Problème 1 : Composition et conjugaison

1. Considérations générales

   (a) Soit $x \in E$. L'élément $f(x)$ possède x pour antécédent par f, donc $f^{-1}(f(x)) = x$. D'autre part $f^{-1}(x)$ est l'unique antécédent de x par f, donc $f(f^{-1}(x)) = x$. Ainsi, $\forall x \in E, f^{-1}(f(x)) = x$ et $f(f^{-1}(x)) = x$. Autrement dit, $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_E$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$.

   (b) On s'inspire de la réciproque d'une composée et on propose $h = g \circ f^{-1} \circ g^{-1}$. On assemble

$$\begin{aligned} h \circ (g \circ f \circ g^{-1}) &= g \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f \circ g^{-1} \\ &= g \circ f^{-1} \circ \mathrm{Id}_E \circ f \circ g^{-1} \\ &= g \circ f^{-1} \circ f \circ g^{-1} \\ &= g \circ \mathrm{Id}_E \circ g^{-1} \\ &= g \circ g^{-1} \\ &= \mathrm{Id}_E \end{aligned}$$

   De même, on écrit

$$\begin{aligned} (g \circ f \circ g^{-1}) \circ h &= g \circ f \circ g^{-1} \circ g \circ f^{-1} \circ g^{-1} \\ &= g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \\ &= g \circ g^{-1} \\ &= \mathrm{Id}_F \end{aligned}$$

   Cela suffit à démontrer que $h = g \circ f^{-1} \circ g^{-1}$ est la réciproque de $g \circ f \circ g^{-1}$. Une démonstration possible, bien plus courte, est la suivante :

$$\begin{aligned} \left(g \circ f \circ g^{-1}\right)^{-1} &= \left(g^{-1}\right)^{-1} \circ (g \circ f)^{-1} \\ &= g \circ \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) \\ &= g \circ f^{-1} \circ g^{-1} \end{aligned}$$

   (c) On note pour tout entier naturel n l'assertion $\mathcal{P}(n) : \left(g \circ f \circ g^{-1}\right)^n = g \circ f^n \circ g^{-1}$. Démontrer sa validité pour tout entier naturel n par récurrence.

   Initialisation : pour $n = 0$, par convention, $\left(g \circ f \circ g^{-1}\right)^0 = \mathrm{Id}_F$. D'autre part, $g \circ f^0 \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{Id}_E \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_F$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et démontrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} \left(g \circ f \circ g^{-1}\right)^{n+1} &= \left(g \circ f \circ g^{-1}\right)^n \circ \left(g \circ f \circ g^{-1}\right) && \text{définition de la } n+1\text{-e composée} \\ &= g \circ f^n \circ g^{-1} \circ g \circ f \circ g^{-1} && \text{validité de } \mathcal{P}(n) \\ &= g \circ f^n \circ \mathrm{Id}_E \circ f \circ g^{-1} \\ &= g \circ f^n \circ f \circ g^{-1} \\ &= g \circ f^{n+1} \circ g^{-1} && \text{définition de la } n+1\text{-e composée} \end{aligned}$$

   Ceci démontre $\mathcal{P}(n+1)$. On conclut que l'assertion $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n via le principe de récurrence.

2. Groupe affine de $\mathbb{R}$.

   (a) Procédons en deux temps. Supposons que $f_{a,b}$ est une bijection. Alors elle est injective. Comme $0 \neq 1$, on en déduit que $f_{a,b}(0) \neq f_{a,b}(1)$. D'après la définition de $f_{a,b}$, on en déduit $b \neq a+b$, i.e $a \neq 0$. Réciproquement, supposons $a \neq 0$, et démontrons que $f_{a,b}$ est bijective. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a la chaîne d'équivalences

   $$y = f_{a,b}(x) \iff y = ax+b \iff y-b = ax \iff x = \frac{y-b}{a}$$

   la dernière équivalence étant valide, puisqu'on a supposé a non nul. On a ainsi prouvé que tout élément y de $\mathbb{R}$ possède un unique antécédent, à savoir $\frac{y-b}{a}$, dans $\mathbb{R}$ par f. Cela démontre bien que $f_{a,b}$ est bijective. On a même obtenu sa réciproque, il s'agit de l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto \frac{1}{a}y + \frac{-b}{a}$, i.e l'application $f_{\frac{1}{a},\frac{-b}{a}}$.

