

Espaces vectoriels

Cornou Jean-Louis

17 mars 2024

Nous allons formaliser une bonne fois pour toutes ces histoires de linéarité que nous avons déjà rencontré sur les matrices, les suites, les polynômes, etc. On fixe \mathbb{K} un corps. La plupart du temps, il s'agit de \mathbb{R}, \mathbb{C} ou un sous-corps de \mathbb{C} . L'algèbre linéaire émerge via l'étude des systèmes linéaires, puis se déploie dans tous les champs des mathématiques, y compris l'analyse.

1 Espaces vectoriels

1.1 Opérations dans les espaces vectoriels, exemples fondamentaux

Définition 1 On appelle \mathbb{K} -espace vectoriel (ou espace vectoriel sur \mathbb{K}) tout triplet $(E, +, \cdot)$ vérifiant les choses suivantes :

- E est un ensemble non vide.
- $+$ est une loi de composition interne sur E telle que $(E, +)$ est un groupe commutatif.
- \cdot est une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E telle que

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x, 1x = x, (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$

Notation

Pour l'instant, on distingue le neutre de $(E, +)$ en le notant 0_E du neutre additif de \mathbb{K} que l'on note 0_K . Un bon étudiant pourra toutefois les noter 0 puisqu'il saura préciser lequel est lequel dans chaque situation. Les éléments de E sont appelés vecteurs, mais on ne note pas de flèche au dessus d'eux, sauf peut-être dans le cadre géométrique.

Propriété 1 (Règles de calcul dans les espaces vectoriels) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$. Alors

- $\lambda 0_E = 0_E$.
- $0_K x = 0_E$
- $-x = (-1)x$
- $\lambda x = 0_E \iff (\lambda = 0_K \vee x = 0_E)$.

Démonstration. —

$$\begin{aligned} \lambda 0_E &= \lambda(0_E + 0_E) \quad \text{car } 0_E \text{ est le neutre de l'addition dans } E \\ &= \lambda 0_E + \lambda 0_E \quad \text{car la multiplication externe est distributive sur l'addition de } E \end{aligned}$$

Comme $(E, +)$ est un groupe commutatif et $\lambda 0_E$ est un élément de E , on dispose de son symétrique pour l'addition, que l'on note $-\lambda 0_E$. Ainsi,

$$0_E = \lambda 0_E + (-\lambda 0_E) = (\lambda 0_E + \lambda 0_E) + (-\lambda 0_E)$$

Par associativité de l'addition dans E , on en déduit

$$0_E = \lambda 0_E + (\lambda 0_E + (-\lambda 0_E)) = \lambda 0_E + 0_E = \lambda 0_E$$

- On utilise le fait que 0_K est le neutre de l'addition dans \mathbb{K} , ce qui donne $0_K x = (0_K + 0_K)x$, puis par distributivité, $0_K x = 0_K x + 0_K x$. On utilise alors le symétrique de $0_K x$ pour l'addition dans E , ce qui donne par associativité $0_E = 0_K x$.
- Cela se passe comme dans les anneaux.

$$\begin{aligned}
 (-1)x + x &= (-1)x + 1x \quad \text{d'après les axiomes des espaces vectoriels} \\
 &= (-1 + 1)x \quad \text{d'après l'axiome de distributivité} \\
 &= 0_K x \quad \text{puisque } -1 \text{ est le symétrique de } 1 \text{ dans } K \\
 &= 0_E \quad \text{d'après la propriété précédente}
 \end{aligned}$$

Comme $(E, +)$ est commutatif, cela suffit à démontrer que $(-1)x$ est le symétrique pour la loi additive de E , i.e $(-1)x = -x$.

- Le sens indirect a déjà été prouvé dans les deux premiers points. Démontrons le sens direct. Supposons que $\lambda x = 0_E$ et $\lambda \neq 0_K$. Comme \mathbb{K} est un corps, on dispose de l'inverse multiplicatif de λ dans \mathbb{K} , que l'on note $1/\lambda$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 x &= 1x \quad \text{d'après les axiomes des espaces vectoriels} \\
 &= \left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right)x \quad \text{par définition de l'inverse dans } K \\
 &= \frac{1}{\lambda}(\lambda x) \quad \text{d'après les axiomes des espaces vectoriels} \\
 &= \frac{1}{\lambda}0_E \quad \text{par hypothèse sur } \lambda x \\
 &= 0_E \quad \text{d'après la première règle de calcul établie}
 \end{aligned}$$

Propriété 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit l'ensemble \mathbb{K}^n des n -uplets des opérations suivantes : soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, puis $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Muni de ces opérations, \mathbb{K}^n est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Démonstration. C'est pénible, mais il faut bien le faire une fois.

- \mathbb{K}^n est bien non vide.
- $(\mathbb{K}^n, +)$ n'est rien d'autre que le groupe produit n fois de $(\mathbb{K}, +)$. Comme $(\mathbb{K}, +)$ est commutatif, $(\mathbb{K}^n, +)$ est également commutatif.
- Soit $(x, y) \in E^2$, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comme le produit est associatif dans \mathbb{K} , $\lambda(\mu x_i) = (\lambda\mu)x_i$. Comme 1 est le neutre multiplicatif de \mathbb{K} , $1x_i = x_i$. D'autre part, comme \mathbb{K} est un anneau, on a la distributivité à droite et gauche, donc

$$(\lambda + \mu)x_i = \lambda x_i + \mu x_i \quad \text{et} \quad \lambda(x_i + y_i) = \lambda x_i + \lambda y_i$$

Comme cela est valable pour tout entier i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, on retrouve bien tous les axiomes

$$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x, 1x = x, (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$

Remarque

Le plan \mathbb{R}^2 et l'espace \mathbb{R}^3 sont des espaces vectoriels qui permettent de visualiser une bonne partie des problèmes d'algèbre linéaire.

Propriété 3 Soit G un \mathbb{K} -espace vectoriel et X un ensemble non vide. On note $E = \mathcal{F}(X, G) = G^X$ l'ensemble des applications de X dans G . On le munit des opérations suivantes : soit $(f, g) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$f + g : X \rightarrow G, x \mapsto f(x) + g(x)$$

$$\lambda f : X \rightarrow G, x \mapsto \lambda f(x)$$

Muni de ces opérations, E est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Démonstration. Démo synthétique :

- X est non vide, donc E aussi.
- L'addition est bien une lci, puisque $f + g$ est une application de X dans G
- L'application nulle $x \mapsto 0_G$ est le neutre de la loi $+$ de E .
- L'associativité de la loi $+$ de E résulte de l'associativité de celle de $(G, +)$.
- L'application $-f : x \mapsto -f(x)$ fournit un symétrique adéquat d'après les symétriques dans $(G, +)$.
- La commutativité découle de celle dans $(G, +)$.
- Soit $x \in X$, soit $(f, g) \in E^2$, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors, comme G est espace vectoriel, on a

$$\lambda(\mu f(x)) = (\lambda\mu)f(x), 1x = x, (\lambda + \mu)f(x) = \lambda f(x) + \mu f(x), \lambda(f(x) + g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x)$$

Toutes ces propriétés se transportent bien sur les applications.

Ainsi, E est bien un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Propriété 4 Soit L un surcorps de \mathbb{K} , alors la multiplication interne $L \times L \rightarrow L$ induit une multiplication externe $\mathbb{K} \times L \rightarrow L$ qui munit L d'une structure de \mathbb{K} -espace vectoriel.

Démonstration. L est bien sûr non vide, $(L, +)$ est un groupe commutatif, puisque L est un corps. Tous les axiomes des espaces vectoriels résultent de l'associativité du produit dans L , et de la distributivité puisque L est un corps.

Exemple 1 On peut voir \mathbb{C} comme un \mathbb{R} -espace vectoriel, ou encore \mathbb{R} comme un \mathbb{Q} -espace vectoriel. Pire, on peut construire des corps en s'inspirant de techniques vectorielles.

Propriété 5 L'espace nul $E = \{0\}$ est muni d'une unique structure de \mathbb{K} -espace vectoriel. $0 + 0 = 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda 0 = 0$.

Démonstration. On sait déjà que le groupe à un élément possède une unique structure de groupe. La multiplication externe vérifie trivialement toutes les autres conditions.

Propriété 6 Soit n et p deux entiers naturels non nuls. Alors l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes, muni des opérations vues plus tôt dans l'année, est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Démonstration. On pose $X = \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$. Alors $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ n'est rien d'autre que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Comme vu précédemment, c'est un espace vectoriel sur \mathbb{K} .

Propriété 7 Soit n un entier naturel non nul, E_1, E_2, \dots, E_n une famille de n \mathbb{K} -espaces vectoriels. On munit alors l'espace $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ des opérations suivantes : soit $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

Ces opérations font de E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On l'appelle espace vectoriel produit des E_1, \dots, E_n , que l'on note $\prod_{i=1}^n E_i$ ou $E_1 \times \dots \times E_n$.

