Applications et relations

Cornou Jean-Louis

10 août 2023

1 Applications

1.1 Produit cartésien, notion de relation

Définition 1 *Soit* E *et* F *deux ensembles. Le* ***produit cartésien*** *de* E *et* F*, noté* $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ *est l'ensemble des couples* (x,y) *où* x *parcourt* E *et* y *parcourt* F*.*

☞ **Remarque**
Soit x, x' *des éléments de* E*, puis* y *et* y' *des éléments de* F*. On a l'équivalence* $(x,y)=(x',y') \iff x = x'$ *et* $y = y'$*. L'élément* x *de* E *est appelé* ***première composante*** *de* (x,y)*, l'élément* y *de* F *est appelé* ***seconde composante*** *de* (x,y)*. On dit également que* x *est la première projection de* (x,y)*, et que* y *est la seconde projection de* (x,y)*.*

Exemple 1 *La première projection du cercle unité de* $\mathbb{R}^2$ *est le segment* $[-1,1]$*.*

⚠ **Attention**
L'ordre des éléments dans un couple a son importance, en particulier lorsque $\mathrm{E}=\mathrm{F}$*. Le couple* $(1,2)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *n'est pas le même objet que le couple* $(2,1)$*.*

Notation
Dans le cas où $\mathrm{E}=\mathrm{F}$*, on note* $\mathrm{E}\times\mathrm{E}=\mathrm{E}^2$*.*

On peut représenter un produit cartésien en deux dimensions, en représentant les éléments de E sur un axe horizontal, puis les éléments de F sur un axe vertical. Les couples associés sont des éléments du plan.

Définition 2 *Soit* E *et* F *deux ensembles. Toute partie* G *de* $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ *est appelée une relation binaire entre* E *et* F *(ou parfois graphe ensembliste de* $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$*). L'ensemble de ces parties de* $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ *est noté* F^{E}*.*

☞ **Remarque**
Pour (x,y) *élement de* G*, on dit que* x *est en relation avec* y*.*

Définition 3 *Soit* E, F *deux ensembles, et* G *un partie de* $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$*. On dit que* G *est un* ***graphe fonctionnel*** *lorsque pour tout élément* x *de* E*, il existe au plus un élément de* F *tel que le couple* (x,y) *appartient à* G*. Correctement quantifié, cela s'écrit*

$$\forall x\in\mathrm{E}, \forall y\in\mathrm{F}, \forall z\in\mathrm{F}, [(x,y)\in\mathrm{G}\wedge(x,z)\in\mathrm{G}] \Rightarrow (y=z)$$

Définition 4 *Avec les mêmes notations que précédemment, le domaine de définition de* G *est la première projection de* G*, i.e l'ensemble des éléments de* E *ayant une relation avec un élément de* F*. En termes ensemblistes, cela s'écrit*

$$\mathrm{D}_{\mathrm{G}} = \{x\in\mathrm{E} | \exists y\in\mathrm{F}, (x,y)\in\mathrm{G}\}$$

1.2 Fonctions, applications

Définition 5 *Une **fonction** est la donnée de trois objets, un ensemble* E *appelé **ensemble de départ**, un ensemble* F *appelé **ensemble d'arrivée** et* G *un graphe fonctionnel de* $E \times F$*.*

Définition 6 *L'ensemble de définition d'une fonction est la première projection de* G*, i.e l'ensemble des éléments* x *de* E *pour lesquels, il existe un unique élément* y *de* F *tel que le couple* (x, y) *appartient à* G*. Quand la fonction est notée* f*, son ensemble de définition est noté* D_f*.*

Définition 7 *On appelle une **application** une fonction telle que son ensemble de départ est égal à son ensemble de définition.*

Notation
Soit $f = (E, F, G)$ *une application. Pour tout élément* x *de* E*, l'unique élément* y *de* F *tel que* $(x, y) \in G$ *est noté* $f(x)$*. On note alors l'application* f *sous la forme*

$$f : E \to F, x \mapsto f(x)$$

Définition 8 *Soit* $f : E \to F$ *une application et* x *un élément de* E*. L'élément* $f(x)$ *de* F *est appelé image de* x *par l'application* f*. Soit* y *un élément de* F*, un élément* x *de* F *est appelé antécédent de* y *par* f *lorsque* $f(x) = y$*.*

⚠ **Attention**
Pour tout x *de* E*,* x *possède une unique image par* f*. Toutefois, pour* y *un élément de* F*, l'ensemble des antécédents de* y *par* f *peut être vide, ou contenir plus d'un élément, voire une infinité. Par exemple,* $\cos(0) = 1$ *est bien l'unique image du réel* 0 *par l'application cosinus. Pour autant, le réel* 1 *possède une infinité d'antécédents par cette application, tous les réels de la forme* $2k\pi$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$*, et le réel* 2 *ne possède aucun antécédent par l'application cosinus.*

Axiome 1 (du choix) *Soit* G *une relation binaire de* $E \times F$*, alors il existe un graphe fonctionnel* G' *inclus dans* G*.*

Exemple 2 *Les applications* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x)$ *et* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}, x \mapsto \exp(x)$ *sont distinctes. Les fonctions* tan *et* $1/(\cos/\sin)$ *n'ont pas le même ensemble de définition.*

Définition 9 *Soit* E *un ensemble et* A *une partie de* E*. L'**indicatrice** de* A *est l'application notée* $\mathbb{1}_A$

$$\mathbb{1}_A : E \to \{0, 1\}, x \mapsto 1 \text{ si } x \in A, 0 \text{ si } x \notin A$$

Notation
L'ensemble des applications de E *dans* F *(comprendre ayant* E *pour ensemble de départ et* F *pour ensemble d'arrivée) est noté* $\mathcal{F}(E, F)$*.*

Dans la pratique, nous ne différencierons très peu les mots « fonction » et « application ». On rencontrera parfois des expressions dont l'ensemble de définition n'est pas fourni. Il vous appartiendra alors de déterminer un ensemble convenable pour manipuler une application. De même, nous autorisons la confusion entre la notation $\mathcal{F}(E, F)$ et F^E dans le cadre de la première année (et même bien plus loin).

