Analyse numérique

Cornou Jean-Louis

Correction des exercices

1 Vitesse de convergence

1.1 Vitesse de convergence

Exercice 1 *On suppose que la suite* $\left(\left|\frac{u_{n+1}-l}{u_n-l}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente. Montrer que sa limite appartient à l'intervalle* $[0,1]$.

Correction 1 *Supposons un instant que cette limite, notons-la* λ*, vérifie* $\lambda > 1$*. On note alors* $\mu = (1+\lambda)/2$*, comme* $|\mu-\lambda| = (\lambda-1)/2 > 0$*, donc il existe un rang* N *à partir duquel*

$$\forall n \geq \mathrm{N}, \left|\frac{u_{n+1}-l}{u_n-l}\right| \geq \mu$$

On en déduit que la suite $(|u_n-l|)_{n\geq\mathrm{N}}$ *est minorée par la suite géométrique* $(|u_\mathrm{N}-l|\mu^{n-\mathrm{N}})_{n\geq\mathrm{N}}$*. Or on a choisi* μ *de telle sorte que* $\mu > 1$*. Par conséquent, cette dernière suite géométrique tend vers* $+\infty$*, cela entraîne par minoration que la suite* $(|u_n-l|)_{n\geq\mathrm{N}}$ *tend vers* $+\infty$*, ce qui contredit sa convergence vers* 0*. Par conséquent,* $\lambda\in[0,1]$.

Exercice 2
1. *On suppose que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *possède un coefficient de convergence* λ *dans* $]-1,1[\setminus\{0\}$ *et que* $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n \neq u_{n-1}$*. Montrer qu'alors la suite* $\left(\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n-u_{n-1}}\right)$ *converge vers* λ.
2. *Montrer que le résultat précédent est faux avec des valeurs absolues en considérant la suite* u *définie par* $\forall n\in\mathbb{N}, u_{2n} = (-1)^n\lambda^{2n}, u_{2n+1} = (-1)^n\lambda^{2n+1}$ *avec* λ *un réel dans* $]0,1[$.

Correction 2
1. *Soit* n *un entier naturel non nul. Alors, on a*

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n-u_{n-1}} = \frac{(u_{n+1}-l)-(u_n-l)}{(u_n-l)-(u_{n-1}-l)} = \frac{u_n-l}{u_{n-1}-l}\,\frac{\frac{u_{n+1}-l}{u_n-l}-1}{\frac{u_n-l}{u_{n-1}-l}-1}$$

Comme le coefficient de convergence est différent de 1*, on déduit des opérations sur les limites que cette expression tend, quand* n *tend vers* $+\infty$*, vers* $\lambda\frac{\lambda-1}{\lambda-1} = \lambda$.

2. *Pour tout entier* n*,* $|u_n| = \lambda^n$ *de sorte que* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*. Pourtant, pour tout entier* n *non nul,*

$$\frac{u_{2n+1}-u_{2n}}{u_{2n}-u_{2n-1}} = \frac{(-1)^n\lambda^{2n+1}-(-1)^n\lambda^{2n}}{(-1)^n\lambda^{2n}-(-1)^{n-1}\lambda^{2n-1}} = -\frac{\lambda(1-\lambda)}{\lambda+1}$$

$$\frac{u_{2n+2}-u_{2n+1}}{u_{2n+1}-u_{2n}} = \frac{(-1)^{n+1}\lambda^{2n+2}-(-1)^n\lambda^{2n+1}}{(-1)^n\lambda^{2n+1}-(-1)^{n-1}\lambda^{2n}} = \frac{\lambda(1+\lambda)}{1-\lambda}$$

Ces deux valeurs sont distinctes, puisque λ *appartient à* $]0,1[$*. Par conséquent, la suite* $\left(\left|\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n-u_{n-1}}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est divergente.*

☞ **Remarque**
Ce dernier résultat permet d'estimer le coefficient λ *sans pour autant connaître la limite* l.

Exercice 3 *Étudier la vitesse de convergence des suites suivantes :*

1. $b \in \mathbb{R}^{+*}, \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 1/n^b$.
2. $\forall n \geq 2, b_n = 1/\ln(n)$.
3. $0 < |a| < 1, \forall n \in \mathbb{N}, c_n = a^n$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}, d_n = 1/n!$.
5. $\forall n \in \mathbb{N}, e_n = n!/n^n$.

Correction 3 *Toutes ces suites tendent vers* 0. *Soit n un entier naturel suffisamment grand, alors*

1.
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^b$$
La quantité $n/(n+1)$ tend vers 1 *quand n tend vers $+\infty$. On en déduit par continuité de la fonction puissance b que le coefficient de convergence vaut* 1. *La convergente est donc lente.*

2.
$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{1}{\ln(n+1)} + 1$$
Le logarithme de la partenthèse tend vers $\ln(1)$ *par continuité du logarithme en* 1. *Par conséquent, la première fraction vers* 0*, et le taux* $|b_{n+1}/b_n|$ *tend vers* 1. *La convergence est donc lente.*

3. *Le rapport est constant égal à* $|a|$. *La convergence est donc géométrique de rapport* $|a|$.

4.
$$\left|\frac{d_{n+1}}{d_n}\right| = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
La convergence est donc rapide.

5.
$$\left|\frac{e_{n+1}}{e_n}\right| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/e$$
La convergence est donc géométrique de rapport $1/e$.

