Chaque colle comporte une question de cours ainsi qu'un ou plusieurs exercices.

1 Questions de cours.

- Toute définition, tout résultat dans l'ensemble des notions abordées doit être parfaitement su et peut être ajouté aux items suivants.
- Factorisations de $e^{ip} \pm e^{iq}$ par l'arc moitié, application à la trigonométrie réelle. Énoncé et démonstration.
- Description et cardinal des racines n-ièmes de l'unité. Énoncé et démonstration.
- Images directes et réciproques d'une union et d'une intersection. Énoncé et démonstration.
- Caractérisation de la bijectivité à l'aide de compositions. Énoncé et démonstration.

2 Exercices.

Ils peuvent porter sur le chapitre 3 : complexes et le chapitre 4 : applications.

3 Chapitre 3 : complexes

Opérations dans $\mathbb{C}$

Construction de $\mathbb{C}$ admise, parties réelle et imaginaire, $\mathbb{R}$-linéarité. Conjugaison, multiplicativité, additivité. Module, multiplicativité. Inverse d'un complexe non nul, règle du produit nul dans $\mathbb{C}$. Inégalités $|\mathfrak{Re}(z)| \leq |z|$, $|\mathfrak{Im}(z)| \leq |z|$ et cas d'égalité. Inégalité triangulaire et cas d'égalité. Inégalité triangulaire inverse.

Exponentielle

Pour tout réel t, e^{it} est défini par $\cos(t) + i\sin(t)$. Périodicité, module, conjugué, inverse de $t \mapsto e^{it}$. Surjectivité de $\mathbb{R} \to \mathbb{U}$, $t \mapsto e^{it}$ admise. Formules d'Euler, de Moivre. Arguments d'un nombre complexe non nul. Ils sont manipulés uniquement à l'aide de congruences. Arguments d'un produit, d'un quotient, d'un conjugué. Factorisation $\forall t \in \mathbb{R}$, $a\cos(t)+b\sin(t) = |a+ib|\cos(t-\arg(a+ib))$ pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, e^z est défini par $e^{\mathfrak{Re}(z)}e^{i\mathfrak{Im}(z)}$. Propriétés algébriques, module, arguments, résolution de $e^z = a$.

Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$

Théorème de D'Alembert-Gauss admis. Extraction de racines carrées dans $\mathbb{C}$. Racines de trinômes dans $\mathbb{C}[X]$, relations coefficients-racines. Description et cardinal des racines n-ièmes de l'unité. Racines n-ièmes d'un complexe non nul.

Géométrie

Notion d'affixe complexe. Interprétation du module et des arguments de $(c-a)/(b-a)$. Traduction complexe de relations d'alignement ou de perpendicularité. Transformations $z \mapsto az$, $z \mapsto z+b$ et $z \mapsto \overline{z}$ du point de vue géométrique.

4 Chapitre 4 : applications

Notion d'application

Notion de produit cartésien, de graphe fonctionnel, d'application. Notation $f : E \to F, x \mapsto f(x)$. On différencie peu les notions de fonction et d'application, mais les étudiants doivent savoir déterminer l'ensemble de définition d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Application identité de E, Id_E, fonctions indicatrices d'une partie.

Opérations, ...jections

Restriction, corestriction d'une application. Image directe $f(A)$ d'une partie A de E par f, image réciproque $f^{-1}(B)$ d'une partie B de F par f. Images directes et réciproques d'une union et d'une intersection. Injection, surjection, bijection. $f : E \to F$ est une bijection ssi $\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$. Application réciproque d'une application bijective. Composition d'applications, associativité, neutre de l'identité. $f : E \to F$ est bijective ssi on dispose de $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, auquel cas $g = f^{-1}$. Composition d'applications bijectives, réciproque de la composée. Caractérisation des fonctions bijectives $f : E \to F$ dans le cas E et F finis de même cardinal.

Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème des valeurs intermédiaires. Toute fonction continue et monotone sur un intervalle induit une surjection sur l'intervalle image déterminé par les valeurs ou limites pertinentes. Toute fonction strictement monotone est injective. Conditions suffisantes de stricte monotonie à l'aide de la dérivée en cas de dérivabilité. Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle induit une bijection sur l'intervalle image déterminé par les valeurs ou limites pertinentes. Sa réciproque est alors monotone de même monotonie.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