Exemple 3 *Quand* x *est réel, l'expression* $\ln(x^2 - x - 2)$ *est correctement définie pour* x *dans* $]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$*.*

Définition 10 *Soit* E *un ensemble. Alors l'application* $f : E \to E, x \mapsto x$ *est appelée l'application **identité de*** E*. Elle est notée* Id_E*.*

1.3 Familles, extension du produit cartésien

Définition 11 *Soit* I *et* E *deux ensembles, une **famille d'éléments** de* E ***indexée** par* I *est la donnée d'une application de* I *dans* E*. L'ensemble* I *est alors appelé ensemble d'indices ou ensemble d'indexation de la famille.*

☞ **Remarque**
Soit $f : I \to E$ *une famille d'éléments de* E*. Dans certains cas, on accepte la notation* $(f(i)_{i\in I})$ *ou* $(f_i)_{i\in I}$ *pour désigner cette application. Par exemple dans le cas des suites réelles, on note souvent une suite* $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sous la forme* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Définition 12 *Soit n un entier naturel non nul, $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \dots, \mathrm{E}_n$ des ensembles. On appelle produit cartésien de $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \dots, \mathrm{E}_n$ l'ensemble des multiplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où pour tout entier i entre 1 et n, x_i parcourt E_i. Un élément de cet ensemble est appelé multiplet ou encore n-uplet.*

Notation
Cet ensemble est noté $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2, \times \cdots \times \mathrm{E}_n$ ou encore $\prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i$. Si pour tout entier i entre 1 et n, $\mathrm{E}_i = \mathrm{E}$, on note

$$\underbrace{\mathrm{E} \times \mathrm{E} \times \cdots \times \mathrm{E}}_{n \text{ termes}} = \mathrm{E}^n$$

☞ **Remarque**
Pour tout élément $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de cet ensemble, pour tout entier i entre 1 et n, on appelle x_i la i-ième composante de cet élément. Pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ des n-uplets de $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times \cdots \times \mathrm{E}_n$, on a l'équivalence $x = y \iff \forall i \in [\![1, n]\!], x_i = y_i$.

Définition 13 *Soit E un ensemble et I un ensemble. On considère une famille $(\mathrm{A}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de parties de E indexée par I, i.e une famille d'éléments de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ indexée par I. On définit*

— *l'union des A_i pour i parcourant I par*

$$\bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i = \{x \in \mathrm{E} \,|\, \exists i \in \mathrm{I}, x \in \mathrm{A}_i\}$$

— *l'intersection des A_i pour i parcourant I par*

$$\bigcap_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i = \{x \in \mathrm{E} \,|\, \forall i \in \mathrm{I}, x \in \mathrm{A}_i\}$$

2 Opérations sur les applications

2.1 Images

Définition 14 *Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application et A une partie de E. L'**image directe** de A par f, notée $f(\mathrm{A})$ ou $f\langle \mathrm{A} \rangle$ est l'ensemble $\{f(x) | x \in \mathrm{A}\}$. C'est l'ensembles des images des éléments de E par f.*

✎ **Méthode**
Soit y un élément de F. Démontrer que y appartient à $f(\mathrm{A})$, c'est démontrer l'existence d'un élément x de A tel que $f(x) = y$.

Proposition - définition 1 *Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application et A une partie de E. Alors $g : \mathrm{A} \to \mathrm{F}, x \mapsto f(x)$ est une application notée $f_{|\mathrm{A}}$, appelée la **restriction** de f à A.*

Définition 15 *Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application et B une partie de F. L'**image réciproque** de B par f, notée $f^{-1}(\mathrm{B})$ ou $f^{-1}\langle \mathrm{B} \rangle$ est l'ensemble $\{x \in \mathrm{E} | f(x) \in \mathrm{B}\}$. C'est l'ensemble des antécédents des éléments de B par f.*

✎ **Méthode**
Soit x un élément de E, démontrer que x appartient à $f^{-1}(\mathrm{B})$, c'est démontrer que $f(x)$ appartient à B.

Proposition - définition 2 *Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application et B une partie de F telle que $f(\mathrm{E}) \subset \mathrm{B}$. Alors l'application $h : \mathrm{E} \to \mathrm{B}, x \mapsto f(x)$ est une application, appelée la **corestriction** de f à B, notée $f^{|\mathrm{B}}$.*

Propriété 1 *Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application, A_1 et A_2 deux parties de E, B_1 et B_2 deux parties de F. Alors*

$$f(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2) = f(\mathrm{A}_1) \cup f(\mathrm{A}_2)$$

$$f(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2) \subset f(\mathrm{A}_1) \cap f(\mathrm{A}_2)$$

$$f^{-1}(\mathrm{B}_1 \cup \mathrm{B}_2) = f^{-1}(\mathrm{B}_1) \cup f^{-1}(\mathrm{B}_2)$$

$$f^{-1}(\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2) = f^{-1}(\mathrm{B}_1) \cap f^{-1}(\mathrm{B}_2)$$

