Espaces préhilbertiens réels

Cornou Jean-Louis

1er juin 2024

Dans tout ce qui suit, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1 Espace préhibertien réel

1.1 Produit scalaire

Définition 1 *On appelle produit scalaire sur* E *toute application* $\mathrm{B} : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ *qui vérifie les critères suivants :*

— *Pour tout vecteur* x *de* E*, l'application* $\mathrm{E} \to \mathbb{R}, y \mapsto \mathrm{B}(x,y)$ *est une forme linéaire. (linéarité à droite)*

$$\forall (x,y,z) \in \mathrm{E}^3, \forall (\lambda,\mu)^2, \mathrm{B}(x, \lambda y + \mu z) = \lambda \mathrm{B}(x,y) + \mu \mathrm{B}(x,z)$$

— *Pour tout vecteur* y *de* E*, l'application* $\mathrm{E} \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{B}(x,y)$ *est une forme linéaire. (linéarité à gauche)*

$$\forall (x,y,z) \in \mathrm{E}^3, \forall (\lambda,\mu)^2, \mathrm{B}(\lambda x + \mu z, y) = \lambda \mathrm{B}(x,y) + \mu \mathrm{B}(z,y)$$

— $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(y,x)$ *(symétrie)*

— $\forall x \in \mathrm{E} \backslash \{0\}, \mathrm{B}(x,x) > 0$ *(définie-positive)*

Notation
Pour tous vecteurs x *et* y *de* E*, on note plutôt* $(x|y)$*,* $x \cdot y$ *ou* $\langle x, y\rangle$ *le produit scalaire de* x *et* y*.*

Propriété 1 *Soit* $\mathrm{B} : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ *une application. Si* B *est symétrique et linéaire à droite, alors elle est linéaire à gauche.*

Démonstration. Soit $x,y,z \in \mathrm{E}^3, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\mathrm{B}(\lambda x + \mu y, z) = \mathrm{B}(z, \lambda x + \mu y) = \lambda \mathrm{B}(z,x) + \mu \mathrm{B}(z,y) = \lambda \mathrm{B}(x,z) + \mu \mathrm{B}(y,z)$$

Définition 2 *On appelle espace préhilbertien réel tout couple* (E,B) *où* E *est un espace vectoriel réel et* B *un produit scalaire sur* E*. On appelle espace euclidien tout espace préhilbertien réel* (E,B) *tel que* E *est de dimension finie.*

Propriété 2 *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. L'application*

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ *appelé produit scalaire canonique de* $\mathbb{R}^n$*.*

Démonstration. Notons cette application B.

— Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Soit $(y,z) \in (\mathbb{R}^n)^2, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\mathrm{B}(x, \lambda y + \mu z) = \sum_{i=1}^{n} x_i (\lambda y + \mu z)_i = \sum_{i=1}^{n} x_i (\lambda y_i + \mu z_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \mu \sum_{i=1}^{n} y_i z_i = \lambda \mathrm{B}(x,y) + \mu \mathrm{B}(x,z)$$

Ainsi, B est linéaire à droite.

— Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$.

$$B(x,y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i = B(y,x)$$

On a prouvé la symétrie de B, ce qui entraîne alors sa linéarité à gauche.

— Soit $x \in \mathbb{R}^n$. $B(x,x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geqslant 0$ car $\forall i \in [\![1,n]\!], x_i^2 \geqslant 0$ comme carré de réel. Ainsi, B est positive.

— Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $B(x,x) = 0$. Alors $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$. Il s'agit d'une somme nulle de réels tous positifs ou nuls. Par conséquent, $\forall i \in [\![1,n]\!], x_i = 0$. Conclusion, $x = 0$ et B est bien définie.

On a vérifié tous les critères : B est un produit scalaire.

Propriété 3 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application*

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, (X,Y) \mapsto X^T Y$$

est un produit scalaire, appelé produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Démonstration. Notons B cette application. Remarquons que pour toutes matrices colonnes X, Y, $X^T Y \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ que l'on identifie à $\mathbb{R}$.

— Le produit matriciel est bilinéaire, donc B est linéaire à droite.

— Soit $(X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2, (X^T Y)^T = Y^Y X^{TT} = Y^T X$, ce qui prouve la symétrie de B.

— Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$. Alors $B(X,X) = X^T X = \sum_{i=1}^n x_i^2$ est une somme de réels positifs donc positive.

— Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ tel que $B(X,X) = 0$, alors $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$ est une somme nulle de termes tous positifs. Par conséquent, $\forall i \in [\![1,n]\!], x_i^2 = 0$, soit $\forall i \in [\![1,n]\!], x_i = 0$ et $X = 0$.

Propriété 4 *Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. L'application*

$$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, (A,B) \mapsto Tr(A^T B)$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ appelé produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Démonstration. La linéarité à droite est laissée à titre d'exercice. Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2$. On sait que la trace est inchangée par transposition. Par conséquent,

$$\mathrm{Tr}(A^T B) = \mathrm{Tr}((A^T B)^T) = \mathrm{Tr}(B^T A^{TT}) = \mathrm{Tr}(B^T A)$$

De plus,

$$\mathrm{Tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p a_{i,k}^2$$

est positive. Cette quantité est nulle ssi tous les coefficients de A sont nuls, ssi $A = 0$.

Propriété 5 *Soit a, b deux réels tels que $a < b$. L'application*

$$C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, (f,g) \mapsto \int_a^b fg$$

est un produit scalaire

Démonstration. On note B cette application.

— Soit $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, $(g,h) \in C([a,b],\mathbb{R})^2$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$B(f, \lambda g + \mu h) = \int_a^b f(\lambda g + \mu h) = \int_a^b (\lambda fg + \lambda fh) = \lambda \int_a^b fg + \mu \int_a^b fh = \lambda B(f,g) + \mu B(f,h)$$

Par conséquent, B est linéaire à droite.

— Soit $(f,g) \in C([a,b],\mathbb{R})^2$.

$$B(f,g) = \int_a^b fg = \int_a^b gf = B(g,f)$$

La symétrie est prouvée et entraîne également la linéarité à gauche.

— Soit $f \in C([a,b],\mathbb{R})$. Alors $f^2 \geqslant 0$ et par croissance de l'intégrale, $B(f,f) = \int_a^b f^2 \geqslant 0$. Donc B est positive.

— Soit $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ tel que $B(f,f)=0$. Alors $\int_a^b f^2 = 0$. Or f^2 est une fonction continue positive. Donc $f^2 = 0$ et $f = 0$. Ceci prouve que B est définie.

Conclusion, B est un produit scalaire.

Exemple 1 *Dans $E = \mathbb{R}[X]$, l'application $(P,Q) \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} p_k q_k$ est un produit scalaire sur E.*
Soit $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. L'application $(P,Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ est un produit scalaire sur E.
On considère l'espace $\ell^2(\mathbb{R})$ des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum u_n^2$ converge. Pour montrer qu'il s'agit bien d'un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on utilise l'inégalité arithmético-géométrique

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n v_n| \leqslant \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2)$$

L'application $(u,v) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ est alors un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{R})$.

Exemple 2 *Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $w \in C([a,b],\mathbb{R})$ une application continue sur $[a,b]$, strictement positive sur $]a,b[$. On note $E = \mathbb{R}[X]$ et on considère l'application $E^2 \to \mathbb{R}, (P,Q) \mapsto \int_a^b P(x)Q(x)w(x)dx$. C'est un produit scalaire. On se contente de démontrer qu'il est défini positif. Soit $P \in E$ tel que $(P,P) = 0$. Alors $\int_a^b P^2(x)w(x)dx = 0$ est une intégrale nulle dont l'intégrande est continue de signe constant positif. Par conséquent, $\forall x \in [a,b], P^2(x)w(x) = 0$. Comme $w > 0$ sur $]a,b[$, on en déduit $\forall x \in]a,b[, P(x) = 0$. Le polynôme P admet alors une infinité de racines, donc $P = 0$.*

1.2 Inégalités dans les espaces préhilbertiens

On fixe $(E,(\,|\,))$ un espace préhilbertien réel.

Théorème 1 (Inégalité de Cauchy-Shwarz)

$$\forall (x,y) \in E^2, (x|y)^2 \leqslant (x|x)(y|y)$$

Il y a égalité si et seulement si x et y sont liés.

Démonstration. La clé de la démonstration est l'introduction de l'application

$$P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x+ty|x+ty)$$

Premièrement, P est positive, puisque le produit scalaire est positif. De plus, via la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = (x|x) + t(y|x) + t(x|y) + t^2(y|y) = (x|x) + 2t(x|y) + t^2(y|y)$$

Ainsi, P est une application polynomiale de degré au plus 2. Distinguons deux cas.

