Les calculatrices sont interdites.

Les deux problèmes sont indépendants.

Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

PROBLEME D'ANALYSE

☐ $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est la $\mathbb{R}$-algèbre des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

☐ L'objectif de ce problème d'analyse est d'étudier les ensembles $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ suivants :

$\mathcal{E} = \left\{ f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)f(y) \right\}$.

$\mathcal{F}$ est la partie constituée des éléments f de $\mathcal{E}$ tels que :

- f n'est pas la fonction identiquement nulle, et
- f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Partie I

1. Montrer que la fonction cosinus est dans l'ensemble $\mathcal{E}$.
2. On note ch la fonction cosinus hyperbolique et sh la fonction sinus hyperbolique.
   Démontrer la formule : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)$.

   En déduire que la fonction ch est dans l'ensemble $\mathcal{E}$.
3. Soit f dans $\mathcal{E}$. Montrer que pour tout réel α, la fonction f_α de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $x \mapsto f_\alpha(x) = f(\alpha x)$ est dans $\mathcal{E}$.
4. On fixe un élément f de $\mathcal{E}$.

   En donnant à x et à y des valeurs particulières, prouver que :
   (a) $f(0)$ vaut 0 ou 1.
   (b) Si $f(0) = 0$, alors f est la fonction identiquement nulle.
   (c) Si $f(0) = 1$, alors f est une fonction paire.

Partie II

A. On fixe ici un élément f de $\mathcal{E}$ tel que $f(0) = 1$.
   (a) Montrer que pour chaque réel $r > 0$, on a :
      i. $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_0^r f(x+y)\,dy = \int_x^{x+r} f(u)\,du$.
      ii. $\forall x \in \mathbb{R},\ 2f(x)\displaystyle\int_0^r f(y)\,dy = \int_x^{x+r} f(u)\,du + \int_{x-r}^{x} f(v)\,dv$.
   (b) Montrer que l'on peut choisir $r > 0$ de façon à rendre strictement positive la constante $\displaystyle\int_0^r f(y)\,dy$.

      Dans la suite de ce (b), *on fixe un réel* $r > 0$ *qui vérifie :* $\displaystyle\int_0^r f(y)\,dy > 0$.

i. En déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

ii. Montrer alors que f est en fait de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

iii. Prouver l'existence d'une constante $c > 0$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad c\, f'(x) = f(x+r) - f(x-r).$$

(c) En déduire l'existence d'une constante réelle λ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = \lambda\, f(x).$$

B. Conclusion

(a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' = \mu\, y$, en séparant les cas : $\mu > 0$, $\mu < 0$ et $\mu = 0$.

(b) En déduire tous les éléments de $\mathcal{E}$ en exploitant le **I.4.**c.

(c) Donner tous les éléments de $\mathcal{F}$.

Partie III

On se propose d'étudier l'ensemble $\mathcal{F}$ par une méthode différente. Soit f un élément de $\mathcal{F}$. On pose $E = \{x > 0 \quad | \quad f(x) = 0\}$.

1. Montrer que $f(0) = 1$, et que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que E admet une borne inférieure que l'on note a.
3. Prouver que $f(a) = 0$ (on pourra raisonner par l'absurde). En déduire que : $a > 0$.
4. Montrer que : $\forall x \in [0, a[\,,\ f(x) > 0$.

   On pose $\omega = \dfrac{\pi}{2a}$, et on note g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \mapsto \cos(\omega x)$.
5.
   (a) Soit $q \in \mathbb{N}$; montrer que $f\left(\dfrac{a}{2^q}\right) + 1 = 2\left[f\left(\dfrac{a}{2^{q+1}}\right)\right]^2$.

   (b) En déduire, en raisonnant par récurrence sur q, que :

$$\forall q \in \mathbb{N}, \quad f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right).$$

   On démontrerait de même le résultat suivant que le candidat pourra utiliser librement :

   si $q \in \mathbb{N}$ *est fixé* : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad f\left(p\dfrac{a}{2^q}\right) = g\left(p\dfrac{a}{2^q}\right)$.
6. Montrer que l'ensemble $D_a = \left\{a\dfrac{p}{2^q} \quad / \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
7. Prouver que : $\forall x \in D_a, \quad f(x) = g(x)$.
8. En déduire que $f = g$.
9. En déduire tous les éléments de $\mathcal{F}$.

PROBLEME D'ALGEBRE

Notations et objectifs :

☐ Soit n un entier, $n \geqslant 2$; on note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, et $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des formes linéaires sur E. On rappelle que : $\dim(E) = \dim(E^*)$.

