Analyse numérique

Cornou Jean-Louis

27 février 2024

Ce chapitre est l'occasion de mettre en pratique les différentes notions d'analyse étudiées durant les deux derniers mois : topologie réelle, suites numériques, fonctions de la variable réelle. L'implémentation d'algorithmes apporte un autre éclairage sur les preuves des théorèmes ou les objets manipulés en analyse réelle. L'objectif n'est pas temps d'apprendre tout ce qui suit, mais de comprendre en quoi une preuve peut se traduire en méthode de résolution, théorique ou pratique. Il ne faut toutefois pas négliger l'aspect mathématique de tout ce qui suit. Résoudre un exercice en classes prépas ne passe pas par le hasard, mais des méthodes éprouvées. Leur mise en place découle de résultats précis et non d'une heuristique hasardeuse.

1 Compléments

Tout d'abord, un petit complément : la formule de Taylor-Lagrange. Celle-ci sera revue au second semestre.

Théorème 1 (Formule de Taylor-Lagrange) *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, a, b deux réels de I tels que $a < b$ et n un entier naturel. On suppose que f est de classe C^n sur le segment $[a,b]$ et $n+1$-fois dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$. Alors il existe un réel c dans l'intervalle ouvert $]a,b[$ tel que*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{f^{(n+1)}(c)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Démonstration. Le cas $n = 0$ n'est rien d'autre que l'égalité des accroissements finis. On pourrait être tenté de prouver ce théorème via une récurrence, mais il existe une méthode directe via le théorème de Rolle. Posons

$$\alpha = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} \left[f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right]$$

Notre objectif est de démontrer qu'il existe un réel c dans $]a,b[$ tel que $\alpha = f^{(n+1)}(c)$. J'introduis alors la fonction

$$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}\alpha$$

Comme la fonction f est de classe C^n sur $[a,b]$, tout comme les fonctions polynomiales, la fonction φ est continue sur $[a,b]$. De plus, comme f est $n+1$-fois dérivable sur $]a,b[$, la fonction φ est dérivable sur $]a,b[$. De plus, $\varphi(b) = 0$ et

$$\varphi(a) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) - \frac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}\alpha = 0$$

d'après la définition de α. La fonction φ vérifie alors les hypothèses du théorème de Rolle, donc il existe un réel c dans $]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Mais alors,

$$\varphi'(c) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-c)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(c) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-c)^k}{k!} f^{(k+1)}(c) + \frac{(b-c)^n}{n!}\alpha$$

Il reste après télescopage

$$\varphi'(c) = \frac{(b-c)^n}{n!}\left(-f^{(n+1)}(c) + \alpha\right)$$

Comme $c \neq b$, on en déduit que $\alpha = f^{(n+1)}(c)$.

Exploitons les accroissements finis dans le cadre des suites récurrentes.

Théorème 2 *Si f est de classe C^1 et possède un point fixe l tel que $|f'(l)| < 1$, alors il existe un intervalle ouvert contenant l tel que pour tout réel a dans cette intervalle, la suite u définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l. On dit alors que l est un point fixe attractif.*
Si le point fixe l vérifie $|f'(l)| > 1$, alors il existe un intervalle ouvert contenant l tel que pour tout réel a dans cet intervalle, différent de l, $|f(a) - l| > |a - l|$. On dit alors que l est un point fixe répulsif.

☞ Remarque
Ce théorème est bien plus puissant, puisqu'il donne la convergence ou non de ces suites récurrentes. Le prix à payer est la condition de régularité supplémentaire sur f. De plus, si $|f'(l)| = 1$, on n'a pas de conclusion, les deux cas peuvent se produire. Prenons par exemple, les cas du sinus et du sinus hyperbolique.

Démonstration.

