IPESUP 2023/2024

Colle 19 MPSI/MP2I   Jeudi 21 mars 2024

★★★

Planche 1

★★★

1. Règles de calcul dans les espaces vectoriels
2. Déterminer un équivalent de $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.
   (a) au voisinage de $\frac{2}{\pi}$,
   (b) au voisinage de $+\infty$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^3 et $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^3}\left(f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)\right)$$

★★★

Planche 2

★★★

1. Définition des sous-espaces vectoriels. Caractérisation.
2. Déterminer un équivalent en 0 et en $+\infty$ de $\frac{\sqrt{x}\sin(1/x^2)}{\ln(1+x)}$.
3. On considère une suite réelle u telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n^5 + nu_n = 1$. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de cette suite.

★★★

Planche 3

★★★

1. Définition de l'espace vectoriel engendré par une partie. Montrer qu'il s'agit du plus petit sev de E qui contient A.
2. Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de $\frac{\operatorname{ch}(x) - \cos(x)}{x^{5/2}}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Déterminer une CNS pour que $f : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\tan(kx)}$ admette une limite finie en 0.

★★★

Bonus

★★★

Soit $f : x \mapsto \frac{e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)}}{x - \sin(x)}$. Montrer que f admet une limite finie en 0, est dérivable en 0 après prolongement. Étudier la position relative locale du graphe de f par rapport à sa tangente en 0.