Matrices

Cornou Jean-Louis

1er mai 2023

On fixe dans tout ce qui suit E, F et G trois K-espaces vectoriels deux espaces vectoriels de dimensions finies respectives p, n et q non nulles.

1 Matrices et applications linéaires

On fixe $b = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $b' = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F.

1.1 Matrice d'une application linéaire dans une base

Définition 1 *Soit $x \in \mathrm{F}$ décomposé sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$ dans la base b'. On appelle matrice de x dans la base b' la matrice*

$$\mathrm{M}(x)_{b'} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ddots \\ x_n \end{pmatrix}$$

C'est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (donc n lignes, 1 colonne).

Exemple 1 *Prenons la base la base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ formé des polynômes interpolateurs de Lagrange aux points $0 < 1 < \cdots < n$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Comme $\mathrm{P} = \sum_{i=0}^{p} \mathrm{P}(i)\mathrm{L}_i$, la matrice de P dans la base des $(\mathrm{L}_i)_{0\le i\le n}$ vaut*

$$\mathrm{M}(x)_{b'} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(0) \\ \mathrm{P}(1) \\ \ddots \\ \mathrm{P}(n) \end{pmatrix}$$

C'est une matrice colonne à $n+1$ lignes.

Définition 2 *Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $(y_1, \dots, y_r) \in \mathrm{F}^r$ une famille de r vecteurs de F. Pour tout j dans $[\![1, r]\!]$, on note $y_j = \sum_{i=1}^{n} y_{i,j} f_i$ la décomposition du vecteur y_j dans la base b'. La matrice*

$$\begin{pmatrix} y_{1,1} & \cdots & y_{1,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n,1} & \cdots & y_{n,r} \end{pmatrix}$$

est appelée matrice de la famille $(y_1, \dots, y_r)$ dans la base b'. Il s'agit d'une matrice à n lignes et r colonnes. On la note $\mathrm{M}(y_1, \dots, y_r)_{b'}$.

Exemple 2 *On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 de base $b' = (1, i)$. Alors*

$$\mathrm{M}(e^{i\pi/6}, e^{i\pi/3}, 2e^{i\pi/2})_{b'} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 2 \end{pmatrix}$$

Définition 3 *Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. La matrice de la famille $(u(e_1), \dots, u(e_p))$ dans la base b' est appelée matrice de u dans les bases b et b', notée $\mathrm{M}(u)_{b'}^{b}$,*

⚠ Attention

La position des bases dans cette notation a son importance !

Notation

On rencontre également $[u]_{b'}^{b}$ ou $\mathrm{Mat}(u)_{b'}^{b}$ ou les bases mises en indice à la suite b, b'. Je choisis la notation $\mathrm{M}(u)_{b'}^{b}$ car je positionne la base de départ « en haut » pour construire chaque colonne via l'effet de u sur la base de départ b, puis je décompose « en bas » sur la base d'arrivée b'.

Le principe est de décomposer chaque vecteur de la famille $(u(e_i))_{1\leq i\leq p}$ selon la base $(f_1,\dots,f_n)$.

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccc}
u(e_1) & u(e_2) & \cdots & u(e_p) \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow
\end{array} & \\
\begin{bmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p}
\end{bmatrix} &
\begin{array}{c}
\to f_1 \\ \to f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \to f_n
\end{array}
\end{array}
$$

⚠ Attention

Le nombre de lignes de cette matrice est la dimension de l'espace d'arrivée, tandis que le nombre de colonnes est la dimension de l'espace de départ. Il s'agit avec les notations d'une matrice à n lignes ($\dim \mathrm{F} = n$) et p colonnes ($\dim \mathrm{E} = p$).

Exemple 3 *On considère l'applications linéaire $\varphi : \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}_n[\mathrm{X}], \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}+1)$. On munit $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ de sa base canonique $b = (1, \mathrm{X}, \dots, \mathrm{X}^n)$ au départ et à l'arrivée. Soit $j \in [\![0,n]\!]$, $\varphi(\mathrm{X}^j) = (\mathrm{X}+1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{i}{j}\mathrm{X}^i$, donc la j-ième colonne de la matrice de $\varphi(\mathrm{X}^j)$ dans b vaut*

$$\begin{pmatrix} \binom{j}{0} \\ \binom{j}{1} \\ \vdots \\ \binom{j}{n} \end{pmatrix}$$

On en déduit que la matrice de φ dans b et b est

$$\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \dots & \binom{j}{0} & \dots & \binom{n}{0} \\ \binom{0}{1} & \dots & \binom{j}{1} & \dots & \binom{n}{1} \\ \vdots & & & & \\ \binom{0}{n} & \dots & \binom{j}{n} & \dots & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

On remarque que cette matrice est triangulaire supérieure puisque $\forall i > j, \binom{j}{i} = 0$.

Exercice 1 *On considère l'application linéaire $\mathrm{D} : \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}_n[\mathrm{X}], \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}'$ de dérivation des polynômes. On considère deux bases de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, la base canonique $b = (1, \mathrm{X}, \dots, \mathrm{X}^n)$ et la base $b' = (\frac{1}{0!}, \frac{\mathrm{X}}{1!}, \dots, \frac{\mathrm{X}^k}{k!}, \dots, \frac{\mathrm{X}^n}{n!})$. Ecrire les matrices suivantes :*

— $\mathrm{M}(\mathrm{D})_b^b$

— $M(D)_{b'}^{b'}$
— $M(D)_{b}^{b'}$
— $M(D)_{b'}^{b}$

Définition 4 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. La matrice de la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ dans la base b est appelée matrice de u dans la base B, notée $M(u)_b$ (raccourci pour $M(u)_b^b$.*

Théorème 1 *L'application $\mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $f \mapsto M(f)_{b'}^{b}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Démonstration. Commençons par prouver la linéarité : soit u, v deux applications linéaires de E dans F, λ, μ deux scalaires. Notons $A = M(u)_{b'}^{b} = (A_{i,j})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le p}$ et $B = M(v)_{b'}^{b} = (B_{i,j})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le p}$. Afin de déterminer la matrice de $\lambda u + \mu v$ dans les bases b et b', on doit examiner son effet sur la base b. Soit $j \in [\![1, p]\!]$,

$$(\lambda u + \mu v)(e_j) = \lambda u(e_j) + \mu v(e_j) = \lambda \sum_{i=1}^{n} A_{i,j} f_i + \mu \sum_{i=1}^{n} B_{i,j} f_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda A_{i,j} + \mu B_{i,j}) f_i$$

