Ipesup 2023/2024

Colle 23 MPSI/MP2I   Jeudi 02 mai 2024

★★★

Planche 1

★★★

1. Théorème du rang, deux formes.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pour tout x dans E, la famille $(x, u(x))$ est liée. Montrer que
$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, u(x) = \lambda x$$
3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose disposer d'un entier naturel non nul p tel que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$. On note $\Phi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E), v \mapsto u \circ v - v \circ u$.
   (a) Démontrer
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall v \in \mathcal{L}(E), \Phi^n(v) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} u^{n-k} \circ v \circ u^k$$
   (b) En déduire que $\Phi^{2p-1} = 0$ et $\Phi^{2p-2} \neq 0$.

★★★

Planche 2

★★★

1. Définition d'un hyperplan. Que dire d'une droite non contenue dans un hyperplan ?
2. Soit a, b, c trois réels tous non nuls et distincts. On considère
$$E = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} - (a+b+c)u_{n+2} + (ab+bc+ac)u_{n+1} - (abc)u_n = 0\right\}$$
   Montrer que $\varphi : E \to \mathbb{R}^3, u \mapsto (u_0, u_1, u_2)$ est un isomorphisme d'espace vectoriels, puis déterminer une base de E.
3. Soit u, v, w trois endomorphismes de E tels que $u \circ v = w$, $v \circ w = u$ et $w \circ u = v$.
   (a) Montrer que $\ker(u) = \ker(v) = \ker(w)$ et $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(v) = \mathrm{Im}(w)$.
   (b) Montrer que $u^5 = u$.
   (c) Montrer que $E = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

★★★

Planche 3

★★★

1. Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies. Que dire de la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$?
2. Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies et $u \in \mathcal{L}(E)$. Déterminer la dimension du sous-espace
$$\{v \in \mathcal{L}(E, F) | v \circ u = 0\}$$
3. Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ une famille de p formes linéaires sur E.
   (a) On suppose que cette famille est libre dans E^*. Soit $\varphi \in E^*$. Démontrer
$$\varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) \iff \bigcap_{i=1}^{p} \ker(\varphi_i) \subset \ker(\varphi)$$
   (b) On suppose de plus que $\bigcap_{i=1}^{p} \ker(\varphi_i) = \{0\}$. Démontrer que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est génératrice de E^*.