Ipesup 2023/2024

Colle 8 MPSI/MP2I   Jeudi 7 décembre 2023

★★★

Planche 1

★★★

1. Unicité de l'inverse dans un monoïde.
2. Soit G un groupe et $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$. Montrer que $F = \{g \in G | \sigma(g) = g\}$ est un sous-groupe de G. Soit $g \in G$, la partie $A = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(G) | \sigma(g) = g\}$ est-elle un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(G)$?
3. On considère le groupe $(\mathfrak{S}(\{1,2,3\}), \circ)$. Déterminer tous ses sous-groupes.

★★★

Planche 2

★★★

1. Première caractérisation des sous-groupes. Énoncé et démonstration.
2. On considère un groupe G vérifiant $\forall (x,y) \in G^2, (xy)^2 = x^2y^2$. Montrer que G est commutatif.
3. Soit $(G,\star)$ un groupe. Montrer que $\varphi : G \mapsto \mathfrak{S}(G), g \mapsto L_g$ est un morphisme de groupes injectif. Peut-il être surjectif si G est fini ?

★★★

Planche 3

★★★

1. Soit $f : G \to H$ un morphisme entre deux groupes $(G,\star)$ et $(H,\sharp)$. Que dire que $f(e_G)$ et $f(x^{-1})$ pour tout x dans G ? Le démontrer.
2. Soit G un groupe fini commutatif noté multiplicativement. A l'aide de $\prod_{g\in G} g$, montrer que $\forall h \in G, h^{|G|} = e_G$.
3. On munit $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ de l'application suivante :

$$\star : E \times E \to E, (a,b,c),(a',b',c') \to (aa', bb', ac' + cb')$$

Montrer que $(E,\star)$ est un groupe. Est-il commutatif ?

★★★

Bonus

★★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $((x,y),(x',y')) \in (\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_n)^2$, on note $(x,y) \star (x',y') = (xx', yy'^x)$. Montrer que $(\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_n, \star)$ est un groupe. Montrer qu'il est non isomorphe au groupe produit $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_n$ pour tout $n \geqslant 3$.