Les éléments de E sont notés $M = (m_{i\,j})$. La matrice élémentaire $E_{i\,j}$ est la matrice de E dont les coefficients sont tous nuls à l'exception de celui qui se trouve sur la i-ème ligne et sur la j-ème colonne, qui vaut 1.

Lorsque A et B sont des éléments de E, on note $A.B$ leur produit. Si $M \in E$, on note $\mathrm{Vect}(M)$ le sous-espace vectoriel engendré par M. La transposée de M est notée M^T.

☐ L'objectif du problème est de montrer que chaque hyperplan vectoriel de E possède au moins une matrice inversible.

☐ Si $M = (m_{i\,j}) \in E$, on note $T(M)$ le réel $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_{k\,k}$.

On définit ainsi une application T de E vers $\mathbb{R}$: $M \mapsto T(M)$.

A chaque matrice U de E, on associe :

- L'application T_U de E vers $\mathbb{R}$: $M \mapsto T_U(M) = T(U.M)$.
- L'ensemble $H_U = \{M \in E \quad / \quad T(U.M) = 0\}$.

Partie I : Généralités, exemples.

1. Quelques propriétés.
   (a) Montrer que T est une application linéaire.
   (b) Pour $U \in E$, prouver que l'application T_U est dans E^*.
   (c) Soit $U \in E$; reconnaître $\ker T_U$, et montrer que H_U est un sous-espace vectoriel de E.
2. *Dans cette question seulement*, on prend $n = 2$, et on pose $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Ecrire les quatre matrices élémentaires $E_{i\,j}$; que peut-on dire de la famille $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
   (b) Montrer que H_U est l'ensemble des matrices de E dont la somme des quatre coefficients vaut 0.
   (c) Trouver une matrice M de E telle que $T(U.M) \neq 0$, et en déduire la dimension de $\mathrm{Im}\, T_U$ puis la dimension de H_U.
   (d) Montrer que H_U possède une matrice inversible.
   *La partie **III** propose une généralisation de ce résultat.*

Partie II : Quelques résultats utiles pour la suite

1. Soit $A = (a_{i\,j})$ et $B = (b_{i\,j})$ des éléments de E.
   (a) Montrer que $T(A.B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j\,i} b_{i\,j}$.
   (b) En déduire les identités suivantes :

$$(I_1) \qquad T(A^T.B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j\,i} b_{i\,j} \quad .$$

$$(I_2) \qquad T(B.A) = T(A.B)$$

2. Soit U dans E.
   (a) Si U est la matrice nulle, déterminer $\dim H_U$.
   (b) Si U n'est pas la matrice nulle, montrer que l'on peut trouver un couple d'entiers (i_0, j_0) tel que $T_U(E_{i_0 j_0}) \neq 0$.
   En déduire $\dim H_U$.
3. Pour $(i, j) \in \{1, 2, ..., n\}^2$, on note $T_{i\,j} = T_{E_{j\,i}}$.
   (a) Les indices k et l étant fixés, calculer $T_{i\,j}(E_{k\,l})$ en utilisant (I_1).
   (b) En déduire que les n^2 éléments $T_{i\,j}$ de E^* permettent de définir une base de E^*.
4. Montrer que l'application φ de E vers E^* : $U \mapsto \varphi(U) = T_U$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
5. On considère un hyperplan vectoriel H de E.
   (a) Quelle est sa dimension ?
   (b) Soit A une matrice non nulle de E qui n'appartient pas à H, démontrer que : $E = H \oplus \text{Vect}(A)$.
   (c) Construire alors un élément l de E^* tel que $H = \ker l$.
   (d) Prouver l'existence d'un élément U de E tel que $H = H_U$.

Partie III : Le résultat général

Pour $1 \leqslant r \leqslant n$, on note $R_r = \sum_{i=1}^{r} E_{i\,i}$.

1. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & . & . & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & . & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $P = (p_{i\,j})$ avec

$$\begin{cases} p_{i+1\,i} = 1 & 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ p_{1\,n} = 1 & \\ p_{i\,j} = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

   (a) Montrer que P est inversible.
   (b) Prouver que P appartient à l'hyperplan H_{R_r}.
2. En déduire que chaque hyperplan vectoriel H de E possède au moins une matrice inversible.
   Indication : lorsque $H = H_U$, avec U de rang r, on rappelle l'existence de matrices S_1 et S_2 inversibles telles que $S_1.U.S_2 = R_r$.