Exercices - Applications

Cornou Jean Louis

2 juillet 2025

1 Images

1.1 Extension du cours

Soit $f : E \to F$ une application. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E et $(B_j)_{j\in J}$ une famille de parties de F. Montrer que

1. $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.
2. $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.
3. $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.
4. $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

1.2 Images de segments

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 3x - 2$. Déterminer les ensembles suivants :

1. $f(\mathbb{R})$.
2. $f^{-1}(\{0\})$.
3. $f^{-1}([-5,-2[)$.
4. $f([-1,0])$.
5. $f(f^{-1}([-5,-2]))$.
6. $f^{-1}(f([-1,0]))$.

1.3 Une homographie complexe

Soit $f : \mathbb{C}\backslash\{i\} \to \mathbb{C}\backslash\{1\}, z \mapsto \dfrac{z+i}{z-i}$.

1. Vérifier que f est correctement définie.
2. Montrer que f est bijective.
3. Déterminer les ensembles $f(\mathbb{R})$, $f(\mathbb{U}\backslash\{i\})$ et $f(i\mathbb{R}\backslash\{i\})$ où $i\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des imaginaires purs.

1.4 Une homographie réelle

On étudie la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{3x+2}{x+4}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f. Il est noté D_f dans tout ce qui suit.
2. Étudier le signe de f, ses variations, ses limites aux bords de son ensemble de définition et tracer l'allure de son graphe.
3. Montrer que la fonction f est injective.
4. Montrer que l'image directe $f(D_f)$ est égale à l'ensemble $\mathbb{R}\backslash\{3\}$.
5. Montrer que $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$.
6. Montrer que l'application
$$g : \mathbb{R}\backslash\{-4\} \to \mathbb{R}\backslash\{3\}, x \mapsto \frac{3x+2}{x+4}$$
est une bijection, et expliciter sa réciproque.
7. Soit $x \in D_f$ tel que $f(x) \neq x$ et $x \neq -18/7$. Montrer qu'alors $f(f(x)) \neq f(x)$.
8. Montrer que l'ensemble $\{x \in D_f | f(x) = x\}$ possède exactement 2 éléments, que l'on explicitera.

2 Composition

2.1 Commutation

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, xy)$. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$. A-t-on l'égalité $f \circ g = g \circ f$?

2.2 Conjugaison

Soit f une application de E dans E, on définit par récurrence la notation suivante : $f^0 = \mathrm{Id}_E$, pour tout entier naturel n, $f^{n+1} = f^n \circ f$. Soit $g : E \to F$ une application bijective. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(g \circ f \circ g^{-1}\right)^n = g \circ f^n \circ g^{-1}$$

2.3 Composition itérée

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

1. Calculer $f \circ f$, puis $f \circ f \circ f$.
2. On pose pour tout entier naturel n non nul, $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ termes}}$. Calculer f^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2.4 Une addition tordue

Pour tout $(x_1, x_2) \in]-1, 1[^2$, on pose $x_1 \oplus x_2 = \dfrac{x_1 + x_2}{1 + x_1 x_2}$. On note de plus A l'application $]-1, 1[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$.

1. Montrer $\forall (x_1, x_2) \in]-1, 1[^2, x_1 \oplus x_2 \in]-1, 1[$.
2. A l'aide d'outils de terminale, montrer que A est une bijection. Déterminer sa réciproque à l'aide de la fonction exponentielle.
3. Démontrer que
$$\forall (x_1, x_2) \in]-1, 1[^2, \mathrm{A}(x_1) + \mathrm{A}(x_2) = \mathrm{A}(x_1 \oplus x_2)$$
4. En déduire sans calcul
$$\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{A}^{-1}(y_1 + y_2) = \frac{\mathrm{A}^{-1}(y_1) + \mathrm{A}^{-1}(y_2)}{1 + \mathrm{A}^{-1}(y_1)\mathrm{A}^{-1}(y_2)}$$
5. Soit $x \in]-1, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Établir une formule simple pour déterminer
$$\underbrace{x \oplus x \oplus \cdots \oplus x}_{n \text{ termes}}$$

2.5 Groupe affine

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on note $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$.

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. A quelle condition nécessaire et suffisante sur (a, b), l'application $f_{a,b}$ est-elle une bijection ? Le cas échéant, déterminer sa réciproque.
2. Soit $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}_*^2 \times \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe un unique $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ que l'on précisera tel que
$$f_{a_1,b_1} \circ f_{a_2,b_2} \circ f_{a_1,b_1}^{-1} = f_{\alpha,\beta}$$
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (a_1, a_2, b_1, b_2) pour que $f_{a_1,b_1} \circ f_{a_2,b_2} = f_{a_2,b_2} \circ f_{a_1,b_1}$.
4. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. On suppose que $f_{a,b}$ vérifie
$$\forall (a', b') \in \mathbb{R}_* \times \mathbb{R}, f_{a',b'} \circ f_{a,b} = f_{a,b} \circ f_{a',b'}$$
Montrer que $(a, b) = (1, 0)$.

3 ...jections

3.1 Une réciproque

Soit $f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$. Montrer que f est bijective et déterminer son application réciproque f^{-1}.

3.2 Une autre réciproque

On note $\text{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. Cette application est appelée sinus hyperbolique.

1. Démontrer que sh est une bijection strictement croissante.
2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $y = \text{sh}(x)$ si et seulement si e^x est racine d'un polynôme du second degré à déteminer dont les coefficients dépendent de y.
3. En déduire que $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$ est la réciproque de sh. On la note dorénavant argsh.
4. Démontrer que argsh est une fonction strictement croissante.
5. Démontrer que la fonction argsh est impaire.

3.3 Équipotence

On pose $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, n \mapsto \dfrac{n}{2}$ si n est pair $, -\dfrac{n+1}{2}$ sinon . Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.

3.4 Applications idempotentes

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$.

1. On suppose que $f \circ f = f$. Montrer que les propositions sont équivalentes
   (a) f est injective.
   (b) f est surjective.
   (c) f est bijective.
   (d) $f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.
2. On suppose que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que les propositions sont équivalentes
   (a) f est injective.
   (b) f est surjective.
   (c) f est bijective.

   Dans ce dernier cas, est-il vrai que $f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$?

3.5 Extension du cours

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ deux applications.

1. Montrer que si $f \circ g$ est surjective alors f est surjective.
2. Montrer que si $f \circ g$ est injective alors g est injective.

3.6 Applications dans un produit cartésien

Soit $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, (u, v) \mapsto (u^2 + v^2, uv)$.

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Déterminer les antécédents de $(3-2i, 3+i)$ par f.
4. Étudier l'injectivité et la surjectivité de $f_{|\mathbb{R}^2}^{|\mathbb{R}^2}$.

3.7 Caractérisation ensembliste de l'injectivité

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application. Montrer que f est injective si et seulement si pour toutes parties A, B de E, $f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = f(\mathrm{A}) \cap f(\mathrm{B})$.

3.8 Monotonie et injectivité

1. Montrer que toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement monotone est injective.
2. Démontrer que la réciproque est fausse.

3.9 Fibration

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application. Montrer que la famille $\left(f^{-1}(\{y\})\right)_{y \in \mathrm{F}}$ est un recouvrement disjoint de E. À quelle condition nécessaire et suffisante sur f, cette famille est-elle une partition de E ?