— Si $y = 0$, alors $(y|y) = 0$ et $(x|y)$ par linéarité à droite du produit scalaire, donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée.
— Si $y \neq 0$, alors $(y|y) \neq 0$ puisque le produit scalaire est défini. L'application P est alors polynomiale de degré 2. On a vu qu'elle était de signe constant, donc possède au plus 1 racine. Son discriminant est alors négatif ou nul. Celui-ci vaut
$$\Delta = 4(x|y)^2 - 4(y|y)(x|x) = 4\left[(x|y)^2 - (y|y)(x|x)\right] \leqslant 0$$
Par conséquent, $(x|y)^2 - (y|y)(x|x) \leqslant 0$, ce qui entraîne l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Etudions le cas d'égalité. Supposons (x,y) liée. Si l'un est nul, l'égalité est vérifée. Sinon, il existe un réel α tel que $x = \alpha y$ et la bilinéarité du produit scalaire entraîne

$$(x|\alpha x)^2 = \alpha^2 (x|x)^2 = (x|x)(\alpha x|\alpha x).$$

Réciproquement, supposons $(x|y)^2 = (x|x)(y|y)$. Si $y = 0$, alors la famille (x,y) est liée. Sinon, d'après l'étude précédente, l'application polynomiale P de degré 2 est de discriminant nul, donc possède une racine, que l'on note u. Alors $(x+uy|x+uy) = 0$. Comme le produit scalaire est défini, $x + uy = 0$. Comme $1 \neq 0$, cela prouve que la famille (x,y) est liée.

☞ Remarque
Comme la racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on trouve également la formulation (équivalente)

$$\forall (x,y) \in E^2, |(x|y)| \leqslant \sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)}$$

Exercice 1 *Soit $(x,y) \in E^2$. On note $z = (y|y)x - (x|y)y$. Redémontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz en examinant $(z|z)$.*

Propriété 6 (Exemples de l'inégalité de Cauchy Schwarz)

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$$

avec égalité ssi (x,y) liée.

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, tr(A^T B)^2 \leqslant tr(A^T A) tr(B^T B)$$

avec égalité ssi (A,B) liée.

$$\forall (f,g) \in C([a,b],\mathbb{R})^2, \left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$$

avec égalité ssi (f,g) liée.

Exemple 3 *On cherche à déterminer toutes les applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient $\int_0^1 f = 1$ et $\int_0^1 f^2 = 1$. On introduit alors l'espace $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique noté $(|)$. On note 1 la fonction constante égale à 1. Soit f qui vérifie les deux critères ci-dessus*

$$\int_0^1 f = \int_0^1 f \times 1 = (f|1) = 1 \quad et \quad \int_0^1 f^2 = (f|f) = 1$$

De plus, $\int_0^1 1^2 = 1$. On est alors dans le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz $(f|1)^2 \leqslant (1|1)^2(f|f)^2$. On en déduit que f et 1 sont liés, donc qu'il existe un réel α vérifiant $f = \alpha 1$, i.e f constante. Comme son intégrale sur $[0,1]$ vaut 1, cette constante vaut 1. Réciproquement, la fonction constante égale à 1 vérifie bien les deux critères attendus.

Exemple 4 *Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un univers fini. On munit l'espace $E = \mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R})$ des variables aléatoires réelles sur Ω du produit scalaire*

$$\forall (X,Y) \in E^2, (X|Y) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)Y(\Omega)P(\{\omega\}) = E[XY]$$

Soit X, Y deux var sur Ω. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux var $X - E(X)$ et $Y - E(Y)$, ce qui entraîne

$$E[(X-E(X))(Y-E(Y))]^2 \leqslant E[(X-E(X))^2]E[(Y-E(Y))^2]$$

On reconnaît alors la covariance de X et Y, puis les variances de X et Y, soit

$$cov(X,Y)^2 \leqslant V(X)V(Y)$$

Sous l'hypothèse $V(X) \neq 0$ et $V(Y) \neq 0$, on peut alors définir le coefficient de corrélation de X et Y via $\rho(X,Y) = cov(X,Y)/\sigma(X)\sigma(Y)$. Ce qui précède indique que $\rho \in [-1,1]$.

Définition 3 *L'application $N : E \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{(x|x)}$ est appelée norme associée au produit scalaire $(|)$.*

Propriété 7 *Avec les notations précédentes, l'application N vérifie*

- $\forall x \in E, N(x) \geqslant 0$ *et* $N(x) = 0 \iff x = 0$. *(Séparation)*
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$. *(Absolue homogénéité)*
- $\forall (x,y) \in E^2, N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$. *(Inégalité triangulaire)*

On dit que N est une norme sur E. Comme elle provient d'un produit scalaire, on dit que c'est une norme préhilbertienne.

Démonstration. — Comme le produit scalaire est défini-positif, N est positive avec nullité uniquement en 0.

— Soit $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$N(\lambda x) = \sqrt{(\lambda x|\lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x|x)} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{(x|x)} = |\lambda| N(x)$$

— Soit $(x, y) \in E^2$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$N(x+y)^2 = (x+y|x+y) = (x|x) + 2(x|y) + (y|y) \leqslant (x|x) + 2\sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)} + (y|y) = (N(x) + N(y))^2$$

Comme la racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on obtient $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$.

Propriété 8 *Soit $(x, y) \in E^2$, il y a égalité $N(x+y) = N(x) + N(y)$ ssi x et y sont positivement liés.*

Démonstration. Soit $(x, y) \in E^2$. Comme le carré est injectif sur $\mathbb{R}^+$, on trouve via des calculs bilinéaires classiques

$$\begin{aligned} N(x+y) = N(x) + N(y) &\iff N(x+y)^2 = (N(x) + N(y))^2 \\ &\iff (x+y|x+y) = (x|x) + 2\sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)} + (y|y) \\ &\iff (x|y) = \sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)} \end{aligned}$$

Comme les racines carrées sont à valeurs positives, cette dernière assertion équivaut à $(x|y) = |(x|y)|$ et au cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz, ce qui équivaut encore à (x, y) positivement liée.

☞ **Remarque**
Ce cas d'égalité est très spécifique aux espaces préhilbertiens.

Définition 4 *L'application $d : E^2 \to \mathbb{R}_+, (x, y) \mapsto N(x-y)$ est appelée distance associée au produit scalaire $(\,|\,)$.*

Propriété 9 *L'application d vérifie les propriétés suivantes :*

— $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \iff x = y$. *(Séparation)*

— $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$. *(Symétrie)*

— $\forall (x, y, z) \in E^2, d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$. *(Inégalité triangulaire)*

Démonstration. — Soit $(x, y) \in E^2$. Si $x = y$, $N(x-y) = N(0) = 0$. Si $d(x, y) = 0$, alors $N(x-y) = 0$, donc $x - y = 0$ d'après la séparation de N et $x = y$.

— Soit $(x, y) \in E^2$. Comme N est absolument homogène, $N(x-y) = |-1| N(y-x) = N(y-x)$, soit $d(x, y) = d(y, x)$.

— Soit $(x, y, z) \in E^3$. Alors $x - z = (x-y) + (y-z)$. D'après l'inégalité triangulaire satisfaite par N, $N(x-z) \leqslant N(x-y) + N(y-z)$, i.e $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

1.3 Egalités remarquables

Je note désormais $\|\cdot\|$ l'application N associée au produit scalaire $(\,|\,)$

Propriété 10

$$\forall (x, y) \in E^2, \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$$

$$\forall (x, y) \in E^2, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

$$\forall (x, y) \in E^2, \|x\|^2 - \|y\|^2 = (x+y|x-y).$$

Démonstration. — Soit $(x, y) \in E^2$. Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire,

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) = (x|x) + 2(x|y) + (y|y)^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$$

— Soit $(x, y) \in E^2$. On applique la propritété précédente à $(x, -y)$, ce qui entraîne

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|-y\|^2 + 2(x|-y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y)$$

En additionnant ces deux égalités, on obtient

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

— Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. On développe par bilinéarité et symétrie du produit scalaire,

$$(x+y|x-y) = (x|x) + (y|x) - (x|y) - (y|y) = \|x\|^2 - \|y\|^2$$

Propriété 11 (Polarisation)

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, (x|y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

Démonstration. Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. On écrit

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y) \quad \text{et} \quad \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y)$$

En soustrayant ces deux égalités, on obtient

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4(x|y)$$

ce qui donne

$$(x|y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

☞ Remarque
L'identité de polarisation indique que si l'on dispose d'une norme issue d'un produit scalaire, celui-ci est unique.

