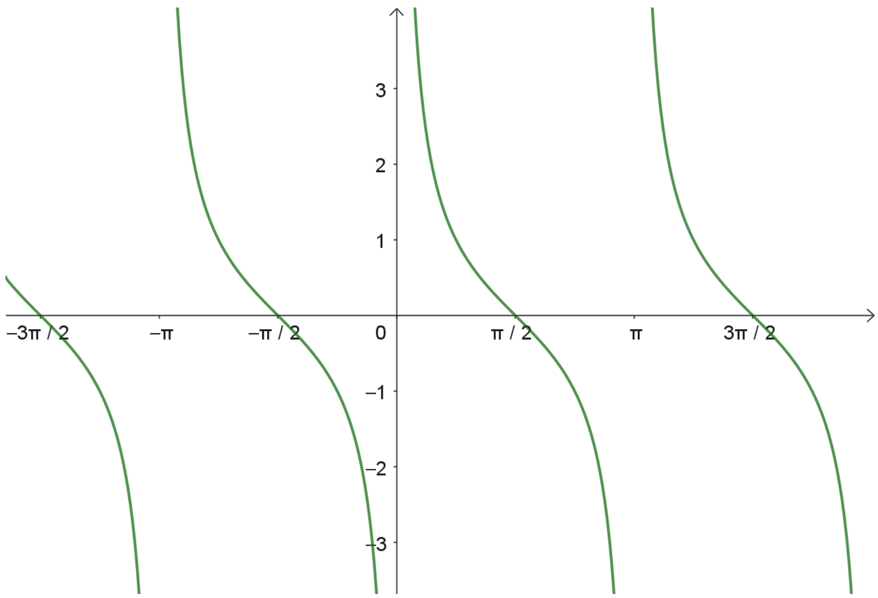
Exercice : La fonction cotangente

1. Le cosinus et le sinus sont définis sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\cot(x)$ est défini ssi $\sin(x) \neq 0$ ssi $x \not\equiv 0[\pi]$. Ainsi, $D = \mathbb{R}\backslash\{\pi k | k \in \mathbb{Z}\}$.
2. Soit $x \in D$. Alors $\pi - x$ n'est pas congru à $\pi/2$ modulo π. On peut donc manipuler $\tan(\pi/2 - x)$ qui vaut $\sin(\pi/2 - x)/\cos(\pi/2 - x) = \cos(x)/\sin(x) = \cot(x)$.
3. cot est un quotient de fonctions dérivables donc dérivable. De plus,
$$\forall x \in D, \cot'(x) = \frac{\cos'(x)\sin(x) - \sin'(x)\cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-1}{\sin^2(x)}$$
L'allure du graphe de cot se déduit de celui de la tangente par réflexion par rapport à la droite d'équation $x = \pi/4$ d'après la question précédente.



4. Soit $x \in D$. D'après la question 2, $\cot(x) = \sqrt{3}/3 \iff \tan(\pi/2 - x) = \sqrt{3}/3 \iff \tan(\pi/2 - x) = \tan(\pi/3) \iff \pi/2 - x \equiv \pi/3[\pi] \iff x \equiv \pi/6[\pi]$. L'ensemble recherché est donc $\{\pi/6 + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.
5. Comme sin ne s'annule pas sur D, $|\sin| > 0$ sur D. Soit $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi, (k+1)\pi[$. Alors $\sin(x) > 0$ et $F(x) = \ln(\sin(x))$ et F est une composée de fonctions dérivables sur ce domaine, donc dérivables. De plus, $F'(x) = \sin'(x)/\sin(x) = \cos(x)/\sin(x) = \cot(x)$. Soit $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}](k+1)\pi, (k+2)\pi[$. Alors $\sin(x) < 0$ et $F(x) = \sin(-\ln(x))$. Par les mêmes arguments, F est dérivable sur ce domaine et $F'(x) = -\sin'(x)/(-\sin(x)) = \cos(x)/\sin(x) = \cot(x)$. Dans tous les cas, $F'(x) = \cot(x)$.
6. Les formules de l'arc moitié donnent
$$1 + \omega^k = 1 + \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) = 2\cos\left(\frac{-k\pi}{n}\right)\exp\left(i\frac{k\pi}{n}\right)$$
et
$$1 - \omega^k = 1 - \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) = 2i\sin\left(\frac{-k\pi}{n}\right)\exp\left(i\frac{k\pi}{n}\right)$$
En particulier $|1 - \omega^k| = 2|\sin(k\pi/n)| \neq 0$ car $k\pi/n \in]0, \pi[$, donc ce complexe est non nul. On obtient alors
$$\frac{1 + \omega^k}{1 - \omega^k} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{-i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = i\cot\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

