Premier problème : une équation fonctionnelle polynomiale.

1. Soit (P,Q) solution tel que P est constant, alors $d((1-X^2)Q^2) = d(1-P^2) \leq 0$, soit $2+2d(Q) \leq 0$, d'où $d(Q) \leq -1$. Par conséquent, $d(Q) = -\infty$, i.e $Q = 0$. Mais alors $P^2 = 1$, donc $P = \pm 1$. Réciproquement, $(1,0)$ et $(-1,0)$ sont des couples de polynômes solutions.
2. (a) On évalue l'équation fonctionnelle polynomiale en 1, ce qui donne $P^2(1)+(1-1^2)Q^2(1) = 1$, ie. $P^2(1) = 1$, soit $P(1) = \pm 1$.
   (b) On note $U = P$, puis $V = (1-X^2)Q$, ce qui permet d'écrire la relation de Bezout $UP + VQ = 1$. D'après le théorème de Bezout, P et Q sont premiers entre eux.
   (c) On dérive l'équation polynomiale, ce qui entraîne $2PP' + (1-X^2)2QQ' - 2XQ^2 = 0$, soit encore $PP' = Q(XQ - Q'(1-X^2))$. On en déduit que Q divise PP'. Or $Q \wedge P = 1$ d'après 2.b). Le lemme de Gauss implique alors Q divise P'.
   (d) Comme $(1-X^2)Q^2 = 1-P^2$, on a l'égalité de degrés $2+2d(Q) = d(1-P^2)$. Or P est non constant, donc $d(1-P^2) = d(P^2) = 2d(P)$. On a alors $d(P) = 1 + d(Q)$. En outre, comme P est non constant, on a également $d(P') = d(P) - 1$, d'où $d(P') = d(Q)$. Couplé à la relation de divisibilité $Q|P'$, on en déduit que Q et P' sont associés.
   (e) Comme $Q = \dfrac{P'}{\lambda}$, le terme dominant de Q vaut $\dfrac{ma_m}{\lambda}X^{m-1}$. On en déduit que le terme dominant de $P^2 + (1-X^2)Q^2$ vaut $a_m^2X^{2m} - X^2\left(\dfrac{ma_m}{\lambda}\right)^2 X^{2(m-1)} = a_m^2\left(1-\dfrac{m^2}{\lambda^2}\right)X^{2m}$.
   (f) Comme $P^2 + (1-X^2)Q^2 = 1$ et $m > 0$, ce terme dominant est nul, donc $a_m^2\left(1-\dfrac{m^2}{\lambda^2}\right) = 0$. Or $a_m \neq 0$, puisque c'est un coefficient dominant. On en déduit $1 - \dfrac{m^2}{\lambda^2} = 0$, i.e $\lambda^2 = m^2$. Cela entraîne via 2.d) $P'^2 = m^2Q^2$.
   (g) La question précédente fournit $m^2P^2 + (1-X^2)P'^2 = m^2$ puisque $m \neq 0$. En dérivant, on obtient
   $$2m^2PP' + (1-X^2)2P'P'' - 2XP'^2 = 0$$
   Comme P est non constant, $P' \neq 0$, et on en déduit par intégrité de $\mathbb{R}[X]$ que
   $$m^2P = XP' + (X^2-1)P''$$
3. (a) Le cosinus est deux fois dérivable, donc g est deux fois dérivable. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a
   $$g'(t) = -\sin(t)f'(\cos(t)) \quad \text{et} \quad g''(t) = -\cos(t)f'(\cos(t)) + \sin^2(t)f''(\cos(t))$$
   Par conséquent,
   $$-\Big(g''(t) + n^2g(t)\Big) = (\cos^2(t)-1)f''(\cos(t)) + \cos(t)f'(\cos(t)) - n^2f(\cos(t))$$
   Comme le cosinus est une surjection sur $[-1,1]$, on en déduit que f est solution de (E_n) si et seulement si g est solution de (E_n').
   (b) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants. Son polynôme caractéristique vaut $X^2 + n^2$ qui a pour racines in et $-in$, qui sont distinctes puisque $n \neq 0$. L'ensemble des solutions à valeurs réelles de (E_n') est donc
   $$\Big\{t \mapsto \alpha\cos(nt) + \beta\sin(nt) \big| (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\Big\}$$
4. (a) Notons $p = d(S)$ et a_p son coefficient dominant. Alors le coefficient dominant de $XS' + (X^2-1)S''$ vaut $pa_p + p(p-1)a_p = p^2a_p$, tandis que le coefficient dominant de n^2S vaut n^2a_p. On en déduit $p^2a_p = n^2a_p$. Comme $a_p \neq 0$, $p^2 = n^2$, puis $p = n$ car ce sont des entiers naturels.