Démonstration. Soit y un élément de $f(A_1 \cup A_2)$. Alors il existe un élément x de $A_1 \cup A_2$ tel que $f(x) = y$. Comme x appartient à A_1 ou A_2, y appartient à $f(A_1) \cup f(A_2)$. Réciproquement, soit y un élément de $f(A_1) \cup f(A_2)$. Alors il existe un élément x_1 de A_1 tel que $f(x_1) = y$ ou un élément x_2 de A_2 tel que $f(x_2) = y$. Dans tous les cas, il existe un élément x de l'union $A_1 \cup A_2$ tel que $f(x) = y$, i.e $y \in f(A_1 \cup A_2)$.
Soit y un élément de $f(A_1 \cap A_2)$ alors il existe un élément x de $A_1 \cap A_2$ tel que $f(x) = y$. Ainsi, y est image d'un élément de A_1 par f et image d'un élément de A_2 par f, donc y appartient à $f(A_1) \cap f(A_2)$.
Soit x un élément de $f^{-1}(B_1 \cup B_2)$. Alors $f(x) \in B_1 \cup B_2$, donc $f(x)$ appartient à B_1 ou à B_2, donc x appartient à $f^{-1}(B_1)$ ou x appartient à $f^{-1}(B_2)$, i.e $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$. Réciproquement, soit x un élément de $f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$. Alors x appartient à $f^{-1}(B_1)$ ou à $f^{-1}(B_2)$, soit $f(x) \in B_1$ ou $f(x) \in B_2$. Ainsi, $f(x) \in B_1 \cup B_2$, ce qui s'écrit $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$.
La démonstration de la quatrième égalité répète exactement le même procédé. Soit x un élément de E. Alors

$$x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \iff f(x) \in B_1 \cap B_2 \iff f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in B_2 \iff x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2) \iff x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

⚠ **Attention**
La deuxième inclusion peut être stricte. Prenons $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \times \{0\}, (x, y) \mapsto (x, 0)$, $A_1 = \mathbb{R}^+ \times \{1\}$ *et* $A_2 = \mathbb{R}^- \times \{0\}$. *Ces parties vérifient*

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset, f(A_1 \cap A_2) = \emptyset \text{ et } f(A_1) \cap f(A_2) = \{(0, 0)\}$$

2.2 Injections, surjections, bijections

Définition 16 *Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est une **injection** ou encore **injective** lorsqu'elle vérifie*

$$\forall (x, y) \in E^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

☞ **Remarque**
En langue française, une application est injective lorsque les images de ses éléments sont deux à deux distinctes. On peut également écrire

$$\forall (x, y) \in E^2, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

via la contraposée.

Exemple 4 $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ *est injective, mais* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ *ne l'est pas.*

Propriété 2 *Soit $f : E \to F$ une application injective et A une partie de E. Alors la restriction $f_{|A}$ est injective.*

Démonstration. Soit x, y des éléments de A tels que $f_{|A}(x) = f_{|A}(y)$. Alors x et y sont aussi des éléments de E tels que $f(x) = f(y)$. L'injectivité de f implique alors $x = y$, donc que $f_{|A}$ est injective.

Exemple 5 *Avec les mêmes notations que précédemment,* $(Id_E)_{|A}$ *est injective.*

Définition 17 *Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est une **surjection** ou encore **surjective** lorsque $f(E) = F$, autrement dit lorsque tout élément de F appartient l'image directe de E par f.*

✎ **Méthode**
Démontrer qu'une application $f : E \to F$ est surjective, c'est démontrer pour tout élément y de F, l'existence d'un élément x de E tel que $f(x) = y$

Exemple 6 $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2$ *est surjective grâce à l'extraction de racines carrées complexes prouvée au chapitre précédent.* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x)$ *n'est pas surjective.*

Propriété 3 *Soit $f : E \to F$ une application. Alors l'application $f^{|f(E)}$ est surjective.*

Démonstration. Notons $g = f^{|f(E)}$ pour alléger les notations. Soit $y \in f(E)$, alors d'après la définition de l'image directe d'une partie par une application, il existe un élément x de E tel que $y = f(x)$, ainsi $y = g(x)$. Ainsi, g est surjective puisque tout élément de son ensemble d'arrivée ($f(E)$) possède un antécédent par g.

Exemple 7 $\mathbb{R} \to [-1, 1], x \mapsto \sin(x)$ *est surjective. Cela peut se montrer à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires et la continuité du sinus.*

Définition 18 *Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application. On dit que f est une **bijection**, ou encore **bijective** lorsque f est à la fois injective et surjective.*

Propriété 4 *Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application. f est bijective si et seulement si*

$$\forall y \in \mathrm{F}, \exists! x \in \mathrm{E}, f(x) = y$$

Démonstration. Supposons que f est bijective. Soit y un élément de F. Alors la surjectivité de f assure qu'il existe un élément x de E tel que $f(x) = y$.. Mais alors pour tout antécédent x' de y, on a $f(x') = y = f(x)$. L'injectivité de f implique alors que $x = x'$, donc qu'il a y un unique antécédent de y par f. Réciproquement, si tout élément de F possède un unique antécédent par f, alors il en possède au moins un, donc f est surjective. D'autre part, soit x, x' des éléments de E. Alors l'élément $y = f(x)$ de F possède pour antécédents x et x' par f. L'unicité de cet antécédent entraîne bien $x = x'$, donc que f est injective. En conclusion, f est bien bijective.

✎ **Méthode**
Pour démontrer qu'une application $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est bijective, on peut par exemple procéder par analyse-synthèse : pour tout y dans F, supposer l'existence d'un élément x de E tel que $f(x) = y$, démontrer qu'au plus un seul élément x convient, puis démontrer qu'il convient effectivement.

Proposition - définition 3 *Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application bijective. Alors, en notant pour tout y, $g(y)$ l'unique élément de E tel que $f(g(y)) = y$, $\mathrm{G}' = \{(y, g(y)) | y \in \mathrm{F}\}$ est un graphe fonctionnel de $\mathrm{F} \times \mathrm{E}$ et l'application $g : \mathrm{F} \to \mathrm{E}, y \to g(y)$ ainsi définie est appelée **application réciproque** de f. Elle est notée f^{-1}.*

Exemple 8 *L'application identité de E est bijective de réciproque elle-même. L'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x - 4y, 2x + 3y)$ est bijective de réciproque $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (s, t) \mapsto (3s/11 + 4t/11, -2s/11 + t/11)$.*

Propriété 5 *Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application injective. Alors la corestriction $f^{|f(\mathrm{E})}$ est une bijection.*

Définition 19 *Soit E et F deux ensembles. On dit que E et F sont **en bijection** ou **équipotents** lorsqu'il existe une application $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ bijective.*

Exemple 9 *L'application exponentielle assure que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^{+*}$ sont en bijection. L'application $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*, (n, m) \mapsto 2^n(2m + 1)$ est bijective d'après le théorème fondamental de l'arithmétique, ce qui implique que $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{N}^2$ sont en bijection.*

2.3 Composition

Dans tout ce qui suit, on note E, F, G des ensembles.

