IPESUP 2023/2024

Colle 6 MPSI/MP2I   Jeudi 23 novembre 2023

★★★

Planche 1

★★★

1. Définition de la densité d'une partie de $\mathbb{R}$. Caractérisation séquentielle de la densité. Énoncé et démonstration.
2. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. On note $A = \{x \in \mathbb{R}_+ | x^2 \leqslant a\}$. Sans utiliser la racine carrée, montrer que $\sup(A) \in \mathbb{R}_+$ et que $\sup(A)^2 = a$.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. On note $G = \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z} = \{n + \alpha m | (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$. Déterminer $\inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$.

★★★

Planche 2

★★★

1. Définition de la borne inférieure. Montrer que toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure. Exprimer sa borne inférieure à l'aide de la borne supérieure d'une partie pertinente.
2. On note $A = \{\ln(p) | p \in \mathbb{N}^*\}$ et $C = \{\ln(p) - \ln(q) | (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2\}$. Montrer que A n'est pas dense dans $\mathbb{R}$, mais que C est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Soit I et J deux intervalles bornés. Pour tout réel x, on note $d(x, I) = \inf\limits_{a \in I} |x - a|$ et $d(x, J) = \inf\limits_{b \in J} |x - b|$. Déterminer
$$\delta(I, J) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |d(x, I) - d(x, J)|$$
A quelle condition nécessaire et suffisante sur I et J a-t-on $\delta(I, J) = 0$?

★★★

Planche 3

★★★

1. Définition de la convexité. Montrer que toute partie convexe de $\mathbb{R}$ est un intervalle.
2. Soit A, B deux parties de $\mathbb{R}$ telles que (A, B) est une partition de $\mathbb{R}$ et $\forall (a, b) \in A \times B, a \leqslant b$. Montrer qu'il existe un réel c vérifiant
$$(A, B) = (]-\infty, c],]c, +\infty[) \vee (A, B) = (]-\infty, c[, [c, +\infty[$$
3. On note E l'ensemble des suites numériques bornées de premier terme 0.
   (a) Montrer que $\forall u \in E, \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n| \leqslant 2 \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.
   (b) Déterminer $\sup\limits_{u \in E \backslash \{0\}} \dfrac{\sup_{n \in \mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|}{\sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|}$ et $\sup\limits_{u \in E \backslash \{0\}} \dfrac{\sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|}{\sup_{n \in \mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|}$

★★★

Bonus

★★★

Montrer que

$$\inf\left\{c \in \mathbb{R} | (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, x_0 = 0, \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n^2 + c \text{ est bornée}\right\} = -2$$