Analyse asymptotique

Cornou Jean-Louis

2 mars 2024

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, typiquement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On rappelle qu'on désigne par suite numérique toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$ ou de $[\![n_0, +\infty[\![$ dans $\mathbb{K}$. L'analyse asymptotique précise et raffine l'étude des limites de suites et de fonctions. On ne contente plus d'étudier les limites mais les différences avec les limites, afin d'estimer (en un sens à préciser) la vitesse de convergence.

1 Comparaison asymptotique de suites.

1.1 Domination

Définition 1 *Soit u et v deux suites numériques. On dit que u est dominée par v lorsque*

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad |u_n| \leq M|v_n|$$

Dans ce cas de figure, on note $u = O(v)$ ou $u_n = O(v_n)$.

⚠ **Attention**
La notation de Landau, dite « grand O », n'est pas une égalité et n'est pas compatible avec les mêmes opérations. Il s'agit d'une relation entre deux suites numériques. Notez qu'elle ne dépend que du comportement asymptotique des deux suites.

Exemple 1 *Soit $p \in \mathbb{N}$, $u : n \mapsto n^p$, $v : n \mapsto \exp(n)$. Alors $u_n = O(v_n)$. Soit u une suite numérique quelconque. Alors u est bornée si et seulement si $u = O(1)$ en désignant par 1 la suite numérique constante égale à 1.*

$$e^{in} = O(1), \cos(n) = O(1), \sin(n) = O(1)$$

Propriété 1 *Soit u et v deux suites numériques. On suppose que v ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On a l'équivalence*

$$u = O(v) \iff \frac{u}{v} \text{ bornée}$$

Démonstration. Notons N un entier naturel tel que $\forall n \geq N, v_n \neq 0$. Supposons u dominée par v, alors

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \geq N', |u_n| \leq M|v_n|$$

On en déduit que

$$\forall n \geq \max(N, N'), \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leq M$$

Ainsi, la suite $|u/v|$ est majorée à partir d'un certain rang, donc u/v est bornée. Réciproquement, si u/v est bornée, alors $|u/v|$ est majorée, donc

$$\exists M' \in \mathbb{R}^+, \forall n \geq N, \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leq M'$$

Par conséquent, $\forall n \geq N, |u_n| \leq M'|v_n|$ et u est bien dominée par v.

☞ **Remarque**
Le programme demande de définir la relation de domination ainsi, mais cela ne permet pas de traiter les suites qui s'annulent une infinité de fois au voisinage de l'infini. Cette approche permet toutefois de simplifier tout ce qui suit, ou du moins de comprendre toutes les propriétés en termes de quotient borné.

Propriété 2 *La relation de domination est réflexive et transitive. Elle n'est ni symétrique, ni antisymétrique*

Démonstration. — Réflexivité : soit u une suite numérique. Alors en choisissant $M = 1$ et $N = 0$, on a $\forall n \geq N, |u_n| \leq 1|u_n|$, donc $u = O(u)$.

— Transivité : Soit u, v, w trois suites numériques telles que $u = O(v)$ et $v = O(w)$. Notons M_1 un réel positif et N_1 un entier naturel tel que

$$\forall n \geq N_1, |u_n| \leq M_1|v_n|$$

puis M_2 un réel positif et N_2 un entier naturel tel que

$$\forall n \geq N_2, |v_n| \leq M_2|w_n|$$

On en déduit, toutes quantités positives, que

$$\forall n \geq \max(N_1, N_2), |u_n| \leq M_1 M_2 |w_n|$$

Ainsi, le réel positif M_1M_2 et le rang $\max(N_1, N_2)$ assurent que u est dominée par w.

— Non symétrique : on considère la suite u constante égale à 0 et v la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = n$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = 0 \leq |n| = |v_n|$. Par conséquent, u est dominée par v. Toutefois, v n'est pas dominée par u. En effet, cela signifierait que v serait stationnaire en 0, alors qu'elle n'est pas bornée.

— Non antisymétrique : on considère la suite u constante égale à 1 et v la suite constante égale à 2. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq |v_n|$, donc $u = O(v)$. D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq \frac{1}{2}|u_n|$, donc $v = O(u)$. Toutefois, v et u sont distinctes.

☞ **Remarque**

Être dominé par la suite nulle signifie être nul à partir d'un certain rang.

Propriété 3 (Opérations et relation de domination) *Soit u, v, w, t des suites numériques, λ, μ deux scalaires, α un réel positif*

- — *Si $u = O(w)$ et $v = O(w)$, alors $\lambda u + \mu v = O(w)$.*
- — *Si $u = O(v)$ et $w = O(t)$, alors $uw = O(vt)$.*
- — *Si $u = O(v)$, alors $uw = O(vw)$.*
- — *Si $u > 0$ et $v > 0$ à partir d'un certain rang, et $u = O(v)$, alors $u^\alpha = O(v^\alpha)$.*

Démonstration. — On note $(M_1, M_2) \in (\mathbb{R}^+)^2, (N_1, N_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que

$$\forall n \geq N_1, |u_n| \leq M_1|w_n| \quad \text{et} \quad \forall n \geq N_2, |v_n| \leq M_2|w_n|$$

On en déduit par inégalité triangulaire que

$$\forall n \geq \max(N_1, N_2), |\lambda u_n + \mu v_n| \leq (|\lambda| M_1 + |\mu| M_2)|w_n|$$

donc que $\lambda u + \mu v$ est dominée par w.

— On dispose des bonnes quantités telles que

$$\forall n \geq N_1, |u_n| \leq M_1|v_n| \quad \text{et} \quad \forall n \geq N_2, |w_n| \leq M_2|t_n|$$

Toutes quantités positives, on peut multiplier ces inégalités, ce qui implique

$$\forall n \geq \max(N_1, N_2), |u_n w_n| \leq M_1 M_2 |v_n t_n|$$

Ainsi, uw est dominée par vt.

— On a

$$\forall n \geq N_1, |u_n| \leq M_1|v_n|$$

Après multiplication par $|w_n|$, on en déduit

$$\forall n \geq N_1, |u_n w_n| \leq M_1|v_n w_n|$$

Ainsi, uw est dominée par vw.

— Notons N un entier naturel tel que $\forall n \geq \mathrm{N}, v_n > 0$ et $u_n > 0$. On a de plus

$$\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R}^+, \exists \mathrm{N}' \in \mathbb{N}, \forall n \geq \mathrm{N}', |u_n| \leq \mathrm{M}|v_n|$$

Mais alors, comme $x \mapsto x^\alpha$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ puisque α est positif, on en déduit que

$$\forall n \geq \max(\mathrm{N}, \mathrm{N}'), |u_n|^\alpha \leq (\mathrm{M}|v_n|)^\alpha$$

Comme tout est positif, cela entraîne

$$\forall n \geq \max(\mathrm{N}, \mathrm{N}'), \left|u_n^\alpha\right| \leq \mathrm{M}^\alpha \left|v_n^\alpha\right|$$

Ainsi, u^α est dominée par v^α.

⚠ **Attention**
La relation $u = \mathrm{O}(v)$ n'implique pas en général $u = \mathrm{O}(\lambda v)$ à moins que λ soit non nul.

Exemple 2 *Soit α, β deux réels. On suppose que $\alpha \leq \beta$. Alors $n^\alpha = \mathrm{O}(n^\beta)$. En effet, $n^{\alpha-\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si $\alpha < \beta$ et $n^{\alpha-\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ si $\alpha = \beta$. Dans tous les cas, n^α/n^β est bornée, ce qui donne bien la relation de domination attendue.*

Propriété 4 (Composition à droite) *Soit u, v deux suites numériques telles que $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ est $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extractrice. Alors $u_{\varphi(n)} = \mathrm{O}(v_{\varphi(n)})$.*

Démonstration. On sait d'après la relation de domination que

$$\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R}^+, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \geq \mathrm{N}, |u_n| \leq \mathrm{M}|v_n|.$$

Comme φ est une extractrice, on sait que $\forall q \in \mathbb{N}, \varphi(q) \geq q$. Par conséquent,$\forall n \geq \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n \geq \mathrm{N}$, donc $\forall n \geq \mathrm{N}, |u_{\varphi(n)}| \leq \mathrm{M}|v_{\varphi(n)}|$.

1.2 Prépondérance, « négligeabilité »

Définition 2 *Soit u et v deux suites numériques. On dit que u est négligeable devant v lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \geq \mathrm{N}, \quad |u_n| \leq \varepsilon |v_n|$$

Dans ce cas de figure, on note $u = o(v)$ ou $u_n = o(v_n)$. On dit également que v est prépondérante devant u.

⚠ **Attention**
La notation de Landau, dite « petit o », n'est pas une égalité et n'est pas compatible avec les mêmes opérations. Il s'agit d'une relation entre deux suites numériques. Notez qu'elle ne dépend que du comportement asymptotique des deux suites.

Exemple 3 *Soit $p \in \mathbb{N}$, $u : n \mapsto n^p$, $v : n \mapsto \exp(n)$. Alors $u_n = o(v_n)$. Soit u une suite numérique quelconque. Alors u tend vers 0 si et seulement si $u = o(1)$ en désignant par 1 la suite numérique constante égale à 1.*

Propriété 5 *Soit u et v deux suites numériques. On suppose que v ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On a l'équivalence*

$$u = o(v) \iff \frac{u}{v} \to 0$$

Démonstration. Notons N un entier naturel tel que $\forall n \geq \mathrm{N}, v_n \neq 0$. Supposons u négligeable devant v, soit $\varepsilon > 0$. Alors d'après la définition de la relation de prépondérance,

$$\exists \mathrm{N}' \in \mathbb{N}, \forall n \geq \mathrm{N}', |u_n| \leq \varepsilon |v_n|$$

On en déduit que

$$\forall n \geq \max(\mathrm{N}, \mathrm{N}'), \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leq \varepsilon$$

Ainsi, la suite u/v est convergente de limite nulle. Réciproquement, si u/v convergente de limite nulle, on fixe $\varepsilon > 0$.

$$\exists \mathrm{N}' \in \mathbb{N}, \forall n \geq \max(\mathrm{N}, \mathrm{N}'), \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leq \varepsilon$$

Par conséquent, $\forall n \geq \max(\mathrm{N}, \mathrm{N}'), |u_n| \leq \varepsilon |v_n|$ et u est bien négligeable v.