- Supposons $|f'(l)| < 1$. Notons $k = (1+|f'(l)|)/2$, de sorte que $0 < k < 1$. Comme f' est continue, on dispose de $\eta > 0$ tel que $\forall x in [l - \eta, l + \eta], |f'(x)| < k$. Notons $\mathrm{V} = [l - \eta, l + \eta]$. La fonction f' est bornée sur V, cela implique d'après l'inégalité des accroissements finis, $\forall x \in \mathrm{V}, |f(x) - f(l)| \leq k|x - l| \leq |x - l|$, i.e $\forall x \in \mathrm{V}, |f(x) - l| \leq |x - l| \leq \eta$. Ainsi, V est stable par f.
  Soit $a \in \mathrm{V}$. D'après la stabilité précédente, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathrm{V}$. On a même $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| \leq k|u_n - l|$. On en déduit via une récurrence rapide $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leq k^n|a - l|$. Comme $|k| < 1$, $k^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Le théorème d'encadrement entraîne alors la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers l.
- Supposons $|f'(l)| > 1$. Demanière similaire, on pose $k = (|f'(l)|-1)/2$ de sorte que $k > 1$. Comme f' est continue, on dispose de $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [l - \eta, l + \eta], |f'(x)| > k$. On note $\mathrm{V} = [l - \eta, l + \eta]$. Soit $x \in \mathrm{V}\backslash\{l\}$, d'après l'EAF, on dispose de $y \in [l - \eta, l + \eta]$, $|f(x) - f(l)| = ||f'(y)||x - l| > k|x - l|$. Ainsi, $f(x) \notin \mathrm{V}$. Dès que la suite rentre dans le voisinage V en évitant l, elle en ressort.

Exemple 1 *La suite logistique. On considère un réel μ dans $[0,4]$ et la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \mu x(1 - x)$, ainsi qu'un réel $a \in [0,1]$, puis la suite u telle que*

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

Des comportement très variés peuvent se produire selon les valeurs de μ. L'étude rapide de f, montre qu'elle est positive, strictement croissante sur $[0,1/2]$, décroissante sur $[1/2,1]$ et que son maximum vaut $\mu/4$, donc qu'elle stabilise bien l'intervalle $[0,1]$. Cherchons les points fixes de f. Si $\mu = 0$, il est clair que 0 est le seul point fixe de f. Supposons à présent μ non nul et soit x dans $[0,1]$ tel que $f(x) = x$. Alors $\mu x(1 - x) = x$. Alors $x = 0$ ou $\mu(1 - x) = 1$. Cette dernière égalité équivaut à $x = 1 - 1/\mu$. Par consqéuent, si $\mu \in [0,1[$, f ne possède qu'un point fixe, à savoir 0. Si $\mu \in [1,4[$, alors f possède deux points fixes, 0 et $1 - 1/\mu$. De plus, f est de classe C^1 et $\forall x \in \mathrm{I}, f'(x) = \mu(1 - 2x)$. D'où, $f'(0) = \mu$ et $f'(1 - 1/\mu) = 2 - \mu$. Ainsi, le point fixe 0 est attractif si et seulement si $\mu \in [0,1[$, répulsif si et seulement si $\mu > 1$. Le point fixe $1 - 1/\mu$ est attractif pour $\mu \in]1,3[$ et répulsif pour $\mu > 3$.

2 Vitesse de convergence

Dans toute cette section, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite réelle convergente de limite l. Notre objectif est d'obtenir une valeur approchée de l à l'aide de la suite u. On suppose de plus que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq l$ (sinon l'objectif est trivialement atteint).

2.1 Vitesse de convergence

Définition 1 *On suppose que la suite $\left(\left|\frac{u_{n+1}-l}{u_n-l}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite λ. On dit alors que la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers l est :*

- *lente lorsque $\lambda = 1$,*
- *géométrique de rapport λ, lorsque $\lambda \in]0,1[$.*
- *rapide, lorsque $\lambda = 0$.*

Définition 2 *On dit que le réel λ, quand il existe, est le coefficient de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exercice 1 *On suppose que la suite* $\left(\left|\frac{u_{n+1}-l}{u_n-l}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente. Montrer que sa limite appartient à l'intervalle* $[0,1]$.

☞ **Remarque**
Dans la pratique, on ne connaît pas toujours la limite l *de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, mais on peut parfois calculer le coefficient de convergence* λ.

