Exercices - Complexes

Cornou Jean Louis

6 juillet 2025

1 Calculs divers

1.1

Simplifier et mettre sous forme algébrique les complexes suivants :

1. $(1+i)(3-4i)+2i$.
2. $(1-4i)^3$.
3. $(1+i)(2-i)(3+7i)+1$.
4. i^k pour tout entier relatif k.
5. $\dfrac{4+5i}{2i}$.
6. $\dfrac{1+i}{1-i}$.
7. $\dfrac{1}{(4+i)^2}+i$.
8. $\dfrac{(1+3i)^2-1+3i}{(2+i)^3-10i}$.

1.2

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et θ un réel non congru à $\pi/2$ modulo π. Calculer $(i-\sqrt{3})^n$ et $(1+i\tan(\theta))^n$.
2. Déterminer tous les entiers relatifs p tels que $(1+i)^p$ est imaginaire pur.

1.3

On pose $z_1 = 1+i\sqrt{3}, z_2 = 1-i\sqrt{3}$ et $z_3 = 2$. Montrer que pour tout entier naturel premier p supérieur ou égal à 5, on a l'égalité

$$z_1^p + z_2^p = z_3^p.$$

1.4

Soit t, t' deux réels et n un entier. Mettre sous forme trigonométrique ou exponentielle les complexes suivants :

1. $4\sqrt{2}(-1+i)$.
2. $\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^5}{(-2+2i)^3}$.
3. $(3-\sqrt{20})^{11}(\sqrt{3}+i)$.
4. $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.
5. $\left(1+e^{it}\right)^n$.
6. $e^{it}+e^{it'}$.
7. $\dfrac{1+e^{it}}{e^{it}-1}$ (pour $t \not\equiv 0[2\pi]$)

1.5

Déterminer tous les complexes z vérifiant les égalités ou critères suivants et les représenter dans le plan complexe.

1. $z+\frac{1}{z} \in \mathbb{R}$.
2. $|z| = z$.
3. $|z-1| = |\overline{z}-3|$.
4. $z+4\overline{z}-4 = 0$.
5. $|z| = |1/z| = |z+1|$.
6. $|z+2i-1| = |4i-3-z|$.

1.6 Quel rapport ?

Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4$. On pose $\mathrm{N}_1 = a^2+b^2$ et $\mathrm{N}_2 = c^2+d^2$. Montrer que $\mathrm{N}_1\mathrm{N}_2$ est également la somme de deux carrés d'entiers.

1.7 Module

Calculer le module des complexes suivants :

1. $\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
2. $\dfrac{1}{2}+i\dfrac{1}{2}$.
3. $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}}+i\dfrac{1}{2}\sqrt{4-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

1.8

Soit a, b deux complexes tels que $|a| \neq |b|$, puis $z \in \mathbb{U}$.

1. Montrer que $\overline{b}z+\overline{a} \neq 0$.
2. Montrer que $\dfrac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}} \in \mathbb{U}$.

1.9

Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose

$$z = -\sin(2t)+2i\cos^2(t)$$

1. Déterminer le module de z. Déterminer les arguments de z quand z est non nul.
2. À quelle condition nécessaire et suffisante sur t, les complexes z et $z-1$ ont-ils même module ?
3. Mettre $z-i$ sous forme trigonométrique.
4. Représenter dans le plan l'ensemble

$$\{-\sin(2t)+2i\cos^2(t) | t \in \mathbb{R}\}$$

1.10

Soit $(z, z') \in \mathbb{U}^2$ tel que $zz'+1 \neq 0$. Montrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$.

1.11

1. Soit $z \in \mathbb{U}\backslash\{1\}$. Montrer que $\dfrac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pur. La réciproque est-elle vraie ?
2. Soit $z \in \mathbb{U}$. Démontrer que pour tout $u \in \mathbb{U}\backslash\{1\}$, $\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}$ est réel. Étudier la réciproque.

1.12

Soit $z \in \mathbb{U}\backslash\{1\}$. Montrer que $\dfrac{z}{(z-1)^2}$ est un réel strictement négatif.

