IPESUP 2025/2026

Colle 7 filière PCSI Vendredi 21 novembre 2025

★★★

Planche 1

★★★

1. Définition de l'arccosinus. Énoncé. Dérivabilité et expression de sa dérivée. Énoncé et démonstration.
2. Étude de la fonction $x \mapsto x\operatorname{sh}(1/x)$.
3. On considère la suite d'intégrales $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{1+t}\,dt$$

   (a) Exprimer son terme général à l'aide d'une somme.
   (b) Montrer que $J_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
   (c) Montrer que $(2nJ_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

★★★

Planche 2

★★★

1. Énoncer la propriété de linéarité de l'intégrale. Résolution de l'équation fonctionnelle $f(xy) = f(x)+f(y)$. Énoncé et démonstration.
2. Déterminer une primitive de l'arccosinus sur un intervalle à préciser.
3. Soit $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant $f(0) = f(\pi) = 0$. On désigne la fonction cotangente par le symbole cot. Montrer que pour tout réel x dans $]0,\pi[$,

$$\int_x^{\pi-x} (f'(t)-f(t)\cot(t))^2\,dt = (f^2(x)+f^2(\pi-x))\cot(x) + \int_x^{\pi-x} \left(f'^2(t)-f^2(t)\right)dt$$

   Montrer que le passage à la limite quand x tend vers 0 par valeurs supérieures est licite et expliciter ses conséquences.

★★★

Planche 3

★★★

1. Définition de la tangente hyperbolique. Énoncé. Théorème fondamental du calcul intégral. Énoncé général et démonstration dans un cas particulier à préciser.
2. Déterminer une primitive de $x \mapsto 1/(x^{1/2}+x^{1/3})$ sur un intervalle à préciser.
3. Montrer que arctan est infiniment dérivable et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \arctan^{(n)}(x) = (n-1)!\,(\cos(\arctan(x)))^n \sin(n(\arctan(x)+\pi/2))$$

★★★

Bonus

★★★

Montrer que

$$\frac{\pi}{4} = 6\arctan\left(\frac{1}{8}\right)+2\arctan\left(\frac{1}{57}\right)+\arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$