Exercice 4 *Soit v la suite définie par* $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{2n} = 1/n, v_{2n+1} = 2/(n+1)$. *Montrer que v converge mais n'a pas de vitesse de convergence.*

Correction 4 *Les sous-suites* $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *tendent tous deux vers* 0*, ce qui assure que v est convergente de limite nulle. Toutefois,*

$$\left|\frac{v_{2n+1}}{v_{2n}}\right| = \frac{2n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$$
$$\left|\frac{v_{2n+2}}{v_{2n+1}}\right| = \frac{n}{2(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

Comme $2 \neq 1/2$, *la suite* $\left(\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est divergente.*

Exercice 5 *On définit la suite u via*
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

1. *Expliciter la formule de Taylor-Lagrange du logarithme entre* 1 *et* $1 + 1/n$ *à l'ordre* 1. *En déduire que* $n(u_n - e) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e/2$.
2. *Montrer que la convergence de u est lente, et que la convergence de la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique.*

Correction 5 1. *Le logarithme népérien est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^{+*}$*, donc tout va bien. Soit* n *un entier naturel non nul, il existe un réel* c_n *dans* $]1, 1+1/n[$ *tel que*

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(1) + \left(1+\frac{1}{n}-1\right)\ln'(1) + \frac{\left(1+\frac{1}{n}-1\right)^2}{2}\ln''(c_n)$$

soit encore

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2 c_n^2}$$

On en déduit que $u_n = \exp(n\ln(1+1/n)) = e\exp(-1/(2nc_n^2))$*, donc que*

$$n(u_n - e) = \frac{e}{2}2n(\exp(-1/(2nc_n^2))-1)$$

Comme c_n *tend vers* 1 *par encadrement, on reconnaît le taux d'accroissement de l'exponentielle en* 0*, qui tend vers* $\exp'(0) = 1$*, de sorte que* $n(u_n - e)$ *tend vers* $e/2$.

2. *D'après ce qui précède,*

$$\left|\frac{u_{n+1}-e}{u_n-e}\right| = \frac{n}{n+1}\left|\frac{(n+1)(u_{n+1}-e)}{n(u_n-e)}\right| \to 1 \times \frac{e/2}{e/2} = 1$$

La convergence de u *est donc lente. D'autre part,*

$$\left|\frac{v_{n+1}-e}{v_n-e}\right| = \frac{2^n}{2^{n+1}}\left|\frac{(2^n+1)(v_{n+1}-e)}{2^n(v_n-e)}\right| \to \frac{1}{2} \times \frac{e/2}{e/2} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, la convergence de v *est géométrique de rapport* $1/2$.

Exercice 6 1. *Expliciter la formule de Taylor-Lagrange de l'exponentielle entre* 0 *et* 1 *à l'ordre* n.

2. *Montrer que la convergence de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

est rapide.

Correction 6 1. *L'exponentielle est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$*. Soit* n *un entier naturel. Alors il existe un réel* c_n *dans* $]0,1[$ *tel que*

$$\exp(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-0)^k}{k!}\exp^{(k)}(0) + \frac{(1-0)^{n+1}}{(n+1)!}\exp^{(n+1)}(c_n)$$

soit encore

$$e = u_n + \frac{e^{c_n}}{(n+1)!}$$

2. *D'après ce qui précède, on a*

$$0 < \frac{e-u_{n+1}}{e-u_n} = \frac{1}{(n+2)}\frac{e^{c_{n+1}}}{e^{c_n}} < \frac{e}{n+2} \to 0$$

Par conséquent, ce rapport tend vers 0 *et la convergence est rapide.*

Exercice 7 *Soit* $I = [a,b]$ *un segment réel non réduit à un point,* $f : I \to I$ *une fonction de classe* C^1 *telle que* $\forall x \in I, 0 < |f'(x)| < 1$.

1. *Montrer que* f *admet un unique point fixe* $l \in I$.
2. *Soit* $u_0 \in I\backslash\{l\}$*. On définit la suite* u *via* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$*. Montrer que cette suite converge vers* l *et que la convergence est géométrique de rapport* $|f'(l)|$.

Correction 7 1. *Introduisons $g : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - x$. Un point α est point de fixe de f si et seulement si il est zéro de g. La fonction g est continue sur le segment $[a,b]$. De plus, $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$, donc d'après le TVI, il existe un réel l tel que $g(l) = 0$. De plus, g est dérivable et $g' = f' - 1 < 0$, donc g est strictement décroissante, donc ce zéro de g est unique. En conséquence, f possède un unique point fixe.*

2. *Établissons tout d'abord par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq l$. L'initialisation est validée d'après l'hypothèse sur u_0. Soit n un entier naturel tel que $u_n \neq l$, alors l'égalité des accroissement finis entre u_n et l assure l'existence d'un réel c_n entre u_n et l tel que $f(u_n) - f(l) = (u_n - l)f'(c_n)$, soit encore $u_{n+1} - l = (u_n - l)f'(c_n)$. Comme $f'(c_n)$ est non nul, on en déduit que u_{n+1} est différent de l.*
De plus, $|f'|$ est continue sur le segment $[a,b]$ donc atteint ses bornes. Notons M le maximum de $|f'|$. Il existe un réel d dans $[a,b]$ tel que $\mathrm{M} = |f'(d)|$. Donc $\mathrm{M} < 1$. D'après ce qu'on écrit précédemment, il en découle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|\frac{u_{n+1} - l}{u_n - l}\right| \leq \mathrm{M}$$
On en déduit par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - l| \leq \mathrm{M}^n |u_0 - l|$$
Ainsi, la suite u tend vers l. Par conséquent, la suite (c_n) tend également vers l par encadrement. Comme f' est continue en l, on a le résultat plus précis
$$\left|\frac{u_{n+1} - l}{u_n - l}\right| \to f'(l) \in]-1, 1[\setminus\{0\}$$
On en déduit que la convergence est géométrique de rapport $|f'(l)|$.