Démonstration. — Aucun des E_i n'est vide, donc leur produit cartésien est non vide.

- La structure additive sur E n'est autre que celle du groupe produit, donc $(E, +)$ est un groupe. Il hérite de la commutativité de chacun des E_i , donc $(E, +)$ est un groupe commutatif.
- Tous les autres axiomes sont vérifiés composante par composante, donc vrais sur E .

1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 2 Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et $F \subset E$ une partie non vide de E . On dit que F est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$ (en abrégé un sev de E) lorsque

- F est stable par les lois $+$ et \cdot : $\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, x + y \in F, \lambda \cdot x \in F$.
- F muni des lois induites est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Théorème 1 (Caractérisation des sous-espaces vectoriels) Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et F une partie de E . Alors F est un sev de E si et seulement si $0_E \in F$ et F est stable par combinaison linéaire : $\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, x + \lambda y \in F$.

Démonstration. Supposons que F est un sous-espace vectoriel de E . Alors en particulier, $(F, +)$ est un sous-groupe de $(E, +)$, donc F contient le neutre additif de E , i.e. 0_E . Soit $(x, y) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Comme F est stable par la multiplication externe, λy appartient à F . De plus, F est stable par l'addition, donc $x + \lambda y$ appartient à F . Réciproquement, supposons que F contient 0_E et satisfait la condition annoncée et montrons que F est un sous-espace vectoriel de E . Soit $(x, y) \in F^2$ et $\lambda = 1 \in \mathbb{K}$, alors $x + y$ appartient à F . D'autre part, en choisissant $x = 0_E$ puisqu'on sait que 0_E appartient à F et $\lambda = -1 \in \mathbb{K}$, on a d'après les règles de calculs dans les ev, $-y$ appartient à F . Comme F est non vide, cela suffit à montrer que $(F, +)$ est un sous-groupe de E . Il hérite en outre de la commutativité de la loi $+$ dans E . Tous les autres axiomes sont valables sur E , donc a fortiori valables sur F . Conclusion, F est un sous-espace vectoriel de E .

Propriété 8 Une autre caractérisation est la suivante : F est un sev de E si et seulement si F est non vide et

$$\forall (x, y) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda x + \mu y \in F$$

Démonstration. Le sens direct se démontre comme précédemment. Le sens réciproque nécessite une étape supplémentaire. Comme F est non vide, on dispose d'un élément x dans F . On choisit alors $\lambda = 0_K$ et $\mu = 0_K$, puis $y = x$ qui est bien dans F . On en déduit que $0_K x + 0_K x$ appartient à F . D'après les règles de calcul dans les espaces vectoriels, on en déduit que 0_K appartient à F . Il suffit alors d'appliquer la propriété précédente.

Exemple 2 Prenons l'espace $E = \mathbb{R}^3$, on pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y + 3z = 0\}$. Alors F est un sev de E . Le triplet $(0, 0, 0)$ appartient à F . Soit $((x, y, z), (x', y', z')) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') + 3(\lambda z + \mu z') = \lambda(x - y + 3z) + \mu(x' - y' + 3z') = \lambda 0 + \mu 0 = 0$$

donc $\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z') \in F$ et F est un sev de \mathbb{R}^3 . Plus généralement, les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 sont de trois types : l'espace nul réduit à $\{(0, 0, 0)\}$, les droites passant par $0_{\mathbb{R}^3}$, les plans passant par le neutre additif de \mathbb{R}^3 , l'espace entier. Notez que le plan affine d'équation $z = 1$ n'est pas un sev de E , il ne contient même pas $0_{\mathbb{R}^3}$.

Exemple 3 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ distinct de $(0, 0, 0)$. Alors l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | ax + by + cz = 0\}$ est un sev de \mathbb{R}^3 distinct de \mathbb{R}^3 appelé plan vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Exemple 4 L'ensemble des suites à support fini $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ est un sev de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On a vu que $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel, puisque \mathbb{N} est non vide et \mathbb{K} est lui-même un \mathbb{K} -espace vectoriel. La suite nulle est bien à support fini. Soit u, v deux suites à support fini et λ, μ deux scalaires. Alors, en notant N_u et N_v des entiers naturels tels que

$$\forall n \geq N_u, u_n = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq N_v, v_n = 0$$

On en déduit que

$$\forall n \geq \max(N_u, N_v), (\lambda u + \mu v)_n = \lambda u_n + \mu v_n = 0$$

Ainsi, $\lambda u + \mu v$ est à support fini, et $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ est un sev de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Exemple 5 $\mathbb{K}[X]$ est un sev de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $K_n[X]$ est un sev de $\mathbb{K}[X]$. Le polynôme nul est bien dans $K_n[X]$. Soit $(P, Q) \in K_n[X]^2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors

$$d(\lambda P + \mu Q) \leq \max(d(\lambda P), d(\mu Q)) \leq \max(d(P), d(Q)) \leq \max(n, n) \leq n$$

Donc $\lambda P + \mu Q$ est de degré au plus n , donc dans $K_n[X]$.

Exemple 6 Soit I un intervalle réel non réduit à un point. Prenons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = C(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de I dans \mathbb{R} continues. Alors, muni des mêmes opérations qu'en exemple $\mathcal{F}(X, G)$ avec $X = \mathbb{R}$ et $G = \mathbb{R}$, E possède une structure de \mathbb{R} -espace vectoriel. La fonction nulle est continue. Se référer au chapitre sur les fonctions continues pour la stabilité par combinaison linéaire. On peut généraliser l'exemple aux fonctions continues en un point, dérivables 12 fois en un point a de I , de classe C^∞ .

Exemple 7 L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène est un sev de $E = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Prenons par exemple l'équation différentielle $y^{(3)}(x) + e^{x^2} y''(x) - \frac{1}{1+x^2} y'(x) = 0$. Par contre, les solutions de l'équation différentielle $y' - y^2 = 0$ ne forment pas un sous-espace vectoriel de E .

Exemple 8 L'ensemble des suites réelles convergentes est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exemple 9 L'ensemble des suites réelles monotones n'est pas un sev des suites réelles.

Exemple 10 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$. L'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ est un sev de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Propriété 9 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $(F_i)_{i \in I}$ une famille non vide de sous-espaces vectoriels de E . Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration. Notons $F = \bigcap_{i \in I} F_i$. Pour tout i dans I , $0_E \in F_i$, donc $0_E \in F$. Soit $(x, y) \in F^2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, i \in I$. Comme F_i est un sev de E , alors $\lambda x + \mu y \in F_i$. Comme cela est vrai pour tout indice i dans I , $\lambda x + \mu y \in F$. Ainsi, F est un sev de E .

⚠ Attention

C'est faux pour l'union. Attendez-vous à des exercices dessus.

Exercice 1 Dans $E = \mathbb{R}^3$, on note $F_1 = \{(x, y, z) \in E | x + y + z = 0\}$ et $F_2 = \{(x, y, z) \in E | x - 2y = 0\}$. Représenter les sev F_1, F_2 et $F_1 \cap F_2$. De quels types sont-ils ?

Définition 3 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et A une partie de E . On note

$$\text{Vect}(A) = \bigcap_{\substack{F \text{ sev de } E \\ A \subset F}} F$$

l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent A . On appelle $\text{Vect}(A)$ le sous-espace vectoriel engendré par A .

Propriété 10 Avec les notations précédentes, $\text{Vect}(A)$ est un sous-espace vectoriel de E , et c'est le plus petit (au sens de l'inclusion) qui contient A , i.e pour tout sev F de E , $F \supset A \Rightarrow F \supset \text{Vect}(A)$.

Démonstration. L'intersection est non vide, puisque E est un espace vectoriel qui contient A . Comme intersection de sev de E , $\text{Vect}(A)$ est un sous-espace de E . Montrons à présent qu'il s'agit du plus petit qui contient E . Soit F un sev de E qui contient A , alors

$$\text{Vect}(A) = F \cap \bigcap_{\substack{G \text{ sev de } E \\ A \subset G \\ G \neq F}} G \subset F$$

⚠ Attention

Il ne suffit pas que F contienne A pour contenir $\text{Vect}(A)$, il ne faut pas oublier de vérifier que F est un sev de E .

Exemple 11 $\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$, $\text{Vect}(\{a\}) = \mathbb{K}a = \{\lambda a | \lambda \in \mathbb{K}\}$. L'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ est $\text{Vect}(\cos, \sin)$.