Définition 20 *Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ deux applications. On définit la **composée** de g par f, notée $g \circ f$ via*

$$\forall x \in \mathrm{E}, g \circ f(x) = g(f(x))$$

⚠ **Attention**
Faites attention à l'ordre de composition. Écrivez soigneusement $\mathrm{E} \to \mathrm{F} \to \mathrm{G}, x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$.

Théorème 1 *Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ deux applications injectives. Alors l'application $g \circ f$ est injective.*

Démonstration. Soit x et y des éléments de E tels que $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. Alors les éléments $f(x)$ et $f(y)$ de F vérifient $g(f(x)) = g(f(y))$. L'injectivité de g implique alors $f(x) = f(y)$. Mais alors l'injectivité de f implique à son tour $x = y$. On ainsi prouvé

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, g \circ f(x) = g \circ f(y) \Rightarrow x = y,$$

i.e l'injectivité de l'application $g \circ f$.

Théorème 2 *Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ deux applications surjectves. Alors l'application $g \circ f$ est surjective.*

Démonstration. Soit z un élément de G. Alors la surjectivité de g implique l'existence d'un élément y de F tel que $z = g(y)$. On applique ensuite la surjectivité de l'application f à l'élément y de F, elle entraîne qu'il existe un élément x de F tel que $y = f(x)$. On obtient ainsi, $z = g(f(x)) = g \circ f(x)$, ce qui démontre que z possède un antécédent par $g \circ f$, et ce pour tout élément z de G. C'est bien établir la surjectivité de $g \circ f$.

Exercice 1 *Avec les mêmes notations, montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective. De même, montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.*

Théorème 3 *Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application. Pour que f soit bijective, il faut et il suffit qu'il existe une application $g : \mathrm{F} \mapsto \mathrm{E}$ telle que*

$$f \circ g = id_{\mathrm{F}} \quad \text{et} \quad g \circ f = id_{\mathrm{E}}$$

Le cas échéant, l'application g est nécessairement l'application réciproque f^{-1} de f.

Démonstration. Si f est bijective, alors pour tout y de F, $f^{-1}(y)$ est l'unique élément de E tel que $f(f^{-1}(y)) = y$, i.e $f \circ f^{-1}(y) = y$. Ainsi, $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{F}}$. De plus pour tout élément x de E, $f(x)$ possède pour unique antécédént x par f, i.e $f^{-1}(f(x)) = x$, ce qui s'écrit $f^{-1} \circ f(x) = x$. On a alors prouvé que $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.
Supposons à présent qu'il existe une application $g : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ vérifiant les deux égalités d'applications composées. Montrons que f est injective. Soit x_1, x_2 des éléments de E tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors en composant par g, on obtient $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, soit $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$, i.e $\mathrm{id}_{\mathrm{E}}(x_1) = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}(x_2)$, soit $x_1 = x_2$. L'injectivité est alors prouvée. Démontrons à présent que f est surjective. Soit y un élément de F, alors $f(g(y)) = y$, donc $g(y)$ est un antécédent de y par f.
Soit à présent deux applications g_1, g_2 de F dans E vérifiant les compositions. Alors

$$g_1 \circ f \circ g_2 = \mathrm{id}_{\mathrm{E}} \circ g_2 = g_2 \quad \text{et} \quad g_1 \circ f \circ g_2 = g_1 \circ \mathrm{id}_{\mathrm{F}} = g_1,$$

cela implique que $g_1 = g_2$.

☞ Remarque
L'une des compositions implique l'injectivité de f, l'autre implique sa surjectivité. Laquelle est laquelle ?

✎ Méthode
Pour prouver la bijectivité d'une application, il peut être plus rapide de proposer sa réciproque et de vérifier les compositions indiquées plus haut.

Propriété 6 *Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ deux applications bijectives. Alors $g \circ f$ est bijective, de réciproque $f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Démonstration. L'application $g \circ f$ est bijective puisqu'injective et surjective d'après les propriétés précédentes. Mais alors

$$g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{id}_{\mathrm{F}} \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{G}}$$
$$f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{id}_{\mathrm{F}} \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$$

On peut alors affirmer d'après le théorème précédent que $f^{-1} \circ g^{-1}$ est la réciproque de $g \circ f$.

Propriété 7 *Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application bijective et B une partie de F. Alors l'image réciproque de B par f, $f^{-1}(\mathrm{B})$, est égale à l'image directe de B par l'application f^{-1} (la réciproque de f).*

Démonstration. Comme f est bijective, tout élément b de B possède un unique antécédent par f, il s'agit de $f^{-1}(b)$. Autrement dit,

$$f^{-1}(\mathrm{B}) = \{f^{-1}(b) | b \in \mathrm{B}\}.$$

C'est bien ici l'image directe de B par l'application réciproque f^{-1}.

Théorème 4 *Soit E, F deux ensembles finis ayant même nombre d'éléments et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application. Alors on a l'équivalence : f bijective $\iff$ f injective $\iff$ f surjective.*

Démonstration. Supposons f injective. Alors l'image directe $f(\mathrm{E})$ possède autant d'éléments que E puisque deux éléments distincts ont des images distinctes par f. Mais alors $|f(\mathrm{E})| = |\mathrm{E}| = |\mathrm{F}|$, donc la partie $f(\mathrm{E})$ de F est égale à F, ce qui signifie que f est surjective, donc bijective. Supposons à présent que f est surjective. Alors $f(\mathrm{E}) = \mathrm{F}$ a autant d'éléments que E. Par conséquent, si deux éléments distincts x, y de E ont même image par f, alors $|f(\mathrm{E})| < \mathrm{E}$, ce qui est absurde. On a ainsi prouvé que f est injective, donc bijective.

