Les points précédés d'un astérisque sont l'objet de questions de cours. Les exercices portent sur le chapitre 10 : limites de fonctions, continuité, ainsi que le début du chapitre 11 : dérivabilité. On évitera les exercices trop techniques, nécessitant Rolle ou les accroissements finis. Les études de fonctions sont tout à fait dans l'esprit du programme de cette colle.

Chapitre 11 : Dérivabilité de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$.

I intervalle réel non vide et non réduit à un point, $f : I \to \mathbb{K}$, $a \in I$.

Fonctions dérivables, fonction dérivée

Taux d'accroissement en a de f, $\tau_a(f) : I\backslash\{a\} \to \mathbb{K}, (f(x) - f(a))/(x - a)$. On dit que f est dérivable en a lorsque $\tau_a(f)$ admet une limite finie ℓ en a, auquel on note $f'(a) = \ell$. ($\star$) f est dérivable en a ssi elle admet un développement limité à l'ordre en 1 en a. La dérivabilité en a entraîne la continuité en a. Dérivabilité à gauche, à droite en a. Exemple de fonction dérivable de dérivée non continue. Dérivabilité sur un intervalle. Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit. ($\star$) Dérivabilité d'une composée. ($\star$) Dérivabilité d'une fonction réciproque.

Extrema et derivation

($\star$) Si f, dérivable en a, admet un extremum local en un point a intérieur à I, alors $f'(a) = 0$. Théorème de Darboux. ($\star$) Théorème de Rolle. $a < b, f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue, dérivable sur $]a, b[$ tel que $f(a) = f(b)$. Alors $\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$. Extensions sur des intervalles non bornés. Application au comptage et à la localisation de racines de fonctions, à la recherche de points fixes.

Accroissements finis

($\star$) Egalité des accroissements finis : $a < b, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a, b[$. Alors $\exists c \in]a, b[, f'(c) = (f(b) - f(a))/(b - a)$. Egalité généralisée des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis dans le cas des fonctions à valeurs réelles sous l'hypothèse f' bornée. Extension de l'inégalité des accroissements finis aux fonctions à valeurs complexes. ($\star$) f dérivable sur un intervalle est croissante ssi $f' \geq 0$. f dérivable sur un intervalle est strictement croissante ssi $f' \geq 0$ et $(f')^{-1}(\{0\})$ est d'intérieur vide. Application à « l'intégration » d'inégalités même si les dérivées ne sont pas continues.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