Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Il est rappelé qu'il est tenu compte dans l'évaluation de la présentation et la rédaction des copies.

Exercice 1 : Anneau des entiers p-adiques.

Pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on note $(N(r), D(r)) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ l'unique couple de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \dfrac{N(r)}{D(r)}$ et $N(r) \wedge D(r) = 1$, i.e $N(r)$ est le numérateur dans l'écriture irréductible de r, et $D(r)$ en est le dénominateur. Dans tout ce qui suit, on fixe p un entier naturel premier. Cet exercice a pour but l'étude de l'ensemble $\mathbb{Z}_p$ défini par

$$\mathbb{Z}_p = \{r \in \mathbb{Q} | D(r) \wedge p = 1\}$$

i.e l'ensemble des **rationnels** dont le dénominateur dans leur écriture irréductible n'est pas divisible par p, puisque p est premier.

i) Montrer que $\dfrac{394}{10} \notin \mathbb{Z}_5$ et que $\dfrac{3240}{3050} \in \mathbb{Z}_7$.

ii) Montrer que $\mathbb{Z}_p$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.

iii) Soit $r \in \mathbb{Q}^*$. Montrer que $r \in \mathbb{Z}_p$ ou $\dfrac{1}{r} \in \mathbb{Z}_p$.

iv) Déterminer l'ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}_p$.

v) Soit A un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ tel que $\mathbb{Z}_p \subset A$. Montrer que $A = \mathbb{Z}_p$ ou $A = \mathbb{Q}$. *Indication : on pourra montrer que si A contient strictement $\mathbb{Z}_p$, A contient $1/p$.*

vi) Soit $r \in \mathbb{Q}^*$. Montrer qu'il existe un élément u inversible dans $\mathbb{Z}_p$ et un unique entier relatif n tel que $r = p^n u$.

On note dorénavant $\beta_p(r)$ cet unique entier relatif.

vii) Soit r_1, r_2 deux rationnels tous deux non nuls. Montrer que

$$\beta_p(r_1 r_2) = \beta_p(r_1) + \beta_p(r_2)$$

$$\beta_p(r_1 + r_2) \geq \min(\beta_p(r_1), \beta_p(r_2))$$

On convient que $\beta_p(0) = +\infty$ et on admet que ce résultat est encore valide si l'un d'entre eux est nul, à l'aide des conventions $n + (+\infty) = +\infty$ et $n < +\infty$ pour tout n dans $\mathbb{Z}$.

viii) Démontrer que $\mathbb{Z}_p = \{r \in \mathbb{Q} | \beta_p(r) \geq 0\}$.

ix) Démontrer que

$$\bigcap_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}$$

Exercice 2 : Quelques matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes dont tous les coefficients sont des entiers relatifs. On admet que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}), +, \times)$ est un anneau. Pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, on note $\delta(A) = ad - bc$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $AB = BA = I_2$. Existe-t-il une matrice C dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que $AC = CA = I_2$?
2. Montrer que
$$\forall (A_1, A_2) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^2, \delta(A_1 A_2) = \delta(A_1)\delta(A_2)$$
3. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ tel que $AB = BA = I_2$. Montrer qu'alors $\delta(A) = 1$ ou $\delta(A) = -1$.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ tel que $|\delta(A)| = 1$. Construire $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ tel que $AB = BA = I_2$.
5. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. On note $d = a \wedge b$ leur pgcd. Construire $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ tel que $|\delta(M)| = 1$ et

$$M\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : Fonctions fortement convexes

Soit I un intevalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, et $\alpha > 0$. On dit que f est α-convexe lorsque

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - \frac{\alpha}{2}\lambda(1-\lambda)(x-y)^2$$

On dit que f est fortement convexe lorsqu'il existe un réel strictement positif α tel que f est α-convexe.

1. Soit $(x, y) \in I^2$. On pose $\varphi_{x,y} : [0, 1] \to \mathbb{R}, t \mapsto f(x + t(y-x))$. Montrer que $\varphi_{x,y}$ est de classe C^1 et exprimer sa dérivée.
2. On suppose que f est convexe. Montrer que pour tout $(x, y) \in I^2$, $\varphi_{x,y}$ est convexe.
3. On suppose toujours que f est convexe. En déduire
$$\forall (x, y) \in I^2, f(y) - f(x) \geq f'(x)(y-x)$$
4. On suppose que f vérifie
$$\forall (x, y) \in I^2, f(y) - f(x) \geq f'(x)(y-x)$$
Démontrer que f est convexe.
5. Soit $\alpha > 0$. Démontrer l'équivalence : f est α-convexe si et seulement si la fonction $I \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - \frac{\alpha}{2}x^2$ est convexe.
6. Soit $\alpha > 0$. Dans cette question, on suppose que f est α-convexe
   (a) Démontrer que f est convexe, puis que
   $$\forall (x, y) \in I^2, \alpha(x-y)^2 \leq (f'(x) - f'(y))(x-y)$$
   (b) Montrer que
   $$\forall (x, y) \in I^2, f(y) - f(x) \geq f'(x)(y-x) + \frac{\alpha}{2}(x-y)^2$$
   (c) Dans le cas où $I = \mathbb{R}$, démontrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$
7. Soit $\alpha > 0$. Dans cette question, on suppose que f est de classe C^2. Montrer que f est α-convexe si et seulement si $f'' \geq \alpha$.
8. Un exemple : soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^4 - ax^2 + 1$.
   (a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que f soit convexe.
   (b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que f soit fortement convexe.
9. On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fortement convexe et de classe C^1 et $\mathcal{E} = \{x^* \in \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R}, f(x^*) \leq f(x)\}$, l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ où f atteint un minimum global.
   (a) Montrer que $\mathcal{E}$ est non vide.
   (b) Montrer que $\mathcal{E}$ est convexe.
   (c) Montrer enfin que $\mathcal{E}$ est réduit à un point.
10. Soit $\alpha > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction α-convexe et de classe C^1. On note x^* l'unique réel où f atteint son minimum global (légitime d'après les résultats de la question 8). On suppose de plus que f' est M-Lipschitzienne. Soit $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs, $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit par récurrence la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ via
$$\forall k \in \mathbb{N}, x_{k+1} = x_k - \lambda_k f'(x_k)$$
   (a) Montrer que $M \geq \alpha$.
   (b) Montrer que
   $$\forall k \in \mathbb{N}, (x_{k+1} - x^*)^2 \leq (M^2\lambda_k^2 - 2\alpha\lambda_k + 1)(x_k - x^*)^2$$

(c) Soit $\Psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, t \mapsto M^2 t^2 - 2\alpha t + 1$. Déterminer deux réels positifs a et b tels que $a < b$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, (\Psi(t) \leq 1 \iff t \in [a, b])$$

(d) Soit a' et b' deux réels positifs tels que $a < a' < b' < b$. Montrer que, si pour tout k dans $\mathbb{N}$, λ_k appartient à $[a', b']$, alors il existe β dans $[0, 1[$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, |x_{k+1} - x^*| \leq \beta |x_k - x^*|$$

En déduire dans ce cas, la convergence de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vers x^*.

(e) Établir la relation

$$\forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq f(x_k) - f(x^*) \leq M(x_k - x^*)^2$$