⚠ Attention

Soit A, B deux parties de E . Alors $\text{Vect}(A \cap B)$ ne vaut pas nécessairement $\text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$. Dans $E = \mathbb{R}^2$, prenons $A = \{(1, 0), (0, 1)\}$ et $B = \{(1, 1)\}$. Alors $A \cap B = \emptyset$, donc $\text{Vect}(A \cap B) = \{0\}$. Pourtant, $\text{Vect}(A) = E$, de sorte que $\text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B) = \text{Vect}(B) = (1, 1)\mathbb{K}$.

Propriété 11 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, A et B deux parties de E .

- A est un sev de E ssi $A = \text{Vect}(A)$.
- Si $A \subset B$, alors $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.

Démonstration. — On a vu que $A \subset \text{Vect}(A)$. Si $\text{Vect}(A) = A$, alors comme $\text{Vect}(A)$ est un sev, A est un sev. Réciproquement, si A est un sev de E , alors c'est un sev de E contenant A , donc il contient $\text{Vect}(A)$ puisque $\text{Vect}(A)$ est le plus petit sev qui contient A . Cela suffit à établir $A = \text{Vect}(A)$.

- On sait que $B \subset \text{Vect}(B)$, ainsi, $A \subset \text{Vect}(B)$. Or, $\text{Vect}(B)$ est un sev de E , c'est donc un sev de E qui contient A , donc il contient le plus petit sev de E qui contient A , i.e. $\text{Vect}(B) \supset \text{Vect}(A)$.

⚠ Attention

La réciproque du second point est fausse. $A = \{(1, 1)\}$ et $B = \{(2, 2)\}$ engendrent le même sev, mais sont des parties non incluses l'une dans l'autre.

1.3 Familles finies de vecteurs

On fixe E un \mathbb{K} -espace vectoriel

1.3.1 Familles génératrices

Définition 4 Soit n un entier naturel non nul et (x_1, \dots, x_n) un n -uplet de E . On appelle combinaison linéaire des $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ tout élément x de E de la forme

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ un n -uplet de \mathbb{K} .

Théorème 2 Soit n un entier naturel non nul et (x_1, \dots, x_n) un n -uplet de E . On note $A = \{x_1, \dots, x_n\}$. Alors $\text{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$. Autrement dit,

$$\text{Vect}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

Démonstration. Notons $F = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$. On montre tout d'abord que F est un sev de E et qu'il contient A . On choisit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$, ce qui assure que 0_E appartient à F . Soit $(x, y) \in F^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On note $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $y = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i$. On en déduit que

$$\lambda x + \mu y = \lambda \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) + \mu \left(\sum_{i=1}^n \mu_i x_i \right) = \sum_{i=1}^n (\lambda \lambda_i + \mu \mu_i) x_i$$

Ainsi, le n -uplet de scalaires $(\lambda \lambda_i + \mu \mu_i)_{1 \leq i \leq n}$ assure que $\lambda x + \mu y$ appartient à F . De plus, soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors en choisissant le n -uplet $(\lambda_j)_{1 \leq j \leq n} = (\delta_{i,j})_{1 \leq j \leq n}$, F contient $\sum_{j=1}^n \delta_{i,j} x_j = x_i$. Par conséquent, F contient A . Ainsi, comme F est un sev de E , F contient $\text{Vect}(A)$.

De plus, $\text{Vect}(A)$ un sev de E qui contient tous les $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$. Comme $\text{Vect}(A)$ est stable par combinaison linéaire, il contient toutes les combinaisons linéaires $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ pour $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, donc $\text{Vect}(A)$ contient F .

En conclusion, $\text{Vect}(A) = F$.

Définition 5 Soit n un entier naturel non nul et $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie de vecteurs de E . On dit que cette famille est génératrice lorsque $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = E$. Il revient au même de dire que tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Remarque

On dit également que la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ engendre E .

Exemple 12 La famille $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$. La famille $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ engendre $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple 13 Soit $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$, c'est un sev de \mathbb{R}^3 . On cherche une famille génératrice de P . Géométriquement, on voit que P est un plan, donc que deux vecteurs bien choisis devraient suffire. On choisit $e_1 = (1, -1, 0)$, puis $e_2 = (1, 0, -1)$. Montrons que (e_1, e_2) engendre P . Soit $(x, y, z) \in P$, alors

$$(x, y, z) = (x, y, -x - y) = (x, 0, -x) + (0, y, -y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) = x e_2 + y e_1$$

Par conséquent, $P \subset \text{Vect}(e_1, e_2)$. L'autre inclusion vient du fait que e_1 et e_2 appartiennent à P .

Définition 6 Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de E .

- On appelle sur-famille de $(x_i)_{i \in I}$ toute famille $(y_j)_{j \in J}$ telle que $I \subset J$ et $\forall i \in I, x_i = y_i$.
- On appelle sous-famille de $(x_i)_{i \in I}$ toute famille $(z_k)_{k \in K}$ telle que $K \subset I$ et $\forall k \in K, z_k = x_k$.

Propriété 12 Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille génératrice de E . Alors toute sur-famille de $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est génératrice.

Démonstration. Soit $(y_j)_{j \in J}$ une sur-famille et $x \in E$. Alors comme $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est génératrice, il existe un n -uplet de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tel que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. Alors,

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \sum_{j \in J \setminus \llbracket 1, n \rrbracket} 0_K y_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i + \sum_{j \in J \setminus \llbracket 1, n \rrbracket} 0_K y_j$$

Ainsi, la sur-famille considérée est génératrice.

Propriété 13 Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille génératrice de E et σ une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Alors $(x_{\sigma(i)})_{1 \leq i \leq n}$ est génératrice.

Démonstration. Découle de la commutativité de l'addition dans les espaces vectoriels.

Exercice 2 Soit $a \in \mathbb{K}$ et $E = \mathbb{K}[X]$. La famille $((X - a)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est-elle génératrice dans E ? La famille $((X - a)^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est-elle génératrice dans $\mathbb{K}(X)$?

Propriété 14 Soit p un entier naturel non nul et (e_1, \dots, e_p) une famille finie de E .

— Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, alors $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \text{Vect}(e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_p)$.

— Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, i, j deux entiers distincts dans $\llbracket 1, p \rrbracket$, alors $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i + \lambda e_j, \dots, e_p)$.

1.3.2 Familles libres

Définition 7 Soit n un entier naturel non nul et $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie de vecteurs de E . On dit que cette famille est libre lorsque

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = 0$$

Autrement dit, la seule combinaison linéaire nulle des $(x_i)_i$ est la combinaison triviale.

Exemple 14 Dans \mathbb{R}^3 , on considère les vecteurs $e_1 = (1, -1, 0)$, $e_2 = (1, 1, 1)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. Montrons qu'ils forment une famille libre. Soit (x, y, z) un triplet de réels tels que $xe_1 + ye_2 + ze_3 = 0$. Montrons que $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. L'égalité de vecteurs s'écrit encore $(x + y, -x + y, y + z) = (0, 0, 0)$, ce que l'on peut mettre sous forme de système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On peut le résoudre à la main, la somme des deux premières lignes donne $2y = 0$, soit $y = 0$. On en déduit $x = 0$ puis $z = 0$. Ainsi la famille (e_1, e_2, e_3) est libre.

Exemple 15 Soit (a_1, \dots, a_n) une famille de n réels distincts rangés par ordre croissant (donc strictement croissant). Pour tout entier i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-a_i x}$. Montrons que la famille (f_1, \dots, f_n) est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$. Montrons que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = 0$ en procédant par l'absurde. Supposons qu'il existe un entier i tel que $\lambda_i \neq 0$. On note alors $j = \min\{i | \lambda_i \neq 0\}$ (possible puisque cette partie est non vide). On a alors

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = \sum_{i=j}^n \lambda_i f_i = 0$$

Alors

$$\sum_{i=j}^n \lambda_i e^{a_i x} = \lambda_j e^{a_j x} \left(1 + \sum_{i=j+1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_j} e^{(a_i - a_j)x} \right) = 0$$

Ainsi, pour tout réel x ,

$$1 + \sum_{i=j+1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_j} e^{(a_i - a_j)x} = 0$$

Or la limite de cette fonction en $-\infty$ vaut 1 puisque $\forall i > j, a_i > a_j$. D'où une absurdité et la liberté de la famille (f_1, \dots, f_n) .

Exemple 16 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe un entier p non nul tel que $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$. Montrons alors que la famille (I_n, A, \dots, A^{p-1}) est libre. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k A^k = 0$. En multipliant par A^{p-1} , on obtient $\lambda_0 A^{p-1} + 0 = 0$, donc $\lambda_0 = 0$. On poursuit par récurrence. Soit j un entier dans $\llbracket 0, p-2 \rrbracket$ tel que $\forall k \leq j, \lambda_k = 0$. Alors

$$\sum_{k=j+1}^p \lambda_k A^k = 0$$

On multiplie à gauche par $A^{p-1-j-1}$, ce qui donne

$$\lambda_{j+1} A^{p-1} + 0 = 0$$

Comme $A^{p-1} \neq 0$, on en déduit que $\lambda_{j+1} = 0$. Ainsi, par récurrence, $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) = (0, \dots, 0)$, et la famille est libre.