(b) On écrit directement

$$\begin{aligned}(X^2-1)S''+XS' &= (X^2-1)\sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_kX^{k-2} + X\sum_{k=1}^{n} ka_kX^{k-1}\\ &= \sum_{k=0}^{n} k^2a_kX^k - \sum_{k=0}^{n-2}(k+2)(k+1)a_{k+2}X^k\\ &= n^2a_nX^n + (n-1)^2a_{n-1}X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}\Big(k^2a_k-(k+1)(k+2)a_{k+2}\Big)X^k\end{aligned}$$

L'égalité avec $n^2S=\sum_{k=0}^{n} n^2a_kX^k$ fournit alors l'ensemble d'égalités

$$(n-1)^2a_{n-1}=n^2a_{n-1} \quad \text{et} \quad \forall k\in[\![0,n-2]\!], k^2a_k-(k+1)(k+2)a_{k+2}=n^2a_k.$$

Comme $2n-1\neq 0$, on en déduit $a_{n-1}=0$, puis

$$\forall k\in[\![0,n-2]\!], (k^2-n^2)a_k=(k+1)(k+2)a_{k+2}.$$

(c) Pour tout entier p dans $\left[\!\left[0,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right]\!\right]$, on note $\mathcal{H}_p$: $a_{n-(2p+1)}=0$, et $a_{n-2p}=\left(\frac{-1}{4}\right)^p\frac{(n-p-1)!}{p!(n-2p)!}na_n$ et on démontre sa validité par récurrence. Initialisation : pour $p=0$, on a déjà démontré que $a_{n-1}=0$. D'autre part, $\left(\frac{-1}{4}\right)^0\frac{(n-0-1)!}{0!(n-2\times 0)!}na_n=\frac{n!}{n!}a_n=a_n$. Hérédité : soit p tel que $0\leq p-1\leq\lfloor n/2\rfloor$ et $\mathcal{H}_p$ est vraie. Alors en exploitant la question précédente pour $k=n-2p-3$, il vient $((n-2p-3)^2-n^2)a_{n-2p-3}=(n-2p-2)(n-2p-1)a_{n-2p-1}$. Comme $2p<n$ et $a_{n-(2p+1)}=0$, on obtient $a_{n-(2p+3)}=0$. D'autre part, l'égalité de la question précédente fournit pour $k=n-2p-2$ fournit

$$\begin{aligned}a_{n-2(p+1)} &= \frac{(n-2p)(n-2p-1)}{(-2p-2)(2n-2p-2)}a_{n-2p}\\ &= \left(\frac{-1}{4}\right)\frac{(n-2p)(n-2p-1)}{(p+1)(n-(p+1))}\left(\frac{-1}{4}\right)^p\frac{(n-p-1)!}{p!(n-2p)!}na_n\\ &= \left(\frac{-1}{4}\right)^{p+1}\frac{(n-(p+1)-1)!}{(p+1)!(n-2(p+1))!}na_n\end{aligned}$$

Le principe de récurrence permet de conclure.

