Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Il est rappelé qu'il est tenu compte dans l'évaluation de la présentation et la rédaction des copies.

Exercice 1 : un peu de calcul

1. (a) On note $j = \exp(2i\pi/3)$. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = 1$.
   (b) On note $F = \dfrac{3}{X^3+1} \in \mathbb{R}(X)$. Effectuer la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$.
   (c) Effectuer la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$.
   (d) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}$.
2. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2} - k\right) = \frac{(-1)^n(2n)!}{4^n n!}$.
   (b) Démontrer le développement limité suivant en 0
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} x^{2k} + o(x^{2n})$$
   (c) En déduire le développement limité à tout ordre en 0 de $\arcsin(x)$.

Exercice 2 : algèbre linéaire

On se place dans $E = \mathbb{R}^4$, il est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel.

1. On note $a = (0,2,1,2)$ et $b = (1,2,0,-1)$, puis $F = \mathrm{Vect}(a,b)$. Déterminer la dimension de F.
2. On note $u = (1,1,0,0)$, $v = (0,-1,0,1)$, $w = (0,2,1,3)$ et $G = \mathrm{Vect}(u,v,w)$. Déterminer la dimension de G.
3. Montrer que $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x - y + 5z - t = 0\}$ et que $a \notin G$.
4. En déduire la dimension de $H = F \cap G$.
5. Déterminer la dimension de $F + G$.
6. A-t-on $\mathbb{R}^4 = F + G$? $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$?

Problème : Noyau de Poisson

Pour tout r dans $]-1,1[$, tout t dans $[-\pi,\pi]$, on note

$$P_r(t) = \mathfrak{Re}\left(\frac{1+re^{it}}{1-re^{it}}\right).$$

L'application $P_r : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}, t \mapsto P_r(t)$ est appelé noyau de Poisson de paramètre r. Nous calculons son intégrale de deux manières différentes, puis étudions son effet sur les fonctions continues 2π-périodiques.

A. Intégrale de P_r, calcul direct

Soit $r \in]-1,1[$.

1. Montrer que $\forall t \in [-\pi,\pi]$, $P_r(t) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2}$.
2. Soit $t \in]-\pi,\pi[$. On note $u = \tan(t/2)$. Montrer que $\cos(t) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ et $\sin(t) = \dfrac{2u}{1+u^2}$.

3. En déduire que pour tout (a,b) dans $\mathbb{R}^2$ tel que $-\pi < a < b < \pi$,
$$\int_a^b P_r(t)dt = 2\int_{\tan(a/2)}^{\tan(b/2)} \frac{1-r^2}{(1-r)^2+u^2(1+r)^2}du$$
4. Démontrer que $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt = 2\pi$.

B. Intégrale de P_r, calcul à l'aide d'une somme

Soit $r \in]-1,1[$.

1. Soit $t \in [-\pi,\pi]$. Pour tout N dans $\mathbb{N}$, on note $S_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} r^{|n|}e^{int}$.
   (a) Montrer que
   $$\forall N \in \mathbb{N}^*, S_N(t) = P_r(t) - \left(\frac{(re^{it})^{N+1}}{1-re^{it}} + \frac{(re^{-it})^{N+1}}{1-re^{-it}}\right).$$
   (b) En déduire que
   $$\forall N \in \mathbb{N}^*, |S_N(t) - P_r(t)| \leq \frac{2|r|^{N+1}}{1-|r|}$$
2. Montrer que
$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \int_{-\pi}^{\pi} S_N(t)dt = 2\pi$$
3. Démontrer que
$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \left|\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt - 2\pi\right| \leq \frac{4\pi|r|^{N+1}}{1-|r|}$$
4. En déduire de nouveau le résultat A.4, i.e $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt = 2\pi$.

C. Un calcul d'intégrale de Poisson

Pour tout t dans $[\pi,\pi]$, tout r dans $]-1,1[$, on note $f_t(r) = \ln(r^2 - 2r\cos(t)+1)$. **Attention à ne pas confondre les variables t et r dans cette partie!**

1. Soit $t \in [-\pi,\pi]$.
   (a) Montrer que l'application $f_t :]-1,1[\to \mathbb{R}, r \mapsto f_t(r)$ est deux fois dérivable et que
   $$\forall r \in]-1,1[, |f_t''(r)| \leq \frac{24}{(1-|r|)^4}$$
   (b) En déduire
   $$\forall R \in]0,1[, \forall r \in]-R,R[, \forall h \in]-R-r, R-r[, |f_t(r+h) - f_t(r) - hf_t'(r)| \leq \frac{h^2}{2}\frac{24}{(1-R)^4}$$
2. Pour tout r dans $]-1,1[$, on note $\psi(r) = \int_{-\pi}^{\pi} f_t(r)dt$. Déduire de ce qui précède que ψ est dérivable et que
$$\forall r \in]-1,1[, \psi'(r) = 2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r-\cos(t)}{r^2-2r\cos(t)+1}dt$$
3. (a) Démontrer que pour tout réel non nul r dans $]-1,1[$, tout réel t dans $[-\pi,\pi]$, tout N dans $\mathbb{N}^*$,
   $$\cos(t)S_N(t) = \frac{1}{r}\left(\frac{S_{N+1}(t)-1}{2}\right) + r\left(\frac{S_{N-1}(t)-1}{2}\right) + r$$
   (b) Calculer pour tout r dans $]-1,1[$, l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(t)}{r^2-2r\cos(t)+1}dt$.
4. En déduire que $\psi' = 0$, puis la valeur de $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(r^2-2r\cos(t)+1)dt$ pour tout r dans $]-1,1[$.

D. Noyau reproduisant

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que f est continue et 2π-périodique. Pour tout r dans $]-1,1[$, tout réel t, on note

$$T_r(f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) f(t-\theta) d\theta$$

L'objectif de cette partie est de démontrer le caractère « reproduisant » du noyau de Poisson, i.e la convergence (en un sens à préciser) de $T_r(f)$ vers f quand r tend vers 1 par valeurs inférieures.

1. Démontrer que f est uniformément continue.
2. Démontrer que f est bornée. On note M un majorant de $|f|$ dans ce qui suit.
3. Démontrer que
$$\forall \eta \in]0,\pi], \lim_{r\to 1} \int_{\eta}^{\pi} P_r(\theta) d\theta = 0$$
Indication : procéder par encadrement.
4. On fixe $\varepsilon > 0$. Démontrer l'existence d'un réel δ strictement positif tel que
$$\forall r \in]0,1[, \forall t \in \mathbb{R}, |T_r(f)(t) - f(t)| \leq \frac{1}{2\pi}\left(2M \int_{-\pi}^{-\delta} P_r(\theta) d\theta + 2M \int_{\delta}^{\pi} P_r(\theta) d\theta\right) + \varepsilon$$
Indication : Découper judicieusement l'intégrale.
5. En déduire que
$$\lim_{r\to 1} \sup_{t\in\mathbb{R}} |T_r(f)(t) - f(t)| = 0$$