Exercice 1.
Simplifier le plus possible les expressions suivantes :

$$A = \frac{\frac{2}{98}+\frac{12}{7}-\frac{1}{2}}{\frac{4}{6}+\frac{1}{4}}, \quad B = \frac{\sin(\pi/3)+\cos(\pi/3)-1}{\sqrt{24}-\sqrt{150}}$$

Correction 1.

$$A = \frac{\frac{1}{98}(2+12\times 14-1\times 49)}{\frac{1}{12}(4\times 2+1\times 3)} = \frac{121}{98}\frac{12}{11} = \frac{11\times 3\times 2}{7^2} = \frac{66}{49}$$

$$B = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}-1}{2\sqrt{6}-5\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\frac{-1}{3\sqrt{6}} = -\frac{1}{36}\left(3\sqrt{2}-\sqrt{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{36}(3-\sqrt{3})$$

Exercice 2.

Montrer que $\ln(5)/\ln(3)$ est irrationnel.

Correction 2.
Procédons par l'absurde. Supposons que $\ln(5)/\ln(3)$ est un rationnel. Il existe alors p et q deux entiers relatifs non nuls tels que $\ln(5)/\ln(3) = p/q$, soit encore $q\ln(5) = p\ln(3)$. En appliquant l'exponentielle, on obtient l'égalité $5^q = 3^p$. Or 3 et 5 sont des entiers premiers distincts, donc leur seule puissance commune est 1, soit $q = p = 0$, ce qui est absurde.

Exercice 3.
Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant : $\sqrt{x^2-3x-4} = x\sqrt{x+1}$.

Correction 3.
Soit x un réel vérifiant l'égalité $\sqrt{x^2-3x-4} = x\sqrt{x+1}$. En passant au carré, on a $x^2-3x-4 = x^2(x+1)$. Or $x^2-3x-4 = (x-4)(x+1)$, ce qui permet d'écrire $(x+1)(x^2-x+4) = 0$. On en déduit que $x+1 = 0$ ou $x^2-x+4 = 0$. Or le polynôme de degré deux X^2-X+4 a pour discriminant $1-16 = -15 < 0$, donc n'a pas de racines. Ainsi, $x = -1$.
Réciproquement, on considère le réel $x = -1$. Alors $x+1 = 0 \geq 0$ et $x^2-3x-4 = 0 \geq 0$, donc les racines carrées $\sqrt{x^2-3x-4}$ et $\sqrt{x+1}$ sont bien définies. De plus, on a bien $0 = (-1)\times 0$, donc l'égalité est vérifiée.
Conclusion, l'ensemble des solutions est le singleton $\{-1\}$.

Exercice 4.
Étudier la convergence des suites définies par :

1. $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, u_n = \dfrac{n^3-2n+1}{n^2+2n+1} - \dfrac{n^3+1}{n^2-1}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \left(\displaystyle\int_0^n x^n\,dx\right)\left(\displaystyle\int_1^{\sqrt{n}} \dfrac{dx}{x}\right)$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, s_n = \dbinom{n+1}{n}\Big/\dbinom{n+2}{n+1}$.

Pour chacune de ces suites on précisera en le justifiant, si la suite converge ou non, et en cas de convergence on précisera la limite.

Correction 4.

1. Soit n un entier naturel différent de 0 et 1,

$$u_n = \frac{(n^3-2n+1)(n-1)-(n^3+1)(n+1)}{(n+1)^2(n-1)} = \frac{-2n^3-2n^2+2n-2}{(n+1)^2(n-1)} = -2\frac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{(1+1/n)^2(1-1/n)}$$

   Ainsi, la suite u est convergente de limite -2.

