IPESUP 2023/2024

Colle 21 MPSI/MP2I   Jeudi 04 avril 2024

★★★

Planche 1

★★★

1. Théorème de Heine
2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \sin(\ln(t))dt$.
3. Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_a^b \cos(nt^2)dt$. Étudier l'éventuelle limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

★★★

Planche 2

★★★

1. Linéarité de l'intégrale
2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^2\sqrt{1-t}dt$.
3. Pour tout réel x strictement positif, on note $f(x) = \displaystyle\int_1^x e^{-x^2t^2}\frac{dt}{t}$. Étudier f et rechercher en particulier ses extrema éventuels.

★★★

Planche 3

★★★

1. Théorème des sommes de Riemann
2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3(t)dt$.
3. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} \left|P\left(e^{it}\right)\right|^2 dt = 2\pi\sum_{k=0}^{n}|a_k|^2$$

★★★

Bonus

★★★

Montrer que $\forall n \geqslant 2$, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$.