Les calculatrices sont interdites.

Les deux problèmes sont indépendants.

Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Premier problème : environ 2 heures.

Le barème valorise les calculs clairs et complets. On considère les fonctions numériques f, g, h, d'une variable réelle, définies respectivement par

$$x \mapsto f(x) = \frac{5}{9}\ln\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{2}{9}\ln\left(\frac{x^2+9}{18}\right) - 2\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{\pi}{2}$$

$$x \mapsto g(x) = f(x) - \ln(x)$$

$$x \mapsto h(x) = e^{f(x)}$$

1. (a) Quels sont les domaines de définition de f, g et h ?
   (b) Trouver une solution, relativement simple, de l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue réelle x.
2. On désigne respectivement par $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les graphes de f et h dans un repère orthonormé.
   (a) Montrer que le polynôme
   $$-X^4 + 12X^3 - 6X^2 - 45$$
   possède exactement deux racines réelles positives.
   (b) En déduire les points d'inflexion et l'étude de la concavité de $\mathcal{C}_1$.
3. (a) On note $\gamma = -\frac{2}{9}\ln(2) - \ln(3) - \frac{\pi}{2}$. Montrer que $g(x)$ tend vers γ quand x tend vers $+\infty$.
   (b) Démontrer que
   $$\forall x > 0, g(x) = \gamma + \frac{2}{9}\ln\left(1 + \frac{9}{x^2}\right) - 2\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + \pi$$
   (c) Montrer que g admet un développement asymptotique en $+\infty$ de la forme
   $$g(x) \underset{x\to+\infty}{=} \gamma + \frac{6}{x} + \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
   Qu'en déduire sur une asymptote au graphe de g ?
   (d) Établir un développement asymptotique à 3 termes de $e^{g(x)}$ quand x tend vers $+\infty$.
4. Établir les tableaux de variation de f et h, puis tracer leurs courbes représentatives $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
5. Pour tout réel u strictement positif, on note
   $$\Gamma(u) = \int_3^u (g(x) - \gamma)\,dx$$
   où le réel γ a été introduit en question 3.a)
   (a) Calculer pour tout réel u strictement positif $\Gamma(u)$. *Indication : on en cherchera une expression sous la forme*
   $$\Gamma(u) = (a_1u + b_1)\ln(u^2+9) + (a_2u + b_2)\ln(u) + (a_3u + b_3)\arctan(u/3) + (a_4u + b_4)$$
   (b) Montrer qu'il existe un unique réel a tel que $\Gamma(u) - a\ln(u)$ possède une limite finie lorsque u tend vers $+\infty$. Montrer qu'alors cette limite vaut $6 - \frac{7}{3}\ln(2) - 6\ln(3) - \frac{7\pi}{6}$.

Deuxième problème : environ 2 heures

Pour tout entier naturel k, on note $\phi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{kx}$. Pour tout entier naturel n, on note $B_{n+1} = (\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n)$ la famille des applications ϕ_k pour k allant de 0 à n, puis E_{n+1} l'ensemble des combinaisons linéaires des élements de B_{n+1}, i.e

$$E_{n+1} = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k \mid (a_k)_{0 \le k \le n} \in \mathbb{R}^{n+1} \right\}$$

Partie I

1. Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes, d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto y(x)$ deux fois dérivable :
   (a) $y'' - 4y' + 3y = 0$.
   (b) $y'' - 4y' + 3y = e^{2x} + 1$.
   (c) $y'' - 4y' + 3y = e^{x} + 1$.
2. On désigne par g une primitive de la fonction $x \mapsto e^{-e^x - 2x}$. **On ne demande pas de calculer** $g(x)$. Exprimer, en fonction de g, l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :
   (a) $y' - 2y = e^{-e^x}$.
   (b) $e^{-x} y'' + (1 - 2e^{-x}) y' - 2y = 0$.

Partie II

1. Montrer que l'ensemble $E_3 = \left\{ a_0\phi_0 + a_1\phi_1 + a_2\phi_2 | (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $B_3 = (\phi_0, \phi_1, \phi_2)$ est une base de E_3.
2. (a) Montrer que $f : \phi \mapsto \phi'' - 4\phi' + 3\phi$ est une application linéaire de E_3 dans E_3. Déterminer le noyau de cette application linéaire.
   (b) Donner toutes les fonctions de E_3 dont l'image par f est la fonction $x \mapsto e^{2x} + 1$. L'ensemble des fonctions trouvées est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
   (c) Donner toutes les fonctions de E_3 dont l'image par f est la fonction $x \mapsto e^{x} + 1$.
3. Pour tout ϕ dans E_3, on note $u(\phi) : x \mapsto e^{-x}\phi''(x) + (1 - 2e^{-x})\phi'(x) - 2\phi(x)$.
   (a) Montrer que $u : \phi \mapsto u(\phi)$ est une application linéaire de E_3 dans E_3.
   (b) Quelle la matrice de u relativement à la base B_3 ?
   (c) u est-elle bijective ? Déterminer son noyau et la dimension de ce noyau.
   (d) Déterminer $u(E_3)$ et sa dimension.

Partie III

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel p, E_p est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel non nul p, $v_p : \phi \mapsto \phi' - p\phi$ est une application linéaire de E_{p+1} dans E_p.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel non nul p, si B_p est libre, alors B_{p+1} est libre. Quelle est la dimension de E_{n+1} ?
2. Pour tout ϕ dans E_{n+1}, on note $w(\phi) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x}\phi'(x) + \phi(x)$.
   (a) Montrer que $w : \phi \mapsto w(\phi)$ est une application linéaire de E_{n+1} dans E_{n+1}.
   (b) Quelle est la matrice A de w relativement à la base B_{n+1} ? L'application w est -elle bijective ?
   (c) Déterminer la fonction ϕ dans E_{n+1} dont l'image par w est ϕ_n.
   (d) Déterminer pour tout k dans $[\![0, n]\!]$, la fonction ϕ de E_{n+1} dont l'image par w est ϕ_k.