*Les calculatrices ne sont pas autorisées.*

*Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.*

*Il est rappelé qu'il est tenu compte dans l'évaluation de la présentation et la rédaction des copies.*

## Exercice 1 : une étude de fonction

On rappelle la formule de dérivation des fonctions composées : pour toutes fonctions $u, v$ dérivables à valeurs dans des intervalles adéquats, la fonction $u \circ v$ est dérivable de dérivée $v'(u' \circ v)$. On note

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(1+x)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. Montrer que $f'(1) = 0$ sans dériver le logarithme.
3. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{x^2+x}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \ln(1+x)\right]$$
4. Montrer que $\forall y \geq 0, \ln(1+y) \leq y$ et en déduire que la fonction dérivable $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \ln(1+x)$ vérifie $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) \leq \frac{1-x}{x(1+x)}$.
5. En déduire les variations de $f$. On précisera en particulier si elle admet un maximum et la valeur de ce maximum le cas échéant.
6. Déterminer la limite de $f$ en 0. En déduire sa limite en $+\infty$.

## Exercice 2 : logique

Pour tout fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, on considère les assertions suivantes :

$$(C) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq A_\varepsilon \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon$$

$$(D) \quad \exists A \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq A \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon$$

1. Écrire la négation de l'assertion $(C)$.
2. Écrire la négation de l'assertion $(D)$.
3. Démontrer que l'implication $(D) \Rightarrow (C)$ est vraie.
4. Démontrer que pour toute fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, $f$ vérifie $(D)$ si et seulement si
$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in [A, +\infty[, f(x) = 0$$
*Indication : procéder par l'absurde pour le sens direct.*
5. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ vérifie $(C)$ mais ne vérifie pas $(D)$.

## Exercice 3 : divers

1. On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ via $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2u_n}{n+2}$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n \leq n^2$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $n+1$ réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ tels que $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$. Montrer qu'il existe deux de ces réels dont la distance est inférieure ou égale à $1/n$.

3. Soient $x, y, z$ trois réels parmi lesquels il y a 0 et deux réels non nuls et de signe opposé. On suppose que les implications suivantes sont vraies :

$$(a)\ x = 0 \Rightarrow y > 0 \quad (b)\ x > 0 \Rightarrow y < 0 \quad (c)\ y \neq 0 \Rightarrow z > 0$$

   Classer les réels $x, y, z$ dans l'ordre croissant.
4. Déterminer tous les réels $x$ vérifiant $\cos(2x) = \sin(x)$.

## Exercice 4 : quelques complexes

On note, pour tout complexe $z$, $\mathfrak{Im}(z)$ sa partie imaginaire. On note $P$ l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Im}(z) > 0\}$, puis $D$ l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. On considère également quatre réels $a, b, c, d$ tels que $c \neq 0$ et $d \neq 0$. La première question est indépendante des trois dernières.

1. Montrer l'assertion suivante :
$$\forall z' \in D, \exists! z \in P, z' = \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$$
   *Indication : on pourra « exprimer » un tel $z$ en fonction de $z'$.*
2. Montrer que pour tout complexe $z$ non réel,
$$\mathfrak{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{(ad-bc)\mathfrak{Im}(z)}{|cz+d|^2}$$
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les réels $a, b, c, d$ pour que l'assertion suivante soit vraie
$$\forall z \in P, \exists z' \in P, z' = \frac{az+b}{cz+d}$$
4. On suppose que le critère précédent est satisfait et on note $T = \{z \in P \mid \mathfrak{Re}(z) = 0\}$. Déterminer géométriquement l'ensemble
$$\left\{\frac{az+b}{cz+d} \mid z \in T\right\}$$
   *Cette dernière question est difficile et nécessite de prendre des initiatives.*