Les questions de cours portent sur ce qui est entre accolades et en gras. On attend une maîtrise de l'intégralité des notions sur les espaces vectoriels.

Cours : espaces vectoriels

Famille de vecteurs

Combinaison linéaire d'un famille de E. Description de l'espace engendré par une partie finie. Famille génératrice. Toute surfamille d'une famille génératrice est génératrice. Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i, \dots e_n) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n)$, si $i \neq j$ et $\mu \in \mathbb{K}$, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i, \dots e_n) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i + \mu e_j, \dots, e_n)$. Famille libre, famille liée. Si l'un des vecteurs est CL des autres, la famille est liée. Toute sous-famille d'une famille libre est libre. Famille échelonnée en degrés de polynômes. Toute famille échelonnée en degrés de polynômes non nuls est libre. [**Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E et $x \in E$, alors la famille $(x, e_1, \dots, e_n)$ est liée ssi $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$**]. Base, bases canoniques de $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Existence et unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base.

Généralisation à des familles infinies de vecteurs. [**Description de l'espace engendré par une partie (éventuellement infinie)**]. $(x_i)_{i \in I}$ est libre ssi pour toute partie finie J de I, $(x_j)_{j \in J}$ est libre.

Somme de sev

Sev $F + G$, $F + G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$. Somme d'un nombre fini de sev. Notion de sev en somme directe. [**Caractérisation de la somme directe de deux sev à l'aide de l'intersection**]. Notion de sev supplémentaires.

Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

Un ev est dit de dimension finie lorsqu'il possède une famille génératrice finie. [**Tout ev de dimension fini possède une base finie**]. Théorème de la base extraite, [**de la complétion en base (ou base incomplète)**]. Si E possède une famille génératrice finie de n vecteurs, alors toute famille de $n+1$ vecteurs est liée. Dans un ev de dimension finie, toutes les bases ont la même longueur. Caractérisation des bases à l'aide des longueurs des familles. Dimension d'un produit d'espaces vectoriels.

Dimension et sous-espaces vectoriels

[**Si F est un sev de E de dimension finie, alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$. Il y a égalité ssi $F = E$**]. Existence de supplémentaires en dimension finie. Dimension d'une somme de sous-espaces supplémentaires. [**Formule de Grassmann de la dimension de la somme de deux sev**]. Caractérisation de sev supplémentaires à l'aide des dimensions. Existence de bases adaptées à la donnée d'un sev, de deux sev supplémentaires.

Exercices

Les exercices porteront sur les espaces vectoriels. Notez que les applications linéaires n'ont pas encore été abordées.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