7.

$$\cot(a+b)=\frac{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}=\frac{\sin(a)\sin(b)\left(\frac{\cos(a)\cos(b)}{\sin(a)\sin(b)}-1\right)}{\sin(a)\sin(b)\left(\frac{\cos(b)}{\sin(b)}+\frac{\cos(a)}{\sin(a)}\right)}=\frac{\cot(a)\cot(b)-1}{\cot(b)+\cot(a)}$$

8. (a) Soit $x\in\mathbb{R}$. On appliquer la factorisation admise au complexe $e^{2i\pi x/n}$. D'autre part, la formule de Moivre donne $\forall k\in[\![0,n-1]\!], \omega^k=e^{i2\pi k/n}$ ainsi que $\left(e^{2i\pi x/n}\right)^n=e^{2i\pi x}$. On en déduit

$$e^{2i\pi x}-1=\prod_{k=0}^{n-1}\left(e^{i2\pi x/n}-e^{i2\pi k/n}\right)$$

(b) Soit $x\in\mathbb{R}$ et $k\in[\![0,n-1]\!]$. Alors

$$e^{i\pi(x+k)/n}-e^{-i\pi(x+k)/n}=e^{i\pi k/n}e^{-i\pi x/n}\left(e^{i2\pi x/n}-e^{-i2\pi k/n}\right)$$

Or

$$\prod_{k=0}^{n-1}e^{i\pi k/n}=e^{i\pi\sum_{k=0}^{n-1}k/n}=e^{i\pi(n-1)/2}=i^{n-1}$$

et

$$\prod_{k=0}^{n-1}e^{-i\pi x/n}=\left(e^{-i\pi x/n}\right)^n=e^{-i\pi x}$$

On en déduit que

$$\prod_{k=0}^{n-1}e^{i\pi(x+k)/n}-e^{-i\pi(x+k)/n}=i^{n-1}e^{-i\pi x}(e^{2i\pi x}-1)=2i^n\sin(\pi x)$$

(c) D'après les formules d'Euler et le résultat précédent

$$\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{x+k}{n}\pi\right)=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{e^{i(x+k)\pi/n}-e^{-i(x+k)\pi/n}}{2i}=\frac{1}{(2i)^n}2i^n\sin(\pi x)=\frac{1}{2^{n-1}}\sin(\pi x)$$

9. Soit $x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Alors $\sin(\pi x)\neq 0$ et le logarithme de la valeur absolue du résultat précédent donne

$$\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left|\sin\left(\frac{x+k}{n}\pi\right)\right|=\ln|\sin(\pi x)|-(n-1)\ln(2)$$

On vient donc de démontrer

$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}, \sum_{k=0}^{n-1}F\left(\frac{x+k}{n}\pi\right)=F(\pi x)-(n-1)\ln(2)$$

Il s'agit d'une égalité de fonctions dérivables, ce qui donne par dérivation

$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}, \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cot\left(\frac{x+k}{n}\pi\right)=\pi\cot(\pi x).$$

On en déduit le résultat après division par π non nul.

