Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Il est rappelé qu'il est tenu compte dans l'évaluation de la présentation et la rédaction des copies.

Exercice 1. Inégalité de Bernstein

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $Q = X^n + 1 \in \mathbb{C}[X]$ et $z_1, \dots, z_n$ les racines de Q.

1. Donner une expression des racines $z_1, \dots, z_n$ de Q et indiquer pour chacune sa multiplicité.
2. Soit $m \in [\![0, n]\!]$. On note $F = \dfrac{X^m}{X^n + 1} \in \mathbb{C}(X)$.
   (a) Indiquer l'ensemble des racines et des pôles de F en indiquant à chaque fois leur multiplicité.
   (b) Déterminer la partie entière de F selon les valeurs de m.
   (c) En effectuant la décomposition en éléments simples de F, montrer que
   $$F = \delta_{m,n} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k^{m+1}}{X - z_k}$$
   (d) En déduire que
   $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k^{m+1}}{(X - z_k)^2} = \frac{mX^{m-1}(X^n+1) - nX^{n-1}X^m}{(X^n+1)^2}$$
   (e) En déduire que le polynôme $P = X^m$ vérifie l'égalité suivante
   $$XP'(X) = \frac{n}{2}P(X) + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k P(z_k X)}{(z_k - 1)^2}$$
3. Montrer que
   $$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], XP'(X) = \frac{n}{2}P(X) + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k P(z_k X)}{(z_k - 1)^2}$$
4. Soit z un complexe de module 1, distinct de 1. Montrer que $\dfrac{z}{(z-1)^2}$ est un réel strictement négatif.
5. En déduire que
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|}{|z_k - 1|^2} = \frac{n^2}{4}$$
6. On rappelle que $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des complexes de module 1. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on note $\|P\| = \sup_{z \in \mathbb{U}} |P(z)|$. Justifer la bonne définition de cette borne supérieure.
7. Démontrer l'inégalité de Bernstein
   $$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \left\|P'\right\| \le n\|P\|$$

Exercice 2. Développement asymptotique d'une suite implicite

1. Pour tout entier naturel non nul n, faire l'étude des variations de la fonction
   $$f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$$
2. Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! u_n \in \mathbb{R}^+, u_n^n + u_n^{n-1} + \cdots + u_n - 1 = 0$$

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 1$.
4. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante.
5. Démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^{n+1} - 2u_n + 1 = 0$$
6. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente de limite 1/2.
7. Démontrer la relation de prépondérance quand n tend vers $+\infty$
$$u_n = \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
Indication : introduire la suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 2} = (u_n - 1/2)_{n\geq 2}$.
8. Démontrer le développement asymptotique quand n tend vers $+\infty$
$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+2}} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

Problème : Autour des nombres de Catalan

Pour tout entier n dans $\mathbb{N}$, on note $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$. Il est appelé n-ième nombre de Catalan. Pour tout réel α et tout entier naturel n, on note
$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!}$$
le coefficient binomial généralisé « n parmi α ». Enfin, on note $\varphi : x \mapsto \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

A. Quelques calculs intermédiaires.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $C_n = \dfrac{1}{4n+2}\dbinom{2n+2}{n+1}$.
2. Montrer que
$$\binom{-3}{n} = \frac{(-1)^n}{2}(n+1)(n+2)$$
3. Montrer que
$$\binom{1/2}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{4^n(2n-1)}\binom{2n}{n}$$
4. Pour tout entier p dans $[\![0, n]\!]$, on note $I_p = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^{2n-p}dt$. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation de récurrence sur la suite $(I_p)_{0\leq p\leq n}$ et en déduire que $I_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

B. Étude de φ.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner l'ensemble de définition D_φ de la fonction φ.
2. La fonction φ admet-elle une limite finie en 0 ? Si oui, préciser cette limite. Par abus de notation, nous notons encore φ le prolongement par continuité en 0 de φ.
3. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre $n+1$ de $\sqrt{1-4x}$.
4. En déduire que le développement limité en 0 à l'ordre n de $\varphi(x)$ est de la forme
$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{n} C_j x^j + o(x^n)$$
5. Montrer que
$$\forall x \in D_\varphi \cup \{0\}, 1 + x\varphi(x)^2 = \varphi(x)$$

C. Nombres de Catalan.

1. A l'aide de la relation fonctionnelle vérifiée par φ, démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

   En déduire que les nombres de Catalan sont tous des entiers naturels.

2. A l'aide de la formule de Stirling, démontrer l'équivalent

$$C_n \sim_{n\to+\infty} \frac{4^n}{n^{3/2}\sqrt{\pi}}$$

D. Série des inverses de Catalan

L'objectif de cette partie est de déterminer la limite de la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_k}$.

1. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre n de $\frac{1}{(1-x)^3}$.
2. En déduire que le développement limité en 0 à l'ordre n de $\frac{3x+1}{(1-x)^3}$ s'écrit sous la forme

$$\frac{3x+1}{(1-x)^3} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (k+1)(2k+1)x^k + o(x^n)$$

3. En déduire la relation de prépondérance suivante au voisinage de 0 :

$$\frac{1+3x-3x^2}{(1-x+x^2)^3} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (k+1)(2k+1)x^k(1-x)^k + o\left(x^n(1-x)^n\right)$$

4. Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle $F = \frac{3X+1}{(1-X)^3}$. *Indication : forcer l'apparition de* $1-X$ *au numérateur.*
5. En déduire la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle $G = \frac{1+3X-3X^2}{(1-X+X^2)^3}$.
6. En déduire une primitive de $x \mapsto \frac{1+3x-3x^2}{(1-x+x^2)^3}$. *Indication : on pourra s'aider de la fonction* $g : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$.
7. Démontrer que $S_n = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (k+1)(2k+1)t^k(1-t)^k\right) dt$.

On admet que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente de limite* $\int_0^1 \frac{1+3x-3x^2}{(1-x+x^2)^3}\,dx$.

8. Démontrer que cette limite vaut $2 + \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}$.
9. *Question bonus* : Démontrer la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers l'intégrale précitée.