Ainsi, pour tout entier i dans $[\![1, n]\!]$, le coefficient de place (i, j) de la matrice de $\lambda u + \mu v$ dans les bases b et b' vaut $\lambda A_{i,j} + \mu B_{i,j}$, on reconnaît alors

$$M(\lambda u + \mu v)_{b'}^{b} = \lambda M(u)_{b'}^{b} + \mu M(v)_{b'}^{b}.$$

Les espaces vectoriels considérés sont tous deux de dimension finie np (cf chapitres précédents). Prouvons l'injectivité, cela suffit à démontrer la bijectivité de cette application linéaire. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $M(f)_{b'^b} = 0$. Soit $j \in [\![1, p]\!]$,

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} 0 f_i = 0$$

L'application linéaire f coïncide avec l'application nulle sur la base b, c'est donc l'application nulle.

⚠ **Attention**
Cette application dépend des bases b et b'.

Propriété 1 *Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $x \in E$. On note $A = M(u)_{b'}^{b}$ et $X = M(x)_b$. Alors $AX = M(u(x))_{b'}$.*

Démonstration. Notons $A = (a_{i,j})_{1 \le i \le p, 1 \le j \le n}$. On décompose x dans la base b sous la forme $x = \sum_{i=j}^{p} x_j e_j$. Par linéarité de u,

$$u(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j u(e_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j \right) f_i$$

Ceci prouve que pour tout entier i dans $[\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j$ est la i-ième coordonée de $u(x)$ dans la base $(f_1, \dots, f_n)$, donc que $M(u(x))_{b'} = (\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j)_{1 \le i \le n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On reconnaît le produit matriciel AX.

☞ **Remarque**
J'ai normalement choisi les notations pour lire de manière automatique $M(u(x))_{b'} = M(u)_{b'}^{b} M(x)_b$.

Théorème 2 *Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$, puis b'' une base de G. Alors*

$$M(v \circ u)_{b''}^{b} = M(v)_{b''}^{b'} M(u)_{b'}^{b}$$

☞ **Remarque**
C'est ce théorème qui justifie la définition du produit matriciel tel que nous l'avons vu en début d'année.

Démonstration. Notons $b'' = (g_1 \dots, g_q)$. Notons $A = M(u)_{b'}^{b} = (A_{i,j})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le p}$, $B = M(v)_{b''}^{b'} = (B_{i,j})_{1 \le i \le q, 1 \le j \le n}$. Afin de déterminer la matrice de $v \circ u$ dans les bases b et b'', on doit examiner l'effet de $v \circ u$ sur la base b. Soit $j \in [\![1, p]\!]$,

$$\begin{aligned}
(v \circ u)(e_j) &= v(u(e_j)) \\
&= v\left(\sum_{i=1}^{n} A_{i,j} f_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} A_{i,j} v(f_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} A_{i,j} \left(\sum_{k=1}^{q} B_{k,i} g_k \right) \\
&= \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{i=1}^{n} B_{k,i} A_{i,j} \right) g_k
\end{aligned}$$

On reconnaît donc le coefficient de place (k, j) de la matrice de $v \circ u$ dans les base b, b'', il vaut $\sum_{i=1}^{n} b_{k,i} a_{i,j}$, on reconnaît celui du produit matriciel BA.

Théorème 3 *L'application $\mathcal{L}(\mathrm{E}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), u \mapsto \mathrm{M}(u)_b$ est un isomorphisme d'anneau.*

Démonstration. Cette application est additive puisque c'est également une application linéaire. La compatibilité entre composition et produit matriciel vient d'être établie dans le cas général. Comme cette application linéaire est un isomorphisme, elle est bijective. Il reste à vérifier qu'elle envoie le neutre de l'anneau $(\mathcal{L}(\mathrm{E}), \circ)$ sur le neutre de $(\mathcal{M}_n, \times)$. On considère $u = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$. Alors pour tout entier j dans $[\![1, n]\!]$, $u(e_j) = e_j = \sum_{i=1}^{n} \delta_{i,j} e_i$, donc sa matrice dans la base b est $(\delta_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} = \mathrm{I}_n$.

Propriété 2 *On suppose que $n = p$ Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $\mathrm{A} = \mathrm{M}(u)_{b'}^{b}$. On a l'équivalence : u isomorphisme si et seulement si A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Démonstration. Supposons u bijective. On note alors $\mathrm{B} = \mathrm{M}(u^{-1})_{b}^{b'}$. Alors d'après la comptabilité entre composition d'applications linéaires et produit matriciel,

$$\mathrm{AB} = \mathrm{M}(u)_{b'}^{b} \mathrm{M}(u^{-1})_{b}^{b'} = \mathrm{M}(u \circ u^{-1})_{b',b'} = \mathrm{M}(\mathrm{Id}_\mathrm{F})_{b',b'} = \mathrm{I}_n$$

De même, $\mathrm{BA} = \mathrm{M}(\mathrm{Id}_\mathrm{E})_{b,b} = \mathrm{I}_n$. Par conséquent, A est inversible d'inverse B.
Réciproquement, supposons A inversible dans $\mathcal{M}_n\mathbb{K}$. Montrons qu'alors u est injective. Soit $x \in \mathrm{E}$ tel que $u(x) = 0$. Notons $\mathrm{X} = \mathrm{M}(x)_b$, on a vu que $\mathrm{M}(u(x))_{b'} = \mathrm{AX}$, donc $\mathrm{AX} = 0$. On multiplie à gauche par l'inverse de la matrice A, donc $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{AX} = \mathrm{A}^{-1}0 = 0$. Les coordonnées du vecteur x dans la base b sont toutes nulles, donc $x = 0$. Conclusion, u est injective. Or $\dim(\mathrm{E}) = \dim(\mathrm{F}) < +\infty$, donc u est bijective.

