IPESUP 2023/2024

Colle 10 MPSI/MP2I   Jeudi 21 décembre 2023

★★★

Planche 1

★★★

1. Dérivabilité d'une fonction réciproque.
2. On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 \tan(1/x)\sin(2/x)$ si $x \neq 0$, 0 si $x = 0$. Montrer que f est dérivable en 0.
3. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sup_{t \leqslant x} f(t) = x$$

★★★

Planche 2

★★★

1. Théorème de Rolle.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Étudier la limite éventuelle de $x \mapsto \dfrac{xf(a) - af(x)}{x - a}$ quand x tend vers a. La préciser.
3. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et surjective. Montrer que f s'annule une infinité de fois.

★★★

Planche 3

★★★

1. Caractérisation des fonctions dérivables croissantes sur un intervalle.
2. On considère une fonction de classe C^1. On suppose que f est bornée et que f' possède une limite finie ℓ en $+\infty$. Déterminer ℓ.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = +\infty$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f'(c) = 0$.

★★★

Bonus

★★★

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, a \neq b \Rightarrow f'(c) \neq \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

Montrer que $f''(c) = 0$.