IPESUP 2023/2024

Colle 4 MPSI/MP2I   Jeudi 9 novembre 2023

★★★

Planche 1

★★★

1. Caractériser les fonctions f dérivables de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, f(xy) = f(x)+f(y)$.
2. Étude de la fonction $x \mapsto |\sin(x)|^{\sin(x)}$.
3. On note $f : x \mapsto \arcsin\sqrt{x}$. Quel est le domaine de définition de f ? Rechercher une primitive de f.

   Indication : on pourra calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}du$ *à l'aide du changement de variable* $u = \sin(v)$.

★★★

Planche 2

★★★

1. Définition de l'arscinus. Dérivabilité et expression de sa dérivée.
2. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{\mathrm{sh}(x)} = \frac{1}{\mathrm{th}(x/2)} - \frac{1}{\mathrm{th}(x)}$$
   En déduire une expression pour tout réel x non nul de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\mathrm{sh}(2^k x)}$.
3. Soit $(a,b) \in]1,+\infty[^2$ tel que $a < b$. Calculer $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$. Déterminer ses limites le cas échéant, lorsque a tend vers 1^+ et b vers $+\infty$.

★★★

Planche 3

★★★

1. Soit $a : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur un intervalle I. Ensemble des solutions de $y' + ay = 0$.
2. Montrer que $\forall x \in [0,1], \arcsin(\sqrt{x}) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\arcsin(2x-1)$.
3. Soit $\alpha \in]0,1]$. Calculer $\displaystyle\int_\alpha^1 \frac{dt}{t^{1/2}+t^{1/3}}$ et déterminer sa limite le cas échéant, lorsque α tend vers 0^+.
   Indication : on pourra utiliser la division euclidienne du polynôme X^3 *par* $X+1$.

★★★

Bonus

★★★

$$\frac{\pi}{4} = 6\arctan\left(\frac{1}{8}\right) + 2\arctan\left(\frac{1}{57}\right) + \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \quad ?$$