☞ Remarque
Dans le cas $\mathrm{E} = \mathrm{F}$, on peut aller plus vite en indiquant que l'isomorphisme d'anneau $\mathcal{L}(\mathrm{E}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), u \mapsto \mathrm{M}(u)_b$ envoie le groupe des inversibles de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ sur le groupe des inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 4 *Reprenons l'application linéaire : $\mathrm{S} : \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}_n[\mathrm{X}], \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}+1)$ vue précédemment. On a établi sa matrice A dans la base canonique. Il est aisé de voir que $\mathrm{T} : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}-1)$ est la réciproque de S, on en déduit que la matrice A est inversible d'inverse la matrice de T dans la base canonique. Or pour tout entier j, $(\mathrm{X}-1)^j = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{j}{i} \mathrm{X}^i$. On en déduit que l'inverse de A vaut*

$$\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \dots & \binom{j}{0} & \dots & \binom{n}{0} \\ -\binom{0}{1} & \dots & -\binom{j}{1} & \dots & -\binom{n}{1} \\ \vdots & & & & \\ (-1)^n\binom{0}{n} & \dots & (-1)^n\binom{j}{n} & \dots & (-1)^n\binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

1.2 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Définition 5 *Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application linéaire*

$$\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \mathrm{X} \mapsto \mathrm{AX}$$

est appellée application linéaire canoniquement associée à la matrice A. On la note f_A.

☞ Remarque
Il est classique d'identifier $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^r$.

Exemple 5 *L'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est*

$$u : \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x \\ -y \end{pmatrix}$$

Avec l'identification mentionnée, on peut écrire plus lisiblement

$$u : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^3, (x, y) \mapsto (x+2y, 3x, -y)$$

Propriété 3 *On munit $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ de sa base canonique b, puis $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ de sa base canonique b'. Alors* $\mathrm{M}(f_\mathrm{A})_{b'}^{b} = \mathrm{A}$.

Démonstration. On note $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\le i\le n, 1\le j\le p}$ et $b = (\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_p)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Soit $j \in [\![1,p]\!]$, $f_\mathrm{A}(\mathrm{E}_j) = \mathrm{AE}_j = (\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\delta_{k,j})_{1\le i\le n} = (a_{i,j})_{1\le i\le n}$. En notant $(\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_n) = b'$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on remarque que $\mathrm{AE}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\mathrm{F}_i$, donc que $\mathrm{M}(f_\mathrm{A})_{b'}^{b} = \mathrm{A}$.

Exemple 6 *Calcul d'une puissance de matrice en passant par l'endomorphisme canoniquement associé. On considère la matrice*

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & 0 & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & & & 0 \end{pmatrix}$$

Notons $(\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. D'après la forme de J, on a $\mathrm{JE}_1 = 0, \mathrm{JE}_2 = \mathrm{E}_1, \mathrm{JE}_3 = \mathrm{E}_2, \ldots \mathrm{JE}_n = \mathrm{E}_{n-1}$. Il est alors clair que $\mathrm{J}^2\mathrm{E}_1 = 0, \mathrm{J}^2\mathrm{E}_2 = 0, \mathrm{J}^3\mathrm{E}_3 = \mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{J}^2\mathrm{E}_n = \mathrm{E}_{n-2}$. Il s'ensuit via une simple récurrence que

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \forall j \in [\![1,k]\!], \mathrm{J}^k\mathrm{E}_j = 0, \quad \forall j \in [\![k+1,n]\!], \mathrm{J}^k\mathrm{E}_j = \mathrm{E}_{j-k}$$

En particulier, $\forall j[\![1,n]\!], \mathrm{J}^n\mathrm{E}_j = 0$. Comme J^n envoie la base canonique sur la famille nulle, c'est la matrice nulle.

Définition 6 *Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle noyau de A le noyau de f_A, image de A l'image de f_A, rang de A le rang de f_A*

☞ **Remarque**

Il est essentiel de savoir traduire les éléments du noyau de A : il s'agit des vecteurs colonnes X dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tels que $\mathrm{AX} = 0$. Si l'on traduit cela en termes de système linéaire, cela donne

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}x_j = 0.$$

Autrement dit, si l'on note φ_i la forme linéaire donnée par les coefficients de la i-ième ligne de A, $\varphi_i : (y_1, \ldots, y_p) \mapsto \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}y_j$, on déduit que le noyau est l'intersection des hyperplans définis par ces formes liinéaires (celles non nulles).
De même l'image de A est l'ensemble des vecteurs colonnes Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels qu'il existe X dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ vérifiant $\mathrm{Y} = \mathrm{AX}$. On rappelle qu'une telle matrice colonne est combinaison linéaire des colonnes de A, donc que les colonnes de A engendrent son image.

Théorème 4 *Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

— A *est inversible.*

— $\ker(\mathrm{A}) = \{0\}$.

— *Les colonnes de* A *engendrent l'espace $\mathbb{K}^n$ (identiifé à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$).*

— $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = n$.

Démonstration. Démontrons une chaîne d'implications.

— Supposons A inversible et démontrons que $\ker(\mathrm{A}) = \{0\}$. Soit $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $\mathrm{AX} = 0$. On multiplie cette égalité à gauche par A^{-1}, ce qui donne $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{AX} = \mathrm{A}^{-1}0 = 0$.

— Supposons $\ker(\mathrm{A}) = \{0\}$ et démotrons que les colonnes de A engendrent l'espace $\mathbb{K}^n$, i.e $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On sait que f_A l'application canoniquement associé est alors injective. Comme c'est un endomorphisme en dimension finie, f_A est alors surjective. Soit $\mathrm{Y} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $\mathrm{Y} = \mathrm{AX}$. Mais alors, comme vu dans le chapitre de calcul matriciel, Y est combinaison linéaire des colonnes de A ($\mathrm{Y} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathrm{C}_i(\mathrm{A})$). Par conséquent, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{C}_1(\mathrm{A}), \ldots, \mathrm{C}_n(\mathrm{A}))$.

— Supposons que les colonnes de A engendrent l'espace $\mathbb{K}^n$ et montrons que $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = n$. Comme vu précédemment, l'image de A est l'espace vectoriel engendré par les colonnes de A dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (identifié à $\mathbb{K}^n$). Si celles-ci engendrent tout $\mathbb{K}^n$, alors $\dim(\mathrm{Im}(\mathrm{A})) = \dim(\mathbb{K}^n) = n$, donc $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = n$.

