Suites numériques

Cornou Jean-Louis

21 novembre 2025

Dans tout ce qui suit, le symbole $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou l'ensemble $\mathbb{C}$. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires. On commence par un outil abstrait mais fondamental, la borne supérieure. Puis on présente des généralités et exemples sur les suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les deux parties suivantes se concentrent sur la théorie suites réelles. On termine par des généralisations de ces propriétés aux suites à valeurs complexes.

1 Ensemble des réels $\mathbb{R}$

Pourquoi construire les réels ? Contrairement aux extensions $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ motivées par des opérations algébriques (addition et multiplication), l'extension $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ répond à un problème topologique (lié à des limites de suites). Nous ne construisons pas l'ensemble $\mathbb{R}$, mais insistons sur la propriété de la borne supérieure.

1.1 Irrationnels et rationnels

Définition 1 *On appelle irrationnel tout élément de* $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$

Exemple 1 $\sqrt{2}$ *est irrationnel.*

Définition 2 *Soit x un réel et n un entier naturel. On appelle approximation décimale à 10^{-n} près par défaut de x le rationnel $\lfloor 10^n x \rfloor 10^{-n}$. Le rationnel $(\lfloor 10^n x \rfloor + 1)10^{-n}$ est appelé approximation décimale à 10^{-n} près par excès de x.*

Propriété 1 *En notant $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites d'approximations décimales de x par défaut et par excès, alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_n \leq x < e_n = d_n + 10^{-n}$$

Les suites $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes de limite x.

Démonstration. Soit n un entier naturel. Rappelons que la partie entière $\lfloor y \rfloor$ d'un réel y vérifie $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$. Alors en appliquant ceci au réel $y = 10^n x$, il vient

$$\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$$

Comme $10^{-n} > 0$, on obtient par multiplication par 10^{-n}

$$\lfloor 10^n x \rfloor 10^{-n} \leq x < \lfloor 10^n x \rfloor 10^{-n} + 10^{-n}$$

On reconnaît alors

$$d_n \leq x < e_n = d_n + 10^{-n}$$

On déduit de cet encadrement par addition de $-d_n$

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq x - d_n < 10^{-n}$$

Alors, comme 10^{-n} tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, par théorème d'encadrement, la suite $(x - d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, donc $(d_n)_{n\in\mathrm{N}}$ est convegente de limite x. Comme, $\forall n \in \mathbb{N}, e_n = d_n + 10^{-n}$, on en déduit que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également convergente de limite x.

Corollaire
Tout réel est limite d'une suite de rationnels. On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

1.2 Borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$.

Les constructions de $\mathbb{R}$ sont toutes très techniques et demandent beaucoup d'outils de topologie générale qui sont sorties du programme de seconde année. On propose pour l'année de maths sup la construction axiomatique suivante.

1.2.1 Borne supérieure d'une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

Définition 3 *Soit* X *une partie de* $\mathbb{R}$*. On dit que* X *admet une borne supérieure lorsque l'ensemble de ses majorants*

$$\{M \in \mathbb{R} | \forall x \in X, x \leq M\}$$

admet un minimum. Dans ce cas, ce minimum est appelé borne supérieure et noté $\sup(X)$.

Théorème 1 (admis) *Toute partie non vide et majorée de* $\mathbb{R}$ *admet une borne supérieure.*

Exemple 2 *Soit* a *et* b *deux réels, alors* $\sup(]a,b[) = \min([b,+\infty[) = b$.
D'autre part, $\sup(]a,b]) = \min([b,+\infty[) = b$.

Théorème 2 *Soit* X *une partie non vide et majorée de* $\mathbb{R}$ *et* a *un réel. Alors*

$$a = \sup(X) \iff (\forall x \in X, x \leq a) \wedge (\forall y < a, \exists x \in X, y < x)$$

⚠ **Attention**
Ce théorème est fondamental et doit devenir une seconde nature pour la détermination de bornes supérieures !

Démonstration. Procédons par double implication. Supposons que $a = \sup(X)$ et montrons les deux propriétés attendues. Comme $a = \sup(X)$, c'est un majorant de X, donc $\forall x \in X, x \leq a$. Soit $y < a$. Alors y est strictement plus petit que le minimum des majorants de A, donc n'appartient pas à l'ensemble des majorants de A. En niant le fait que y majore A, on obtient $\exists x \in X, y < x$.
Supposons à présent que a vérifie les deux propriétés de droite et démontrons que $a = \sup(X)$. Comme $\forall x \in X, x \leq a$, on en déduit que a est un majorant de X. Soit alors b un majorant de X, montrons que $a \leq b$, ce qui suffira à établir que a est le minimum des majorants de X. Supposons par l'absurde que $b < a$. Alors d'après la seconde assertion, il existe un élément x de X tel que $b < x$. Dans ce cas, b ne majore plus l'élément x de X, ce qui contredit son statut de majorant de X. Donc l'assertion $b < a$ est absurde, donc $a \leq b$. Ainsi, a est le minimum des majorants de X, ie. $a = \sup(X)$.

Propriété 2 *Soit* A *une partie de* $\mathbb{R}$ *admettant un maximum. Alors* $\max(A) = \sup(A)$*. On dit que la borne supérieure de* A *est atteinte.*

Démonstration. La démarche est classique, on procède par double inégalité. Le maximum de A est un majorant de A donc $\sup(A) \leq \max(A)$, puisque $\sup(A)$ est le plus petit de ces majorants. D'autre part, $\max(A)$ est un élément de A, donc plus petit que n'importe quel majorant de A, en particulier $\sup(A)$. Ainsi, $\max(A) \leq \sup(A)$. Ainsi, $\sup(A) = \max(A)$.

✎ **Méthode**
Si une partie de $\mathbb{R}$ *admet un maximum, on connaît immédiatement sa borne supérieure, il s'agit de son maximum. Attention, toute partie de* $\mathbb{R}$ *non vide majorée n'admet pas nécessairement pas de maximum. Dans ce dernier cas,* $\sup(A)$ *n'appartient pas à* A.

Exemple 3 *Soit* $E = \left\{1/p + 1/q | (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$*. Alors* E *est non vide et majorée par 2. De plus, 2 appartient à* E*, donc 2 est le maximum de* E*, c'est donc sa borne supérieure.*

Propriété 3 *Soit* A *et* B *deux parties non vides et majorées de* $\mathbb{R}$ *telles que* $A \subset B$*. Alors* $\sup(A) \leq \sup(B)$.

Démonstration. Technique de preuve fondamentale à retenir. $\sup(B)$ est un majorant de B. Or tout élément de A est un élément de B. Donc

$$\forall a \in A, a \leq \sup(B)$$

Ainsi, $\sup(B)$ est un majorant de A, donc il est plus grand que le minimum des majorants de A, i.e $\sup(A)$, i.e

$$\sup(A) \leq \sup(B)$$

Exemple 4 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle majorée. Pour tout entier k, on considère l'ensemble $\mathrm{A}_k = \{u_n | n \geq k\}$, l'image de la suite u à partir du rang k. Pour tout entier k, la partie A_k est non vide et majorée par un majorant de la suite u. Par conséquent, elle admet une borne supérieure. D'autre part, pour tout entier k, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq k+1 \Rightarrow n \geq k$, donc*

$$\{n \in \mathbb{N} | n \geq k+1\} \subset \{n \in \mathbb{N} | n \geq k\}.$$

Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{A}_{k+1} \subset \mathrm{A}_k$$

D'après la propriété précédente, on en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sup(\mathrm{A}_{k+1}) \leq \sup(\mathrm{A}_k)$$

Autrement dit, la suite $(\sup(\mathrm{A}_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Même si les opérations sur les limites de suites ne sont pas encore prouvées à ce stade de l'année, on propose déjà une caractérisation séquentielle de la borne supérieure.

Théorème 3 (Caractérisation séquentielle de la borne supérieure) *Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ et a un réel. Alors on a l'équivalence*

$$a = \sup(\mathrm{A}) \iff (\forall x \in \mathrm{A}, x \leq a) \wedge (\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}}, \lim_{n\to+\infty} a_n = a)$$

Démonstration. Raisonnons par double implication. Supposons que $a = \sup(\mathrm{A})$. Alors a est un majorant de A, ce qui prouve le premier point. Soit à présent un entier naturel n. D'après la première caractérisation de la borne supérieure, alors le réel $a-2^{-n}$ vérifie $a-2^{-n} < a$, donc il existe un élément a_n de A tel que $a-2^{-n} < a_n$. On a alors l'encadrement $a-2^{-n} < a_n \leq a$. On a ainsi construit une suite d'éléments de A qui converge vers a par théorème d'encadrement.
Suppsosons à présent que a vérifie les deux propriétés indiquées. Montrons alors que a vérifie la seconde partie de la caractérisatin de la borne supérieure. Soit y un réel tel que $y < a$. Alors $a - y > 0$ et comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers a quand n tend vers $+\infty$, il existe un rang N tel que $|a_{\mathrm{N}} - a| \leq (a-y)/2$, i.e

$$-\frac{a-y}{2} \leq a_{\mathrm{N}} - a \leq \frac{a-y}{2}.$$

En particulier, $a_{\mathrm{N}} \geq a - \frac{a-y}{2} = \frac{a+y}{2} > y$ et $a_{\mathrm{N}} \in \mathrm{A}$. On a ainsi prouvé que

$$\forall y < a, \exists x \in \mathrm{A}, y < x$$

D'après la caractérisation de la borne supérieure, $a = \sup(\mathrm{A})$.

Exemple 5 *Soit I un intervalle non vide majoré de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une application continue et croissante sur I. Montrons alors que $\sup f(\mathrm{A}) = f(\sup(\mathrm{A}))$. Comme $\sup(\mathrm{A})$ est un majorant de A, $\forall x \in \mathrm{A}, x \leq \sup(\mathrm{A})$. On en déduit par croissance de f que $\forall x \in \mathrm{A}, f(x) \leq f(\sup(\mathrm{A}))$, donc que $f(\sup(\mathrm{A}))$ est un majorant de $f(\mathrm{A})$. Comme A est non vide, $f(\mathrm{A})$ est non vide. On en déduit que $f(\mathrm{A})$ possède une borne supérieure. D'autre part, d'après la caractérisation séquentielle de la continuité, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup(\mathrm{A})$. On en déduit, via la continuité de f que la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(\sup(\mathrm{A}))$. Comme cette dernière suite est à valeurs dans $f(\mathrm{A})$, cela entraîne via la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, que $f(\sup(\mathrm{A})) = \sup(f(\mathrm{A}))$.*

1.2.2 Extension aux parties de $\mathbb{R}$ vides ou non majorées.

On aimerait étendre la notion de borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$ même si celle-ci est vide ou non majorée. On utilise pour cela la droite réelle achevée $[-\infty, +\infty]$ dans laquelle $\forall x \in \mathbb{R}, -\infty < x < +\infty$.

Propriété 4 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$, alors*

- *Si $\mathrm{A} = \emptyset$, alors sa borne supérieure dans $[-\infty, +\infty]$ vaut $-\infty$.*
- *Si A est non vide, alors*
  - *Si A possède un majorant réel, alors la borne supérieure de A dans $\mathbb{R}$ est la même dans $[-\infty, +\infty]$.*

— *Si* A *ne possède pas de majorant réel, alors sa borne supérieure dans* $[-\infty,+\infty]$ *vaut* $+\infty$.

Démonstration. Dans le premier cas, l'ensemble des majorants de $\emptyset$ est $[-\infty,+\infty]$, dont le minimum vaut $-\infty$. Dans le second cas, alors l'ensemble des majorants de A dans $[-\infty,+\infty]$ est celui de A dans $\mathbb{R}$ auquel on adjoint $+\infty$. Dans ce cas, le minimum de cet ensemble de majorants est réel et vaut la borne supérieure de A dans $\mathbb{R}$. Dans le dernier cas, l'ensemble des majorants de A se réduit au singleton $\{+\infty\}$, donc de minimum $+\infty$ et $\sup(A) = +\infty$.

Convention
On convient, en se basant sur la relation d'ordre dans $[-\infty,+\infty]$ *que* $\sup(\emptyset) = -\infty$. *Pour toute partie* X *non vide et non majorée, on convient que* $\sup(X) = +\infty$. *Cette convention permet notamment d'étendre le théorème de caractérisation des bornes supérieures, y compris sa version séquentielle. En effet, une partie* X *non vide est non majorée si et seulement si*

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in X, y < x$$

si et seulement si

$$\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

1.3 Borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$.

Notation
Pour toute partie X *de* $\mathbb{R}$, *on note* $-X = \{-x | x \in X\}$.

Définition 4 *Soit* X *une partie de* $\mathbb{R}$. *On dit que* X *admet une borne inférieure lorsque l'ensemble de ses minorants admet un maximum. Celui-ci est alors unique et noté* $\inf(A)$.

Théorème 4 *Soit* X *une partie non vide et minorée de* $\mathbb{R}$. *Alors* X *admet une borne inférieure et* $\inf(X) = -\sup(-X)$.

Démonstration. Soit m un minorant de X. Alors $\forall x \in X, m \leq x$, on en déduit par décroissance de $-\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ que $\forall x \in X, -x \leq -m$. Par conséquent, $\forall y \in -A, y \leq -m$. Donc $-m$ est un majorant de $-X$ et la partie $-X$ est majorée. Comme X est non vide, $-X$ est non vide. La propriété de la borne supérieure implique alors que $-X$ possède une borne supérieure. Montrons alors que $-\sup(-A)$ est la borne inférieure de A.
Comme $\sup(-X)$ est un majorant de $-X$, on a

$$\forall y \in -X, y \leq \sup(-X)$$

Ainsi,

$$\forall x \in X, -x \leq \sup(-X)$$

On en déduit que

$$\forall x \in X, x \geq -\sup(-X)$$

Par conséquent, $-\sup(-X)$ est un minorant de X. Montrons à présent que c'est le plus grand. Soit m un minorant quelconque de X. Alors d'après les manipulations d'inégalités que précédemment, $-m$ est un majorant de $-X$. D'après la définition de la borne supérieure, $-m \geq \sup(-X)$, puisque la borne supérieure est le plus petit des majorants. On en déduit que $m \leq -\sup(-X)$ et ce pour tout minorant de X. Ainsi, $-\sup(-X)$ est le plus grand des minorants de X, i.e sa borne inférieure.

On traduit alors tout le paragraphe précédent sur la borne supérieure au cas de la borne inférieure.

Convention
On convient que $\inf(\emptyset) = +\infty$ *et pour toute partie* X *non vide et non minorée,* $\inf(X) = -\infty$.

Théorème 5 *Soit* X *une partie non vide et minorée de* $\mathbb{R}$ *et a un réel. Alors*

$$a = \inf(X) \iff (\forall x \in X, x \geq a) \wedge (\forall y > a, \exists x \in X, y > x)$$

Propriété 5 *Soit* X *une partie de* $\mathbb{R}$ *admettant un minimum. Alors* $\min(X) = \inf(X)$. *On dit que la borne inférieure de* X *est atteinte.*

Propriété 6 *Soit* A *et* B *deux parties non vides et minorées de* $\mathbb{R}$ *telles que* $A \subset B$. *Alors* $\inf(A) \geq \inf(B)$.