   (b) Comme $a_1 \neq 0$, f_{a_1,b_1} est bijective d'après la question précédente, ce qui justifie la bonne définition de $f^{-1}_{a_1,b_1}$. Soit $x \in \mathbb{R}$,

   $$\begin{aligned}\left(f_{a_1,b_1} \circ f_{a_2,b_2} \circ f^{-1}_{a_1,b_1}\right)(x) &= \left(f_{a_1,b_1} \circ f_{a_2,b_2}\right)\left(\frac{x-b_1}{a_1}\right)\\ &= \left(f_{a_1,b_1}\right)\left(a_2\frac{x-b_1}{a_1} + b_2\right)\\ &= a_1\left(a_2\frac{x-b_1}{a_1} + b_2\right) + b_1\\ &= a_2x + a_1b_2 - b_1a_2 + b_1\end{aligned}$$

   Par conséquent, le couple $(\alpha,\beta) = (a_2, a_1b_2 - b_1a_2 + b_1)$ est un couple satisfaisant l'égalité attendue. Démontrons à présent que c'est le seul possible. Soit $(\alpha',\beta') \in \mathbb{R}^2$ vérifiant la même condition. Alors $f_{\alpha,\beta}(0) = f_{\alpha',\beta'}(0)$, donc $\beta = \beta'$. Il s'ensuit $f_{\alpha,\beta}(1) = f_{\alpha',\beta}(1)$, soit encore $\alpha = \alpha'$. Ceci démontre bien l'unicité attendue.

   (c) Comme f_{a_1,b_1} est bijective, on a les équivalences

   $$\begin{aligned}f_{a_1,b_1} \circ f_{a_2,b_2} = f_{a_2,b_2} \circ f_{a_1,b_1} &\iff f_{a_1,b_1} \circ f_{a_2,b_2} \circ f^{-1}_{a_1,b_1} = f_{a_2,b_2}\\ &\iff (a_2, a_1b_2 - b_1a_2 + b_1) = (a_2,b_2)\\ &\iff a_1b_2 - b_1a_2 + b_1 = b_2\\ &\iff (a_1-1)b_2 = (a_2-1)b_1\end{aligned}$$

   (d) D'après ce qui précède,

   $$\forall (a',b') \in \mathbb{R}_* \times \mathbb{R}, (a-1)b' = (a'-1)b$$

   En particularisant avec $a' = 1$ et $b' = 1$, on obtient $a-1 = 0$, soit $a = 1$. On utilise maintenant l'assertion précédente avec $a' = 2$ et $b' = 0$, ce qui donne $b = 0$. Conclusion, $(a,b) = (1,0)$. On remarque que $f_{1,0} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, on a montré que le centre du groupe affine de $\mathbb{R}$ est trivial.

3. Une addition tordue

   (a) Soit $(x,y) \in]-1,1[^2$. On commence par remarquer que $xy > -1$, donc que $1+xy > 0$, ce qui donne un sens à $x \oplus y$. De plus, $1-x > 0$ et $1-y > 0$, donc $(1-x)(1-y) > 0$. En développant, on obtient $1+xy-x-y > 0$, soit encore $1+xy > x+y$. Comme $1+xy > 0$, on en déduit $1 > \frac{x+y}{1+xy}$, i.e $x \oplus y < 1$. De manière similaire, $1+x > 0$ et $1+y > 0$, ce qui entraîne $(1+x)(1+y) > 0$, soit encore $1+xy+x+y > 0$. Comme $1+xy > 0$, on en déduit $1 + \frac{x+y}{1+xy} > 0$, soit $x \oplus y > -1$.