— Supposons $\mathrm{rg}(A) = n$ et démontrons que A est inversible. Alors f_A est surjective et c'est un endomorphisme, donc f_A est un isomorphisme. Mais alors sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est inversible. On a que cette matrice vaut précisément A, donc A est inversible.

Propriété 4 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Alors* A *est inversible ssi inversible à gauche ssi inversible à droite.*

Démonstration. Les sens directs sont clairs.

— Supposons A inversible à gauche. Alors il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$. Alors $f_B \circ f_A = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}$. Par conséquent, $\ker(f_A) \subset \ker(f_B \circ f_A) = \ker(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) = \{0\}$. D'après le théorème précédent, A est inversible.

— Supposons A inversible à droite. Alors il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AC = I_n$. Alors $f_A \circ f_C = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}$, donc $n = \mathrm{rg}(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}) \leq \min(\mathrm{rg}(f_A), \mathrm{rg}(f_C)) \leq n$. Donc $\mathrm{rg}(f_A) = n$, i.e $\mathrm{rg}(A) = n$. D'après ce qui précède, A est inversible.

Application 1 (Inversibilité des matrices triangulaires) *On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures. Soit $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ inversible. On pose $g : \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M \mapsto AM$. Je vous laisse vérifier que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, que g est linéaire et que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Soit $M \in \ker(g)$, alors $AM = 0$. En multipliant à gauche par A^{-1}, on obtient $M = A^{-1}AM = A^{-1}0 = 0$. Donc g est injective et d'après le théorème du rang, $\mathrm{Im}(g) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Comme I_n est triangulaire supérieure, il existe $B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ tel que $g(B) = I_n$, i.e $AB = I_n$. Cela suffit à établir que A est inversible d'inverse B. En particulier, cet inverse appartient à $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ donc est triangulaire supérieure.*

Propriété 5 (Lien entre les diverses notions de rang) *Soit $(y_1, \ldots, y_r)$ une famille de r vecteurs de F. On les décompose selon la base b' via $\forall j \in [\![1, r]\!], y_j = \sum_{i=1}^r y_{i,j} f_j$. Alors le rang de cette famille de vecteurs est égal au rang de la matrice $(y_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r}$.*

Démonstration. On a déjà vu que l'image d'une matrice est égal à l'espace vectoriel engendré par ses colonnes. Il s'agit du même espace vectoriel lorsqu'on identifie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et F.

1.3 Systèmes linéaires

Propriété 6 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Résoudre le système linéaire de matrice A et de second membre B équivaut à résoudre $AX = B$. Il s'agit*

— *soit de l'ensemble vide lorsque $B \notin \mathrm{Im}(A)$.*

— *soit d'un sous-espace affine de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, de direction $\ker(u)$ et de dimension $p - \mathrm{rg}(A)$.*

Démonstration. — Si $B \notin \mathrm{Im}(A)$, c'est l'ensemble vide.

— Supposons $B \in \mathrm{Im}(A)$. On note $C \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel que $B = AC$. Par conséquent, $AX = B \iff AX = AC \iff A(X - C) = 0 \iff X - C \in \ker(A)$. Il s'agit donc bien du sous-espace affine $C + \ker(A)$. D'après le théorème du rang, $\dim(\ker(A)) = \dim(\ker(f_A)) = \dim(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})) - \mathrm{rg}(f_A) = p - \mathrm{rg}(A)$.

Propriété 7 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

— *A est inversible.*

— *$\forall B \in \backslash, \infty(\mathbb{K})$, le système linéaire $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ possède une unique solution*

— *Pour toute base $(E_1, \ldots, E_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, les systémes linéaires $AX = E_i$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ possèdent tous une unique solution.*

Démonstration. On démontre une chaîne d'implications.

— Si A est inversible, alors $X = A^{-1}B$ est l'unique solution du système indiqué.

— Si c'est vrai pour tout B, c'est vrai a fortiori pour les éléments de la base considérée.

— Si c'est le cas, alors l'image de A contient une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, donc f_A est surjective. Comme c'est un endomorphisme, f_A est bijective et A est inversible.

1.4 Polynômes de matrices (hors-programme)

Un ultra classique, bien qu'hors-programme. Cela sera approfondi l'année prochaine, mais on peut tout de même exposer quelques outils simples. Les preuves sont squelettiques et à compléter par vos soins.

Définition 7 *Soit* $P = \sum_{n=0}^{+\infty} p_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ *et* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *On note* $P(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_k A^k$. *Il s'agit d'une matrice dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *L'ensemble des matrices* $\{P(A) | P \in \mathbb{K}[X]\}$ *est noté* $\mathbb{K}[A]$.

Propriété 8 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *L'application* $\varphi : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), P \mapsto P(A)$ *est une application linéaire et un morphisme d'anneau.*

Démonstration.

$$(\lambda P + \mu Q)(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda p_n + \mu q_n) A^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} p_n A^n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} q_n A^n = \lambda P(A) + \mu Q(A)$$

$$(PQ)(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}) A^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-k} (p_k A^k)(q_{n-k} A^{n-k}) = P(A)Q(A)$$

$$1(A) = 1 \times A^0 = I_n$$

Propriété 9 *L'ensemble* $\mathbb{K}[A]$ *est un sev de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et un sous-anneau commutatif de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. L'ensemble $\mathbb{K}[A]$ est l'image de φ. D'autre part, le produit de polynômes est commutatif, donc $P(A)Q(A) = (PQ)(A) = (QP)(A) = Q(A)P(A)$.