Théorème 6 (Caractérisation séquentielle de la borne inférieure) *Soit* X *une partie non vide minorée de* $\mathbb{R}$ *et a un réel. Alors on a l'équivalence*

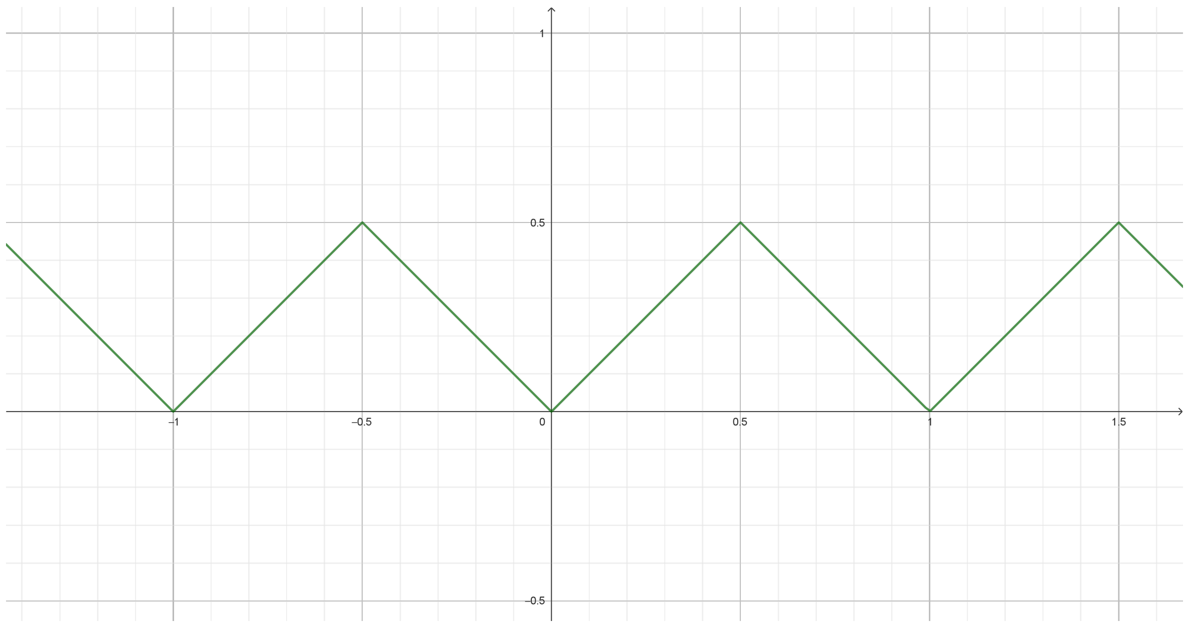
$$a = \inf(X) \iff (\forall x \in X, x \geq a) \wedge (\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a)$$

Exemple 6 *Soit x un réel et* A *une partie non vide de* $\mathbb{R}$. *Alors* $\{|x-a| | a \in A\}$ *est une partie non vide minorée de* A, *sa borne inférieure est la distance de x à* A, *notée* $d(x, A)$. *Par exemple,* $\forall x \in \mathbb{R}, d(x, \mathbb{Q}) = 0$.

Exercice 1 *Soit x et y deux réels et* A *une partie non vide. Montrer que*

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq |x-y|$$

Exemple 7 *On étudie l'application* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto d(x, \mathbb{Z}) = \inf\{|x-n|, n \in \mathbb{Z}\}$. *Commençons par restreindre le domaine d'étude en montrant que f est périodique de période* 1. *Soit* $x \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{Z}$, *alors* $|x+1-n| = |x-(n-1)| \geq d(x, \mathbb{Z})$ *car* $n-1 \in \mathbb{Z}$. *Ainsi,* $d(x, \mathbb{Z})$ *minore l'ensemble* $\{|(x+1)-n|, n \in \mathbb{Z}\}$, *donc est plus petit que le grand minorant, i.e la borne inférieure de cet ensemble. Ainsi,* $d(x, \mathbb{Z}) \leq d(x+1, \mathbb{Z})$. *De plus,* $|x-n| = |x+1-(n+1)| \geq d(x+1, \mathbb{Z})$ *car* $n+1 \in \mathbb{Z}$. *Par le même argument,* $d(x, \mathbb{Z}) \geq d(x+1, \mathbb{Z})$. *Ainsi,* $d(x, \mathbb{Z}) = d(x+1, \mathbb{Z})$ *ce qui prouve la* 1*-périodicité de f.*
Montrons à présent que f est paire. Soit $x \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{Z}$. *Alors* $|-x-n| = |x+n| = |x-(-n)| \geq d(x, \mathbb{Z})$ *car* $-n \in \mathbb{Z}$. *Par passage à la borne inférieure,* $d(-x, \mathbb{Z}) \geq d(x, \mathbb{Z})$. *En reproduisant le même raisonnement avec le réel $-x$, on obtient* $d(x, \mathbb{Z}) \geq d(-x, \mathbb{Z})$. *Finalement,* $d(x, \mathbb{Z}) = d(-x, \mathbb{Z})$ *et f est paire.*
D'après ce qui précède, il n'y a qu'à étudier f sur l'intervalle $[0, 1/2]$. *Soit* $x \in [0, 1/2]$. *Alors* $2x \leq 1$, *donc* $x \leq 1-x$, *i.e* $|x| \leq |1-x|$. *Soit* $n \geq 2$. *Alors* $|x-n| = n-x = (n-1)-(x-1) \geq 1+x \geq |x|$. *Soit* $n \leq -1$. *Alors* $|x-n| = x-n \geq x+1 \geq |x|$. *Dans tous les cas* $\forall n \in \mathbb{Z}, |x-0| = |x| \leq |x-n|$, *donc la borne inférieure est un minimum atteint en* $n = 0$ *et* $d(x, \mathbb{Z}) = |x|$.
On obtient alors le graphe suivant :



1.4 Intervalles et partie entière dans $\mathbb{R}$.

On propose ici une rapide application de ces notions aux intervalles de $\mathbb{R}$. La liste de dix cas est lourde à manipuler et on cherche une caractérisation plus maniable.

Définition 5 *Soit* A *une partie de* $\mathbb{R}$. *On dit que* A *est convexe lorsque*

$$\forall (a, b) \in A^2, a \leq b \Rightarrow [a, b] \subset A$$

Exemple 8 *Tout segment réel est convexe.* $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{Z}$ *et* $\mathbb{Q}$ *ne sont pas convexes.*

Théorème 7 *Soit* A *une partie de* $\mathbb{R}$. *Alors* A *est convexe si et seulement si* A *est un intervalle.*

Démonstration. Si A est un intervalle, a,b deux éléments de A, alors d'après la liste faite en début d'année, la transitivité de la relation d'ordre assure que $\forall x \in [a,b], x \in A$, donc que A est convexe. Soit A une partie convexe de $\mathbb{R}$. Alors on va distinguer différents cas selon les valeurs de $\sup(A)$ et $\inf(A)$ dans $[-\infty,+\infty]$, sachant que $\inf(A) \leq \sup(A)$ dans le cas où A est non vide. Montrons dans ce cas que l'intervalle $]\inf(A),\sup(A)[$ est inclus dans A. Soit $x \in]\inf(A),\sup(A)[$, alors d'après la caractérisation des bornes supérieure et inférieure, il existe a et b dans A tels que $a < x < b$. Alors $x \in]a,b[\subset [a,b]$. Or la convexité de A entraîne $[a,b] \subset A$, donc $x \in A$. D'autre part, $\forall x \in A, \inf(A) \leq x \leq \sup(A)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, donc $A \subset [\inf(A),\sup(A)]$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. Il reste alors à distinguer si A contient ses bornes supérieures ou inférieures (ce qui n'est possible que si ces quantités sont réelles).

	$\sup(A) = -\infty$	$\sup(A) \in \mathbb{R} \cap A$	$\sup(A) \in \mathbb{R} \cap A^c$	$\sup(A) = +\infty$
$\inf(A) = -\infty$		$]-\infty,\sup(A)]$	$]-\infty,\sup(A)[$	$\mathbb{R}$
$\inf(A) \in \mathbb{R} \cap A$		$[\inf(A),\sup(A)]$	$[\inf(A),\sup(A)[$	$[\inf(A),+\infty[$
$\inf(A) \in \mathbb{R} \cap A^c$		$]\inf(A),\sup(A)]$	$]\inf(A),\sup(A)[$	$]\inf(A),+\infty[$
$\inf(A) = +\infty$	$\emptyset$			

Dans tous les cas possibles, on trouve bien à chaque fois un intervalle.

On démontre ici le résultat admis sur l'existence de la partie entière. On ne peut pas à ce stade utiliser la caractérisation de la partie entière par encadrement.

Théorème 8 *Soit x un réel, alors $\{m \in \mathbb{Z}, m \leq x\}$ admet un maximum (on rappelle que ce maximum est appelé la partie entière de x).*

Démonstration. On note $A = \{m \in \mathbb{Z}, m \leq x\}$. C'est une partie de $\mathbb{R}$ majorée par x. Si elle était vide, $\mathbb{Z}$ serait non vide, minoré par x, alors que $[x-1,x]$ contient un entier relatif. D'après la propriété de la borne supérieure, A admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$. Il reste à montrer que cette borne supérieure est un maximum. On note que $\sup(A) - 1/2 < \sup(A)$. D'après la caractérisation de la borne supérieure, il existe un entier relatif m tel que $\sup(A) - 1/2 < m \leq \sup(A)$. Si $m \neq \sup(A)$, alors on peut de nouveau intercaler un entier n tel que $\sup(A) - 1/2 < m < n \leq \sup(A)$. Mais alors $0 < n - m \leq 1/2$, ce qui est impossible pour deux entiers relatifs. Conclusion, $m = \sup(A)$, donc $\sup(A) \in A$, c'est bien un maximum.

1.5 Bornes supérieure et inférieure d'une application à valeurs réelles

Définition 6 *Soit* E *un ensemble non vide et $f : E \to \mathbb{R}$ une application. Si f est majorée, on note* $\sup(f) = \sup(f(E))$. *Si f est minorée, on note* $\inf(f) = \inf(f(E))$. *Si f est n'est pas majorée, on note* $\sup(f) = +\infty$. *Si f est n'est pas minorée, on note* $\inf(f) = -\infty$.

Notation
On rencontre également les notations $\sup\limits_{x \in E} f(x)$ *ou* $\inf\limits_{x \in E} f(x)$. *Si on restreint l'ensemble de départ de f à une partie* F *de* E, *on note également* $\sup\limits_{F} f$ *ou* $\sup\limits_{x \in F} f(x)$ *ou les notations correspondantes pour les bornes inférieures.*

☞ **Remarque**
La borne supérieure (ou inférieure) porte bien sur l'image de l'application. On peut construire des applications dont l'ensemble de départ est un espace très abstrait et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Par exemple, si l'on considère l'ensemble $C([a,b],\mathbb{R})$ *des fonctions continues sur un segment $[a,b]$, on peut construire l'application* $T : C(I,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_a^b f$ *et considérer les bornes supérieure et inférieure de* T, *même si l'espace* $C([a,b],\mathbb{R})$ *est « gigantesque ». C'est par exemple par une borne supérieure qu'on définira proprement l'intégrale ou une somme de série infinie.*

Exemple 9 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application bornée. Alors $|f|$ est majorée (voir plus loin) et on peut considérer* $\sup|f|$, *souventé noté $\|f\|_\infty$. De manière intéressante, $f = 0 \iff \|f\|_\infty = 0$. En effet, si f est l'application nulle, $|f|$ également. Son sup est alors son maximum, à savoir* 0. *Réciproquement, si $\|f\|_\infty = 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq \|f\|_\infty = 0$ (le sup est un majorant), dont on tire $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = 0$, puis $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$, i.e $f = 0$.*

2 Exemples de suites numériques

2.1 Rappels et généralités

Définition 7 *On appelle suite numérique toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$ ou d'un intervalle d'entiers $[\![n_0, +\infty[\![$ dans $\mathbb{K}$ où n_0 un entier naturel.*

Notation
Si u désigne une telle application, on peut également la noter $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout entier naturel n, on note également u_n au lieu de $u(n)$. L'ensemble des suites numériques à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Définition 8 *Soit u une suite numérique à valeurs réelles. On dit que u est*

- *majorée lorsque $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.*
- *minorée lorsque $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$*
- *bornée lorsqu'elle majorée et minorée.*

Propriété 7 *Soit u une suite numérique à valeurs réelles. Alors u est bornée si et seulement si $|u|$ est majorée.*

Démonstration. Si $|u|$ est majorée, alors $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, -M \leq u_n \leq M$. Par conséquent, M est un majorant de u, et $-M$ est un minorant de u, donc u est bornée. Si u est bornée. Alors $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$. On pose alors $B = \max(|m|, |M|)$, cela implique

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u_n \leq |M| \leq B) \wedge (u_n \geq -|m| \geq -B)$$

Ainsi, quel que soit le signe de u_n, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq B$$

Ainsi, B est un majorant de $|u|$.

Définition 9 *Soit u une suite numérique à valeurs complexes. On dit que u est bornée lorsque lorsque $|u|$ est bornée, i.e*

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$$

Propriété 8 *Soit u une suite numérique à valeurs complexes. Alors u est bornée si et seulement si $\mathfrak{Re}(u)$ et $\mathfrak{Im}(u)$ sont bornées.*

Démonstration. Supposons u bornée. Alors il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$. Or on sait que $\forall z \in \mathbb{C}, |\mathfrak{Re}(z)| \leq |z| \wedge |\mathfrak{Im}(z)| \leq |z|$. Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\mathfrak{Re}(u_n)| \leq M \wedge |\mathfrak{Im}(u_n)| \leq M$$

Ainsi, $|\mathfrak{Re}(u)|$ et $|\mathfrak{Im}(u)|$ sont majorées, donc d'après la propriété précédente, $\mathfrak{Re}(u)$ et $\mathfrak{Im}(u)$ sont bornées.
Réciproquement, supposons $\mathfrak{Re}(u)$ et $\mathfrak{Im}(u)$ bornées. Alors $|\mathfrak{Re}(u)|$ et $|\mathfrak{Im}(u)|$ sont majorées, donc

$$\exists (M_1, M_2) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, |\mathfrak{Re}(u_n)| \leq M_1 \wedge |\mathfrak{Im}(u_n)| \leq M_2$$

On en déduit par croissance du carré sur $\mathbb{R}^+$ que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\mathfrak{Re}(u_n)|^2 + |\mathfrak{Im}(u_n)|^2 \leq M_1^2 + M_2^2$$

On termine via la croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}^+$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq \sqrt{M_1^2 + M_2^2}$$

Ainsi, u est bornée.

Définition 10 *Soit u une suite numérique à valeurs réelles. On dit que u est*

- *croissante lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.*
- *strictement croissante lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$.*
- *décroissante lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$.*
- *strictement décroissante lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1}$.*

— *monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante.*

— *strictement monotone lorsqu'elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

⚠ **Attention**

Il n'existe aucun équivalent de ces notions pour les suites à valeurs complexes.

Propriété 9 *Soit u et v deux suites numériques à valeurs réelles monotones. Si u et v ont même monotonie, alors $u+v$ est monotone de même monotonie. Si u et v sont montones de même monotonie et de signe positif, alors uv est monotone. Si u est de signe constant et ne s'annule pas, alors $1/u$ est monotone de monotonie contraire.*

Démonstration. Soit n un entier naturel, alors si u est croissante de u implique $u_n \leq u_{n+1}$, donc $u_n + v_n \leq u_{n+1} + v_n$. Mais alors comme v est croissante (même monotonie ue u), $u_{n+1} + v_n \leq u_{n+1} + v_{n+1}$. Par transitivité, $u_n + v_n \leq u_{n+1} + v_{n+1}$ donc $u+v$ est croissante. Le cas où u et v sont toutes deux décroissantes est laissé à titre d'exercice. Supposons u croissante de signe positif, et v croissante de signe positif. Soit n un entier naturel. Alors, $u_n \leq u_{n+1}$. Comme v_n est positif, on en déduit que $u_n v_n \leq v_n u_{n+1}$. Mais alors comme $u_{n+1} \geq 0$, et $v_n \leq v_{n+1}$, on a alors $u_{n+1} v_n \leq u_{n+1} v_{n+1}$. Par transitivité, $u_n v_n \leq u_{n+1} v_{n+1}$ donc uv est croissante. Supposons u croissante, soit n un entier naturel, alors $0 < u_n \leq u_{n+1}$. La décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$ entraîne alors $1/u_{n+1} \leq 1/u_n$. Ainsi $1/u$ est décroissante. Les cas restants sont laissés à titre d'exercice.

