique l'assertion précédente, on dispose d'un complexe z' dans P tel que $z' = \dfrac{ai+b}{ci+d}$. La question précédente entraîne alors

$$\mathfrak{Im}(z') = \frac{(ad-bc)\mathfrak{Im}(i)}{|ci+d|^2} = \frac{ad-bc}{|ci+d|^2}$$

On en déduit $ad-bc = |ci+d|^2 \mathfrak{Im}(z')$. Or $ci+d \neq 0$, puisque c est non nul, ce qui entraîne $|ci+d|^2 > 0$ et $\mathfrak{Im}(z') > 0$, puisque $z' \in P$. On en déduit $ad-bc > 0$.

4. Soit $z \in T$. Il existe un réel y strictement positif tel que $z = iy$. On introduit $\omega = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{d}\right)$, puis $r = \dfrac{ad-bc}{2|cd|}$. Démontrons que l'ensemble $\{\dfrac{az+b}{cz+d} | z \in T\}$, que l'on note dorénavant C, est égal au demi-cercle de centre ω et de rayon r, contenu dans le demi-plan P. Soit $z' \in C$, il existe alors un complexe z dans T tel que $z' = \dfrac{az+b}{cz+d}$. On calcule alors

$$\begin{aligned} z' - \omega &= \frac{az+b}{cz+d} - \frac{1}{2}\frac{a}{c} - \frac{1}{2}\frac{b}{d} \\ &= \frac{2cd(az+b) - ad(cz+d) - bc(cz+d)}{2cd(cz+d)} \\ &= \frac{acdz - bc^2z + bcd - ad^2}{2cd(cz+d)} \\ &= \frac{(ad-bc)(cz-d)}{2cd(cz+d)} \end{aligned}$$

On en déduit, puisque $ad-bc > 0$, que $|z'-\omega| = \dfrac{ad-bc}{2|cd|}\dfrac{|cz-d|}{|cz+d|}$. Or z est dans T, donc imaginaire pur, donc $|cz-d| = |d-cz| = |d+c\overline{z}| = |d+cz|$. Ainsi, $|z'-\omega| = \dfrac{ad-bc}{2|cd|} = r$. On a ainsi prouvé que z' appartient au demi-cercle de centre ω et de rayon r, inclus dans P.

Réciproquement, soit z'' un complexe appartenant au demi-cercle de centre ω et de rayon r, inclus dans P, et démontrons qu'il existe un complexe z dans T tel que $z'' = \dfrac{az+b}{cz+d}$. On remarque tout d'abord que z'' est distinct de a/c, car z'' est dans P, donc non réel. On propose alors $z = \dfrac{dz''-b}{-cz''+a}$, définition légitime puisque $-cz''+a \neq 0$. Comme $da-(-c)(-b) = ad-bc \neq 0$, on peut exploiter le résultat de la question 2, et en déduire que $\mathfrak{Im}(z) > 0$, donc que $z \in P$. Il reste à justifier $\mathfrak{Re}(z) = 0$ pour prouver que z appartient à T. Comme on a $z = \dfrac{(dz''-b)(a-c\overline{z''})}{|a-cz''|^2}$, il suffit de prouver $\mathfrak{Re}\left((dz''-b)(a-c\overline{z''})\right) = 0$ ou encore $\mathfrak{Re}\left((z''-\dfrac{b}{d})(\dfrac{a}{c}-\overline{z''})\right) = 0$, puisque c et d sont tous deux réels non nuls. On calcule

$$\begin{aligned} \mathfrak{Re}\left((z''-\frac{b}{d})(\frac{a}{c}-\overline{z''})\right) &= -|z''|^2 + \left(\frac{a}{c}+\frac{b}{d}\right)\mathfrak{Re}(z'') - \frac{ab}{dc} \\ &= -|z''-\omega|^2 + r^2 \end{aligned}$$

Comme z'' appartient au cercle de centre ω et de rayon r, cette dernière quantité est nulle, donc z appartient bien à T.