☞ Remarque

De même que précédemment, le programme définit ainsi la relation de prépondérance, même si elle ne couvre pas le cas des suites qui s'annulent une infinité de fois au voisinage de l'infini. On peut comprendre tout ce qui suit en termes de quotients nuls. Toutefois, il faudra toujours faire attention à ne pas manipuler de suites nulles. Être négligeable devant la suite nulle signifie être nul à partir d'un certain rang.

Propriété 6 *Soit u et v deux suites numériques. On suppose que $u = o(v)$. Alors $u = \mathrm{O}(v)$. Autrement dit, si u est négligeable devant v, u est dominée par v. La réciproque est fausse.*

Démonstration. On choisit $\varepsilon = 1$. On dispose alors d'un entier naturel N tel que $\forall n \geq \mathrm{N}, |u_n| \leq |v_n|$. Ainsi, u est dominée par v. On considère la suite u constante égale à 1, elle est dominée par elle-même, mais non négligeable devant elle-même.

Propriété 7 *La relation de prépondérance est transitive. Elle n'est ni réflexive, ni symétrique, ni antisymétrique*

Démonstration.

— Non réflexive : soit u la suite constante égale à 1. Alors u/u est la suite constante égale à 1, donc ne tend pas vers 0. Conséquent, u n'est pas négligeable devant u.

— Transivité : Soit u, v, w trois suites numériques telles que $u = o(v)$ et $v = o(w)$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\sqrt{\varepsilon} > 0$, on dispose donc de N_1 et N_2 des entiers naturels tels que

$$\forall n \geq \mathrm{N}_1, |u_n| \leq \sqrt{\varepsilon}|v_n|$$

$$\forall n \geq \mathrm{N}_2, |v_n| \leq \sqrt{\varepsilon}|w_n|$$

On en déduit, toutes quantités positives, que

$$\forall n \geq \max(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2), |u_n| \leq \varepsilon|w_n|$$

Ainsi u est négligeable devant w.

— Non symétrique : on considère la suite u constante égale à 1 et v la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = n$. Alors u/v tend vers 0, mais v/u ne tend pas vers 0. Ainsi, $u = o(v)$, mais v n'est pas négligeable devant u.

— Non antisymétrique : soit u la suite constante nulle, et v la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \delta_{n,0}$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \geq 1, |u_n| = 0 \leq 0 = \varepsilon|v_n|$$

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \geq 1, |v_n| = 0 \leq 0 = \varepsilon|u_n|$$

Pourtant, les suites u et v sont distinctes, puisque $u_0 \neq v_0$.

☞ Remarque

Soit u, v deux suites qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang. Alors u n'est pas négligeable devant u, puisque u/u est convergente de limite 1. Si u est négligeable devant v, alors v n'est pas négligeable devant u. En effet, u/v tend vers 0, donc la suite inverse v/u n'est pas convergente.

Propriété 8 (Opérations et relation de domination) *Soit u, v, w, t des suites numériques, λ, μ deux scalaires, α un réel positif*

— *Si $u = o(w)$ et $v = o(w)$, alors $\lambda u + \mu v = o(w)$.*

— *Si $u = o(v)$ et $w = o(t)$, alors $uw = o(vt)$.*

— *Si $u = o(v)$, alors $uw = o(vw)$.*

— *Si $u > 0$ et $v > 0$ à partir d'un certain rang, et $u = o(v)$, alors $u^\alpha = o(v^\alpha)$.*

Démonstration.

— Soit $\varepsilon > 0$, alors on dispose d'entiers naturels N_1 et N_2 tels que $\forall n \geq \mathrm{N}_1, |u_n| \leq \varepsilon|w_n|$ et $\forall n \geq \mathrm{N}_2, |v_n| \leq \varepsilon|w_n|$. On en déduit que $\forall n \geq \max(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2), |\lambda u_n + \mu v_n| \leq (|\lambda| + |\mu|)\varepsilon|w_n|$.

— Soit $\varepsilon > 0$, on dispose d'entiers naturels N_1 et N_2 tels que $\forall n \geq \mathrm{N}_1, |u_n| \leq \sqrt{\varepsilon}|v_n|$ et $\forall n \geq \mathrm{N}_2, |w_n| \leq \sqrt{\varepsilon}|t_n|$. On en déduit que $\forall n \geq \max(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2), |u_n w_n| \leq \varepsilon|v_n t_n|$.

— Soit $\varepsilon > 0$, alors on dispose d'un entiers naturel N_1 tel que $\forall n \geq \mathrm{N}_1, |u_n| \leq \varepsilon|v_n|$. On en déduit que $\forall n \geq \mathrm{N}_1, |u_n w_n| \leq \varepsilon|v_n w_n|$.

— Soit $\varepsilon > 0$, alors $\varepsilon^{1/\alpha} > 0$ et on dispose d'un entier naturel N tel que $\forall n \geq \mathrm{N}, u_n > 0$, $v_n > 0$ et $|u_n| \leq \varepsilon^{1/\alpha}|v_n|$. Comme α est positif, $x \mapsto x^\alpha$ est croissante, donc $\forall n \geq \mathrm{N}, u_n^\alpha \leq \varepsilon v_n^\alpha$.

⚠ **Attention**
La relation $u = o(v)$ n'implique pas en général $u = o(\lambda v)$ à moins que λ soit non nul. Toutefois, si λ est non nul, les relations $u_n = o(v_n)$ et $u_n = o(\lambda v_n)$ sont équivalentes. Ainsi, il ne sert à rien d'écrire des $o\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi^2}n\right)$: $o(n)$ suffit.

⚠ **Attention**
On ne peut pas « sommer à droite » dans les relations de prépondérance. On a par exemple $n^2 = o(n+n^3)$ et $n^2 = o(n-n^3)$, mais $2n^2$ n'est pas négligeable devant $2n$.

Exemple 4 — *Soit α, β deux réels. On suppose que $\alpha < \beta$. Alors $n^\alpha = o(n^\beta)$. En effet, $n^{\alpha-\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*

— *Soit a, b des réels tels que $|a| < |b|$. Alors $a^n = o(b^n)$. En effet, b est non nul, et $(a/b)^n$ tend vers 0 car $|a/b| < 1$.*

Propriété 9 *Soit u une suite numérique et l un scalaire. On a l'équivalence u tend vers l si et seulement si $u_n - l = o(1)$.*

Démonstration. La suite u tend vers l si et seulement si $u - l$ tend vers 0 si et seulement si $u - l = o(1)$.

Théorème 1 (Croissances comparées) *Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$. Alors,*

$$n^\alpha = o\left(e^{\beta n}\right)$$

$$(\ln(n))^\alpha = o\left(n^\beta\right)$$

Démonstration. On a vu en début d'année que $n^\alpha/e^{\beta n}$ est convergente de limite nulle, puis que $\ln(n)^\alpha/n^\beta$ est convergente de limite nulle, ce qui prouve ces relations de prépondérance.

Propriété 10 — *Soit $a > 0$. Alors $a^n = o(n!)$*

— *$n! = o(n^n)$.*

Démonstration. — On note pour tout entier naturel n, $u_n = a^n/n!$ qui est strictement positif. Soit n un entier naturel,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}$$

Comme $a/(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on en déduit qu'il existe un rang N tel que, $\forall n \geq \mathrm{N}, 0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$. On en déduit par produit télescopique, que

$$\prod_{k=\mathrm{N}}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{1}{2^{n-\mathrm{N}+1}}$$

donc

$$0 \leq u_n \leq u_{\mathrm{N}} \frac{1}{2^{n-\mathrm{N}+1}}$$

Comme la suite de droite tend vers 0, puisque $0 \leq 1/2 < 1$, le théorème d'encadrement nous dit que u est convergente de limite nulle. Ainsi, $a^n = o(n!)$.

— Notons pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{n!}{n^n}$ qui est strictement positif. Soit n un entier naturel,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!} = \frac{n+1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1+1/n)^n}$$

On sait que cette dernière expression tend vers $1/e$ quand n tend vers $+\infty$. Or $1/e < 1/2$, donc à partir d'un certain rang N, $0 \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1/2$. On conclut comme précédemment, en assemblant un produit télescopique et une suite géométrique de limite nulle, pour déduire que v est convergente de limite nulle par encadrement. Ainsi, $n! = o(n^n)$.

Exercice 1 *Redémontrer $n! = o(n^n)$ par encadrement via une étude sous forme de produit.*

☞ **Remarque**
De nombreuses opérations sur les « petits o »o qui ne fonctionnent pas. En toute généralité, $u_n = o(v_n)$ et f une fonction n'implique pas $f(u_n) = o(f(v_n))$. On a vu que cela fonctionne pour les fonctions puissances, mais c'est faux en général ! Examinons le logarithme et l'exponentielle. On considère les suites u et v définies par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1/n, v_n = 1 + 1/n$. On remarque que u tend vers 0 tandis que v tend vers 1, ce qui assure que $u = o(v)$. Toutefois, pour tout entier naturel n non nul,

$$\frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} = -\frac{n\ln(n)}{n\ln(1+1/n)}$$

et cette dernière expression tend vers $-\infty$, donc $\ln(u)$ n'est pas négligeable devant $\ln(v)$. Pour l'exponentielle, on considère les suites constantes égales à 0 et 1. On a clairement $0 = o(1)$, pourtant $e^0 = 1$ n'est pas négligeable devant $e^1 = e$, puisque leur rapport tend vers $1/e$.

Exemple 5

$$\frac{\sin^{42}(n)}{n+1} + \frac{e^{i\sqrt{n}}}{\operatorname{th}^{18}(n)} = O(1)o(1) + O(1)O(1) = O(1) + O(1) = O(1)$$

Propriété 11 (Composition à droite) *Soit u, v deux suites numériques et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extractrice. On suppose que $u_n = o(v_n)$. Alors, $u_{\varphi(n)} = o(v_{\varphi(n)})$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe un rang N tel que $\forall n \geq N, |u_n| \leq \varepsilon|v_n|$. Mais alors $\forall n \geq \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n \geq N$, donc $\forall n \geq N, |u_{\varphi(n)} \leq \varepsilon|v_{\varphi(n)}|$.