1.2 Ordre de convergence

Exercice 8 *Montrer que sous réserve d'existence, l'ordre de convergence est unique.*

Correction 8 *Notons r et s des réels plus grands que 1, λ, μ des réels non nuls tels que*
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1} - l|}{|u_n - l|^r} = \lambda \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1} - l|}{|u_n - l|^s} = \mu$$
Comme toutes les quantités non nulles, on peut écrire
$$\lim_{n\to+\infty} |u_n - l|^{s-r} = \frac{\lambda}{\mu}$$
Supposons un instant que $s \neq r$. Quitte à les réordonner, on peut supposer que $s > r$. Or la limite précédente est non nulle, puisque λ et μ sont non nuls. Cela contredit la continuité de la fonction puissance $x \mapsto x^{s-r}$ en 0, puisque $s - r > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - l) = 0$. Ainsi $s = r$ et l'ordre de convergence est unique.

Exercice 9 *Soit $\mathrm{I} = [a,b]$ un segment non réduit à un point, $r \geq 2$ et $f : \mathrm{I} \to \mathrm{I}$ de classe C^r telle que $\forall x \in \mathrm{I}, |f'(x)| < 1$.*

1. *Montrer que f admet un unique point fixe l appartenant à I.*
2. *On suppose que*
$$\forall k \in [\![1, r-1]\!], f^{(k)}(l) = 0 \quad et \quad \forall x \in \mathrm{I}, f^{(r)}(x) \neq 0.$$
Soit u la suite définie par $u_0 \in \mathrm{I}\setminus\{l\}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que cette suite converge vers l et que la convergence est d'ordre r. Dans cette situation, on dit que l est un point fixe super-attractif de f.

Correction 9 1. *cf supra.*

2. *Comme dans un exercice précédent, on prouve par récurrence la suite u ne vaut jamais l. Le choix de u_0 valide l'hérédité. Soit n un entier naturel tel que $u_n \neq l$. On applique la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre r entre u_n et l, ce qui entraîne qu'il existe un réel c_n compris strictement entre u_n et l tel que*
$$u_{n+1} - l = f(u_n) - f(l) = \frac{(u_n - l)^r}{r!} f^{(r)}(c_n)$$
Comme on a supposé que $f^{(r)}$ ne s'annule jamais, on a bien $u_{n+1} \neq l$, ce qui assure l'hérédité. On est encore dans les hypothèses de l'exercice 7, donc la suite u tend vers l. Ainsi, c_n tend vers l. Comme $f^{(r)}$ est continue en l, on en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1} - l|}{|u_n - l|^r} = \frac{f^{(r)}(l)}{r!} \neq 0$$
Ainsi, la convergence est d'ordre r.

Exercice 10 *Soit a, b deux réels tels que $a < b$, $g \in \mathrm{C}^3([a,b],\mathbb{R})$ telle que $g(a)g(b) < 0$, $\forall x \in \mathrm{I}, g'(x) \neq 0$ et $g''(x) \neq 0$.*

1. *Montrer qu'il existe un unique réel l dans $]a,b[$ tel que $g(l) = 0$.*
2. *On note f la fonction définie par $\forall x \in [a,b], f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}$. Montrer que $f'(l) = 0$ et $f''(l) \neq 0$.*
3. *On note $\mathrm{J} = [l-\eta, l+\eta]$ un voisnage de l tel que $\forall x \in \mathrm{J}, f''(x) \neq 0$; Montrer que la suite définie par $u_0 \in \mathrm{J}\backslash\{l\}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l et que la convergence est d'ordre 2.*

Correction 10

1. *Le théorème des valeurs intermédiaires est applicable à g puisqu'elle est continue. Donc il existe un réel l dans $]a,b[$ tel que $g(l) = 0$. D'autre part, g' est également continue, donc g' est de signe constant puisqu'elle ne s'annule pas. Ainsi, g est strictement monotone, donc ce zéro est unique.*
2. *Le réel l est l'unique point fixe de f. De plus, f est de classe C^2 et*
$$\forall x \in \mathrm{I}, f'(x) = 1 - \frac{g'(x)}{g'(x)} + \frac{g(x)g''(x)}{(g'(x))^2} = \frac{g(x)g''(x)}{(g'(x))^2}$$
On en déduit que $f'(l) = 0$. De plus,
$$f''(l) = \lim_{x\to l} \frac{f'(x)}{x-l} = \lim_{x\to l} \frac{g(x)}{x-l}\frac{g''(x)}{(g'(x))^2} = \frac{g''(l)}{g'(l)} \neq 0$$
3. *Par continuité de f'' et de f', on peut trouver un voiinage de J de l tel que $\forall x \in \mathrm{J}, f''(x) \neq 0$ et $\forall x \in \mathrm{J}\backslash\{l\}, 0 < |f'(x)| < 1$. On peut alors appliquer l'exercice précédent à la fonction $f_{|\mathrm{J}}$, ce qui entraîne le résultat pour $r = 2$.*

1.3 Qui va plus vite ?

Exercice 11 *On considère les suites u et v de l'exercice 5. Montrer que v converge plus vite que u vers e.*

Correction 11 *On a vu dans cette exercice que $n(u_n - e) \to e/2$ et que $2^n(v_n - e) \to e/2$. On en déduit que*
$$\frac{v_n - e}{u_n - e} = \frac{n}{2^n}\frac{2^n(v_n - e)}{n(u_n - e)} \to 0$$
Ainsi, v tend vers e plus vite que u.