(d) En notant $U=\frac{n}{2}\sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^p\frac{(n-p-1)!}{p!(n-2p)!}(2X)^{n-2p}$, on vient de montrer que si S est solution non nulle, alors on dispose de $a_n\in\mathbb{R}^*$ tel que $S=a_nU$. Réciproquement, les calculs précédents montrent que U est solution, donc que μU l'est également pour tout réel μ par linéarité. L'ensemble des solutions polynomiales de (E_n) est alors

$$\{\mu U|\mu\in\mathbb{R}\}$$

5. (a) On procède par récurrence double. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{H}_n$: $\Big(d(T_n)=n, T_n\in\mathbb{Z}[X], \mathrm{dom}(T_n)=2^{n-1}\Big)$. Initialisations : $T_1=X$, donc $d(T_1)=1$, et $T_1\in\mathbb{Z}[X]$. De plus, $2^{1-1}=1=\mathrm{dom}(T_1)$. Ainsi $\mathcal{H}_1$ est vraie. $T_2=2X^2-1$, donc $d(T_2)=2$, $T_2\in\mathbb{Z}[X]$ et $\mathrm{dom}(T_2)=2=2^{2-1}$. Ainsi $\mathcal{H}_2$ est vérifiée. Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ sont vraies. Alors $d(2XT_{n+1})=n+2$ et $d(T_n)=n\neq n+2$, donc $d(2XT_{n+1}-T_n)=n+2$. On en déduit que $\mathrm{dom}(T_{n+2})=\mathrm{dom}(2XT_{n+1})=2\mathrm{dom}(T_{n+1})=2\cdot 2^{n-1+1}=2^{n+1}$. De plus, les coefficients de T_{n+2} sont des combinaisons entières des coefficients de T_{n+1} et T_n qui à coefficients dans $\mathbb{Z}$, donc T_{n+2} est à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Ainsi, $\mathcal{H}_{n+2}$ est vraie. La propriété annoncée en découle par récurrence.

(b) On procède encore par récurrence double. Soit $t\in\mathbb{R}$. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}_n$: $T_n(\cos(t))=\cos(nt)$. Initialisations : $T_0(\cos(t))=1=\cos(0t)$, $T_1(\cos(t))=\cos(t)=\cos(1t)$, donc $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ sont vraies. Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ sont vraies. Alors

$$\begin{aligned}T_{n+2}(\cos(t)) &= 2\cos(t)T_{n+1}(\cos(t))-T_n(\cos(t))\\ &= 2\cos(t)\cos((n+1)t)-\cos(nt)\\ &= \cos((n+2)t)+\cos(nt)-\cos(nt)\\ &= \cos((n+2)t)\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{H}_{n+2}$ est vérifiée et la propriété en découle par récurrence.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Les questions précédentes montrent que T_n est un tel polynôme. Soit P qui vérifie les mêmes critères. Alors
$$\forall x \in [-1,1], (P - T_n)(x) = \cos(n \arccos(x)) - \cos(n \arccos(x)) = 0$$
Le polynôme $P - T_n$ possède une infinité de racines, donc est le polynôme nul. Ainsi $P = T_n$, ce qui prouve l'unicité.

(d) D'après 5.b) et 3.b) $t \mapsto T_n(\cos(t))$ est solution de (E'_n) donc T_n est solution de (E_n) d'après 3.a).

(e) Daprès 4.d), on dispose de $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $T_n = \mu U$. On compare leurs coefficients dominants : $\mathrm{dom}(U) = 2^{n-1}$ et $\mathrm{dom}(T_n) = 2^{n-1}$ d'après 5.a), donc $T_n = U$ et l'ensemble des solutions polynomiales est l'ensemble des fonctions proportionnelles à T_n d'après 4.d).

6. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n(1) = \cos(n \arccos(1)) = \cos(0) = 1$.