2. Soit n un naturel naturel non nul, $v_n = \exp\left(n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$. D'après les limites remarquables du logarithme, $n\ln(1+1/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. On en déduit que $n^2\ln(1+1/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. D'après les limites de la fonction exponentielle, on en déduit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
3. Soit n un entier naturel non nul,

$$w_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^n [\ln(x)]_1^{\sqrt{n}} = \frac{n^{n+1}}{n+1}\ln\left(\sqrt{n}\right) = \frac{1}{2}\frac{n^n\ln(n)}{1+1/n}$$

On en déduit que la suite w tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
4. Pour tout entier naturel non nul n,

$$s_n = \frac{n+1}{n+2} = \frac{1+1/n}{1+2/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Exercice 5. Pour tout entier naturel non nul n, on définit les intégrales

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx.$$

1. Étudier la monotonie de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1}J_{n+2}$$

3. En déduire que les suites $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes et déterminer leurs limites.

Correction 5.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel x dans $[0,1], 0 \le x^{n+1} \le x^n$. On en déduit que $\forall x \in [0,1], 0 \le \frac{x^{n+1}}{1+x^2} \le \frac{x^n}{1+x^2}$. On en déduit par croissance de l'intégrale que $0 \le J_{n+1} \le J_n$. Ainsi, la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. On a également démontré qu'elle était minorée par 0. Le théorème de la limite monotone assure alors que cette suite est convergente.

   De plus, $\forall n \in \mathbb{N}*, \forall x \in [0,1], 0 \le \frac{x^n}{1+x^2} \le x^n$. On en déduit toujours par croissance de l'intégrale que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \le J_n \le \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

   Comme $1/(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{}$, cela entraîne via le théorème d'encadrement que la limite de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vaut 0.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions $[0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$ et $[0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(1+x^2)$ sont de classe C^1, ce qui justifie l'utilisation de l'intégration par parties. On obtient

$$I_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{\ln(2)}{n+1} - 0 - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}dx = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1}J_{n+2}$$

3. Comme $J_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a également $J_{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. De plus, $\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui entraîne via la relation de la deuxième question la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers 0. En outre

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, nI_n = \frac{\ln(2)}{1+1/n} - \frac{2}{1+1/n}J_{n+2}$$

   Comme $1+1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, on en déduit que la suite $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $\ln(2)$.

Exercice 6.
On se donne trois entiers naturels tous non nuls n, p, q et on note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \frac{x}{n^p + x^2 n^q}$.

1. Démontrer que pour tout réel x non nul, $|f(x)| \leq \frac{|x|}{n^p}$ et $|f(x)| \leq \frac{1}{|x|n^q}$

2. Étudier les variations de f et démontrer en particulier que son maximum vaut $\frac{1}{2}n^{-(p+q)/2}$.

Solution 6.

1. Soit x un réel non nul. Comme x^2 et n^q sont positifs, $n^p + x^2n^q \geq n^p > 0$, d'où $\frac{1}{n^p + x^2n^q} \leq \frac{1}{n^p}$. On en déduit comme $|x|$ est positif que
$$|f(x)| = \frac{|x|}{n^p + x^2n^q} \leq \frac{|x|}{n^p}.$$
Pour démontrer la seconde inégalité, on procède de même en remarquant que $n^p + x^2n^q \geq x^2n^q > 0$ puisque x est non nul, donc que $\frac{1}{n^p + x^2n^q} \leq \frac{1}{x^2n^q}$. Ainsi,
$$|f(x)| \leq \frac{|x|}{x^2n^q} = \frac{|x|}{|x|^2n^q} = \frac{1}{|x|n^q}.$$

2. On remarque tout d'abord que la fonction f est un quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule jamais. Elle est par conséquent dérivable et vérifie pour tout réel x,
$$f'(x) = \frac{1(n^p + x^2n^q) - x2xn^q}{(n^p + x^2n^q)^2} = \frac{n^p - x^2n^q}{(n^p + x^2n^q)^2}$$
Comme le dénominateur est un carré, l'étude du signe de f' revient à l'étude du signe du numérateur. C'est un polynôme de degré 2 qui s'annule en $\pm\sqrt{n^p/n^q} = \pm n^{(p-q)/2}$ et de coefficient dominant négatif. On en déduit que f est décroissante sur $]-\infty, -n^{(p-q)/2}]$, croissante sur $[-n^{(p-q)/2}, n^{(p-q)/2}]$, puis décroissante sur $[n^{(p-q)/2}, +\infty[$. De plus, d'après la seconde inégalité prouvée précédemment, f tend vers 0 en $-\infty$ et en $+\infty$ par théorème d'encadrement. Il s'ensuit que le maximum de f est atteint en $n^{(p-q)/2}$ et qu'il vaut
$$f(n^{(p-q)/2}) = \frac{n^{(p-q)/2}}{n^p + n^{p-q}n^q} = \frac{n^{(p-q)/2}}{2n^p} = \frac{1}{2}n^{-(p+q)/2}$$

Exercice 7. On tire simultanément trois cartes au hasard dans un paquet de 32 cartes. Quelle est la probabilité de

1. n'obtenir que des coeurs ?
2. que des as ?
3. deux coeurs et un pique ?

