Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Il est rappelé qu'il est tenu compte dans l'évaluation, de la présentation et la rédaction des copies. Les résultats doivent être encadrés.

Exercice 1. Autour de l'exponentielle intégrale

1. **Étude de l'intégrande** f. Pour tout réel x, on pose

$$f(x) = \frac{e^x}{x},$$

où e^x désigne l'exponentielle de x.

   (a) Déterminer le domaine de définition de la fonction f. Celui-ci sera noté D dans tout ce qui suit.

   (b) Justifier que f est dérivable sur D, puis exprimer sa dérivée sur ce domaine.

   (c) Étudier les variations de f, i.e déterminer les éventuels domaines de monotonie de f, ainsi que les éventuelles limites de f aux bords de son domaine de définition.

   (d) Tracer l'allure du graphe f. Indiquer en particulier les éventuelles tangentes horizontales au graphe de f.

2. **Étude de** F **et** G **sur** $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout réel x strictement positif, on pose

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt.$$

On pose également, pour tout réel x strictement positif,

$$G(x) = F(2x) - F(x).$$

   (a) Justifier que F est dérivable et exprimer F' sur $\mathbb{R}_+^*$

   (b) Justifier que G est dérivable, puis montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad G'(x) = e^x \frac{e^x - 1}{x}.$$

   (c) En déduire que G est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (d) Justifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad G(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$$

   (e) En utilisant la croissance de l'exponentielle et la croissance de l'intégrale, démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad G(x) \geq \ln(2)e^x$$

   (f) En déduire que G possède une limite en $+\infty$ et la préciser.

3. **Étude de** G **sur** $\mathbb{R}_-^*$. Pour tout réel x strictement négatif, on pose

$$G(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$$

On prêtera attention au fait que $2x < x$ dans ce cadre.

(a) Montrer que G est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$.
(b) Montrer que G tend vers 0 en $-\infty$.

4. **Étude de G au voisinage de 0.**
   (a) En considérant deux cas, démontrer que
   $$\forall t \in [-1,1], \quad |e^t - 1| \leq 2|t|$$
   (b) En déduire par encadrement que G tend vers $\ln(2)$ en 0

Exercice 2. Logique en vrac

1. Soit P, Q, R trois assertions.
   (a) Démontrer que l'implication $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ est vraie quelles que soient les valeurs de vérité de P, Q, R , i.e une tautologie.
   (b) La réciproque $(P \Rightarrow R) \Rightarrow [(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)]$ de cette dernière implication est-elle une tautologie ?
2. Pour toutes assertions A, B, on note l'assertion $\neg(A \wedge B)$ sous la forme $A \uparrow B$. On peut la lire sous la forme « non (A et B) ». Le symbole $\uparrow$ est appelé barre de Sheffer. Soit P, Q deux assertions. Démontrer les équivalences logiques suivantes :
   (a) $\neg P \equiv P \uparrow P$.
   (b) $P \Rightarrow Q \equiv P \uparrow (Q \uparrow Q)$.
   (c) $P \Rightarrow Q \equiv P \uparrow (P \uparrow Q)$.
   (d) $P \wedge Q \equiv (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)$.
   (e) $P \vee Q \equiv (P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)$.
3. Soit P, Q, R trois assertions. Les assertions $(P \uparrow Q) \uparrow R$ et $P \uparrow (Q \uparrow R)$ sont-elles équivalentes ?
4. Soit A, B, C trois assertions. On suppose que $A \iff (B \wedge C)$ est vraie, et que $C \iff (A \vee (\neg C))$ est vraie. Déterminer les valeurs de vérité de A, B et C.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