(b) D'après 2.g), P est solution de (E_n), donc on dispose de μ dans $\mathbb{R}^*$ tel que $P = \mu T_n$. D'après 2.a), $P(1) = \pm 1$, donc $\mu = \pm 1$, puisque $T_n(1) = 1$. D'après 1.f), $Q^2 = \dfrac{P'^2}{n^2} = \dfrac{T_n'^2}{n^2}$, donc $Q = \dfrac{T'_n}{n}$ ou $Q = -\dfrac{T'_n}{n}$.

(c) Réciproquement, soit $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in \mathbb{R}$. On remarque par dérivation que $-\sin(t) T'_n(\cos(t)) = -n \sin(nt)$, ce qui entraîne
$$\begin{aligned}
T_n^2(\cos(t)) + (1 - \cos^2(t)) \frac{T_n'^2(\cos(t))}{n^2} &= T_n^2(\cos(t)) + \frac{1}{n^2}\left[-\sin(t) T'_n(\cos(t))\right]^2 \\
&= \cos^2(nt) + \sin^2(nt) \\
&= 1
\end{aligned}$$
On en déduit que le polynôme $T_n^2 + (1 - X^2)\dfrac{T_n'^2}{n^2} - 1$ possède une infinité de racines (tous les réels de $[-1,1]$), ce qui entraîne l'égalité polynomiale. Ainsi, $(\pm T_n, \pm \dfrac{T'_n}{n})$ est bien solution. L'ensemble des solutions à P constant a été vu en question 1. Conclusion,
$$\left\{(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2 | P^2 + (1 - X^2) Q^2 = 1\right\} = \{(\pm 1, 0)\} \cup \left\{\left(\pm T_n, \pm \frac{T'_n}{n}\right) | n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Deuxième problème : la fonction dilogarithme

1. (a) Le terme de plus haut degré vaut $\binom{2n+1}{1}(-1)^0 X^n = (2n+1) X^n$. Or $2n+1 \neq 0$ donc $d(P) = n$.

(b) Soit $t \in]0, \pi/2[$.
$$\begin{aligned}
e^{i(2n+1)t} &= \left(e^{it}\right)^{2n+1} \\
&= (\cos(t) + i \sin(t))^{2n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} i^k \sin^k(t) \cos^{2n+1-k}(t) \\
&= \sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p} i^{2p} \sin^{2p}(t) \cos^{2n+1-2p}(t) + \sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} i^{2p+1} \sin^{2p+1}(t) \cos^{2n-2p}(t)
\end{aligned}$$
On en déduit en passant à la partie imaginaire :
$$\sin((2n+1)t) = \sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p \sin^{2p+1}(t) \cos^{2(n-p)}(t)$$

Or $t \in]0,\pi/2[$, donc $\sin(t) \neq 0$, d'où $\sin^{2n+1}(t) \neq 0$. On en déduit

$$\begin{aligned}\sin((2n+1)t) &= \sin^{2n+1}(t)\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p \sin^{2(p-n)}(t)\cos^{2(n-p)}(t)\\ &= \sin^{2n+1}(t)\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p\left(\text{cotan}^2(t)\right)^{n-p}\\ &= \sin^{2n+1}(t)P_n(\text{cotan}^2(t))\end{aligned}$$

(c) Soit $k \in [\![1,n]\!]$, alors $0 < \frac{k\pi}{2n+1} < \frac{\pi}{2}$. Par conséquent, on peut appliquer ce qui précède au réel $\frac{k\pi}{2n+1}$, ce qui entraîne

$$P_n\left(\text{cotan}^2(\frac{k\pi}{2n+1})\right) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\sin^{2n+1}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{\sin(k\pi)}{\sin^{2n+1}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = 0$$