1.4 Notion d'angle (hors-programme)

Définition 5 *Soit x et y deux vecteurs non nuls. On a montré via l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que $\frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|} \in [-1, 1]$. Le réel $\theta = \arccos\left(\frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}\right)$ dans $[0, \pi]$ est appelé angle non orienté entre les vecteurs x et y, noté $\widehat{(x, y)}$.*

Propriété 12

$$\forall (x, y) \in (\mathrm{E}\backslash\{0\})^2, (x|y) = \|x\|\|y\| \cos\left(\widehat{(x, y)}\right)$$

☞ Remarque
La notion d'angle orienté classique n'est valide qu'en dimension 2, cela résulte de la description des applications linéaires qui conservent la norme. Il s'agit d'un groupe simple qui permet de démontrer les relations de Chasles. En dimension 3, cela est également possible, mais dépend d'une orientation de l'espace.

2 Orthogonalité

2.1 Eléments orthogonaux, parties orthogonales

Définition 6 *Soit x, y deux vecteurs de E, on dit que x et y sont orthogonaux lorsque $(x|y) = 0$.*

☞ Remarque
Cette relation est symétrique puisque le produit scalaire est symétrique.

Définition 7 *Soit A une partie de E. On appelle orthogonal de A l'ensemble des vecteurs orthogonaux à **tous** les éléments de A, i.e*

$$\{x \in \mathrm{E} | \forall a \in \mathrm{A}, (x|a) = 0\}$$

Il est noté $\mathrm{A}^\perp$.

✎ Méthode
Pour montrer qu'un vecteur x de E appartient à l'orthogonal d'une partie A, il suffit de montrer que $\forall a \in \mathrm{A}, (x|a) = 0$.

Définition 8 *Soit* A *et* B *deux parties de* E. *On dit que* A *et* B *sont orthogonales lorsque*

$$\forall (a,b) \in \mathrm{A}\times\mathrm{B}, (a|b) = 0$$

Propriété 13 *Soit* A *une partie de* E. *Alors son orthogonal* $\mathrm{A}^{\perp}$ *est un sev de* E.

Démonstration. Démonstration classique : A^{T} contient 0 puisque le produit scalaire est linéaire à gauche, donc A^{T} est non vide. Soit $(x,y) \in (\mathrm{A}^{\perp})^2$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Soit $a \in \mathrm{A}$, alors

$$(a|\lambda x + \mu y) = \lambda(a|x) + \mu(a|y) = 0$$

Par conséquent, $\lambda x + \mu y$ est orthogonal à tous les éléménts de A, i.e $\lambda x + \mu y \in \mathrm{A}^{\perp}$. Conclusion, $\mathrm{A}^{\perp}$ est un sev de E.

Démonstration plus formelle : $\forall a \in \mathrm{A}, \varphi_a : \mathrm{E} \to \mathbb{R}, x \mapsto (x|a) \in \mathrm{E}^*$ et $\mathrm{A}^{\perp} = \bigcap_{a\in \mathrm{A}} \ker(\varphi_a)$ est une intersection de sev de E, donc un sev de E.

Propriété 14 *Pour toutes parties* A, B *de* E *telles que* $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$, $\mathrm{B}^{\perp} \subset \mathrm{A}^{\perp}$.

Démonstration. Soit $x \in \mathrm{B}^{\perp}$ et $a \in \mathrm{A}$. Alors $a \in \mathrm{B}$, donc $(x|a) = 0$. Conclusion, $\forall a \in \mathrm{A}, (x|a) = 0$, donc $x \in \mathrm{B}^{\perp}$.

Propriété 15

$$\mathrm{E}^{\perp} = \{0\}$$

$$\{0\}^{\perp} = \mathrm{E}$$

Démonstration. Le vecteur nul est orthogonal à tout le monde. Réciproquement, soit $x \in \mathrm{E}^{\perp}$. Alors x est orthogonal à lui-même, puisque $x \in \mathrm{E}$, donc $(x|x) = 0$. D'après le caractère défini du produit scalaire, $x = 0$.
Tout vecteur est orthogonal au vecteur nul, donc $\mathrm{E} \subset \{0\}^{\perp}$. L'autre inclusion étant claire, on a égalité.

☞ Remarque
Pour prouver que deux vecteurs y et z sont égaux, il suffit de prouver que $\forall x \in \mathrm{E}, (x|y) = (x|z)$.

Exemple 5 *Soit* F *une partie de* E. *Montrons que* $\mathrm{F} \subset \left(\mathrm{F}^{\perp}\right)^{\perp}$. *Soit* $x \in \mathrm{F}$ *et* $a \in \mathrm{F}^{\perp}$. *Alors* $(x|a) = 0$ *puisque* $a \in \mathrm{F}^{\perp}$. *Comme cela est valide pour tout a dans* $\mathrm{F}^{\perp}$, *x appartient à l'orthogonal de* $\mathrm{F}^{\perp}$, *i.e* $\left(\mathrm{F}^{\perp}\right)^{\perp}$. *Attention, l'inclusion réciproque est fausse en toute généralité. On verra qu'elle est valide dans le cadre de la dimension finie.*

Exemple 6 (Contre-exemple du double orthogonal) *On se place dans* $\mathrm{E} = \mathrm{C}([0,1],\mathbb{R})$ *muni de son produit scalaire canonique*

$$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2, (f|g) = \int_0^1 fg$$

On note $\mathrm{A} = \{f \in \mathrm{E} | f(0) = 0\}$ *et on détermine son orthogonal. Soit* $g \in \mathrm{A}^{\perp}$. *On note alors* $h : x \mapsto xg(x)$. *Cette application vérifie* $h(0) = 0$, *donc* $h \in \mathrm{A}$. *On en déduit que* $(h|g) = 0$, *ce qui s'écrit encore*

$$\int_0^1 xg^2(x)dx = 0$$

Il s'agit d'une intégrale nulle, donc l'intégrande est continue de signe constant positif. Par conséquent, $\forall x \in [0,1], xg^2(x) = 0$. *On en tire* $\forall x \in]0,1], g(x) = 0$. *De plus, g est continue en 0, donc* $g(0) = \lim_{t\to 0^+} g(t) = 0$. *Conclusion, g est la fonction identiquement nulle. Ainsi,* $\mathrm{A}^{\perp} = \{0\}$. *On en déduit que* $\mathrm{A}^{\perp\perp} = \{0\}^{\perp} = \mathrm{E}$. *Comme* $\mathrm{A} \neq \mathrm{E}$ *(la fonction constante égale à* 1 *est continue mais n'appartient pas à* A*), on en déduit que* $\mathrm{A}^{\perp\perp} \neq \mathrm{A}$.

Propriété 16 *Soit* A *une partie de* E. *Alors* $\mathrm{Vect(A)}^{\perp} = \mathrm{A}^{\perp}$. *En particulier, pour vérifier qu'un élément x de* E *est orthogonal à une partie* A *de* E, *il suffit de vérifier qu'il est orthogonal à une partie génératrice de* A.

Démonstration. Comme $\mathrm{A} \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{A})$, $\mathrm{Vect}(\mathrm{A})^{\perp} \subset \mathrm{A}^{\perp}$. Pour l'inclusion, on considère, $b \in \mathrm{A}^{\perp}$ et $x \in \mathrm{Vect}(\mathrm{A})$. D'après la description des sous-espaces engendrés par une partie,

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, \exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathrm{R}^n, \exists(a_1 \ldots, a_n) \in \mathrm{A}^n, x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$$

On en déduit par bilinéarité du produit scalaire $(b|x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (b|a_i)$. Or $b \in \mathrm{A}^{\perp}$, donc $\forall i \in [\![1, n]\!] (b|a_i) = 0$. On en déduit $(b|x) = 0$. Résumons, on a prouvé que $\forall x \in \mathrm{Vect}(\mathrm{A}), (b|x) = 0$, soit $b \in \mathrm{Vect}(\mathrm{A})^{\perp}$. D'après la double inclusion prouvée, on a l'égalité $\mathrm{A}^{\perp} = \mathrm{Vect}(\mathrm{A})^{\perp}$.

Propriété 17 *Soit* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E.

— *Si* F *et* G *sont orthogonaux, alors* F *et* G *sont en somme directe.*

— $(\mathrm{F} + \mathrm{G})^{\perp} = \mathrm{F}^{\perp} \cap \mathrm{G}^{\perp}$.

Démonstration. — Soit $x \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$, alors x est orthogonal à lui-même. Comme le produit scalaire est définir, $x = 0$. Ainsi, $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$, donc F et G sont en somme directe.