Exercice 2 *On suppose que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *possède un coefficient de convergence* λ *dans* $]-1,1[\setminus\{0\}$ *et que* $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n \neq u_{n-1}$. *Montrer qu'alors la suite* $\left(\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n-u_{n-1}}\right)$ *converge vers* λ.
Montrer que le résultat précédent est faux avec des valeurs absolues en considérant la suite u *définie par* $\forall n\in\mathbb{N}, u_{2n}=(-1)^n\lambda^{2n}, u_{2n+1}=(-1)^n\lambda^{2n+1}$.

Exercice 3 *Étudier la vitesse de convergence des suites suivantes :*

1. $b\in\mathbb{R}^{+*}, \forall n\in\mathbb{N}^*, a_n = 1/n^b$.
2. $\forall n\geq 2, b_n = 1/\ln(n)$.
3. $0<|a|<1, \forall n\in\mathbb{N}, c_n = a^n$.
4. $\forall n\in\mathbb{N}, d_n = 1/n!$.
5. $\forall n\in\mathbb{N}, e_n = n!/n^n$.

Exercice 4 *Soit* v *la suite définie par* $\forall n\in\mathbb{N}^*, v_{2n}=1/n, v_{2n+1}=2/(n+1)$. *Montrer que* v *converge mais n'a pas de vitesse de convergence.*

Exercice 5 *On définit la suite* u *via*

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

1. *Expliciter la formule de Taylor-Lagrange du logarithme entre* 1 *et* $1+1/n$ *à l'ordre* 1. *En déduire que* $n(u_n-e)\xrightarrow[n\to+\infty]{} -e/2$.
2. *Montrer que la convergence de* u *est lente, et que la convergence de la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique.*

Exercice 6
1. *Expliciter la formule de Taylor-Lagrange de l'exponentielle entre* 0 *et* 1 *à l'ordre* n.
2. *Montrer que la convergence de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par*

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

est rapide.

Exercice 7 *Soit* $\mathrm{I}=[a,b]$ *un segment réel non réduit à un point,* $f:\mathrm{I}\to\mathrm{I}$ *une fonction de classe* C^1 *telle que* $\forall x\in\mathrm{I}, 0<|f'(x)|<1$.

1. *Montrer que* f *admet un unique point fixe* $l\in\mathrm{I}$.
2. *Soit* $u_0\in\mathrm{I}\setminus\{l\}$. *On définit la suite* u *via* $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n)$. *Montrer que cette suite converge vers* l *et que la convergence est géométrique de rapport* $|f'(l)|$.

2.2 Ordre de convergence

Définition 3 *Soit* $r>1$. *On dit que la convergence de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est d'ordre* r *lorsqu'il existe un réel* λ *non nul tel que*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|u_{n+1}-l|}{|u_n-l|^r} = \lambda$$

Convention
Une convergence lente ou géométrique est dite d'ordre 1. *Lorsque* $r\geq 2$*, on dit que la convergence est super-linéaire. Lorsque* $r=2$*, on dit que la convergence est quadratique.*

Exercice 8 *Montrer que sous réserve d'existence, l'ordre de convergence est unique.*

Exercice 9 *Soit* $\mathrm{I} = [a, b]$ *un segment non réduit à un point,* $r \geq 2$ *et* $f : \mathrm{I} \to \mathrm{I}$ *de classe* C^r *telle que* $\forall x \in \mathrm{I}, |f'(x)| < 1$.

1. *Montrer que* f *admet un unique point fixe* l *appartenant à* I.
2. *On suppose que*
$$\forall k \in [\![1, r-1]\!], f^{(k)}(l) = 0 \quad \textit{et} \quad \forall x \in \mathrm{I}, f^{(r)}(x) \neq 0.$$
Soit u *la suite définie par* $u_0 \in \mathrm{I}\backslash\{l\}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. *Montrer que cette suite converge vers* l *et que la convergence est d'ordre* r.
Dans cette situation, on dit que l *est un point fixe super-attractif de* f.