⚠ **Attention**

Si u et v sont de monotonies contraires, on ne peut rien dire a priori de la monotonie de $u+v$. Sans hypothèse sur les signes, on ne peut dire a priori sur la monotonie du produit ou du quotient. Voici quelques contre-exemples. $u : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}, n \mapsto n^2$ et $v : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}, n \mapsto n^2 + (-1)^n$ sont bien toutes deux croissantes,mais $u - v$ n'est pas monotone. Les suites $w : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}, n \mapsto 1/n$ et $t : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}, n \mapsto -1 + 2/n$ sont toutes deux décroissantes, mais leur produit n'est pas monotone. La suite $s : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}, n \mapsto -1 + 3/(2n)$ est décroissante et s'annule pas, mais son inverse n'est pas monotone.

Définition 11 *Soit $\mathcal{P}$ un prédicat et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que cette suite vérifie la propriété $\mathcal{P}$ à partir d'un certain rang (àpcr en abrégé) lorsque*

$$\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \geq \mathrm{N}, u_n \text{ vérifie } \mathcal{P}$$

☞ **Remarque**

Quand on étudiera le comportement d'une suite quand n tend vers $+\infty$, il nous suffira souvent de vérifier qu'une suite vérife certaines propriétés à partir d'un certain rang. Le comportement des dix, des mille ou des 10^{100} premiers termes peut être mis de côté. Ce genre de propriétés caractérise ce qu'on appelle le comportement asymptotique de la suite étudiée.

Exercice 2 *On considère une suite u bornée à partir d'un certain rang. Montrer que u est bornée.*

Exemple 10 *Soit a un réel positif. On considère la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n/n!$. Montrons que u est décroissante à partir d'un certain rang. Si a est nul, la suite est constante nulle, donc décroissante. Si a est non nul, alors u est strictement positive. On écrit alors pour tout entier n,*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}$$

Par conséquent, en posant $\mathrm{N} = \lfloor a \rfloor$, pour tout entier naturel $n \geq \mathrm{N}$, puisque $n+1$ est positif

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{\mathrm{N}+1}{\mathrm{N}+1} = 1$$

Comme u est à valeurs positives, on en déduit que

$$\forall n \geq \mathrm{N}, u_{n+1} < u_n$$

Ainsi, on a démontré dans le cas a non nul, que cette suite est strictement décroissante à partir d'un certain rang.

Définition 12 *On dit qu'une suite est stationnaire lorsqu'elle est constante à partir d'un certain rang. Correctement quantifié, cela s'écrit*

$$\exists a \in \mathbb{K}, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \mathrm{N} \Rightarrow u_n = a$$

⚠ **Attention**
L'ordre des quantificateurs est primordial comme toujours ! Ecrire qu'une suite u vérifie

$$\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \mathrm{N} \Rightarrow \exists a \in \mathbb{K}, u_n = a$$

n'indique rien de plus que cette suite est à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Exemple 11 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à valeurs dans* $\mathbb{Z}$ *convergente. Montrons que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est stationnaire. Notons* l *sa limite, alors il existe un rang* N *tel que*

$$\forall n \geq \mathrm{N}, |u_n - l| \leq \frac{1}{3}$$

On en déduit via l'égalité triangulaire

$$\forall n \geq \mathrm{N}, |u_n - u_\mathrm{N}| = |(u_n - l) - (u_\mathrm{N} - l)| \leq |u_n - l| + |u_\mathrm{N} - l| \leq \frac{2}{3} < 1$$

Or, pour tout entier naturel n, $u_n - u_\mathrm{N}$ *est un entier relatif, donc égal à* 0. *Ainsi,*

$$\forall n \geq \mathrm{N}, u_n = u_\mathrm{N}$$

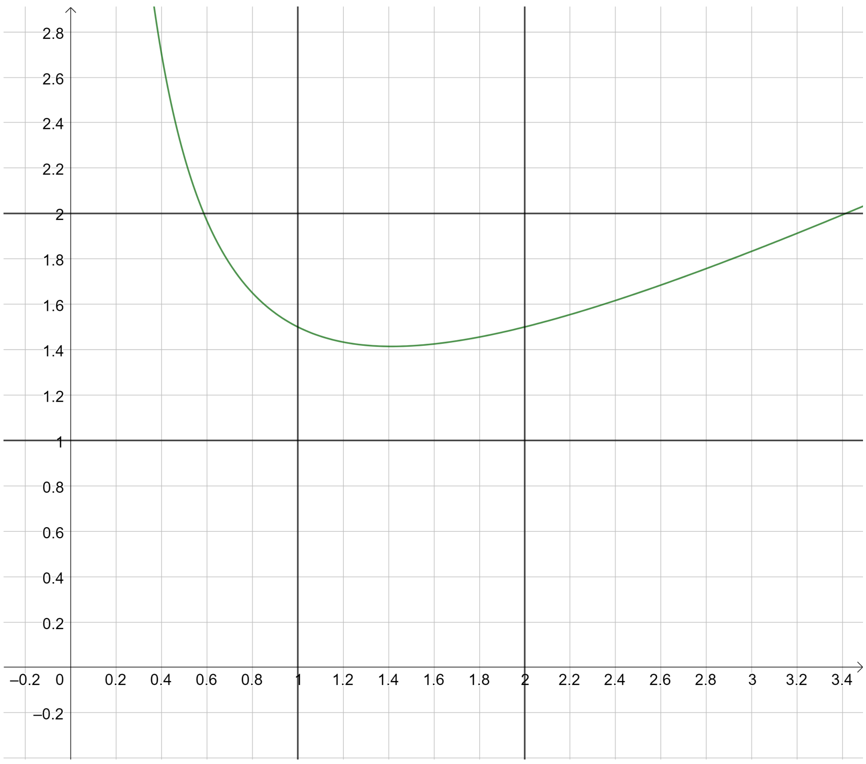
On a ainsi démontré que la suite u *est stationnaire. Au passage, cela démontre également que sa limite est dans* $\mathbb{Z}$.

2.2 Systèmes dynamiques, suites définies par récurrence

Notre objectif est ici de définir une suite par récurrence à l'aide d'une application.

Définition 13 *Soit* $f : \mathrm{A} \to \mathbb{K}$ *une application de* A *dans* $\mathbb{K}$ *avec* A *une partie de* $\mathbb{K}$. *Soit* B *une partie de* A. *On dit que* B *stable par* f *(ou* f*-stable) lorsque* $f(\mathrm{B}) \subset \mathrm{B}$

Exemple 12 *Soit* $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}(x + 2/x)$. *Alors l'intervalle* $[1, 2]$ *est stable par* f. *Le sinus stabilise* $[0, 1]$, *le cosinus stabilise* $[0, \pi/2]$



Exemple 13 *Soit* $h : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{z-1}{z}$. *Alors le demi-plan* $\mathrm{H} = \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}(z) > 0\}$ *est stable par* h.

Théorème 9 (admis) *Soit $f : \mathrm{A} \to \mathbb{K}$ une application d'une partie A de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ avec A stable par f. Soit $a \in \mathrm{A}$. Alors il existe une et une seule suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que*

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathrm{A}$.

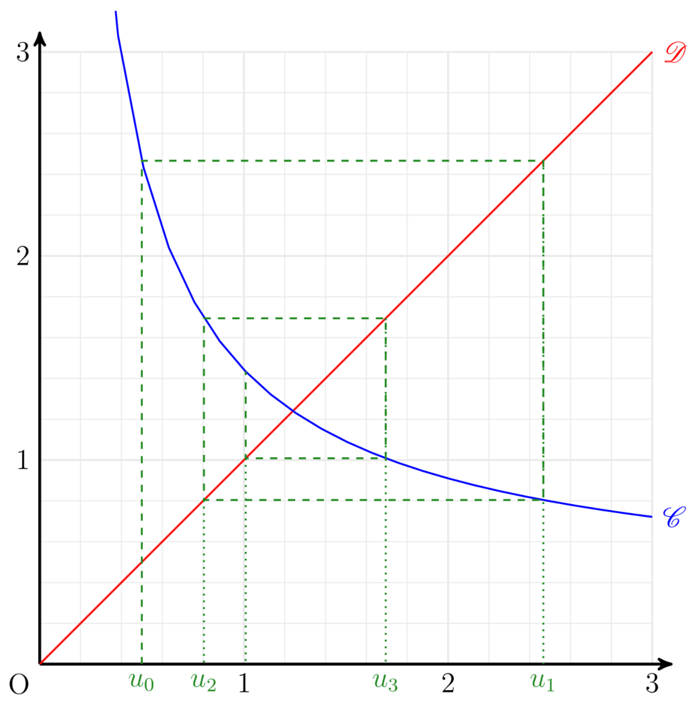
Démonstration. Laurent Schwartz, Analyse 1, Théorie des ensembles et topologie, pages 57 et 58.

On admet également qu'on peut définir via des relations de récurrence double des suites numériques. Soit $g : \mathrm{A}\times\mathrm{A} \to \mathbb{K}$ désigne une fonction de A×A dans K avec A une partie de $\mathbb{K}$ et $g(\mathrm{A}\times\mathrm{A}) \subset \mathrm{A}$, $(a, b) \in \mathrm{A}\times\mathrm{A}$, alors il existe une unique suite numérique telle que$u_0 = a$, $u_1 = b$, et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = g(u_n, u_{n+1})$$

A présent, on fixe $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ une application définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ telle que A est stable par f et $a \in \mathrm{A}$. On note u l'unique suite à valeurs réelles telle que $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Représentation graphique
L'idée est de représenter le graphe de f d'une part et la première bissectrice d'autre part. Soit n un entier naturel tel que u_n est construit. Alors on place de le point $(u_n, 0)$ en abscisse. Le point $(u_n, f(u_n))$ du graphe de f permet de lire u_{n+1} en ordonnée. On trace alors la droite $x = u_{n+1}$ pour construire le point (u_{n+1}, u_{n+1}) par intersection avec la première bissectrice, puis on le rabat sur l'axe des abscisses en $(u_{n+1}, 0)$.



Propriété 10 *Si f est croissante, alors la suite u est monotone. Plus précisément,*

- *Si $u_0 \le u_1$ alors u est croissante.*
- *Si $u_0 \ge u_1$, alors u est décroissante.*

Démonstration. Dans le premier cas, on montrer que u est croissante par récurrence. Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{H}_n : u_n \le u_{n+1}$. Le premier cas donne l'initialisation et assure $\mathcal{H}_0$. Soit n un entier naturel tel que $\mathcal{H}_n$ est vérifiée. Alors $u_n \le u_{n+1}$, comme f est croissante, $f(u_n) \le f(u_{n+1})$, soit $u_{n+1} \le u_{n+2}$. Ainsi, $\mathcal{H}_{n+1}$ est vérifiée. Par conséquent, u est croissante par récurrence. Le deuxième cas se prouve exactement de la même façon.

Propriété 11 *Si f est strictement croissante et si $u_0 \ne u_1$, alors la suite est strictement monotone. Plus précisément,*

— *Si $u_0 < u_1$, alors u est strictement croissante.*
— *Si $u_0 > u_1$, alors u est strictement décroissante.*

Démonstration. Laissée à titre d'exercice.

Exemple 14 *On considère $f :]0,1[, \to]0,1], x \mapsto \sin(x)$. Alors f est strictement croissante. On choisit $u_0 = 1$. Alors u est strictement décroissante, puisque $\forall x > 0, \sin(x) < x$, donc $u_1 < u_0$.*

Propriété 12 *Si f est décroissante, alors les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de variations contraires.*

Démonstration. Si f est décroissante, alors $g = f \circ f$ est croissante. Alors les suites v et w définies par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{2n}, w_n = u_{2n+1}$ vérifient $v_0 = u_0, \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = g(v_n)$, $w_0 = u_1, \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = g(w_n)$. On sait d'après la propriété précédente que v et w sont monotones. Supposons que v est croissante, i.e $v_0 \leq v_1$. Alors comme f est décroissante, $f(v_0) \geq f(v_1)$, i.e $w_0 \geq w_1$, par conséquent, w est décroissante. Si v est décroissante, la décroissance de f montre de la même manière que w est croissante. Ainsi, les monotones de v et w sont contraires.

Propriété 13 *On suppose que $f - \mathrm{id}_A$ est de signe constant. Alors*
— *Si ce signe est positif, alors la suite u est croissante.*
— *Si ce signe est négatif, alors la suite u est décroissante.*

Démonstration. Dans le premier cas, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = (f - \mathrm{id}_A)(u_n) \geq 0$. Ainsi u est croissante. Le deuxième cas se traite de manière similaire.

Voici quelques résultats sur la convergence de ces suites récurrentes. Nous les prouverons en détail lors de l'étude des fonctions continues et des fonctions dérivables.

Théorème 10 *Si f est continue et u converge. Alors sa limite l vérifie $f(l) = l$.*

⚠ **Attention**
Ce théorème ne prouve pas la convergence de la suite u. Il indique uniquement une condition nécessaire sur la limite éventuelle de u.

Démonstration. La preuve repose sur plusieurs résultats que nous n'avons pas encore prouvé. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l alors $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Si f est continue en l alors $f(u_n)$ tend vers $f(l)$ quand n tend vers $+\infty$. En cas de convergence, la limite d'une suite est unique.

Exemple 15 *On se donne x_0 et y_0 des réels, et on définit par récurrence les suites x et y par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \sqrt{x_n^2 + y_n^2}\right) \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{2}$$

Montrons que ces suites convergent en passant par les complexes. On pose $z = x + iy$, cette suite vérifie $z_0 = x_0 + iy_0$, et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$. Si $z_0 = 0$, il est clair que z est alors la suite constante nulle. Sinon, on écrit $z_0 = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in]-\pi,\pi]$, ce qui implique $z_1 = \rho\frac{1+e^{i\theta}}{2} = \rho e^{i\theta/2}\cos(\theta/2)$. Par récurrence, on en déduit que $z_n = \rho e^{i\theta/2^n}\prod_{k=1}^{n}\cos(\theta/2^k)$. Le produit des cosinus se traite en le mutlipliant par $\sin(\theta/2^n)$ et on en déduit que $\sin(\theta/2^n)z_n = \rho\frac{\sin(\theta)}{2^n}e^{i\theta/2^n}$. Dans le cas où $\theta = 0$, la suite z est constante égale à ρ, donc tend vers ρ. Dans le cas où θ n'est pas nul, alors pour tout entier n non nul, $\sin(\theta 2^{-n}) \neq 0$ et $z_n = \rho\frac{\sin(\theta)}{2^n\sin(\theta 2^{-n})}$). On en déduit via le taux d'accroissement du sinus en 0 que z converge vers $\rho\sin(\theta)/\theta$.

2.3 Suites définies de manière implicite

Nous ne formons pas de théorie générale ici et donnons seulement quelques méthodes. Soit $(f_n)_n : I \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions bijectives sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On note pour tout entier naturel n, $u_n = f_n^{-1}(0)$. Alors on peut étudier le comportement de la suite u_n via l'étude de $f_{n+1} - f_n$.