   (b) On remarque que A est dérivable et que $\forall x \in]-1,1[, A(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x)$. On en déduit d'après les règles de dérivation que

   $$\forall x \in]-1,1[, A'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\frac{(-1)}{1-x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1-x+1+x}{2(1-x^2)} = \frac{1}{1-x^2}$$

Or $\forall x \in]-1,1[, x^2 < 1$, donc $\forall x \in]-1,1[, A'(x) > 0$. On en déduit que l'application A est strictement croissante. Comme elle est dérivable, elle est continue. D'autre part, $\lim_{x\to 1} A(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to -1} A(x) = -\infty$. On en déduit que A est surjective. Conclusion, A est bien une bijection.

Cherchons sa réciproque : soit $(x,y) \in]-1,1[\times\mathbb{R}$. On a les équivalences

$$\begin{aligned}
A(x) = y &\iff \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2y && \text{car } 2 \neq 0\\
&\iff \frac{1+x}{1-x} = e^{2y} && \text{bijectivité de l'exponentielle et } (1+x)/(1-x) > 0\\
&\iff 1+x = e^{2y}(1-x) && \text{car } 1-x \neq 0\\
&\iff x\left(1+e^{2y}\right) = e^{2y}-1 &&\\
&\iff x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} && \text{car } 1+e^{2y} \neq 0
\end{aligned}$$

Ainsi, la réciproque de A est l'application $\mathbb{R} \to]-1,1[, y \mapsto \dfrac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} = \dfrac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}$. Les plus aguerris d'entre vous reconnaîtront la tangente hyperbolique.

(c) Soit $(x,y) \in]-1,1[^2$.

$$\begin{aligned}
2\left(A(x)+A(y)\right) &= \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\\
&= \ln\left(\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}\right)\\
&= \ln\left(\frac{1+x+y+xy}{1-x-y+xy}\right)\\
&= \ln\left(\frac{\frac{1+x+y+xy}{1+xy}}{\frac{1-x-y+xy}{1+xy}}\right)\\
&= \ln\left(\frac{1+(x\oplus y)}{1-(x\oplus y)}\right)\\
&= 2A(x\oplus y)
\end{aligned}$$

(d) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On applique le résultat précédent aux réels $A^{-1}(x)$ et $A^{-1}(y)$ qui appartiennent bien à $]-1,1[$. On en déduit

$$A(A^{-1}(x)) + A(A^{-1}(y)) = A\left(A^{-1}(x) \oplus A^{-1}(y)\right)$$

soit encore

$$x+y = A\left(A^{-1}(x) \oplus A^{-1}(y)\right)$$

En appliquant A^{-1} à cette égalité, on obtient

$$A^{-1}(x+y) = A^{-1}(x) \oplus A^{-1}(y) = \frac{A^{-1}(x)+A^{-1}(y)}{1+A^{-1}(x)A^{-1}(y)}$$

(e) Soit $y \in \mathbb{R}$. En faisant une récurrence rapide via la question précédente, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A^{-1}(ny) = \underbrace{A^{-1}(y) \oplus A^{-1}(y) \cdots \oplus A^{-1}(y)}_{n \text{ termes}}$$

En appliquant cela avec $y = A(x)$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \underbrace{x \oplus x \cdots \oplus x}_{n \text{ termes}} = A^{-1}(nA(x)) = A^{-1}\left(\frac{n}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right) = A^{-1}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n\right)\right) = \frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n - 1}{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n + 1}$$

soit encore

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \underbrace{x \oplus x \cdots \oplus x}_{n \text{ termes}} = \frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{(1+x)^n + (1-x)^n}$$

Problème 2 : le lemniscate de Bernoulli.

1. Écritures complexes

   (a) Soit $z \in \mathbb{C}$, on note $x = \mathfrak{Re}(z)$ et $y = \mathfrak{Im}(z)$. Alors $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. Comme $x^2 - y^2$ et $2xy$ sont réels, on en déduit que
$$\mathfrak{Re}\left(z^2\right) = x^2 - y^2 = \mathfrak{Re}(z)^2 - \mathfrak{Im}(z)^2$$

   (b) Les propriétés de la conjugaison complexe entraînent
$$\begin{aligned}
|z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \\
&= (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \\
&= z_1\overline{z_1} - z_2\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_2} \\
&= |z_1|^2 - (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}}) + |z_2|^2 \\
&= |z_1|^2 - 2\mathfrak{Re}\,(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2
\end{aligned}$$