Exercice 10 *Soit* a, b *deux réels tels que* $a < b$, $g \in \mathrm{C}^3([a, b], \mathbb{R})$ *telle que* $g(a)g(b) < 0, \forall x \in \mathrm{I}, g'(x) \neq 0$ *et* $g''(x) \neq 0$.

1. *Montrer qu'il existe un unique réel* x *dans* $]a, b[$ *tel que* $g(x) = 0$.
2. *On note* f *la fonction définie par* $\forall x \in [a, b], f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}$. *Montrer que* $f'(l) = 0$ *et* $f''(l) \neq 0$.
3. *On note* $\mathrm{J} = [l - \eta, l + \eta]$ *un voisinage de* l *tel que* $\forall x \in \mathrm{J}, f''(x) \neq 0$; *Montrer que la suite définie par* $u_0 \in \mathrm{J}\backslash\{l\}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ *converge vers* l *et que la convergence est d'ordre 2.*

2.3 Qui va plus vite ?

Définition 4 *Soit* v *une suite convergente vers* l *telle que* $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq l$. *On dit que* v *converge plus vite vers* l *que* u *lorsque*
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{v_n - l}{u_n - l} = 0$$

Exercice 11 *On considère les suites* u *et* v *de l'exercice* 5. *Montrer que* v *converge plus vite que* u *vers* e.

Exercice 12 *On définit les suites* u *et* v *via*
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n n!}$$
Montrer que v *converge vers* e, *plus vite que* u. *Quel sont les différents coûts de calcul pour obtenir une valeur de* e *approchée à* 10^{-16} *près ?*

3 Résolution d'équations numériques

I désigne un intervalle réel d'intérieur non vide et f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$. On s'intéresse ici à l'approximation des solutions, quand elles existent, d'une équation numérique $f(x) = 0$. Trois problèmes essentiels vont se poser :

— Le probléme qualitatif de l'existence et de l'unicité d'une solution x dans I de l'équation $f(x) = 0$.
— Le problème de l'approximation numérique d'une telle solution. On cherche à construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de I qui converge vers la solution en question.
— Pour juger de la performance d'une méthode, il est important d'avoir une majoration aussi fine que possible de l'erreur d'approximation.

3.1 La méthode de dichotomie

Rappelons le résultat essentiel : le théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 3 *Soit* a, b *deux réels tels que* $a < b$ *et* $f \in \mathrm{C}([a, b], \mathbb{R})$. *On suppose que* $f(a)f(b) < 0$. *Alors il existe un réel* α *dans* $]a, b[$ *tel que* $f(\alpha) = 0$.

Corollaire
Soit a, b *les extrémités (non nécessairement réelles) de* I. *On suppose que* f *est continue sur* I *et admet des limites* l_1 *et* l_2 *en* a *et* b. *Si* $l_1 l_2 < 0$, *alors il existe un réel* α *dans* $\mathring{\mathrm{I}}$ *tel que* $f(\alpha) = 0$.

Exercice 13 1. *En appliquant la méthode de dichotomie de la preuve du TVI, écrire en Python une fonction qui prend en entrée, une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux réels $a < b$, une précision $\varepsilon > 0$, un nombre maximal d'itérations N et renvoie un réel c dans $]a, b[$ proche à ε près d'une solution de $f(x) = 0$.*

2. *Quelle est la vitesse de convergence de la suite construite ?*

Exercice 14 1. *Montrer qu'il existe un unique réel x tel que $e^x + x = 2$. Chercher une approximation à 10^{-8} près de cette solution à l'aide de l'algorithme précédent. Combien d'itérations vous a-t-il fallu pour obtenir une telle valeur ?*

2. *Montrer qu'il existe un réel unique réel α dans $[0, 1]$ tel que $2\cos(1 + \alpha^2) - \alpha = 1$. En donner une approximation à 10^{-8} près ? Combien cela vous a-t-il coûté ?*

Exercice 15 1. *Implémenter la méthode de dichotomie pour trouver la racine du polynôme $L : x \mapsto x(63x^4 - 70x^2 + 15)/8$ sur l'intervalle $[0.6, 1]$ avec une précision de 10^{-10}.*

