Les calculatrices et documents ne sont pas autorisés.

Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Il est rappelé qu'il est tenu compte dans l'évaluation, de la présentation et la rédaction des copies. Les résultats doivent être encadrés.

Problème : autour des fonctions de Lambert

L'objet de ce problème, inspiré en très grande partie du sujet Centrale PSI 2020 Maths 2, est l'étude de différentes propriétés des fonctions de Lambert. La fonction W définie dans la partie I est utilisée dans les parties II et III. Les parties II et III sont indépendantes l'une de l'autre.

Partie I : fonctions de Lambert

Dans cette partie, on définit les fonctions de Lambert et on étudie certaines de leurs propriétés. On considère, dans toute cette partie, l'application

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\,\mathrm{e}^x \end{array} \right.$$

1. En menant l'étude de l'application f, justifier qu'elle induit une bijection de l'intervalle $[-1,+\infty[$ sur l'intervalle $[-\mathrm{e}^{-1},+\infty[$.

Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée W. On rappelle que ceci signifie que, pour tout réel $x \geqslant -\mathrm{e}^{-1}$, $W(x)$ est l'unique solution de l'équation $f(t) = x$ (équation d'inconnue $t \in [-1,+\infty[$).

2. Justifier que W est dérivable sur $]-\mathrm{e}^{-1},+\infty[$ et que

$$\forall x > -\mathrm{e}^{-1}, \quad W'(x) = \frac{1}{x + e^{W(x)}}.$$

3. Expliciter $W(0)$ et $W'(0)$.
4. Montrer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{W(x)}{x} = 1.$$

5. En étudiant les limites en $+\infty$ de $W(x)$ et $\dfrac{\ln(W(x))}{W(x)}$, démontrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{W(x)}{\ln(x)} = 1.$$

6. Tracer, sur le même dessin, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_W$ représentatives des fonctions f et W. Préciser les tangentes aux deux courbes au point d'abscisse 0 ainsi que la tangente à $\mathcal{C}_W$ au point d'abscisse $-\mathrm{e}^{-1}$.
7. Démontrer que l'application f induit une bijection de l'intervalle $]-\infty,-1]$ sur l'intervalle $[-\mathrm{e}^{-1},0[$.

Dans la suite du sujet, la réciproque de cette dernière bijection est notée V.

8. Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$x\,\mathrm{e}^x = m.$$

Déterminer, en fonction de m, le nombre de réels x vérifiant $xe^x = m$ et expliciter ces éventuels réels à l'aide des fonctions V et W.

9. Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$x\mathrm{e}^x \leqslant m.$$

En utilisant les fonctions V et W, déterminer suivant les valeurs de m les solutions de cette inéquation. Illustrer graphiquement les différents cas.

Partie II - Approximation de W par un polynôme

Le but de cette partie est d'établir que la fonction W définie dans la partie **I** est approchable par un polynôme. Pour cela, on commence par établir un résultat de nature algébrique.

II.A - Le théorème binomial d'Abel

On considère dans cette partie un entier naturel non nul n ainsi qu'un nombre réel a. On définit une famille de fonctions polynomiales réelles $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ en posant

$$A_0 : x \mapsto 1 \quad \text{et} \quad \forall\, k \in [\![1, n]\!], \quad A_k : x \mapsto \frac{1}{k!}x(x-ka)^{k-1}.$$

On rappelle que pour toute fonction f infiniment dérivable, pour tout entier naturel non nul n, $f^{(n)}$ désigne la n-ième dérivée de f, ainsi que la convention $f^{(0)} = f$.

10. Démontrer que, pour tout réel x, tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\quad A_k'(x) = A_{k-1}(x-a)$.
11. Soit $(k, j) \in [\![0, n]\!]^2$ tel que $j > k$. Montrer que $A_k^{(j)}(ja) = 0$
12. Soit $(k, j) \in [\![0, n]\!]^2$ tel que $j \leq k$. En procédant par récurrence sur j, démontrer que

$$A_k^{(j)}(ja) = A_{k-j}(0)$$

13. En déduire que, pour tous j et k éléments de $[\![0, n]\!]$, $A_k^{(j)}(ja)$ vaut 0 si j diffère de k, et 1 si $j = k$.