Exercice 12 *On définit les suites u et v via*
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{nn!}$$
Montrer que v converge vers e, plus vite que u. Quel sont les différents coûts de calcul pour obtenir une valeur de e approchée à 10^{-16} près ?

Correction 12 *On a vu dans l'exercice 6 qu'on disposait des inégalités*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{(n+1)!} < e - u_n$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{(n+1)!} < e - v_n + \frac{1}{nn!}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n - e < \frac{1}{nn!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n(n+1)!}$$

D'autre part, on sait que la suite v est strictement décroissante, donc que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < v_n - e$. *On en déduit que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \frac{v_n - e}{u_n - e} < \frac{1}{n(n+1)!}(n+1)! = \frac{1}{n}$$

Comme la suite majorante tend vers 0*, on en déduit que v tend vers e plus vite que u.*
On a également vu la majoration $\forall n \in \mathbb{N}, e - u_n < e/(n+1)!$*. Il suffit donc que* $e/(n+1)! < 10^{-16}$ *pour que* u_n *fournisse une valeur approchée de e à* 10^{-16} *près. On peut brutalement estimer ces quantités, ou plus astucieusement passer au logarithme, puisqu'il est strictement croissant. Il suffit donc que* $1 - \sum_{k=2}^{n+1} \ln(k) = 1 - \ln((n+1)!) < -16\ln(10)$ *pour obtenir une valeur satisfaisante. On constate que* $n = 19$ *convient et on obtient* $e \simeq 2.71828182845904553$*. Si on utilise la suite v, il suffit que* $1/n(n+1)! < 10^{-16}$ *pour disposer d'une approximation suffisante. Avec la même astuce que précédemment, on constate que* $n = 17$ *convient.*

2 Résolution d'équations numériques

2.1 La méthode de dichotomie

Exercice 13 *En appliquant la méthode de dichotomie de la preuve du TVI, écrire en Python une fonction qui prend en entrée, une fonction continue de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, deux réels* $a < b$*, une précision* $\varepsilon > 0$*, un nombre maximal d'itérations* N *et renvoie un réel c dans* $]a, b[$ *proche à* ε *près d'une solution de* $f(x) = 0$*. Quelle est la vitesse de convergence de la suite construite ?*

Correction 13 *Voici une proposition de solution itérative :*

```
def dicho(xa,xb,f,precision,N):
        compteur=0
        while abs(xb-xa) > precision and compteur < N:
                xm=(xa+xb)/2
                compteur+=1
                if f(xa)*f(xm) < 0:
                        xb=xm
                else :
                        xa=xm
        return ((xa+xb)/2,compteur)
```

On peut également proposer une méthode récursive :

```
def dicho(a,b,epsilon):
        xm=(a+b)/2
        if abs(b-a) < epsilon :
                return xm
        else :
        if f(a)*f(xm) <= 0 :
                return dicho (a,xm,epsilon)
        return dicho (xm,b,epsilon)
```

Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ classiquement construites vérifient que la suite $b-a$ est géométrique de raison 1/2. Par conséquent, l'ordre de convergence vaut 1 et la vitesse de convergence est géométrique de raison 1/2.

Exercice 14 1. *Montrer qu'il existe un unique réel x tel que $e^x + x = 2$. Chercher une approximation à 10^{-8} près de cette solution à l'aide de l'algorithme précédent. Combien d'itérations vous a-t-il fallu pour obtenir une telle valeur ?*

2. *Montrer qu'il existe un réel unique réel α dans $[0,1]$ tel que $2\cos(1+\alpha^2)-\alpha = 1$. En donner une approximation à 10^{-8} près ? Combien cela vous a-t-il coûté ?*

Correction 14 1. *On étudie classiquement $x \mapsto e^x + x$. Cette fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto e^x + 1$ qui est strictement positive. Par conséquent, $x \mapsto e^x + x$ est strictement croissante. De plus, $e^0 + 0 = 1 < 2$ et $e^1 + 1 = e + 1 > 2$. Comme cette fonction est continue, le TVI assure qu'il existe un réel x tel que $e^x + x = 2$. La stricte monotonie assure que ce réel est unique.*

```
>>> from math import exp
>>> def f(x):
...     return exp(x)+x-2
...
...
>>> f(0)
-1.0

>>> f(1)
1.718281828459045

>>> dicho(0,1,f,10**(-8),1000)
(0.4428544007241726, 27)
```