2. *Représenter graphiquement l'évolution de la suite $(|L(x_k)|)_{k\in\mathbb{N}}$ et estimer un ordre de convergence de la méthode de dichotomie.*

3.2 Approximations successives, points fixes

Parfois, il est pertinent pour résoudre l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue réelle x d'introduire la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ et chercher les points fixes de cette fonction. On rappelle le résultat suivant :

Propriété 1 *Soit $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $g(I) \subset I$. On définit la suite u via $u_0 \in I, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$. Si la suite u est convergente, alors sa limite est un point fixe de g.*

Démonstration. Notons l la limite de u. La suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de u, donc également convergente vers l. D'autre part, par caractérisation séquentielle de la limite, comme g est continue en l, la suite $(g(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $g(l)$. On en déduit par unicité de la limite que $g(l) = l$.

Tout le problème est d'établir si oui ou non une telle suite est convergente. Nous ne disposons pas de tous les outils pour le démontrer dans le cas le plus général. Toutefois, si I est borné et qu'on parvient à démontrer la monotonie d'une telle suite, c'est gagné (cf chapitre sur les suites numériques).

Exercice 16 *Soit $g : [0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto 1 - x^2$.*

1. *Montrer que I est stable par f et que g a un unique point fixe α dans I.*
2. *Vérifier que $g \circ g$ a trois points fixes $\gamma < \alpha < \delta$ dans I.*
3. *Soit $x_0 \neq \alpha$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$.*
   (a) *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq \alpha$ et que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*
   (b) *On suppose que $x_0 < \alpha$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n} = \gamma$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n} = \delta$.*

Définition 5 *On dit qu'une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ est strictement contractante lorsqu'il existe un réel λ dans $[0, 1[$ tel que g est λ-Lipschitzienne, soit encore*

$$\forall (x, y) \in I^2, |g(x) - g(y)| \leq \lambda |x - y|$$

On dit alors que g est λ-contractante.

Théorème 4 *Soit $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction λ-contractante. Alors g admet un unique point fixe α dans I. De plus, pour tout réel d dans I, la suite $x_0 = d, \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = g(x_n)$, converge vers α et on a la majoration*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\alpha - x_n| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} |x_1 - x_0|$$

Démonstration. Admis, nous l'établirons en fin d'année, dans le chapitre sur les séries.

On peut se contenter à ce stade de l'année d'un résultat plus faible à l'aide de la dérivabilité.

Définition 6 *Soit $g : I \to \mathbb{R}$ une application telle que $g(I) \subset I$. On appelle orbite suivant g toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de x_0 dans I et $\forall n \in \mathbb{N}, g_{n+1} = g(u_n)$.*

Propriété 2 *Soit $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que g' est bornée sur* I *et que* $\sup_{x\in \mathrm{I}} |g'(x)| = \lambda < 1$. *Alors g admet un unique point fixe α et toute orbite suivant g converge vers α.*

Démonstration. Il suffit d'adapter la résolution de l'exercice 7. L'existence est d'un point fixe est donnée par le théorème précédent. Le reste est strictement similaire.

Exercice 17

1. *Soit a un réel. Étudier la nature et le comportement de la suite définie par $x_0 = a, \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \cos(x_n)$*
2. *Donner une estimation à 10^{-8} près de sa limite à l'aide d'un algorithme en Python.*

Exercice 18 *Soit $f \in \mathrm{C}^1(\mathrm{I})$ telle que l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathrm{I}$ admet une unique racine α dans $\mathring{\mathrm{I}}$. On suppose que $f'(\alpha) > 0$.*