(d) La cotangente est dérivable sur $]0,\pi/2[$, de signe constant strictement positif. De plus, $\text{cotan}' = -1/\sin^2 < 0$, donc elle est strictement décroissante, donc cotan^2 est strictement décroissante sur $]0,\pi/2[$ donc injective. Ainsi, la famille $\left(\text{cotan}^2(\frac{k\pi}{2n+1})\right)_{1\leq k\leq}$ comporte bien n réels distincts qui forment alors n racines distinctes de P_n. Comme P_n est de degré n, on en déduit que P_n est simplement scindé. Comme il est de coefficient dominant $(2n+1)$, on obtient la factorisation

$$P_n = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X - \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$$

(e) On utilise les relations coefficients racines : la somme des racines vaut l'opposé du coefficient d'avant-dernier degré divisé par le coefficient dominant, ce qui donne

$$\sum_{k=1}^{n}\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = -\frac{\binom{2n+1}{2\cdot 1+1}(-1)^1}{\binom{2n+1}{1}} = \frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{3!(2n+1)} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

2. Le sinus est concave sur $[0,\pi/2[$ (puisque deux fois dérivable, de dérivée seconde $-\sin \leq 0$ sur cet intervalle). Il est donc au-dessous de sa tangente en 0, ce qui donne $\forall t \in [0,\pi/2[, \sin(t) \leq t$. D'autre part, la fonction tangente est convexe sur $[0,\pi/2[$ (puisque deux fois dérivable, de dérivée seconde $2\tan(1+\tan^2) \geq 0$ sur cet intervalle). Elle est donc au-dessus de sa tangente en 0, ce qui donne $\forall t \in [0,\pi/2[, t \leq \tan(t)$.
3. Soit $t \in]0,\pi/2[$, alors $\sin(t) > 0$ et $\tan(t) > 0$. La fonction $u \mapsto 1/u^2$ étant décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on déduit de ce qui précède

$$\frac{1}{\tan^2(t)} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{\sin^2(t)}$$

Or $\frac{1}{\sin^2(t)} = \frac{\cos^2(t)+\sin^2(t)}{\sin^2(t)} = \text{cotan}^2(t)+1$, donc

$$\text{cotan}^2(t) \leq \frac{1}{t^2} \leq 1 + \text{cotan}^2(t)$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1,n]\!]$. On applique l'inégalité précédente au réel $\frac{k\pi}{2n+1}$ qui est bien dans $]0,\pi/2[$. Cela entraîne

$$\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leq 1+\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

Il vient alors par sommation

$$\sum_{k=1}^{n}\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leq \sum_{k=1}^{n}\left(1+\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$$

D'arès la question 1.e), on en déduit

$$\frac{n(2n-1)}{3} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leq n + \frac{n(2n-1)}{3}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En multipliant l'inégalité précédente par $\pi^2/(2n+1)^2 > 0$, il vient

$$\frac{\pi^2}{6}\frac{n(n-1/2)}{(n+1/2)^2} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leq \pi^2\frac{n}{(2n+1)^2} + \frac{\pi^2}{6}\frac{n(n-1/2)}{(n+1/2)^2}$$

D'après les limites des fonctions rationnelles, les encadrants de gauche et droite tendent tous deux vers $\pi^2/6$ quand n tend vers $+\infty$. Le théorème d'encadrement assure alors que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $\pi^2/6$.

II. Étude de la régularité de f.

1. (a) Soit $t < 1$. Alors $g'(t) = \dfrac{1}{1-t} = 0!(1-t)^{-1}$. On en déduit par récurrence classique :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, g^{(n)}(t) = (n-1)!(1-t)^{-n} = \frac{(n-1)!}{(1-t)^n}$$

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Il s'agit d'une somme géométrique de raison t. Pour $t = 1$, $\sum_{k=0}^{n-1} t^k = n$. Si $t \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \dfrac{1-t^n}{1-t}$.