Application 2 *Recherche d'inverses : Notons* $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 8/3 & -4/3 \\ -3 & 10/3 & -5/3 \end{pmatrix}$. *On vérifie que* $A^3 + A^2 + A + I_n = 0$, *alors en posant* $P = X^3 + X^2 + X + 1$, *on a* $P(A) = 0$. *On remarque que* $P = 1 + X(1 + X + X^2)$, *donc que* $I_n = -A(I_n + A + A^2)$, *autrement dit* A *est inversible d'inverse* $-(I_n + A + A^2)$.
Calcul de puissances : on cherche à calculer A^n *pour tout entier* n. *Pour cela, on effectue la division euclidienne de* X^n *par* P. *Elle est de la forme*

$$X^n = Q_n(1 + X + X^2 + X^3) + a + bX + cX^2$$

Le morphisme précédent assure que $A^n = Q_n(A)(I_n + A + A^2 + A^3) + aI_3 + bA + cA^2 = aI_3 + bA + cA^2$. *Déterminons les réels* a, b, c. *On connaît les racines de* P *puisque* $X^4 - 1 = (X-1)(X^3 + X^2 + X + 1)$, *ce sont les racines quatrièmes de l'unité différentes de* 1, *on en déduit* $P = (X+1)(X-i)(X+i) = (X+1)(X^2+1)$. *Les évaluations en* -1, i *et* $-i$ *entraînent que*

$$\begin{cases} a + b + c &= (-1)^n \\ a + bi - c &= i^n \\ a - bi - c &= (-i)^n \end{cases}$$

On distingue les solutions selon n *modulo* 4.

	$n \equiv 0[4]$	$n \equiv 1[4]$	$n \equiv 2[4]$	$n \equiv 3[4]$
a	1	0	0	-1
b	0	1	0	-1
c	0	0	1	-1
A^n	I_3	A	A^2	$-I_n - A - A^2$

Méthode

On retient : si on détermine un polynôme P *tel que* $P(A) = 0$, *on peut en déduire un inverse si* P *est de terme constant non nul. Les puissances de* A *se déduisent du reste dans la division euclidienne de* X^n *par* P.

Exercice 2 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. *Démontrer que* $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$, *puis que pour tout entier relatif* k, $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2^k - 1 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$.

2 Changements de bases

Cette section est extrêmement piégeuse car il y a des conventions à mémoriser absolument. L'important est de comprendre à chaque fois ce que désigne l'ordre des bases dans les notations. Un bon moyen de ne pas se tromper (je vous invite à le faire à chaque fois) est de comprendre ce qui est l'ancienne base, puis ce qui est la nouvelle base.

2.1 Changements de bases

Définition 8 *Soit $b = (e_1, \ldots, e_p)$ et $b' = (e'_1, \ldots, e'_p)$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de b à b', la matrice de la famille b' dans la base b. Autrement dit pour tout j dans $[\![1,p]\!]$, on décompose $e'_j = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} e_i$, ce qui fournit la matrice $(a_{i,j})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq p}$. Elle est notée $P_b^{b'}$.*

Problèmes dans les indices de la figure : remplacer n par p

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccc}
e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_n \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow
\end{array} & \\
\begin{bmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p}
\end{bmatrix} &
\begin{array}{c}
\longrightarrow e_1 \\
\longrightarrow e_2 \\
\vdots \\
\vdots \\
\longrightarrow e_n
\end{array}
\end{array}$$

☞ **Remarque**
Comme dans la première partie du cours, je choisis la famille qui est décomposée « en haut » en exposant et la base dans laquelle on décompose « en bas » en indice.

Exemple 7 *Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique b, on considère la famille $b' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ définie par*

$$e'_1 = (1,2,3), e'_2 = (4,5,6), e'_3 = (0,7,8)$$

On vérifie que cette famille est libre, donc une base car de longueur 3 dans $\mathbb{R}^3$ de dimension 3. Alors

$$P_b^{b'} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 *Dans $\mathbb{R}_n[X]$, on considère la base canonique $b = (1, X, \ldots, X^n)$ et la famille $b' = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2), \ldots, X(X-1)\ldots(X-n+1))$. Ecrire la matrice de passage $P_b^{b'}$.*

⚠ **Attention**
Retenir l'ordre des bases et leur signification dans cette notation. On passe d'une ancienne base à une nouvelle base. On décompose chaque vecteur de la nouvelle base dans l'anciennene base. La notation $P_b^{b'}$ donne l'ancienne en indice et la nouvelle en exposant. En prose française, il s'agit de la matrice de passage de l'ancienne base à la nouvelle base.

Propriété 10 *Avec les mêmes notations que précédemment,*

$$P_b^{b'} = M(Id_E)_b^{b'}$$

Démonstration. La matrice $\mathrm{M}(\mathrm{Id_E})_b^{b'}$ s'obtient en décomposant l'image de chaque vecteur de la base de départ (ici b') par l'application $\mathrm{id_E}$ dans la base b, ce qui revient à décomposer chaque vecteur $\mathrm{id_E}(e'_j) = e'_j$ pour j dans $[\![1,p]\!]$ dans la base b, c'est précisément la définition de la matrice de passage de b à b'.

Propriété 11 *Avec les mêmes notations que précédemment, la matrice* $\mathrm{P}_b^{b'}$ *est inversible et* $(\mathrm{P}_b^{b'})^{-1} = \mathrm{P}_{b'}^{b}$.

Démonstration. Notons que $\mathrm{id_E} \circ \mathrm{Id_E} = \mathrm{Id_E}$. En passant aux matrices, on a

$$\mathrm{M}(\mathrm{id_E})_b^{b'}\mathrm{M}(\mathrm{Id_E})_{b'}^{b} = \mathrm{M}(\mathrm{Id_E})_b^{b} = \mathrm{I}_p$$

On reconnaît alors

$$\mathrm{P}_b^{b'}\mathrm{P}_{b'}^{b} = \mathrm{I}_p$$

ce qui suffit à établir l'inversibilité de $\mathrm{P}_b^{b'}$ et l'égalité $(\mathrm{P}_b^{b'})^{-1} = \mathrm{P}_{b'}^{b}$.