2 Équations algébriques

2.1

Déterminer les complexes z vérifiant chacune des égalités suivantes :

1. $z^2 = -7+24i$.
2. $z^2 = -3-4i$.
3. $z^2+z+1 = 0$.
4. $z^2-2(2+i)z+6+8i = 0$.
5. $iz^2+(4i-3)z+i-5 = 0$.
6. $z^4+2z^3+z^2+2z+1 = 0$.

2.2

Déterminer les complexes z vérifiant chacune des égalités suivantes :

1. $z^2 = 27\overline{z}$.
2. $z^2+8|z|-3 = 0$.
3. $e^z = -2$.
4. $e^z = 3i$.
5. $e^z = e^{\overline{z}}$.
6. $e^z+e^{-z} = 1$.

2.3

Déterminer l'ensemble des complexes z_1, z_2 vérifiant chacun des deux systèmes suivants :

1. $z_1z_2 = 1/2 \wedge z_1+2z_2 = \sqrt{3}$.
2. $z_1+z_2 = 1 \wedge z_1^2+z_2^2 = 3$.

2.4

Soit $u \in]-\pi, \pi[$. Déterminer en fonction de u les modules et arguments (quand applicable) des complexes z vérifiant

$$z^2 - 2z(\cos(u) + i\sin(u)) + 2i\sin(u)(\cos(u) + i\sin(u)) = 0$$

2.5 ✠

Soit a, b deux complexes. Montrer que les complexes z vérifiant $z^2 + az + b = 0$ ont tous même module si et seulement s'il existe un réel $\lambda \in [0, 4]$ tel que $a^2 = \lambda b$.

2.6

Soit $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$\mathrm{E} = \left\{ z \in \mathbb{C}\backslash\{-i\} \quad | \quad \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \alpha \right\}$$

Montrer l'équivalence $\mathrm{E} \subset \mathbb{R} \iff |\alpha| = 1$.

2.7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble des complexes z vérifiant l'égalité :

$$(z^2 + 1)^n = (z - i)^{2n}$$

2.8

Soit $\delta \in \mathbb{C}$ vérifiant $\delta^2 = 1 + i$. On pose

$$\omega = \frac{\delta}{(-\sqrt{3} + i)^5}$$

Déterminer les deux ensembles

1. $\{n \in \mathbb{N} \,|\, \omega^n \in \mathbb{R}\}$.
2. $\{n \in \mathbb{N} \,|\, \omega^n \in i\mathbb{R}\}$.

3 Géométrie

3.1

Soit a un complexe imaginaire pur et n un entier naturel non nul. Montrer que le triangle formé par les points d'affixes a^n, a^{n+1}, a^{n+2} est rectangle.

3.2 Triangles équilatéraux

Soit a, b, c trois complexe deux à deux distincts. On pose $j = \exp(2i\pi/3)$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. Les points d'affixe a, b et c forment un triangle équilatéral.
2. $aj^2 + bj + c = 0$ ou $aj^4 + bj^2 + c = 0$.
3. $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.
4. $\dfrac{1}{a-b} + \dfrac{1}{b-c} + \dfrac{1}{c-a} = 0$.

3.3 Caractérisations algébriques de figures géométriques

Soit $z \in \mathbb{C}$. On note A, B, C les points du plan d'affixes respectives z, z^2 et z^3.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur z pour que le triangle ABC soit isocèle.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur z pour que le triangle ABC soit équilatéral.

3.4 Lieu géométrique

À tout complexe z différent de 4, on associe le complexe

$$z' = \frac{iz - 4}{z - 4}.$$

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M d'affixe z tel que z' est réel. Déterminer $\mathcal{C}$ par une méthode algébrique puis par une méthode géométrique.

3.5 Une similitude directe

On considère la transformation du plan $\mathrm{S} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto 2(1+i)z - 7 - 4i$.

1. Montrer qu'il existe un unique complexe ω tel que $\mathrm{S}(\omega) = \omega$. Donner son expression algébrique.
2. Exprimer simplement $\mathrm{S}(z) - \mathrm{S}(\omega)$ en fonction de $z - \omega$ pour tout complexe z.
3. Caractériser géométriquement S.