Partie 1. Exemples

1. $\mathbb{Z}$ est clairement stable par addition et de type SC. Soit $z \in \mathbb{Z} \cap D$. Alors $|z| \leq 1$, donc $z = 0$ ou 1 ou -1. L'inclusion réciproque étant clairement vraie, $\mathbb{Z} \cap D = \{-1, 0, 1\}$. Ainsi, $\mathbb{Z}$ est un treillis discret et $V(\mathbb{Z}) = 3$.
2. i et 0 sont des imaginaires purs. Pourtant, $i^2 + 0^2 = -1$ n'est pas un imaginaire pur. Donc cet ensemble n'est pas un treillis discret.
3. $D \cap D = D$ n'est pas fini donc D n'est pas un treillis discret.
4. Soit $(z_1, z_2) \in J^2$. Alors $\mathfrak{Re}(z_1+z_2) = \mathfrak{Re}(z_1)+\mathfrak{Re}(z_2) > 2 > 1$. De plus, $\mathfrak{Im}(z_1+z_2) = \mathfrak{Im}(z_1)+\mathfrak{Im}(z_2) = 0$, donc J est stable par somme. De plus, comme z_1 et z_2 sont réels, z_1^2 est réel tout comme z_2^2. Ainsi, $\mathfrak{Re}(z_1^2 + z_2^2) > 1^2 + 1^2 > 1$ et $\mathfrak{Im}(z_1^2 + z_2^2) = 0$, donc $z_1^2 + z_2^2 \in J$ est J est de type SC. Enfin, $J \cap D = \emptyset$ (sinon $1 < \mathfrak{Re}(z) \leq |z| \leq 1$). Ainsi, J est un treillis discret et $V(J) = 0$.
5. (a) Par la formule de Moivre, $j^3 = \exp(2i\pi) = 1$, donc $(j-1)(j^2+j+1) = 0$. Or $j \neq 1$, donc $1+j+j^2 = 0$. D'autre part, $j^2 = \exp(i4\pi/3) = -1/2 - i\sqrt{3}/2 = \overline{j}$.

   (b) Soit $(z_1, z_2) \in E^2$. On dispose d'entiers relatifs a_1, a_2, b_1, b_2 tels que $z_1 = a_1 + b_1 j$ et $z_2 = a_2 + b_2 j$. On en déduit

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= a_1 a_2 + b_1 b_2 j^2 + j(a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ &= a_1 a_2 + b_1 b_2(-1-j) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1 - b_1 b_2) \end{aligned}$$

   Commr $a_1 a_2 - b_1 b_2$ et $a_1 b_2 + a_2 b_1 - b_1 b_2$ sont des entiers relatifs, $z_1 z_2 \in E$, donc E est stable par produit.

   (c) Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

$$|a+bj|^2 = (a+bj)\overline{(a+bj)} = (a+bj)(\overline{a}+\overline{b}\overline{j}) = (a+bj)(a+bj^2) = a^2+b^2j^3+abj+abj^2 = a^2+b^2-ab$$

   D'autre part,

$$\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2 = a^2 - ab + \frac{b^2}{3} + \frac{3}{4}b^2 = a^2 + b^2 - ab$$

   Cela entraîne l'égalité demandée.

   (d) Soit $z \in E \cap D$. On dispose d'entiers relatifs a, b tels que $z = a + bj$. Alors $|z|^2 \leq 1$. D'après ce qui précède, $(a-b/2)^2 + (\sqrt{3}b/2)^2 \leq 1$. Comme $(a-b/2)^2 \geq 0$, on a l'inégalité $(\sqrt{3}b/2)^2 \leq 1$ soit encore $|b| \leq 2/\sqrt{3} < 2$. Or b est un entier relatif, donc $b \in \{-1, 0, 1\}$. Listons les conséquences sur a en trois cas.

   — Premier cas : $b = 0$. Alors $a^2 \leq 1$, donc $a \in \{0, 1, -1\}$ puisque a est un entier relatif. Ainsi, $z \in \{0, 1, -1\}$.

   — Deuxième cas : $b = 1$. Alors $(a - 1/2)^2 \leq 1/4$, i.e $|a - 1/2| \leq 1/2$, i.e $a \in \{0, 1\}$ puisque c'est un entier relatif. Ainsi, $z \in \{j, 1 + j\}$.

   — Troisième cas $b = -1$. Alors $(a + 1/2)^2 \leq 1/4$, i.e $|a - (-1/2)| \leq 1/2$, donc $a \in \{-1, 0\}$ puisque c'est un entier relatif. Ainsi, $z \in \{-j, -j-1\}$.

   Or $1, j-1, j, -1, -j+1, -j$ sont les racines 6-ièmes de l'unité, donc $E \cap D \subset \{0\} \cup \mathbb{U}_6$. Réciproquement, tout élément nul ou racine 6-ième de l'unité dans $E \cap D$ d'après les formes précédentes. Conclusion, $E \cap D = \{0\} \cup \mathbb{U}_6$.