1. *Montrer qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que l'intervalle $\mathrm{J} = [\alpha - \eta, \alpha + \eta]$ est contenu dans* I *et $\forall x \in \mathrm{J}, f'(x) > 0$.*
2. *On note $m_1 = \inf_{x\in \mathrm{J}} f'(x)$ et $\mathrm{M}_1 = \sup_{x\in \mathrm{J}} f'(x)$. Pour tout λ, on pose $f_\lambda : x \mapsto x - \lambda f(x)$. Montrer qu'il existe un unique réel $\mu > 0$ tel que*
$$\forall x \in \mathrm{J}, |f_\mu'(x)| \le \frac{\mathrm{M}_1 - m_1}{\mathrm{M}_1 + m_1}$$
3. *Montrer que pour tout réel x_0 dans* J, *on peut définir la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de* J *par $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f_\mu(x_n)$. Démontrer que cette suite converge vers α et donner une majoration de l'erreur d'approximation.*
4. *On désigne par $f :]3\pi/2, 5\pi/2[\to \mathbb{R}, x \mapsto \tan(x) - x$.*
   (a) *Montrer que f possède un unique zéro α dans l'intervalle $\mathrm{J} = [a, b] = [7.65, 7.75]$.*
   (b) *Déterminer le coefficient μ de la question 2.*
   (c) *Donner une valeur approchée de α à 10^{-6} près.*

Théorème 5 *Soit $f \in \mathrm{C}^1(\mathrm{I})$ admettant un unique point fixe α dans $\mathring{\mathrm{I}}$.*

— *Si $|f'(\alpha)| < 1$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $\mathrm{J} = [\alpha - \eta, \alpha + \eta]$ est stable par f et pour tout $x_0 \in [\alpha - \eta, \alpha + \eta]$, l'orbite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.*

— *Si $|f'(\alpha)| > 1$ et $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$, alors pour tout x_0 dans* I, *l'orbite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est soit stationnaire sur α, soit divergente.*

Démonstration.

1. Dans le premier cas, comme f' est continue, il existe un voisinage J de la forme $[\alpha-\eta, \alpha+\eta]$, tel que $\forall x \in \mathrm{J}, |f'(x)| < 1$. L'inégalité des accroissements finis assure que cet intervalle est stable par f. On reproduit alors l'exercice 7 et son adaptation en propriété 2 sur l'intervalle J.
2. Dans le second cas, on dispose encore d'un voisinage J de α tel que $\forall x \in [\alpha - \eta, \alpha + \eta], |f'(x)| > 1$. Mais, si $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \ne \alpha, |x_{n+1} - \alpha| \ge \inf_{\mathrm{J}} |f'||x_n - \alpha|$. Par comparaison avec une suite géométrique de raison strictement plus grande que 1, on en déduit que cette orbite est divergente.

Exercice 19 *On note $f : x \mapsto (x - 1)e^x$ qui possède pour unique zéro 1, puis $g_0 : x \mapsto \ln(xe^x)$, $g_1 : x \mapsto (e^x + x)/(e^x + 1)$, et $g_2 : x \mapsto (x^2 - x + 1)/x$.*

1. *Étudier numériquement le comportement des orbites $x_0^i = 2, \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1}^i = g_i(x_n^i)$.*
2. *Estimer l'ordre de convergence dans chaque cas et comparer à $g_i'(1)$.*

3.3 La méthode de Newton-Raphson

L'idée de la méthode de Newton-Raphson pour résoudre l'équation $f(x) = 0$ est de remplacer au voisinage de la solution α de cette équation (en supposant que cette solution existe est unique) le graphe de f par celui de la tangente à ce graphe en un point. Soit x un point de I, alors l'équation de la tangente au graphe de f en $(x, f(x))$ est
$$\mathrm{Y} = f(x) + f'(x)(\mathrm{X} - x)$$
Si $f'(x) \ne 0$, le point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses a pour abscisse $x - f(x)/f'(x)$. La résolution de l'équation $f(x) = 0$ est ainsi ramené à la résolution du problème de point fixe $x - f(x)/f'(x) = x$, ce qui revient à considérer la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$x_0 \in \mathrm{I}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Cette méthode s'applique si α est racine simple de f, c'est-à-dire $f(\alpha)=0$ et $f'(\alpha)\neq 0$. Dans ce cas, on a $f'(x)\neq 0$ pour x voisin de la racine α.