On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible.

Correction 7.

1. Le nombre de tirages favorables est $\binom{8}{3}$. Le nombre total de tirages est $\binom{32}{3}$. La probabilité recherchée est donc
$$\frac{\binom{8}{3}}{\binom{32}{3}} = \frac{8 \times 7 \times 6}{32 \times 31 \times 30} = \frac{7}{620}.$$

2. Le raisonnement est identique. On obtient
$$\frac{\binom{4}{3}}{\binom{32}{3}} = \frac{4 \times 3 \times 2}{32 \times 31 \times 30} = \frac{1}{1240}.$$

3. Le nombre de tirages favorables est $\binom{8}{2} \times \binom{8}{1}$. La probabilité recherchée est donc
$$\frac{\binom{8}{2} \times \binom{8}{1}}{\binom{32}{3}} = \frac{28 \times 8}{4960} = \frac{7}{155}.$$

Exercice 8.

1. Montrer que
$$\forall x > 0, \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{1}{e}$$
Indication : on pourra introduire la fonction $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$.
2. En déduire que
$$\forall x > 0, \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2}{e}\frac{1}{\sqrt{x}}$$
3. Démontrer la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

Correction 8.

1. La fonction g est dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus,
$$\forall x > 0, g'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln(x)\times 1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$
Par conséquent, la fonction g est croissante sur $]0, e]$, et décroissante sur $[e, +\infty[$. On en déduit que g admet un maximum en e, et que celui-ci vaut $g(e) = 1/e$. Conclusion, $\forall x > 0, \dfrac{\ln(x)}{x} \leq \dfrac{1}{e}$.
2. Soit x un réel strictement positif.
$$\frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(\sqrt{x}^2)}{\sqrt{x}^2} = \frac{2}{\sqrt{x}}\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$
Comme $2/\sqrt{x}$ est positif, on en déduit d'après la question précédente que $\dfrac{2}{\sqrt{x}}\dfrac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}\dfrac{1}{e}$. Conclusion,
$$\forall x > 0, \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2}{e}\frac{1}{\sqrt{x}}$$
3. L'inégalité précédente donne en particulier,
$$\forall x \geq 1, 0 \leq \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2}{e}\frac{1}{\sqrt{x}}$$
Comme $1/\sqrt{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, on en déduit par théorème d'encadrement que $x \mapsto \ln(x)/x$ admet une limite en $+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

Exercice 9. Pour tout réel x, on pose $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

1. Donner l'ensemble D_f de définition de f.
2. Démontrer que f est impaire.
3. Donner l'ensemble des points de dérivabilité de f, étudier ses variations sur son ensemble de définition, puis tracer son graphe.
4. Démontrer que f est une bijection de D_f dans $\mathbb{R}$ et que sa réciproque g vérifie pour tout réel positif t,
$$g(t) = \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right)$$

Correction 9.

1. Soit x un réel. L'expression $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ est définie si et seulement si $x^2+1 \geq 0$ et $x+\sqrt{x^2+1} > 0$. L'inégalité $x^2+1 \geq 0$ est vérifiée pour tout réel x. L'autre inégalité est clairement vérifiée pour $x \geq 0$. Considérons le cas $x < 0$. On a les équivalences
$$x + \sqrt{x^2+1} > 0 \iff \sqrt{x^2+1} > -x \iff x^2+1 > x^2 \iff 1 > 0$$
car la fonction $y \mapsto y^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme l'inégalité $1 > 0$ est vraie, l'inégalité $x + \sqrt{x^2+1} > 0$ est vérifiée pour tout réel $x < 0$. Conclusion, l'ensemble de défintion de f est l'ensemble $\mathbb{R}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $x + \sqrt{x^2+1} > 0$, on peut multiplier « haut et bas » par cette quantité

$$f(-x) = \ln\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right) = \ln\left(\frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = \ln\left(\frac{x^2+1-x^2}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = -\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = -f(x)$$