   (e) Les questions précédentes ont montré que E est stable par produit, et discret. Soit $(z_1, z_2) \in E^2$. On dispose d'entiers relatifs a_1, a_2, b_1, b_2 tels que $z_1 = a_1 + b_1 j$ et $z_2 = a_2 + b_2 j$. On en déduit $z_1^2 = a_1^2 + 2a_1 b_1 j + b_1^2 j^2 = a_1^2 + 2a_1 b_1 j + b_1^2(-1-j) = a_1^2 - b_1^2 + j(2a_1 b_1 - 1)$ puis via un calcul similaire

$$z_1^2 + z_2^2 = a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2 + j(2a_1 b_1 + 2a_2 b_2 - 2)$$

   Comme $a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2$ et $2a_1 b_1 + 2a_2 b_2 - 2$ sont des entiers relatifs, $z_1^2 + z_2^2 \in E$. Donc E est de type SC, puis un treillis discret tel que $V(E) = 7$.

6. Soit $(z_1, z_2) \in F^2$. Alors $(z_1 z_2)^2 = z_1^2 z_2^2$. Or z_1^2 et z_2^2 sont dans E et E est stable par produit, donc $z_1^2 z_2^2 \in E$. Ainsi, $z_1 z_2 \in F$, donc F est stable par produit. D'autre part, $(z_1^2 + z_2^2)^2 = z_1^4 + z_2^4 + 2z_1^2 z_2^2$. Comme $z_1^2, z_2^2, z_1^2 z_2^2 \in E$ (stabilité par produit), et E est stable par somme (vérification aisée), $(z_1^2 + z_2^2)^2 \in E$, donc $z_1^2 + z_2^2 \in F$. Ainsi, F est de type SC. Enfin, soit $z \in F \cap D$. Alors $z^2 \in E$ et $|z| \leq 1$, donc $|z|^2 \leq 1$, donc $z^2 \in E \cap D = \{0\} \cup \mathbb{U}_6$. Si $z^2 = 0$, alors $z = 0$, si $z^2 \in \mathbb{U}_6$, il existe k dans $[\![0, 5]\!]$ tel que $z^2 = \exp(2ik\pi/6)$, ainsi $z = \exp(2ik\pi/12)$ ou $z = -\exp(2ik\pi/12)$, donc $z \in \mathbb{U}_{12}$. On vérifie aisément la réciproque, ainsi $F \cap D = \{0\} \cup \mathbb{U}_{12}$ est fini. Conclusion, F est un treillis discret et $V(F) = 13$.

