Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Il est rappelé qu'il est tenu compte dans l'évaluation de la présentation et la rédaction des copies.

Exercice 1 : Une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel n, on note $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1}\,dx$.

1. Calculer J_1 et $J_0 + J_1$. En déduire J_0.
2. Calculer $J_n + J_{n+1}$ pour tout entier naturel n.
3. Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. (a) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], \dfrac{e^{nx}}{e+1} \leq \dfrac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \dfrac{e^{nx}}{2}$.
   (b) En déduire un encadrement de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (c) Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite, la préciser.

Exercice 2 : Une suite définie par récurrence

Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit par récurrence la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = |u_n - n|$. On cherche à étudier le comportement en $+\infty$ de cette suite.

1. Montrer qu'il existe un entier naturel p tel que $u_p \leq p$.
2. Montrer qu'alors $\forall n \geq p, u_n \leq n$.
3. Déterminer deux réels a et b tels que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a + bn)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+1} + \alpha_n = n$.
4. On note $(\beta_n)_{n\geq p} = (u_n - \alpha_n)_{n\geq p}$. Donner une expression pour tout réel n supérieur à p de β_n en fonction de β_p et n.
5. En déduire que $2u_n/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Problème : Une partie dense

Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on dit que A dense dans $[-1,1]$ lorsque $\forall (x,y) \in [-1,1]^2, x < y, \exists a \in A, x < a < y$. On considère la partie $E = \left\{\cos\left(\sqrt{n}\right) \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ de $\mathbb{R}$. L'objectif de cet exercice est de démontrer que cette partie est dense dans $[-1,1]$.

1. Une caractérisation séquentielle dans la densité dans $[-1,1]$. On considère une partie A de $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que si A est dense dans $[-1,1]$, alors $\forall x \in [-1,1], \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.
   (b) Réciproquement, montrer que si $\forall x \in [-1,1], \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, alors A est dense dans $[-1,1]$.
   (c) Démontrer que $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$ est dense dans $[-1,1]$.
2. On note $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}, x \mapsto e^{i\sqrt{x}}$.
   (a) Justifier que f est dérivable et donner une expression de sa dérivée. Montrer en particulier que
   $$\forall x > 0, \left|f'(x)\right| = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
   (b) Démontrer que pour tous réels strictement positifs x, y tels que $x \leq y$.
   $$\left|e^{i\sqrt{x}} - e^{i\sqrt{y}}\right| \leq \frac{|x-y|}{2\sqrt{x}}$$

3. Soit $x \in [-1, 1]$.
   (a) Justifier l'existence d'un réel θ dans $[0, \pi]$ tel que $x = \cos(\theta)$.
   (b) Construire une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \sqrt{x_k} = \theta + 2k\pi$.
   (c) Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, on note $n_k = \lfloor x_k \rfloor$. Montrer que la suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.
   (d) Montrer que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \left|e^{i\theta} - e^{i\sqrt{n_k}}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{n_k}}$$
   (e) En déduire que la suite $(\cos(\sqrt{n_k}))_{k\in\mathbb{N}^*}$ tend vers x.
4. Conclure quant à la densité de E dans $[-1, 1]$.