— Premièrement, $\mathrm{F} \subset \mathrm{F} + \mathrm{G}$, donc $(\mathrm{F} + \mathrm{G})^{\perp} \subset \mathrm{F}^{\perp}$. De même, $\mathrm{G} \subset \mathrm{F} + \mathrm{G}$ et $(\mathrm{F} + \mathrm{G})^{\perp} \subset \mathrm{G}^{\perp}$, ce qui donne la première inclusion $(\mathrm{F} + \mathrm{G})^{\perp} \subset \mathrm{F}^{\perp} \cap \mathrm{G}^{\perp}$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in \mathrm{F}^{\perp} \cap \mathrm{G}^{\perp}$, montrons que $x \in (\mathrm{F} + \mathrm{G})^{\perp}$. Soit $y \in \mathrm{F} + \mathrm{G}$, il existe $(f, g) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}$ tel que $y = f + g$. D'après la bilinéarité du produit scalaire, $(x|y) = (x|f) + (x|g)$. Comme $x \in \mathrm{F}^{\perp}, (x|f) = 0$. Comme $x \in \mathrm{G}^{\perp}, (x|g) = 0$. Ainsi, $(x|y) = 0$ et ce, pour tout élément y de $\mathrm{F} + \mathrm{G}$. Ainsi, x appartient à l'orthogonal de $\mathrm{F} + \mathrm{G}$, i.e $x \in (\mathrm{F} + \mathrm{G})^{\perp}$. On a bien montré l'inclusion $\mathrm{F}^{\perp} \cap \mathrm{G}^{\perp} \subset (\mathrm{F} + \mathrm{G})^{\perp}$, d'où l'égalité.

Notation
On note parfois $\mathrm{F} \oplus^{\perp} \mathrm{G}$ *ou* $\mathrm{F} \ominus \mathrm{G}$. *En particulier,* F *est en somme directe avec son orthogonal.*

Exemple 7 *On considère* $\mathrm{E} = \mathrm{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ *muni du produit scalaire* $\forall(f, g) \in \mathrm{E}^2, (f|g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$, *puis* F *le sev des fonctions paires dans* E, *et* G *le sev des fonctions impaires dans* E. *On sait déjà que* $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$. *Soit* $(f, g) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}$. *En effectuant un changement de variable* $u = -t$, *on a*

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt = \int_{-1}^{1} f(-u)g(-u)du = -\int_{-1}^{1} f(u)g(u)du = -(f|g).$$

Ainsi, $(f|g) = 0$, *ce qui prouve que* $\mathrm{F} \subset \mathrm{G}^{\perp}$.
Réciproquement, soit $h \in \mathrm{G}^{\perp}$. *On souhaite montrer que* $h \in \mathrm{F}$, *i.e* h *est paire. On examine alors* $f : x \mapsto h(x) - h(-x)$, *qui est impaire par construction. Notons* $\tilde{h} : x \mapsto h(-x)$. *Comme* h *appartient à* $\mathrm{G}^{\perp}$, h *est orthgonal à* f, *soit* $(f|h) = 0$. *Par le même changement de variable que précédemment,* $\tilde{h} \in \mathrm{G}^{\perp}$, *ce qui donne* $(f|\tilde{h}) = 0$. *Par conséquent,* $(f|f) = 0$ *et* $f = 0$. *On en déduit* $\forall x \in [-1, 1], h(-x) = h(x)$, *i.e* h *est paire :* $h \in \mathrm{F}$.

Définition 9 *Soit* $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *une famille de* E.

— *On dit que cette famille est orthogonale lorsque*

$$\forall(i, j) \in \mathrm{I}, i \neq j \Rightarrow (x_i|x_j) = 0$$

— *On dit que cette famille orthonormale lorsqu'elle est orthogonale et*

$$\forall i \in \mathrm{I}, \|x_i\| = 1$$

☞ **Remarque**
Il faut et il suffit que $\forall(i, j) \in [\![1, n]\!]^2, (x_i|x_j) = \delta_{i,j}$ *pour la famille soit orthonormale.*

Exemple 8 *Prenons l'exemple du produit scalaire* $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]^2 \to \mathbb{R}, (\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \mapsto \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(a_i)\mathrm{Q}(a_i)$ *avec* $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ *une famille de réels distincts. On considère à présent la famille* $(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_n)$ *des polynômes interpolateurs de Lagrange associés à cette famille de réels. On rappelle que*

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \mathrm{L}_i(a_j) = \delta_{i,j}$$

Soit i, j *deux entiers dans* $[\![0, n]\!]$.

$$(\mathrm{L}_i|\mathrm{L}_j) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{L}_i(a_k)\mathrm{L}_j(a_k) = \sum_{k=0}^{n} \delta_{i,k}\delta_{j,k} = \delta i, i\delta_{j,i} = \delta_{j,i}$$

On constate que si i *et* j *sont distincts,* $(\mathrm{L}_i|\mathrm{L}_j) = 0$ *et que* $\|\mathrm{L}_i\|^2 = 1$, *donc que* $\|\mathrm{L}_i\| = 1$. *Conclusion, la famille* $(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_n)$ *est orthonormale.*

Exemple 9 *Les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont orthonormales pour les produits scalaires canoniques de ces espaces. Prenons par exemple le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et la base canonique des matrices élémentaires $(\mathrm{E}_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$. Soit $(i,j),(k,l)\in([\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!])^2$.*

$$(\mathrm{E}_{i,j}|\mathrm{E}_{k,l}) = Tr(\mathrm{E}_{i,j}^{\mathrm{T}}\mathrm{E}_{k,l}) = Tr(\mathrm{E}_{j,i}\mathrm{E}_{k,l}) = Tr(\delta_{i,k}\mathrm{E}_{j,l}) = \delta_{i,k}Tr(\mathrm{E}_{j,l}) = \delta_{i,k}\delta_{j,l} = \delta_{(i,j),(k,l)}$$

Attention, la matrice I_n n'est pas de norme 1 pour le produit scalaire canonique, elle est de norme $\sqrt{n}$.

Propriété 18 (Théorème de Pythagore) *Soit $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille orthogonale alors pour toute partie finie J de I,*

$$\left\|\sum_{j\in\mathrm{J}} x_j\right\|^2 = \sum_{j\in\mathrm{J}}\|x_j\|^2$$

Démonstration. On le prouve par récurrence en se basant sur l'égalité remarquable $\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2+2(x|y) = \|x\|^2+\|y\|^2$ dans le cas d'orthogonalité entre x et y.

☞ **Remarque**
Pour une famille orthogonale de cardinal 2, on a même la réciproque. La réciproque est fausse dès que $n\geqslant 3$. Prenons $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique, $e_1=(2,0)$, $e_2=(2,0)$, $e_3=(-1,2)$. Alors

$$\|e_1\|^2+\|e_2\|^2+\|e_3\|^2 = 4+4+5 = 13 \quad \textit{et} \quad \|e_1+e_2+e_3\|^2 = \|(3,2)\|^2 = 13$$

pourtant, $(e_1|e_2) = 4\neq 0$.

Application 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soit $(x,y)\in(\mathrm{E}\backslash\{0\})^2$. On pose $\alpha = (x|y)/\|x\|^2$, puis $z = y-\alpha x$. Alors*

$$(z|x) = (y|x)-\alpha(x|x) = (y|x)-(x|y) = 0$$

Ainsi, z est orthogonal à x, donc à αx. On en déduit d'après Pythagore

$$\|y\|^2 = \|z+\alpha x\|^2 = \|z\|^2+\|\alpha x\|^2 \geqslant \alpha^2\|x\|^2 = \frac{(x|y)^2}{\|x\|^4}\|x\|^2$$

On en déduit puisque $\|x\|>0$, $(x|y)^2\leqslant\|x\|^2\|y\|^2$.

Exercice 2 *Soit $(x,y)\in\mathrm{E}^2$. Montrer que $(x|y)=0$ ssi $\forall\lambda\in\mathbb{R}, \|\lambda+xy\|\geqslant\|x\|$.*

Propriété 19 *Soit $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls. Alors cette famille est libre. En particulier, toute famille orthonormale est libre.*

⚠ **Attention**
Ne pas oublier le critère 'tous non nuls'.

Démonstration. Soit J une partie finie de I et $(\lambda_j)_{j\in\mathrm{J}}$ telle que $\sum_{j\in\mathrm{J}}\lambda_j x_j = 0$. Montrons que $\forall j\in\mathrm{J}, \lambda_j = 0$. Soit $j\in\mathrm{J}$, par linéarité du produit scalaire, on a

$$0 = \left(x_j|\sum_{k\in\mathrm{K}}\lambda_k x_k\right) = \sum_{k\in\mathrm{K}}\lambda_k(x_j|x_k)$$

Comme les familles $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est orthogonale, tous les produits scalaires présents sont nuls sauf peut-être celui pour $j=k$. Ainsi, $0=\lambda_j(x_j|x_j)$. Comme aucun vecteur de la famille n'est nul, $x_j\neq 0$. Le produit scalaire étant défini, on en déduit $(x_j|x_j)\neq 0$. Donc $\lambda_j = 0$. Conclusion, $\forall j\in\mathrm{J}, \lambda_j = 0$ et la famille est libre.
Comme le produit scalaire est défini, tout vecteur de norme 1 est non nul. Ainsi, toute famille orthonormale est libre.

