Exercices - Calcul intégral, équations différentielles

Cornou Jean Louis

23 octobre 2025

1 Calcul intégral

1.1 Quelques intégrales

Calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos^3(x)dx.$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \tan^2(x)dx.$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}dx.$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)}dx.$
5. $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{inx}dx$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
6. $\displaystyle\int_0^{1} \arcsin(x)dx.$
7. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{2x-1}{x+1}dx.$
8. $\displaystyle\int_4^{5} \frac{1}{x^2-4x+4}dx.$
9. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x-3}{x^2-3x+2}dx.$
10. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{2-5x}{1+x^2}dx.$
11. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{1+x+x^2}dx.$
12. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{4-x}}dx.$
13. $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x-1}dx.$
14. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^3(x)dx.$
15. $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x^{17}}{\sqrt{1-x^2}}dx.$
16. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\sin(2x)}{(1+\cos(x))^2}dx.$
17. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin(x)+\cos(x)}dx.$

1.2 Quelques primitives

Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant à chaque fois l'intervalle utilisé.

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}.$
2. $x \mapsto (x+2)\sqrt{3x+6}.$
3. $x \mapsto \dfrac{3x-1}{x^2+1}.$
4. $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}.$
5. $x \mapsto (x-1)\sqrt{x}.$
6. $x \mapsto \dfrac{e^x}{2+e^x}.$
7. $x \mapsto \dfrac{\sin(2x)}{1+\cos^2(x)}.$
8. $x \mapsto \dfrac{1-\ln(x)}{x}.$
9. $x \mapsto \dfrac{\sin(\ln(x))}{x}.$
10. $x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}.$
11. $x \mapsto 2^x+2^{-x}.$
12. $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\tan(x)}}.$
13. $x \mapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$
14. $x \mapsto \dfrac{1}{\arcsin(x)\sqrt{1-x^2}}.$
15. $x \mapsto e^{e^x+x}.$
16. $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}.$
17. $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{sh}(x)}.$
18. $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{th}(x)}.$
19. $x \mapsto \dfrac{|\ln(x)|}{x}.$
20. $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{e^x}.$
21. $x \mapsto \sin(\ln(x)).$
22. $x \mapsto x\arctan(x).$
23. $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos^3(x)}.$
24. $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}.$
25. $x \mapsto x^2e^{2x}.$
26. $x \mapsto x\arctan(x).$
27. $x \mapsto \dfrac{x}{\cos^2(x)}.$
28. $x \mapsto e^{\arcsin(x)}.$
29. $x \mapsto \dfrac{x^2\arctan(x)}{1+x^2}.$
30. $x \mapsto e^{\sqrt{x}}.$
31. $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}.$

1.3 Intégrales de Wallis ♡

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt$.

1. (a) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)dt.$$
   (b) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n+1} = \int_0^1 \left(1-u^2\right)^n du.$$
2. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire que cette suite est convergente.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, W_{n+1} = \frac{n}{n+1} W_{n-1}$$
4. En déduire que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, puis déterminer cette constante.
5. Démontrer que $W_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
6. Démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, W_n W_{n+1} \leq W_n^2 \leq W_n W_{n-1}.$$
7. En déduire que
$$\sqrt{n} W_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$
8. Exprimer W_n pour tout entier n sous forme de produit selon la parité de n.

1.4 Dépendance dans les bornes

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$$

Montrer que f est dérivable, puis faire l'étude complète de f. On pourra pour cela introduire une primitive G de $t \mapsto (1+t^4)^{-1/2}$, puis exprimer f en fonction de G.

1.5 Suite d'intégrales

Pour tout entier naturel n, on pose $J_n = \int_0^1 (1-t)^n e^{-2t} dt$.

1. Calculer J_0 et J_1.
2. Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, positive et tend vers 0.
3. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, 2J_{n+1} = 1 - (n+1)J_n.$$
4. Montrer que les suites $(nJ_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $((n+1)^2 J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et préciser leurs limites respectives.

1.6 Une équation fonctionnelle

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue qui vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x f(t)dt$$

1. Montrer que f est dérivable et que $f' = f$.
2. En déduire que $f = 0$.

2 Équations différentielles

2.1 Premier ordre

Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles où elles peuvent être mises sous forme résolue :

1. $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$.
2. $y' = 3y + (3x^2 + 1)e^{2x}$.
3. $y' = \frac{1}{x}y$.
4. $y' + y\tan(x) = \cos^2(x)$.
5. $(1 + x)y' + y = 1 + \ln(1 + x)$.
6. $(x\ln x)y' = -\frac{1}{x}(\ln(x) + 1)$.
7. $2xy' + y = x^n$ où $n \in \mathbb{N}$.
8. $\mathrm{ch}(x)y' + \mathrm{sh}(x)y = 1$.

2.2 Deuxième ordre

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes. On précisera à chaque fois les solutions à valeurs réelles et les solutions à valeurs complexes.

1. $y'' + y' - 6y = 1 - 8x - 30x^2$.
2. $y'' + 4y = -4x^3 - 8x^2 + 2x + 4$.
3. $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$.
4. $y'' - 3y' + 2y = (-3x^2 + 10x - 7)e^x$.
5. $y'' + 2y' + y = x\mathrm{ch}(x)$.
6. $my'' + \delta y' + ky = \mathrm{A}e^{i\omega x}$, où $m, \delta, k, \mathrm{A}, \omega$ sont des réels strictement positifs.

2.3 Équation fonctionnelle

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$$

On pourra étudier le fait que f puisse s'annuler, étudier sa parité, puis tenter une double dérivation.

2.4

À l'aide du changement de fonction inconnue, $z = xy$, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$xy'' + 2(x + 1)y' + (x + 2)y = 0$$

2.5

À l'aide du changement de fonction inconnue $z = y \circ \exp$, résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle

$$y'(x) = y\left(\frac{1}{x}\right)$$

2.6 Raccordement

On considère l'équation différentielle linéaire (E) : $xy' - 2y = x^3$.

1. Résoudre (E) sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, puis sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$.
2. Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux réels λ, μ tels que
$$\forall x > 0, y(x) = \lambda x^2 + x^3 \quad \text{et} \quad \forall x < 0, y(x) = \mu x^2 + x^3$$
3. En utilisant la continuité et la dérivabilité de y en 0, déterminer des conditions nécessaires sur les réels λ et μ.
4. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

2.7

Détermner l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f'(x) = f(0) + f(1)$$

2.8 Une équation intégrale

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables, de dérivée seconde continue telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt = 1$$

2.9 Décomposition d'une équation différentielle ✠

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = xe^x$$

La phase d'analyse utilisera la décomposition d'une telle solution en fonction paire et impaire.

2.10 Une solution particulière

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On pose pour tout réel x

$$f(x) = \int_0^x g(t)\sin(x-t)dt.$$

1. Montrer que f est dérivable et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^x g(t)\cos(x-t)dt.$$

2. Montrer que f' est dérivable et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(x) = g(x)$$

3. En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + y = g$.