Problème : Ouverts de $\mathbb{R}$

L'objectif de ce problème est l'étude des ouverts de $\mathbb{R}$. Afin de respecter la logique de l'énoncé, vous ne pouvez pas utiliser la notion d'intervalle ouvert introduite en cours, mais vous pouvez utiliser la caractérisation des intervalles comme convexes de $\mathbb{R}$. Faites attention à bien distinguer inégalités larges et strictes dans le cadre de ce problème.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est ouverte (un ouvert, ou une partie ouverte), lorsqu'elle vérifie la propriété

$$\forall a \in A, \exists \varepsilon > 0,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset A$$

Soit X une partie de $\mathbb{R}$. On dit que X est dénombrable lorsqu'il existe une bijection de X dans $\mathbb{N}$. On dit que X est au plus dénombrable lorsqu'il existe un injection de X dans $\mathbb{N}$, ce qui équivaut à (on l'admet) X fini ou dénombrable. On admet que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

1. Exemples de parties ouvertes et non ouvertes.
   (a) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha < \beta$. Montrer que l'intervalle $]\alpha, \beta[$ est une partie ouverte.
   (b) Soit $b \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intervalle $[b, +\infty[$ n'est pas ouvert.
   (c) Montrer que l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ n'est pas ouvert.
2. Soit A_1 et A_2 deux parties ouvertes de $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $A_1 \cup A_2$ est ouvert.
   (b) Montrer qu'une union quelconque d'ouverts est ouvert.
   (c) Montrer que $A_1 \cap A_2$ est ouvert.
   (d) Montrer qu'une intersection finie d'ouverts est ouvert.
   (e) Montrer que $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$ n'est pas ouvert.
3. Soit A une partie ouverte, non vide et bornée de $\mathbb{R}$.
   (a) Rappeler la définition de la borne supérieure de A.
   (b) On suppose que $\sup(A) \in A$. Montrer qu'alors A possède un élément strictement plus grand que $\sup(A)$.
   (c) En déduire que $\sup(A) \notin A$.
   (d) Que dire de $\inf(A)$?
4. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ au sens de la définition donnée dans ce problème. Montrer que I est de l'une des formes suivantes :
$$\emptyset, \quad]\alpha, \beta[, \quad]\alpha, +\infty[, \quad]-\infty, \beta[, \quad \mathbb{R}$$
5. Donner un exemple de partie ouverte et dense dans $\mathbb{R}$ différente de $\mathbb{R}$.
6. Soit A une partie ouverte non vide de $\mathbb{R}$. On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ suivante sur A :
$$\forall (a_1, a_2) \in A^2, a_1 \mathcal{R} a_2 \iff [\min(a_1, a_2), \max(a_1, a_2)] \subset A$$
   (a) Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
   (b) Soit $a \in A$. Montrer que la classe d'équivalence de a pour la relation $\mathcal{R}$, notée $C(a)$, est un intervalle.
   (c) Soit $a \in A$. Montrer que la classe d'équivalence de a pour la relation $\mathcal{R}$, notée $C(a)$, est ouverte.
   (d) En déduire que A est une réunion disjointes au plus dénombrable d'intervalles ouverts non vides, i.e qu'il existe un ensemble fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$ d'indices K, et une famille d'intervalles ouverts non vides $(I_k)_{k \in K}$ disjoints tels que $A = \displaystyle\bigcup_{k \in K} I_k$.
7. On considère une famille dénombrable $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties ouvertes et denses dans $\mathbb{R}$ et on note $B = \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$.

(a) Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Construire deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels vérifiant les critères suivants :

   i. $[u_0, v_0] \subset I \cap V_0$

   ii. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$

   iii. $\forall n \in \mathbb{N}, [u_{n+1}, v_{n+1}] \subset]u_n, v_n[\cap V_{n+1}$.

(b) Démontrer que $I \cap B$ est non vide.

(c) En déduire que B est dense dans $\mathbb{R}$.

(d) Que dire de B privé d'une partie au plus dénombrable ?

Le résultat 7.c) s'appelle le théorème de Baire, valable dans des espaces bien plus abstraits. On dit que B est un ensemble gras.