Exercice 1 : Une suite d'intégrales

1. $J_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = [\ln(1+e^x)]_0^1 = \ln(1+e) - \ln(2)$. Par linéarité de l'intégrale, $J_0 + J_1 = \int_0^1 \frac{1+e^x}{e^x+1}\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1$. On en déduit $J_0 = 1 - \ln(1+e) + \ln(2)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale, $J_n + J_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{nx}+e^{(n+1)x}}{e^x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{e^{nx}+e^{nx}e^x}{e^x+1} = \int_0^1 e^{nx}\,dx$. Dans le cas où $n = 0$, on obtient $J_0 + J_1 = 1$. Si n est non nul, on a $J_n + J_{n+1} = \left[\frac{e^{nx}}{n}\right]_0^1 = \frac{e^n - 1}{n}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$. Alors $nx \leq (n+1)x$ car $x \geq 0$. Comme l'exponentielle est croissante, on a $e^{nx} \leq e^{(n+1)x}$. Enfin, $1/(e^x+1) \geq 0$, donc $\frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{e^{(n+1)x}}{e^x+1}$. On en déduit par croissance de l'intégrale, $\int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1}\,dx \leq \int_0^1 \frac{e^{(n+1)x}}{e^x+1}\,dx$, soit $J_n \leq J_{n+1}$.
4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$. Alors $e^0 \leq e^x \leq e^1$, donc $0 < 2 \leq e^x + 1 \leq 1 + e$. D'après la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{e^x+1} \geq \frac{1}{1+e}$. Comme $e^{nx} \geq 0$, on en déduit $\frac{e^{nx}}{2} \geq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \geq \frac{e^{nx}}{1+e}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La croissance de l'intégrale implique d'après l'inégalité précédente $\int_0^1 \frac{e^{nx}}{2}\,dx \geq \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1}\,dx \geq \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e}\,dx$, i.e $\frac{1}{1+e}\frac{e^n-1}{n} \leq J_n \leq \frac{1}{2}\frac{e^n-1}{n}$.

   (c) D'après les croissances comparées, $\frac{1}{1+e}\frac{e^n-1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. On en déduit que $J_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 2 : Une suite définie par récurrence

1. Supposons $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > n$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - n$, donc par télescopage $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(-k) = u_0 - n(n-1)/2$. Alors la suite u tend vers $-\infty$, alors que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 0$. Cette absurdité entraîne qu'il existe un entier naturel p non nul tel que $u_p \leq p$.
2. Prouvons le par récurrence. La question précédente vient de l'initialiser en p. Soit $n \geq p$, supposons $u_n \leq n$. Démontrons que $u_{n+1} \leq n+1$. Alors $u_{n+1} = |u_n - n| = n - u_n \leq n+1$ car u est à valeurs positives.
3. Analyse : soit a et b deux tels réels. $\forall n \in \mathbb{N}, a + bn + a + b(n+1) = n$. Ces expressions polynomiales permettent d'identifier les coefficients, ce qui donne $2a + b = 0$ et $2b = 1$, soit $b = 1/2$ et $a = -1/4$. Réciproquement, la suite $((2n-1)/4)_{n\in\mathbb{N}}$ est valide.
4. Soit $n \geq p$. Alors $\beta_{n+1} = u_{n+1} - \alpha_{n+1} = n - u_n - (n - \alpha_n) = -(u_n - \alpha_n) = -\beta_n$. On en est présence d'une suite géométrique de raison -1. Donc $\forall n \geq p, \beta_n = \beta_p(-1)^{n-p}$
5. D'après l'expression précédente, $\forall n \geq p, u_n - \frac{2n-1}{4} = (-1)^{n+p}(u_p - \frac{2p-1}{4})$. Par conséquent, $\forall n \geq p, \frac{2u_n}{n} = 1 + \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^{n+p}(2u_p - (2p-1))}{2n}$. Comme $(-1)^{n+p}(2u_p - 2p + 1)$ est bornée, $2u_n/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Problème : Une partie dense

1. (a) Soit $x \in [-1,1]$. Si $x = 1$, alors pour tout entier n non nul, $-1 \leq 1 - 1/n < 1$, donc on dispose de a_n dans A tel que $1 - 1/n < a_n < 1$. Le théorème d'encadrement assure que la suite $(a_n)_n$ ainsi construite est convergente de limite 1. De plus, elle est à valeurs dans A. Si $x < 1$, alors pour tout entier naturel n, $x < x + (1-x)/n \leq 1$, donc on dispose de a_n dans A tel que $x < a_n < x + (1-x)/n$. Le théorème d'encadrement assure la convergence de $(a_n)_n$ vers x.