2.2 Bases orthogonales, orthonormales.

Théorème 2 (Orthogonalisation/orthonormalisation de Gram-Schmidt) *Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille libre. Alors il existe une unique famille $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ orthonormale qui vérifie*

$$\forall j\in[\![1,n]\!], \mathrm{Vect}(x_i)_{1\leqslant i\leqslant j}=\mathrm{Vect}(y_i)_{1\leqslant i\leqslant j} \quad \textit{et} \quad (x_j|y_j)>0$$

Démonstration. On construit la famille $(y_1,\dots,y_n)$ par récurrence :
Soit y_1 tel que $\mathrm{Vect}(x_1)=\mathrm{Vect}(y_1)$, y_1 unitaire et $(y_1|x_1)>0$. Comme x_1 est non nul, il existe un réel α tel que $y_1=\alpha x_1$. Comme y_1 est unitaire, $1=|\alpha|\|x_1\|$. Toujours par non nullité de x_1, on en déduit $|\alpha|=1/\|x_1\|$, soit $\alpha=\pm 1/\|x_1\|$. La condition $(y_1|x_1)>0$ impose alors $\alpha=1/\|x_1\|$. On a alors prouvé l'unicité du vecteur y_1. Réciproquement, le vecteur $\frac{1}{\|x_1\|}x_1$ vérifie tous les critères attendus.
Soit $p\in[\![1,n-1]\!]$. Supposons démontrées l'existence et l'unicité des vecteurs $(y_1,\dots,y_p)$ satisfaisant les conditions de l'énoncé. Soit y_{p+1} un vecteur satisfaisant les conditions du théorème. Comme la famille $(x_1,\dots,x_{p+1})$ est libre, on a

$$y_{p+1}\in\mathrm{Vect}(y_1,\dots,y_{p+1})=\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_{p+1})=\mathrm{Vect}(x_1\dots,x_p)\oplus\mathrm{Vect}(x_{p+1})=\mathrm{Vect}(y_1,\dots,y_p)\oplus\mathrm{Vect}(x_{p+1})$$

Par conséquent, il existe des réels $(\lambda_1,\dots,\lambda_{p+1})$ tels que $y_{p+1}=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i y_i+\lambda_{p+1}x_{p+1}$. L'orthonormalité des $(y_1,\dots,y_{p+1})$ entraîne

$$\forall i\in[\![1,p]\!], 0=(y_{p+1}|y_i)=\sum_{k=1}^{p}\lambda_k(y_k|y_i)+\lambda_{p+1}(x_{p+1}|y_i)=\lambda_i+\lambda_{p+1}(x_{p+1}|y_i)$$

Donc

$$\forall i\in[\![1,p]\!], \lambda_i=-\lambda_{p+1}(x_{p+1}|y_i)$$

On en déduit que

$$y_{p+1}=\lambda_{p+1}\left(x_{p+1}-\sum_{i=1}^{p}(x_{p+1}|y_i)y_i\right)$$

Comme y_{p+1} est unitaire, on en déduit

$$|\lambda_{p+1}|\left\|x_{p+1}-\sum_{i=1}^{p}(x_{p+1}|y_i)y_i\right\|=1$$

ce qui impose

$$|\lambda_{p+1}|=\frac{1}{\left\|x_{p+1}-\sum_{i=1}^{p}(x_{p+1}|y_i)y_i\right\|}$$

De plus, on a la contrainte $(y_{p+1}|x_{p+1})>0$, ce qui donne

$$\lambda_{p+1}\left(\|x_{p+1}\|^2-\sum_{i=1}^{p}(x_{p+1}|y_i)^2\right)>0$$

On remarque alors que

$$\begin{aligned}\|x_{p+1}-\sum_{i=1}^{p}(x_{p+1}|y_i)y_i\|^2&=\|x_{p+1}\|^2+\|\sum_{i=1}^{p}(x_{p+1}|y_i)y_i\|^2-2(x_{p+1}|\sum_{i=1}^{p}(x_{p+1}|y_i)y_i)\\&=\|x_{p+1}\|^2+\sum_{i=1}^{p}(x_{p+1}|y_i)^2-2\sum_{i=1}^{p}(x_{p+1}|y_i)^2\\&=\|x_{p+1}\|^2-\sum_{i=1}^{p}(x_{p+1}|y_i)^2\end{aligned}$$

Ceci entraîne $\lambda_{p+1}>0$, donc $\lambda_{p+1}=\frac{1}{\left\|x_{p+1}-\sum_{i=1}^{p}(x_{p+1}|y_i)y_i\right\|}$, soit

$$y_{p+1}=\frac{x_{p+1}-\sum_{i=1}^{p}(x_{p+1}|y_i)y_i}{\left\|x_{p+1}-\sum_{i=1}^{p}(x_{p+1}|y_i)y_i\right\|}$$

On a ainsi prouvé l'unicité. Réciproquement, le vecteur $x_{p+1} - \sum_{i=1}^{p}(x_{p+1}|y_i)y_i$ est non nul, puisque la famille $(x_1, \dots, x_{p+1})$ est libre, ce qui permet de définir le vecteur

$$\frac{x_{p+1} - \sum_{i=1}^{p}(x_{p+1}|y_i)y_i}{\left\|x_{p+1} - \sum_{i=1}^{p}(x_{p+1}|y_i)y_i\right\|}$$

qui vérifie bien tous les critères en remontant tous les calculs précédents.

Exemple 10 *Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, soit $x_1 = (3,4,0), x_2 = (5,0,0)$ et $x_3 = (0,0,1)$. Cette famille est libre (démontrez-le), on l'orthonormalise selon l'algorithme de Gram-Schmidt. $y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{1}{5}x_1 = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$. On assemble $x_2 - (y_1|x_2)y_1 = (5,0,0) - 3(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0) = (\frac{16}{5}, -\frac{12}{5}, 0)$, ce vecteur est de norme $\frac{4}{5}\sqrt{4^2+3^2} = 4$, d'où $y_2 = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0)$. On remarque que x_3 est unitaire et orthogonal à y_1 et y_2, donc $y_3 = x_3$.*

Méthode

Une méthode moins calculatoire pour Gram-Schmidt est la suivante : on construit une base orthogonale qui engendre les mêmes sous-espaces et on normalise à la fin. Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille libre de n vecteurs de E. On construit une famille orthogonale $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ telle que $\forall k \in [\![1,n]\!], \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots u_n)$ par récurrence en posant

$$u_1 = x_1, \quad \forall k \geqslant 2, u_k = x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(x_k|u_j)}{\|u_j\|^2} u_j$$

La famille $(\frac{u_i}{\|u_i\|})_{1\leqslant i\leqslant n}$ est alors orthonormale et engendre le même drapeau que la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Exemple 11 *On se place dans $\mathrm{E} = \mathrm{C}([-1,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire*

$$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2, (f|g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\cos\theta)g(\sin\theta)d\theta$$

La famille des fonctions monomiales $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre. Calculon les quatre premiers éléments d'une orthogonalisée de cette famille.Nous suivons pas à pas la démonstration de l'orthogonalisation de Gram Schmidt sans l'étape de normalisation. On pose $\mathrm{T}_0(x) = 1$ pour tout x de $[-1,1]$. On calcule à présent $\|\mathrm{T}_0\|^2$ et $(\mathrm{X}|\mathrm{T}_0)$.

$$(\mathrm{X}|\mathrm{T}_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\theta \times 1 d\theta = 0$$

$$\|\mathrm{T}_0\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1 \times 1 d\theta = 1$$

Ainsi, on pose $\mathrm{T}_1(x) = x - \frac{0}{1}1 = x$ pour tout x de $[-1,1]$. Ensuite,

$$(\mathrm{X}^2|\mathrm{T}_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2\theta \times 1 d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1+\cos(2\theta)d\theta = \frac{1}{2}$$

$$(\mathrm{X}^2|\mathrm{T}_1) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^3\theta d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{4}(\cos(3\theta) + 3\cos\theta) = 0$$

$$\|\mathrm{T}_1\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{2\pi}$$

Ainsi, on pose $\mathrm{T}_2(x) = x^2 - \frac{1/2}{1}1 - \frac{0}{1/2\pi}x = x^2 - 1/2$ pour tout x de $[-1,1]$. S'ensuit,

$$(\mathrm{X}^3|\mathrm{T}_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^3\theta d\theta = 0$$

$$(\mathrm{X}^3|\mathrm{T}_1) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^4\theta d\theta = \frac{1}{\pi}(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2\theta)d\theta + \frac{1}{8}\cos(4\theta)) = \frac{3}{8\pi}$$

$$(\mathrm{X}^3|\mathrm{T}_2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^3\theta(\cos^2\theta - 1/2)d\theta = 0$$

$$\|\mathrm{T}_2\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos^2\theta - 1/2)^2 d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{4}\cos^2(2\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{16}(1+\cos(4\theta))d\theta = \frac{1}{16\pi}$$

Ainsi, on pose $\mathrm{T}_3(x) = x^3 - \frac{0}{1}1 - \frac{3/8\pi}{1/2\pi}x - \frac{0}{16\pi}(x^2 - 1/2) = x^3 - 3x/4$ pour tout x de $[-1,1]$.

