Ipesup 2023/2024

Colle 18 MPSI/MP2I   Jeudi 14 mars 2024

★★★

Planche 1

★★★

1. Passage au logarithme dans les équivalents
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer $F = \dfrac{1}{X^{2n}+1}$ danc $\mathbb{C}(X)$, puis dans $\mathbb{R}(X)$.
3. On note $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{2x}{1+e^x}$.
   (a) Montrer que f admet un maximum global M et qu'il est atteint en un unique point α dans $]1,2[$.
   (b) Déterminer un développement limité de f au voisinage de α à l'ordre 2.
   (c) En déduire que $\left(f_{|[\alpha,+\infty[}^{|]0,M]}\right)^{-1} \circ f_{|]0,\alpha]}^{|]0,M]}$ est dérivable en α. Déterminer sa dérivée en ce point.

★★★

Planche 2

★★★

1. Unicité du développement limité en cas d'existence
2. Déterminer un équivalent de $e^{e^{e^{-n}}} - e$ quand n tend vers $+\infty$.
3. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de l'arcsinus au voisinage de -1.

★★★

Planche 3

★★★

1. Comparaison des suites de terme général $a^n, n!, n^n$.
2. Décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{1}{X^4+4}$ dans $\mathbb{R}(X)$.
3. Développement asymptotique à trois termes en $+\infty$ de

$$x \mapsto \sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}$$

★★★

Bonus

★★★

Soit $a > 0$. A-t-on $(\lfloor \ln(x) \rfloor)! \underset{x\to+\infty}{=} o(x^a)$?