Définition 8 Soit n un entier naturel non nul et $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie de vecteurs de E . On dit que cette famille est liée lorsqu'elle n'est pas libre. Autrement dit,

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}, \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$$

Exemple 17 Une famille contenant le vecteur nul est liée. Si deux éléments d'une famille sont égaux, la famille est liée. Dans \mathbb{R}^2 , la famille $((1, 0), (0, 1), (1, 1))$ est liée puisque $(1, 0) + (0, 1) - (1, 1) = (0, 0)$. La réciproque est fautive, il ne suffit pas que tous les éléments d'une famille soient deux à deux distincts pour que la famille soit libre.

Propriété 15 Soit n un entier naturel non nul et $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie de vecteurs de E . On suppose que l'un des éléments de cette famille est combinaison linéaire des autres, i.e

$$\exists j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n-1}, x_j = \sum_{i \neq j} \lambda_i x_i$$

Alors cette famille est liée.

Démonstration. Avec les notations plus haut, il suffit de considérer le n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, -1, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ qui vérifie clairement

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$$

Ce n -uplet est non nul puisque sa j composante vaut -1 qui n'est pas nul. Ainsi, la famille est liée.

Propriété 16 Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille libre de E et σ une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Alors $(x_{\sigma(i)})_{1 \leq i \leq n}$ est une famille libre.

Propriété 17 Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille libre. Alors toute sous-famille est libre.

Démonstration. Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ une sous-famille (quitte à réordonner les éléments de la famille initiale). Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ un p -uplet de scalaires tel que $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = 0$. On considère alors le n -uplet de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\lambda_1, \dots, \lambda_p, 0, \dots, 0)$. Celui-ci vérifie $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$. D'après la liberté de $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$, on en déduit que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = 0$. En particulier, $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_i = 0$, ce qui prouve que la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est libre.

Propriété 18 Soit n un entier naturel non nul et (P_1, \dots, P_n) une famille de n polynômes dans $\mathbb{K}[X]$. On suppose que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P_i \neq 0$, puis que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow d(P_i) \neq d(P_j)$. On dit que la famille est échelonnée. Alors la famille (P_1, \dots, P_n) est libre.

Démonstration. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i = 0$. Supposons qu'il existe un scalaire λ_i non nul, on note j un entier tel que $\lambda_j \neq 0$ et $d(P_j)$ maximal. Alors $\sum_{i \neq j, \lambda_i \neq 0} \lambda_i P_i + \lambda_j P_j = 0$. Or le degré de $P = \sum_{i \neq j, \lambda_i \neq 0} \lambda_i P_i + \lambda_j P_j$ vaut le degré de P_j puisque $d(\lambda_j P_j) = d(P_j)$. De plus, comme les degrés sont distincts et $d(P_j)$ est maximal, $\sum_{i \neq j, \lambda_i \neq 0} \lambda_i P_i < d(P_j)$. Mais alors P est de degré $-\infty$ puisqu'il est nul, ce qui contredit la non-nullité de λ_j . Conclusion, tous les scalaires λ_i sont nuls et la famille est libre.

⚠ Attention

Il existe des familles libres de polynômes de degrés non échelonnés. Prenez par exemple la famille $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ des polynômes interpolateurs de Lagrange associés à des réels distincts (x_1, \dots, x_n) . Ces polynômes sont tous de degré $n-1$ et vérifient $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, L_i(x_j) = \delta_{i,j}$. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = 0$. Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on évalue le polynôme précédent en x_j , ce qui implique

$$0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i(x_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{i,j} = \lambda_j$$

On en déduit que tous les scalaires considérés sont nuls, donc que la famille considérée est libre.

Propriété 19 Soit (e_1, \dots, e_n) une famille libre de E et $x \in E$. Alors la famille (x, e_1, \dots, e_n) est liée si et seulement si $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.

Démonstration. Le sens indirect a déjà été prouvé. Supposons (x, e_1, \dots, e_n) liée. On dispose de $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ tel que $\lambda_0 x + \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$. Si $\lambda_0 = 0$, alors on a $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$, ce qui entraîne par liberté de la famille (e_1, \dots, e_n) , $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = 0$. Cela contredit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$. Ainsi, $\lambda_0 \neq 0$, puis $x = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_0}\right) e_i \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.

⚠ Attention

Sans hypothèse de liberté de la famille (e_1, \dots, e_n) , le sens direct est faux. Il suffit de prendre la famille nulle et x un vecteur non nul.

1.3.3 Bases

Définition 9 Soit n un entier naturel non nul et $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie de vecteurs de E . On dit que cette famille est une base de E lorsqu'elle est à la fois libre et génératrice.

Exemple 18 Soit n un entier naturel. On considère la famille $(1, X^1, \dots, X^n)$, alors elle est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$ et libre puisqu'échelonnée. C'est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

📖 Remarque

L'un des enjeux majeurs de l'algèbre linéaire est de construire des bases, ou mieux encore, une base adaptée à un problème donné.

Propriété 20 (Bases canoniques) — Soit $n \in \mathbb{N}$, la famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ appelée base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

- Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, la famille $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note e_i le vecteur de coordonnées nulles sauf celle de place i qui vaut 1. Alors la famille (e_1, \dots, e_n) est une base de \mathbb{K}^n appelée base canonique de \mathbb{K}^n .

Démonstration. — Déjà fait

- Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j} E_{i,j}$, donc la famille considérée est génératrice. Soit $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ un np -uplet de scalaires tel que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \lambda_{i,j} E_{i,j} = 0$. Alors la matrice $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ est nulle, donc tous ses coefficients sont nuls, i.e $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_{i,j} = 0$. Ainsi, cette famille est libre.
- Il s'agit de la même démonstration que précédemment pour $p = 1$.

Propriété 21 Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et x dans E . Alors

$$\exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$$

Les scalaires λ_i sont appelés les coordonnées de x dans la base B , les vecteurs $\lambda_i e_i$ sont appelées les composantes de x dans la base B .

Démonstration. Comme la famille (e_1, \dots, e_n) est génératrice, on sait qu'il existe un tel n -uplet dans \mathbb{K}^n . Montrons à présent son unicité. Soit $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i$. Alors par soustraction et factorisation, on obtient

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i) e_i = 0$$

Comme B est une famille libre, on en déduit que $\forall i \in [1, n], \lambda_i - \mu_i = 0$, donc $\forall i \in [1, n], \lambda_i = \mu_i$.

Remarque

Si l'on dispose d'une base dans un \mathbb{K} -ev, pour vérifier que deux vecteurs sont égaux, il suffit de vérifier que leurs coordonnées dans la base B sont égales.

Exemple 19 Dans $E = \mathbb{R}^3$, soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ une famille de trois vecteurs tous non nuls. Alors B est une base si et seulement si $e_1 \neq e_2$ et $e_3 \notin \text{Vect}(e_1, e_2)$.

Exemple 20 Dans \mathbb{R}^4 , on se pose $e_1 = (0, 1, 1, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0, 1)$, $e_3 = (-1, 2, 2, 1)$, $e_4 = (1, 1, 2, 4)$. Montrons qu'il s'agit d'une base puis déterminons les coordonnées du vecteur $x = (1, 2, 3, 4)$ dans cette base.

1.4 Familles infinies de vecteurs

Définition 10 Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E indexée par I (non nécessairement fini). On appelle combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i \in I}$ tout élément x de E de la forme

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$$

avec $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ une famille à support fini de scalaires.

Attention

On ne parle pas de somme infinie! On verra les techniques de sommation infinie plus tard dans l'année.

Théorème 3 Soit A une partie de E. Alors $\text{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A, i.e

$$\text{Vect}(A) = \left\{ \sum_{y \in A} \lambda_y y \mid (\lambda_y)_{y \in A} \in \mathbb{K}^{(A)} \right\}$$

Démonstration. On procède comme pour le cas A fini. Notons $F = \left\{ \sum_{y \in A} \lambda_y y \mid (\lambda_y)_{y \in A} \in \mathbb{K}^{(A)} \right\}$ et montrons que c'est un sev de E contenant A. Soit $(x, y) \in F^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On note $(\lambda_z)_{z \in A}$ et $(\mu_z)_{z \in A}$ des familles de scalaires à support fini telles que

$$x = \sum_{z \in A} \lambda_z z \quad \text{et} \quad y = \sum_{z \in A} \mu_z z$$

On en déduit que

$$\lambda x + \mu y = \sum_{z \in A} (\lambda \lambda_z + \mu \mu_z) z$$

De plus, $(\lambda \lambda_z + \mu \mu_z)_{z \in A}$ est à support fini, donc $\lambda x + \mu y$ appartient à F. Soit $a \in A$, on choisit la famille $(\delta_{a,z})_{z \in A}$ qui est bien à support fini (un seul de ses termes est non nul), celle-ci permet d'écrire

$$a = \sum_{z \in A} \delta_{a,z} z$$

Ainsi, a appartient à F, et $A \subset F$, donc $\text{Vect}(A) \subset F$.