Exemple 16 *Pour tout entier naturel n, on note $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 + nx - 1$. Alors, on montre via une rapide étude que pour tout entier naturel n, f_n est strictement croissante bijective. On note alors pour tout entier naturel n, $u_n = f_n^{-1}(0)$. Fixons n un entier naturel, alors $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = n \geq 0$. Ainsi, u_n appartient à $]0,1]$. De plus, pour tout x dans $]0,1]$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x > 0$, donc $f_{n+1}(u_{n+1}) - f_n(u_{n+1}) > 0$. Comme $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, on a $f_n(u_{n+1}) < 0$. Mais alors, $f_n(u_n) - f_n(u_{n+1}) = f_n(u_{n+1}) > 0$, soit $f_n(u_n) > f_n(u_{n+1})$. Ainsi, comme f_n est strictement croissante, $u_n > u_{n+1}$.*
Ainsi, la suite u est strictement décroissante. Comme est elle minorée par 0, elle est convergente. Enfin, pourtout entier naturel n non nul,

$$0 \leq u_n = \frac{1 - u_n^3}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Par théorème d'encadrement, la suite u tend vers 0.

Exemple 17 *Pour tout entier naturel n non nul, on pose $P_n :]0,1[\to]-1,1[, x \mapsto x^n + x - 1$. Cette fonction est strictement croissante. On note alors pour tout entier naturel non nul n, $\alpha_n = P_n^{-1}(0)$. Soit n un entier naturel non nul, alors $\alpha_n^n = 1 - \alpha_n$. Comme toutes ces quantités sont strictement positives, on peut prendre le logarithme, ce qui implique $n \ln(\alpha_n) = \ln(1 - \alpha_n)$, donc $n = \ln(1 - \alpha_n)/\ln(\alpha_n)$ puisque $\alpha_n \neq 1$. On note alors $f :]0,1[\to]0,+\infty[, x \mapsto \ln(1-x)/\ln(x)$. Alors comme $]0,1[\to]0,+\infty[, x \mapsto -\ln(1-x)$ et $]0,1[\to]0,+\infty[, x \mapsto -1/\ln(x)$ sont croissantes positives, f est croissante. Autre possibilité, f est dérivable et*

$$\forall x \in]0,1[, f'(x) = -\frac{(1-x)\ln(1-x) + x\ln(x)}{x(1-x)(\ln(x))^2} > 0.$$

Ainsi, f est strictement croissante, de limite 0 en 0 et $+\infty$ en 1. Comme $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (f^{-1}(n)))_{n \in \mathbb{N}^*}$, cette suite est de même monotonie que la suite $(n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ donc strictement croissante. Comme elle est majorée par 1, elle est convergente. De plus, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f^{-1}(x) = 1$. Ainsi, par composition, α converge vers 1.

2.4 Suites arithmético-géométriques

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. On étudie l'ensemble des suites numériques à valeurs dans $\mathbb{K}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b.$$

Une telle suite est appelée suite arithmético-géométrique. Notons $E = \{u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b\}$

Propriété 14 *Soit $(u, v) \in E^2$, alors $u - v$ est une suite géométrique de raison a.*

Démonstration. Soit n un entier naturel, alors

$$(u - v)_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = au_n + b - (av_n + b) = a(u_n - v_n) = a(u - v)_n$$

Ainsi, $u - v$ est bien géométrique de raison a.

Théorème 11 *Si $a = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nb$. Si $a \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{b}{1-a} + \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n$*

Démonstration. Dans le premier cas, il est immédiat que u est arithmétique. Dans ce cas,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} b = nb$$

Dans le second cas, on remarque que la suite constante $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} = b/(1-a)$ appartient à E. Alors d'après la propriété précédenete, $u - c$ est géométrique de raison a, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - c_n = a^n(u_0 - c_0)$$

Soit encore

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{b}{1-a} + \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n$$

Exemple 18 *On considère deux suites u et v telles que* $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ *et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \quad \textit{et} \quad v_{n+1} = 2u_n + 3v_n$$

Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - v_{n+1} = 3u_n + 2v_n - (2u_n + 3v_n) = u_n - v_n$$

Par conséquent, la suite $u - v$ *est constante égale à* $u_0 - v_0 = -1$. *On en déduit que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2v_n = 3u_n + 2(u_n + 1) = 5u_n + 2$$

Ainsi, u est aritmético-géométrique et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n + 1/2 = 5^n(u_0 + 1/2)$$

soit encore

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2}(3 \cdot 5^n - 1)$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2}(3 \cdot 5^n + 1)$$

Exemple 19 *Une étude de chaîne de Markov : on dispose de deux pièces A et B. La pièce A est équilibrée, tandis que la pièce B donne pile avec la probabilité 1/4 et face avec la probabilité 3/4. On effectue une succession de lancers de la manière suivante : en début de partie, on choisit au hasard une des deux pièces et on la lance. A l'issue de chaque lancer, si on obtient pile, on garde la pièce pour le lancer suivant, sinon on change de pièce.*
Pour tout entier naturel n non nul , on note A_n *l'événement : « Le* n^e*lancer s'effectue avec la pièce A » et* a_n *la probabilité de l'événement* A_n *.*

— *À l'aide d'un arbre pondéré, préciser les valeurs de* a_1 *et* a_2. *Remarquons que* $a_1 = p(A_1) = 1/2$ *puisque « en début de partie, on choisit au hasard une des deux pièces et on la lance ». Pour la suite, on utilise le conditionnement* $a_2 = p(A_2) = p(A_2|A_1)p(A_1) + p(A_2|B_2)p(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{8}$.

— *Montrer que pour tout entier naturel non nul n,* $a_{n+1} = -\frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}$. *En déduire une expression explicite de la suite a et qu'elle converge vers une limite que l'on précisera.*
Soit n un entier naturel non nul. On utilise un conditionnement comme précédemment : $a_{n+1} = p(A_{n+1}|A_n)p(A_n) + p(A_{n+1}|B_n)p(B_n) = \frac{a_n}{2} + \frac{3}{4}(1 - a_n = -\frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}$. *Alors* $a - 3/5$ *est géométrique de raison* $-1/4$, *dont on déduit :* $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 3/5 + (a_1 - 3/5)(-1/4)^{n-1} = 3/5 - 1/10(-1/4)^{n-1}$. *Ainsi, a converge vers 3/5.*

2.5 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.

Soit a et b deux éléments de $\mathbb{K}$ tels que b **est non nul**, sinon il s'agit de suites récurrentes d'ordre 1. On cherche à étudier toutes les suites numériques vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$. Ce problème est structurellement très proche de la résolution d'équations différentielles. Afin de ne pas passer 3 heures à écrire 14 récurrences doubles, on privilégie ici une approche d'algèbre linéaire. Cette digression est l'occasion de renforcer le vocabulaire de l'algèbre. L'ensemble des suites numériques à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On peut considérer une partie de cet ensemble :

$$E = \{u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0\}$$

En relâchant les conditions initiales, on va pouvoir manier cet espace plus aisément. On rappelle qu'on peut définir la somme de deux suites et le produit d'une suite par un scalaire via $(u + v)_n = u_n + v_n$ et $(\lambda u)_n = \lambda u_n$ pour tout entier naturel n.

Propriété 15 *Soit* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $(u, v) \in E^2$. *Alors* $\alpha u + \beta v \in E$. *On dit que l'ensemble* E *est stable par combinaison linéaire.*

Théorème 12 *On considère l'application $\varphi : \mathrm{E} \to \mathbb{K}^2, u \mapsto (u_0, u_1)$. Alors φ est linéaire, i.e*

$$\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \forall(u,v) \in \mathrm{E}^2, \varphi(\alpha u + \beta v) = \alpha\varphi(u) + \beta\varphi(v).$$

De plus, u est une bijection.

Démonstration. Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(u,v) \in \mathrm{E}^2$. Alors, d'après la définition du produit par un scalaire et de la somme d'applications à valeurs dans $\mathbb{K}$, $(\alpha u + \beta v)_0 = \alpha u_0 + \beta v_0$ et $(\alpha u + \beta v)_1 = \alpha u_1 + \beta v_1$. Ainsi, l'application φ est bien linéaire. Montrons à présent qu'elle est bijective. On commence par étudier $\varphi^{-1}\{(0,0)\}$. Soit donc u une suite dans E telle que $\varphi(u) = (0,0)$. Montrons alors que u est la suite nulle par récurrence double. On note $\mathcal{H}_n : u_n = 0$. Les propriétés $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ sont vérifiées puisque $\varphi(u) = (0,0)$, ce qui prouve l'initialisation. Soit à présent n un entier naturel tel que $u_n = 0$ et $u_{n+1} = 0$. Alors comme u appartient à E, $u_{n+2} = -au_{n+1} - bu_n = 0$. Ainsi $\mathcal{H}_{n+2}$ est vérifiée. On en déduit par récurrence double que la suite u est nulle. Montrons à présent que φ est injective. Soit $(u,v) \in \mathrm{E}^2$ tel que $\varphi(u) = \varphi(v)$. Alors comme φ est linéaire, $\varphi(u-v) = \varphi(u) - \varphi(v) = (0,0)$. D'après ce qui précède, on en déduit que $u - v$ est la suite nulle, donc que $u = v$. Ainsi, φ est injective. Montrons à présent que φ est surjective. Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors le théorème admis sur la définition des suites par récurrence implique qu'il existe une suite u telle que $u_0 = \lambda, u_1 = \mu$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -au_{n+1} - bu_n$. Cette suite u est alors dans E et vérifie $\varphi(u) = (\lambda,\mu)$. En conclusion, u est bijective.

Définition 14 *On appelle polynôme caractéristique de l'ensemble* E *le polynôme* $\mathrm{X}^2 + a\mathrm{X} + b$.

L'idée clé de la résolution de ces études de suites récurrentes est de rechercher des suites géométriques solutions, puis de les combiner. On prouve un résultat dit de liberté avant de passer à la description des suites solutions.

Propriété 16 *Soit $(\alpha,\beta,r_1,r_2) \in \mathbb{C}^4$ tel que $r_1 \neq r_2$. On suppose que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha r_1^n + \beta r_2^n = 0$$

Alors $\alpha = 0$ et $\beta = 0$. On dit que la famille de suites $((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est libre.

Démonstration. En particularisant en $n = 0$ et $n = 1$, on obtient $\alpha+\beta = 0$, puis $\alpha r_1 + \beta r_2 = 0$. On en déduit $\beta(r_1 - r_2) = 0$, puis $\beta = 0$ puisque $r_1 \neq r_2$. Enfin $\alpha = 0$.

Théorème 13 *On se place dans le cadre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit u une suite dans* E. *On note (λ,μ) les racines complexes du polynôme caractéristique $\mathrm{X}^2 + a\mathrm{X} + b$. On distingue deux cas :*

— $\lambda \neq \mu$. *Alors*

$$\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$$

On dit que $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mu^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de E.

— $\lambda = \mu$. *Alors*

$$\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\alpha + \beta n)\lambda^n$$

On dit que $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de E.

Démonstration. On peut prouver ce théorème en détaillant des récurrences doubles. Utilisons plutôt les propriétés de φ. Soit ν une racine de $\mathrm{X}^2 + a\mathrm{X} + b$, alors pour tout entier naturel n, $\nu^{n+2} + a\nu^{n+1} + b\nu^n = \nu^n(\nu^2 + a\nu + b) = \nu^n \times 0 = 0$, donc la suite géométrique $(\nu^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E. Si $\mathrm{X}^2 + a\mathrm{X} + b$ possède une racine double, on considère alors la suite $(n\nu^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\nu = -a/2$ cette racine double. Pour tout entier naturel n,

$$(n+2)\nu^{n+2} + a(n+1)\nu^{n+1} + bn\nu^n = n\nu^n(\nu^2 + a\nu + b) + \nu^{n+1}(2\nu + a) = 0 + 0 = 0$$

Ainsi $(n\nu^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient bien à E.
Prouvons à présent les formes indiquées dans le premier cas. Pour cela, on remarque que pour tout (α,β) dans $\mathbb{C}^2$, la suite $w = \alpha(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}} + \beta(\mu^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans E, et que $\varphi(w) = (\alpha + \beta, \alpha\lambda + \beta\mu)$. Comme φ est injective, il suffit de déterminer un couple (α,β) tel que $(\alpha + \beta, \alpha\lambda + \beta\mu) = (u_0, u_1)$, ce qui revient à résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

Comme $1 \times \mu - 1 \times \lambda = \mu - \lambda \neq 0$, ce système possède une unique solution, à savoir $(\alpha,\beta) = ((u_1 - u_0\mu)/(\lambda - \mu), (u_0\lambda - u_1)/(\lambda - \mu))$.
Synthétisons tout cela : On pose (α,β) comme précédemment. Alors, par stabilité de E par combinaison linéaire, la suite $w = \alpha(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}} + \beta(\mu^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans E et $\varphi(w) = (u_0, u_1) = \varphi(u)$. Par injectivité de φ, on en déduit que $u = w$.

Dans le deuxième cas, on procède de la même façon. Pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$, la suite $w=\alpha(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}+\beta(n\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans E, et que $\varphi(w)=(\alpha,(\alpha+\beta)\lambda)$. On cherche un couple $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ tel que $\varphi(w)=(u_0,u_1)$, ce qui équivaut à

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_0\\ u_1\end{pmatrix}$$

On remarque alors que 0 n'est pas racine double de X^2+aX+b, car sinon $b=0$, ce qui est exclu dans notre cadre d'étude. Par conséquent, $\lambda\neq 0$ et $1\times\lambda-\lambda\times 0=\lambda\neq 0$. Donc ce système linéaire possède une solution unique, à savoir $(u_0,u_1/\lambda-u_0)$. Synthétisons alors. On pose (α,β) comme précédemment. Alors, par stabilité de E par combinaison linéaire, la suite $w=\alpha(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}+\beta(n\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans E et $\varphi(w)=(u_0,u_1)=\varphi(u)$. Par injectivité de φ, on en déduit que $u=w$.

Théorème 14 *On se place dans le cadre $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, i.e $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$. Soit u une suite dans E. On note (λ,μ) les racines complexes du polynôme caractéristique X^2+aX+b. On distingue deux cas :*

— $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ *et* $\lambda\neq\mu$. *Alors*

$$\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\forall n\in\mathbb{N},u_n=\alpha\lambda^n+\beta\mu^n$$

On dit que $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mu^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de E.

— $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ *et* $\lambda=\mu$. *Alors*

$$\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\forall n\in\mathbb{N},u_n=(\alpha+\beta n)\lambda^n$$

On dit que $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de E.