Propriété 20 *Tout espace euclidien admet une base orthonormée.*

Démonstration. Comme tout espace de dimension finie, il admet une base. Cette base est alors une famille libre et on peut lui appliquer le processus d'orthogonalisation/orthonormalisation de Gram-Schmidt. Cela permet de construire une famille orthonormale qui engendre le même espace. Il s'agit donc d'une famille libre génératrice orthonormale, i.e une base orthonormale de l'espace.

Propriété 21 *Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.*

Démonstration. Soit $(x_1,\dots,x_p)$ une famille orthonormale. Comme elle est libre, elle peut être complétée en base d'après le théorème de la base incomplète en $(x_1,\dots,x_n)$. L'orthornormalisation de cette base fournit une base orthonormale qui donne les mêmes p premiers vecteurs $(x_1,\dots,x_p)$.

Propriété 22 *Soit* E *euclidien et* $b=(e_1,\dots,e_n)$ *une base orthonormée de* E. *Soit* $(x,y)\in\mathrm{E}^2$. *Alors*

$$x=\sum_{i=1}^{n}(e_i|x)e_i$$

$$\|x\|^2=\sum_{i=1}^{n}(e_i|x)^2$$

$$(x|y)=\sum_{i=1}^{n}(x|e_i)(y|e_i)$$

Démonstration. Notons $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$ et $y=\sum_{i=1} y_ie_i$ les décompositions de x et y dans la base orthonormée b. Soit $j\in[\![1,n]\!]$.

$$(x|e_j)=(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i|e_j)=\sum_{i=1}^{n}x_i(e_i|e_j)=\sum_{i=1}^{n}x_i\delta_{i,j}=x_j$$

Ainsi, $x=\sum_{i=1}^n(x|e_i)e_i$. Comme la famille b est orthonormale, on peut utiliser le théorème de Pythagore

$$\|x\|^2=\sum_{i=1}^{x}\|(x|e_i)e_i\|^2=\sum_{i=1}^{n}(x|e_i)^2\|e_i\|^2=\sum_{i=1}^{n}(x|e_i)^2$$

Enfin, par bilinéarité du produit scalaire,

$$(x|y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x|e_i)e_i|\sum_{j=1}^{n}(y|e_j)e_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x|e_i)(y|e_j)(e_i|e_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x|e_i)(y|e_j)\delta_{i,j}=\sum_{i=1}^{n}(x|e_i)(y|e_i)$$

Théorème 3 *Soit* E *un espace euclidien de dimension* n*, alors* E *est isométriquement isomorphe à* $\mathbb{R}^n$ *muni de son produit scalaire canonique.*

Démonstration. Soit $b=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de E. On dispose alors de l'isomorphisme

$$\varphi:\mathrm{E}\to\mathbb{R}^n, x\mapsto(x_1,\dots,x_n)$$

où pour tout x dans E, $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$ est l'unique décomposition de x dans la base b. Si l'on note N la norme euclidienne de E, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$, l'isomorphisme φ vérifie d'après la propriété précédente

$$\forall x\in\mathrm{E}, \|\varphi(x)\|^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}(e_i|x)^2=\mathrm{N}(x)^2$$

Ainsi, φ conserve la norme, on dit qu'il est isométrique.

Matrices de familles de vecteurs dans des bases orthonormales, produit scalaire dans des bases générales Déterminant dans une base orthonormale

2.3 Dualité[Hors-programme].

On se place dans E un espace euclidien.

Notation
Pour tout vecteur de a, on note $(a|\cdot)$ *l'application* $E \to \mathbb{R}, x \mapsto (a|x)$.

Théorème 4 (Représentation de Riesz) *L'application* $\Phi : E \mapsto E^*, a \mapsto (a|\cdot)$ *est un isomorphisme d'espace vectoriels*

Démonstration. Commençons par remarquer que pour tout a dans E, l'application $(a|\cdot)$ est effectivement une forme linéaire puisque le produit scalaire est linéaire à droite :

$$\forall (x,y) \in E^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, (a|\lambda x + \mu y) = \lambda(a|x) + \mu(a|y)$$

Ainsi, Φ est bien à valeurs dans E^* le dual de E. Montrons à présent sa linéarité : soit $(a,b) \in E^2$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Comme le produit scalaire est linéaire à gauche, on a

$$\forall x \in E, (\lambda a + \mu b|x) = \lambda(a|x) + \mu(b|x)$$

soit l'égalité de formes linéaires $(\lambda a + \mu b|\cdot) =)\lambda(a|\cdot) + \mu(b|\cdot)$, i.e $\Phi(\lambda a + \mu b) = \lambda\Phi(a) + \mu\Phi(b)$. Montrons à présent que Φ est injective, soit $a \in E$ tel que $\Phi(a) = 0$. Alors en particulier, $(a|a) = 0$. Comme le produit scalaire est défini, cela implique $a = 0$. Ainsi Φ est injective. Enfin, $\dim(E) = \dim(E^*)$ est finie. Donc Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

☞ **Remarque**
On retient surtout le résultat suivant : pour toute forme linéaire φ *sur* E *euclidien, il existe un unique vecteur a de* E *tel que* $\varphi = (a|\cdot)$.

2.4 Calcul matriciel dans les espaces euclidiens.

Définition 10 *Soit* $b = (e_1, \dots, e_n)$ *une base de* E *(non nécessairement orthogonale ou orthonormale). On appelle matrice du produit scalaire dans la base b la matrice* $((e_i|e_j))_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n}$. *Elle est noté* $M((\cdot|\cdot))_b$.

Propriété 23 *Cette matrice est diagonale ssi b est orthogonale, l'identité ssi b est orthonormale.*

Démonstration. Cette matrice est diagonale ssi tous ses éléments hors diagonale sont nuls, ssi $\forall i \neq j (e_i|e_j) = 0$ ssi b est orthogonale. Cette matrice vaut l'identité ssi $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$ ssi la base b est orthonormale.

Propriété 24 *Avec les notations précédentes, soit x, y deux vecteurs de* E *décomposés sous la forme* $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, *alors*

$$(x|y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (e_i|e_j)$$

En termes matriciels, en notant $X = M(x)_b$ *(respectivement* $Y = M(y)_b$*) la matrice colonne des coordonnées de x (respectivement y) dans la base b, puis* A *la matrice du produit scalaire dans la base b, on a*

$$(x|y) = X^T AY$$

Dans le cas d'une base orthonormale, on retrouve l'expression $(x|y) = X^T Y$.

Démonstration. Comme le produit scalaire est bilinéaire,

$$(x|y) = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i | \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n x_i (e_i | \sum_{j=1}^n y_j e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (e_i|e_j)$$

En notant $A = ((e_i|e_j))_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n}$ la matrice du produit scalaire dans la base b, on a

$$X^T(AY) = \sum_{i=1}^n x_i (AY)_i = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (e_i|e_j)$$

Si la base est orthonormale, $A = I_n$ et $(x|y) = X^T Y$.

Propriété 25 *Soit $b = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de p vecteurs de E. Alors la matrice de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est donnée par $((e_i|x_j))_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$.*

Démonstration. Pour obtenir cette matrice, il suffit de décomposer pour tout entier j dans $[\![1,p]\!]$, le vecteur x_j dans la base b. Comme vu précédemment, les coefficients sont alors donnés via $x_j = \sum_{i=1}^n (e_i|x_j)e_i$, i.e $\mathrm{M}(x_1, \dots, x_p)_b = ((e_i|x_j))_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$.

3 Projections orthogonales

Dans tout ce qui suit, je fixe F un sev de E, je suppose que F est de dimension finie. A priori, E n'est pas pas de dimension finie.

☞ **Remarque**
Ne pas oublier les schémas et/ou les figures.

