Exercice 1. Inégalité de Bernstein

1. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$Q(z) = 0 \iff z^n + 1 = 0 \iff z^n = e^{i\pi} \iff z^n = \exp\left(i\frac{\pi}{n}\right)^n \iff$$
$$\exists k \in [\![1, n]\!], z = \exp\left(i\frac{\pi}{n}\right)\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \iff \exists k \in [\![1, n]\!], z = \exp\left(i\frac{\pi}{n}(1+2k)\right).$$

On peut ainsi écrire $\forall k \in [\![1, n]\!], z_k = \exp\left(i\frac{\pi}{n}(1+2k)\right)$. Comme $Q' = nX^n$ a pour seul racine 0, puisque n est non nul, il n'a aucune racine complexe commune avec Q. Ainsi, $Q \wedge Q' = 1$ et toutes les racines de Q sont simples.

2. (a) Avec le même argument que précédemment, $X^m \wedge (X^n + 1) = 1$ car ils n'ont aucune racine complexe commune. Il s'agit bien de la forme irréductible de F. Les pôles de F sont donc les racines de Q, toutes simples d'après la question 1. Les racines de X^m fournissent les racines de F. Si $m = 0$, F n'a pas de racine. Sinon, 0 est racine de multiplicité m de F.

   (b) $d(F) = m - n$. Si $m < n$, le degré de F est strictement négatif, donc la partie entière de F est nulle. Si $m = n$, $d(F) = 0$. On écrit alors $F = \dfrac{X^n + 1 - 1}{X^n + 1} = 1 - \dfrac{1}{X^n + 1}$. Or 1 est un polynôme constant et $d(\dfrac{1}{X^n+1}) = -n < 0$. Par unicité de la partie entière, celle de F vaut 1 dans ce cas de figure.

   (c) On sait d'après 2.a) que les pôles de F sont tous simples. On note $P = X^m$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$, l'élément simple du pôle z_k est de la forme $\dfrac{P(z_k)}{Q'(z_k)}\dfrac{1}{X - z_k}$. Or $Q'(z_k) = nz_k^{n-1} = \dfrac{z_k}{nz_k^n} = \dfrac{-z_k}{n}$ puisque $z_k^n = -1$. Cet élément simple est donc de la forme $\dfrac{-1}{n}\dfrac{z_k^{m+1}}{X - z_k}$. En tenant compte de la partie entière précédemment établie, on obtient

$$F = \delta_{m,n} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k^{m+1}}{X - z_k}$$

   (d) On dérive la fraction rationnelle F via ses deux formes

$$F' = \left(\frac{X^m}{X^n+1}\right)' = \frac{mX^{m-1}(X^n+1) - X^m nX^{n-1}}{(X^n+1)^2}$$
$$= \left(\delta_{m,n} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k^{m+1}}{X - z_k}\right)' = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k^{m+1}}{(X - z_k)^2}$$

   (e) Comme 1 n'est pas pôle des fractions rationnelles précédentes, on évalue en 1, ce qui donne

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k^{m+1}}{(1 - z_k)^2} = \frac{2m - n}{4}$$

   On en déduit que

$$\frac{n}{2}X^m + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k z_k^m X^m}{(z_k - 1)^2} = \left(\frac{n}{2} + 2\frac{2m-n}{4}\right)X^m = mX^m = mX^{m-1}X$$

   ce qui est l'égalité souhaitée.

3. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. On dispose de $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{m=0}^{n} a_m X^m$. Mais alors par linéarité de la dérivation, $P' = \sum_{m=0}^{n} a_m (X^m)'$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} XP'(X) &= \sum_{m=0}^{n} a_m X (X^m)' = \sum_{m=0}^{n} a_m \left(\frac{n}{2} X^m + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k (z_k X)^m}{(z_k - 1)^2} \right) \\ &= \frac{n}{2} \sum_{m=0}^{n} a_m X^m + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k \sum_{m=0}^{n} a_m (z_k X)^m}{(z_k - 1)^2} = \frac{n}{2} P(X) + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k P(z_k X)}{(z_k - 1)^2} \end{aligned}$$

