Fonctions de Bessel

1. (a) Pour tout réel x, la fonction $[0,\pi] \to \mathbb{R}, t \mapsto \cos(nt - x\sin t)$ est continue comme composée de fonctions continues, donc intégrable car $[0,\pi]$ est borné. Ainsi, $J_n(x)$ est définie pour tout réel x. En particulier,

$$J_n(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt)dt$$

Dans le cas $n = 0$, on a $J_0(0) = 1$. Sinon, $n \neq 0$ et

$$\int_0^\pi \cos(nt)dt = \left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi = \frac{1}{n}(\sin(n\pi) - \sin(0)) = 0.$$

Ainsi, $J_n(0) = 0$ pour tout entier naturel non nul n.

(b) L'application f_t est de classe C^2 comme composée de fonctions de classe C^2 et vérifie pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\pi]$

$$f_t'(x) = \sin t \sin(nt - x\sin t)$$

$$f_t''(x) = -\sin^2 t \cos(nt - x\sin t)$$

(c) Fixons un réel x et effectuons une intégration par parties comme indiqué dans l'expression intégrale de $J_n'(x)$. Posons $u'(t) = \sin t$ et $v(t) = \sin(nt - x\sin t)$ pour tout réel t de $[0,\pi]$. Alors

$$\begin{aligned}
\pi J_n'(x) &= [-\cos t \sin(nt - x\sin t)]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos t)(n - x\cos t)\cos(nt - x\sin t)dt \\
&= (\sin(n\pi - x\sin\pi) + \sin(n0 - x\sin 0)) + \int_0^\pi (n\cos t - x\cos^2 t)\cos(nt - x\sin t)dt \\
&= \int_0^\pi (n\cos t - x\cos^2 t)\cos(nt - x\sin t)dt
\end{aligned}$$

C'est bien l'expression de l'énoncé.

(d) Soit un réel x. Alors

$$\begin{aligned}
&x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) \\
&\quad = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt - x\sin t)\left(-x^2\sin^2 t + xn\cos t - x^2\cos^2 t + x^2 - n^2\right)dt \\
&\quad = \frac{-n}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt - x\sin t)(n - x\cos t)\,dt
\end{aligned}$$

C'est bien l'expression recherchée.

(e) Pour tout réel x, on note que l'application $H_x : [0,\pi] \to \mathbb{R}, t \mapsto \sin(nt - x\sin t)$ est dérivable et vérifie $H_x'(t) = (n - x\cos t)\cos(nt - x\sin t)$ pour tout $t \in [0,\pi]$. On peut alors calculer l'intégrale précédente via

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} (n - x\cos t)\cos(nt - x\sin t)dt &= [H_x(t)]_0^{\pi} \\ &= \sin(n\pi - x\sin\pi) - \sin(n0 - x\sin 0) \\ &= \sin(n\pi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a alors d'après ce qui précède, $x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0$ pour tout réel x. Donc J_n satisfait à l'équation différentielle (E_n).

2. (a) Soit x un réel. Pour tout réel t, on a $\cos(nt - x\sin t) = \frac{1}{2}\left(e^{i(nt-x\sin t)} + e^{-i(nt-x\sin t)}\right)$. Alors,

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(e^{i(nt-x\sin t)} + e^{-i(nt-x\sin t)}\right)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{i(nt-x\sin t)}dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-i(nt-x\sin t)}dt \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $u = -t$ dans la première intégrale figurant dans cette dernière égalité. Ainsi, grâce à l'imparité du sinus, on a

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{-i(nu-x\sin u)}du + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-i(nt-x\sin t)}dt$$

La relation de Chasles sur les intégrales donne alors

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(nt-x\sin t)}dt$$

(b) D'après ce qui précède, on a

$$J_n^{(n)}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (i\sin t)^n e^{-int}dt$$

On écrit alors pour tout réel t de $[-\pi,\pi]$, $i\sin t = \frac{1}{2}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$. La formule du binôme donne alors

$$\begin{aligned} (i\sin t)^n &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} e^{ikt}(-1)^{n-k}e^{-i(n-k)t} \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}e^{-i(n-2k)t} \end{aligned}$$

Ainsi, la linéairité de l'intégrale permet d'écrire

$$J_n^{(n)}(0) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(2n-2k)t}\,dt$$

Ces dernières intégrales sont toutes nulles sauf pour $k = n$. Dans ce dernier cas, l'intégrale vaut 2π. On aboutit alors à $J_n^{(n)}(0) = \dfrac{1}{2^n}$.