2. *Notons $g : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto 2\cos(1+x^2)-x-1$. Elle est de classe C^1 et $\forall x \in [0,1], g'(x) = -4x\sin(1+x^2)-1$. Or $\forall x \in [0,1], 0 < 1+x^2 \leq 2 < \pi, \sin(1+x^2) > 0$. D'autre par $1 > \pi/3$, donc $\cos(1) < \cos(\pi/3) = 1/2$. Ainsi $g(1) < 0$ et $g(0) > 0$. Ainsi, il existe un unique réel α tel que $2\cos(1+\alpha^2)-\alpha = 1$.*

```
>>> from math import cos

>>> def g(x):
...     return 2*cos(1+x**2)-x-1
...
...

>>> g(0)
0.08060461173627953

>>> g(1)
-2.8322936730942847

>>> dicho(0,1,g,10**(-8),1000)
(0.07189199700951576, 27)
```

Exercice 15 1. *Implémenter la méthode de dichotomie pour trouver la racine du polynôme $L : x \mapsto x(63x^4-70x^2+15)/8$ sur l'intervalle $[0.6,1]$ avec une précision de 10^{-10}.*

2. *Représenter graphiquement l'évolution de la suite $(|L(x_k)|)_{k\in\mathbb{N}}$ et estimer un ordre de convergence de la méthode de dichotomie.*

Correction 15 1. *On vérifie rapidement que $L(6/10) = -0.15264 < 0$ et $L(1) = 1 > 0$. Une valeur approchée de cette racine vaut 0.9061798459388. En python, on a*

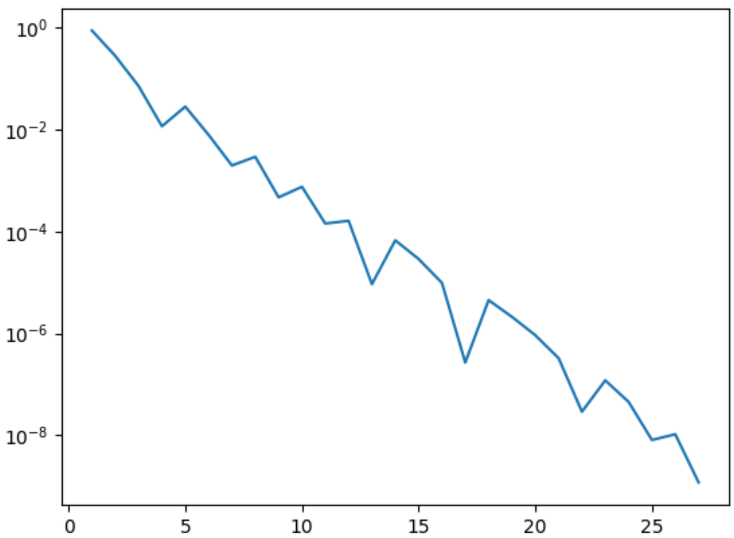
```
>>> def L(x):
...     return x* ( 63*x**4 - 70*x**2 + 15 )/8
```

```
...
...

>>> L(0.6)
-0.15263999999999997

>>> L(1)
1.0

>>> dicho(0.6,1,L,10*(-10),1000)
(0.9061798459386641, 1000)
```

2. On modifier légèrement la fonction Python qu'on utilisait auparavant pour stocker les valeurs successives de $|\mathrm{L}(x_k)|$.

```python
def dicholiste(xa,xb,f,precision,N):
    compteur=0
    c,fc=[],[]
    while abs(xb-xa) > precision and compteur < N:
        xm=(xa+xb)/2
        c.append(xm)
        fxm=abs(f(xm))
        fc.append(fxm)
        compteur+=1
        if f(xa)*f(xm) < 0:
            xb=xm
        else :
            xa=xm
    x=np.linspace(1,compteur,compteur)
    plt.semilogy(x,fc)
    plt.show()
    return (c,(xa+xb)/2,compteur)
```

Comme toutes les méthodes de dichotomie, l'ordre de convergence est 1 *et la convergence est géométrique de rapport* 1/2.



2.2 Approximations successives, points fixes

Exercice 16 *Soit* $g:[0,1]\to\mathbb{R}, x\mapsto 1-x^2$.

1. *Montrer que* I *est stable par* f *et que* g *a un unique point fixe* α *dans* I.
2. *Vérifier que* $g\circ g$ *a trois points fixes* $\gamma<\alpha<\delta$ *dans* I.
3. *Soit* $x_0\neq\alpha$ *et* $\forall n\in\mathbb{N}, x_{n+1}=f(x_n)$.
   (a) *Montrer que* $\forall n\in\mathbb{N}, x_n\neq\alpha$ *et que la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*
   (b) *On suppose que* $x_0<\alpha$. *Montrer que* $\lim_{n\to+\infty} x_{2n}=\gamma$ *et* $\lim_{n\to+\infty} x_{2n+1}=\delta$.

Correction 16 1. *Pour tout réel* x, $g(x)=x \iff x^2+x-1=0$. *Ce dernier polynôme a pour racines* $(\sqrt{5}-1)/2$ *et* $-(\sqrt{5}+1)/2$. *Par conséquent, l'unique point fixe de* g *dans* I *est* $\alpha=(\sqrt{5}+1)/2$. *De plus, la fonction* g *est strictement décroissante sur* I, *elle vérifie* $g(0)=1$ *et* $g(1)=0$, *donc elle stabilise* I.