3 Relations binaires

Notation
Soit E *un ensemble et* $\mathcal{R}$ *une relation binaire entre* E *et* E*, i.e une partie de* E^2*. Plutôt que d'écrire* $(x,y) \in \mathcal{R}$*, on écrit* $x\mathcal{R}y$ *pour indiquer que les éléments* x *est en relation avec* y*. La partie*

$$\{(x,y) \in \mathrm{E}^2 | x\mathcal{R}y\}$$

est plutôt appelée graphe de la relation $\mathcal{R}$ *dans ce cadre.*

Définition 21 *Soit* E *un ensemble muni d'une relation binaire* $\mathcal{R}$ *et* A *une partie de* E*. Alors* $\{(x,y) \in \mathrm{A}^2 | x\mathcal{R}y\}$ *définit un graphe ensembliste et une relation binaire sur* A*, appelée relation induite sur* A*. Elle est parfois notée* $\mathcal{R}_\mathrm{A}$*.*

3.1 Relations d'équivalence

Définition 22 *Soit* E *un ensemble et* $\mathcal{R}$ *une relation binaire sur cet ensemble. On dit que la relation* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence lorsque*

- $\mathcal{R}$ *est réflexive :* $\forall x \in \mathrm{E}, x\mathcal{R}x$*.*
- $\mathcal{R}$ *est symétrique :* $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$*.*
- $\mathcal{R}$ *est transitive :* $\forall (x,y,z) \in \mathrm{E}^3, (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$*.*

Exemple 10 *La relation d'égalité est une relation d'équivalence. Soit* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *une application. On définit la relation binaire* $\mathcal{R}$ *sur* E *via* $x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y)$*. Alors* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence.*

Propriété 8 *Soit* E *un ensemble muni d'une relation d'équivalence* $\mathcal{R}$ *et* A *une partie de* E*. Alors la relation* $\mathcal{R}_\mathrm{A}$ *induite sur* A *est une relation d'équivalence.*

Exemple 11 *Soit* c *un réel. On définit une relation binaire sur* $\mathbb{R}$ *via* $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, a\mathcal{R}b \iff \exists n \in \mathbb{Z}, a-b = nc$*. On dit que* a *et* b *sont congrus modulo* c*, ce qui est noté* $a \equiv b[c]$*. La relation de congruence modulo* c *est une relation d'équivalence. De même, on définit sur* $\mathbb{Z}$ *la relation de congruence modulo* n*, via* $\forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2, p \equiv q[n] \iff \exists k \in \mathbb{Z}, p - q = kn$*, qui est une relation d'équivalence.*

Démonstration. Soit a un réel. Alors $a = a + c \times 0$, donc $a \equiv a[c]$ ce qui prouve la réflexivité. D'autre part, soit a et b deux réels tel que $a \equiv b[c]$, donc il existe un entier relatif n tel que $a = b+nc$. Mais alors $b = a-nc = a+(-n)c$. Comme $-n$ est un entier relatif, cela prouve que $b \equiv a[c]$, donc que la relation de congruence modulo c est symétrique. Enfin, soit a, b, d trois réels tels que $a \equiv b[c]$ et $b \equiv d[c]$. Ainsi, il existe deux entiers relatifs n et m tels que $a = b+nc$ et $b = d + mc$. On en déduit que $a = d + mc + nc = d + (m+n)c$. Comme $m+n$ est un entier relatif, on en déduit que $a \equiv d[c]$, donc que la relation est transitive.

Définition 23 *Soit* E *un ensemble, et* $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille quelconque de parties de* E*. On dit que*

- *la famille* $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *est disjointe lorsque que* $\forall (j,k) \in \mathrm{I}^2, j \neq k \Rightarrow \mathrm{A}_j \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$*.*
- *la famille* $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *est un recouvrement de* E*, lorsque* $\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i = \mathrm{E}$*.*
- *la famille* $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *un recouvrement disjoint de* E*, lorsque c'est une famille disjointe et* $\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i = \mathrm{E}$*.*
- *la famille* $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *est une partition de* E*, lorsque* $\forall i \in \mathrm{I}, \mathrm{A}_i \neq \emptyset$ *et c'est un recouvrement disjoint de* E*.*

Définition 24 *Soit* $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence sur* E*. Alors pour tout* x*, on note*

$$\mathrm{C}(x) = \{y \in \mathrm{E} | x\mathcal{R}y\}.$$

Cette partie de E *est appelée la classe d'équivalence de* x*. Une partie* A *de* E *est appelée une classe d'équivalence lorsqu'il existe un élément* x *de* E *tel que* $\mathrm{A} = \mathrm{C}(x)$*.*

Notation
On rencontre également la notation $\overline{x}$ *pour désigner* $\mathrm{C}(x)$*. Attention à ne pas la confondre avec la notation du conjugué d'un nombre complexe.*

Théorème 5 *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence et $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ l'ensemble des classes d'équivalence associées à cette relation. Alors la famille $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une partition de E.*

Démonstration. Soit A une classe d'équivalence. Alors il existe x dans E tel que $\mathrm{A} = \mathrm{C}(x)$. Comme $\mathcal{R}$ est réflexive, $x \in \mathrm{C}(x)$, donc $\mathrm{A} = \mathrm{C}(x)$ est non vide. Soit A et B deux classes d'équivalence. Notons a et b des élements de E tels que $\mathrm{A} = \mathrm{C}(a)$ et $\mathrm{B} = \mathrm{C}(b)$. Supposons que A et B sont d'intersection non vide, et notons c un élément de E tel que $c \in \mathrm{C}(a) \cap \mathrm{C}(b)$. Alors $a\mathcal{R}c$ et $b\mathcal{R}c$. On en déduit par symétrie que $c\mathcal{R}b$, puis par transitivité que $a\mathcal{R}b$. Mais alors par transitivité $\mathrm{C}(a) = \mathrm{C}(b)$. Par conséquent, deux classes d'équivalences sont soit égales, soit disjointes. Ainsi, l'ensemble des classes d'équivalence est une famille disjointe. D'autre part, pour tout x de E, $x \in \mathrm{C}(x)$, donc $\mathrm{E} \subset \bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i$. Ainis, la famille des classes d'équivalence est un recouvrement de E.
En conclusion, la famille des classes d'équivalence est une partition de E.