Théorème 5 *L'orthogonal de F est un supplémentaire de F. On note*

$$\mathrm{F} \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{F}^\perp = \mathrm{E}$$

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_m)$ une base orthonormale de F. On procède par analyse/synthèse soit $x \in \mathrm{E}$.
Analyse : soit $(y,z) \in \mathrm{F} \times \mathrm{F}^\perp$ tel que $x = y + z$. Alors z est orthogonal à la base $(e_1, \dots, e_m)$, ce qui entraîne

$$\forall i \in [\![1,m]\!], (x|e_i) = (y|e_i) + 0$$

Or, on sait que y se décompose sous la forme $y = \sum_{i=1}^m (e_i|y)e_i$, d'où $y = \sum_{i=1}^m (e_i|x)e_i$. On en déduit $z = x - \sum_{i=1}^m (e_i|x)e_i$. Cette démarche prouve l'unicité sous réserve d'existence.
Synthèse : Le vecteur $y = \sum_{i=1}^m (e_i|x)e_i$ appartient bien à F, puisque $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_m)$. On note $z = x - \sum_{i=1}^m (e_i|x)e_i$. Pour montrer que z appartient à $\mathrm{F}^\perp$, il suffit de montrer que z est orthogonal à tous les vecteurs de la base $(e_1, \dots, e_m)$ de F. Soit $j \in [\![1,m]\!]$.

$$(z|e_j) = (x|e_j) - \sum_{i=1}^m (e_i|x)(e_i|e_j) = (x|e_j) - \sum_{i=1}^m (e_i|x)\delta_{i,j} = (x|e_i) - (e_i|x) = 0$$

Conclusion, z est bien dans $\mathrm{F}^\perp$ et $x = z + y$.

⚠ **Attention**
Sans l'hypothèse F de dimension finie, cela est faux! Prenons le contre-exemple du double-orthogonal. Il s'agit d'un sous-espace strict F de E tel que $\mathrm{F}^\perp = \{0\}$. Ainsi, $\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp = \mathrm{F} \neq \mathrm{E}$. Retenons qu'en dimension infinie, il est possible que l'orthogonal soit « trop petit ».

Propriété 26 *Dans le cas où E est de dimension finie, alors $\mathrm{F}^\perp$ est de dimension finie et*

$$\dim(\mathrm{F}^\perp) = \dim(\mathrm{E}) - \dim(\mathrm{F})$$

Démonstration. $\mathrm{F}^\perp$ est un sev de E de dimension finie, donc est de dimension finie. Comme F et $\mathrm{F}^\perp$ sont supplémentaires, $\dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{F}^\perp) = \dim(\mathrm{E})$.

Exemple 12 *Soit H un hyperplan dans E de dimension finie, alors $\mathrm{H}^\perp$ est de dimension 1. Tout vecteur non nul de $\mathrm{H}^\perp$ est appelé vecteur normal à H. Par exemple dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, notons $n = (a_1, \dots, a_n)$ un vecteur non nul, alors $n^\perp$ est un hyperplan d'équation $(n|x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$.*

Propriété 27 *Dans le cas où E est de dimension finie, $\mathrm{F}^{\perp\perp} = \mathrm{F}$*

Démonstration. On a déjà prouvé l'inclusion $\mathrm{F} \subset \mathrm{F}^{\perp\perp}$. De plus,

$$\dim(\mathrm{F}^{\perp\perp}) = \dim(\mathrm{E}) - \dim(\mathrm{F}^\perp) = \dim(\mathrm{E}) - \dim(\mathrm{E}) + \dim(\mathrm{F}) = \dim(\mathrm{F})$$

L'égalité de dimensions et l'inclusion suffisent à prouver l'égalité.

Définition 11 *Le projecteur associé sur F parallèlement à $\mathrm{F}^\perp$ est appelé projecteur orthogonal sur F.*

Propriété 28 *Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base orthonormée de F. Alors pour tout x dans E, le projeté orthogonal de x sur F, noté $\pi_{\mathrm{F}}(x)$ a pour expression*

$$\pi_{\mathrm{F}}(x) = \sum_{x=1}^{r} (e_i|x)e_i$$

Démonstration. Se référer à la preuve de $\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\perp} = \mathrm{E}$, dans laquelle, on a prouvé que le projeté orthogonal de x vaut $\sum_{i=1}^{r} (e_i|x)e_i$

Propriété 29 (Inégalité de Bessel) *La projection orthogonale sur F, π_{F} vérifie*

$$\forall x \in \mathrm{E}, \|\pi_{\mathrm{F}}(x)\| \leqslant \|x\|$$

Il y a égalité ssi $x \in \mathrm{F}$.

Démonstration. Soit $x \in \mathrm{E}$. On a alors la décomposition $x = \pi_{\mathrm{F}}(x) + (x - \pi_{\mathrm{F}}(x))$ dans $\mathrm{F} \times \mathrm{F}^{\perp}$. On en déduit via le théorème de Pythagore

$$\|x\|^2 = \|\pi_{\mathrm{F}}(x)\|^2 + \|x - \pi_{\mathrm{F}}(x)\|^2 \geqslant \|\pi_{\mathrm{F}}(x)\|^2$$

Comme la racine carrée est croissante, $\|x\| \geqslant \|\pi_{\mathrm{F}}(x)\|$. Soit à présent $x \in \mathrm{E}$ tel que $\|pi_{\mathrm{F}}(x)\| = \|x\|$, alors $\|x\|^2 = \|\pi_{\mathrm{F}}(x)\|^2$. Le calcul précédent montre alors $\|x - \pi_{\mathrm{F}}(x)\|^2 = 0$, soit $x = \pi_{\mathrm{F}}(x)$. On en déduit $x \in \ker(\pi_{\mathrm{F}} - \mathrm{id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{Im}(\pi_{\mathrm{F}}) = \mathrm{F}$. Réciproquement, pour tout x de F, $\pi_{\mathrm{F}}(x) = x$, d'où l'égalité des normes.

Propriété 30 *La projection orthogonale sur F, π_{F} vérifie*

$$\ker(\pi_{\mathrm{F}}) = \mathrm{Im}(\pi_{\mathrm{F}})^{\perp}$$

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, (x|\pi_{\mathrm{F}}(y)) = (\pi_{\mathrm{F}}(x)|y)$$

Démonstration. On sait qu'une projection sur F parallèlement à G à pour image F et noyau G. Dans le cas de la projection orthogonale sur F, $\mathrm{G} = \mathrm{F}^{\perp}$. Par conséquent, $\mathrm{Im}(\pi_{\mathrm{F}})^{\perp} = \ker(\pi_{\mathrm{F}})$. Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. On note $x = x_{\mathrm{F}} + x_{\mathrm{G}}$ l'unique décomposition de x dans $\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\perp}$ et $y = y_{\mathrm{F}} + y_{\mathrm{G}}$ celle de y. Alors

$$(x|\pi_{\mathrm{F}}(y)) = (x_{\mathrm{F}} + x_{\mathrm{G}}|y_{\mathrm{F}}) = (x_{\mathrm{F}}|y_{\mathrm{F}}) \quad \text{et} \quad (\pi_{\mathrm{F}}(x)|y) = (x_{\mathrm{F}}|y_{\mathrm{F}} + y_{\mathrm{G}}) = (x_{\mathrm{F}}|y_{\mathrm{F}})$$

d'où l'égalité.

Définition 12 *Soit $x \in \mathrm{E}$. On appelle distance de x à F le réel*

$$d(x, \mathrm{F}) = \inf_{y \in \mathrm{F}} \|x - y\|$$

☞ **Remarque**

Cette quantité est bien définie puisque l'ensemble $\{\|x - y\| | y \in \mathrm{F}\}$ est une partie non vide (F est non vide) minorée (par 0) de $\mathbb{R}$.

Théorème 6 *Soit $x \in \mathrm{E}$. Alors le projecté orthogonal $\pi_{\mathrm{F}}(x)$ est l'unique vecteur z dans F tel que $d(x, \mathrm{F}) = \|x - z\|$. Autrement dit,*

$$\forall z \in \mathrm{F}, \|x - \pi_{\mathrm{F}}(x)\| \leqslant \|x - z\|$$

et il y a égalité si et seulement si $z = \pi_{\mathrm{F}}(x)$.

Démonstration. Soit $z \in \mathrm{F}$. On écrit $x - z = (x - \pi_{\mathrm{F}}(x)) + (\pi_{\mathrm{F}}(x) - z)$. Comme l'image du projecteur est incluse dans F, on constante que $\pi_{\mathrm{F}}(x) - z$ appartient à F. D'autre part, $x - \pi_{\mathrm{F}}(x) = \pi_{\mathrm{F}^{\perp}}(x)$ appartient à $\mathrm{F}^{\perp}$. On peut alors exploiter le théorème de Pythagore :

$$\|x - z\|^2 = \|x - \pi_{\mathrm{F}}(x)\|^2 + \|\pi_{\mathrm{F}}(x) - z\|^2 \geqslant \|x - \pi_{\mathrm{F}}(x)\|^2$$

On en déduit par croissance de la racine carrée que $\|x - z\| \geqslant \|x - \pi_{\mathrm{F}}(x)\|$. Soit $z \in \mathrm{F}$ tel que $\|x - z\| = \|x - \pi_{\mathrm{F}}(x)\|$, alors $\|x - z\|^2 = \|x - \pi_{\mathrm{F}}(x)\|^2$ et le calcul précédent assure que $\|pi_{\mathrm{F}}(x) - z\|^2 = 0$, soit $z = \pi_{\mathrm{F}}(x)$.