3. On sait que la racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Ici $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+1>0$, donc $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$$

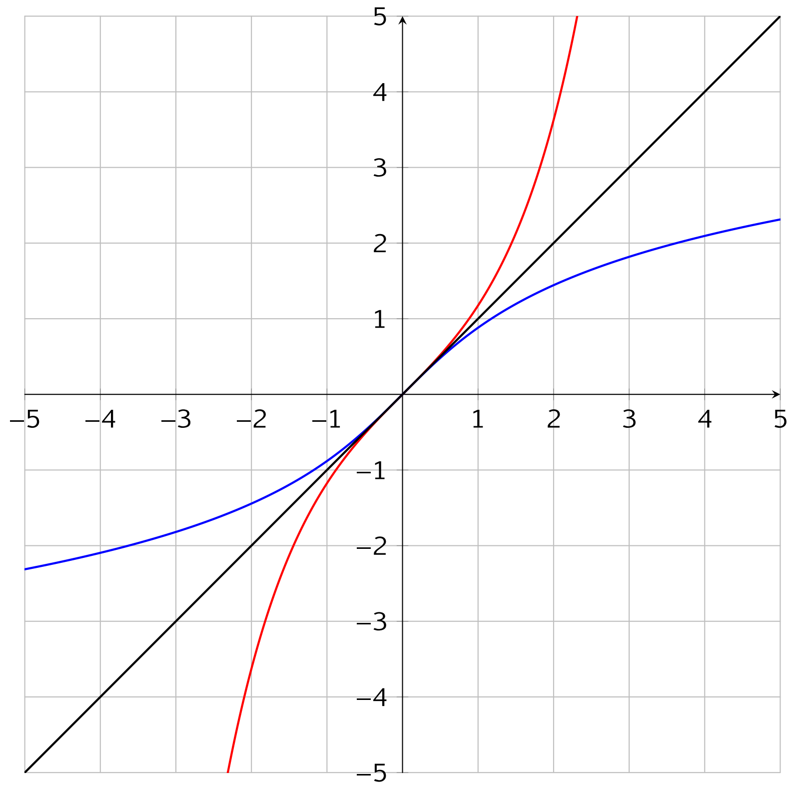
On en déduit que la fonction f est strictement croissante.

4. Il est clair que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ d'après les limites de la racine et du logarithme. On en déduit par imparité que $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$. Comme f est continue et strictement croissante, le théorème de la bijection assure que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences

$$f(x) = y \iff x + \sqrt{x^2+1} = e^y \iff \sqrt{x^2+1} = e^y - x$$

En prenant le carré de cette dernière égalité, on obtient $x^2+1 = (e^y-x)^2$. Réciproquement, si $x^2+1 = (e^y-x)^2$, la racine carrée donne $\sqrt{x^2+1} = \left|e^y - x\right|$. Donc $e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}$, toutefois $x - \sqrt{x^2+1} < 0$ et l'exponentielle est à valeurs positives, donc $e^y - x = \sqrt{x^2+1}$. On poursuit alors les équivalences

$$f(x) = y \iff x^2+1 = (e^y-x)^2 \iff 1 = e^{2y} - 2xe^y \iff x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$$



Exercice 10.

1. Déterminer l'ensemble des complexes z vérifiant $|z| = |z-1|$ de deux manières différentes :
   (a) en utilisant les parties réelle et imaginaire de tels complexes,
   (b) par un argument géométrique.
2. Parmi ces complexes, lesquels sont de module 1 ? Les mettre sous forme trigonométrique.

Correction 10.