Définition 25 *L'ensemble des classes d'équivalence est appelé ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$, noté $\mathrm{E}/\mathcal{R}$.*

Théorème 6 *Soit $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une partition de E. On définit une relation binaire sur E via*

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, x\mathcal{R}y \iff \exists i \in \mathrm{I}, (x \in \mathrm{A}_i) \wedge (y \in \mathrm{A}_i)$$

Alors la relation binaire $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et ses classes d'équivalence sont exactement les $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$.

Démonstration. Comme $\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i = \mathrm{E}$, pour tout x de E, $\exists i \in \mathrm{I}$ tel que $x \in \mathrm{A}_i$. Cela implique que $x\mathcal{R}x$, donc que la relation $\mathcal{R}$ est réflexive. D'autre part, soit x, y deux éléments de E en relation et soit $i \in \mathrm{I}$ tel que $(x \in \mathrm{A}_i) \wedge (y \in \mathrm{A}_i)$. Mais alors $(y \in \mathrm{A}_i) \wedge (x \in \mathrm{A}_i)$, donc $y\mathcal{R}x$ et la relation $\mathcal{R}$ est réflexive. Enfin, soit x, y, z des éléments de E tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Notons alors $i \in \mathrm{I}$ tel que A_i contient x et y, puis $j \in \mathrm{I}$ tel que A_j contient y et z. Alors A_i et A_j sont d'intersection non vide puisqu'ils contiennent tous deux l'élément y. Par conséquent, $\mathrm{A}_i = \mathrm{A}_j$ et $i = j$. Mais alors x et z appartiennent à la même partie A_i, donc sont en relation. Cela prouve que la relation $\mathcal{R}$ est transitive.
Soit A une classe d'équivalence pour cette relation $\mathcal{R}$. Notons x un élément de E tel que $\mathrm{A} = \mathrm{C}(x)$. Alors comme la famille $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une partition de E, il existe un unique indice i tel que $x \in \mathrm{A}_i$. Démontrons alors que $\mathrm{C}(x) = \mathrm{A}_i$. Soit y un élément de $\mathrm{C}(x)$, alors $y\mathcal{R}x$, donc il existe un indice j tel que x et y appartiennent tous deux à A_j. Mais alors, cet indice ne peut être que i puisque la famille est disjointe. Ainsi, $y \in \mathrm{A}_i$. Réciproquement, soit y un élément de A_i. Alors $y \in \mathrm{A}_i$ tout comme $x \in \mathrm{A}_i$, ainsi $x\mathcal{R}y$, donc $y \in \mathrm{C}(x)$.

Exemple 12 *Soit n un entier naturel non nul. On considère la relation de congruence modulo n sur $\mathbb{Z}$. Alors les classes d'équivalence de cette relation d'équivalence sont les*

$$\{a + kn | k \in \mathbb{Z}\}_{a\in[\![0,n-1]\!]}.$$

Il y en a exactement n.

Exemple 13 *On considère la relation de congruence modulo 1 sur $\mathbb{R}$. Alors les classes d'équivalence de cette relation d'équivalence sont les*

$$\{a + n | n \in \mathbb{Z}\}_{a\in[0,1[}$$

Elles sont en bijection avec l'intervalle réel $[0,1[$.

Propriété 9 *Soit E un ensemble doté d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Alors l'application $\mathrm{E} \to \mathrm{E}/\mathcal{R}, x \mapsto \mathrm{C}(x)$ est surjective.*

Démonstration. Cela provient de la définition d'une classe d'équivalence.

Définition 26 *L'application précédente est appelée surjection canonique de la relation $\mathcal{R}$. Pour tout élément A de $\mathrm{E}/\mathcal{R}$, tout antécédent de A par cette surjection est appelé* ***représentant*** *de A.*

Propriété 10 *Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application et $\mathcal{R}$ la relation définie via $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y)$. Alors une partie de E est une classe d'équivalence pour $\mathcal{R}$ si et seulement si $\exists y \in \mathrm{E}, \mathrm{A} = f^{-1}(\{f(y)\})$. Autrement dit, les classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$ sont les images réciproques de singletons de F dans l'image de f.*

Démonstration. Soit z un élément de $f(\mathrm{E})$ et notons y un élément de E tel que $f(y) = z$. Montrons que $f^{-1}(\{f(y)\}) = \mathrm{C}(z)$. Soit x un élément de E. Alors $x \in f^{-1}(\{f(y)\}) \iff f(x) = f(y) \iff y\mathcal{R}x \iff x \in \mathrm{C}(y)$. Soit A une classe d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}$. Alors il existe un élément x de E tel que $\mathrm{A} = \mathrm{C}(x)$. Mais alors, comme précédemment, $\mathrm{A} = f^{-1}(\{f(x)\})$ et A est une image réciproque de singleton par f.

