IPESUP 2023/2024

Colle 20 MPSI/MP2I   Jeudi 28 mars 2024

★★★

Planche 1

★★★

1. Description de l'espace engendré par une partie (éventuellement infinie).
2. On note $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et pour tout a dans $\mathbb{R}$, on note $E_a = \{f \in E | f(a) = 0\}$.
   (a) Montrer que pour tout a dans $\mathbb{R}$, E_a est un sev de E.
   (b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq b$. Montrer que $E = E_a + E_b$. Cette somme est-elle directe ?
3. On se se place dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une famille libre $(f_1,\dots,f_n)$ de fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\dim\left(\mathrm{Vect}(f_1',\dots,f_n')\right) \geqslant n-1$.

★★★

Planche 2

★★★

1. Définition d'un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que tout espace vectoriel de dimension finie possède une base finie.
2. Soit E un espace vectoriel et F un sev de E, différent de E. Déterminer l'espace engendré par le complémentaire de F.
3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On considère des sev $E_1,\dots,E_p,F_1,\dots,F_p$ qui vérifient : $\forall i \in [\![1,p]\!], F_i \subset E_i$ et $\bigoplus_{i=1}^{p} E_i = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$. Montrer qu'alors $\forall i \in [\![1,p]\!], F_i = E_i$.

★★★

Planche 3

★★★

1. Formule de Grassmann de la dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels. Énoncé et démonstration.
2. On se place dans $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $P \in E$ non nul. On note p son degré. Montrer que $P\mathbb{R}[X]$ est un sev de E, puis que $E = P\mathbb{R}[X] \oplus \mathbb{R}_{p-1}[X]$.
3. On se place dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On considère F un sev de E ne contenant que des applications de signe constant. Montrer que $\dim(F) \leqslant 1$.

★★★

Bonus

★★★

Soit E un espace vectoriel. Montrer que E n'est pas de dimension finie si et seulement si il contient une famille libre infinie.