Partie 2. Quelques résultats généraux

7. Il suffit de vérifier que A est de type SC. Soit $(z_1, z_2) \in A^2$. Alors $z_1^2 \in A$ et $z_2^2 \in A$ car A est stable par produit. Comme A est stable par somme, on en déduit que $z_1^2 + z_2^2 \in A$. Ainsi, A est de type SC, donc un treillis discret.
8. Soit $z \in A$. Posons pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: « $z^n \in A$ ». Procédons par récurrence. Initialisation : pour $n = 1$. $z \in A$ par hypothèse sur z, donc $\mathcal{P}(1)$ est vrai. Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai. Comme A est stable par produit, $z \in A$ et $z^n \in A$, on en déduit que $z^{n+1} = zz^n \in A$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai et la validité sur $\mathbb{N}^*$ découle du théorème de récurrence.
9. Supposons que A contient un élément, notons-le z, tel que $0 < |z| < 1$. Alors la suite $(|z|^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante, donc les complexes $z^n, n \in \mathbb{N}^*$ sont deux à deux distincts, donc forment une partie infinie. Or ils sont dans A d'après la question précédente et dans D par décroissance de la fonction $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, t \mapsto t^n$, ce qui contredit le fait que $A \cap D$ est fini. Conclusion, A ne contient aucun élément de module dans $]0, 1[$.
10. Supposons $i \in A$. Comme A est stable par produit, i^2, i^3 et i^4 sont dans A, i.e $\{-1, -i, 1\} \subset A$, d'où $\mathbb{U}_4 \subset A$. Enfin, $i^2 + i^4 \in A$ car A est de type SC, donc $0 \in A$. Conclusion, $\{0\} \cup \mathbb{U}_4 \subset A$.
11. Supposons $j \in A$, alors j^2 et $j^3 = 1$ sont dans A. Donc $j^2 + 1^2 = -j \in A$, puis $j^2 + j^4 = j^2 + j = -1 \in A$ et $1^2 + j^4 = 1 + j^2 = -j \in A$. Ainsi, $\{1, -j^2, j, -1, j^2, -j\} \subset A$, i.e $\mathbb{U}_6 \subset A$.
12. Soit $(z_1, z_2) \in (A\cup\{0\})^2$. Si $(z_1, z_2) \in A^2$, il n'y a rien à montrer car A est un treillis discret. Supposons que $z_1 = 0$ qui à échanger z_1 et z_2. Alors $z_1 z_2 = 0 \in \{0\} \cup A$. De plus, $z_1^2 + z_2^2 = z_2^2 \in A \cup \{0\}$ car A est stable par produit. Enfin, $(A \cup \{0\}) \cap D = (A \cap D) \cup \{0\}$ est fini car $A \cap D$ est fini. Conclusion, $A \cup \{0\}$ est un treillis discret.
13. Supposons qu'il existe $(z_1, z_2) \in B^2$ tel que z_1/z_2 vaut i ou $-i$. Alors $(z_1/z_2)^2 = -1$, donc $z_1^2 + z_2^2 = 0 \notin B$. Donc B n'est pas de type SC, donc ce n'est pas un treillis discret. Réciproquement, supposons que $\forall(z_1, z_2) \in B^2, z_1/z_2 \notin \{-i, i\}$ et montrons que B est un treillis discret. Soit $(z_1, z_2) \in B^2$. Alors $(z_1, z_2) \in A^2$. Comme A est stable par produit, $z_1 z_2 \in A$. De plus, $z_1 z_2 \neq 0$ car $z_1 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$. Ainsi, $z_1 z_2 \in B$ et B est stable par produit. Comme précédemment, $(z_1, z_2) \in A^2$, donc $z_1^2 + z_2^2 \in A$. Si $z_1^2 + z_2^2 = 0$, alors comme $z_2 \neq 0$, il vient $(z_1/z_2)^2 = -1$, i.e $z_1/z_2 = i$ ou $z_1/z_2 = -i$ ce qui est exclu par hypothèse sur A. Ainsi, $z_1^2 + z_2^2 \neq 0$ et $z_1^2 + z_2^2 \in B$. On en déduit que B est de type SC. Enfin, $(B \cap D) \subset (A \cap D)$. Comme $A \cap D$ est fini, $B \cap D$ est fini. Conclusion, B est un treillis discret.

Partie 3. Autour des racines de l'unité

14. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{U}_n^2$. Alors $(z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n = 1 \times 1 = 1$, donc $z_1 z_2 \in \mathbb{U}_n$. Ainsi, $\mathbb{U}_n$ est stable par produit.
15. Supposons n pair. On dispose de $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2k$. Soit $z \in \mathbb{U}_{n/2}$. Alors $z^{n/2} = 1$, i.e $z^k = 1$. Or on dispose d'une racine carrée complexe δ de z qui vérifie $\delta^2 = z$. Celle-ci vérifie donc $\delta^n = \delta^{2k} = z^k = 1$, donc $\delta \in \mathbb{U}_n$. On a donc réussi à mettre z sous la forme du carré d'un élément de $\mathbb{U}_n$, i.e $z \in \{w^2 | w \in \mathbb{U}_n\}$. Réciproquement, soit $w \in \{z^2 | z \in \mathbb{U}_n\}$. Alors on dispose d'un complexe $z \in \mathbb{U}_n$ tel que $w = z^2$. Mais alors $w^{n/2} = w^k = (z^2)^k = z^{2k} = z^n = 1$ puisque $z \in \mathbb{U}_n$. Ainsi, $w \in \mathbb{U}_{n/2}$. On a démontré l'égalité par double inclusion.
16. Supposons n impair. Soit $z \in \{w^2 | w \in \mathbb{U}_n\}$. On dispose de $w \in \mathbb{U}_n$ tel que $z = w^2$. Or $\mathbb{U}_n$ est stable par produit donc $z \in \mathbb{U}_n$. Réciproquement soit $z \in \mathbb{U}_n$. On dispose alors d'une racine carrée complexe