Exemple 13 *Un calcul de distance dans un espace fonctionnel. On considère l'espace* $E = C([-1,1],\mathbb{R})$ *muni du produit scalaire* $\forall (f,g) \in E (f|g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$*. On considère le sev* F *des fonctions polynomiales de degré au plus 2 et* $g : x \mapsto \sin(x)$*. On cherche à déterminer* $d(g,F)$ *la distance de la fonction sinus aux fonctions polynomiales de degré au plus 2. Une méthode standard est de construire tout d'abord une base orthonormale de* F*. Pour cela, on orthogonalise la base* $(1,X,X^2)$ *de* F *avec les abus de notations des fonctions polynomiales. On a* $(X|1) = \int_{-1}^{1} x dx = 0$*, donc* $(1,X)$ *est orthogonale. D'autre part,* $(X^2|X) = 0$ *et* $(X^2|1) = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$*, de sorte que* $(1,X,\frac{3X^2-1}{2})$ *est orthogonale. On peut à présent déterminer le projeté orthogonal de* g *sur* F *via*

$$\pi_F(g) = \frac{(g|1)}{(1|1)}1 + \frac{(g|X)}{(X|X)}X + \frac{(g|\frac{1}{2}(3X^2-1))}{(\frac{1}{2}(3X^2-1)|\frac{1}{2}(3X^2-1))}\frac{1}{2}(3X^2-1)$$

Comme le sinus est impair $(g|1) = 0$ *et* $(g|X^2) = 0$*. Il nous reste à calculer via une intégration par parties*

$$(g|X) = \int_{-1}^{1} x\sin(x)dx = [-x\cos(x)]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\cos(x)dx = -2\cos(1) + 2\sin(1)$$

D'autre part, $(X|X) = 2/3$*. Ceci nous amène à*

$$\pi_F(g) = 3(\sin(1) - \cos(1))X$$

Enfin, via Pythagore $d(g,F) = \|g - \pi_F(g)\| = \sqrt{\|g\|^2 - \|\pi_F(g)\|^2}$*. On calcule* $(g|g) = \int_{-1}^{1}\sin^2(x)dx = \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1-\cos(2x))dx = \int_{0}^{1}(1-\cos(2x))dx = 1 - \frac{1}{2}\sin(2)$*, puis* $(\pi_F(g)|\pi_F(g)) = 6(\sin(1)-\cos(1))^2$*. On conclut :*

$$d(g,F) = \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin(2) - 6(\sin(1)-\cos(1))^2} \simeq 0{,}034$$

Propriété 31 *On suppose* E *de dimension finie. Soit* u *un vecteur non nul de* E *et* $F = \mathrm{Vect}(u)$ *la droite engendrée par* u*. Alors pour tout* x *de* E*,*

$$\pi_F(x) = \frac{(x|u)}{\|u\|^2}u, \quad \pi_{F^\perp}(x) = x - \frac{(x|u)}{\|u\|^2}u, \quad d(x,F^\perp) = \frac{|(x|u)|}{\|u\|}, d(x,F) = \sqrt{\|x\|^2 - \frac{(x|u)^2}{\|u\|^2}}$$

☞ **Remarque**

En particulier, si l'on choisit un vecteur ***unitaire*** u *qui engendre* F*, on obtient les formules* $\pi_F(x) = (x|u)u, \pi_{F^\perp}(x) = x - (x|u)u, d(x,F^\perp) = |(x|u)|, d(x,F) = \sqrt{\|x\|^2 - (x|u)^2}$*.*

Démonstration. Soit $x \in E$. On sait que $u/\|u\|$ est une base orthonormée de F. D'après la propriété 28, le projeté orthogonal de x sur F vaut $\pi_F(x) = (\frac{u}{\|u\|}|x)\frac{u}{\|u\|} = \frac{(x|u)}{\|u\|^2}u$. Comme $\pi_{F^\perp} + \pi_F = \mathrm{id}_E$, $\pi_{F^\perp}(x) = x - \frac{(x|u)}{\|u\|^2}u$. D'après le théorème 6,

$$d(x,F) = \|x - \pi_F(x)\| = \|x - \frac{(x|u)}{\|u\|^2}u\| = \sqrt{\|x\|^2 - 2(x|u)^2\frac{1}{\|u\|^2} + (x|u)^2\frac{1}{\|u\|^2}} = \sqrt{\|x\|^2 - \frac{(x|u)^2}{\|u\|^2}}$$

De manière similaire,

$$d(x,F) = \|x - \pi_{F^\perp}(x)\| = \|\frac{(x|u)}{\|u\|^2}u\| = \frac{|(x|u)|}{\|u\|}$$

Exemple 14 *Dans* $\mathbb{R}^3$ *muni de son produit scalaire canonique, on considère l'hyperplan* H *d'équation* $ax + by + cz = 0$ *dans la base canonique (donc orthonormale) de* $\mathbb{R}^3$ *avec* $u = (a,b,c) \neq (0,0,0)$*. On décrit l'hyperplan* $H = u^\perp$*. Alors pour tout* $e = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$*,*

$$d(x,H) = d(e,u^\perp) = \frac{|(e|u)|}{\|u\|} = \frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Propriété 32 *Dans* E *euclidien, soit* $b = (e_1,\dots,e_n)$ *une base orthonormale et* u *un vecteur unitaire. On note* U *la matrice colonne de* u *dans la base* b*. Alors la projection orthogonale sur* u *a pour matrice dans la base* b*,* UU^T*. La projection orthogonale sur* $u^\perp$ *a pour matrice dans la base* b*,* $I_n - UU^T$*.*

Démonstration. Soit x un vecteur de E, on note X sa matrice colonne dans la base b. D'après ce qui précède, et comme b est une base orthonormale

$$\pi_{\mathrm{F}}(x) = (x|u)u = u(u|x) = \mathrm{U}(\mathrm{U}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}) = (\mathrm{U}\mathrm{U}^{\mathrm{T}})\mathrm{X}$$

Par conséquent, $\mathrm{U}^{\mathrm{T}}\mathrm{U}$ est la matrice de π_u dans la base b. Comme $f \mapsto \mathrm{M}(f)_b$ est linéaire, et $\pi_{u^\perp} = \mathrm{id}_{\mathrm{E}} - \pi_u$, sa matrie dans la base b vaut $\mathrm{I}_n - \mathrm{U}\mathrm{U}^{\mathrm{T}}$.

Définition 13 *On appelle symétrie orthogonale par rapport à* F *la symétrie par rapport à* F *parallèlement à* $\mathrm{F}^\perp$*.*

Propriété 33 *Soit* $b = (e_1, \ldots, e_r)$ *une base orthonormale de* F*. La symétrie orthogonale par rapport à* F*,* σ_{F} *vérifie*

$$\forall x \in \mathrm{E}, \sigma_{\mathrm{F}}(x) = x - 2\sum_{i=1}^{r}(x|e_i)e_i$$

$$\forall x \in \mathrm{E}, \|\sigma(x)\| = \|x\|$$

On dit que σ_{F} *est une isométrie (elle conserve la norme).*

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, (\sigma_{\mathrm{F}}(x)|\sigma_{\mathrm{F}}(y)) = (x|y)$$

L'application σ_{F} *conserve le produit scalaire.*

Démonstration. On sait que $\sigma_{\mathrm{F}} = \mathrm{id}_{\mathrm{E}} - 2\pi_{\mathrm{F}}$, ce qui donne la première égalité d'après l'expression de la projection orthogonale. Soit $x \in \mathrm{E}$. On note $x = y + z$ sa décomposition dans $\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp$, de sorte que $\sigma_{\mathrm{F}}(x) = y - z$. Mais alors, $(y| - z) = 0$ et le théorème de Pythagore entraîne

$$\|\sigma_{\mathrm{F}}(x)\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2$$

Ainsi, σ_{F} conserve la norme. Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. On utilise l'identité de polarisation

$$\begin{aligned}
(\sigma_{\mathrm{F}}(x)|\sigma_{\mathrm{F}}(y)) &= \frac{1}{4}\left(\|\sigma_{\mathrm{F}}(x) + \sigma_{\mathrm{F}}(y)\|^2 - \|\sigma_{\mathrm{F}}(x) - \sigma_{\mathrm{F}}(y)\|^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\|\sigma_{\mathrm{F}}(x + y)\|^2 - \|\sigma_{\mathrm{F}}(x - y)\|^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right) \\
&= (x|y)
\end{aligned}$$