Propriété 12 *Soit* $x \in \mathrm{E}$. *Alors*

$$\mathrm{M}(x)_b = \mathrm{P}_b^{b'}\mathrm{M}(x)_{b'}$$

Démonstration. On interprète $\mathrm{P}_b^{b'} = \mathrm{M}(\mathrm{id_E})_{b',b}$, de sorte que

$$\mathrm{P}_b^{b'}\mathrm{M}(x)_{b'} = \mathrm{M}(\mathrm{id_E})_b^{b'}\mathrm{M}(x)_{b'} = \mathrm{M}(\mathrm{id_E}(x))_b = \mathrm{M}(x)_b$$

Propriété 13 *Soit* e, e' *deux bases de* E, f *et* f' *deux bases de* F, *puis* $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. *Alors*

$$\mathrm{M}(u)_{f'}^{e'} = \mathrm{P}_{f'}^{f}\mathrm{M}(u)_f^{e}\mathrm{P}_e^{e'}$$

Démonstration.

$$\mathrm{P}_{f'}^{f}\mathrm{M}(u)_f^{e}\mathrm{P}_e^{e'} = \mathrm{M}(\mathrm{id_F})_{f'}^{f}\mathrm{M}(u)_f^{e}\mathrm{M}(\mathrm{id_E})_e^{e'} = \mathrm{M}(\mathrm{Id_F} \circ u \circ \mathrm{Id_E})_{f'}^{e'} = \mathrm{M}(u)_{f'}^{e'}$$

Propriété 14 *Soit* e, e' *deux bases de* E, $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. *Alors*

$$\mathrm{M}(u)_{e'} = \mathrm{P}_{e'}^{e}\mathrm{M}(u)_e\mathrm{P}_e^{e'}$$

Exemple 8 *Pourquoi changer de bases au juste ? On note* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. *On considère la base* $b' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ *de* $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ *définie par*

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On note b *la base canonique de* $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ *de sorte que*

$$\mathrm{P}_b^{b'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut calculer l'inverse de cette matrice, ce qui donne

$$\mathrm{P}_{b'}^{b} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que la matrice de f_A *dans la base* b' *vaut*

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2.2 Matrices équivalentes et rang

Définition 9 *Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, soit $r \in [\![0, \min(n,p)]\!]$, on note J_r la matrice définie par blocs*

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$$

☞ Remarque

En toute rigueur, il faudrait distinguer J_1 dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ et J_1 dans $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K})$, ce que l'on ne fait pas pour ne pas alourdir les notations.

Théorème 5 *Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ de rang r. Alors il existe une base b de E et une base b' de F telle que $\mathrm{M}(u)_{b'}^{b} = \mathrm{J}_r$*

Démonstration. On note $(e_{r+1},\dots,e_p)$ une base du noyau de u (valide car $\dim(\ker(u)) = \dim(\mathrm{E}) - \dim(\mathrm{Im}(u)) = p - r$). Comme on est en dimension finie, on dispose d'un supplémentaire S de $\ker(u)$ dans E, on note $(e_1,\dots,e_r)$ une base de S de sorte que $b = (e_1 \dots, e_p)$ est une base de E. On pose alors pour tout entier j dans $[\![1,r]\!]$, $f_j = u(e_j)$. Il est clair que la famille $(f_1,\dots,f_r)$ appartient à l'image de u. De plus, c'est la famille image de la base $(e_1,\dots,e_r)$ par l'endomorphisme induit u_{S} sur S, dont on a vu qu'il était bijectif. Par conséquent, $(f_1,\dots,f_r)$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$, donc libre dans F, on la complète en base de F, que l'on note $b' = (f_1,\dots,f_n)$.
Récapitulons, soit $j \in [\![1,p]\!]$, si $j \le r$, $u(e_j) = f_j$, la j-ième colonne de $\mathrm{M}(u)_{b'}^{b}$ ne comporte qu'un 1 en j-ième ligne, les autres coefficients sont nuls. Si $j \in [\![r+1,p]\!]$, e_j est dans le noyau de u, donc $u(e_j) = 0$ et la colonne correspondante est nulle.

Définition 10 *Soit (A,B) deux matrices dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont équivalentes lorsque*

$$\exists \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \exists \mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}), \mathrm{A} = \mathrm{PBQ}$$

Propriété 15 *La relation d'équivalence entre matrices est une relation d'équivalence.*

Démonstration.
- Réflexivité : Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{A} = \mathrm{I}_p \mathrm{A} \mathrm{I}_n$ avec I_p et I_n inversibles.
- Symétrie : Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})^2$ tel que $\exists \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}), \exists \mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \mathrm{A} = \mathrm{PBQ}$. Alors $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{Q}^{-1}$ avec P^{-1} et Q^{-1} inversibles, donc B est équivalente à A.
- Transitivité : Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ tel que $\exists \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}), \exists \mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \mathrm{A} = \mathrm{PBQ}$ et $\exists \mathrm{R} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}), \exists \mathrm{S} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \mathrm{B} = \mathrm{RCS}$. Alors $\mathrm{A} = \mathrm{PRCSQ}$, avec PR inversible et SQ inversible. Donc A est équivalente à C.

Théorème 6 *Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $r \in [\![0, \min(n,p)]\!]$. Alors $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = r$ si et seulement si A est équivalente à J_r.*

Démonstration. Supposons $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = r$, ce qui veut dire $\mathrm{rg}(f_{\mathrm{A}}) = r$. D'après ce qui précède, il existe une base b de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et une base b' de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{M}(f_{\mathrm{A}})_{b'}^{b} = \mathrm{J}_r$. On note b_n la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et b_p la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, ce qui entraîne

$$\mathrm{A} = \mathrm{M}(f_{\mathrm{A}})_{b_n}^{b_p} = \mathrm{P}_{b_n}^{b'} \mathrm{M}(f_{\mathrm{A}})_{b'}^{b} \mathrm{P}_{b}^{b_p} = \mathrm{P}_{b_n}^{b'} \mathrm{J}_r \mathrm{P}_{b}^{b_p}$$

Comme les matrices de passages $\mathrm{P}_{b_n}^{b'}$ et $\mathrm{P}_{b}^{b_p}$ sont inversibles (respectivement dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$), A est équivalent à J_r.
Réciproquement supposons que A est équivalente à J_r. On note P et Q inversibles tels que $\mathrm{A} = \mathrm{P}\mathrm{J}_r\mathrm{Q}$. En passant aux endomorphismes canoniquement associés, on obtient $f_{\mathrm{A}} = u \circ v \circ w$ avec u et w isomorphismes puisque P et Q sont inversibles. De plus, $\mathrm{rg}(\mathrm{J}_r) = r$ puisque son image est l'espace engendré par les r premiers vecteurs de la base d'arrivée. Comme la composition par des isomorphismes conserve le rang, on en déduit que $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}(f_{\mathrm{A}}) = \mathrm{rg}(v) = \mathrm{rg}(\mathrm{J}_r) = r$.