De plus, $\text{Vect}(A)$ est un sev de E qui contient tous les $z, z \in A$. Comme il est stable par combinaison linéaire finie, il contient toutes les combinaisons linéaires à support fini $\sum_{z \in A} \lambda_z z$, donc contient F.

Définition 11 Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E indexée par I (non nécessairement fini). On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre lorsque

$$\forall (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}, \sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille est liée. On dit qu'une partie A de E est libre lorsque la famille de ses éléments est libre. Dans le cas contraire, on dit que A est liée.

Propriété 22 Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E indexée par I . Alors cette famille est libre si et seulement pour toute partie finie J de I , $(x_j)_{j \in J}$ est libre.

Démonstration. Supposons que $(x_i)_{i \in I}$ est libre. Soit J une partie finie de I , et $(\lambda_j)_{j \in J}$ une famille de scalaires telle que $\sum_{j \in J} \lambda_j x_j = 0$. Alors en complétant cette famille de scalaires par des zéros, on obtient une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ à support fini telle que $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$. D'après la liberté de la famille $(x_i)_{i \in I}$, on en déduit que $\forall i \in I, \lambda_i = 0$, donc $\forall j \in J, \lambda_j = 0$. Ainsi, $(x_j)_{j \in J}$ est libre.

Réciproquement, supposons que pour toute partie finie J de I , $(x_j)_{j \in J}$ est libre. Soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille de scalaires à support fini telle que $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$. On note alors J une partie finie de I telle que $\forall k \in I \setminus J, \lambda_k = 0$. Alors, $\sum_{j \in J} \lambda_j x_j = 0$. D'après la liberté de $(x_j)_{j \in J}$, $\forall j \in J, \lambda_j = 0$. Ainsi, $\forall i \in I, \lambda_i = 0$ et la famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre.

Définition 12 Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E indexée par I (non nécessairement fini). On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est génératrice lorsque $\text{Vect}(x_i)_{i \in I} = E$, i.e

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}, x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$$

On dit qu'une partie A de E est génératrice lorsque la famille de ses éléments est génératrice.

Définition 13 Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E indexée par I (non nécessairement fini). On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est une base de E , lorsqu'elle est à la fois libre et génératrice.

Propriété 23 Dans $\mathbb{K}[X]$, on considère la famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$. C'est une base de $\mathbb{K}[X]$, appelée base canonique de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration. On a vu que toute sous famille finie de $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre puisqu'échelonnée. De plus, pour tout polynôme P dans $\mathbb{K}[X]$, il existe une famille à support fini $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $P = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n X^n$. Ainsi, cette famille est génératrice, donc une base de $\mathbb{K}[X]$.

Exemple 21 On dit qu'un complexe z est transcendant s'il n'est racine d'aucun polynôme non nul à coefficients dans \mathbb{Q} , cela se traduit en disant que la famille $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre sur \mathbb{Q} . Par exemple, $\sqrt{2}$ est racine de $X^2 - 2$ n'est pas transcendant, par contre e est transcendant (c'est délicat à démontrer).

Exemple 22 Soit $E = \mathbb{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Pour tout entier relatif n dans \mathbb{Z} , on note $e_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto e^{int}$. On veut montrer que la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est libre dans E . Pour cela, on se donne p un entier non nul et (n_1, \dots, n_p) un ensemble fini d'entiers relatifs et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des complexes tels que $\sum_{i=1}^p \lambda_i e_{n_i} = 0$. Fixons $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$. On multiplie cette dernière égalité par la fonction $\overline{e_{n_j}}$ et on intègre sur $[0, 2\pi]$, ce qui donne par linéarité de l'intégrale,

$$0 = \int_0^{2\pi} \overline{e_{n_j}(t)} \sum_{i=1}^p \lambda_i e_{n_i}(t) dt = \sum_{i=1}^p \lambda_i \int_0^{2\pi} e^{i(n_i - n_j)t} dt = \sum_{i=1}^p \lambda_i 2\pi \delta_{i,j} = 2\pi \lambda_j$$

Ainsi, $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_j = 0$, et la famille $(e_{n_1}, \dots, e_{n_p})$ est libre. Comme c'est vrai pour toute partie finie de \mathbb{Z} , la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est libre.

1.5 Somme de sous-espaces vectoriels

On fixe E un \mathbb{K} -espace vectoriel

Définition 14 Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On note

$$F + G = \{x + y | (x, y) \in F \times G\}$$

Cet ensemble s'appelle la somme de F et G

Propriété 24 Avec les notations précédentes, $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E . C'est le plus petit qui contient F et G , i.e $F + G = \text{Vect}(F \cup G)$.

Démonstration. Les sev F et G contiennent tous deux 0_E , donc $F + G$ également. Soit $(x, y) \in (F + G)^2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. D'après la définition de $F + G$, on dispose de (x_F, x_G) dans $F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$. De même, on dispose d'un couple (y_F, y_G) dans $F \times G$ tel que $y = y_F + y_G$. On en déduit d'après les règles de calculs dans les ev que

$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_F + \mu y_F) + (\lambda x_G + \mu y_G)$$

Or F est un sev de E , donc $(\lambda x_F + \mu y_F)$ appartient à F . De même, G est un sev de E , donc $(\lambda x_G + \mu y_G)$ appartient à G . Par conséquent, $\lambda x + \mu y$ est bien somme d'un élément de F et d'un élément de G , donc un élément de $F + G$. De plus, pour tout x dans F , comme 0_E appartient à G , $x + 0_E$ appartient à $F + G$, donc $F \subset F + G$. De même, $G \subset F + G$, ainsi, $F + G$ est un sev de E contenant $F \cup G$, il contient donc $\text{Vect}(F \cup G)$. D'autre part, soit z un élément de $\text{Vect}(F \cup G)$, alors il est combinaison linéaire d'éléments de $F \cup G$, on les regroupe selon qu'ils appartiennent à F ou non, ce qui entraîne l'existence de familles à support fini telles que

$$z = \sum_{x \in F} \lambda_x x + \sum_{y \in G} \mu_y y$$

Comme F et G sont tous deux des sev, $\sum_{x \in F} \lambda_x x \in F$ et $\sum_{y \in G} \mu_y y$ appartient à G , donc z appartient à $F + G$. En conclusion, $F + G = \text{Vect}(F \cup G)$.

Définition 15 Soit n un entier naturel non nul, F_1, \dots, F_n des sous-espaces vectoriels de E . On note

$$\sum_{i=1}^n F_i = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \mid (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n \right\}$$

Propriété 25 Avec les notations précédentes, $\sum_{i=1}^n F_i$ est un sous-espace vectoriel de E . C'est le plus petit qui contient $\bigcup_{i=1}^n F_i$, i.e $\sum_{i=1}^n F_i = \text{Vect}(\bigcup_{i=1}^n F_i)$.

Définition 16 Soit F et G deux sous-espaces vectoriels. On dit que F et G sont en somme directe lorsque

$$\forall z \in F + G, \exists! (x, y) \in F \times G, z = x + y$$

Dans ce cas, on note $F \oplus G$ en place de $F + G$.

Propriété 26 Soit F et G deux sous-espaces vectoriels. Alors F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Démonstration. Supposons F et G en somme directe. Soit $z \in F \cap G$. En particulier, z appartient à $F + G$ et il peut se décomposer sous deux formes $x = 0_E + x = x + 0_E$, puisque $0_E \in F \cap G$ et $x \in F \cap G$. Par unicité des décompositions dans une somme directe, on en déduit que $x = 0_E$, donc que $F \cap G = \{0\}$. Réciproquement, supposons que $F \cap G = \{0\}$. Soit $z \in F + G$. D'après la définition de $F + G$, on dispose d'une décomposition comme indiqué. Décomposons z de deux façons $z = x + y = x' + y'$ avec $(x, x') \in F^2$ et $(y, y') \in G^2$. Alors, comme F et G sont des sev, $x - x' = y' - y$ appartient à F et à G . Par hypothèse sur $F \cap G$, cela implique que $x - x' = 0$ et $y' - y = 0$, donc $x = x'$ et $y = y'$. Ainsi, la décomposition est unique.