   (c) Soit z un complexe non nul. On applique ce qui précède aux complexes $1/z^2$ et 1, ce qui entraîne $|\frac{1}{z^2} - 1|^2 = |\frac{1}{z^2}|^2 - 2\mathfrak{Re}(\frac{1}{z^2}\overline{1}) + |1|^2 = |\frac{1}{z^2}|^2 - 2\mathfrak{Re}(\frac{1}{z^2}) + 1$. On en déduit que $|z^2 - 1|^2 = |z^2|^2\left(1 - 2\mathfrak{Re}(\frac{1}{z^2}) + |\frac{1}{z^2}|^2\right)$. Comme z est non nul, on a alors les équivalences :
$$\begin{aligned}
|z^2 - 1| = 1 &\iff |z^2 - 1|^2 = 1 \\
&\iff 1 - 2\mathfrak{Re}(\frac{1}{z^2}) + |\frac{1}{z^2}|^2 = \frac{1}{|z^2|^2} \\
&\iff \mathfrak{Re}(\frac{1}{z^2}) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$
   Ces équivalences montrent que $\mathcal{L}\backslash\{0\} = \left\{z \in \mathbb{C}^* \mid \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{2}\right\}$. D'autre part, 0 vérifie $|0^2 - 1| = 1$, donc 0 appartient à $\mathcal{L}$. Conclusion,
$$\mathcal{L} = \left\{z \in \mathbb{C}^* \mid \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{2}\right\} \cup \{0\}$$

2. Paramétrisation réelle :

   (a) $|1 + \mathrm{i}t^2|^2 = 1^2 + (t^2)^2 = 1 + t^4$. De plus,
$$z^2 - 1 = 2(1 + 2i + i^2)\frac{t^2}{(1+it^2)^2} - 1 = \frac{4it^2 - (1+it^2)^2}{(1+it^2)^2} = -\frac{(1-it^2)^2}{(1+it^2)^2}$$
   On en déduit $|z^2 - 1| = \dfrac{1+t^4}{1+t^4} = 1$, donc que z appartient à $\mathcal{L}$.

   (b) D'après l'équation modulaire de L, $|z^2|^2 - 2\mathfrak{Re}(z^2) + 1 = 1$, donc $\mathfrak{Re}(z^2) = \dfrac{|z^2|^2}{2} \neq 0$. On en déduit que $\mathfrak{Re}(z)^2 - \mathfrak{Im}(z)^2 = (\mathfrak{Re}(z) - \mathfrak{Im}(z))(\mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Im}(z)) \neq 0$. Par conséquent, $\mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Im}(z) \neq 0$.
   On en déduit que
$$\frac{\sqrt{2}(1+i)}{z}t = \frac{(1+i)\overline{z}}{|z|^2}\frac{|z|^2}{\mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Im}(z)} = 1 + i\frac{\mathfrak{Re}(z) - \mathfrak{Im}(z)}{\mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Im}(z)}$$
   D'autre part,
$$t^2 = \frac{1}{2}\frac{|z^2|^2}{(\mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Im}(z))^2} = \frac{\mathfrak{Re}(z^2)}{(\mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Im}(z))^2} = \frac{\mathfrak{Re}(z)^2 - \mathfrak{Im}(z)^2}{(\mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Im}(z))^2} = \frac{\mathfrak{Re}(z) - \mathfrak{Im}(z)}{\mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Im}(z)}$$
   ce qui donne bien l'égalité $1 + it^2 = \dfrac{\sqrt{2}(1+i)}{z}t$.