1.3 Équivalence

Définition 3 *Soit u, v deux suites numériques. On dit que u est équivalente à v lorsque $u - v$ est négligeable devant v, i.e $u - v = o(v)$. On le note alors $u \sim v$ ou $u_n \sim v_n$.*

Notation
On accepte la notation $u = v + o(v)$ pour signifier $u - v = o(v)$. Attention ! Il ne s'agit pas d'égalités ! Cette écriture signifie uniquement que la suite u est somme de v et d'UNE suite négligeable devant v.

☞ **Remarque**
Si on l'epsilonise, cela donne

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - v_n| \leq \varepsilon|v_n|$$

Propriété 12 *On suppose que v ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On a alors l'équivalence :*

$$u \sim v \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Démonstration. Notons N′ un entier tel que $\forall n \geq N', v_n \neq 0$. Alors

$$u \sim v \iff u - v = o(v) \iff \frac{u-v}{v} = o\left(\frac{v}{v}\right) \iff \frac{u}{v} - 1 = o(1) \iff \frac{u}{v} \to 1$$

☞ **Remarque**
Comme précédemment, le programme définit les équivalences de suites comme des quotients de limite 1, mais cela ne permet pas de traiter le cas des suites qui s'annulent infiniment au voisinage de l'infini. Toute la suite peut être interprétée via des quotients de limite 1.

⚠ **Attention**
Si l'on suppose que u est convergente de limite ℓ, l'écriture $u \sim \ell$ n'est valide que si $\ell \neq 0$. Prenez le réflexe de toujours bannir les zéros dans les équivalents !

Exemple 6

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}\left(-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n}o(1) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Conclusion, $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ *et* $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$. *On aurait pu simplement écrire*

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Notons P *un polynôme non nul de degré p et* λ *son coefficient dominant, alors* $\mathrm{P}(n) \sim \lambda n^p$. *En effet, pour tout entier* $k < p$, $n^k = o(\lambda n^p)$.

Propriété 13 *La relation d'équivalence entre suites numériques est une relation réflexive, symétrique, transitive. Elle n'est pas antisymétrique.*

Démonstration. — Réflexivité : soit u une suite numérique. Alors $u - u$ est la suite nulle. Or $\forall \varepsilon > 0 \forall n \geq 0, |u_n - u_n| = 0 \leq \varepsilon|u_n|$. Donc $u - u = o(u)$ et $u \sim u$.

— Symétrie : soit u et v deux suites numériques telles que $u \sim v$. Soit $\varepsilon > 0$, alors $\varepsilon/(1+\varepsilon) > 0$, donc on dispose d'un entier N tel que $\forall n \geq \mathrm{N}, |u_n - v_n| \leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}|v_n|$. Fixons $n \geq \mathrm{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} |u_n - v_n| &\leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}|v_n| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}|v_n - u_n + u_n| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}|v_n - u_n| + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}|u_n| \end{aligned}$$

d'après l'inégalité triangulaire puisque $\varepsilon/(1+\varepsilon) > 0$. Ainsi,

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)|v_n - u_n| \leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}|u_n|$$

soit, après simplification par $1+\varepsilon > 0$,

$$|v_n - u_n| \leq \varepsilon|u_n|$$

— Transitivité : soit u, v, w, trois suites numériques telles que $u \sim v$ et $v \sim w$. Soit $\varepsilon > 0$, on dispose d'entiers naturels $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2$ tels que

$$\forall n \geq \mathrm{N}_1, |u_n - v_n| \leq \varepsilon|v_n|, \quad \forall n \geq \mathrm{N}_2, |v_n - w_n| \leq \varepsilon|w_n|$$

On fixe alors $n \geq \max(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2)$, cela entraîne

$$|u_n - w_n| = |u_n - v_n + v_n - w_n| \leq |u_n - v_n| + |v_n - w_n| \leq \varepsilon|v_n| + \varepsilon|w_n| \leq \varepsilon|v_n - w_n + w_n| + \varepsilon|w_n| \leq (2\varepsilon + \varepsilon^2)|w_n|$$

Comme $2\varepsilon + \varepsilon^2 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$, cela suffit à établir $u - w = o(w)$, soit $u \sim w$.

— Non antisymétrique : $1 + \frac{1}{n} \sim 1$ et $1 \sim 1 + \frac{1}{n}$. Pourtant ces suites sont distinctes.

Propriété 14 *Soit u, v, w, t des suites numériques,* λ *un scalaire,* α *un réel.*

— *Si* $u \sim w$ *et* $\lambda \neq 0$, *alors* $\lambda u \sim \lambda w$. *C'est également vrai pour* $\lambda = 0$, *mais la conclusion est alors triviale.*

— *Si* $u \sim v$ *et* $w \sim t$, *alors* $uw \sim vt$.

— *Si* $u \sim v$, *alors* $uw \sim vw$.

— *Si* $u > 0$ *et* $v > 0$ *à partir d'un certain rang, et* $u =\sim v$, *alors* $u^\alpha \sim v^\alpha$.

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$. On dispose d'un entier naturel N tel que $\forall n \geq \mathrm{N}, |u_n - w_n| \leq \varepsilon|w_n|$. Après multiplication par $|\lambda| \geq 0$, on obtient $\forall n \geq \mathrm{N}, |\lambda u_n - \lambda w_n| \leq \varepsilon|\lambda w_n|$, d'où l'équivalent annoncé.

— Comme l'équivalent est symétrique, on a $v \sim u$. Soit $\varepsilon > 0$, on dipose d'un entier naturel N tel que $\forall \geq \mathrm{N}, |v_n - u_n| \leq \frac{1}{2}\varepsilon|u_n|$ et $\forall n \geq \mathrm{N}, |w_n - t_n| \leq \frac{1}{2}\varepsilon|t_n|$. Soit $n \geq \mathrm{N}$, on écrit

$$|u_n w_n - v_n t_n| = |u_n w_n - u_n t_n + u_n t_n - v_n t_n| \leq |u_n||w_n - t_n| + |t_n||u_n - v_n| \leq \frac{1}{2}\varepsilon|u_n||t_n| + \frac{1}{2}\varepsilon|t_n||u_n| = \varepsilon|t_n u_n|$$

On a ainsi l'équivalent souhaité.

— Il suffit d'appliquer ce qui précède avec $w = t$.

— Simplifions-nous la vie et étudions le quotient u/v puisque v ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors par continuité de la fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$ en 1, $(u_n/v_n)^\alpha \to 1^\alpha = 1$, donc u_n^α/v_n^α tend vers 1, donc on a l'équivalent annoncé.

⚠ **Attention**

On ne somme jamais les équivalents ! On a par exemple $n \sim n$ et $(-1)^n - n \sim -n$, pourtant $(-1)^n$ n'est pas équivalente à 0. On n'appliquera que des produits, quotients ou puissances aux équivalents ! Autre piège $\frac{1}{1+n} - \frac{1}{n} \sim \frac{-1}{n^2}$ est correct. Toutefois ajouter $\frac{1}{n}$ des deux côtés amène à la relation $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$ qui est certes correcte, mais vous avez perdu de l'information, car on a également $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n} + \frac{344\sqrt{\pi^3}+e}{n^2}$.

Exemple 7 *Soit P, Q deux polynômes non nuls tels que $P(n) \sim \lambda n^p$ et $Q(n) \sim \mu n^q$ avec λ et μ non nuls, alors $(P/Q)(n) \sim \frac{\lambda}{\mu} n^{p-q}$.*

Méthode

Comment traiter l'équivalent d'une somme ? On repasse aux « petits o ». Prenons par exemple

$$\frac{1}{(1+n)^2} - \frac{1}{1+2n} = \frac{-n^2}{(1+n)^2(1+2n)} \sim \frac{-n^2}{2n^3} \sim \frac{-1}{2n}$$

et

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \sim \frac{1}{2n}$$

L'addition de ces deux équivalents amène à une absurdité ! Reprenons

$$\frac{1}{(1+n)^2} - \frac{1}{1+2n} = \frac{-1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Les petits o ont le bon goût d'être compatibles avec l'addition à gauche

$$\frac{1}{(1+n)^2} - \frac{1}{1+2n} + \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 0 + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Nous ne pouvons pas poursuivre car aucun des termes de gauche n'est négligeable devant $1/n$.
Autre exemple : $\sin(1/n^2) \sim \frac{1}{n^2}$ et $\frac{n}{n^2+n+1} \sim \frac{1}{n}$. Alors, on écrit

$$\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{n}{n^2+n+1} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Comme on peut sommer à gauche, on obtient

$$\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{n}{n^2+n+1} = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Cependant, le terme $1/n^2$ est négligeable devant $1/n$ de même que le terme $o(1/n^2)$ par transitivité. Ainsi, on est réduit à

$$\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{n}{n^2+n+1} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Autrement dit, seul le terme prépondérant persiste dans l'écriture finale :

$$\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{n}{n^2+n+1} \sim \frac{1}{n}$$

Propriété 15 *Soit u, v, w trois suites réelles. On suppose que $u \leq v \leq w$ à partir d'un certain rang, et que $u \sim w$. Alors $v \sim w$.*

Démonstration. Il s'agit d'une version revisitée du théorème d'encadrement. Soit N un entier naturel tel que $\forall n \geq N, u_n \leq v_n \leq w_n$. Soit $\varepsilon > 0$. On dispose d'un entier N' tel que $\forall n \geq N', |u_n - w_n| \leq \frac{1}{2}\varepsilon|w_n|$. Soit alors $n \geq \max(N, N')$. On a $0 \leq v_n - u_n \leq w_n - u_n$, donc par inégalité triangulaire,

$$|v_n - w_n| \leq |v_n - u_n| + |u_n - w_n| \leq 2|w_n - u_n| \leq \varepsilon|w_n|$$

Par conséquent, on a bien l'équivalent $v \sim w$.

