Exercices - Arithmétique

1

1.1

Déterminer par deux méthodes les entiers suivants

1. $390 \wedge 525$.
2. $26 \wedge 130$.
3. $120 \wedge 255$.

1.2

Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Déterminer les entiers suivants :

1. $(n+2) \wedge n$.
2. $(n^2+n) \wedge (2n+1)$.
3. $(2^n - 1) \wedge (2^m - 1)$.
4. $(3n^2+2n) \wedge (n+1)$.

1.3

Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que $\mathbb{U}_a \cap \mathbb{U}_b = \mathbb{U}_{a \wedge b}$.

1.4

Montrer que pour tout entier naturel n,

1. $12 \mid n^4 - n^2$.
2. $6 \mid 5n^3 + n$.
3. $7 \mid 4^{2^n} + 2^{2^n} + 1$.

1.5

Trouver tous les entiers relatifs n et p vérifiant chacune des égalités suivantes :

1. $np = 3n + 2p$.
2. $\frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{1}{5}$.
3. $n^2 - p^2 - 4n - 2p = 5$.

1.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $a_n = 3n+1$ et $b_n = 5n-1$.

1. Montrer que $a_n \wedge b_n \mid 8$.
2. Déterminer les valeurs de n telles que $a_n \wedge b_n = 8$. Calculer alors $a_n \vee b_n$.

1.7

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $8n+7$ n'est pas somme de trois carrés.

1.8

Soit p un entier premier.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}$.
2. En déduire que p divise $a^p - a$ pour tout entier relatif a.

1.9

Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. tel que $a \wedge b = 1$. On suppose que ab est un carré, i.e $\exists c \in \mathbb{N}, ab = c^2$. Montrer que a est un carré et b est un carré.

1.10 Nombres de Fermat

1. Soit $m \in \mathbb{N}$. On suppose que $2^m + 1$ est premier. Montrer que
$$\exists n \in \mathbb{N}, m = 2^n$$
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{F}_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que
$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, p \neq q \Rightarrow \mathrm{F}_p \wedge \mathrm{F}_q = 1$$

1.11 Nombres de Mersenne

Soit a et n deux entiers supérieurs ou égaux à 2.

1. On suppose que $a^n - 1$ est premier. Montrer qu'alors $a = 2$ et n est premier.
2. Montrer que $2^{11} - 1$ n'est pas premier.

1.12

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Déterminer $(a + b) \wedge (a \vee b)$.

1.13

Déterminer tous les entiers relatifs n tels que $n - 3$ divise $n^3 - 3$.

1.14

1. Décomposer 5929 en produit de facteurs premiers.
2. Déterminer tous les entiers naturels a, b tels que $a \wedge b$ et $a \vee b$ sont les racines du polynôme $\mathrm{X}^2 - 91\mathrm{X} + 588$.

1.15 Triplets pythagoriciens

Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$. On suppose que $a^2 + b^2 = c^2$ et que $\mathrm{D}^+(a) \cap \mathrm{D}^+(b) \cap \mathrm{D}^+(c) = \{1\}$.

1. Soit $p \in \mathcal{P}$ tel que p divise a et b. Montrer que p divise c.
2. En déduire que $a \wedge b = 1$, puis $a \wedge c = 1$ et $b \wedge c = 1$.
3. En raisonnant sur les restes dans la division euclidienne par 4, montrer que a et b sont de parité différentes.
4. On suppose a pair et b impair. À l'aide de l'exercice 1.9, montrer qu'il existe deux entiers naturesl u, v premiers entre eux tels que
$$a = 2uv, \quad b = u^2 - v^2, \quad \text{et} \quad c = u^2 + v^2.$$

1.16 Fibonacci

On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence via $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \wedge u_{n+1} = 1$.
4. Montrer que pour tous entiers non nuls n et m, $u_n \wedge u_m = u_{n \wedge m}$.

1.17

Déterminer tous les entiers naturels non nuls n et m tels que $n^m = m^n$. *Indication : on pourra utiliser les valuations p-adiques.*