En particulier,

$$\forall t \in]-\infty, 1[, \frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{n-1} t^k + \frac{t^n}{1-t}$$

Soit $x \in]-\infty, 1[$. En intégrant l'égalité précédente entre 0 et x, on obtient

$$[-\ln(1-t)]_0^x = \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x + \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt$$

soit encore

$$-\ln(1-x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt = \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k} + \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt$$

(c) Soit $x \in [0,1[$ et $t \in [0,x]$. Alors $0 \leq t \leq x < 1$, donc $1-t \geq 1-x > 0$, donc $0 < \dfrac{1}{1-t} \leq \dfrac{1}{1-x}$, puis $0 \leq \dfrac{t^n}{1-t} \leq \dfrac{t^n}{1-x}$. On en déduit par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq R_n(x) \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-x}dt = \frac{1}{1-x}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \frac{1}{1-x}\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Soit à présent x dans $[-1,0]$ et $t \in [x,0]$. Alors $x \leq t \leq 0$, donc $1-x \geq 1-t \geq 1 > 0$, donc $\dfrac{1}{1-t} \leq 1$, puis $\dfrac{|t|^n}{1-t} \leq |t|^n$. On en déduit par croissance de l'intégrale et inégalité triangulaire

$$0 \leq \left|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt\right| \leq \int_x^0 \frac{|t|^n}{1-t}dt = \left[\frac{t|t|^{n+1}}{n+1}\right]_x^0 = \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

2. (a) On exploite le résultat II.1) pour $n = 2$,

$$\forall x \in [-1,1[, -\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + R_2(x)$$

Or les inégalités précédentes indiquent

$$\forall x \in [0,1[, 0 \leq \frac{R_2(x)}{x^2} \leq \frac{1}{1-x}\frac{x}{3} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

$$\forall x \in [-1,0], 0 \leq \frac{|R_2(x)|}{x^2} \leq \frac{x}{3} \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0$$

On en déduit par théorème d'encadrement, $\dfrac{\ln(1-x)+x+x^2/2}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

(b) Soit $x \in]-\infty, 1[\setminus\{0\}$,

$$f(x)-1 = \frac{-\ln(1-x)-x}{x} = -x\frac{\ln(1-x)+x+x^2/2}{x^2} + x \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Ainsi, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1 = f(0)$, donc f est continue en 0.

(c) Soit $x \in]-\infty, 1[\setminus\{0\}$, On assemble le taux d'accroissement de f en 0 :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{-\ln(1-x)-x}{x^2} = -\frac{\ln(1-x)+x+x^2/2}{x^2} + \frac{1}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$$

Ainsi, ce taux d'accroissement admet la limite finie $1/2$ en 0. Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1/2$.

(d) Soit x dans $]-\infty, 0[\cup]0,1[$.

$$f'(x) = \frac{1}{x(1-x)} + \frac{\ln(1-x)}{x^2} = \frac{1}{1-x}\left[\frac{\ln(1-x)+x}{x^2}\right] - \frac{1}{1-x}\frac{\ln(1-x)}{x}$$

(e) On passe à la limite quand x tend vers 0 dans l'égalité précédente. Comme vu auparavant,

$$\frac{\ln(1-x)+x}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{-1}{2}, \quad \frac{\ln(1-x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} -1, \quad \frac{1}{1-x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

On en déduit que $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2} = f'(0)$. Ainsi, f' est continue en 0, donc de classe C^1 sur $]-\infty, 1[$.

III. Étude de L et de son prolongement en 1.

1. (a) f est continue, donc d'après le théorème fondamental du calcul intégral. L est dérivable et $L' = f$. Comme f est de classe C^1, L est de classe C^2.

   (b) Toujours d'après le théorème fondamental du calcul intégral,

$$\forall x \in [-1,1[, L'(x) = f(x) = \begin{cases} \dfrac{-\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   En particulier, pour tout x dans $[-1,1[$, $f(x) > 0$, donc L est strictement croissante.