Propriété 16 *Soit u, v deux suites numériques. On suppose que $u \sim v$.*

- *Si u est de signe constant à partir d'un certain rang, alors v est de même signe constant à partir d'un certain rang.*

— *Si u tend vers une limite l dans $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $+\infty, -\infty, \infty$, alors v tend vers cette même limite.*

Démonstration. — Supposons que u est strictement positif à partir d'un certain rang N'. Alors en choisissant $\varepsilon = 1/2$, on dispose d'un entier naturel N tel que $\forall n \geq N, |v_n - u_n| \leq \frac{1}{2}|u_n|$. Soit alors $n \geq \max(N, N')$. On a

$$\frac{1}{2}u_n = (1 - \frac{1}{2})u_n \leq u_n + v_n - u_n = v_n$$

Cela entraîne a fortiori, $\forall n \geq \max(N, N'), v_n > 0$, donc v est strictement positive au voisinage de $+\infty$. L'autre cas se traite en constatant que $-u \sim -v$.

— Prenons le cas l scalaire. Alors $u_n - l = o(1)$, donc $v_n = v_n - u_n + u_n = o(u_n) + l + o(1) = l + o(1)$, donc v tend vers l. Dans le cas où $l = +\infty, -\infty, \infty$, alors les suites considérées ne s'annulent pas à partir d'un certain rang, donc $v = (u/v)u$. D'après les règles sur les produits de limites (fini fois infini), v tend vers l.

Propriété 17 (Passage au logarithme dans les équivalents) *Soit u, v deux suites numériques réelles strictement positives. On suppose que u converge vers une limite l distincte de 1, éventuellement infinie et que $u \sim v$. Alors $\ln(u) \sim \ln(v)$.*

Démonstration. La technique utilisée est fondamentale pour les développements limités : on écrit

$$\ln(u_n) = \ln(v_n + o(v_n)) = \ln(v_n) + \ln(1 + o(1))$$

Or comme u tend vers l, v tend également vers l.

— Si l est réel non nul, par continuité du logarithme, $\ln(u)$ et $\ln(v)$ tendent vers $\ln(l)$ et $\ln(l) \neq 0$ puisque $l \neq 1$. D'autre part $\ln(1 + o(1))$ est une suite qui tend vers 0 par continuité du logarithme en 1, donc elle est négligeable devant $\ln(v_n)$ puisque $\ln(l) \neq 0$.

$$\ln(u_n) = \ln(v_n + o(v_n)) = \ln(v_n) + o(1) = \ln(v_n) + o(\ln(v_n))$$

Ainsi, $\ln(u) \sim \ln(v)$.

— Si $l = 0$, avec les mêmes notations que précédemment, $\ln(u_n)$ et $\ln(v_n)$ tendent vers $-\infty$. Mais une suite qui tend vers 0 est négligeable devant une suite qui tend vers $-\infty$, donc $o(1) = o(\ln(v_n))$ et on conclut de la même manière.

— Si $l = +\infty$, idem $\ln(u_n)$ et $\ln(v_n)$ tendent vers $+\infty$ et $o(1) = o(\ln(v_n))$, donc on obtient la même conclusion.

☞ **Remarque**
Cette propriété est bien entendu fausse lorsque $l = 1$. Notons pour tout entier naturel non nul n, $u_n = 1 + 1/n$ et $v_n = 1 + 1/n^2$. Alors $u \sim v$, puisque u/v tend vers 1. Cependant, $\ln(u_n) \sim \frac{1}{n}$ et $\ln(v_n) \sim \frac{1}{n^2}$, de sorte que $\ln(u_n)$ n'est pas équivalent à $\ln(v_n)$ (leur quotient tend vers $+\infty$).

⚠ **Attention**
On ne peut pas passer à l'exponentielle dans les équivalents ! $n \sim n+1$, pourtant $e^{n+1}/e^n = e$ ne tend pas vers 1. On doit repasser par les « petits o ». Par exemple,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)) = \exp(1 + o(1)) = e(1 + o(1)) = e + o(1)$$

Propriété 18 *Soit u, v deux suites numériques telles que $u \sim v$. Alors $u = O(v)$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon = 1$, alors on dispose d'un rang N tel que $\forall n \geq N, |u_n - v_n| \leq |v_n|$. On en déduit par inégalité triangulaire que

$$\forall n \geq N, |u_n| \leq |u_n - v_n| + |v_n| \leq 2|v_n|$$

Ainsi, u est dominée par v.

Propriété 19 (Composition à droite) *Soit u, v deux suites numériques et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \sim v_n$. Alors $u_{\varphi(n)} \sim v_{\varphi(n)}$.*

Démonstration. C'est toujours la même preuve. Soit $\varepsilon > 0$, on dipose d'un entier naturel N tel que $\forall n \geq N, |u_n - v_n| \leq \varepsilon |v_n|$. Cependant, comme φ est une extractrice, $\forall n \geq N, \varphi(n) \geq n \geq N$, donc $\forall n \geq N, |u_{\varphi(n)} - v_{\varphi(n)}| \leq \varepsilon |v_{\varphi(n)}|$.

⚠ **Attention**
Pièges classiques :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ *n'implique pas que $u_n - v_n$ possède une limite finie. Les suites de terme général $n^2 - n$ et n^2 vérifient $\frac{n^2-n}{n^2} = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, mais $n^2 - n - n^2 = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.*
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$ *n'implique pas* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. *Prenons les suites de terme général $1/n$ et $1/n^2$. Leur différence tend vers 0, mais leur rapport tend vers $+\infty$.*

Exemple 8 *Donnons un équivalent simple des suites suivantes :*

1. $e^{1/n} - \sqrt{1+1/n}$.
   Examinons la limite de cette suite : $e^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = 1$ par continuité de l'exponentielle en 0. De même, $\sqrt{1+1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{1} = 1$ par continuité de la racine carrée en 1. Cette suite tend donc vers 0. Ecrire $e^{1/n} - \sqrt{1+1/n} \sim 0$ est erroné car cette ne stationne pas en 0. Exploitons des petits o pour avancer dans l'étude de chaque terme. La dérivabilité de l'exponentielle en 0 nous donne
   $$\frac{e^{1/n}-1}{1/n} = \tau_0(\exp)\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp'(0) = 1$$
   On peut écrire cette limite sous la forme $\frac{e^{1/n}-1}{1/n} = 1 + o(1)$, soit encore $e^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. En utilisant la même technique, la dérivabilité de la racine carrée en 1, donne
   $$\frac{\sqrt{1+1/n}-1}{1/n} = \tau_1(\sqrt{\ })\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$
   On le réécrit sous la forme $\sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. D'après la compatibilité des petits o avec l'addition à gauche, on en tire
   $$e^{1/n} - \sqrt{1+1/n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
   On en déduit
   $$e^{1/n} - \sqrt{1+1/n} \sim \frac{1}{2n}$$
2. $\frac{n^2\ln(1+1/n)}{\tan(\pi/n)}$.
   On force l'apparition de taux d'accroissement de fonctions dérivables comme précédemment. D'une part, $n\ln(1+1/n) = \tau_1(\ln)(1/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln'(1) = 1$. D'autre part, $\frac{\tan(\pi/n)}{\pi/n} = \tau_0(\tan)(\pi/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \tan'(0) = 1$. On en déduit $\frac{\ln(1+1/n)}{\tan(\pi/n)} = \frac{n\ln(1+1/n)}{n\tan(\pi/n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\pi}$. Comme cette limite est non nulle, on conclut
   $$\frac{n^2\ln(1+1/n)}{\tan(\pi/n)} \sim \frac{n^2}{\pi}$$
3. $\frac{\ln(n^{2024}+1)}{n+1}$.
   $n^{2024} \sim n^{2024}+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. D'après le théorème de passage au log dans les équivalents $\ln(n^{2024}+1) \sim \ln(n^{2024}) = 2024\ln(n)$. De plus, $n \sim n+1$. On en déduit $\frac{\ln(n^{2024}+1)}{n+1} \sim 2024\frac{\ln(n)}{n}$.
4. $\sqrt{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}$.
   En exploitant la quantité conjuguée, on a
   $$\sqrt{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}}\sqrt{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})} = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}}$$
   De plus, $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+1/n}+\sqrt{1-1/n}\right)$. Comme $\sqrt{1+1/n}+\sqrt{1-1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$, on en déduit $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1} \sim 2\sqrt{n}$. Comme les équivalents sont compatibles avec les quotients et les fonctions puissance, on en déduit
   $$\sqrt{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}} \sim n^{-1/4}$$

1.4 Exemples d'études asymptotiques de suites

La notion de développement asymptotique n'est pas entièrement formalisée dans le programme. Présentons-la de manière convaincante à défaut de rigoureuse.

Exemple 9 *On considère la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n^2+4n+5}$. Alors*

$$u_n = n\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}$$

avec $\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}$ qui tend vers 1 par continuité de la racine carrée. On en déduit que $u_n \sim n$. On poursuit alors l'étude en introduisant $v_n = u_n - n$ et en cherchant un équivalent de v_n. Notons que

$$v_n = n\left(\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}-1\right) = n\frac{1+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}-1}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}+1} = \frac{4+\frac{5}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$$

On peut poursuivre l'étude en cherchant un équivalent de $v_n - 2$. Si l'on synthétise ce que l'on a étudié, on écrit

$$u_n = n+2+o(2) = n+2+o(1)$$

On note que $2 = o(n)$.

Exemple 10 *Prenons cette fois-ci la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (n+1)e^{1/n}$. On remarque que $e^{1/n} \to e^0 = 1$, donc que $u_n \sim n$. Alors, on exploite le taux d'accroissement de l'exponentielle en 0 pour établir*

$$u_n - n = n(e^{1/n}-1)+e^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1+1=2$$

Poursuivons,

$$u_n - n - 2 = \left[n(e^{1/n}-1)-1\right]+(e^{1/n}-1) = \frac{1}{n}n\left[n(e^{1/n}-1)-1\right]+\frac{1}{n}n(e^{1/n}-1)$$

Cela entraîne en particulier,

$$n(u_n-n-2) \to \frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2}$$

On synthètise toutes ces limites sous la forme

$$u_n = n+2+\frac{3}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Notez qu'à chaque fois, chaque terme de droite est négligeable devant celui qui le précède : $2 = o(n)$, $3/(2n) = o(2)$.