4. On connaît la surjectivité de l'exponentielle, donc on dispose de $t \in]0, 2\pi[$, tel que $z = e^{it}$. Mais alors $e^{it} - 1 = e^{it/2} 2i \sin(t/2)$, donc $(e^{it} - 1))^2 = -4\sin^2(t/2) e^{it}$. Ainsi, $\dfrac{z}{(z-1)^2} = -\dfrac{1}{4\sin^2(t/2)}$ est bien un réel strictement négatif.
5. On applique le résultat de la question 3 au polynôme constant 1 qui est bien dans $\mathbb{C}_n[X]$. Cela s'écrit

$$\frac{n}{2} + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{(z_k - 1)^2} = 0$$

soit encore

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{(z_k - 1)^2} = -\frac{n^2}{4}$$

Or $\forall k \in [\![1, n]\!], z_k \neq 1$, donc $\forall k \in [\![1, n]\!], \left| \dfrac{z_k}{(z_k - 1)^2} \right| = -\dfrac{z_k}{(z_k - 1)^2}$ puisque tout réel strictement négatif est égal à l'opposé de son module. On en déduit, par multiplicativité du module,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|}{|z_k - 1|^2} = \frac{n^2}{4}$$

6. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. L'application $[0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto P\left(e^{it}\right)$ est continue, comme composée d'applications continues. Comme $[0, 2\pi]$ est un segment, le théorème des bornes atteintes nous dit que cette application est bornée, donc que $t \mapsto |P(\exp(it))|$ est majorée. Comme l'exponentielle imaginaire est surjective sur $\mathbb{U}$, on en déduit que $\{|P(z)| | z \in \mathbb{U}\}$ est majorée, ce qui justifie la bonne définition de la borne supérieure indiquée.
7. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $z \in \mathbb{U}$. En utilisant l'inégalité triangulaire dans le résultat de la question 3, on obtient

$$|z||P'(z)| \leq \frac{n}{2}|P(z)| + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|}{|z_k - 1|^2} |P(z_k z)|$$

Or $\forall k \in [\![1, n]\!], z_k z \in \mathbb{U}$, donc $\forall k \in [\![1, n]\!], |P(z z_k)| \leq \|P\|$. Comme $|z| = 1$ et tout est positif, on en déduit

$$|P'(z)| \leq \frac{n}{2}\|P\| + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|}{|z_k - 1|^2} \|P\|$$

D'après le résultat de la question 5, on a alors

$$|P'(z)| \leq \frac{n}{2}\|P\| + \frac{2}{n}\frac{n^2}{4}\|P\| = n\|P\|$$

Comme cela est vrai pour tout z dans $\mathbb{U}$, on en déduit par passage à la borne supérieure $\|P'\| \leq n\|P\|$.

Exercice 2. Développement asymptotique d'une suite implicite

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est polynomiale donc dérivable.

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 2x + 1 \geq 1 > 0$$

   On en déduit que f_n est strictement croissante.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f_n(0) = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ car $n \geq 1$. Comme f_n est continue (car polynomiale) et strictement croissante, le théorème de la bijection indique qu'elle induit une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[-1, +\infty[$. En particulier, $0 \in [-1, +\infty[$ possède un unique antécédent par f_n, i.e $\exists! u_n \in \mathbb{R}^+, f_n(u_n) = 0$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $f_n(1) = n - 1 \geq 0$. Si $n = 1$, $f_1(1) = 0$, donc $u_1 = 1$. Si $n \geq 2$, $f_n(1) > 0$, donc $1 > f_n^{-1}(0) = u_n$, puisque la réciproque est de même monotonie que f_n.

4. Soit $n \geq 1$. $f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} + f_n(u_n) = u_n^{n+1} > 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$. On en déduit par stricte monotonie de la réciproque de f_{n+1} que $u_n > u_{n+1}$. Conclusion, la suite $(u_n)_{n\geq1}$ est strictement décroissante.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $n = 1$, $u_1 = 1$ vérifie $u_1^2 - 2u_1 + 1 = 0$. Si $n \geq 2$, $u_n < 1$ par stricte décroissance, on peut alors exploiter une somme géométrique :

$$f_n(u_n) = \frac{u_n - u_n^{n+1}}{1 - u_n} + 1 = 0$$

   On en déduit $u_n - u_n^{n+1} + (1 - u_n) = 0$, soit encore $1 - 2u_n + u_n^{n+1} = 0$.