δ de z. Mais alors $\delta^{2n} = z^n = 1$. Donc $(\delta^n)^2 = 1$. Donc $\delta^n = 1$ ou -1. Si $\delta^n = 1$, alors $\delta \in \mathbb{U}_n$ et $z = \delta^2 \in \{w^2 | w \in \mathbb{U}_n\}$. Si $\delta^n = -1$. Alors $(-\delta)^n = (-1)^n(-1) = 1$ car n est impair. De plus $(-\delta)^2 = (-1)^2 z = z$. Donc $z \in \{w^2 | w \in \mathbb{U}_n\}$. Dans tous les cas, $z \in \{w^2 | w \in \mathbb{U}_n\}$. L'égalité d'ensembles en découle par double inclusion.

17. Soit $z \in S_n$. On dispoe de $z_1, z_2 \in \mathbb{U}_n$ tel que $z = z_1 + z_2$. D'après l'inégalité triangulaire, $|z| \leq |z_1| + |z_2| = 2$
18. Si n est pair, 1 et -1 sont dans $\mathbb{U}_n$, donc $0 = 1 + (-1) \in S_n$. Supposons que $0 \in S_n$. On dispose alors de $z_1, z_2 \in \mathbb{U}_n$ tel que $z_1 + z_2 = 0$, i.e $-1 = z_2/z_1 = z_2\overline{z_1}$ puisque z_1 est non nul et de module 1. Mais alors $(-1)^n = z_2^n \overline{z_1^n} = 1\overline{1} = 1$ d'après les propriétés de la conjugaison. Ainsi, n est pair.
19. Supposons que n est impair et supérieur ou égal à 5. On dispose alors d'un entier $m \geq 2$ tel que $n = 2m+1$. Alors $1 \in \mathbb{U}_n$ et $z = \exp\left(i\dfrac{2\pi m}{2m+1}\right) \in \mathbb{U}_{2m+1} = \mathbb{U}_n$. Alors $1 + z \in H_n$. Or
$$|1+z| = \left|2\cos\left(\frac{\pi m}{2m+1}\right)\exp\left(i\frac{\pi m}{2m+1}\right)\right| = 2\left|\cos\left(\frac{\pi m}{2m+1}\right)\right| = 2\cos\left(\frac{\pi m}{2m+1}\right)$$
car $\pi m/(2m+1) \in [0, \pi/2]$ où le cosinus est positif. D'autre part, $\dfrac{m}{2m+1} = \dfrac{1}{2+1/m} > 1/3$ car $m \geq 2$ et $\dfrac{m}{2m+1} < 1/2$ car $m > 0$. On en déduit l'encadrement
$$\frac{\pi}{3} < \frac{\pi m}{2m+1} < \frac{\pi}{2}$$
D'après la stricte décroissance du cosinus sur $]0, \pi/2[$, on en déduit
$$0 < \cos\left(\frac{\pi m}{2m+1}\right) < \frac{1}{2}$$
Ainsi, $|1+z| \in]0,1[$.
20. Supposons que n est pair et supérieur ou égal à 8. On dispose d'un entier $m \geq 4$ tel que $n = 2m$. On pose alors $z = \exp\left(i\dfrac{2\pi(m-1)}{2m}\right) \in \mathbb{U}_{2m} = \mathbb{U}_n$, de sorte que $1 + z \in H_n$. Les mêmes calculs que précédemment fournissent
$$|1+z| = 2\cos\left(\frac{\pi(m-1)}{2m}\right)$$
Mais alors $\dfrac{1}{3} < \dfrac{m-1}{2m} < \dfrac{1}{2}$ car $m > 3$ et $0 < \cos\left(\dfrac{\pi(m-1)}{2m}\right) < \dfrac{1}{2}$ et $|1+z| \in]0,1[$.