Théorème 7 *Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$. Les matrices A et B sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.*

Démonstration. Si A et B sont équivalentes, alors comme la composition par des isomorphismes conserve le rang, elles ont même rang. Réciproquement, si elles ont même rang (notons-le r), alors elles sont tous deux équivalentes à J_r. Par symétrie et transitivité de la relation d'équivalence, A et B sont équivalentes.

Propriété 16 *Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{rg}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{rg}(\mathrm{A})$.*

Démonstration. Notons $r = \mathrm{rg}(A)$, d'après ce qui précède, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ tels que $A = PJ_rQ$. Alors $A^T = (PJ_rQ)^T = Q^TJ_r^TP^T$. Or on a vu que la transposition conservait l'inversibilité, donc $Q^T \in GL_p(\mathbb{K})$ et $P^T \in GL_n(\mathbb{K})$. Enfin, il est clair que J_r^T est la matrice J_r dans $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, donc A^T est de rang r.

Propriété 17 *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *de lignes* $(L_1,\dots,L_n)$. *Alors* $\mathrm{rg}(r) = \dim(\mathrm{Vect}(L_1,\dots,L_n))$.

Démonstration. On remarque les lignes de A sont les colonnes de A^T. Par conséquent,

$$\dim(\mathrm{Vect}(L_1,\dots,L_n)) = \dim(\mathrm{Vect}(C_1(A^T),\dots,C_n(A^T))) = \mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg}(A)$$

Définition 11 *Soit* $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ *de coefficients* $(a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$, $I \subset [\![1,n]\!]$ *et* $J \subset [\![1,p]\!]$. *La matrice* $(a_{i,j})_{i\in I, j\in J}$ *est appelée matrice extraite de* A, *parfois notée* $A_{I,J}$.

Propriété 18 *Avec les mêmes notations que précédemment,* $\mathrm{rg}(A_{I,J}) \leq \mathrm{rg}(A)$.

Démonstration. On note $b = (E_1,\dots,E_p)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $b' = (F_1,\dots,F_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On pose alors $p \in \mathcal{L}(K^p)$ le projecteur sur $\mathrm{Vect}(E_j)_{j\in J}$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(E_j)_{j\notin J}$, puis $\pi = p_{|\mathrm{Vect}(E_j)_{j\in J}}$. On pose de plus $q \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ le projecteur sur $\mathrm{Vect}(F_i)_{i\in I}$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(F_i)_{i\notin I}$, puis $\rho = q^{|\mathrm{Vect}(F_i)_{i\in I}}$. On note alors $u : \mathrm{Vect}(E_j)_{j\in J} \to \mathrm{Vect}(F_i)_{i\in I}, X \mapsto q(AX)$, de sorte que $u = \rho \circ f_A \circ \pi$. Pour tout j dans J,

$$u(E_j) = q(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}F_i) = \sum_{i\notin I} a_{i,j}F_i$$

Par conséquent, la matrice de u dans les bases $(E_i)_{i\in I}$ et $(F_j)_{j\in J}$ est bien la matrice extraite $A_{I,J}$. On en déduit que

$$\mathrm{rg}(A_{I,J}) = \mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(\rho \circ f_A \circ \pi) \leq \mathrm{rg}(f_A) = \mathrm{rg}(A)$$

Théorème 8 *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *Le rang de* A *est le maximum des tailles de matrices carrées inversibles extraites de* A.

Démonstration. Notons $r = \mathrm{rg}(A)$. D'après ce qui précède, il suffit de trouver une matrice extraite de A carrée inversible de rang r. On sait que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C_1,\dots,C_p)$, d'après le théorème de la base extraite, il existe une sous famille $(C_j)_{j\in J}$ de colonnes qui est une base de $\mathrm{Im}(A)$ avec $|J| = r$. La matrice $B = A_{[\![1,n]\!],J}$ est encore de même rang puisque ses colonnes engendrent un sev de dimension r. Or les lignes de B engendrent un sous-espace de dimension r d'après une propriété précédente, il existe donc une sous famille $(L_i)_{i\in I}$ qui est une base de $\mathrm{Vect}(L_1,\dots,L_n)$ avec $|I| = r$. Par conséquent, la matrice $A_{I,J}$ est carrée de taille $r \times r$, de rang r, donc inversible.

Méthode

En échelonnant une matrice par des opérations élémentaires, on détermine son rang la mettant sous la forme J_r. *Rappelons que la multiplication à droite et à gauche par des matrices inversibles ne modifie pas le rang, ce qui est le cas des matrices d'opérations élémentaires.*

Exemple 9 *Échelonnons la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ *pour en déterminer le rang. Les opérations* $L_2 \to L_2 - 5L_1$ *et* $L_3 \to L_3 - 4L_1$ *amènent à la matrice* $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \end{pmatrix}$. *On peut alors effectuer* $L3 \to L_3 - L_2$, *ce qui donne* $A'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Il est alors clair que les lignes de* A *engendrent un sous-espace vectoriel de dimension* 2, *d'où* $\mathrm{rg}(A) = 2$.

Exercice 4 *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Discuter le rang de* $\begin{pmatrix} \lambda-3 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-3 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}$ *selon les valeurs de* λ.

2.3 Matrices semblables et trace

On débute un travail qui sera approfondi l'année prochaine avec l'étude de la réduction des endomorphismes. L'idée est qu'un endomorphisme possède des matrices selons les bases que l'on choisit. Peut-on alors choisir des bases adaptées pour que la matrice obtenue soit la plus simple possible ?

Définition 12 *Soit* $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$*. On dit que* A *et* B *sont semblables lorsque*

$$\exists \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \mathrm{A} = \mathrm{PBP}^{-1}$$

☞ **Remarque**
On peut le comprendre comme un cas particulier de la relation d'équivalence lors de l'étude du rang. On travaille sur des endomorphismes et on requiert que le changement de base soit le même au départ et à l'arrivée.