Exercice 2 (difficile) *Avec les mêmes notations que précédemment, montrer que l'application $\tilde{f} : \mathrm{E}/\mathcal{R} \to f(\mathrm{E}), \mathrm{C}(x) \mapsto f(x)$ est bien définie et bijective.*

3.2 Relations d'ordre

Définition 27 *Soit* E *un ensemble doté d'une relation binaire* $\mathcal{R}$*. On dit que* $\mathcal{R}$ *est une relation d'ordre lorsque*

- $\mathcal{R}$ *est réflexive :* $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.
- $\mathcal{R}$ *est antisymétrique :* $\forall (x, y) \in E^2, [(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x)] \Rightarrow x = y$.
- $\mathcal{R}$ *est transitive :* $\forall (x, y, z) \in E^3, (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

On dit alors que le couple $(E, \mathcal{R})$ *est un ensemble ordonné.*

Notation
Les relations d'ordre sont plutôt notées avec des symboles tels que $\leq$ *ou* $\prec$.

Définition 28 *Soit* $(E, \leq)$ *un ensemble ordonné. On dit que que la relation d'ordre* $\leq$ *est totale lorsque*

$$\forall (x, y) \in E^2, (x \leq y) \vee (y \leq x)$$

Une relation d'ordre non totale est appelée relation d'ordre partielle.

Exemple 14
- *Les relations* $\leq$ *et* $\geq$ *sur* $\mathbb{R}$ *sont des relations d'ordre totales. Par contre, les relations* $<$ *et* $>$ *ne sont pas pas des relations d'ordre car elles ne sont pas réflexives.*
- *Considérons l'ensemble* $\mathbb{N}$ *des entiers naturels. Pour tout couple* (a, b) *de* $\mathbb{N}^2$*, on dit que* $a \leq b \iff \exists c \in \mathbb{N}, b = a + c$*. Cela définit bien une relation d'ordre totale.*
- *On définit la relation sur* $\mathbb{Z}$ *:* $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, a|b \iff \exists n \in \mathbb{Z}, b = an$*. Celle-ci n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas antisymétrique.* $1|(-1)$ *et* $(-1)|1$*, mais* $-1 \neq 1$.
- *La relation de division sur* $\mathbb{N}$ *est une relation d'ordre partielle :*
  - *Soit* a *dans* $\mathbb{N}$*, alors* $a = 1 \times a$*, donc* $a|a$ *et la relation est réflexive.*
  - *Soit* $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ *tel que* $a|b$ *et* $b|c$*. On note* n *et* m *des entiers naturels tels que* $b = an$ *et* $c = mb$*. On en déduit* $c = mna$*. Comme* $mn \in \mathbb{N}$*, on en déduit que* $c|a$*.*
  - *Soit* $(a, b) \in N^2$ *tel que* $a|b$ *et* $b|a$*. On note* n *et* m *des entiers naturels tels que* $b = an$ *et* $a = mb$*. On en déduit* $a = mna$ *soit encore* $a(mn - 1) = 0$*. On distigue alors deux cas : si* $a = 0$*, alors* $b = an = 0$*, donc* $b = a$*. Si* $a \neq 0$*, alors* $mn = 1$*. Comme* m *et* n *sont deux entiers naturels,* $m = n = 1$*, donc* $b = a$*. La relation est bien antisymétrique.*
  - 2 *ne divse pas* 3 *et* 3 *ne divise pas* 2.
- *Soit* E *un ensemble. Alors la relation d'inclusion dans* $\mathcal{P}(E)$ *est une relation d'ordre. Elle est totale si et seulement si* E *possède au plus un élément.*

Définition 29 *Soit* $(E, \prec)$ *un ensemble ordonné non vide. On définit alors la relation suivante sur* E *:*

$$\forall (x, y) \in E^2, x \nprec y \iff (x \prec y) \wedge (x \neq y)$$

Cette relation n'est pas réflexive, on l'appelle relation d'ordre strict associé à $\prec$*. Attention, ce n'est pas une relation d'ordre.*

Proposition - définition 4 *Soit* $(E, \prec)$ *un ensemble ordonné. On définit alors la relation suivante sur* E *:*

$$\forall (x, y) \in E^2, x \succ y \iff y \prec x$$

Cela définit bien une relation d'ordre. Celle-ci est appelée relation d'ordre opposée à $\prec$.

Dans tout ce qui suit, on peut remplacer $(E, \prec)$ par $(\mathbb{R}, \leq)$ pour la facilité de lecture.

Définition 30 *Soit* $(E, \prec)$ *un ensemble ordonné et* A *une partie de* E*. On dit que* A *est*

- *majorée lorsqu'il existe un élément* M *de* E *tel que* $\forall a \in A, a \prec M$*. Un tel élément* M *est appelé majorant de* A
- *admet un maximum lorsqu'il existe un élément* M *de* A *tel que* $\forall a \in A, a \prec M$.
- *minorée lorsqu'il existe un élément* m *de* E *tel que* $\forall a \in A, m \prec a$*. Un tel élément* m *est appelé minorant de* A.

— *admet un minimum lorsqu'il existe un élément m de A tel que $\forall a \in \mathrm{A}, m \prec a$.*

— *bornée lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.*

⚠ **Attention**

Faites attention à l'ensemble auxquels appartiennent les majorants et les maximums (resp. minorants et minimums).

Exemple 15 *L'intervalle réel $]-1,1[$ est borné, mais n'admet ni majorant, ni minorant. S'il admettait un majorant M, il vérifierait $\mathrm{M} < 1$, mais alors $\mathrm{M} < (1+\mathrm{M})/2 < 1$ implique que $(1+\mathrm{M})/2$ appartient à cet intervalle, mais n'est pas majoré par M, ce qui absurde.*
Dans $\mathbb{N}$ muni de la relation de divisibilité, 1 est le minimum de $\mathbb{N}$ puisqu'il divise tout entier naturel et 0 est le maximum puisque tout entier naturel divise 0.