Exemple 23 Soit D, D' deux droites de \mathbb{R}^n . Alors elles sont en somme directe ssi leur intersection est réduite à $\{0\}$ ssi elles sont distinctes. Dans l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{K})$, les sev des matrices symétriques et antisymétriques $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont en somme directe car d'intersection nulle.

Définition 17 Soit F et G deux sous-espaces vectoriels. On dit que F et G sont supplémentaires lorsque

- F et G sont en somme directe, et
- $F + G = E$.

Propriété 27 Avec les notations précédentes, F et G sont supplémentaires si et seulement si

$$\forall z \in E, \exists! (x, y) \in F \times G, z = x + y$$

⚠ Attention

Ne pas confondre supplémentaire et complémentaire. Le complémentaire de F n'est même pas un sev, puisqu'il ne contient pas 0_E .

Exemple 24 Dans $E = C([0, 1], \mathbb{R})$, on considère $F = \{f \in E \mid \int_0^1 f(t) dt = 0\}$ et $G = \{f \in E \mid f \text{ constante}\}$. Alors F et G sont supplémentaires dans E .

Définition 18 Soit n un entier naturel non nul, F_1, \dots, F_n des sous-espaces vectoriels. On dit que les $(F_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont en somme directe lorsque

$$\forall z \in \sum_{i=1}^n F_i, \exists! (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n F_i, z = \sum_{i=1}^n x_i$$

Dans ce cas, on note $\bigoplus_{i=1}^n F_i$ en place de $\sum_{i=1}^n F_i$.

⚠ Attention

Il ne suffit pas que les F_i soient d'intersection deux à deux nulles pour garantir qu'ils sont en somme directe. Dans \mathbb{R}^2 , prenons $F_1 = \text{Vect}((1, 0))$, $F_2 = \text{Vect}((0, 1))$, $F_3 = \text{Vect}((1, 1))$. On a bien $F_1 \cap F_2 = F_1 \cap F_3 = F_2 \cap F_3 = \{0\}$. Pourtant, $(1, 1) = (1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$ se décompose de deux manières différentes dans $F_1 + F_2 + F_3$.

Propriété 28 Soit F_1, \dots, F_n une famille de sev de E en somme directe et K une partition de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Pour tout $A \in K$, on note $G_A = \bigotimes_{i \in A} F_i$, alors les $(G_A)_{A \in K}$ sont en somme directe.

Démonstration. Cela résulte du fait que $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{A \in K} \sum_{j \in A} x_j$ par commutativité de l'addition dans E .

Propriété 29 Soit $(F_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de sev de E . Alors elle est en somme directe si et seulement si

$$\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, F_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} F_j = \{0\}$$

Démonstration. On le fait classiquement par récurrence sur n . Pour $n = 2$, nous l'avons déjà établi. Soit $n \geq 2$ tel que la propriété est établie. Montrons-la au rang $n + 1$. Soit (F_1, \dots, F_{n+1}) une famille de $n + 1$ sev de E . Si les $(F_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ sont en somme directe, alors les $(F_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont en somme directe. Donc $\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, F_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} F_j = \{0\}$. De plus, F_{n+1} est en somme directe avec $\sum_{i=1}^n F_i$. D'après le cas $n = 2$, cela entraîne $F_{n+1} \cap \sum_{i=1}^n F_i = \{0\}$. Réciproquement, si

$$\forall i \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket, F_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} F_j = \{0\}$$

alors c'est vrai jusqu'au rang n , donc les $(F_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont en somme directe. Mais alors F_{n+1} est en somme directe avec $\bigoplus_{i=1}^n F_i$ puisque d'intersection nulle avec cet espace, donc les $(F_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ sont en somme directe.

2 Dimension d'un espace vectoriel

2.1 Construction de bases

Définition 19 Soit E un K -espace vectoriel. On dit que E est de dimension finie lorsqu'il existe une famille finie génératrice dans E .

Théorème 4 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Alors E possède une base finie.

Démonstration. On note \mathcal{B} l'ensemble des familles finies génératrices de E . On sait que cet ensemble est non vide puisque E est supposé de dimension finie. On peut donc considérer une famille finie génératrice de cardinal minimal. Si ce cardinal minimal est nul, cela veut dire que E est l'espace nul et que la famille vide en est une base. Sinon, notons p un entier naturel non nul, (e_1, \dots, e_p) une telle famille et montrons qu'elle est libre. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = 0$. Supposons par l'absurde qu'il existe un entier i dans $\llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $\lambda_i \neq 0$. On en déduit que

$$e_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p \frac{-\lambda_j}{\lambda_i} e_j.$$

Montrons qu'alors la famille $(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_p)$ est génératrice. Soit $x \in E$, comme (e_1, \dots, e_p) est génératrice, il existe un p -uplet de scalaires (μ_1, \dots, μ_p) tel que $x = \sum_{j=1}^p \mu_j e_j$. On en déduit que

$$x = \mu_i \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p \frac{-\lambda_j}{\lambda_i} e_j \right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p \mu_j e_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p \left(-\mu_i \frac{\lambda_j}{\lambda_i} + \mu_j \right) e_j$$

Ainsi, on dispose d'une famille génératrice de cardinal strictement inférieur à p , ce qui contredit la minimalité de p . Ainsi, cette famille est également libre, ce qui en fait une base de E .

Théorème 5 (Base extraite) Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie génératrice de E . Alors il en existe une sous-famille qui est une base de E .

Démonstration. Reprendre la démonstration précédente en considérant l'ensemble des sous-familles de $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$. Il en existe une sous-famille finie génératrice de cardinal minimal qui est alors libre, donc une base de E .

Théorème 6 (Complétion en base) Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille libre de E de dimension finie. Alors il en existe une sur-famille qui est une base de E .

Démonstration. Comme E est de dimension finie, on sait qu'il existe une famille génératrice que l'on note (e_1, \dots, e_p) . On considère alors l'ensemble X des familles obtenues par ajout à la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'un nombre fini de vecteurs de la famille $(e_1, \dots, e_p)_{1 \leq j \leq p}$. On sait que $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre, on considère alors le sous-ensemble de X constitué des familles libres, puis on considère une famille libre de cardinal maximal parmi ce sous-ensemble. Notons-la $(y_1, \dots, y_q)_{1 \leq k \leq q}$ et montrons qu'elle est génératrice. Pour cela on montre que $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, e_j \in \text{Vect}(y_1, \dots, y_q)$. Soit donc j un entier de $\llbracket 1, p \rrbracket$. Si e_j est un des y_1, \dots, y_q c'est gagné. Sinon, on considère la famille (y_1, \dots, y_q, e_j) c'est une famille liée par maximalité de (y_1, \dots, y_q) . Par conséquent, $e_j \in \text{Vect}(y_1, \dots, y_q)$. On en déduit que $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) \subset \text{Vect}(y_1, \dots, y_q)$, donc que (y_1, \dots, y_q) est génératrice.

Remarque

Ce théorème est souvent appelé théorème de la base incomplète, bien que cette dénomination soit mathématiquement incorrecte.

On synthétise ces résultats sous la forme suivante :

Théorème 7 Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille génératrice finie de E . On suppose qu'il existe une partie I de $\llbracket 1, n \rrbracket$ telle que $(x_i)_{i \in I}$ est libre. Alors il existe une partie J de $\llbracket 1, n \rrbracket$ contenant I telle que $(x_j)_{j \in J}$ est une base de E .

Exemple 25 Dans \mathbb{R}^4 , on considère $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_4 = x_1 - 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0\}$. Il s'agit d'un sev de \mathbb{R}^4 (faites-le!). On en cherche une base. On étudie pour cela une caractérisation de E à l'aide des méthodes des systèmes linéaires. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} x \in E &\iff \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = & 0 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 + 3x_4 = & 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_1 = & -x_3 + x_4 \\ x_2 = & -\frac{1}{2}x_3 + x_4 \end{cases} \\ &\iff x = \left(-x_3 + x_4, -\frac{1}{2}x_3 + x_4, x_3, x_4 \right) \\ &\iff x = x_3 \left(-1, -\frac{1}{2}, 1, 0 \right) + x_4 (1, 1, 0, 1) \\ &\iff x \in \text{Vect}((2, 1, -2, 0), (1, 1, 0, 1)) \end{aligned}$$

On pose alors $e_1 = (2, 1, -2, 0)$ et $e_2 = (1, 1, 0, 1)$. On vient de prouver que (e_1, e_2) est une famille génératrice de E . Montrons qu'elle est libre. Soit λ et μ deux scalaires tels que $\lambda e_1 + \mu e_2 = 0$, alors $(2\lambda + \mu, \lambda + \mu, -2\lambda, \mu) = (0, 0, 0, 0)$, donc $\lambda = 0$ et $\mu = 0$. Ainsi, la famille (e_1, e_2) est une base de E .

