Les questions de cours portent sur les éléments du chapitre 7 : topologie réelle, précédés d'un astérisque. Les exercices portent sur le chapitre 6 : calcul intégral, équations différentielles. Les notions de primitives sont encore mal assimilées.

Chapitre 7 : Topologie réelle.

— Ensembles $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$. Droite réelle achevée $(\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\},\leq)$. Approximations décimales à l'ordre n par excès (resp. par défaut) d'un réel x donné. ($\star$) Encadrement et convergence. Intervalle ouvert. Une partie X de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ssi elle rencontre tout intervalle ouvert non vide. ($\star$) Caractérisation séquentielle de la densité. ($\star$) $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$. Application aux fonctions additives. Tout intervalle ouvert non vide contient une infinité de rationnels et une infinité d'irrationnels.

— Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure. ($\star$) Caractérisation pour X non vide majorée et a réel : $a=\sup(X) \iff (\forall x\in X, x\leq a)\wedge(\forall y<a, \exists x\in X, y<x)$. Convention $\sup\emptyset=-\infty$ si X vide et $\sup(X)=+\infty$ si X non vide non majorée. ($\star$) Si X admet un maximum, $\sup(X)=\max(X)$. Croissance de la borne supérieure par rapport à l'inclusion sur les parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. ($\star$) Caractérisation séquentielle de la borne supérieure pour X non vide majorée et a réel : $a=\sup(X) \iff (\forall x\in X, x\leq a)\wedge(\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in X^{\mathbb{N}}, x_n\longrightarrow a)$. Les étudiants peuvent « passer au sup » dans les inégalités $\forall x\in X, x\leq a \Rightarrow \sup(X)\leq a$ mais doivent savoir l'expliquer à l'oral. Exemple $\sup(A+B), \sup(\lambda A)$ pour $\lambda>0$.

— Borne inférieure d'une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$. ($\star$) Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure et $\inf(A)=-\sup(-A)$. Traductions de toutes les propriétés précédentes. $\inf(\emptyset)=+\infty$ pour X vide, et $\inf(X)=-\infty$ et non vide non minorée. Caractérisations, cas de la borne inf atteinte, décroissance pour l'inclusion. Exemple $d(y,X)=\inf\{|y-x| | x\in X\}$. Étude de la fonction $x\mapsto d(x,\mathbb{Z})$. Même remarque pour les « passages à l'inf ».

— On rappelle que les intervalles de $\mathbb{R}$ ont été définis par une liste de dix cas. Partie convexe de $\mathbb{R}$. Tout intervalle est convexe ($\star$) Toute partie convexe de $\mathbb{R}$ est un intervalle. Démonstration de la bonne définition de la partie entière d'un réel x. Croissance de la partie entière. $\mathbb{R}$ est archimédien.

— Bornes supérieure et inférieure d'une application à valeurs réelles. Etude de la norme infinie $\|f\|_\infty=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$ sur l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$\star$ $\star$ $\star$ $\star$ $\star$