2. *Pour tout réel* x,

$$g\circ g(x)-x=1-(1-x^2)^2-x=2x^2-x^4-x=(g(x)-x)(x^2-x)$$

Par conséquent, $g\circ g$ *possède trois points fixes*

$$\gamma=0<\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}<\delta=1$$

3. *Si* $x_0=\alpha$, *la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est stationnaire en* α.
   (a) *Soit* n *un entier naturel. On a*

$$x_{n+1}-\alpha=g(x_n)-g(\alpha)=(\alpha^2-x_n^2)=(\alpha-x_n)(\alpha+x_n)$$

Pour $n=0$, $x_0\neq\alpha$. *Si un entier naturel* n *vérifie* $x_n\neq\alpha$, *alors*

$$|x_{n+1}-\alpha|=|\alpha-x_n|(\alpha+x_n)\geq\alpha|\alpha-x_n|>0$$

On en conclut par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}, x_n\neq\alpha$. *Si la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converve, c'est nécessairement vers un point fixe de* g, *donc* α. *Cependant,*

$$\forall n\in\mathbb{N}, \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|}=|\alpha+x_n|$$

S'il y avait convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* α, *la suite précédente tendrait vers* $2\alpha=\sqrt{5}-1>1$, *et on a vu en exercice* 1 *que ce n'est pas le cas. Par conséquent, la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

   (b) *Comme* g *est strictement décroissante,* $h=g\circ g$ *est strictement croissante. Comme* α *est point fixe de* h, *on en déduit par récurrence (puisque* $x_0<\alpha$*) que* $\forall n\in\mathbb{N}, 0\leq x_{2n}<\alpha$. *Cette suite étant monotone bornée, elle converge. Sa limite est nécessairement un point fixe de* h, *donc* 0 *ou* α. *Si c'était* α, *alors la suite* $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}=(g(x_{2n}))_{n\in\mathbb{N}}$ *convergerait vers* α, *ce qui invaliderait la divergence de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Par conséquent,* $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0. *De manière similaire,* $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 1.

Exercice 17 1. *Soit* a *un réel. Étudier la nature et le comportement de la suite définie par* $x_0=a, \forall n\in\mathbb{N}, x_{n+1}=\cos(x_n)$

2. *Donner une estimation à* 10^{-8} *près de sa limite à l'aide d'un algorithme en Python.*

Correction 17 1. *On connaît les variations du cosinus :* $\cos(\mathbb{R})=[-1,1]$ *et* $\cos([-1,1])\subset[0,1]$. *Ainsi, le réel* x_2 *appartient au segment* $[0,1]$. *On limite donc l'étude du cosinus au segment de* $[0,1]$.

$$\sup_{x\in[0,1]}|\cos'(x)|=\sup_{x\in[0,1]}|\sin(x)|=\sin(1)<1$$

On en déduit que la fonction cosinus est contractante sur $[0,1]$ *et que la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers l'unique point fixe* α *de cette fonction sur* $[0,1]$. *On dispose alors de l'erreur de majoration*

$$\forall n\in\mathbb{N}, |\alpha-x_n|\leq\frac{\sin(1)^n}{1-\sin(1)}|\cos(a)-a|$$

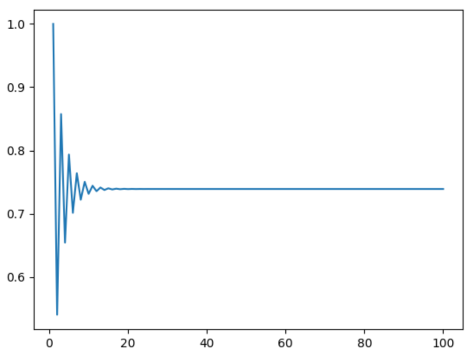
De plus, comme la fonction cosinus est décroissante sur $[0,1]$, *les suites* $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *sont adjacentes.*

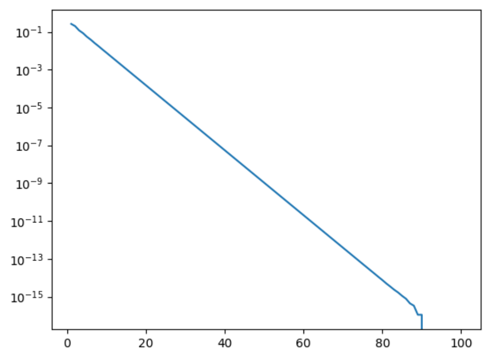
2. ```python
from math import cos
a=1
N=100
prec=10**(-8)
x=[]
for i in range(N):
     x.append(a)
     a=cos(a)

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(np.linspace(1,N,N), x)
plt.show()