6. La suite $(u_n)_{n\geq1}$ est décroissante, minorée par 0, donc convergente. D'après la stricte décroissance, $u_2 < 1$ et $\forall n \geq 2, u_n \leq u_2$, donc par croissance de la puissance $n+1$-ième sur $\mathbb{R}^+$, $\forall n \geq 2, 0 \leq u_n^{n+1} \leq u_2^{n+1}$. Or $u_2^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par théorème d'encadrement, $u_n^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Notons ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\geq1}$. D'après le travail précédent et la question 5, on $u_n^{n+1} - 2u_n + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 - 2\ell + 1 = 0$. Donc $\ell = 1/2$.

7. On note pour tout entier n non nul, $\varepsilon_n = u_n - 1/2$. Soit $n \geq 2$. La relation de la question 5 s'écrit encore

$$0 \leq n\varepsilon_n = \frac{n}{2} u_n^{n+1} \leq \frac{n}{2} u_2^{n+1}$$

   Comme $0 \geq u_2 < 1$, les croissances comparées assurent que le majorant de droite tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Par théorème d'encadrement, $n\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi, $\varepsilon_n = o(1/n)$, d'où $u_n = \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

8. Pour tout entier $n \geq 2$,

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2} u_n^{n+1} = \frac{1}{2} \exp((n+1)\ln(u_n)) = \frac{1}{2} \exp\left[(n+1)\ln\left(\frac{1}{2} + \varepsilon_n\right)\right]$$

   De plus, on a le développement limité

$$\ln\left(\frac{1}{2} + \varepsilon_n\right) = \ln\left(\frac{1}{2}(1 + 2\varepsilon_n)\right) = -\ln(2) + \ln(1 + 2\varepsilon_n) = -\ln(2) + 2\varepsilon_n + o(\varepsilon_n)$$

   On en déduit que

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2} \exp(-(n+1)\ln(2)) \exp(2(n+1)\varepsilon_n) \exp(o(n\varepsilon_n))$$

   Comme l'exponentielle est continue en 0 et $(n\varepsilon_n)_{n\geq1}$ tend vers 0, les deux exponentielles de droite tendent vers $\exp(0) = 1$, ce qui s'écrit encore

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2} \frac{1}{2^{n+1}} (1 + o(1)) = \frac{1}{4 \cdot 2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

   En conclusion, on a le développement asymptotique,

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+2}} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

Problème : Autour des nombres de Catalan

A. Quelques calculs intermédiaires.

1.

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(2n+2-n-1)!(n+1)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2}\frac{(2n)!}{n!n!} = 2(2n+1)\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Par conséquent, $C_n = \dfrac{1}{2(2n+1)}\dbinom{2n+2}{n+1} = \dfrac{1}{4n+2}\dbinom{2n+2}{n+1}$.

2.

$$\binom{-3}{n} = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(-3-k) = \frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(3+k) = \frac{(-1)^n}{n!}\prod_{j=3}^{n+2} j = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{(n+2)!}{2} = \frac{(-1)^n}{2}(n+1)(n+2)$$

3.

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-k\right) = \frac{1}{2^n}\prod_{k=0}^{n-1}(1-2k) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)\frac{\prod_{k=1}^{n-1}(2k)}{\prod_{k=1}^{n-1}(2k)}$$

Or $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)\prod_{k=1}^{n-1}(2k) = \prod_{j=1}^{2n-2} j = (2n-2)!$. D'autre part, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(2k) = 2^{n-1}(n-1)!$. On en déduit

$$\binom{1/2}{n} = \frac{1}{n!}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!} = \frac{(-1)^{n+1}}{4^n}\frac{2n}{2n(2n-1)}\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{4^n}\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}$$

4. Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$. Toutes les fonctions considérées sont polynomiales donc de classe C^1. On peut alors intégrer par parties :

$$I_p = \int_0^1 t^p(1-t)^{2n-p}\,dt = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}(1-t)^{2n-p}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{p+1}}{p+1}(2n-p)(1-t)^{2n-p-1}\,dt$$