(b) Soit $(x,y) \in [-1,1]^2$ tel que $x < y$. Alors $a = (x+y)/2 \in [-1,1]$, donc on dispose d'une suite $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$. Or $\varepsilon = (y-x)/2 > 0$, donc on dispose d'un rang N tel que $\forall n \geq N, |a_n-(x+y)/2| < (y-x)/2$. En particulier, $x < a_N < y$. Donc A est dense dans $[-1,1]$.

(c) Soit $x \in [-1,1]$. Si $x = \pm 1$, les suites constantes égales à x suffisent car 1 et -1 sont rationnels. Si $x \in]-1,1[$, d'après la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on dispose d'une suite de rationnels de limite x. A partir d'un certain rang, elle est à valeurs dans $[-1,1]$, donc on vérifie la caractérisation séquentielle de la densité dans $[-1,1]$.

2. (a) La racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'exponentielle imaginaire est dérivable donc f est dérivable en tant que composée. De plus,

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{i}{2\sqrt{x}} e^{i\sqrt{x}}$$

On en déduit en particulier,

$$\forall x > 0, \left|f'(x)\right| = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(b) Soit x, y réels strictement positifs tels que $x \leq y$. A l'aide de l'angle moitié, on a

$$e^{i\sqrt{x}} - e^{i\sqrt{y}} = e^{i\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}} 2i \sin\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2}\right)$$

On en déduit

$$\left|e^{i\sqrt{x}} - e^{i\sqrt{y}}\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2}\right)\right|$$

Via l'inégalité classique $\forall a \in \mathbb{R}, |\sin(a)| \leq |a|$, on a alors

$$\left|e^{i\sqrt{x}} - e^{i\sqrt{y}}\right| \leq 2\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2}\right| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

D'après la croissance de la racine carrée, on a $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2\sqrt{x} > 0$. On en déduit, toutes quantités positives

$$\left|e^{i\sqrt{x}} - e^{i\sqrt{y}}\right| \leq \frac{|x-y|}{2\sqrt{x}}$$

3. (a) Le cosinus est continu et monotone de $[0,\pi]$ dans $[1,-1]$ donc surjectif d'après le TVI. Donc, il existe θ dans $[0,\pi]$ tel que $x = \cos(\theta)$.

(b) Il suffit de poser pour tout entier naturel k non nul, $x_k = (\theta + 2k\pi)^2$.

(c) D'après la construction précédente, $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$. D'après les encadrements de la partie entière, $\forall k \in \mathbb{N}^*, x_k - 1 \leq n_k$. Donc $n_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

(d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On exploite le résultat de la question 2.b) avec les réels $\sqrt{x_k}$ et $\sqrt{n_k}$. On a $n_k \leq x_k$, donc ils vérifient $\sqrt{n_k} \leq \sqrt{x_k}$ et $n_k > 0$. Ainsi,

$$\left|e^{i\sqrt{x_k}} - e^{i\sqrt{n_k}}\right| \leq \frac{|x_k - n_k|}{2\sqrt{n_k}}$$

Or $n_k \leq x_k < n_k + 1$, donc $|x_k - n_k| \leq 1$. D'autre part, $e^{i\sqrt{x_k}} = e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$. En conclusion,

$$\left|e^{i\theta} - e^{i\sqrt{n_k}}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{n_k}}$$

(e) On connaît les majorations $\forall z \in \mathbb{C}, |\mathfrak{Re}(z)| \leq |z|$, on en déduit alors de ce qui précède

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, |\cos(\theta) - \cos(\sqrt{n_k})| \leq \left|e^{i\theta} - e^{i\sqrt{n_k}}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{n_k}}$$

D'après la question 3.c, $n_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$, donc $\frac{1}{2\sqrt{n_k}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On en déduit par théorème d'encadrement, que $(\cos(\sqrt{n_k}))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $\cos(\theta) = x$ d'après 3.a.

4. Pour tout réel x dans $[-1,1]$, on a construit une suite à valeurs dans E convergente de limite x. D'après 1.b), cela entraîne la densité de E dans $[-1,1]$.