2. (a) Soit $x \in]-1,0[\cup]0,1[$. D'après les inégalités II.2)

$$0 \leq \left|\frac{R_n(x)}{x}\right| \leq \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}\dfrac{|x|^n}{n+1} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{|x|^n}{n+1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   Comme $n > 0$, les majorants ont tous 0 pour limite quand x tend vers 0. Par théorème d'encadrement, $R_n(x)/x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, ce qui permet le prolonger continûment en 0 par 0. Mais alors, d'après II.1),

$$\forall x \in [-1,0[\cup]0,1[, \frac{-\ln(1-x)}{x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{k} + \frac{R_n(x)}{x} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k+1} + \frac{R_n(x)}{x}$$

   En $x = 0$, on constate que l'égalité est encore valide via le prolongement de f et de $R_n(x)/x$.

   (b) Soit $x \in [-1,1[$. Si $x = 0$, la suite considérée est constante égale à $f(0) = 1$. Si $x \in [-1,0[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k+1}\right| = \left|\frac{R_n(x)}{x}\right| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On en déduit le résultat par théorème d'encadrement. Si $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, puisque $|x| < 1$, on a

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k+1} \right| = \left| \frac{R_n(x)}{x} \right| \leq \frac{1}{1-x} \frac{x^n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ce qui démontre le résultat attendu dans cet autre cas.

3. (a) On sait d'après les croissances comparées que $\dfrac{\ln(1-t)}{t}\sqrt{1-t} \xrightarrow[t\to 1^-]{} 0$. Comme cette limite est finie, on en déduit que $t \mapsto f(t)\sqrt{1-t}$ est bornée dans un voisinage V à gauche de 1. On dispose alors de η et β des réels strictement positifs tels que $\forall t \in [1-\eta, 1[, f(t)\sqrt{1-t} \leq \beta$. D'autre part, $t \mapsto f(t)\sqrt{1-t}$ est continue sur le segment $[0, 1-\eta]$, donc est majorée sur ce segment d'après le TBA. Ainsi, on dispose de γ un réel positif tel que $\forall x \in [0, 1-\eta], f(t)\sqrt{1-t} \leq \gamma$. En posant $\alpha = \max(\beta, \gamma)$, on obtient

$$\forall x \in [0,1[, f(t) \leq \frac{\alpha}{\sqrt{1-t}}$$

(b) Soit $x \in [0,1[$, la croissance de l'intégrale donne

$$\int_0^x f(t)dt \leq \alpha \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \alpha\Big[(-2)\sqrt{1-t}\Big]_0^x = 2\alpha\Big(1-\sqrt{1-x}\Big) \leq 2\alpha$$

(c) Ce qui précède indique que la fonction L est majorée. D'après III.1.b), elle est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, L admet une limite finie en 1.

(d) On procède par double inégalité. Soit $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En intégrant III.2.a), on obtient

$$L(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \int_0^x \frac{R_n(t)}{t} dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k^2} + \int_0^x \frac{R_n(t)}{t} dt$$

Or $t \mapsto R_n(t)/t$ est positive sur $[0,x]$. On en déduit par croissance de L, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k^2} \leq L(x) \leq \ell$, et ce pour tout x dans $]0,1[$. Puisque les fonctions polynomiales sont continues, on en déduit par passage à la limite quand x tend vers 1^-, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \ell$, et ce pour tout n dans $\mathbb{N}^*$. D'après I.5), $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$. On en déduit par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{\pi^2}{6} \leq \ell$.