Comme $p+1 \neq 0$, on obtient $I_p = \dfrac{2n-p}{p+1}I_{p+1}$. Puisque rien n'est non nul, on en déduit

$$I_n = \prod_{p=0}^{n-1}\left(\frac{p+1}{2n-p}\right)I_0 = \frac{\prod_{k=1}^{n} k}{\prod_{k=n+1}^{2n} k}\int_0^1(1-t)^{2n}\,dt = \frac{n!n!}{(2n)!}\frac{1}{2n+1} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

B. Étude de φ.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x \in D_\varphi \iff x \neq 0 \wedge 1-4x \geq 0 \iff x \in \mathbb{R}_-^* \cup]0, 1/4]$$

Ainsi, $D_\varphi = \mathbb{R}_-^* \cup]0, 1/4]$.

2. On effectue le développement limité à l'ordre 1 de $\sqrt{1-4x}$ au voisinage de 0, il fournit

$$\sqrt{1-4x} = 1 - \frac{1}{2}4x + o(x) = 1 - 2x + o(x)$$

On en déduit que

$$\varphi(x) = \frac{1-(1-2x+o(x))}{2x} = 1 + o(1)$$

Ainsi, φ admet une limite finie en 0, égale à 1.

3. D'après le catalogue à connaître par ♡,

$$\sqrt{1+u} = (1+u)^{1/2} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{1/2}{k} u^k + o(u^{n+1})$$

En composant à droite et en exploitant le résultat de la question A.3, on obtient

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{4^k} \frac{1}{2k-1} \binom{2k}{k} (-4x)^k + o(x^{n+1}) = -\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2k-1} \binom{2k}{k} x^k + o(x^{n+1})$$

4. D'après le développement précédent

$$\varphi(x) = \frac{1}{2x} \left(1 + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2k-1} \binom{2k}{k} x^k + o(x^{n+1}) \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k-1} \binom{2k}{k} x^{k-1} + o(x^n) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2(2j+1)} \binom{2j+2}{j+1} x^j + o(x^n)$$

D'après le résultat A.1, on en déduit que

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{n} C_j x^j + o(x^n)$$

5. Soit $x \leq 1/4$. Si $x = 0$, en utilisant $\varphi(0) = 1$, d'après B.2, on a bien $1 + 0.1^2 = 1$. Si $x \neq 0$, on écrit

$$1 + x\varphi^2(x) = 1 + x\frac{1}{4x^2}\left(1-\sqrt{1-4x}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4x}\left(1 - 2\sqrt{1-4x} + 1 - 4x\right) = \frac{1}{4x}\left(2 - 2\sqrt{1-4x}\right) = \varphi(x)$$

C. Nombres de Catalan.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le développement limité à l'ordre n de $\varphi(x)$ au voisinage de 0 permet d'obtenir par opérations sur les développements limités

$$\begin{aligned}1 + x\varphi^2(x) &= 1 + x\left(\sum_{j=0}^{n} C_j x^j + o(x^n)\right)\left(\sum_{k=0}^{n} C_k x^k + o(x^n)\right) = 1 + x\sum_{i=0}^{n}\sum_{k+j=i} C_j x^j C_k x^k + o(x^n)\\ &= 1 + x\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{i} C_{i-k}C_k\right)x^i + o(x^n) = 1 + \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{i} C_{i-k}C_k\right)x^{i+1} + o(x^n)\end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on peut identifier le coefficient d'indice $n+1$ avec celui du développement limité de φ à l'ordre $n+1$ en 0, ce qui donne

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_{n-k} C_k$$

On montre alors que ce sont tous des entiers naturels par récurrence forte. $C_0 = \dfrac{1}{2\cdot 0+1}\dbinom{0}{0} = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que $\forall k \in [\![0,n]\!], C_k \in \mathbb{N}$. Alors $C_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}C_k$ est une somme de produit d'entiers naturels, donc appartient à $\mathbb{N}$. Par récurrence forte, $\forall n \in \mathbb{N}, C_n \in \mathbb{N}$.