Partie 4. Classification

21. La correction n'est pas entièrement détaillée pour rester concis. Soit A un treillis discret. Alors $A \cap D$ est un ensemble fini, stable par produit inclus dans $\mathbb{U}$. Si $A \cap \mathbb{U} = \emptyset$, alors $A \cap D$ est soit vide, soit réduite au singleton $\{0\}$, car A ne contient pas d'élément de module dans $]0,1[$. Dans ce cas, $V(A) = 0$ ou 1. On suppose dorénavant que $A \cap \mathbb{U}$ est non vide. D'après le résultat admis, on dispose d'un entier naturel non nul n tel que $A \cap \mathbb{U} = \mathbb{U}_n$. Dans ce cas $V(A) = n+1$ si $0 \in A$ et n sinon. Contraignons n à l'aide du travail précédcent.

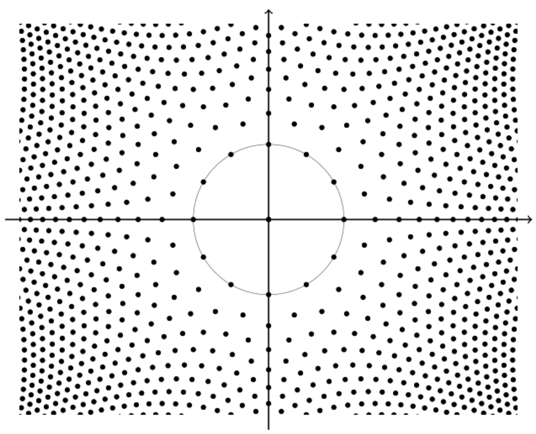
    — Premier cas : n impair. Soit $z \in S_n$, il existe $w_1, w_2 \in \mathbb{U}_n$ tel que $z = w_1 + w_2$. D'après la question précédente, on peut trouver $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{U}_n^2$ tels que $w_1 = \omega_1^2$ et $w_2 = \omega_2^2$. Mais alors $z = \omega_1^2 + \omega_2^2 \in A$ puisque A est de type SC. Conclusion, $S_n \subset A$. Ainsi, si $n \geq 5$, S_n contient un élément de module dans $]0,1[$, donc A aussi, ce qui est exclu. Ainsi, $n < 5$, puis $n \geq 3$, car n est impair. Cependant, si $n = 3$, alors alors $j \in A$, puis $\mathbb{U}_6 \subset A$, ce qui contredit $A \cap \mathbb{U} = \mathbb{U}_3$. Ainsi, la seule valeur impaire possible de n vaut 1, ce qui donne $V(A) = 0$ ou 1.

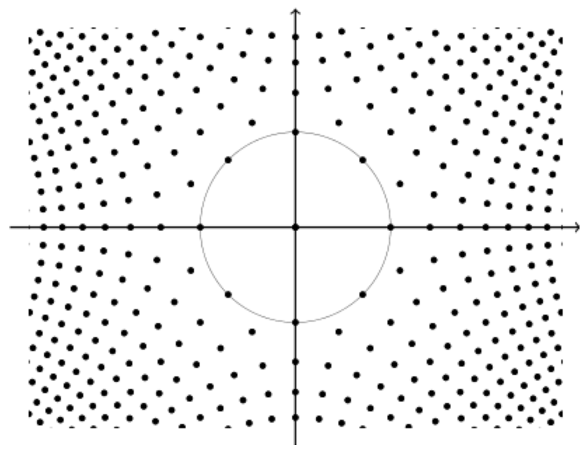
— Deuxième cas : n pair. De la même façon que précédemment, $S_{n/2} \subset A$, mais alors si $n/2$ est impair, $n/2 \leq 3$ d'après ce qui précède, i.e $n \leq 6$. Dans ce sous-cas, n peut valoir 2 ou 6, donc $V(A)$ vaut $2, 3, 6$ ou 7. Si $n/2$ est pair, alors $n/2 < 8$, i.e $n/2 \leq 6$, puis $n \leq 12$. Mais dans ce cas n est multiple de 4, donc A contient $\mathbb{U}_4$ donc i, donc 0. Dans $V(A)$ peut valoir $5, 9$ ou 13.

Remarque finale : on dispose bien de treillis discrets A pour chacune de ces valeurs.

$V(A)$	0	1	2	3	5	6	7	9	13
exemple	$]1, +\infty[$	$[1, +\infty[$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	G	$E \backslash \{0\}$	E	H	F

où l'on définit $G = \{a + bi | (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ et $H = \{z \in \mathbb{C} | z^2 \in \mathrm{G}\}$. Voici des figures de F et H.





⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