(c) L'expression intégrale des dérivées des J_n permet d'écrire pour tout réel x et tout entier j, par croissance de l'intégrale,

$$\begin{aligned}
|J_n^{(j)}(x)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |i\sin t|^j |e^{i(nt-x\sin t)}|\,dt \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

3. (a) Nous avons vu précédemment que $J_0(0) = 1$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^+} J_0(x)\ln x = -\infty$. De plus, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue en 0, donc tend vers $\varphi(0)$ en 0. Conclusion, la limite à droite de Y_0 en 0 vaut $-\infty$.

(b) Le logarithme népérien est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$ de même que J_0 et φ, donc Y_0 est de classe C^2 comme somme et produit de fonctions de classe C^2. Soit alors $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Une première dérivation donne

$$Y_0'(x) = J_0'(x)\ln(x) + \frac{J_0(x)}{x} + \varphi'(x)$$

La seconde dérivée vaut alors

$$Y_0''(x) = J_0''(x)\ln(x) + 2\frac{J_0'(x)}{x} - \frac{J_0(x)}{x^2} + \varphi''(x)$$

On assemble alors la quantité suivante :

$$\begin{aligned}
&x^2 Y_0''(x) + xY_0'(x) + x^2 Y_0(x) \\
&\qquad = x^2\left(J_0''(x)\ln(x) + 2\frac{J_0'(x)}{x} - \frac{J_0(x)}{x^2} + \varphi''(x)\right) \\
&\qquad + x\left(J_0'(x)\ln(x) + \frac{J_0(x)}{x} + \varphi'(x)\right) + x^2(J_0\ln(x) + \varphi(x)) \\
&\qquad = \left(x^2 J_0''(x) + xJ_0'(x) + x^2 J_0(x)\right)\ln(x) \\
&\qquad + 2xJ_0'(x) + x^2\varphi''(x) + x\varphi'(x) + x^2\varphi(x)
\end{aligned}$$

Cette dernier membre est nul car J_0 est solution de (E_0) et d'après la définition de φ.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Alors

$$
\begin{aligned}
x^2 W'(x) &= x^2 J_0''(x) Y_0(x) + x^2 J_0'(x) Y_0'(x) - x^2 Y_0'(x) J_0'(x) - x^2 J_0(x) Y_0''(x) \\
&= Y_0(x)\Big(-x J_0'(x) - x^2 J_0(x)\Big) - J_0(x)\Big(-x Y_0'(x) - x^2 Y_0(x)\Big) \\
&= -x\Big(Y_0(x) J_0'(x) - J_0(x) Y_0'(x)\Big) \\
&= -x W(x)
\end{aligned}
$$

En particulier, pour tout $x > 0$, $xW'(x) + W(x) = 0$.

(d) Notons $Z : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R},\ x \mapsto xW(x)$. Elle est dérivable et vérifie pour tout $x > 0$, $Z'(x) = xW'(x) + W(x) = 0$. Comme $\mathbb{R}^{+*}$ est un intervalle, Z est constante sur cet intervalle.

(e) Pour tout $x > 0$,

$$
\begin{aligned}
xW(x) &= xJ_0'(x)\left(J_0(x)\ln x + \varphi(x)\right) - x\left(J_0'(x)\ln(x) + \frac{J_0(x)}{x} + \varphi'(x)\right) J_0(x) \\
&= xJ_0'(x)\varphi(x) - J_0^2(x) - x\varphi'(x) J_0(x)
\end{aligned}
$$

Dans cette dernière expression, $\lim_{x\to 0^+} xJ_0'(x)\varphi(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} x\varphi'(x)J_0(x) = 0$ car J_0 et φ sont bornées au voisinage de 0 (car continues en ce point). Ainsi, on a bien $\lim_{x\to O^+} xW(x) = \lim_{x\to 0^+} (-J_0^2(x))$.

D'autre part, J_0 est continue en 0, donc cette dernière limite vaut $-J_0^2(0) = -1$.

Nous avons vu précédemment que la fonction Z était constante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Sa limite en 0^+ est donc égale à cette constante. D'après ce qui précède, $\forall x > 0, Z(x) = -1$. Ainsi, pour tout $x > 0$, $W(x) = -1/x$.