y=[abs(ele-x[-1]) for ele in x]
plt.semilogy(np.linspace(1,N,N), y)
plt.show()
```

   *On trouve l'estimation* 0.7390851332151607 *de sa limite.*




**Exercice 18** *Soit* $f \in \mathrm{C}^1(\mathrm{I})$ *telle que l'équation* $f(x) = 0$ *d'inconnue* $x \in \mathrm{I}$ *admet une unique racine* $\alpha$ *dans* $\mathring{\mathrm{I}}$. *On suppose que* $f'(\alpha) > 0$.

1. *Montrer qu'il existe un réel* $\eta > 0$ *tel que l'intervalle* $\mathrm{J} = [\alpha - \eta, \alpha + \eta]$ *est contenu dans* I *et* $\forall x \in \mathrm{J}, f'(x) > 0$.
2. *On note* $m_1 = \inf_{x\in \mathrm{J}} f'(x)$ *et* $\mathrm{M}_1 = \sup_{x \in \mathrm{J}} f'(x)$. *Pour tout* $\lambda$, *on pose* $f_\lambda : x \mapsto x - \lambda f(x)$. *Montrer qu'il existe un unique réel* $\mu > 0$ *tel que*
$$\forall x \in \mathrm{J}, |f'_\mu(x)| \leq \frac{\mathrm{M}_1 - m_1}{\mathrm{M}_1 + m_1}$$
3. *Montrer que pour tout réel* $x_0$ *dans* J, *on peut définir la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de points de* J *par* $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f_\mu(x_n)$. *Démontrer que cette suite converge vers* $\alpha$ *et donner une majoration de l'erreur d'approximation.*
4. *On désigne par* $f : ]3\pi/2, 5\pi/2[ \to \mathbb{R}, x \mapsto \tan(x) - x$.
   (a) *Montrer que* $f$ *possède un unique zéro* $\alpha$ *dans l'intervalle* $\mathrm{J} = [a, b] = [7.65, 7.75]$.
   (b) *Déterminer le coefficient* $\mu$ *de la question 2.*
   (c) *Donner une valeur approchée de* $\alpha$ *à* $10^{-6}$ *près.*

**Correction 18** 1. *La continuité de* $f'$ *assure qu'il existe un voisinage* V *de* $\alpha$ *tel que* $\forall x \in \mathrm{V}, f'(x) > 0$. *De plus, comme* $\alpha$ *est intérieur à* I, *il existe un réel* $\eta$ *strictement positif tel que* $\mathrm{J} = [\alpha - \eta, \alpha + \eta] \subset \mathrm{I}$ *et* $\forall x \in \mathrm{J}, f'(x) > 0$.
```

2. La fonction f' est continue sur le segment J, donc atteint ses bornes sur ce segment. Il existe un réel u dans J tel que $m_1 = f'(u)$et un réel v dans J tel que $M_1 = f'(v)$. Comme u appartient à J, on en déduit que $f'(u) > 0$, donc que $m_1 > 0$. En outre, $m_1 \leq M_1$. Soit λ un réel strictement positif. Pour tout réel x dans J, $f'_\lambda(x) = 1 - \lambda f(x)$. Si λ vérifie la condition, alors

$$\frac{2m_1}{M_1 + m_1} \leq \lambda f'(u) = \lambda m_1 \quad et \quad \lambda M_1 = f'(v) \leq \frac{2M_1}{M_1 + m_1}$$

Ainsi, $\lambda = 2/(M_1 + m_1)$ et c'est la seule possibilité. On vérifie que cette valeur convient.

3. D'après le théprème des accroissements finis, l'application f_μ est strictement contractante sur J. Ainsi, toute suite itérée f_μ converge vers l'unique point fixe de f_μ, i.e α. De plus, on a l'erreur d'approximation

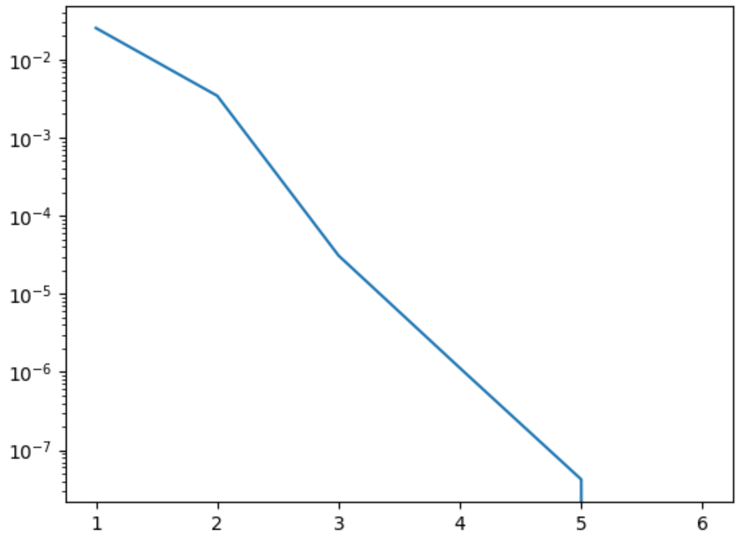
$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - \alpha| \leq \left(\frac{M_1 - m_1}{M_1 + m_1}\right)^n |x_0 - \alpha| \leq \left(\frac{M_1 - m_1}{M_1 + m_1}\right)^n \eta$$

4. (a) La fonction f est continue strictement croissante sur J, car dérivable sur J de dérivée strictement positive. Elle vérifie $f(a)f(b) < 0$, donc possède un unique point fixe α dans $[a, b]$.

   (b) On évalue $m_1 = \tan^2(a) \simeq 23.36$ et $M_1 = \tan^2(b) \simeq 91.82$. On obtient alors $\mu \simeq 1.73 \times 10^{-2}$.

