Les questions de cours portent sur les éléments entre accolades et en gras. On attend une maîtrise de l'*ensemble* des notions du programme de colle.

Chapitre 14 : Convexité

Parties convexes, barycentres

Système fini de points massiques de $\mathbb{R}^2$. Existence et unicité du barycentre lorsque la somme des masses est non nulle. Homogénéité du barycentre. Segment $[A,B]=\{(1-t)A+tB | t\in[0,1]\}$ de $\mathbb{R}^2$. Partie convexe de $\mathbb{R}^2$. Combinaison linéaire convexe d'éléments de $\mathbb{R}^2$. [**Une partie de $\mathbb{R}^2$ est convexe ssi elle est stable par combinaison linéaire convexe ssi elle est stable par barycentrage à masses positives**].

Fonctions convexes

f désigne une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point, à valeurs réelles.

Premières caractérisations

Notion de fonction convexe, de fonction concave. Epigraphe d'une fonction, noté Epi(f). [**f est convexe ssi son épigraphe est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$**]. Inégalité de Jensen discrète. Position des cordes : f est convexe ssi $\forall a<b\in I, \forall x\in[a,b], f(x)\leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$. [**Croissance des taux d'accroissement : f est convexe ssi pour tout x_0 dans I, $\tau_{x_0}: I\backslash\{x_0\}\to\mathbb{R}, x\mapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est croissante**]. Inégalités des trois pentes.

Utilisation de la dérivabilité

[**On suppose f dérivable. Alors f est convexe ssi f' est croissante**]. [**Position des tangentes : f est convexe ssi $\forall x\in I, \forall a\in I, f(x)\geq f'(a)(x-a)+f(a)$**]. Caractérisation dans le cas f deux fois dérivable.

Exemples de référence

Exponentielle : $\forall x\in\mathbb{R}, 1+x\leq e^x$. Sinus sur $[0,\pi/2]$: $\forall x\in[0,\pi/2]\dfrac{2x}{\pi}\leq\sin(x)\leq x$. Logarithme népérien : $\forall x>-1, \ln(1+x)\leq x$. Racine carrée $\forall x\geq -1\sqrt{1+x}\leq 1+x/2$. Fonctions puissance : $\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}, x\mapsto x^\alpha$ est convexe ssi $\alpha\geq 1$ ou $\alpha\leq 0$, concave ssi $\alpha\in[0,1]$.

Compléments

Ces résultats sont hors-programme, mais ont été abordés en cours. Si f est convexe, alors f est dérivable à gauche et à droite. De plus, pour tout (a,b) dans l'intérieur de I tel que $a<b, f_g'(a)\leq f_d'(a)\leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq f_g'(b)\leq f_d'(b)$. Les dérivées gauches et droites sont croissantes et f est continue sur l'intérieur de I.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