Définition 4 *Soit u une suite numérique et p un entier naturel non nul. On appelle développement asymptotique à p termes de u une famille de p suites numériques $v_1, \ldots, v_p$ qui vérifient les choses suivantes :*

$$u_n = \sum_{k=1}^{p} v_{k,n} + o(v_{p,n}) \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, p-1]\!], v_{i+1} = o(v_i)$$

Donnons tout de suite le développement asymptotique le plus utile pour vous :

Théorème 2 (Formule de Stirling) *On a l'équivalent*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

ou encore le développement asymptotique

$$\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Démonstration. Admis pour l'instant, il nous manque des outils sur les séries et les intégrales. Pour les curieux qui se demandent d'où vient le terme $\sqrt{2\pi}$, il vient par exemple des intégrales de Wallis ou de l'intégrale de la gaussienne $x \mapsto e^{-x^2/2}$.

☞ **Remarque**
On connaît le développement asymptotique à tout ordre de la factorielle

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left[1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}-\frac{139}{51840n^3}-\frac{571}{2488320n^4}+\frac{163879}{209018880n^5}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^6}\right)\right]$$

Exemple 11 (Développement asymptotique d'une suite implicite) *D'après les propriétés de la fonction tangente, on sait que pour tout entier naturel n, il existe un unique réel x_n dans $]n\pi-\pi/2, n\pi+\pi/2[$ tel que $\tan(x_n) = x_n$. Soit n un entier naturel, alors $n\pi - \pi/2 < x_n < n\pi + \pi/2$ d'où $1-\frac{1}{2n} < \frac{x_n}{n\pi} < 1+\frac{1}{2n}$. Par conséquent, le théorème d'ecandrement assure que $x_n/(n\pi)$ tend vers 1, donc $x_n \sim n\pi$. On pose $y_n = x_n - n\pi$, ce qui assure que $y_n \in]-\pi/2, \pi/2[$. Mais alors $\tan(y_n) = \tan(x_n) = x_n$ et $y_n = \arctan(x_n)$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \pi/2$, on en déduit par composition que y_n tend vers $\pi/2$. On pose maintenant $z_n = y_n - \pi/2$. Alors $\tan(z_n) = -\frac{1}{\tan(y_n)} = -\frac{1}{x_n} \sim \frac{-1}{n\pi}$.*
En conclusion,

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 2 *Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, il existe un unique réel x_n dans $]0,1[$ tel que $x = \ln(x)+n$. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de la suite $(x_n)_{n\geq 2}$.*

Exemple 12 (Développement asymptotique d'une suite récurrente) *On pose $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$. On a vu qu'une telle suite est strictement décroissante de limite nulle. On cherche un développement asymptotique de u. On commence par remarquer que $u_n \sim 0$ est faux, puisque la suite n'est pas stationnaire en 0. On admet pour le moment (on le verra dans les développements limités du sinus) que*

$$\sin(u_n) = u_n - \frac{u_n^3}{6} + \mathrm{O}(u_n^5)$$

On assemble alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{\sin^2(u_n)} - \frac{1}{u_n^2} &= \frac{1}{\left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + \mathrm{O}(u_n^5)\right)^2} - \frac{1}{u_n^2} \\ &= \frac{1}{u_n^2}\left(\frac{1}{1-\frac{u_n^2}{3}+\mathrm{O}(u_n^4)} - 1\right) = \frac{1}{u_n^2}\frac{\frac{u_n^2}{3}+\mathrm{O}(u_n^4)}{1-\frac{u_n^2}{3}+\mathrm{O}(u_n^4)} \\ &= \frac{1}{3}\left(1+\mathrm{O}(u_n^2)\right)\frac{1}{1-\frac{u_n^2}{3}+\mathrm{O}(u_n^4)} \\ &\sim \frac{1}{3}\end{aligned}$$

On applique alors le lemme de Cesaro :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) \to \frac{1}{3}$$

soit

$$\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \sim \frac{n}{3}$$

On en déduit que

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$$

Arrêtons-nous là. On connaît toutefois des méthodes pour poursuivre indéfiniment.

2 Comparaison locale de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$.

Nous allons à présent faire la même transition qu'en début d'année, pour passer des voisinages de l'infini pour les suites à des voisinages quelconques dans $\mathbb{R}$ pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$. Pour alléger l'exposé, on fixe I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, a un point adhérent à I (éventuellement infini), f, g, h, k désignent des fonctions de I dans K. Pour nous simplifier la vie, nous supposons que f, g et h ne s'annulent pas au voisinage de a. Le symbole $\mathcal{V}(a)$ désigne l'ensemble des voisinages de a dans I. Rappelons que les voisinages d'un réel a contiennent tous un intervalle ouvert non vide contenant a, que les voisinages de $+\infty$ (resp. $-\infty$) contiennent tous un intervalle non majoré (resp. non minoré).
Toutes les propriétés sur les suites se transportent sans difficulté, nous ne ferons que les réénoncer et insisterons sur les nouveaux aspects liés aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$.

2.1 Domination

Définition 5 *On dit que f est dominée par g au voisinage de a, lorsque*

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \exists V \in \mathcal{V}(a) \cap I, \forall x \in V, |f(x)| \leq M|g(x)|$$

Dans ce cas, on note $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ *ou* $f \underset{a}{=} O(g)$.

Propriété 20

$$f \underset{a}{=} O(g) \iff \frac{f}{g} \text{ est bornée au voisinage de } a$$

Propriété 21 *La relation de domination au voisinage de a est réflexive, transitive, mais non symétrique et non antisymétrique.*

Propriété 22
- *Si* $f \underset{a}{=} O(g)$ *et* $h \underset{a}{=} O(g)$, $\lambda f + \mu h \underset{a}{=} O(g)$.
- *Si* $f \underset{a}{=} O(g)$ *et* $h \underset{a}{=} O(k)$, $fh \underset{a}{=} O(gk)$.
- *Si* $f \underset{a}{=} O(g)$, $fh \underset{a}{=} O(gh)$.
- *Si f est g sont strictement positives au voisinage de a,* $f \underset{a}{=} O(g)$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, *alors* $f^\alpha \underset{a}{=} O(g^\alpha)$.

Propriété 23 (Composition à droite) *Soit* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *et* $b \in \overline{\mathbb{R}}$, *on suppose que* $\varphi(x) \xrightarrow[x\to b]{} a$. *Si* $f \underset{a}{=} O(g)$, *alors*

$$f(\varphi(x)) \underset{x\to b}{=} O(g(\varphi(x)))$$

☞ **Remarque**
Ainsi, l'étude des relations de domination entre f et g au voisinage de a peut être ramenée à l'étude des relations de dominations de $h \mapsto f(a+h)$ *et* $h \mapsto g(a+h)$ *au voisinage de* 0.

Exemple 13 *On suppose f continue en a dans* I, *alors* $f \underset{a}{=} O(1)$.

2.2 Prépondérance, « négligeabilité »

Définition 6 *On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a ou que g est prépondérante devant f au voisinage de a, lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(a) \cap I, \forall x \in V, |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$

Dans ce cas, on note $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ *ou* $f \underset{a}{=} o(g)$.

Propriété 24

$$f \underset{a}{=} o(g) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

Exemple 14 *Soit α, β deux réels tels que $\alpha < \beta$. Alors $x^\beta \underset{x\to 0}{=} o(x^\alpha)$ tandis que $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta)$.*

Propriété 25 *La relation de prépondérance au voisinage de a est transitive, mais non réflexive, non symétrique et non antisymétrique.*

Propriété 26
- *Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $h \underset{a}{=} o(g)$, $\lambda f + \mu h \underset{a}{=} o(g)$.*
- *Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $h \underset{a}{=} o(k)$, $fh \underset{a}{=} o(gk)$.*
- *Si $f \underset{a}{=} o(g)$, $fh \underset{a}{=} o(gh)$.*
- *Si f est g sont strictement positives au voisinage de a, $f \underset{a}{=} o(g)$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, alors $f^\alpha \underset{a}{=} o(g^\alpha)$.*

Propriété 27

$$f \underset{a}{=} o(g) \Rightarrow f \underset{a}{=} \mathrm{O}(g)$$

Propriété 28 (Composition à droite) *Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $b \in \overline{\mathbb{R}}$, on suppose que $\varphi(x) \xrightarrow[x\to b]{} a$. Si $f \underset{a}{=} o(g)$, alors*

$$f(\varphi(x)) \underset{x\to b}{=} o(g(\varphi(x))$$

Théorème 3 (Croissances comparées) *Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$. Alors,*

$$x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{\beta x}\right)$$

$$e^{\beta x} \underset{x\to-\infty}{=} o\left(x^\alpha\right)$$

$$(\ln(x))^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^\beta\right)$$

$$x^\beta \underset{x\to 0}{=} o\left((|\ln(x)|)^{-\alpha}\right)$$

2.3 Équivalence

Définition 7 *On dit que f est équivalente à g au voisinage de a, lorsque $f - g \underset{a}{=} o(g)$, soit encore*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(a) \cap I, \forall x \in V, |f(x) - g(x)| \le \varepsilon |g(x)|$$

Dans ce cas, on note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} o(g(x))$ ou $f \underset{a}{\sim} o(g)$.