— $(\lambda,\mu)\notin\mathbb{R}^2$. *Alors en notant $\lambda=re^{i\theta}$ avec $(r,\theta)\in\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$,*

$$\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\forall n\in\mathbb{N},u_n=\alpha r^n\cos(n\theta)+\beta r^n\sin(n\theta)$$

ou encore

$$\exists(A,\varphi)\in\mathbb{R}^2,\forall n\in\mathbb{N},u_n=Ar^n\cos(n\theta+\varphi)$$

Démonstration. Cela copie le traitement des équations différentielles. Pour tous complexes α,β,λ,μ, pour tout entier n, $\overline{\alpha\lambda^n+\beta\mu^n}=\overline{\alpha}\overline{\lambda}^n+\overline{\beta}\overline{\mu}^n$. Si une telle suite est réelle et λ et μ sont réels distincts, alors $\alpha+\beta=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ et $\alpha\lambda+\beta\mu=\overline{\alpha}\lambda+\overline{\beta}\mu$. Alors, $(\lambda-\mu)\beta=(\lambda-\mu)\overline{\beta}$. Comme $\lambda\neq\mu$, $\beta=\overline{\beta}$, puis $\alpha=\overline{\alpha}$, donc α et β sont réels. Dans le deuxième cas, $\alpha=\overline{\alpha}$ et $(\alpha+\beta)\lambda=(\overline{\alpha}+\overline{\beta})\lambda$. Comme λ est non nul (le cas d'une racine double nulle est exclu puisque $b\neq 0$, $\beta=\overline{\beta}$, donc α et β sont réels. Dans le troisième cas, alors les racines λ et μ sont conjuguées. Alors $\alpha+\beta=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ et $\alpha\lambda+\beta\overline{\lambda}=\overline{\alpha}\overline{\lambda}+\overline{\beta}\lambda$. Alors $(\alpha-\overline{\beta})(\lambda-\overline{\lambda})=0$. Comme λ n'est pas réel, $\alpha=\overline{\beta}$. On pose alors $\alpha=\frac{1}{2}(c+id)$ avec $(c,d)\in\mathbb{R}^2$, ce qui entraîne

$$\forall n\in\mathbb{N},u_n=cr^n\cos(n\theta)+dr^n\sin(n\theta)$$

Exemple 20 *Soit a,b,c des entiers naturels tous non nuls tels que c n'est pas un carré d'entier. On considère les suites u et v définies par $\forall n\in\mathbb{N},u_n=(a+b\sqrt{c})^n$ et $v_n=(a-b\sqrt{c})^n$. On pose alors $\lambda=a+b\sqrt{c}$ et $\mu=a-b\sqrt{c}$. Ces réels vérifient $\lambda+\mu=2a$ et $\lambda\mu=a^2-b^2c$ donc sont les racines du polynômes $P=X^2-2aX+a^2-b^2c$. Par conséquent, les suites u et v vérifient la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants*

$$\forall n\in\mathbb{N},w_{n+2}-2aw_{n+1}+(a^2-b^2c)w_n=0$$

D'autre part, la suite $u+v$ a pour premiers termes $u_0+v_0=0$ et $u_1+v_1=2a$ qui sont entiers. Il s'ensuit, via une récurrence rapide que la suite $u+v$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Exemple 21 *On cherche les fonctions $f:\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}^{+*}$ telle que $\forall x>0,f(f(x))+f(x)=2x$. Soit f une telle fonction. On fixe un réel $x>0$ et on introduit la suite u définie par récurrence via $u_0=x$ et $\forall n\in\mathbb{N},u_{n+1}=f(u_n)$. Alors, d'après la propriété satisfaite par f, on a*

$$\forall n\in\mathbb{N},u_{n+2}=f(f(u_n))=2u_n-f(u_n)=2u_n-u_{n+1}$$

Par conséquent, la suite u satisfait la récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

$$\forall n\in\mathbb{N},u_{n+2}+u_{n+1}-2u_n=0$$

Son polynôme caractéristique X^2+X-2 se factorise en $(X+2)(X-1)$ dont les racines sont -1 et 2 distinctes. Par conséquent, il existe des réels α et β tels que

$$\forall n\in\mathbb{N},u_n=\lambda(1)^n+\mu(-2)^n=\lambda+\mu(-2)^n$$

Or, comme f stabilise $\mathbb{R}^{+*}$, la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est valeurs strictement positives. Or $(-2)^{2n+1} = -2\cdot 4^n$ tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Par conséquent, $\mu = 0$ et la suite u est constante égale à son premier terme x. En particulier, $f(x) = u_1 = u_0 = x$. Ainsi, on a montré que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = x$.
Réciproquement, si $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{+*}}$, alors pour tout réel $x > 0$, $f(f(x)) + f(x) = x + x = 2x$, donc f vérifie bien la propriété étudiée.

Exemple 22 *Une autre méthode de résolution via les suites géométriques : On considère l'espace*

$$\mathrm{E} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | 2u_{n+2} + 5u_{n+1} - 3u_n = 0\}$$

Procédons différement du cours. Le polynôme caractéristique de cette réccurence linéaire double à coefficients constants vaut $\mathrm{X}^2 + \frac{5}{2}\mathrm{X} - \frac{3}{2} = (\mathrm{X}+3)(\mathrm{X}-1/2)$. Soit u une suite appartenant à E. On introduit alors la suite v définie via $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2^n u_n$. Soit n un entier naturel. Alors

$$2v_{n+2}2^{-(n+2)} + 5v_{n+1}2^{-(n+1)} - 3v_n 2^{-n} = 0$$

soit encore après simplification par $2^{-(n+1)}$ qui est non nul

$$v_{n+2} + 5v_{n+1} - 6v_n = 0$$

qu'on réorganise astucieusement en

$$v_{n+2} - v_{n+1} = -6(v_{n+1} - v_n)$$

Alors la suite $(v_{n+1} - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison -6. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = (-6)^n(v_1 - v_0)$$

On utilise alors une somme télescopique pour exprimer le terme général de v.

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n - v_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=0}^{n-1}(-6)^k(v_1 - v_0) = (v_1 - v_0)\frac{1-(-6)^n}{1-(-6)}$$

puisque la raison -6 est différente de 1. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{-n}v_n = 2^{-n}\left[u_0 + \frac{2u_1 - u_0}{7}(1-(-6)^n)\right] = \frac{6u_0 + 2u_1}{7}2^{-n} + \frac{u_0 - 2u_1}{7}(-3)^n$$

Exemple 23 *On cherche l'ensemble des suites u à valeurs complexes vérifiant $u = 0 = 0, u_1 = 1+4i$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (2i-3)u_{n+1} - (5-5i)u_n$. Le polynôme caractéristique de cette récurrence double linéaire à coefficients constants est $\mathrm{X}^2 - (3-2i)\mathrm{X} + (5-5i)$. Son discriminant vaut $\Delta = (3-2i)^2 - 4(5-5i) = -15+8i = (1+4i)^2$ et ses racines valent $\frac{1}{2}((3-2i)-(1+4i)) = 1-3i$ et $\frac{1}{2}((3-2i)+(1+4i)) = (2+i)$. Par conséquent, il existe des complexes α et β tels que $\forall u_n \alpha(1-3i)^n + \beta(2+i)^n$. En particulier, $u_0 = 0 = \alpha+\beta$ et $u_1 = 1+4i = \alpha(1-3i)+\beta(2+i)$. Ce système linéaire implique $\alpha = -\beta =$ et $\alpha(-1-4i) = 1+4i$, soit $\alpha = -1$ et $\beta = 1$. En conclusion,*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (2+i)^n - (1-3i)^n$$

Examinons à présent l'ensemble des suites u vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (2i-3)u_{n+1} - (5-5i)u_n + 9-7i$. Soit v et w deux telles suites. Alors $v - w$ vérifie la relation de récurrence double précédente. Par conséquent, il suffit de chercher une suite particulière solution pour déterminer cet ensemble. On la recherche sous forme constante a. Celle-ci vérifie alors nécessairement $a = a(2i-3) - a(5-5i) + 9 - 7i$, soit $a = 1$. En conclusion, toute suite u vérifie cette relation de récurrence si et seulement si

$$\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + \alpha(1-3i)^n + \beta(2+i)^n$$

3 Limite d'une suite réelle

3.1 Notion de limite finie

Dans tout ce qui suit, u désigne une suite numérique à valeurs dans $\mathbb{R}$. La définition de la convergence de u vers un scalaire donné est légèrement différente de celle du lycée mais bien sûr équivalente.

Définition 15 *Soit l un élément de $\mathbb{R}$. On dit que u converge vers l, ou encore que u_n tend vers l quand n tend vers $+\infty$, lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \geq \mathrm{N}, |u_n - l| \leq \varepsilon$$

Notation
On rencontre les notations $u_n \longrightarrow l$ ou encore $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$.

Exemple 24 *Les suites constantes sont convergentes vers leur constante.*

Analyse des quantificateurs et des inégalités : Si l'on veut comprendre cette définition en langue française, on peut comprendre ε comme une précision arbitrairement petite, mais non nulle. Quelle que soit cette précision, aussi petite soit-elle, il existe un rang (éventuellement gigantesque) au delà duquel tous les termes de la suite sont proches de la limite l à cette précision. Il est important de comprendre que ces rangs (il n'y en a pas qu'un) dépendent de la précision choisie. Pour cela, on peut éventuellement noter

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N}_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq \mathrm{N}_\varepsilon, |u_n - l| \leq \varepsilon$$

afin de rappeler qu'on ne peut pas interverir les quantificateurs n'importe comment.

Exemple 25 *Considérons la suite u telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1/n^2$. Montrons qu'elle tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$, on cherche à construire un rang N non nul tel que $\forall n \geq \mathrm{N}, |u_n| \leq \varepsilon$. Or pour tout entier naturel non nul nul n, on a l'équivalence $1/n^2 \leq \varepsilon \iff 1/\varepsilon \leq n^2$ puisque ε et n sont strictement positifs. On aimerait choisir $1/\sqrt{\varepsilon}$ pour le rang, mais ce n'est pas un entier. On pose alors $\mathrm{N} = 1 + \lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \rfloor$. Cette définition est légitime puisque $\varepsilon > 0$ et fait de N entier naturel non nul. Soit alors n un entier naturel tel que $n \geq \mathrm{N}$. D'après les propriétés de la partie entière, $n \geq \mathrm{N} \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} > 0$. On en déduit par décroisance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$ que $1/n \leq \sqrt{\varepsilon}$, puis par croissance du carré sur $\mathbb{R}^+$ que $1/n^2 \leq \varepsilon$, donc que $|u_n - 0| \leq \varepsilon$. Ainsi, on a démontré que*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, |u_n - 0| \leq \varepsilon$$

donc que la suite u converge vers 0. Notez par exemple que pour $\varepsilon = 10^{-12}$, le rang que l'on a construit vaut $10^6 + 1$. Pour $\varepsilon = 10^{-12!}$, le rang construit est supérieur à 10^{10^8}.

Exemple 26 *Continuons sur l'analyse des quantificateurs de la définition de la limite. Considérons un instant qu'une suite u vérifie*

$$\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \geq \mathrm{N}, \forall \varepsilon > 0, |u_n - l| \leq \varepsilon$$

Considérons alors n un entier naturel supérieur ou égal à N et montrons que $u_n = l$. Si u_n est différent de l, on peut alors exploiter la propriété vérifiée par u pour le réel strictement positif $\varepsilon = |u_n - l|/2$. Cela implique $|u_n - l| \leq |u_n - l|/2$, donc comme $|u_n - l|$ est strictement positif $2 < 1$ ce qui est absurde. Ainsi, $u_n = l$, et ce pour tout entier n supérieur ou égal à N. En conclusion, toute suite u vérifiant cette propriété est stationnaire, ce qui diffère bien du comportement attendu des limites.

Exemple 27 *Considérons un instant une suite u vérifiant*

$$\forall \varepsilon \geq 0, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \geq \mathrm{N}, |u_n - l| \leq \varepsilon$$

Appliquons cette propriété pour $\varepsilon = 0$, Ainsi, il existe un rang N tel que $\forall n \geq \mathrm{N}, |u_n - l| = 0$. Mais alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = l$. Ainsi, u est stationnaire.

Exemple 28 *Considérons un instant une suite u vérifiant*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \geq \mathrm{N}, |u_n - l| \leq 3\varepsilon$$

Montrons que la suite u converge vers l. Soit $\varepsilon > 0$, alors le réel $\varepsilon' = \varepsilon/3$ est strictement positif, on lui applique la propriété précédente. On sait qu'il existe alors un rang N *tel que* $\forall n \geq \mathrm{N}, |u_n - l| \leq 3\varepsilon' = \varepsilon$. *Ainsi, on a démontré que*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \geq \mathrm{N}, |u_n - l| \leq \varepsilon$$

donc que u converge vers l.

Faisons à présent le lien avec la définition de la limite proposée en terminale.

Propriété 17 *Soit u une suite numérique et l un élément de $\mathbb{K}$. Alors u converge vers l si et seulement si tout invervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de la suite u à partir d'un certain rang.*

Démonstration. Supposons que u converge vers l. Soit I un intervalle ouvert contenant l, comme il est ouvert et non vide (car contenant l), il est de la forme $]a,b[$, $]a,+\infty[$ ou $]-\infty,b[$. Dans tous les cas, il contient un sous-intervalle de la forme $]a,b[$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < l < b$. On pose alors $\varepsilon = \frac{1}{2}\min(b-l, l-a)$ qui est bien un réel strictement positif d'après l'encadrement précédent. La définition de la limite indique alors

$$\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \geq \mathrm{N}, |u_n - l| \leq \varepsilon$$

A fortiori, pour tout entier n supérieur ou égal à N,

$$-\varepsilon \leq u_n - l \leq \varepsilon$$

donc

$$-(l-a) < -\frac{1}{2}(l-a) \leq u_n - l \leq \frac{1}{2}(b-l) < b-l$$

soit

$$a < u_n < b$$

donc $u_n \in]a,b[\subset \mathrm{I}$. Ainsi, à partir du rang N, l'intervalle I contient toutes les valeurs de la suite u.
Réciproquement, supposons que tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de la suite u à partir d'un certain rang. Soit $\varepsilon > 0$. On considère l'intervalle $\mathrm{I} =]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$. Celui-ci est bien ouvert et contient l puisque ε est strictement positif. Par conséquent, il existe un rang N tel que toutes les valeurs de la suite u à partir du rang N sont dans I. Correctement quantifié, cela s'écrit

$$\forall n \geq \mathrm{N}, u_n \in \mathrm{I}$$

soit encore

$$\forall n \geq \mathrm{N}, u_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[.$$

On reformule cela à l'aide d'inégalités,

$$\forall n \geq \mathrm{N}, l-\varepsilon < u_n < l+\varepsilon$$

i.e

$$\forall n \geq \mathrm{N}, -\varepsilon < u_n - l < \varepsilon$$

On en déduit qu'a fortiori,

$$\forall n \geq \mathrm{N}, |u_n - l| < \varepsilon \leq \varepsilon$$

Ainsi, on démontré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \geq \mathrm{N}, |u_n - l| \leq \varepsilon$$

donc que u converge vers l.

Exercice 3 *Soit u une suite numérique et l un élément de $\mathbb{K}$. Montrer que u converge vers l si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \geq \mathrm{N}, |u_n - l| < \varepsilon$$

Définition 16 *Soit u une suite numérique. On dit que u est convergente lorsqu'il existe un scalaire l tel que u converge vers l.*

Théorème 15 (Unicité de la limite) *Soit u une suite numérique convergente. Alors il existe un unique scalaire l tel que u converge vers l. On le note* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ *ou encore* $\lim u$.

Démonstration. Soit l_1 et l_2 des scalaires tels que u converge vers l_1 et u converge vers l_2. Montrons que $l_1 = l_2$. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que $l_1 \neq l_2$. On pose alors $\varepsilon = |l_1 - l_2|/3$ qui est bien un réel strictement positif d'après l'hypothèse précédente. Les convergences impliquent qu'il existe un rang N_1 tel que $\forall n \geq N_1, |u_n - l_1| \leq \varepsilon$ et un rang N_2 tel que $\forall n \geq N_2, |u_n - l_2| \leq \varepsilon$.
A fortiori, au rang $N = \max(N_1, N_2)$, on a via l'inégalité triangulaire,

$$|l_1 - l_2| \leq |l_1 - u_N - (l_2 - u_N)| \leq |l_1 - u_N| + |l_2 - u_N| \leq 2\varepsilon = 2|l_1 - l_2|/3$$

Comme $|l_1 - l_2| > 0$, on a $1 < 2/3$, ce qui est absurde. En conclusion, $l_1 = l_2$, ce qui prouve bien l'unicité de la limite en cas de convergence.