   (c)
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from math import tan

a=7.65
b=7.75
m=tan(a)**2
M=tan(b)**2
mu=2/(m+M)


x0=7.7
N=1000
precision=10**(-6)
x=[x0,x0-mu*(tan(x0)-x0)]
compteur=1
while abs(x[compteur]-x[compteur-1])>precision and compteur <N :
    y=x[compteur]
    x.append(y-mu*(tan(y)-y))
    compteur+=1

z=[abs(ele-x[-1]) for ele in x]



plt.semilogy(np.linspace(1,compteur+1,compteur+1), z)
plt.show()
```

   On obtient $\alpha \simeq 7.7252518354653805$.



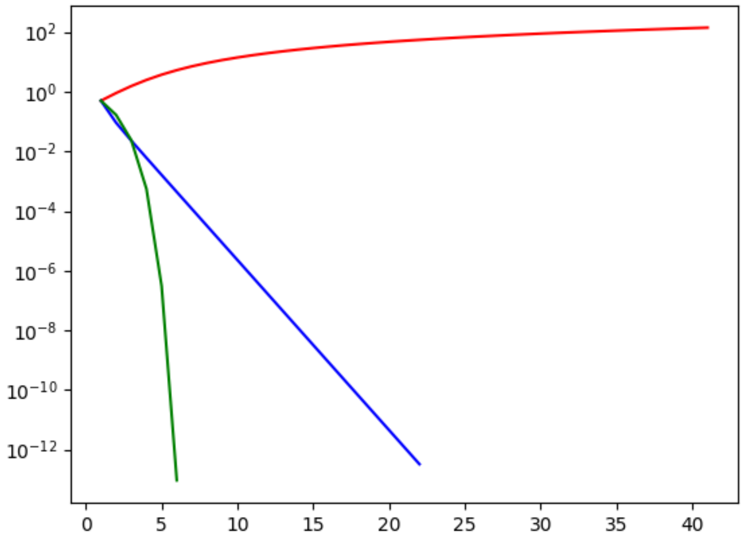
Exercice 19 *On note $f : x \mapsto (x-1)e^x$ qui possède pour unique zéro 1, puis $g_0 : x \mapsto \ln(xe^x)$, $g_1 : x \mapsto (e^x+x)/(e^x+1)$, et $g_2 : x \mapsto (x^2-x+1)/x$.*

1. *Étudier numériquement le comportement des orbites $x_0^i = 2, \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1}^i = g_i(x_n^i)$.*
2. *Estimer l'ordre de convergence dans chaque cas et comparer à $g_i'(1)$.*

Correction 19 1.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from math import log
from math import exp

a=1.5
N=40
precision=10**(-12)

compteur0=1
x0=[a,log(a*exp(a))]
while abs(x0[compteur0]-1)>precision and compteur0 <N :
    y=x0[compteur0]
    x0.append(log(y*exp(y)))
    compteur0+=1
z0=[abs(ele-1) for ele in x0]

compteur1=1
x1=[a,(exp(a)+a)/(exp(a)+1)]
while abs(x1[compteur1]-1)>precision and compteur1 <N :
    y=x1[compteur1]
    x1.append((exp(y)+y)/(exp(y)+1))
    compteur1+=1
z1=[abs(ele-1) for ele in x1]

compteur2=1
x2=[a,(a**2-a+1)/a]
while abs(x2[compteur2]-1)>precision and compteur2 <N :
    y=x2[compteur2]
    x2.append((y**2-y+1)/y)
    compteur2+=1
```

```
z2=[abs(ele-1) for ele in x2]

t0=np.linspace(1,compteur0+1,compteur0+1)
t1=np.linspace(1,compteur1+1,compteur1+1)
t2=np.linspace(1,compteur2+1,compteur2+1)
plt.semilogy(t0,z0,'r',t1,z1,'b',t2,z2,'g')
plt.show()
```



2. *On constate qu'il y a non convergence pour $i = 0$, convergence d'ordre 1 pour g_1 et convergence d'ordre 2 pour g_2. Cela est cohérent avec $|g_0'(1)| = 2 > 1$, $|g_1'(1)| = 1/(e+1) < 1$ et $g_2'(1) = 0$, $g_2''(1) = 2$.*

2.3 La méthode de Newton-Raphson

Exercice 20 *Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2 et a un réel strictement positif. Implémenter la méthode de Newton-Raphson pour calculer la racine p-ième de a. Donner une marjotation de l'erreur d'approximation.*

Correction 20 *On note $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^p - a$. Le réel $\alpha = \sqrt[p]{a}$ est son unique zéro positif. La fonction f est deux fois dérivable sur R^+. De plus,*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) = px^{p-1}, \quad f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$$

Par conséquent, f' et f'' ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}^{+*}$. Comme $f'' > 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, la méthode de Newton indique qu'il suffit de choisir x_0 tel que $f(x_0) > 0$, soit $x_0^p > a$. On itère alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^p - a}{px_n^{p-1}} = \frac{1}{p}\left[(p-1)x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}}\right]$$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
p=5
a=6.293876

def f(x):
```

```
    return(x**p-a)

def df(x):
    return(p*x**(p-1))

x0=7
precision=10**(-8)
Nmax=100
x1=x0-f(x0)/df(x0)
x=[x0,x1]
compteur=1
while abs(x[compteur-1]-x[compteur])>precision and compteur<Nmax :
    y=x[compteur]
    z=y-f(y)/df(y)
    x.append(z)
    compteur+=1
    print(z,compteur,f(z))

err=[abs(ele-x[-1]) for ele in x]
plt.semilogy(np.linspace(1,compteur+1,compteur+1), err)
plt.show()
```