Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Il est rappelé qu'il est tenu compte dans l'évaluation de la présentation et la rédaction des copies.

Problème 1 : Composition et conjugaison

On considère E un ensemble et on note $\mathcal{F}(E,E)$ l'ensemble des applications de E dans E et $S(E)$ l'ensemble des applications bijectives de E dans E. On rappelle que pour toute application bijective f, on note f^{-1} sa réciproque. On note $\mathrm{Id}_E : E \to E, x \mapsto x$ l'application identité de E. Pour toutes applications f, g de E dans E, on note $f \circ g$ la composée de f par g. Pour toute application f de E dans E, on définit par récurrence la notation suivante : $f^0 = \mathrm{Id}_E$, pour tout entier naturel n, $f^{n+1} = f^n \circ f$.

1. Considérations générales
   (a) Soit $f \in S(E)$. Montrer que sa réciproque f^{-1} vérifie $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_E$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$. (*Il s'agit d'une question de cours et une démonstration complète est attendue.*)
   (b) Soit $f \in S(E)$ et g une application bijective de E dans F. Quelle est la réciproque de l'application $g \circ f \circ g^{-1}$?
   (c) Soit $f \in S(E)$ et g une application bijective de E dans F. Démontrer par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(g \circ f \circ g^{-1}\right)^n = g \circ f^n \circ g^{-1}$$

2. On se place dans le cadre $E = \mathbb{R}$. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on note $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$.
   (a) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. A quelle condition nécessaire et suffisante sur (a,b), l'application $f_{a,b}$ est-elle une bijection ? Le cas échéant, déterminer sa réciproque.
   (b) Soit $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}_*^2 \times \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe un unique $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ que l'on précisera tel que

$$f_{a_1,b_1} \circ f_{a_2,b_2} \circ f_{a_1,b_1}^{-1} = f_{\alpha,\beta}$$

   (c) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (a_1, a_2, b_1, b_2) pour que $f_{a_1,b_1} \circ f_{a_2,b_2} = f_{a_2,b_2} \circ f_{a_1,b_1}$.
   (d) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. On suppose que $f_{a,b}$ vérifie

$$\forall (a',b') \in \mathbb{R}_* \times \mathbb{R}, f_{a',b'} \circ f_{a,b} = f_{a,b} \circ f_{a',b'}$$

   Montrer que $(a,b) = (1,0)$.

3. Une addition tordue : pour tout $(x,y) \in]-1,1[^2$, on note $x \oplus y = \dfrac{x+y}{1+xy}$. On note de plus A l'application $]-1,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.
   (a) Montrer $\forall (x,y) \in]-1,1[^2, x \oplus y \in]-1,1[$.
   (b) A l'aide d'outils de terminale, montrer que A est une bijection. Déterminer sa réciproque à l'aide de la fonction exponentielle.
   (c) Démontrer que

$$\forall (x,y) \in]-1,1[^2, A(x) + A(y) = A(x \oplus y)$$

   (d) En déduire sans calcul

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, A^{-1}(x+y) = \frac{A^{-1}(x) + A^{-1}(y)}{1 + A^{-1}(x)A^{-1}(y)}$$

   (e) Soit $x \in]-1,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Établir une formule simple pour déterminer

$$\underbrace{x \oplus x \oplus \cdots \oplus x}_{n \text{ termes}}$$

Problème 2 : le lemniscate de Bernoulli.

On note pour tout complexe z, $\mathfrak{Re}(z)$ sa partie réelle, $\mathfrak{Im}(z)$ sa partie imaginaire, $\overline{z}$ son conjugué et $|z|$ son module.
On étudie ici l'ensemble $\mathcal{L}$ suivant :

$$\mathcal{L} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z^2 - 1| = 1 \right\}$$

Un tracé de cet ensemble est produit en dernière page pour vous aider, mais son utilisation n'a pas valeur de démonstration.

1. Écritures complexes
   (a) Montrer que
   $$\forall z \in \mathbb{C}, \mathfrak{Re}\left(z^2\right) = \mathfrak{Re}(z)^2 - \mathfrak{Im}(z)^2$$
   (b) Soit z_1, z_2 deux complexes. Démontrer que
   $$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 - 2\mathfrak{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2$$
   (c) En déduire qu'on a l'égalité d'ensembles
   $$\mathcal{L} = \left\{ z \in \mathbb{C}^* \mid \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{2} \right\} \cup \{0\}$$
2. Paramétrisation réelle
   (a) Soit t un réel et z le complexe $\sqrt{2}(1+\mathrm{i})\dfrac{t}{1+\mathrm{i}t^2}$. Démontrer que $|1+\mathrm{i}t^2|^2 = 1+t^4$, puis en déduire que z appartient à $\mathcal{L}$.
   (b) Soit z un complexe non nul dans $\mathcal{L}$. Montrer que $\mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Im}(z) \neq 0$, puis que le réel $t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{|z|^2}{\mathfrak{Re}(z)+\mathfrak{Im}(z)}$ vérifie
   $$1 + it^2 = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{z}t$$
   (c) Conclure à l'égalité d'ensembles
   $$\mathcal{L} = \left\{ \sqrt{2}(1+\mathrm{i})\frac{t}{1+\mathrm{i}t^2} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$
   (d) Soit $z \in \mathcal{L}\backslash\{0\}$. Donner et démontrer une condition nécessaire sur les arguments de z.
3. Inversion : pour tout complexe z non nul, on note $h(z) = \sqrt{2}/\overline{z}$.
   (a) Montrer que pour tout z non nul et de module différent de $\sqrt{2}$, les complexes 0, z et $h(z)$ sont distincts.
   (b) Montrer que pour tout complexe non nul z et de module différent de $\sqrt{2}$, les points du plan d'affixe complexe 0, z et $h(z)$ sont alignés.
   (c) On note $\mathcal{H} = \{z' \in \mathbb{C} \mid \exists z \in \mathcal{L}\backslash\{0\}, z' = h(z)\}$. Démontrer que
   $$\mathcal{H} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(z)^2 - \mathfrak{Im}(z)^2 = 2 \right\}$$
   (d) Déterminer l'intersection $\mathcal{L} \cap \mathcal{H}$.
   (e) Tracer l'allure de l'ensemble $\mathcal{H}$.

★ ★ ★ ★ ★

Tracé de l'ensemble $\mathcal{L}$.