   (c) La question 2.a) donne l'inclusion
$$\left\{\sqrt{2}(1+\mathrm{i})\frac{t}{1+\mathrm{i}t^2} \mid t \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathcal{L}.$$

La question 2.b) montre l'inclusion

$$\mathcal{L}\backslash\{0\} \subset \left\{\sqrt{2}(1+\mathrm{i})\frac{t}{1+\mathrm{i}t^2} \mid t \in \mathbb{R}\right\}.$$

De plus, en choisissant $t = 0$, on a $0 = \sqrt{2}(1+i)\dfrac{0}{1+i0^2}$, donc $0 \in \left\{\sqrt{2}(1+\mathrm{i})\dfrac{t}{1+\mathrm{i}t^2} \mid t \in \mathbb{R}\right\}$, ce qui démontre l'égalité d'ensembles attendue.

(d) On peut considérer les arguments de z puisque z est non nul. On sait d'après la question précédente qu'on dispose d'un réel t tel que $z = \sqrt{2}(1+i)t/(1+it^2)$. Un tel réel t est nécessairement non nul, puisque z est non nul. On peut alors passer aux arguments modulo 2π, ce qui donne

$$\begin{aligned}\arg(z) &\equiv \arg(\sqrt{2}) + \arg(1+i) + \arg(t) - \arg(1+it^2)[2\pi] \\ &\equiv 0 + \frac{\pi}{4} + 0 - \arg(1+it^2)[\pi]\end{aligned}$$

Or les arguments de $1+it^2$ vérifient $\tan(\arg(1+it^2)) = t^2 > 0$. Par conséquent, si l'on fixe un argument θ de $1+it^2$ dans $]-\pi,\pi]$, celui-ci vérifie nécessairement $0 < \theta < \pi/2$. Avec cette convention, on en déduit que $\arg(z) \in]-\pi/4/\pi/4[\cup]-\pi,-3\pi/4[\cup]3\pi/4,\pi]$.

3. Inversion.

(a) Soit z un complexe non nul et de module différent de $\sqrt{2}$. Alors $z\overline{z} \neq \sqrt{2}$, soit $z \neq \sqrt{2}/\overline{z}$. Donc z et $h(z)$ sont distincts. De plus, z et $h(z)$ sont tous deux non nuls.

(b) Pour démontrer qu'ils sont alignés, il suffit de calculer un argument de $(z-0)/(h(z)-0)$. Or ce complexe vaut $z\overline{z}/\sqrt{2} = |z|^2/\sqrt{2}$ qui est un réel strictement positif, donc d'argument congru à 0 modulo 2π.

(c) Soit z' un complexe. On a les équivalences

$$\begin{aligned} z' \in \mathcal{H} &\iff \exists z \in \mathcal{L}\backslash\{0\}, z' = 1/\overline{z} \\ &\iff \exists z \in \mathbb{C}^*, \mathfrak{Re}(1/z^2) = 1/2 \wedge z' = \sqrt{2}/\overline{z} \\ &\iff \mathfrak{Re}(z'^2) = 2 \\ &\iff \mathfrak{Re}(z')^2 - \mathfrak{Im}(z')^2 = 2 \end{aligned}$$