Propriété 29

$$f \underset{a}{\sim} g \iff \frac{f}{g} \underset{a}{\to} 1$$

Propriété 30 *La relation « équivalent en a » est réflexive, symétrique, transitive, non antisymétrique.*

Propriété 31 *Soit α un réel.*
- *Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $h \underset{a}{\sim} k$, alors $fh \underset{a}{\sim} gk$.*
- *Si f et g sont strictement positives au voisinage de a, et $f \underset{a}{\sim} g$, alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$.*

Propriété 32 *On suppose que $f \le g \le h$ au voisinage de a et que $f \underset{a}{\sim} h$. Alors $g \underset{a}{\sim} h$.*

Propriété 33
- *Si $f \underset{a}{\sim} g$ et f de signe constant au voisinage de a, alors g est de même signe constant au voisinage de a.*
- *Si f possède une limite l en a, et $f \underset{a}{\sim} g$, alors g tend vers cette même limite en a.*

Propriété 34 *On suppose que f et g sont strictement positives au voisinage de a, $f \underset{a}{\sim} g$ et que f tend vers l différent de 1 en a. Alors*

$$\ln(f) \underset{a}{\sim} \ln(g)$$

Propriété 35 *Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $f \underset{a}{=} O(g)$.*

Propriété 36 (Composition à droite) *Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $b \in \overline{\mathbb{R}}$, on suppose que $\varphi(x) \xrightarrow[x\to b]{} a$. Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors*

$$f(\varphi(x)) \underset{x\to b}{\sim} g(\varphi(x))$$

2.4 Exemples d'études locales de fonctions

Définition 8 *Soit p un entier naturel non nul. On appelle développement asymptotique à p termes en a de f une famille de p fonctions définies au voisinage de a, $f_1, \dots, f_p$ qui vérifient les choses suivantes :*

$$f \underset{a}{=} \sum_{k=1}^{p} f_k + o(f_p) \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, p-1]\!], f_{i+1} \underset{a}{=} o(f_i)$$

Exemple 15 *Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x\ln|x|}{1+e^x}$. Alors*

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x\ln|x|}{2} - \frac{x^2\ln|x|}{4} + o(x^2\ln|x|)$$

Exemple 16 *On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x/(1+e^x)$. L'étude des variations de f montre que f possède un maximum et qu'il est atteint en un unique point α dans $]1,2[$. De plus, pour tout réel x dans $]0,\alpha]$, il existe un unique réel y dans $[\alpha,+\infty[$ tel que $f(x) = f(y)$, ce qui permet de construire l'application $\varphi :]0,\alpha] \to [\alpha,+\infty[, x \mapsto y$. La réciproque de $f_2 = f_{|[\alpha,+\infty[}^{|]0,\alpha]}$ est encore continue et strictement décroissante. On en déduit que $\varphi = f_1 \circ f_2^{-1}$ est continue et strictement décroissante par composition. De plus, $\varphi(\alpha) = \alpha$. Par composition des limites, on a également $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = +\infty$. Pour tout x strictement positif au voisinage de 0, on a $f(x) = f(\varphi(x))$, soit encore*

$$\frac{2x}{1+\exp(x)} = \frac{2\varphi(x)}{1+\exp(\varphi(x))}$$

D'après la limite de φ en 0 égale à $+\infty$ et la continuité de l'exponentielle, on en déduit que

$$x \sim_{x\to 0^+} 2\varphi(x)\exp(-\varphi(x)).$$

On peut passer au logarithme car les limites diffèrent de 1, d'où

$$\ln(x) = -\varphi(x) + o(\varphi(x))$$

Soit encore $\varphi(x) \sim -\ln(x)$ au voisinage de 0.
L'application f est de classe C^∞ sur $]\alpha,+\infty[$ et sa dérivée ne s'y annule pas d'après les variations établies en première question. Sa réciproque est donc de classe C^∞ sur $]\alpha,+\infty[$. On en déduit par composition que φ est de classe C^∞ sur $]0,\alpha[$. Comme $f'(\alpha) = 0$, on ne peut pas utiliser de théorème classique pour étudier la dérivabilité de φ en α. En revanche, on a pour tout réel x,

$$f'(x)(e^x+1)^2 = 2g(x),$$

ce qui entraîne par dérivation

$$f''(\alpha)(e^\alpha+1)^2 = 2g'(\alpha) = -2\alpha e^\alpha < 0$$

On a ainsi l'équivalent $f(x) - f(\alpha) \sim \frac{1}{2}(x-\alpha)^2 f''(\alpha)$ au voisinage de α. Comme φ est continue en α, $\varphi(x)$ tend vers α en α, ce qui entraîne l'équivalent $f(\varphi(x)) - f(\alpha) \sim \frac{1}{2}(\varphi(x)-\alpha)^2 f''(\alpha)$. Comme $f(\varphi(x)) = f(x)$, on obtient par transitivité

$$\frac{1}{2}(\varphi(x)-\alpha)^2 f''(\alpha) \sim \frac{1}{2}(x-\alpha)^2 f''(\alpha)$$

La multiplicativité et la continuité de la racine carrée impliquent donc

$$|\varphi(x) - \alpha| \sim |x - \alpha| \quad d'\text{ où} \quad \varphi(x) - \alpha \sim -(x - \alpha)$$

Ainsi, on dispose d'un développement limité d'ordre 1 *de* φ *au voisinage de* α*. Il implique que* φ *y est dérivable et que* $\varphi'(\alpha) = -1$*.*

Exemple 17 *Développement asymptotique du logarithme intégral par intégration par parties successives. On pose tout réel* $x \geq 2$*,* $Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$*. Soit* $x \geq 2$*, toutes fonctions de classe* C^∞*, on peut effectuer des intégration par parties successives, ce qui donne, bien qu'on ne puisse pas le prouver.*

$$\begin{aligned}
Li(x) &= \left[\frac{t}{\ln(t)}\right]_2^x - \int_2^x t\frac{-1}{t\ln^2(t)}dt \\
&= \frac{x}{\ln(x)} - \frac{2}{\ln(2)} + \int_2^x \frac{dt}{\ln^2(t)} \\
&= \frac{x}{\ln(x)} + \frac{x}{\ln^2(x)} + \cdots + \frac{(n-1)!x}{\ln^n(x)} + o\left(\frac{n}{\ln^n(x)}\right)
\end{aligned}$$

3 Développements limités

Les développements limités de fonctions sont des cas particuliers de développements asymptotiques à l'aide des fonctions puissances entières.

3.1 Opérations sur les développements limités

Définition 9 *Soit* I *un intervalle réel non réduit à un point, a un point de* I*. Soit* $f : I \to \mathbb{K}$ *et* n *un entier naturel. On dit que* f *admet un développement limité d'ordre* n *au voisinage de* a*, (en abrégé un* $DL_n(a)$*) s'il existe un* $(n+1)$ *uplet de scalaires* $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ *tel que*

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Comme on a vu qu'on pouvait composer à droite les relations de comparaison, on se ramène au cas $a = 0$ dans ce qui suit pour des démonstrations plus légères. La pratique nécessite ne pas négliger ce cas toutefois. Pour le cas $a = \pm\infty$, on se ramène à 0, via le changement de variable $y = 1/x$.

Propriété 37 *Si* f *admet un développement limité d'ordre* n *en* a*, celui-ci est unique.*

Démonstration. On se donne deux développements limités de f à l'ordre n au voisinage de a

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

$$f(x) \underset{x\to a}{=} b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots + b_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Supposons par l'absurde qu'ils diffèrent, i.e qu'il existe un entier i dans $[\![0, n]\!]$ tel que $a_i \neq b_i$. On note alors $p = \min\{k \in [\![0, n]\!] | a_k \neq b_k\}$. Comme $o((x-a)^n) - o((x-a)^n) = o((x-a)^n)$, on en déduit par soustraction que

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n - b_0 - b_1(x-a) - b_2(x-a)^2 + \cdots - b_n(x-a)^n = o((x-a)^n)$$

Or $\forall k \leq p-1, a_k = b_k$, donc

$$(a_p - b_p)(x-a)^p + (a_{p+1} - b_{p+1})(x-a)^{p+1} + \cdots + (a_n - b_n)(x-a)^n = o((x-a)^n)$$

soit encore

$$(a_p - b_p) + (a_{p+1} - b_{p+1})(x-a)^1 + \cdots + (a_n - b_n)(x-a)^{n-p} = o((x-a)^{n-p})$$

Quand x tend vers a, le membre de gauche tend vers $a_p - b_p \neq 0$ tandis que le membre de droite tend vers 0 puisque $p < n$. Cette absurdité entraîne l'unicité du $DL_n(a)$ de f.

Définition 10 *Soit f admettant un développement limité d'ordre n en a de la forme*

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Le polynôme P *défini par*

$$\mathrm{P} = a_0 + a_1(\mathrm{X}-a) + a_2(\mathrm{X}-a)^2 + \cdots + a_n(\mathrm{X}-a)^n$$

est appelé partie régulière de ce développement limité.

Exemple 18 *On considère les applications f_1, f_2, f_3 définies par $f_1 :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $f_2 :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+x}$, $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Soit n un entier naturel non nul. Rappelons que $\forall q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.*

— $\forall x \in]-\infty, 1[, f_1(x) = \sum_{k=0}^n x^k + x^n \frac{x}{1-x}$.
  Ainsi, $f_1(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$*, donc* f_1 *admet un* $\mathrm{DL}_n(0)$.

— $\forall x \in]-1, +\infty[, f_2(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + x^n \frac{(-1)^{n+1} x}{1+x}$.
  Ainsi, $f_2(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$*, donc* f_2 *admet un* $\mathrm{DL}_n(0)$.

— $\forall x \in \mathbb{R}, f_3(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + x^{2n+1} \frac{(-1)^{n+1} x}{1+x^2}$.
  Ainsi, $f_3(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1})$*, donc* f_3 *admet un* $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$.

Propriété 38 *Soit n un entier naturel non nul, k un entier naturel inférieur ou égal à n, et f admettant un développement limité en a à l'ordre n. Alors, f admet un développement limité en a à l'ordre k. Si on désigne par P_n la partie régulière à l'ordre n du $\mathrm{DL}_n(a)$ de f, alors la partie régulière du $\mathrm{DL}_k(a)$ de f vaut le reste dans la division euclidienne de P_n par $(\mathrm{X}-a)^{k+1}$.*

Démonstration. On remarque que pour tout entier p compris entre $k+1$ et n, $(x-a)^p = o((x-a)^k$. On en déduit d'après les opérations sur les « petits o » que

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n) = \mathrm{P}_n(x) + o((x-a)^n)$$

entraîne

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_k(x-a)^k + o((x-a)^k)$$

De plus, le polynôme P_k est de degré au plus k et $\mathrm{P}_n = \mathrm{P}_k + \sum_{j=k+1}^n a_j(\mathrm{X}-a)^j = \mathrm{P}_k + (\mathrm{X}-a)^{k+1} \sum_{j=k+1}^n a_j(\mathrm{X}-a)^{j-k-1}$ est bien la division euclidienne de P_n par $(\mathrm{X}-a)^{n+1}$.

Propriété 39 *Soit f une application admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. Si f est paire, tous les termes d'indice impair de son développement limité sont nuls. Si f est impaire, toutes les termes d'indice pair de son développement limité sont nuls.*

Démonstration. Notons $g : x \mapsto f(-x)$, ainsi que le $\mathrm{DL}_n(0)$ de f

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

Comme on peut composer à droite, g est admet le $\mathrm{DL}_n(0)$ suivant

$$g(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 - a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + (-1)^n a_n x^n + o(x^n)$$

Si f est paire, alors $g = f$ et l'unicité du développement limité à l'ordre n implique que tous les termes d'ordre impair sont nuls. Si f est impaire, $f = -g$. Toujours avec l'unicité du développement limité à l'ordre n, on en déduit que tous les termes d'indice pair sont nuls.