D'autre part, on peut majorer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{6}$. Cela fournit alors

$$L(x) \leq \frac{\pi^2}{6} + \int_0^x \frac{R_n(t)}{t} dt$$

D'après III.1.c), on a $\forall t \in]0,x]$, $\dfrac{R_n(t)}{t} \leq \dfrac{1}{1-t}\dfrac{t^n}{n+1}$ y compris en 0 au vu du prolongement continu en 0. On en déduit par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \int_0^x \frac{R_n(t)}{t} dt \leq \frac{1}{(n+1)} R_n(x) \leq \frac{1}{1-x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

Puisque $0 \leq x < 1$, $\dfrac{1}{1-x}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Le théorème d'encadrement fournit alors $\displaystyle\int_0^x \frac{R_n(t)}{t} dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Mais alors $L(x) \leq \dfrac{\pi^2}{6}$ par passage à la limite dans les inégalités. On passe ensuite à la limite quand x tend vers 1^-, ce qui fournit $\ell \leq \dfrac{\pi^2}{6}$.

Conclusion, $\ell = \dfrac{\pi^2}{6}$.

IV. Application au calcul d'intégrales

1. Soit $a > 0$. Le changement de variable indiqué fournit $dt = e^{-x}dx$ et $x = -\ln(1-t)$. On en déduit

$$J_a = \int_{1-e^{-a}}^{1-e^{-1/a}} \frac{-\ln(1-t)}{t}\,dt = L(1-e^{-1/a}) - L(1-e^{-a})$$

Or $1-e^{-a} \xrightarrow[a\to 0^+]{} 0$ et $1-e^{-1/a} \xrightarrow[a\to 0^+]{} 1$. On en déduit d'après la continuité de L en 0 et sa limite en 1 que $J_a \xrightarrow[a\to 0^+]{} \ell - L(0) = \pi^2/6$.

2. (a) On note $g :]-1,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto L(x) + L(-x) - \frac{1}{2}L(x^2)$. Elle est dérivable puisque L l'est. De plus,

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\}, g'(x) &= L'(x) - L'(-x) - xL'(x^2)\\ &= f(x) - f(-x) - xf(x^2)\\ &= \frac{-\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{\ln(1-x^2)}{x}\\ &= \frac{-\ln((1-x)(1+x)) + \ln((1-x)(1+x))}{x^2}\\ &= 0\end{aligned}$$

De plus, comme L est de classe C^1, on en déduit que g est de classe C^1, donc que $g'(0) = 0$ par passage à la limite. Comme $]-1,1[$ est un intervalle, on en déduit que g est constante égale à $g(0) = L(0) + L(0) - \frac{1}{2}L(0) = 0$. On obtient ainsi

$$\forall x \in]-1,1[, L(x) + L(-x) = \frac{1}{2}L(x^2)$$

(b) Comme L est continue en -1 et admet une limite ℓ en 1, ce qui précède fournit par passage à la limite quand x tend vers 1, $\ell + L(-1) = \frac{\ell}{2}$, soit encore $L(-1) = -\frac{\ell}{2} = -\frac{\pi^2}{12}$. Ainsi

$$\int_{-1}^{0} \frac{-\ln(1-t)}{t}\,dt = -L(-1) = \frac{\pi^2}{12}$$

3. (a) On note $h :]0,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto L(1-x) + L(x) + \ln(x)\ln(1-x)$. Cette fonction est dérivable et

$$\forall x \in]0,1[, h'(x) = -f(1-x) + f(x) + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} = 0$$

Comme $]0,1[$ est un intervalle, h est constante. on cherche la limite de h en 1. Or $\ln(x)\ln(1-x) = \frac{\ln(x)}{1-x}(1-x)\ln(1-x) \xrightarrow[x\to 1]{} -1\cdot 0 = 0$. Par conséquent, $h(x) \xrightarrow[x\to 1]{}= L(0) + \ell = \pi^2/6$. On en déduit $\forall x \in]0,1[, L(1-x) + L(x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(x)\ln(1-x)$.

(b) On évalue ce qui précède en $x = 1/2$, ce qui donne $2L(1/2) = \frac{\pi^2}{6} - \ln^2(1/2)$. Conclusion,

$$\int_0^{1/2} \frac{-\ln(1-t)}{t}\,dt = L(1/2) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln^2(2)}{2}$$