Soit P une fonction polynomiale réelle de degré au plus n. On admet qu'il existe une unique famille de $n+1$ réels $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ telle que

$$P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k.$$

14. Démontrer que, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $\quad \alpha_j = P^{(j)}(ja)$.
15. Soit $y \in \mathbb{R}$. On considère la fonction polynomiale $Q : x \mapsto (x+y)^n$. Montrer par récurrence

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad Q^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}(x+y)^{n-k}$$

16. À l'aide des résultats précédents, démontrer l'identité binomiale d'Abel :

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x+y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x(x-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k}.$$

17. Établir la relation

$$\forall\, y \in \mathbb{R}, \quad ny^{n-1} = (-na)^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}(-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k}.$$

18. Démontrer l'égalité

$$(n-1)(-n)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}(-k)^{k-1}(n-k)^{n-k}$$

II.B - Développement en série entière

On définit une suite réelle $(a_n)_{n\geqslant 1}$ en posant,

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{(-n)^{n-1}}{n!}$$

Pour tout entier naturel non nul N, tout réel x, on pose

$$P_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n x^n \quad \text{et} \quad Q_N(x) = (1 + P_N(x))xP_N'(x)$$

On étudie quelques résultats permettant en partie de démontrer que la fonction P_N tend (en un sens à préciser) vers W quand N tend vers $+\infty$.

19. Démontrer la limite suivante :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = -e.$$

20. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On met Q_N sous forme polynomiale $x \mapsto \sum_{n=0}^{2N} c_n x^n$. Montrer à l'aide d'une double somme et de l'unicité des coefficients polynomiaux que
$$c_N = \sum_{k=0}^{N} a_k (N-k) a_{N-k}.$$

21. Avec les mêmes notations que précédemment, démontrer que
$$c_N = a_N.$$
Indication : on pourra utiliser le résultat de la question 18.

On **admet** que pour tout réel x dans l'intervalle $]-e^{-1}, e^{-1}[$, les suites $(P_N(x))_{N\in\mathbb{N}^*}$ et $(P_N'(x))_{N\in\mathbb{N}^*}$ admettent une limite, notées respectivement $S(x)$ et $T(x)$. On admet que la fonction $x \mapsto S(x)$ ainsi définie est infiniment dérivable, de dérivée $x \mapsto T(x)$ sur l'intervalle $]-e^{-1}, e^{-1}[$. Ce qui précède permet de démontrer que

$$\forall x \in]-e^{-1}, e^{-1}[, \quad (1 + S(x))xS'(x) = S(x).$$

22. Montrer que $S(0) = 1$ et $S'(0) = 1$.
23. En s'intéressant à la stricte croissance de P_N pour tout entier N sur $]-e^{-1}, 0[$, démontrer que S est strictement croissante sur $]-e^{-1}, 0[$.
24. En déduire que $\forall x \in]-e^{-1}, 0[, -1 < S(x) < 0$.

On considère à présent la fonction $h : \left| \begin{array}{ccc}]-e^{-1}, e^{-1}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & S(x)e^{S(x)} \end{array} \right.$

25. Démontrer que h est dérivable et vérifie
$$\forall x \in]-e^{-1}, e^{-1}[, \quad xh'(x) - h(x) = 0.$$

26. Résoudre l'équation différentielle $xy' - y = 0$ d'inconnue y dérivable à valeurs réelles sur chacun des intervalles $]0, e^{-1}[$, $]-e^{-1}, 0[$, puis sur l'intervalle $]-e^{-1}, e^{-1}[$.
27. En déduire que
$$\forall\, x \in]-e^{-1}, e^{-1}[, \quad S(x) = W(x).$$

Partie III - Approximation de W par itération

Dans toute cette partie, x est un réel fixé dans $[0, e]$. On considère la fonction Φ définie par

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & x\exp(-x\exp(-t)) \end{array} \right.$$

et on définit par récurrence une suite de réels $(w_n)_{n\geqslant 0}$ par

$$w_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \Phi(w_n).$$

On cherche à démontrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $W(x)$ défini en partie I.

28. Démontrer que $\Phi(W(x)) = W(x)$.
29. Démontrer que, la fonction Φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant \Phi'(t) \leqslant \frac{x}{\mathrm{e}}.$$

30. En déduire par intégration que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |w_{n+1} - W(x)| \leqslant \left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)|w_n - W(x)|.$$

31. En déduire que si $x \in [0, e[$, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $W(x)$.

★ ★ ★ Fin du sujet ★ ★ ★