Propriété 40 *Soit n un entier naturel non nul. Si f admet un développement limité d'ordre $n \geq 1$ au voisinage de a de la forme*

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

avec $a_n \neq 0$, alors

$$f(x) - a_0 - a_1(x-a) - a_2(x-a)^2 - \cdots - a_{n-1}(x-a)^{n-1} \underset{x\to a}{\sim} a_n(x-a)^n$$

Démonstration. Comme a_n est non nul, on peut tranquillement diviser par $a_n(x-a)^n$ qui ne s'annule qu'une fois au voisinage de a. On obtient alors

$$\lim_{x\to a, x\neq a} \frac{f(x)-a_0-a_1(x-a)-a_2(x-a)^2-\cdots-a_{n-1}(x-a)^{n-1}}{a_n(x-a)^n} = \lim_{x\to a, x\neq a}(1+o(1)) = 1$$

Exemple 19 *On en déduit les équivalents suivants au voisinage de* 0*,*

$$\frac{1}{1-x}-1\sim x, \quad \frac{1}{1-x}-1-x\sim x^2, \quad \frac{1}{1-x}-1-x-x^2\sim x^3$$

Théorème 4 (Formule de Taylor-Young) *Soit n un entier naturel strictement positif, et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$. On suppose que f est de classe C^{n-1} sur* I *et n fois-dérivable en a, alors f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a. Il est donné par*

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n)$$

ou encore

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Démonstration. Effectuons la preuve par récurrence sur l'entier n. Pour $n = 1$, l'application f est dérivable une fois et nous retrouvons le développement limité de f en a à l'ordre 1, ce qui a été validé dans le chapitre sur la dérivation. Soit n un entier naturel strictement positif et supposons la formule de Taylor-Young acquise au rang n, puis démontrons-la au rang $n+1$. Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ une application de classe C^n sur I et $n+1$-fois dérivable en a. On introduit alors l'application $\mathrm{R} : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ définie par

$$\forall x \in \mathrm{I}, \mathrm{R}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Notre objectif est de démontrer $\mathrm{R}(x) \underset{x\to a}{=} o((x-a)^{n+1})$. L'application R est dérivable sur I car $n \geq 1$. De plus,

$$\forall x \in \mathrm{I}, \mathrm{R}'(x) = f'(x) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} = f'(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Or f' est de classe C^{n-1} sur I et n-fois dérivable en a et la formule de Taylor-Young à l'ordre n appliquée à f' entraîne que $\mathrm{R}'(x) = o((x-a)^n)$. Il s'agit à présent « d'intégrer » cette relation de prépondérance.
Soit $\varepsilon > 0$. D''après la relation de prépondérance, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [a-\eta, a+\eta], \quad |\mathrm{R}'(x)| \leq \varepsilon |x-a|^n$$

En particulier, $\forall x \in [a, a+\eta], -\varepsilon(x-a)^n \leq \mathrm{R}'(x) \leq \varepsilon(x-a)^n$. Donc les applications $x \mapsto \varepsilon\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} - \mathrm{R}(x)$ et $x \mapsto \mathrm{R}(x) + \varepsilon\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$ sont dérivables de dérivées positives sur l'intervalle $[a, a+\eta]$, donc croissantes. Comme elles sont tous deux nulles en a, on en déduit

$$\forall x \in [a, a+\eta], \quad -\varepsilon\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \leq \mathrm{R}(x) \leq \varepsilon\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

soit encore

$$\forall x \in [a, a+\eta], \quad |\mathrm{R}(x)| \leq \varepsilon\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

On reproduit la même démarche à gauche de a, ce qui donne

$$\forall x \in [a-\eta, a], -\varepsilon\frac{(a-x)^{n+1}}{n+1} \leq \mathrm{R}(x) \leq \varepsilon\frac{(a-x)^{n+1}}{n+1}$$

On synthétise les deux résultats précédents sous la forme

$$\forall x \in [a-\eta, a+\eta], |\mathrm{R}(x)| \leq \varepsilon\frac{|x-a|^{n+1}}{n+1}$$

On a ainsi démontré la relation de prépondérance $\mathrm{R}(x) \underset{x\to a}{=} o((x-a)^{n+1})$, donc la formule de Taylor-Young à l'ordre $n+1$.

Exemple 20 *Au voisinage de* 0*, pour tout entier* n*,*

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

Exemple 21 *Si* $f'(a) \neq 0$*, on en déduit* $f(x) - f(a) \sim_{x\to a} f'(a)(x-a)$*, ce qui donne par exemple* $e^x - 1 \sim_{x\to 0} x$*,* $\sin(x) \sim_{x\to 0} x$*.*

Exemple 22 *Cherchons des équivalents des suites*

1. $e^{\arccos(1/n)} - e^{\pi/2}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

   Le cosinus est C^∞*. En appliquant la formule de Taylor-Young au cosinus entre* 0 *et* $1/\sqrt{n}$ *à l'ordre* 2*, on obtient*

$$\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \cos(0) + \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right)}{1!}\cos'(0) + \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right)^2}{2!}\cos''(0) + o\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right)^2\right) = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

   L'arccosinus est C^∞ *dans un voisinage de* 0*. La formule de Taylor-Young appliquée à l'arccosinus entre* 0 *et* $1/n$ *à l'ordre* 1 *fournit*

$$\arccos\left(\frac{1}{n}\right) = \arccos(0) + \frac{\left(\frac{1}{n} - 0\right)}{1!}\arccos'(0) + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

   On en déduit

$$\exp\left(\arccos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(\frac{\pi}{2}\right)\exp\left(-\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}))\right)$$

   Or la formule de Taylor-Young appliquée à l'exponentielle entre 0 *et* $-1/n + o(1/n)$ *à l'ordre* 1 *fournit*

$$\exp(-\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})) = \exp(0) + \left(-\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})\right)\exp'(0) + o(\frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$$

   En combinant tout ceci, on obtient

$$e^{\arccos(1/n)} - e^{\pi/2}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = e^{\pi/2}\left(1 - \frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})\right) = -\frac{e^{\pi/2}}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

   soit encore

$$e^{\arccos(1/n)} - e^{\pi/2}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim -\frac{e^{\pi/2}}{2n}$$

2. $\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) + \tan\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$*. On a* $\cos(\pi/n) = 1 - \frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$*, donc* $\ln(\cos(\pi/n)) = -\frac{\pi^2}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$*. D'autre part,* $\sin(1/n) = 1/n + o(1/n)$*, donc* $\tan(\sin(1/n)) = 1/n + o(1/n)$*. Comme* $1/n^2 = o(1/n)$*, on en déduit*

$$\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) + \tan\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$$

3. $\exp(\exp(\exp(-n))) - e$.

$$e^{e^{e^{-n}}} - e = e\left(\exp(e^{e^{-n}} - 1) - 1\right) \sim e\left(e^{e^{-n}} - 1\right) \sim e e^{-n} \sim e^{1-n}$$

⚠ **Attention**

La réciproque est fausse. Soit n *un entier naturel non nul. On considère l'application*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & si\, x = 0 \\ x^{n+1}\sin\left(\frac{1}{x^n}\right) & si\, x \neq 0 \end{cases}$$

Cette application admet le développement limité suivant à lordre n *en* 0*,*

$$f(x) = o(x^n)$$

Elle est dérivable en 0 *avec* $f'(0) = 0$ *et*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = (n+1)x^n\sin\left(\frac{1}{x^n}\right) - n\cos\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

Alors f' *n'est pas continue en* 0*. On en déduit que* f *n'est dérivable qu'une seule fois en* 0*.*

Propriété 41 *Soit n un entier naturel non nul. Si f admet une développement limité d'ordre n au voisinage de 0 de la forme*

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

alors $f(a) = a_0$, f est dérivable en a et $f'(a) = a_1$.

Démonstration. Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a $a_k(x-a)^k = o(x-a)$. On en déduit que

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + o(x-a)$$

Alors f est dérivable, donc continue, en a, et $a_0 = f(a)$, puis $a_1 = f'(a)$.

Propriété 42 (Primitivation des DL) *Soit n un entier naturel, f une application dérivable dans un voisinage de a telle que f' admet le développement limité suivant à l'ordre n en a*

$$f'(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Alors l'application f admet en a le développement limité d'ordre $n+1$ suivant

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \frac{a_2}{3}(x-a)^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + o((x-a)^{n+1})$$

Démonstration. Soit P la fonction polynomiale définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{P}(x) = f(a) + a_0(x-a) + \frac{a_1(x-a)^2}{2} + \cdots + \frac{a_n(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

dont la dérivée vaut

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{P}'(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n,$$

i.e la partie régulière du $\mathrm{DL}_n(a)$ de f'. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la relation de prépondérance $f'(x) - \mathrm{P}'(x) = o((x-a)^n)$, il existe un réel α strictement positif tel que

$$\forall x \in [a-\alpha, a+\alpha], |f'(x) - \mathrm{P}'(x)| < \varepsilon|x-a|^n$$

On introduit alors la fonction $g :]a-\alpha, a+\alpha[\to \mathbb{R}, x \mapsto \varepsilon(x-a)|x-a|^n/(n+1)$. Celle-ci est dérivable sur J et $\forall x \in \mathrm{J}, g'(x) = \varepsilon|x-a|^n$. On peut alors uitliser l'inégalité des accroissements finis et en discutant suivant la position de x par rapport à a, nous obtenons,

$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[, |f(x) - \mathrm{P}(x)| \leq \varepsilon \frac{|x-a|^{n+1}}{n+1}$$

On en déduit

$$f(x) - \mathrm{P}(x) = o((x-a)^{n+1})$$

ce qui est le résultat annoncé.