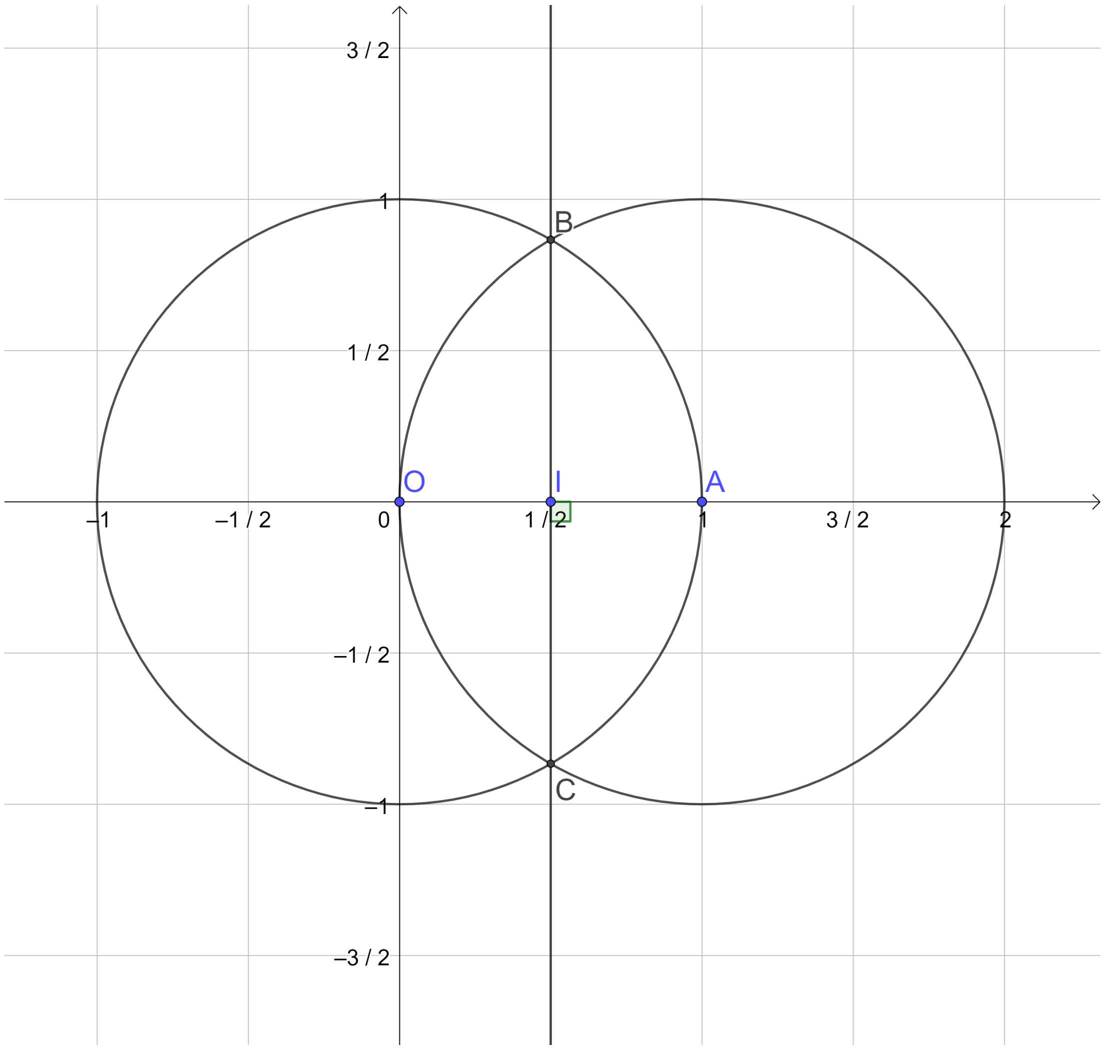
1. (a) Soit z un complexe écrit sous forme uniqiue $a+ib$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On a les équivalences

$$|z|=|z-1| \iff |z|^2=|z-1|^2 \iff a^2+b^2=(a-1)^2+b^2 \iff 0=-2a+1 \iff a=1/2$$

L'ensemble recherchée est donc l'ensemble des complexes de partie réelle $1/2$.

(b) L'ensemble de ces complexes est l'ensemble des affixes complexes des points du plan à égale distance du point $O(0,0)$ et du point $A(1,0)$, i.e la médiatrice du segment $[OA]$. Cette droite est l'unique perpendiculaire à la droite (OA) passant par le milieu de $[OA]$ de coordonnées $(1/2,0)$. Les affixes complexes correspondants sont les complexes de partie réelle $1/2$.

2. Un tel complexe est de module 1 si et seulement si $b^2=1-(1/2)^2=3/4$ ssi $b=\pm\sqrt{3}/2$. On reconnaît alors les complexes $e^{i\pi/3}$ et $e^{-i\pi/3}$.



⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