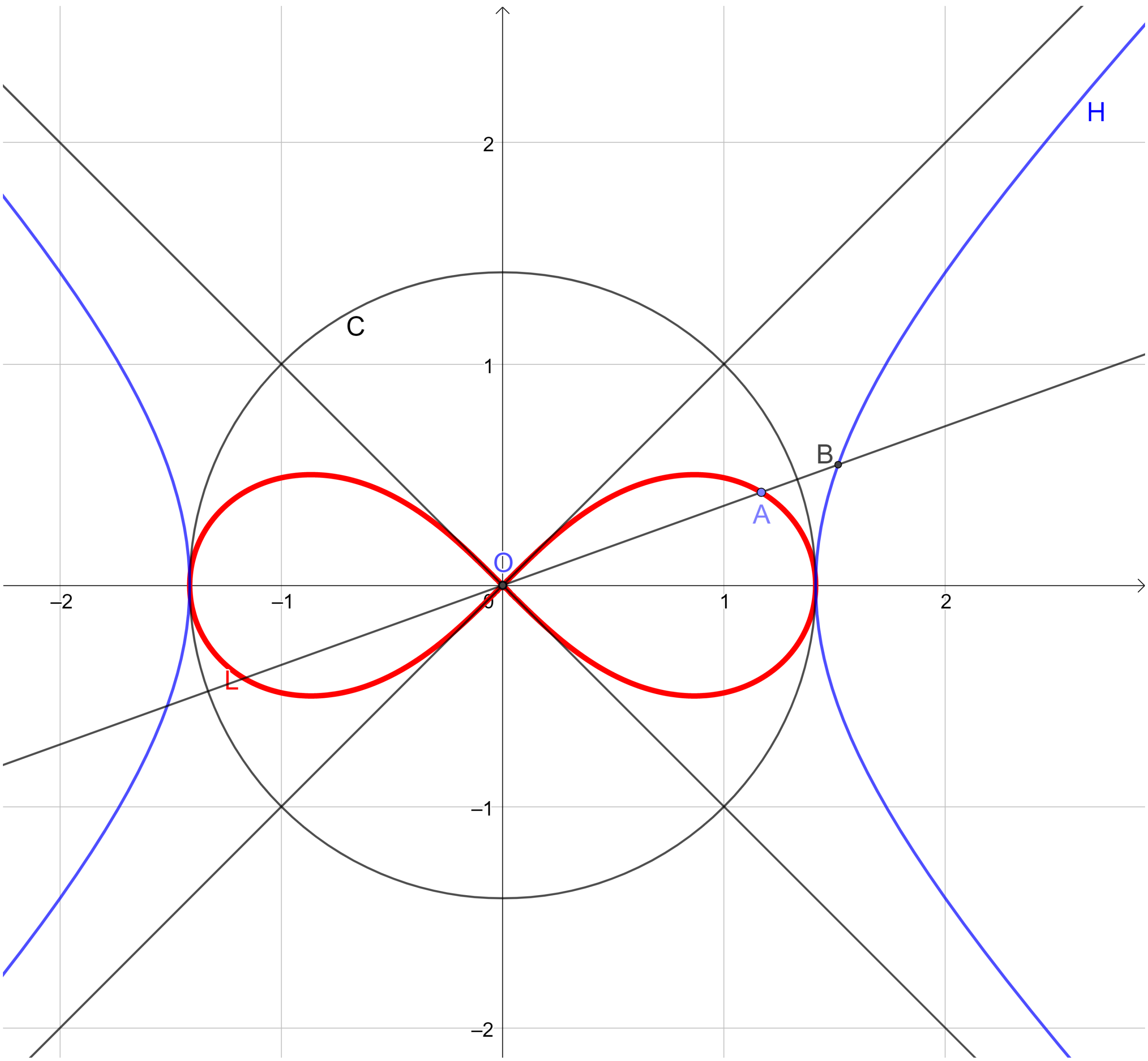
Ceci démontre l'égalité d'ensembles attendue.

(d) Soit z un complexe dans $\mathcal{L} \cap \mathcal{H}$. Alors $|z^2|^2 = 2\mathfrak{Re}(z^2) = 4$ donc $|z| = \sqrt{2}$. Or $|\mathfrak{Re}(z)| \geq \sqrt{2}$ et $|\mathfrak{Re}(z)| \leq |z|$, donc on est dans le cas d'égalité $|\mathfrak{Re}(z)| = |z|$. On en déduit que z est réel, donc que $z = \sqrt{2}$ ou $z = -\sqrt{2}$. Réciproquement, les complexes $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ vérifient l'équation 1.b) et 3.c) donc sont bien dans l'intersection $\mathcal{L} \cap \mathcal{H}$.
Conclusion, $\mathcal{L} \cap \mathcal{H} = \left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right\}$.

(e) On passe dans le plan réel $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{H} = \left\{(x,y) \in (]-\infty,-\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2},+\infty[) \times \mathbb{R}, y = \sqrt{x^2-2}\right\} \cup \left\{(x,y) \in (]-\infty,-\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2},+\infty[) \times \mathbb{R}, y = -\sqrt{x^2-2}\right\}$$

ce qui donne deux branches d'hyperbole. Leurs asymptotes sont les droites d'équation $y = x$ et $y = -x$. Une figure est produite en page suivante.


H
C
B
A
O
L
2
1
−1
−2
−2
−1
0
1
2