Propriété 19 *La relation de similitude entre matrices carrées est une relation d'équivalence.*

Démonstration. Laissée à titre d'exercice

Exemple 10 *La seule matrice semblable à* I_n *est* I_n*. Les matrices* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *sont semblables. Notons* (e_1, e_2, e_3) *la base canonique de* $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$*. Il est clair que* $\mathrm{A}e_1 = \mathrm{B}e_1 = e_1$*. On pose alors* $e_1' = e_1$*. On cherche un vecteur* e_2' *tel que* $\mathrm{A}e_2' = 2e_2'$*, sachant que* $\mathrm{A}e_2 = 2e_2 + e_1$*, l'idée est de chercher* e_2' *sous la forme* $e_2 + \lambda e_1$ *avec* λ *un réel à déterminer. Si* λ *satisfait* $\mathrm{A}e_2' = e_2'$*, ce qui amène* $\mathrm{A}e_2 + \lambda \mathrm{A}e_1 = 2e_2 + 2\lambda e_1$*, soit* $e_1 + \lambda e_1 = 2\lambda e_1$*. On constate que* $\lambda = 1$ *est un choix convenable, et on pose* $e_2' = e_2 + e_1$*. On cherche enfin un vecteur* e_3' *tel que* $\mathrm{A}e_3' = 3e_3'$*. On le cherche sous la forme* $e_3 + \mu e_2 + \nu e_1$*, et on vérifie que* $e_3' = e_3 + e_2 + e_1$ *vérifie* $\mathrm{A}e_3' = \mathrm{A}e_3 + \mathrm{A}e_2 + \mathrm{A}e_1 = e_1 + e_2 + 3e_3 + 2e_2 + e_1 + e_1 = 3e_3 + 3e_2 + 3e_1 = 3e_3'$*. La matrice de la famille* (e_1', e_2', e_3') *dans la base canonique vaut alors*

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice triangulaire possède des coefficients diagonaux tous non nuls, donc est inversible. On en tire que la famille (e_1', e_2', e_3') *est une une base de* $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$*. On peut calculer son inverse via* $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et vérifier* $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{B}$*.*

Propriété 20 *Soit* $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$*. Elles sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases.*

✎ **Méthode**
Chercher une matrice de passage peut être fastidieux, on peut essayer de résoudre $\mathrm{AP} = \mathrm{PB}$ *d'inconnue* P *inversible, mais cela ne possède pas de solution unique en général. Il est plus rapide de chercher des bases adaptées pour passer d'une matrice à l'autre.*

Exercice 5 *Montrer que les matrices élémentaires* $(\mathrm{E}_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ *sont toutes semblables entre elles.*

Définition 13 *Soit* $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. On appelle trace de* A*, notée* $tr(\mathrm{A})$ *la somme de ses coefficients diagonaux.*

Propriété 21 *L'application* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \mathrm{A} \mapsto tr(\mathrm{A})$ *est linéaire.*

Démonstration. Si l'on note $(\mathrm{E}_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \neq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(\mathrm{E}^*_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ sa base duale. L'application trace vérifie $\mathrm{tr} = \sum_{i=1}^n \mathrm{E}^*_{i,i}$.

Propriété 22 *Soit* $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$*. Alors* $tr(\mathrm{AB}) = tr(\mathrm{BA})$

Démonstration. Notons $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$. Alors pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, $(AB)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i}$. On en tire

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}(AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{k,i}a_{k,i}\right) = \sum_{k=1}^{n}(BA)_{k,k} = \mathrm{tr}(BA)$$

Propriété 23 *Soit* A *et* B *deux matrices semblables, alors* $tr(A) = tr(B)$.

Démonstration. Soit P une matrice inversible telle que $A = PBP^{-1}$. Alors

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(PBP^{-1}) = \mathrm{tr}(BP^{-1}P) = \mathrm{tr}(B)$$

☞ **Remarque**
On dit que la trace est un invariant de similitude.

⚠ **Attention**
On a vu que le rang permettait de caractériser les classes d'équivalence. La trace ne permet pas de caractériser les classes de similitude (sauf pour $n = 1$). Considérons la matrice I_n et une matrice de transvection $I_n + E_{1,2}$. Elles ont toutes deux même trace, à savoir n. Pourtant, elles ne sont pas semblables. La seule matrice semblable à I_n est $I_n \neq I_n + E_{1,2}$.

Définition 14 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle trace de u, la trace de l'une de ses matrices. Elle est notée $tr(u)$.*

☞ **Remarque**
Définition légitime puisque toutes les matrices de u ont la même trace d'après ce qui précède.

Propriété 24 *L'application $\mathcal{L}(E) \to \mathbb{K}, u \mapsto tr(u)$ est linéaire et pour tous endomorphismes u, v, $tr(uv) = tr(vu)$.*

Démonstration. Soit b une base de E, alors $M(uv)_b = M(u)_b M(v)_b$. On en déduit que

$$\mathrm{tr}(uv) = \mathrm{tr}(M(uv)_b) = \mathrm{tr}(M(u)_b M(v)_b) = \mathrm{tr}(M(v)_b M(u)_b) = \mathrm{tr}(M(vu)_b) = \mathrm{tr}(vu)$$

Propriété 25 *Soit p un projecteur de* E. *Alors $tr(p) = \mathrm{rg}(p)$.*

Démonstration. Notons $r = \mathrm{rg}(p)$. Comme p est un projecteur, on sait que $\ker(p) \oplus \ker(p - \mathrm{id}_E) = E$, donc on dispose de base $(e_1, \ldots, e_{n-r})$ de $\ker(u)$ et $(e_{n-r+1}, \ldots, e_n)$ de $\mathrm{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{id}_E)$. Dans cette base, la matrice de p vaut $\begin{pmatrix} 0_{n-r,n-r} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & I_r \end{pmatrix}$. Mais alors la trace de p vaut la trace de cette matrice qui vaut r.

Exercice 6 *Soit* G *un groupe fini, $f : G \to GL_n(\mathbb{C})$ un morphisme de groupes. Montrer que $M = \sum_{g\in G} f(g)$ est un projecteur et en déduire que $\sum_{g\in G} Tr(f(g))$ est un entier multiple de $|G|$.*