Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Il est rappelé qu'il est tenu compte dans l'évaluation, de la présentation et la rédaction des copies. Les résultats doivent être encadrés.

Exercice 1.

Simplifier le plus possible les expressions suivantes :

$$A = \frac{\frac{2}{98} + \frac{12}{7} - \frac{1}{2}}{\frac{4}{6} + \frac{1}{4}}, \quad B = \frac{\sin(\pi/3) + \cos(\pi/3) - 1}{\sqrt{24} - \sqrt{150}}$$

Exercice 2.

Montrer que $\ln(5)/\ln(3)$ est irrationnel.

Exercice 3.

Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant : $\sqrt{x^2 - 3x - 4} = x\sqrt{x+1}$.

Exercice 4.

Étudier la convergence des suites définies par :

1. $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, u_n = \dfrac{n^3 - 2n + 1}{n^2 + 2n + 1} - \dfrac{n^3 + 1}{n^2 - 1}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \left(\displaystyle\int_0^n x^n\,dx\right)\left(\displaystyle\int_1^{\sqrt{n}} \frac{dx}{x}\right)$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, s_n = \dbinom{n+1}{n} / \dbinom{n+2}{n+1}$.

Pour chacune de ces suites on précisera en le justifiant, si la suite converge ou non, et en cas de convergence on précisera la limite.

Exercice 5. Pour tout entier naturel non nul n, on définit les intégrales

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\,dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx.$$

1. Étudier la monotonie de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}$$
3. En déduire que les suites $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes et déterminer leurs limites.

Exercice 6.
On se donne trois entiers naturels tous non nuls n, p, q et on note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \dfrac{x}{n^p + x^2 n^q}$.

1. Démontrer que pour tout réel x non nul, $|f(x)| \leq \dfrac{|x|}{n^p}$ et $|f(x)| \leq \dfrac{1}{|x| n^q}$
2. Étudier les variations de f et démontrer en particulier que son maximum vaut $\dfrac{1}{2} n^{-(p+q)/2}$.

Exercice 7. On tire simultanément trois cartes au hasard dans un paquet de 32 cartes. Quelle est la probabilité de

1. n'obtenir que des coeurs ?
2. que des as ?
3. deux coeurs et un pique ?

On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible.

Exercice 8.

1. Montrer que
$$\forall x > 0, \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{1}{e}$$
Indication : on pourra introduire la fonction $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$.
2. En déduire que
$$\forall x > 0, \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2}{e} \frac{1}{\sqrt{x}}$$
3. Démontrer la limite $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Exercice 9. Pour tout réel x, on pose $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

1. Donner l'ensemble D_f de définition de f.
2. Démontrer que f est impaire.
3. Donner l'ensemble des points de dérivabilité de f, étudier ses variations sur son ensemble de définition, puis tracer son graphe.
4. Démontrer que f est une bijection de D_f dans $\mathbb{R}$ et que sa réciproque g vérifie pour tout réel positif t,
$$g(t) = \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right)$$

Exercice 10.

1. Déterminer l'ensemble des complexes z vérifiant $|z| = |z-1|$ de deux manières différentes :
   (a) en utilisant les parties réelle et imaginaire de tels complexes,
   (b) par un argument géométrique.
2. Parmi ces complexes, lesquels sont de module 1 ? Les mettre sous forme trigonométrique.

★ ★ ★ ★ ★