Ipesup 2025/2026

Colle 5 filière PCSI Vendredi 7 novembre 2025

⋆⋆⋆

Planche 1

⋆⋆⋆

1. Binôme. Énoncé et démonstration.
2. Soit $f : E \to F$ une application injective et A une partie de E. Montrer que $A = f^{-1}(f(A))$. Est-ce encore vrai si f n'est pas injective ?
3. On définit une suite réelle u par $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel non nul n,

$$u_{2n} = u_n, \quad u_{2n+1} = (-1)^n u_n.$$

Calculer pour tout entier naturel n, $\displaystyle\sum_{k=1}^{4n} u_k u_{k+2}$.

⋆⋆⋆

Planche 2

⋆⋆⋆

1. Caractérisation de la bijectivité à l'aide de compositions. Énoncé et démonstration.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x + a$ si $x \geqslant 0$ et $x - a$ sinon. À quelle condition nécessaire et suffisante sur a, la fonction f est-elle injective ? surjective ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$.

⋆⋆⋆

Planche 3

⋆⋆⋆

1. Factorisation d'un polynôme P par $X - a$ lorsque $P(a) = 0$. Énoncé et démonstration.
2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \tan\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right).$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

⋆⋆⋆

Bonus

⋆⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ des réels. Montrer qu'il existe une bijection σ de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ telle que

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_{\sigma(k)}$$