☞ Remarque
La méthode employée lors de la dernière preuve s'appelle une méthode de séparation.

⚠ Attention
Les notations $\lim u$ *ou* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ *ne sont autorisées qu'**après** avoir démontré la convergence de la suite* u.

Définition 17 *Soit u une suite numérique. On dit que u est divergente lorsque u n'est pas convergente, autrement dit lorsque pour tout élément l, u ne converge pas vers l. Correctement quantifié, cela s'écrit*

$$\forall l \in \mathbb{K}, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - l| > \varepsilon$$

☞ Remarque
Nous verrons quelques critères plus maniables pour prouver qu'une suite est divergente.

Exemple 29 *On considère la suite u définie par* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$. *Montrons qu'elle ne tend pas vers* 1. *Pour cela, on remarque que pour tout entier naturel impair* $|u_n - 1| = |-1-1| = 2 > 1$. *Par conséquent, on choisit* $\varepsilon = 1$. *Soit* N *un entier naturel, alors on choisit* $n = 2N+1$, *il s'agit bien d'un entier naturel supérieur ou égal à* N. *De plus, d'après ce qui précède,* $|u_n - 1| > \varepsilon$. *Ainsi, on a vérifié la négation de la convergence de u vers* 1.

3.2 Opérations sur les limites finies

Propriété 18 *Soit u et v deux suites numériques convergentes, a et b deux scalaires. Alors la suite* $au + bv$ *est convergente et*

$$\lim_{n\to+\infty}(au_n + bv_n) = a(\lim_{n\to+\infty} u_n) + b(\lim_{n\to+\infty} v_n)$$

On dit que la limite est linéaire sur l'espace des suites numériques convergentes.

Démonstration. Notons l et l' les limites respectives de u et v et montrons que $au + bv$ converge vers $al + bl'$. Soit $\varepsilon > 0$. On cherche à construire un rang N convenable pour encadrer $|au + bv - (al + bl')|$. On remarque alors que pour tout entier naturel n, l'inégalité triangulaire implique

$$|(au+bv)_n - (al+bl')| = |a(u_n - l) + b(v_n - l')| \leq |a||u_n - l| + |b||v_n - l'|$$

Si a est nul, alors pour tout entier naturel n, $|a||u_n - l| = 0 \leq \varepsilon/2$. Si a n'est pas nul, on utilise alors la convergence de u vers l pour la précision $\varepsilon/(2|a|)$ qui est bien un réel strictement positif. Ainsi, il existe un rang N_1 tel que $\forall n \geq N_1, |u_n - l| \leq \varepsilon/(2|a|)$, donc puisque $|a| > 0$, $\forall n \geq N_1, |a||u_n - l| \leq \varepsilon/2$. Dans tous les cas, on dispose d'un rang N_u tel que $\forall n \geq N_u, |a||u_n - l| \leq \varepsilon/2$.
Répétons cette procédure pour le terme $|b||v_n - l'|$. Si b est nul, alors pour tout entier naturel n, $|b||v_n - l'| = 0 \leq \varepsilon/2$. Si b est n'est pas nul, on utilise alors la convergence de v vers l' pour la précision $\varepsilon/(2|b|)$ qui est bien un réel strictement positif. Ainsi, il existe un rang N_2 tel que $\forall n \geq N_2, |v_n - l'| \leq \varepsilon/(2|b|)$, donc puisque $|b| > 0$, $\forall n \geq N_2, |b||v_n - l'| \leq \varepsilon/2$. Dans tous les cas, on dispose d'un rang N_v tel que $\forall n \geq N_v, |b||v_n - l'| \leq \varepsilon/2$.
Combinons ces deux études et posons $N = \max(N_u, N_v)$. Alors

$$\forall n \geq N, |(au+bv)_n - (al+bl')| = |a(u_n - l) + b(v_n - l')| \leq |a||u_n - l| + |b||v_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ainsi, on a démontré que $au + bv$ converge et que sa limite vaut $a \lim u + b \lim v$.

Quelques petits résultats intermédiaires avant d'établir la limite d'un produit. Nous les réexploiterons lors des critères de convergence/divergence.

Propriété 19 *Soit u une suite numérique convergente. Alors u est bornée.*

Démonstration. Notons l la limite de u et exploitons la définition de la limite pour la précision $\varepsilon = 1$. Ainsi, il existe un rang N tel que $\forall n \geq \mathrm{N}, |u_n - l| \leq 1$. On en déduit via les inégalités triangulaires que

$$\forall n \geq \mathrm{N}, |u_n| - |l| \leq ||u_n| - |l|| \leq |u_n - l| \leq 1$$

donc que

$$\forall n \geq \mathrm{N}, |u_n| \leq 1 + |l|$$

On note alors $\mathrm{M} = \max(|u_0|, \ldots, |u_{\mathrm{N}-1}|, 1 + |l|)$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq \mathrm{M}$$

Ainsi, $|u|$ est majorée, donc u est bornée.

Propriété 20 *Soit u une suite bornée et v une suite convergente de limite nulle. Alors la suite produit uv est convergente de limite nulle.*

Démonstration. Comme u est bornée, $|u|$ est majorée. Notons alors M un majorant strictement positif de $|u|$ et montrons que uv est convergente de limite nulle. On remarque que pour tout entier naturel n, $|u_n v_n| \leq \mathrm{M}|v_n|$. Soit $\varepsilon > 0$, exploitons la limite nulle de v avec la précision ε/M qui est bien un réel strictement positif. Ainsi, il existe un rang N tel que $\forall n \geq \mathrm{N}, |v_n - 0| \leq \varepsilon/\mathrm{M}$. On en déduit, toutes quantités positives, que

$$\forall n \geq \mathrm{N}, |(uv)_n - 0| = |u_n v_n| \leq \mathrm{M}\varepsilon/\mathrm{M} = \varepsilon$$

On a ainsi bien démontré que la suite uv est convergente de limite nulle.

Propriété 21 *Soit u et v deux suites numériques convergentes. Alors la suite produit uv est convergente et*

$$\lim(uv) = (\lim u)(\lim v)$$

Démonstration. Notons l et l' les limites respectives de u et v. Alors

$$uv - ll' = uv - l'u + l'u - ll' = u(v - l') + l'(u - l).$$

Comme u est convergente, u est bornée. D'autre part, par linéarité, $v - l'$ tend vers 0. D'après la propriété précédente, $u(v - l')$ tend vers 0. De plus, la suite $u - l$ tend vers 0, donc par linéarité, $u(v - l') + l'(u - l)$ converge vers $0 + l' \times 0 = 0$. Toujours par linéarité, on en conclut que uv tend vers ll'.

Exercice 4 *Refaire cette preuve en « epsilonisant » tout ceci.*

Les limites d'un quotient nécessitent quelques précautions

Propriété 22 *Soit u une suite numérique convergente. On suppose que* $\lim u$ *est non nulle. Alors la suite u ne s'annule jamais à partir d'un certain rang* N *et la suite* $(1/u_n)_{n \geq \mathrm{N}}$ *converge vers* $1/\lim u$.

Démonstration. Notons l la limite non nulle de u et exploitons la définition de la limite de u pour la précision $\varepsilon = |l|/2$ qui est bien un réel strictement positif. Alors il existe un rang N tel que $\forall n \geq |u_n - l| \leq |l|/2$. En particulier, les inégalités triangulaires entraînent

$$\forall n \geq \mathrm{N}, |u_n| \geq |l| - |u_n - l| \geq |l| - |l|/2 = |l|/2 > 0$$

Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à N, u_n n'est pas nul. Ainsi, on peut considérer la suite inverse à partir du rang N. On remarque alors que

$$\forall n \geq \mathrm{N}, \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| = \frac{|u_n - l|}{|u_n||l|} \leq \frac{2}{|l|^2}|u_n - l|$$

Soit $\varepsilon > 0$, on exploite la convergence de u vers l à la précision $\varepsilon|l|^2/2$ qui est bien un réel strictement positif. Ainsi, il existe un rang N′ tel que $\forall n \geq \mathrm{N}', |u_n - l| \leq \varepsilon|l|^2/2$. On pose alors $\mathrm{N}'' = \max(\mathrm{N}, \mathrm{N}')$, ce qui implique, toutes quantités positives,

$$\forall n \geq \mathrm{N}'', \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| \leq \frac{2}{|l|^2}\varepsilon\frac{|l|^2}{2} = \varepsilon$$

Ainsi, la suite inverse tend vers $1/l$.

Exercice 5 *Soit u et v deux suites convergentes telles que $\lim v \neq 0$. Montrer qu'alors la suite u/v est bien définie à partir d'un certain rang, convergente et que $\lim(u/v) = \lim u / \lim v$.*

Propriété 23 (Passage à la limite dans les inégalités) *Soit u et v deux suites numériques convergentes telles que $u \leq v$ à partir d'un certain rang. Alors $\lim u \leq \lim v$.*

Démonstration. Notons $w = v - u$ et N un rang tel que $\forall n \geq N, w_n \geq 0$. Supposons un instant que $\lim w < 0$. Alors, comme dans la limite d'un quotient, on sépare w de 0 en utilisant la limite de w pour la précision $|\lim w|/2$ qui est bien un réel strictement positif. Ainsi, il existe un rang N' tel que

$$\forall n \geq N', |w_n - \lim w| \leq |\lim w|/2$$

Comme $\lim w < 0$, on en déduit que

$$\forall n \geq \max(N, N'), w_n \leq \lim w/2 < 0$$

Ceci contredit l'hypothèse de positivité de w à partir d'un certain rang. Ainsi, $\lim w \geq 0$. Par linéarité, on en déduit que $\lim u \leq \lim v$

Exemple 30 *On utilise typiquement cette propriété avec des suites constantes pour encadrer les limites d'une suite convergente. Cela fonctionne également avec des suites stationnaires.*

⚠ **Attention**
Le passage à la limite ne conserve pas les inégalités strictes ! La suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente strictement positive, alors que sa limite est nulle.

⚠ **Attention**
Cette propriété requiert que les suites étudiées sont convergentes. Une inégalité $u \leq v$ ne permet pas d'établir la convergence de l'une ou de l'autre dans le cas général.

3.3 Notion de limite infinie

On reste dans le cadre des suites à valeurs réelles.

Définition 18 *Soit u une suite numérique à valeurs réelles. On dit que u tend vers $+\infty$ ou que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ lorsque*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$$

Notation
On rencontre les notations $u_n \longrightarrow +\infty$ ou encore $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Propriété 24 *Soit $B \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\forall A \geq B, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$. Alors u tend vers $+\infty$.*

Démonstration. Soit $A \in \mathbb{R}$. Si $A \geq B$, c'est gagné. Sinon, on utilise un rang N_B tel que $\forall n \geq N_B, u_n \geq B$. Alors $\forall n \geq N_B, u_n \geq B \geq A$.

☞ **Remarque**
Il est fréquent d'utiliser ce qui précède avec $B = 0$.

Exemple 31 *La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Soit A un réel. On introduit alors l'entier $N = \lfloor A \rfloor + 1$. Alors,*

$$\forall n \geq N, n \geq N \geq A$$

Exemple 32 *La suite $(\ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$. Soit A un réel. On introduit alors $N = \lfloor \exp(A) \rfloor + 1$ qui est un entier supérieur ou égal à $\exp(A)$. Alors, la croissante du logarithme népérien donne*

$$\forall n \geq N, \ln(n) \geq \ln(N) \geq \ln(\exp(A)) = A$$

Définition 19 *Soit u une suite numérique à valeurs réelles. On dit que u tend vers $-\infty$ ou que u_n tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ lorsque*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq A$$

Notation
On rencontre les notations $u_n \longrightarrow -\infty$ *ou encore* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

Propriété 25 *Soit u une suite numérique à valeurs réelles. Alors u tend vers* $+\infty$ *si et seulement si* $-u$ *tend vers* $-\infty$.

Démonstration. Supposons que u tend vers $+\infty$. Soit A un réel. Alors la limite $+\infty$ de u avec le réel $-\mathrm{A}$ entraîne qu'il existe un rang N tel que

$$\forall n \geq \mathrm{N}, u_n \geq -\mathrm{A}$$

On en déduit

$$\forall n \geq \mathrm{N}, -u_n \leq \mathrm{A}$$

On a ainsi construit un rang idoine. Ainsi, $-u$ tend vers $-\infty$. Réciproquement, si $-u$ tend vers $-\infty$, on fixe A un réel quelconque. La limite de $-u$ avec le réel $-\mathrm{A}$ implique qu'on dispose d'un rang N tel que

$$\forall n \geq \mathrm{N}, -u_n \leq -\mathrm{A}$$

Mais alors

$$\forall n \geq \mathrm{N}, u_n \geq \mathrm{A}$$

Ainsi, u tend vers $+\infty$.

3.4 Opérations sur les limites infinies

On dispose de moins d'opérations sur les limites infinies.

Propriété 26 *Soit u une suite à valeurs réelles qui tend vers* $+\infty$ *et a un réel non nul. Si* $a > 0$*, alors au tend vers* $+\infty$*. Si* $a < 0$*, alors au tend vers* $-\infty$.

Démonstration. Soit A un réel. Alors A/a est un réel bien défini puisque a est non nul. Comme u tend vers $+\infty$, il existe un rang N tel que

$$\forall n \geq \mathrm{N}, u_n \geq \mathrm{A}/a$$

Si a est strictement positif, on en déduit que

$$\forall n \geq \mathrm{N}, au_n \geq \mathrm{A}$$

donc que au tend vers $+\infty$. Si a est strictement négatif, on en déduit que

$$\forall n \geq \mathrm{N}, au_n \leq \mathrm{A}$$

donc que au tend vers $-\infty$.

Propriété 27 *Soit u et v deux suites à valeurs réelles qui tendent vers* $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*). Alors* $u+v$ *tend vers* $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*).*

Démonstration. Soit A un réel. Dans le premier cas, les limites respectives de u et v impliquent qu'il existe des rangs N et N′ tels que

$$\forall n \geq \mathrm{N}, u_n \geq \mathrm{A}/2 \quad \text{et} \quad \forall n \geq \mathrm{N}', v_n \geq \mathrm{A}/2$$

On en déduit

$$\forall n \geq \max(\mathrm{N}, \mathrm{N}'), u_n + v_n \geq \mathrm{A}/2 + \mathrm{A}/2 = \mathrm{A}$$

donc que $u+v$ tend vers $+\infty$. L'autre cas se traite, en remarquant qu'alors $-u$ et $-v$ tendent vers $+\infty$, donc que $-u+(-v)$ tend vers $+\infty$. On en déduit que $u+v$ tend vers $-\infty$.

Propriété 28 *Soit u et v deux suites à valeurs réelles.*

— *On suppose que u tend vers* $+\infty$ *et que v est convergente de limite non nulle a. Si* $a > 0$*, alors uv tend vers* $+\infty$*. Si* $a < 0$*, alors uv tend vers* $-\infty$.