2. D'après la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$, donc $(2n)! \sim \sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{-2n}$ et $(n!)^2 \sim 2\pi n n^{2n} e^{-2n}$. On en déduit

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}4^n n^{2n} e^{-2n}}{2\pi n n^{2n} e^{-2n}} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

De plus, $\dfrac{1}{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$, donc

$$C_n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi} n\sqrt{n}} \sim \frac{4^n}{n^{3/2}\sqrt{\pi}}$$

D. Série des inverses de Catalan

1. $$\frac{1}{(1-x)^3} = (1-x)^{-3} = \sum_{k=0}^{n} \binom{-3}{k}(-x)^k + o(x^n) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(k+1)(k+2)x^k + o(x^n)$$

2. $$\begin{aligned}\frac{3x+1}{(1-x)^3} &= 3x\left(\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(k+1)(k+2)x^k + o(x^n)\right) + \left(\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(k+1)(k+2)x^k + o(x^n)\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{3}{2}(k+1)(k+2)x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}(k+1)(k+2) + o(x^n)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{3}{2}k(k+1)x^k + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}(k+1)(k+2)x^k + o(x^n)\\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2}k(k+1) + \frac{1}{2}(k+1)(k+2)\right)x^k + o(x^n)\\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n}(k+1)(2k+1)x^k + o(x^n)\\ &= \sum_{k=0}^{n}(k+1)(2k+1)x^k + o(x^n)\end{aligned}$$

3. On compose à droite le développement limité précédent par $x \mapsto x(1-x)$, ce qui donne

$$\frac{3x(1-x)+1}{(1-x(1-x))^3} == \sum_{k=0}^{n}(k+1)(2k+1)x^k(1-x)^k + o(x^n(1-x)^n)$$

D'autre part, $3x(1-x)+1 = 1+3x-3x^2$ et $1-x(1-x) = 1-x+x^2$, ce qui donne le résultat escompté.

4. $$\frac{3X+1}{(1-X)^3} = \frac{3(X-1)+1+3}{(1-X)^3} = \frac{-3}{(1-X)^2} + \frac{4}{(1-X)^3}$$

Il s'agit bien de la décomposition en éléments simples de F, puisque $1-X$ est irréductible, les numérateurs sont de degré inférieur ou égal à 0 et F est de degré -2 strictement négatif.

5. On compose l'égalité précédente à droite par le polynôme $X(1-X)$, ce qui donne

$$F\left(X(1-X)\right) = \frac{1+3X-3X^2}{(1-X+X^2)^3} = \frac{-3}{(1-X+X^2)^2} + \frac{4}{(1-X+X^2)^3}$$

On remarque que $1-X+X^2$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ car de degré 2 sans racine (son discriminant vaut $-3<0$). Comme les numérateurs sont de degré inférieur ou égal à 1, il s'agit bien de la décomposition en éléments simple de G.

6. On note $h : x \mapsto \frac{1}{9}\left(\frac{(3(-1+2x)(3-x+x^2))}{(1-x+x^2)^2} + 4\sqrt{3}\arctan\left(\frac{(-1+2x)}{\sqrt{3}}\right)\right)$. Il s'agit d'une fonction dérivable et, tous calculs faits, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = \frac{1+3x-3x^2}{(1-x+x^2)^3}$$

7. D'après A.4, on peut écrire

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)!(k)!}{(2k!)} = \sum_{k=0}^{n}(k+1)(2k+1)\frac{(k)!^2}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{n}(k+1)(2k+1)I_k = \sum_{k=0}^{n}(k+1)(2k+1)\int_0^1 t^k(1-t)^k\,dt$$

On en déduit par linéarité de l'intégrale

$$S_n = \int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)(2k+1)t^k(1-t)^k\right)dt$$

8. D'après D6 et D7, cette intégrale vaut $h(1)-h(0)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} h(1)-h(0) &= \frac{1}{9}\left(3(1)(3)+4\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)-\frac{1}{9}\left(3(-1)3+4\sqrt{3}\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\ &= 2+\frac{8\sqrt{3}}{9}\frac{\pi}{6}=2+\frac{4\pi}{9\sqrt{3}} \end{aligned}$$