Chaque colle comporte une question de cours ainsi qu'un ou plusieurs exercices.

1 Questions de cours.

- Toute définition, tout résultat dans l'ensemble des notions abordées doit être parfaitement su et peut être ajouté aux items suivants.
- Images directes et réciproques d'une union et d'une intersection. Énoncé et démonstration.
- Caractérisation de la bijectivité à l'aide de compositions. Énoncé et démonstration.
- Factorisation d'un polynôme P par $X-a$ lorsque $P(a)=0$. Énoncé et démonstration.
- Binôme (de Newton). Énoncé et démonstration.

2 Exercices.

Ils peuvent porter sur le chapitre le chapitre 4 : applications et le chapitre 5 : sommes et produits finis.

3 Chapitre 4 : applications

Notion d'application

Notion de produit cartésien, de graphe fonctionnel, d'application. Notation $f : E \to F, x \mapsto f(x)$. On différencie peu les notions de fonction et d'application, mais les étudiants doivent savoir déterminer l'ensemble de définition d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Application identité de E, Id_E, fonctions indicatrices d'une partie.

Opérations, ...jections

Restriction, corestriction d'une application. Image directe $f(A)$ d'une partie A de E par f, image réciproque $f^{-1}(B)$ d'une partie B de F par f. Images directes et réciproques d'une union et d'une intersection. Injection, surjection, bijection. $f : E \to F$ est une bijection ssi $\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$. Application réciproque d'une application bijective. Composition d'applications, associativité, neutre de l'identité. $f : E \to F$ est bijective ssi on dispose de $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, auquel cas $g = f^{-1}$. Composition d'applications bijectives, réciproque de la composée. Caractérisation des fonctions bijectives $f : E \to F$ dans le cas E et F finis de même cardinal.

Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème des valeurs intermédiaires. Toute fonction continue et monotone sur un intervalle induit une surjection sur l'intervalle image déterminé par les valeurs ou limites pertinentes. Toute fonction strictement monotone est injective. Conditions suffisantes de stricte monotonie à l'aide de la dérivée en cas de dérivabilité. Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle induit une bijection sur l'intervalle image déterminé par les valeurs ou limites pertinentes. Sa réciproque est alors monotone de même monotonie.

4 Chapitre 5 : sommes et produits finis

Sommes finies

Notion de somme finie d'une famille de complexes. Expressions factorisées de $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$. Linéarité, changement de variable. La rédaction des changements de variables n'est pas rigoureuse, même si les étudiants doivent savoir que cela repose sur la notion de bijection. Somme sur un ensemble vide. Somme télescopique. Factorisation de $a^n - b^n$ par $a-b$. Factorisation d'un polynôme P par $X-a$ lorsque $P(a)=0$. Sommes de suites géométriques, arithmétiques. $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$, $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$. Découpage de sommes, sommes doubles, rectangulaires, triangulaires.

Produits finis et binôme

Notion de produit fini d'une famille de complexes. $\prod_{i=1}^{n} a_i b_i$, $\prod_{i=1}^{n} \lambda a_i$, produit vide, changement de variable. Produit télescopique. Factorielle d'un entier. Coefficient binomial $\binom{n}{k}$. Symétrie, relation de Pascal. Binôme, application à la linéarisation de $\cos^n(x), \sin^n(x)$, à la mise sous forme polynomiale $\cos(nx) = P(\cos(x))$. Technique de dérivation pour le calcul de somme.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