2.2 Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

Proposition 1 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, n un entier naturel non nul et $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille génératrice finie de E . Alors toute famille de $n + 1$ vecteurs de E est liée.

Démonstration. On le prouve par récurrence sur n . Pour $n = 1$, on se donne une famille (y_1, y_2) de E . Comme (x_1) est génératrice, il existe des scalaires λ_1, λ_2 tels que $y_1 = \lambda_1 x_1$ et $y_2 = \lambda_2 x_1$. Mais alors, $\lambda_2 y_1 - \lambda_1 y_2 = 0$. Comme E est de dimension 1, $x_1 \neq 0$. Si $(y_1, y_2) \neq (0, 0)$, cela signifie que l'un des scalaires est non nul et que la famille est liée. Si $(y_1, y_2) = (0, 0)$ alors $y_1 + y_2 = 0$ et la famille est toujours liée.

Soit n un entier naturel non nul tel que la propriété soit vraie. Soit (y_1, \dots, y_{n+2}) une famille de $n+2$ vecteurs. Comme (x_1, \dots, x_{n+1}) est génératrice, on dispose de scalaires $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq n+2}$ tels que

$$\forall j \in \llbracket 1, n+2 \rrbracket, y_j = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{i,j} x_i$$

Premier cas : $\forall j \in \llbracket 1, n+2 \rrbracket, \lambda_{n+1,j} = 0$. Dans ce cas, x_{n+1} n'intervient dans aucune combinaison linéaire et en particulier la famille (y_1, \dots, y_{n+1}) est combinaison linéaire de (x_1, \dots, x_n) . Par hypothèse de récurrence, (y_1, \dots, y_{n+1}) est liée. Donc sa sur-famille (y_1, \dots, y_{n+2}) est liée.

Deuxième cas : Il existe un entier j dans $\llbracket 1, n+2 \rrbracket, \lambda_{n+1,j} \neq 0$. Quitte à renuméroter les vecteurs, on suppose que cet entier j vaut $n+2$, i.e. $\lambda_{n+1,n+2} \neq 0$. On écrit alors

$$\forall j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, y_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} x_i + \lambda_{n+1,j} x_{n+1}$$

$$y_{n+2} = \sum_{i=1}^n \lambda_{i,n+2} x_i + \lambda_{n+1,n+2} x_{n+1}$$

On pose alors pour tout entier j dans $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$,

$$Y_j = y_j - \frac{\lambda_{n+1,j}}{\lambda_{n+1,n+2}} y_{n+2}$$

qui ne fait plus intervenir le vecteur x_{n+1} . Autrement dit, la famille (Y_1, \dots, Y_{n+1}) est combinaison linéaire de la famille (x_1, \dots, x_n) . Par hypothèse de récurrence, (Y_1, \dots, Y_{n+1}) est liée. On dispose d'un $n+1$ -uplet de scalaires $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$ non tous nuls tel que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i Y_i = 0$$

Cela permet d'écrire

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i y_i + \left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \frac{-\lambda_{n+1,i}}{\lambda_{n+1,n+2}} \right) y_{n+2} = 0$$

ce qui fournit un $n+2$ -uplet non trivial de scalaires qui prouve que (y_1, \dots, y_{n+2}) est liée. Conclusion, la propriété est vraie par récurrence pour tout entier n .

Théorème 8 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$. Alors toutes les bases de E ont le même cardinal. Ce cardinal est appelé la dimension de E , noté $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ ou $\dim(E)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le corps de base.

Démonstration. Soit (e_1, \dots, e_p) et (f_1, \dots, f_q) deux bases de E . Si $p \neq q$, alors quitte à échanger, on suppose $p < q$. Mais alors, (e_1, \dots, e_p) est génératrice finie et $q \geq p+1$. D'après le lemme précédent, la famille (f_1, \dots, f_{p+1}) est liée, donc sa sur-famille (f_1, \dots, f_q) est liée. Or c'est une base, donc elle est libre, ce qui est absurde. Par conséquent, $p = q$.

Remarque

Si E est engendré par la famille vide, alors $E = \{0\}$ est l'espace nul, on dit que $\dim(E) = 0$.

Exemple 26 — $\dim \mathbb{K}^n = n$.

— $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$.

— $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$.

— $\dim\{y \in D^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid y'' + y = 0\} = 2$. Il suffit pour cela de démontrer que les fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont indépendantes. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, a \cos(x) + b \sin(x) = 0$. Alors il existe un réel φ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x + \varphi) = 0$. En particulierisant en $x = -\varphi$, on obtient $\sqrt{a^2 + b^2} = 0$, donc $a = b = 0$, ce qui prouve la liberté de cette famille.

— Soit $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. Alors $\dim\{u \in \mathbb{C}^n \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0\} = 2$. Si $a^2 - 4b \neq 0$, on a vu que cet espace est engendré par $n \mapsto \lambda^n$ et $n \mapsto \mu^n$ avec λ, μ les racines distinctes de $X^2 + aX + b$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha \lambda^n + \beta \mu^n = 0$. Alors $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha \lambda + \beta \mu = 0$. Ces deux égalités impliquent $\alpha(\lambda - \mu) = 0$, donc $\alpha = 0$, puis $\beta = 0$. Ainsi, ces deux suites sont indépendantes. Dans le cas $a^2 - 4b = 0$, on a montré que cet espace engendré par $n \mapsto \lambda^n$ et $n \mapsto n\lambda^n$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha \lambda^n + \beta n \lambda^n = 0$. Alors $\alpha = 0$ et $\alpha \lambda + \beta \lambda = 0$. Comme $b \neq 0, \lambda \neq 0$, donc $\beta = 0$.

- $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$, mais $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$. \mathbb{R} est de dimension infinie sur \mathbb{Q} .
- Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = n(n+1)/2$ et $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = n(n-1)/2$. On a par exemple les bases $(E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ pour le premier sev et $(E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}$ pour le second.

Propriété 30 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie.

- Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille libre de E . Alors $n \leq \dim(E)$.
- Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille génératrice de E . Alors $p \geq \dim(E)$.

Démonstration. Conséquence immédiate du théorème précédent, du théorème de la base extraite et du théorème de la complétion en base.

Propriété 31 Soit E un \mathbb{K} espace vectoriel de dimension n . Soit p un entier naturel et $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de E . Alors cette famille est une base de E si et seulement si $p = n$ et elle est libre si et seulement si $p = n$ et elle est génératrice.

Démonstration. Si $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une base, alors $p = n$ car toutes les bases de E ont même cardinal. De plus, cette famille est libre et génératrice, ce qui donne les deux conclusions souhaitées. Réciproquement supposons $p = n$ et $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ libre. Alors il en existe une sur-famille qui est une base de E . Cette base est alors de cardinal n , puisque $\dim(E) = n$, donc c'est la famille initiale, ce qui prouve que $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une base. Autre réciproque, supposons $p = n$ et $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ génératrice. Alors il en existe une sous-famille qui est une base. Cette base est alors de cardinal n puisque $\dim(E) = n$, donc c'est la famille initiale, ce qui prouve que $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une base.

⚠ Attention

Dans E de dimension finie n , il ne suffit pas qu'une famille de vecteurs en comporte n pour être une base.

Propriété 32 Soit E_1, E_2, \dots, E_q des espaces vectoriels tous de dimension finie. Alors $E = \prod_{i=1}^q E_i$ est de dimension finie et

$$\dim(E) = \sum_{i=1}^q \dim(E_i)$$

⚠ Attention

Eh non, ce n'est pas le produit des dimensions, mais leur somme.

Démonstration. On le prouve par récurrence. C'est une trivialité pour $q = 1$. Prouvons le cas $q = 2$. On note $n = \dim(E_1)$ et $p = \dim(E_2)$, puis on note (e_1, \dots, e_n) une base de E_1 , puis (f_1, \dots, f_p) une base de E_2 . On considère alors la famille $(e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, f_1), \dots, (0, f_p)$. Montrons qu'il s'agit d'une base de E .

- Liberté : Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p)$ un $n+p$ -uplet de scalaires tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i(e_i, 0) + \sum_{j=1}^p \mu_j(0, f_j) = (0, 0)$ dans E . Alors

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^p \mu_j f_j = 0$$

D'après la liberté de (e_1, \dots, e_n) dans E_1 , $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i = 0$. D'après la liberté de (f_1, \dots, f_p) dans E_2 , $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\mu_j = 0$. Conclusion, la famille initiale est bien libre.

- Génératrice : soit $z \in E$, alors il existe $(x, y) \in E_1 \times E_2$ tel que $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y)$. Mais alors comme les familles e et f sont génératrices dans leurs espaces respectifs, il existe un n uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et un p uplet (μ_1, \dots, μ_p) tels que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^p \mu_j f_j$. On en déduit que

$$z = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, 0 \right) + \left(0, \sum_{j=1}^p \mu_j f_j \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (e_i, 0) + \sum_{j=1}^p \mu_j (0, f_j)$$

donc que la famille est bien génératrice.