Théorème 6 *Soit a, b deux réels tels que $a<b$ et $f\in C^2([a,b],\mathbb{R})$. On suppose que*

$$f(a)f(b)<0, \quad \forall x\in[a,b], f'(x)\neq 0, f''(x)\neq 0$$

Alors pour tout $x_0\in[a,b]$ tel que $f(x_0)f''(x_0)>0$, on peut définir la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $[a,b]$ par

$$\forall n\in\mathbb{N}, x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Cette suite est monotone et converge vers l'unique zéro α de f dans $]a,b[$. Si l'on note $m_1=\inf_{x\in[a,b]}|f'(x)|$, $M_2=\sup_{x\in[a,b]}|f''(x)|$, alors on dispose de la majoration suivante de l'erreur d'approximation :

$$\forall n\in\mathbb{N}, |x_n-\alpha|\leq |x_0-\alpha|^{2^n}\left(\frac{M_2}{2m_1}\right)^{2^n-1}$$

Démonstration. Comme f'' est continue, on peut supposer via le TVI que $\forall x\in[a,b], f''(x)>0$. L'hypothèse $f(x_0)f''(x_0)>0$ se traduit alors par $f(x_0)>0$. De plus, comme f est continue, le TVI assure qu'il existe un réel α dans $]a,b[$ tel que $f(\alpha)=0$. De plus, comme f' est continue, elle est de signe constant par le TVI (encore lui!). Par conséquent, f est strictement monotone sur $[a,b]$, donc injective. Ainsi, il existe un unique réel α dans $]a,b[$ tel que $f(\alpha)=0$.
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie puisque f' ne s'annule pas. Notons $g: x\mapsto x-f(x)/f'(x)$. La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 appliquée à f entre x et α implique

$$\forall x\in[a,b], \exists c_x\in{}"]x,\alpha[", 0=f(\alpha)=f(x)+(\alpha-x)f'(x)+\frac{(x-\alpha)^2}{2}f''(c_x)$$

Mais alors

$$\forall x\in[a,b], \exists c_x\in{}"]x,\alpha[", g(x)-\alpha=-\frac{f(x)+(\alpha-x)f'(x)}{f'(x)}=(x-\alpha)^2\frac{f''(c_x)}{f'(x)}$$

On distingue alors deux cas :

1. Premier cas : $\forall x\in[a,b], f'(x)>0$. Alors, $\forall x\in[a,b], g(x)\geq\alpha$. De plus, $\forall x\in[\alpha,b], f(x)\geq f(\alpha)=0$ et $g(x)=x-f(x)/f'(x)\leq x$. On a donc $g([\alpha,b])\subset[\alpha,b]$ et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie si on choisit $x_0\in[\alpha,b]$, ce qui équivaut à dire que $f(x_0)>0$. Dans ces conditions, on a :

$$\forall n\in\mathbb{N}, x_n\geq x_{n+1}\geq\alpha$$

   Cette suite est donc décroissante minorée, donc convergente. Sa limite est point fixe de g, donc zéro de f. Ce ne peut être que α.

2. Deuxième cas : $\forall x\in[a,b], f'(x)<0$. Alors $\forall x\in[a,\alpha], f(x)\geq f(\alpha)=0$ et $g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}\geq x$. On a donc $g([a,\alpha])\subset[a,\alpha]$ et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie si on choisit $x_0\in[a,\alpha]$, ce qui équivaut à dire que $f(x_0)>0$, soit $f(x_0)f''(x_0)>0$. Dans ces conditions, on a

$$\forall n\geq 0, x_n\leq x_{n+1}\leq\alpha$$

   Ainsi, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée, donc convergente. Sa limite ne peut être que l'unique zéro α de f.

Dans tous les cas, la formule de Taylor-Lagrange implique

$$\forall n\geq 0, |x_{n+1}-\alpha|=|x_n-\alpha|^2\left|\frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}\right|\leq|x_n-\alpha|^2\frac{M_2}{2m_1}$$

L'erreur de majoration s'ensuit par récurrence.

Exercice 20 *Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2 et a un réel strictement positif. Implémenter la méthode de Newton-Raphson pour calculer la racine p-ième de a. Donner une majoration de l'erreur d'approximation.*