Propriété 11 *Soit A une partie admettant un maximum M. Alors celui-ci est unique.*

Démonstration. Soit M' un maximum de A. Alors comme M est un maximum de A et M' appartient à A, $\mathrm{M}' \prec \mathrm{M}$. De même, M' est un maximum de A et M appartient à A, donc $\mathrm{M} \prec \mathrm{M}'$. Par antisymétrie de la relation d'ordre $\prec$, on en déduit que $\mathrm{M} = \mathrm{M}'$, ce qui prouve l'unicité du maximum.

Exercice 3 *Soit A une partie admettant un minimum m. Montrer que celui-ci est unique.*

Définition 31 *Soit A une partie de $(\mathrm{E}, \prec)$ ensemble ordonné. On dit que A*

— *admet une borne supérieure lorsque l'ensemble de ses majorants admet un minimum. Celui-ci est alors notée $\sup \mathrm{A}$ (puisqu'unique).*

— *admet une borne inférieure lorsque l'ensemble de ses minorants admet un majorant. Celui-ci est alors notée $\inf \mathrm{A}$ (puisqu'unique).*

Exemple 16 *L'intervalle réel $]-1,1[$ admet une borne supérieure, il s'agit de 1 et une borne inférieure, il s'agit de -1. Dans $(\mathbb{Q}, \leq)$, considérons le sous-ensemble $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ n'admet pas de borne supérieure. Il est majoré par 2 (par exemple). Soit b un majorant rationnel de A, et exhibons un nouveau majorant rationnel $c < b$. Comme 1 appartient à A, $b \geq 1 > 0$. Considérons alors le rationnel $c = \frac{b}{2} + \frac{1}{b} > 0$ (construit en s'inspirant de la méthode de Héron). Comme $c^2 - 2 = \left(\frac{b^2-2}{2b}\right)^2$ on a $c^2 \geq 2$. Ainsi, c est un majorant de A. D'autre part, $c - b = \frac{1}{2b}(2-b^2) \leq 0$. Comme $\sqrt{2}$ est irrationnel, $2 - b^2 < 0$ et on a même $c < b$.*

Définition 32 *Soit $(\mathrm{E}, \prec)$ et $(\mathrm{F}, \leq)$ deux ensembles ordonnés, ainsi que $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application. On dit que f est*

— *croissante lorsque $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, x \prec y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.*

— *strictement croissante lorsque $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, x \precneq y \Rightarrow f(x) < f(y)$.*

— *décroissante lorsque $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, x \prec y \Rightarrow f(y) \leq f(x)$.*

— *strictement décroissante lorsque $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, x \precneq y \Rightarrow f(y) < f(x)$.*

— *monotone lorsque f est croissante ou décroissante.*

— *strictement monotone lorsque f est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Exemple 17 *L'identité est à la fois strictement croissante et strictement décroissante. C'est même la seule application à le vérifier. L'application $f : \mathcal{P}(\mathrm{E}) \to \mathcal{P}(\mathrm{E}), \mathrm{A} \mapsto \mathrm{A}^c$ est décroissante pour l'inclusion*

Propriété 12 *Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application monotone et injective entre $(\mathrm{E}, \prec)$ et $(\mathrm{F}, \leq)$ deux ensembles ordonnés. Alors, f est strictement monotone.*

Démonstration. Considérons le cas où f est croissante par exemple (l'autre cas se traite de manière symétrique). Soit x, y deux éléments de E tels que $x \precneq y$. Alors en particulier, $x \prec y$ et la croissance de f entraîne $f(x) \leq f(y)$. Toutefois, comme $x \neq y$ et f est injective, $f(x) \neq f(y)$. Par conséquent, $f(x) < f(y)$, ce qui prouve la stricte croissance de f.

Propriété 13 *Soit $(\mathrm{E}, \prec)$ un ensemble totalement ordonné et $(\mathrm{F}, \leq)$ un ensemble ordonné, puis $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application strictement monotone. Alors f est injective.*

Démonstration. Examinons le cas f strictement croissante. Soit x y deux éléments de E tels que $x \neq y$. Comme E est totalement ordonné, on peut ordonner (comparer) x et y. Premier cas : $x \prec y$. Comme on a supposé $x \neq y$, on a même $x \not\preceq y$. La stricte croissance de f implique alors $f(x) \not\preceq f(y)$ et en particulier $f(x) \neq f(y)$. Deuxième cas $y \prec x$. Comme précédemment, on a $y \not\preceq x$ et $f(y) \not\preceq f(x)$ et en particulier $f(x) \neq f(y)$. Dans tous les cas, $f(x) \neq f(y)$, ce qui prouve que f est injective.

Propriété 14 *Soit* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *une application bijective monotone avec* E *totalement ordonné. Alors sa réciproque est monotone de même monotonie.*

Démonstration. Pour se fixer les idées, considérons le cas où f est croissante. Soit y_1, y_2 des éléments de F tels que $y_1 \leq y_2$. Montrons que $f^{-1}(y_1) \prec f^{-1}(y_2)$. Comme f est surjective, il existe des éléments x_1, x_2 de E tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$, ce qui implique $f(x_1) \leq f(x_2)$. Comme E est totalement ordonné, on peut comparer x_1 et x_2. Supposons un instant que $x_2 \not\preceq x_1$, alors comme f est injective et croissante, elle est strictement croissante. Donc $f(x_2) < f(x_1)$, soit $y_2 < y_1$, ce qui contredit $y_1 \leq y_2$. Par conséquent, $x_1 \prec x_2$, i.e $f^{-1}(y_1) \prec f^{-1}(y_2)$, ce qui prouve la croissance de f^{-1}.

Propriété 15 *Soit* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$*,* $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ *deux applications monotones (resp. strictement monotones) entre ensembles ordonnés. Alors* $g \circ f$ *est monotone (resp. strictement monotone).*

Démonstration. Si f et g sont de même monotonie (i.e toutes deux croissantes ou toutes deux décroissantes), alors $g \circ f$ est croissante ($x \prec y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \Rightarrow g(f(x)) \triangleleft g(f(y))$). Dans le cas contraire, $g \circ f$ est décroissante.