— *On suppose que u tend vers* $+\infty$ *et que v tend vers* $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*). Alors uv tend vers* $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*).*

Démonstration. — Si $a > 0$, comme v est convergente de limite a, l'intervalle ouvert $]a/2, +infty[$ contient toutes valeurs de v à partir d'un certain rang N, i.e

$$\forall n \geq \mathrm{N}, v_n \geq a/2 > 0$$

Soit A un réel positif. Alors on exploite la limite de u via le réel $2\mathrm{A}/a$ qui est bien défini puisque a est non nul. Alors, il existe un rang N′ tel que

$$\forall n \geq \mathrm{N}', u_n \geq 2\mathrm{A}/a \geq 0$$

Toutes quantités positives, on en déduit que

$$\forall n \geq \max(\mathrm{N}, \mathrm{N}'), u_n v_n \geq \mathrm{A} \geq 0$$

Ce rang $\max(\mathrm{N}, \mathrm{N}')$ convient a fortiori pour tous les réels B négatifs. Ainsi, uv tend vers $+\infty$. Si $a < 0$, on exploite alors le fait que $-v$ converge vers $-a > 0$. Alors $-uv$ tend vers $+\infty$ d'après ce qui précède, donc uv tend vers $-\infty$.

— Soit A un réel positif, alors il existe des rangs N et N′ tels que $\forall n \geq \mathrm{N}, u_n \geq \sqrt{\mathrm{A}}$ et $\forall n \geq \mathrm{N}', v_n \geq \sqrt{\mathrm{A}}$. On en déduit, toutes quantités positives, que

$$\forall n \geq \max(\mathrm{N}, \mathrm{N}') u_n v_n \geq \mathrm{A}$$

Ce rang convient a fortiori pour tous les réels B négatifs. Aini, uv tend vers $+\infty$. Dans l'autre cas, il suffit d'exploiter $-uv$.

Exercice 6 *Enoncer une variante ce théorème en supposant que u tend vers $-\infty$.*

Propriété 29 *Soit u une suite à valeurs réelles qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Alors u est non nulle à partir d'un certain rang* N*, et la suite $(1/u_n)_{n \geq \mathrm{N}}$ est convergente, de limite nulle.*

Démonstration. Considérons le cas où u tend vers $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors on exploite la limite de u pour le réel $\mathrm{A} = 1/\varepsilon$ bien défini puisque ε est non nul. Ainsi, il existe un rang N tel que $\forall n \geq \mathrm{N}, u_n \geq \mathrm{A} > 0$. Cela prouve que u est non nulle à partir du rang N. D'autre part, la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$ implique

$$\forall n \geq \mathrm{N}, 0 < \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{\mathrm{A}} = \varepsilon$$

soit encore

$$\forall n \geq \mathrm{N}, \left|\frac{1}{u_n} - 0\right| \leq \varepsilon$$

Ainsi, $1/u$ est convergente de limite nulle. Dans le cas où u tend vers $-\infty$, on remarque que $-u$ tend vers $+\infty$, donc que $-1/u$ tend vers 0, donc que $1/u$ tend vers $-0 = 0$.

⚠ **Attention**
Si u est de limite nulle sans s'annuler, cela n'implique pas que $1/u$ tend vers $\pm\infty$. La suite $((-1)^n/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0, mais son inverse $(n(-1)^n)_{n \in \mathbb{N}*}$ ne tend ni vers $-\infty$, ni vers $+\infty$.

Propriété 30 *Soit u une suite à valeurs réelles qui tend vers 0. On suppose de plus que u est de signe constant et ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors*

— *Si ce signe est positif, la suite $1/u$ tend vers $+\infty$.*

— *Si ce signe est négatif, la suite $1/u$ tend vers $-\infty$.*

Démonstration. — Soit A un réel positif non nul. Alors on exploite la limite de u via le réel $\varepsilon = 1/\mathrm{A}$ bien défini et strictement positif. Alors il existe un rang N tel que

$$\forall n \geq \mathrm{N}, |u_n| \leq 1/\mathrm{A}$$

On note N′ un rang tel que $\forall n \geq \mathrm{N}', u_n > 0$, alors

$$\forall n \geq \max(\mathrm{N}, \mathrm{N}'), 0 < u_n \leq 1/\mathrm{A}$$

La décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$ entraîne alors

$$\forall n \geq \max(\mathrm{N}, \mathrm{N}'), 0 < \mathrm{A} \leq 1/u_n$$

Ainsi, $1/u$ tend vers $+\infty$

— Il suffit d'appliquer ce qui précède à la suite $-u$.

Exemple 33 *Quelques formes indéterminées : On note u définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n$ et $v = 1/u$, alors u tend vers $+\infty$ et v tend vers 0, mais uv tend vers 1. De même, v^2 tend vers 0, mais uv^2 tend vers 0. De plus, u^2 tend vers $+\infty$, mais u^2v tend vers $+\infty$. De plus, $1/v$ tend vers $+\infty$, mais $u - v$ tend vers 0, et $u^2 - 1/v$ tend vers $+\infty$.*

Application 1 *Limites des suites polynomiales et rationnelles en $+\infty$. Soit u une suite rationnelle (i.e la restriction d'un fonction rationnelle à $\mathbb{N}$ éventuellement privé d'un nombre fini d'entiers) à valeurs rationnelles. On suppose qu'elle est de degré $m \in \mathbb{Z}$. On note a_m son coefficient de degré m, nécessairement non nul. Alors*

- *Si $m > 0$, et si $a_m > 0$, alors $\lim u = +\infty$. Si $m > 0$ et si $a_m < 0$, alors $\lim u = -\infty$.*
- *Si $m = 0$, alors $\lim u = a_m$.*
- *Si $m < 0$, alors $\lim u = 0$.*

Récapitulatif

Limite d'une somme

$\lim u$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(u+v)$	L+L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Limite d'un produit

$\lim u$	L	$L>0$	$L>0$	$L<0$	$L<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim v$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim(uv)$	LL'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Limite d'un quotient : deux cas

- Limite du dénominateur non nulle :

$\lim u$	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim v$	$L' \neq 0$	$\pm\infty$	$L'>0$	$L'<0$	$L'>0$	$L'<0$	$\pm\infty$
$\lim(u/v)$	L/L'	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

- Limite du dénominateur nulle : étude de signe

$\lim u$	$L>0$ ou $+\infty$	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	0
$\lim v$	0^+	0^-	0^+	0^-	0
$\lim(u/v)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

3.5 Conditions nécessaires et/ou suffisantes de convergence ou de divergence

On rappelle et établit des conditions nécessaires et/ou suffisantes pour qu'une suite numérique soit convergente.

Propriété 31 *Soit u une suite numérique et l un scalaire. Alors u est convergente de limite l si et seulement si $u - l$ est convergente de limite nulle si et seulement si $|u - l|$ est convergente de limite nulle.*

Démonstration. Laissée à titre d'exercice

Propriété 32 *Soit u une suite numérique convergente. Alors u est bornée.*

Cela s'applique par sa contraposée. Si une suite est non bornée, elle n'a aucune chance de converger.

Exemple 34 *La suite $(n\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée, donc non convergente.*

Propriété 33 *Soit u une suite qui tend vers $\pm\infty$. Alors u est non bornée.*

Démonstration. Prenons le cas où u tend vers $+\infty$ et montrons que u est non majorée. Soit A un réel, alors d'après la définition de la limite, il existe un rang N tel que $u_N \geq A$. Ainsi, u vérifie la négation du fait d'être majorée ($\exists A \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n < A$). De même, si u tend vers $-\infty$, $-u$ tend vers $+\infty$ donc est non majorée. Alors u est l'opposé d'une suite non majorée, donc non minorée. Dans tous les cas, i est non bornée.

⚠ **Attention**

La réciproque est fausse. Une suite non bornée ne tend pas nécessairement vers $+\infty$. Il suffit de considérer la suite $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour cela. Il ne suffit pas de prendre des valeurs arbitrairement grandes, il faut prendre des valeurs arbitrairement grandes à partir d'un certain rang.

Propriété 34 *Soit u une suite numérique à valeurs réelles. On suppose que u tend vers l avec $l \in \mathbb{R}^{+*} \cup \{+\infty\}$. Alors $u > 0$ à partir d'un certain rang. Si u tend vers l avec $l \in \mathbb{R}^{-*} \cup -\infty$, alors $u < 0$ à partir d'un certain rang.*

Démonstration. Dans le cas où l est réel strictement positif, il suffit d'utiliser la définition de la limite pour $\varepsilon = l/2$, ce qui assure que $u \geq l/2 > 0$ à partir d'un certain rang. Si $l = +\infty$, alors le réel $A = 1$ dans la définition de cette limite, assure que $u \geq 1 > 0$ à partir d'un certain rang. Il suffit d'appliquer ceci à la suite $-u$ pour obtenir le second point.

☞ **Remarque**

Cette propriété facilite le traitement des inégalités, puisqu'on sait que le signe d'une telle suite est constant à partir d'un certain rang.

Théorème 16 (Encadrement, gendarmes) — *Soit u une suite numérique et l un scalaire. On suppose qu'il existe une suite v à valeurs réelles convergente de limite nulle telle que $|u - l| \leq v$. Alors u est convergente de limite l.*

— *Soit u une suite réelle. On suppose qu'il existe deux suites a et b à valeurs réelles convergentes telles que $\lim a = \lim b$ et $a \leq u \leq b$ à partir d'un certain rang. Alors u est convergente et $\lim u = \lim a = \lim b$.*

☞ **Remarque**

C'est sans doute le théorème le plus maniable pour démontrer qu'une suite est convergente. Majorer $|u - l|$ est la méthode la plus directe pour établir des convergences.

Démonstration. — Notons N un rang tel que $\forall n \geq N, |u_n - l| \leq v_n$. Soit $\varepsilon > 0$. La convergence de v vers 0 implique qu'il existe un entier N′ tel que $\forall n \geq N', |v_n| \leq \varepsilon$. On en déduit

$$\forall n \geq \max(N, N'), |u_n - l| \leq |v_n| \leq \varepsilon$$

Ainsi, le rang construit $\max(N, N')$ satisfait la définition de la limite à la précision ε, donc u est convergente de limite l.

— Notons $l = \lim a = \lim b$. Alors $|u - l| \leq \max(|b - l|, |a - l|)$ à partir d'un certain rang. La suite $v = \max(|b - l|, |a - l|)$ est alors réelle de limite nulle, ce qui entraîne le résultat.

⚠ **Attention**

Sans l'hypothèse de convergence de v vers 0, c'est totalement faux. La suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est encadrée en module par 1, mais ne converge pas vers 0. Elle est simplement bornée par 1. La suite $(\sin(n)/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est en revanche majorée en module par $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui tend vers 0, donc tend aussi vers 0.

Propriété 35 *Soit u une suite numérique convergente vers l. Alors $|u|$ converge vers $|l|$.*

Démonstration. L'inégalité triangulaire inverse donne $||u| - |l|| \leq |u - l|$. Comme précédemment, la suite $|u - l|$ tend vers 0. Le théorème précédent implique alors que $|u|$ tend vers $|l|$.

Théorème 17 *Soit u une suite numérique à valeurs réelles. Alors u tend vers $+\infty$ si et seulement si il existe une suite v à valeurs réelles qui tend vers $+\infty$ et telle que $v \leq u$ à partir d'un certain rang. La suite u tend vers $-\infty$ si et seulement si il existe une suite w à valeurs réelles qui tend vers $-\infty$ et telle que $u \leq w$ à partir d'un certain rang.*

Démonstration. Le sens direct est immédiat puisque $u \leq u$. Réciproquement supposons qu'il existe une telle suite v. Alors notons N un rang tel que $\forall n \geq N, v \leq u$. Soit A un réel, comme v tend vers $+\infty$, il existe un rang N′ tel que $\forall n \geq N', v_n \geq A$. On en déduit par transitivité

$$\forall n \geq \max(N, N'), u_n \geq v_n \geq A$$

donc que $u$tend vers $+\infty$. Pour l'autre cas, il suffit de remarquer que u tend vers $-\infty$ si et seulement si $-u$ tend vers $+\infty$.

Exemple 35 *La suite* H *définie par* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ *tend vers* $+\infty$*. En effet,*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [k, k+1], \frac{1}{k} \geq \frac{1}{t}$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale,

$$\forall, k \in \mathbb{N}*, \frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$$

La relation de Chales indique alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{H}_n \geq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1)$$

Comme $n \mapsto \ln(n+1)$ *tend vers* $+\infty$*, la suite* H *tend vers* $+\infty$*.*

4 Exemples fondamentaux de suites convergentes ou divergentes

4.1 Suites définies par récurrence

Propriété 36 *Soit* u *une suite arithmétique. Alors* u *est convergente si et seulement si sa raison est nulle. Si sa raison est non nulle, alors* $|u|$ *tend vers* $+\infty$*.*

Démonstration. Si sa raison est nulle, elle est alors constante, donc convergente. Si sa raison b est non nulle, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nb$, donc $|u_n| \geq n|b| - |u_0|$. D'après les opérations sur les limites, $|u|$ tend vers $+\infty$.

Propriété 37 *Soit* u *une suite géométique de raison* q *et de premier terme non nul. Alors* u *est convergente si et seulement si* $|q| < 1 \vee q = 1$*. Dans le premier cas, elle est de limite nulle. Dans le second cas, sa limite vaut son premier terme. Si* $|q| > 1$*, alors* $|u|$ *tend vers* $+\infty$*.*

La démonstration de ce lemme passe entre autres par le lemme suivant, parfois appelé inégalité de Bernoulli :

Lemme 1 *Soit* $x \in]-1, +\infty[$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$*. Alors* $(1+x)^n \geq 1 + nx$*.*

Démonstration. Ce lemme se prouve classiquement par récurrence. Pour $n = 1$, $(1+x)^1 = 1+x$, tandis que $1 + 1 \times x = 1 + x$, ce qui prouve l'initialisation. Soit n un entier naturel tel que $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Alors comme $1 + x > 0$, $(1+x)(1+x)^n \geq (1+nx)(1+x)$, soit encore $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$ puisque $nx^2 \geq 0$. Ainsi, cette propriété est héréditaire, et donc valide pour tout entier n par récurrence.

Démonstration. Soit q la raison de u. Si q est un réel et $q > 1$, alors l'inégalité de Bernoulli pour $x = q - 1$, implique $\forall n \in \mathbb{N}^*, q^n \geq 1 + n(q-1)$. Ce minorant tend vers $+\infty$, donc $(q^n)_{n \geq +\infty}$ tend vers $+\infty$, comme le premier terme de u est non nul, u tend vers $\pm\infty$ selon son signe. En particulier, $|u|$ tend vers $+\infty$ et u est non convergente. Supposons à présent que q est réel et $q < 1$, alors $|u|$ tend par le même argument vers $+\infty$ en considérant la suite v définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (-1)^n u_n$. Enfin, si q est complexe et vérifie $|q| > 1$, alors $|u|$ est géométrique réelle de raison $|q|$, tend vers $+\infty$ d'après ce qui précède. En particulier, elle est non bornée, et donc non convergente.
Si $q = 0$, la suite est stationnaire en 0 donc convergente. Dans le cas où q est complexe non nul et vérifie $|q| < 1$, alors la suite $1/u$ vérifie le cas précédent, donc $|1/u|$ tend vers $+\infty$, donc $|u|$ tend vers 0, donc u tend vers 0.
Enfin, traitons le cas où q est complexe et $|q| = 1$. Si $q = 1$, la suite est constante égale à son premier terme, donc convergente. Notons à présent θ un argument de q dans $]0, 2\pi[$ de sorte que $q = e^{i\theta}$. Alors pour tout entier n, $q^n = \exp(in\theta)$. Si cette suite convergeait vers un complexe l, celui vérifierait $l = ql$ (extraction ou continuité de $z \mapsto ze^{i\theta}$. Or comme $(|q|^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $|l|$, $|l| = 1$, donc $l \neq 0$. Ainsi, $q = 1$, ce qui est contradictoire.

