Colle 1 filière PCSI Vendredi 26 septembre 2025

★★★

Planche 1

★★★

1. Définition d'une disjonction d'assertions logiques. Équivalence logique d'une implication et de sa contraposée. Énoncé et démonstration.
2. Déterminer $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0,1\}))$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$. Montrer qu'il existe un unique couple de réels (a,b) tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (a+bn)2^n.$$

★★★

Planche 2

★★★

1. Quelle est la négation de $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 1$? Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 1$ et $f' = f$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^k \leqslant 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}.$$

3. Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. Déterminer toutes les parties X de E vérifiant $A \cap X = B$.

★★★

Planche 3

★★★

1. Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles. Qu'appelle-t-on $\displaystyle\bigcup_{i\in I} E_i$? Énoncé et démonstration de lois de De Morgan.
2. Soit E et F deux ensembles. Montrer que $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n$ des réels tous supérieurs ou égaux à 1. Montrer que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant n - 1 + x_1 x_2 \ldots x_n$$

★★★

Bonus

★★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie d'ensembles telle que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \exists k \in [\![1,n]\!], E_i \cup E_j \subset E_k.$$

Montrer qu'il existe un entier k dans $[\![1,n]\!]$ tel que

$$\forall i \in [\![1,n]\!], E_i \subset E_k.$$