Ipesup 2023/2024

Colle 24 MPSI/MP2I Jeudi 16 mai 2024

⋆⋆⋆

Planche 1

⋆⋆⋆

1. Énoncer un résultat sur les matrices de composées d'applications linéaires. Le démontrer.
2. Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ sont semblables.
3. Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. Déterminer l'ensemble des matrices $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que
$$X + \mathrm{Tr}(X)A = B$$

⋆⋆⋆

Planche 2

⋆⋆⋆

1. Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice carrée à l'aide du noyau, de l'image, et/ou des colonnes.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $\psi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), M \mapsto AM + MA$. Déterminer une matrice de ψ, puis calculer sa trace.
3. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ une application non constante. On suppose que
$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, f(AB) = f(A)f(B)$$
Démontrer alors
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), [f(A) = 0 \iff A \in GL_n(\mathbb{C})]$$

⋆⋆⋆

Planche 3

⋆⋆⋆

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ de rang r. Construire deux bases pour former une matrice simple de u.
2. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{rg}(B) = 1$. Montrer que $A + B$ est inversible si et seulement si $1 + \mathrm{Tr}(A^{-1}B)$ est non nul.
3. Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. On note, à l'aide de matrices par blocs, $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.
   (a) Calculer le rang de M en fonction de A et B.
   (b) Déterminer une CNS pour que M soit inversible et calculer son inverse le cas échéant.

⋆⋆⋆

Bonus

⋆⋆⋆

Montrer que toute matrice carrée est semblable à sa transposée.