Exemple 36 *On considère la suite* S *définie par* $\forall n \in \mathbb{N}*, \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}$*. Alors, comme* $1/2 \neq 1$*, les sommes de suites géométriques entraînent*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{S}_n = \frac{2^{-1} - 2^{-n-1}}{1 - 2^{-1}} = 1 - 2^{-n}$$

Alors, S *converge vers* 1 *par linéarité.*

Exemple 37 *On considère une suite numériques à valeurs réelles u strictement positive telle que la suite* $(u_{n+1}/u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente. On note sa limite* λ. *Montrons que si* $\lambda < 1$, *alors u est convergente, puis que si* $\lambda > 1$, *alors u tend vers* $+\infty$. *Dans le premier cas, comme* $\lambda < 1$, *alors l'intervalle ouvert* $]0,(\lambda+1)/2[$ *contiendra toutes les valeurs de* $(u_{n+1}/u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à partir d'un certain rang* N. *On note* $\mu = (1+\lambda)/2 < 1$. *Comme toutes les quantités sont positives, on a* $\forall n \geq \mathrm{N}, u_n \leq u_\mathrm{N}\mu^{n-\mathrm{N}}$ *par produit télescopique. Comme* $\mu < 1$, *on en déduit par théorème d'encadrement que u tend vers* 0. *Le second se traite en considérant la suite inverse de u.*

Propriété 38 *Soit u une suite arithmético-géométrique telle que* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$. *Alors u est convergente si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

— $a = 1$ *et* $b = 0$ *ou*

— $|a| < 1$ *ou*

— $(|a| > 1$ *ou* $a \in \mathbb{U}\backslash\{1\})$ *et* $u_0 = b/(1-a)$.

Démonstration. Laissée à titre d'exercice

Propriété 39 *Soit* $\mathrm{E} = \{u \in \mathbb{K}^\mathbb{N} | u_{n+2}+au_{n+1}+bu_n = 0\}$ *avec* $(a,b) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$. *Si les racines* (λ,μ) *du polynôme caractéristique* $\mathrm{X}^2+a\mathrm{X}+b$ *sont de module strictement plus petit que* 1, *alors toutes les suites de* E *sont convergentes. Si l'une de ces racines est du module supérieur ou égale à* 1, *distincte de* 1, *alors* E *contient une suite divergente.*

Exemple 38 *Il suffit en particulier dans le cas a, b réels tels que* $a^2 - 4b < 0$, *d'avoir* $|b| < 1$ *pour que toutes les solutions soient convergentes.*

4.2 Suites monotones

Théorème 18 (Convergence monotone) *Soit u une suite numérique à valeurs réelles monotone. Alors u admet une limite dans* $[-\infty,+\infty]$. *Plus précisément,*

— *Dans le cas où u est croissante, u tend vers* $\sup u$.
  - *Si u est majorée,* $\sup u$ *appartient à* $\mathbb{R}$, *et u est convergente.*
  - *Si u n'est pas majorée,* $\sup u = +\infty$ *et u tend vers* $+\infty$.

— *Dans le cas où u est décroissante, u tend vers* $\inf u$.
  - *Si u est minorée,* $\inf u$ *appartient à* $\mathbb{R}$, *et u est convergente.*
  - *Si u n'est pas minorée,* $\inf u = -\infty$ *et u tend vers* $-\infty$.

Démonstration. Commençons par traiter le cas où u est croissante majorée. Soit $\varepsilon > 0$, alors $\sup(u) - \varepsilon < \sup(u)$. D'après la caractérisation de la borne supérieure, il existe un élément de $u(\mathbb{N})$, notons-le u_N tel que $\sup(u) - \varepsilon < u_\mathrm{N}$. Or comme u est croissante, $\forall n \geq \mathrm{N}, \sup(u) - \varepsilon < u_\mathrm{N} \leq u_n$. On a ainsi, l'encadrement,

$$\forall n \geq \mathrm{N}, \sup(u) - \varepsilon < u_\mathrm{N} \leq \sup(u)$$

A fortiori,

$$\forall n \geq \mathrm{N}, |u_n - \sup(u)| \leq \varepsilon$$

Ainsi, u est convergente de limite $\sup(u)$.
Suppsosons à présent u croissante non majorée. Alors $u(\mathbb{N})$ est non majorée. D'après la convention adoptée sur les bornes supérieures, $\sup(u) = +\infty$. Montrons que u tend vers $+\infty$. Soit A un réel strictement positif, comme u est non majorée, il existe un entier N tel que $u_\mathrm{N} \geq \mathrm{A}$. Mais alors, comme u est croissante, $\forall n \geq \mathrm{N}, u_n \geq u_\mathrm{N} \geq \mathrm{A}$. Ainsi, u tend vers $+\infty$.
Le cas décroissante découle de ce qui précède, en considérant la suite $-u$.

Exemple 39 *Supposons qu'on arrive à établir la monotonie d'une suite définie par récurrence* $u_{n+1} = f(u_n)$. *Alors il suffit de la majorer ou de la minorer pour obtenir sa convergence.*

Définition 20 *Soit u et v deux suites numériques à valeurs réelles. On dit que u et v sont adjacentes lorsque*

- *u est croissante*
- *v est décroissante*

- *la suite $u - v$ est convergente de limite nulle.*

Théorème 19 (Convergence des suites adjacentes) *Soit u et v deux suites numériques à valeurs réelles et adjacentes. Alors u et v sont convergentes et $\lim u = \lim v$.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$. Pour cela, on remarque $u - v = u + (-v)$ est la somme de deux suites croissantes, donc est croissante. En particulier, pour tout entiers naturels k et n tels que $k \geq n$, $u_k - v_k \geq u_n - v_n$. On fixe alors n et on remarque qu'on peut passer à la limite quand k tend vers $+\infty$ puisque la suite $u - v$ est convergente. Comme les inégalités sont compatibles avec les passages à la limite, on en déduit que $\lim(u-v) \geq u_n - v_n$, soit $0 \geq u_n - v_n$. Donc $u_n \leq v_n$. Comme v est décroissante, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq v_0$, donc que u est majorée. Comme u est croissante, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \leq u_n \leq v_n$, donc que v est minorée. Ainsi, u est croissante majorée, donc convergente. De même, v est décroissante minorée, donc convergente. Par linéarité de la limite, $\lim(u) - \lim(v) = \lim(u - v) = 0$, donc $\lim(u) = \lim(v)$.

Exemple 40 *On note pour tout entier naturel non nul n, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. Alors les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Par conséquent, elles convergent vers la même limite. On en déduit (en anticipant la prochaine partie) que la suite S converge (sa limite vaut $-\ln(2)$).*

4.3 Suites extraites

Exemple 41 *La suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$ n'est pas convergente. Pourtant, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes car constantes.*

Définition 21 *On appelle extractrice (ou fonction d'extraction) toute application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.*

Propriété 40 *Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extractrice. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$.*

Démonstration. Cela se prouve par récurrence. $\varphi(0) \in \mathbb{N}$, donc $\varphi(0) \geq 0$. Ainsi l'initialisation est vérifiée. Soit n un entier naturel tel que $\varphi(n) \geq n$. Alors φ est strictement croissante, $\varphi(n+1) > \varphi(n)$. Comme il s'agit d'entiers naturels, $\varphi(n+1) \geq \varphi(n) + 1$, donc $\varphi(n+1) \geq n + 1$. Ainsi la propriété est héréditaire, donc valable pour tout entier n par récurrence.

Définition 22 *Soit u une suite numérique. On appelle suite extraite (ou sous-suite) de u toute application de la forme $u \circ \varphi$ où φ est une extractrice.*

Notation
On note en général les sous-suites sous la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$

⚠ **Attention**
Il s'agit d'une composition à droite, une extraction d'extraction est de la forme $u \circ \varphi \circ \psi$ qui se note alors $(u_{\varphi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$.

Propriété 41 *Soit u une suite numérique convergente. Alors toutes ses suites extraites sont convergentes de limite $\lim u$. Soit u une suite numérique réelle qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), alors toute suite extraite de u tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).*

Démonstration. Notons $l = \lim u$ dans le cas u convergente. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe un rang N tel que $\forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$. D'après la propriété précédente, on en déduit que $\forall n \geq \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n \geq N$, donc que $|u_{\varphi(n)} - l| \leq \varepsilon$. Ainsi, $u \circ \varphi$ est convergente de limite l et ce quelque soit l'extractrice φ. Supposons à présent que u tend vers $+\infty$. Soit A un réel, alors il existe un rang N tel que $\forall n \geq N, u_n \geq A$. Alors, pour toute extractrice φ, $\forall n \geq N, \varphi(n) \geq n \geq N$, donc $u_{\varphi(n)} \geq A$. Ainsi, $u \circ \varphi$ tend vers $+\infty$. On traite le cas $-\infty$ de la même manière.

On en déduit par contraposée

Propriété 42 *Soit u une suite numérique. On suppose qu'il existe deux suites extraites de u possédant des limites distinctes. Alors u est divergente.*

Exemple 42 *Soit u une suite numérique convergente de limite non nulle. Alors la suite v définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (-1)^n u_n$ est divergente.*

Propriété 43 *Soit u une suite numérique. Alors il faut et il suffit que les sous-suites* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *soient convergentes de même limite pour que u soit convergente.*

Démonstration. Soit l la limite commune des deux suites mentionnées. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe un rang N tel que $\forall n \geq N, |u_{2n} - l| \leq \varepsilon$ et il existe un rang N′ tel que $\forall n \geq N', |u_{2n+1} - l| \leq \varepsilon$. On pose alors $N'' = \max(2N, 2N'+1)$. Soit $n \geq N$, alors si n est pair, il existe un entier p tel que $n = 2p$, ce qui entraîne $p \geq N$, donc $|u_{2p} - l| \leq \varepsilon$, soit $|u_n - l| \leq \varepsilon$. Si n est impair, il existe un entier q tel que $n = 2q+1$, ce qui entraîne $q \geq N'$, donc $|u_{2q+1} - l \leq \varepsilon$, soit $|u_n - l| \leq \varepsilon$. Dans tous les cas,

$$\forall n \geq N'', |u_n - l| \leq \varepsilon$$

Par conséquent, u est convergente de limite l.

Propriété 44 *Soit u une suite à valeurs réelles non majorée (resp. non minorée). Alors il existe une sous-suite de u qui tend vers* $+\infty$ *(resp. vers* $-\infty$*).*

Démonstration. Commençons par le cas u non majorée. On construit cette suite extraite par récurrence. Comme u est non majorée, il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} \geq 0$. On pose alors $\varphi(0) = n_0$. Alors la suite $(u_k)_{k>\varphi(0)}$ est non majorée, sinon u serait majorée via le maximum d'un nombre fini de réels. Par conséquent, il existe un entier $n_1 > \varphi(0)$ tel que $u_{n_1} \geq 1$. On pose alors $\varphi(1) = n_1$ qui vérifie $\varphi(1) > \varphi(0)$ et $u_{\varphi(1)} \geq 1$. Soit n un entier naturel non nul. Supposons construit un entier $\varphi(n)$ tel que $\varphi(n) > \varphi(n-1)$ et $u_{\varphi(n)} \geq n$. Alors comme précédemment, la suite $(u_k)_{k>\varphi(n)}$ est non majorée, car sinon la suite u serait majorée par le maixmum d'un nombre fini de réels. Par conséquent, il existe un entier n_{k+1} tel que $u_{n_{k+1}} \geq n+1$, notons cet indice $\varphi(n+1)$. Il vérifit alors $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ et $u_{\varphi(n+1)} \geq n+1$. On a ainsi construit par récurrence une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. C'est donc bien une extractrice et la suite extraite vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_{\varphi(n)} \geq n$. Comme n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, la suite $u \circ \varphi$ tend vers $+\infty$.
Dans l'autre cas, on applique ce qui précède à $-u$.

✎ Méthode

La négation de $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ *donne l'existence d'une suite* $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *et d'un réel* $\varepsilon > 0$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{\varphi(n)} - l| \geq \varepsilon$*. Autrement dit, il existe une sous-suite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui reste distante de l d'au moins* ε*.*

5 Suites à valeurs complexes

Définition 23 *Soit* $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *et* $\ell \in \mathbb{C}$*. On dit que u converge vers* ℓ *lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Propriété 45 *Soit u une suite numérique convergente vers l. Alors* $|u|$ *converge vers* $|l|$ *et* $\overline{u}$ *converge vers* $\overline{l}$*.*

Démonstration. L'inégalité triangulaire inverse donne $||u| - |l|| \leq |u - l|$. Comme précédemment, la suite $|u - l|$ tend vers 0. Le théorème précédent implique alors que $|u|$ tend vers $|l|$. D'autre part, $|\overline{u} - \overline{l}| = |\overline{u - l}| = |u - l|$. Comme u tend vers l, $|u - l|$ tend vers 0, donc $\overline{u}$ tend vers $\overline{l}$.

Propriété 46 *Soit u une suite numérique à valeurs complexes. Alors u est convergente si et seulement si* $\mathfrak{Re}(u)$ *et* $\mathfrak{Im}(u)$ *sont convergentes, auquel cas*

$$\lim u = \lim \mathfrak{Re}(u) + i \lim \mathfrak{Im}(u)$$

Démonstration. Supposons que u est convergente. Notons l sa limite. Alors par linéarité de la partie réelle, $\mathfrak{Re}(u - l) = \mathfrak{Re}(u) - \mathfrak{Re}(l)$. Or d'après les inégalités sur les complexes, $|\mathfrak{Re}(u - l)| \leq |u - l|$. Ainsi, $|\mathfrak{Re}(u) - \mathfrak{Re}(l)| \leq |u - l|$ et $|u - l|$ tend vers 0. On en déduit que $\mathfrak{Re}(u)$ tend vers $\mathfrak{Re}(l)$. Le même argument implique que $\mathfrak{Im}(u)$ est alors convergente de limite $\mathfrak{Im}(l)$. Réciproquement, supposons $\mathfrak{Re}(u)$ et $\mathfrak{Im}(u)$ convergentes. Notons $l = \lim \mathfrak{Re}(u) + i \lim \mathfrak{Im}(u)$ et montrons que u est convergente de limite l. Soit $\epsilon > 0$, d'après les convergences respectives de $\mathfrak{Re}(u)$ et $\mathfrak{Im}(u)$ vers leurs limites, il existe des rangs N et N′ tels que

$$\forall n \geq N, |\mathfrak{Re}(u_n) - \lim \mathfrak{Re}(u)| \leq \varepsilon/2$$

$$\forall n \geq N', |\mathfrak{Im}(u_n) - \lim \mathfrak{Im}(u)| \leq \varepsilon/2$$

On en déduit, par croissance du carré sur $\mathbb{R}^+$,

$$\forall n \geq \max(N, N'), |u_n - l|^2 = |\mathfrak{Re}(u_n) - \lim \mathfrak{Re}(u)|^2 + |\mathfrak{Im}(u_n) - \lim \mathfrak{Im}(u)|^2 \leq \varepsilon^2/2 \leq \varepsilon^2$$

Alors, par croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}^+$, on a

$$\forall n \geq \max(N, N'), |u_n - l| \leq \varepsilon$$

On a donc bien prouvé la convergence de u vers l.

⚠ Attention

On rappelle qu'il n'y a pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$, donc qu'on ne peut parler de « $+\infty$ » ou de « $-\infty$ » dans cet ensemble. Les limites infinies sont peu exploitées pour les suites à valeurs complexes.On préfère étudier l'éventuelle limite de $|u|$ vers $+\infty$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 7 *Rebalayer l'intégralité du cours et contrôler toutes les propriétés des suites à valeurs réelles encore valides pour les suites à valeurs complexes, en passant de la valeur absolue au module.*