En conclusion, E est de dimension finie et $\dim(E) = n+p = \dim(E_1) + \dim(E_2)$. Soit q un entier naturel supérieur ou égal à 2 tel que la propriété est vraie. Soit (E_1, \dots, E_{q+1}) une famille de $q+1$ d'espaces vectoriels tous de dimension finie. Alors d'après l'hypothèse de récurrence, $\prod_{i=1}^q E_i$ est un ev de dimension finie égale à $\sum_{i=1}^q \dim(E_i)$. D'après le cas $q = 2$, on en déduit que $\prod_{i=1}^{q+1} E_i$ est de dimension finie égale à $\sum_{i=1}^q \dim(E_i) + \dim(E_{q+1}) = \sum_{i=1}^{q+1} \dim(E_i)$.

Définition 20 Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de vecteurs de E . On appelle rang de cette famille, noté $\text{rg}(x_1, \dots, x_n)$ la dimension de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

Exemple 27 Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on considère la famille

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad C_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$$

On utilise un pivot pour échelonner la matrice obtenue à l'aide des ces quatre colonnes.

$$\text{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Ainsi, la famille (C_1, C_2, C_3, C_4) est de rang 3.

2.3 Dimension et sous-espaces

Propriété 33 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soit F un sous-espace de E . Alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$. Il y a égalité si et seulement si $F = E$.

Démonstration. Si $F = \{0\}$, alors $\dim(F) = 0 \leq \dim(E)$. Sinon on considère l'ensemble des familles libres de vecteurs de F . Comme toute famille libre de F est libre dans E , sa longueur est majorée par $\dim(E)$. On peut alors considérer une famille libre (f_1, \dots, f_k) de F de longueur maximale et on montre que c'est une base de F . Soit $x \in F$. Si $x \notin \text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$ alors (x, f_1, \dots, f_k) est une famille libre de F de longueur strictement plus grande que k , ce qui est absurde. Par conséquent, cette famille est génératrice de F , donc une base de F . Sa longueur k est majorée par $\dim(E)$, puisque c'est une famille libre de E , donc $\dim(F) = k \leq \dim(E)$.

Si $F = E$, alors leurs dimensions sont égales. Réciproquement, supposons $\dim(F) = \dim(E)$, alors la base de F construite précédemment a même cardinal que $\dim(E)$ et est libre dans E , donc est une base de E . Donc $E = \text{Vect}(f_1, \dots, f_k) = F$.

Propriété 34 Soit F un sev de E de dimension finie. Alors il existe un sev G de E tel que F et G sont supplémentaires (on appelle G un supplémentaire de F dans E).

Démonstration. D'après la propriété précédente, F est de dimension finie. On en considère donc une base (e_1, \dots, e_p) . Cette famille est libre dans E , donc on peut la compléter en base (e_1, \dots, e_n) dans E . On pose alors $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ et on vérifie que F et G sont supplémentaires. Comme (e_1, \dots, e_n) est génératrice dans E , pour tout x dans E , il existe un n -uplet de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tel que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. Alors $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i + \sum_{i=p+1}^n \lambda_i e_i$. Comme F et G sont des sev, $\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i \in F$ et $\sum_{i=p+1}^n \lambda_i e_i \in G$, donc $E = F + G$. Soit $x \in F \cap G$, on dispose de scalaires tels que $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = \sum_{i=p+1}^n \lambda_i e_i$, mais alors $\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i - \sum_{i=p+1}^n \lambda_i e_i = 0$. Par liberté de la famille (e_1, \dots, e_n) , on en déduit que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = 0$, donc que $x = 0$. Conclusion, F et G sont en somme directe.

Propriété 35 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sev de E en somme directe. Alors $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer ce qui précède à l'espace vectoriel $F+G$ dont on sait qu'il est de dimension finie, puisque E est de dimension finie.

Propriété 36 (Formule de Grassmann) Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit F et G deux sev de E chacun de dimension finie. Alors $F+G$ et $F \cap G$ sont de dimension finie et $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Démonstration. Considérons un supplémentaire H de $F \cap G$ dans F . Démontrons alors que $F+G = H \oplus G$. Soit x un élément de $F+G$, on note (x_F, x_G) un couple de $F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$. De plus, x_F se décompose dans $H \oplus (F \cap G)$ via $x_F = x_H + x_{F \cap G}$. Ainsi, $x = x_H + x_{F \cap G} + x_G$ avec $x_{F \cap G} + x_G$ appartenant à G puisque G est un sev de E , donc $F+G = H+G$. D'autre part, soit $x \in H \cap G$. Comme H inclus dans F , x appartient à $F \cap G$, donc $x \in H \cap (F \cap G)$. Toutefois, H est en somme directe avec $F \cap G$, puisque c'en est un supplémentaire, donc $H \cap (F \cap G) = \{0\}$ et $x = 0$. Ainsi, H est en somme directe avec G , ce qui prouve $F+G = H \oplus G$.

On en déduit que $\dim(F+G) = \dim(G) + \dim(H) = \dim(G) + \dim(F) - \dim(F \cap G)$.

Exercice 3 Établir une formule pour la dimension de la somme de trois sev F, G, H de E .

Propriété 37 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sev de E . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- F et G sont supplémentaires dans E
- $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$ et $\dim(F + G) = \dim(E)$
- $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Démonstration. Si F et G sont supplémentaires, alors on a déjà vu que $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$. De plus, $F + G = E$ donc leurs dimensions sont égales. Le premier point implique donc le second. Si $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$ et $\dim(F + G) = \dim(E)$. Alors $\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G) = 0$, donc $F \cap G = \{0\}$. Ainsi le second point entraîne le troisième. Si $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$, alors F et G sont en somme directe. De plus, comme $F + G \subset E$, l'égalité des dimensions suffit à établir $F + G = E$. Ainsi, F et G sont supplémentaires dans E .

Exemple 28 Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\}$ et $G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 - x_3 = 0 \wedge 2x_1 + x_3 = 0\}$. On montre rapidement que F et G sont des sev de E . Comme E est de dimension finie, F et G le sont également. F est une droite qui admet $(1, -2, -1)$ comme base, G est un plan qui admet $((0, 1, 1), (1, 0, -2))$ comme base. Par conséquent, $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$. D'autre part, soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in F \cap G$, alors

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ donne le système équivalent :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On termine avec l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$, ce qui donne

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On reconnaît alors une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls. Celle-ci est donc inversible et en multipliant à gauche par son inverse, on obtient $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$. Ainsi, $F \cap G = \{0\}$ et les sev F et G sont supplémentaires.

Propriété 38 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , F un sev de E de dimension p . Alors il existe une base $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E telle que $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une base de F .

Démonstration. Comme F est de dimension finie p , on dispose d'une base (e_1, \dots, e_p) de F . Cette famille est libre dans F , donc libre dans E . On peut ainsi la compléter en base de E sous la forme (e_1, \dots, e_n) .

Propriété 39 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , F un sev de E de dimension p , G un sev de E de dimension q . On suppose que F et G sont en somme directe. Alors il existe une base $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E telle que $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une base de F et $(x_i)_{p+1 \leq i \leq q}$ est une base de G .

Démonstration. Soit (e_1, \dots, e_p) une base de F et $(e_{p+1}, \dots, e_{p+q})$ une base de G . Démontrons que la famille (e_1, \dots, e_{p+q}) est libre. On considère donc un $p+q$ -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p+q})$ de scalaires tel que $\sum_{i=1}^{p+q} \lambda_i e_i = 0$. Alors

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = - \sum_{i=p+1}^{p+q} \lambda_i e_i \in F \cap G$$

Comme F et G sont en somme directe, $F \cap G = \{0\}$, donc $\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = 0$. Comme (e_1, \dots, e_p) est libre, on en déduit que $\forall i \in [1, p], \lambda_i = 0$. De même, on a $\sum_{i=p+1}^{p+q} \lambda_i e_i = 0$. Par liberté de $(e_{p+1}, \dots, e_{p+q})$, on en déduit que $\forall i \in [p+1, p+q], \lambda_i = 0$. En conclusion, $\forall i \in [1, p+q], \lambda_i = 0$, et la famille indiquée est libre. D'après le théorème de la « base incomplète », on peut compléter cette famille en base de E , sous la forme (e_1, \dots, e_n) , ce qui donne le résultat attendu.

Exemple 29 Soit P un plan et D une droite de \mathbb{R}^3 . On suppose que $P \cap D = \{0\}$, alors il existe une base (e_1, e_2, e_3) de \mathbb{R}^3 telle que (e_1, e_2) est une base de P et e_3 une base de D .