Exemple 23

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^{n+1})$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

Propriété 43 (Dérivation des DL) *Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, f n-fois dérivable en a et f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a de la forme*

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Alors f' admet un développement limité d'ordre $n-1$ au voisinage de a de la forme

$$f'(x) \underset{x\to a}{=} a_1 + 2a_2(x-a) + \cdots + na_n(x-a)^{n-1} + o((x-a)^{n-1})$$

Démonstration. On sait d'après la formule de Taylor-Young que f et f' admettent respectivement un $\mathrm{DL}_n(a)$ et un $\mathrm{DL}_{n-1}(a)$. Par unicité, on identifie correctement les bons coefficients.

⚠ **Attention**

C'est faux en toute généralité pour la dérivation! Prêtez attention au fait qu'on a supposé f n-fois dérivable en a.

Propriété 44 *Soit f et g deux fonctions admettant des développements limités à l'ordre n en a ayant pour partie régulières les polynômes $P_n = a_0 + a_1(X-a) + \dots + a_n(X-a)^n$ et $Q_n = b_0 + b_1(X-a) + \dots + b_n(X-a)^n$.*

- *Linéarité : Soit λ et μ deux scalaires. Alors, la fonction $\lambda f + \mu g$ admet un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière est $\lambda P_n + \mu Q_n$.*
- *Produit : la fonction fg admet un développement limité à l'ordre n en a dont la partie régulière est le produit $P_n Q_n$ tronqué à l'ordre n (cela signifie que l'on ne conserve que les termes $(X-a)^p$ dont le degré p est inférieur ou égal à n).*
- *Composition : Si $g(a) = a$ alors la fonction composée $f \circ g$ admet un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière est le polynôme $P_n \circ Q_n$ tronqué à l'ordre n.*
- *Quotient :*

Démonstration.

- $\lambda P_n + \mu Q_n$ est un polynôme du bon degré et les opérations sur les « petits o » donnent bien

$$\lambda f(x) + \mu g(x) \underset{x \to a}{=} \lambda P_n(x) + \mu Q_n(x) + o((x-a)^n)$$

- Remarquons que pour tout entier p strictement supérieur à n, nous avons

$$(x-a)^p = (x-a)^{p-n} x^n = o((x-a)^n)$$

  On décompose le polynôme $P_n Q_n$ via sa division euclidienne par $(X-a)^{n+1}$ que l'on écrit $P_n Q_n = (X-a)^{n+1} S_n + R_n$. Le reste R_n est de degré au plus n et représente la troncature de $P_n Q_n$ au degré n. Le produit $(X-a)^{n+1} S_n$ comporte tous les termes de degré strictement supérieur à n. Par conséquent,

$$(x-a)^{n+1} S_n(x) = o((x-a)^n)$$

  Ainsi,

$$f(x)g(x) \underset{x \to a}{=} (P_n(x) + o((x-a)^n))(Q_n(x) + o((x-a)^n)) = P_n(x)Q_n(x) + o((x-a)^n) = R_n(x) + o((x-a)^n)$$

- On commence par écrire

$$f(y) \underset{y \to a}{=} P_n(y) + (y-a)^n \varepsilon(y)$$

  avec $\varepsilon(y) \xrightarrow[y \to a]{} 0$ Comme on peut composer à droite, on en déduit que

$$f(g(x)) \underset{x \to a}{=} P_n(g(x)) + (g(x)-a)^n \varepsilon(g(x)-a)$$

  En utilisant la propriété précédente, on montre par récurrence que pour tout entier k strictement positif, l'application $x \mapsto g(x)^k$ admet un développement limité à l'ordre n, dont la partie régulière est le polynôme Q_n^k tronqué à l'ordre n. On en déduit que l'application $x \mapsto P_n(g(x))$ admet un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière est le polynôme $P_n \circ Q_n$ tronqué à l'ordre n.
  D'autre part, comme g est dérivable en a, $g(x) = g(a) + (x-a)g'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} = 0$. Ainsi,

$$(g(x) - g(a))^n \varepsilon(g(x)-a) = (x-a)^n (g'(a) + \varepsilon(x))^n \varepsilon(g(x)-a)$$

  Alors comme g est continue en a, avec $g(a) = a$, on déduit que

$$\lim_{x \to a} (g'(a) + \varepsilon(x))^n \varepsilon(g(x)-a) = 0$$

  Ainsi,

$$(g(x) - g(a))^n \varepsilon(g(x)-a) \underset{x \to a}{=} (x-a)^n o(1) \underset{x \to a}{=} o((x-a)^n)$$

  ce qui conclut la preuve.

Exemple 24 *Cherchons le $DL_2(0)$ de $f : x \mapsto \sqrt{1+x}\cos(x)$.*

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \quad \textit{et} \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2))(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)) \\ &= 1+\frac{1}{2}x-\frac{5}{8}x^2+o(x^2) \end{aligned}$$

Cherchons le $\mathrm{DL}_3(0)$ *de* $g : x \mapsto \sqrt{1+\sin(x)}$. *On a*

$$\sqrt{1+u} = 1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+\frac{1}{16}u^3+o(u^3)$$

et

$$\sin(x) = x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$$

Par conséquent, seul le terme u^1 *donnera un terme de degré* 3 *dans le* $\mathrm{DL}_3(0)$ *de* g. *Tous les autres sont « absorbés » dans le terme* $o(x^3)$.

$$g(x) = 1+\frac{1}{2}(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))+\frac{1}{8}(x^2+o(x^3))+\frac{1}{16}(x^3+o(x^3)) = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{48}x^3+o(x^3)$$

Exemple 25 *Exemple et/ou formalisation d'un quotient de développements limités.*

3.2 Développements limités usuels

Toute cette section à savoir par coeur sans la moindre hésitation ! On propose ici les développements à tout ordre (ou presque) de fonctions classiques en 0.

$$\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n) \\
\sin(x) &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}+o(x^{2p+2}) \\
\cos(x) &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!}+o(x^{2p+1}) \\
\mathrm{sh}(x) &= x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}+o(x^{2p+2}) \\
\mathrm{ch}(x) &= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2p}}{(2p)!}+o(x^{2p+1}) \\
(1+x)^\alpha &= 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n) \\
\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n) \\
\sqrt{1+x} &= 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\dots(2n-3)}{2\cdot 4\dots(2n)}x^n+o(x^n) \\
\ln(1+x) &= x-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n) \\
\arctan(x) &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2}) \\
\arcsin(x) &= x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5+\cdots+\frac{1\cdot 3\dots(2n-1)}{2\cdot 4\dots(2n)\cdot(2n+1)}x^{2n+1}+o(x^{2n+2}) \\
\tan(x) &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+o(x^6)
\end{aligned}$$

Exercice 3 *Déterminer la limite de* $(\tan(x)-x)/(\sin(x)-x)$ *en* 0.

Exercice 4 *Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 des fonctions suivantes :*

1. $x \mapsto \left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^{1/2}$
2. $x \mapsto \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$
3. $x \mapsto (1+2x)^{1/(1+x)}$
4. $x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}$
5. $x \mapsto e^{\mathrm{sh}(x)} - \ln\left|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right|$.

Exercice 5 *Calculer le développement limité*

1. *à l'ordre* 4 *au voisinage de* 1 *de* $x \mapsto x^{1/(-1+\ln(x))}$.
2. *à l'ordre* 4 *au voisinage de* $+\infty$ *(en faisant le changement de variable* $y = 1/x$*) de* $x \mapsto (x^3+x)^{1/3} - (x^3-x)^{1/3}$.
3. *à l'ordre* 3 *au voisinage de* $\pi/6$ *de* $x \mapsto \ln(2\sin(x))$.

3.3 Étude locale de fonctions

Position par rapport à une tangente

Propriété 45 *Soit f une fonction à valeurs réelles dérivable en a intérieur à* I*. On suppose que f admet un développement limité à l'ordre p (*$p \geq 2$*) en a de la forme*

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$$

avec a_p *un réell non nul. Alors la position de* $\mathcal{C}_f$ *la courbe représentative de f rapport à* T_a *sa tangente en a d'équation* $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ *au voisinage de a est donnée par*

— *Si p pair et* $a_p > 0$*,* $\mathcal{C}_f$ *est au-dessus de* T_a.
— *Si p impair et* $a_p > 0$*,* $\mathcal{C}_f$ *est au-dessus de* T_a *à droite de a, et en-dessous de* T_a *à gauche de a.*
— *Si p pair et* $a_p < 0$*,* $\mathcal{C}_f$ *est en-dessous de* T_a.
— *Si p impair et* $a_p < 0$*,* $\mathcal{C}_f$ *est au-dessus de* T_a *à gauche de a et en -dessous de* T_a *à droite de a.*

Exercice 6 *Soit* $f : x \mapsto \frac{e^{\tan(x)} - e^{\sin(x)}}{x - \sin(x)}$*. Déterminer un tangente en* 0 *à la courbe de f et sa position relative par rapport au graphe de f.*

Propriété 46 *Avec les mêmes hypothèses et notations qu'en question précédente*

— *Si p est pair et* $a_p > 0$*, f atteint un minimum local en a.*
— *Si p est pair et* $a_p < 0$*, f atteint un maximum local en a.*
— *Si p est impair, f n'atteint pas d'extremum local en a.*

En particulier, si f est deux-fois dérivable et $f''(a) \neq 0$*, f atteint un extremum local en a, dont la nature dépend du signe de* $f''(a)$.

Position par rapport à une asymptote

Propriété 47 *Soit f une fonction à valeurs réelles. On suppose que* $x \mapsto f(1/x)$ *admet un développement limité à l'ordre p (*$p \geq 2$*) en* 0^+ *de la forme*

$$f(1/x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_p}{x^p} + o(\frac{1}{x^p})$$

avec a_p *un réell non nul. Alors la position de* $\mathcal{C}_f$ *la courbe représentative de f rapport à* T_a *son asymptote en* $+\infty$ *d'équation* $y = a_0 + a_1 x$ *au voisinage de* $+\infty$ *est donnée par*

— $a_p > 0$*,* $\mathcal{C}_f$ *est au-dessus de* T_a.
— $a_p < 0$*,* $\mathcal{C}_f$ *est en-dessous de* T_a.

Exemple 26 *On considère* $f : x \mapsto \sqrt{x^4/(1+x^2)}$*. Chercher une asymptote de f en* $+\infty$ *et déterminer sa position relative par rapport au graphe de f.*