Exercices - logique et théorie des ensembles

Cornou Jean Louis

1 Logique et raisonnement

1.1 Implication et donc

Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux assertions. On note l'assertion $\mathcal{P} \wedge (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ sous la forme $\mathcal{P} \vdash \mathcal{Q}$.

1. Dresser la table de vérité de l'assertion $\mathcal{P} \vdash \mathcal{Q}$.
2. En déduire l'équivalence logique $\mathcal{P} \vdash \mathcal{Q} \equiv \mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$.
3. Redémontrer ce résultat sans table de vérité.

1.2 Une table de vérité

Soit $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ trois assertions. Dresser proprement la table de vérité de l'assertion $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Rightarrow \mathcal{R}$, puis de l'assertion $\mathcal{P} \Rightarrow (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R})$. Ces deux assertions sont-elles logiquement équivalentes ?

1.3 Traductions quantifiées

Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une suite à valeurs reélles. Vous pouvez la noter $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si vous préférez. Traduire en langage mathématique quantifiée les phrases suivantes (plusieurs réponses sont possibles) :

1. La suite u est minorée.
2. La suite u n'est pas majorée.
3. La suite u est la suite constante nulle.
4. La suite u n'est pas constante.
5. La suite u est croissante ou décroissante.
6. La suite u est de signe constant.
7. La suite u est périodique.

1.4 Encore de la traduction

Sans se soucier de leur valeur de vérité, traduire en langage mathématique quantifié les phrases suivantes (plusieurs réponses sont possibles) :

1. Tout réel admet une racine carrée complexe.
2. Tout entier naturel possède au moins deux diviseurs entiers.
3. Toute fonction réelle de la variable réelle s'annule une infinité de fois (on pourra noter $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions réelles de la variable réelle).
4. Il existe un réel tel que toute suite à valeurs réelles ne vaut jamais ce réel (on pourra noter $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs réelles).
5. Il existe un entier supérieur ou égal à 12 qui est somme de deux carrés d'entiers naturels.

1.5 Conditions nécessaires et/ou suffisantes

Soit x et y deux réels. Dans chaque phrase, entourer le ou les mots qui rendent l'affirmation vraie :

1. Pour faire de la mousse au chocolat il faut/il suffit d'avoir du chocolat.
2. Pour faire du caramel, il faut/ il suffit d'avoir de l'eau et du sucre.
3. Pour qu'un losange soit carré, il faut/il suffit que ses diagonales aient la même longueur.
4. Les œufs sont une condition nécessaire/suffisante pour faire de la mousse au chocolat.
5. $x = 2$ est une condition nécessaire/suffisante pour que $x^2 = 4$.
6. $x + y = 5$ est une condition nécessaire/suffisante pour que $x = 2$ et $y = 3$.

1.6 Négations

Ecrire la négation des phrases suivantes (on pourra regrouper les termes « croissant » et « pain au chocolat » sous la dénomination « viennoiserie ») :

1. Ce matin, je prends une tasse de café et un croissant.
2. Chaque matin, je prends une tasse de café.
3. Il m'est arrivé, un matin, de prendre une tasse de café.
4. Chaque matin, je prends une tasse de café et un croissant.
5. Ce matin, je prends une tasse de café et, un croissant ou un pain au chocolat.
6. Chaque matin, s'il fait soleil, je prends une tasse de café.

Chaque phrase commencera par « Ce matin », « Chaque matin » ou « Il m'est arrivé, un matin « .

1.7 De l'importance du parenthésage

1. La proposition
$$\forall x \in \mathbb{R}, [(\forall y \in \mathbb{R}, xy = 0) \Rightarrow x = 0]$$
est-elle vraie ou fausse ? La traduire en prose française sans aucun symbole mathématique.
2. La proposition
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, [(xy = 0) \Rightarrow x = 0]$$
est-elle vraie ou fausse ? La traduire en prose française sans aucun symbole mathématique.

1.8 Large ou strict ? ✠

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ une fonction de la variable réelle à valeurs réelles. On considère les deux assertions

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \geq A$$

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) > A$$

Montrer qu'elles sont logiquement équivalentes.

1.9 Petit ou nul ?

Démontrer la proprosition suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, [(\forall \varepsilon > 0, |x| \leq \varepsilon) \iff x = 0]$$

1.10 De l'ordre des quantiticateurs

$\mathbb{R}^*$ désigne l'ensemble des réels non nuls. Déterminer parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses :

1. $\exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z - xy = 0.$
2. $\forall y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z - xy = 0.$
3. $\forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, z - xy = 0.$

1.11 Prouver une disjonction

Soit x et y deux réels strictement positifs. Démontrer la proposition suivante :

$$xy \geq 1 \quad \vee \quad x + y \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

1.12 Disjonction de cas

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n(n+1)(2n+1)$ est multiple de 6.

1.13 Classement

Soit x, y, z trois réels parmi lesquels il y a 0 et deux réels non nuls et de signes opposés. On suppose que les implications suivantes sont vraies :

$$(\mathcal{P})\, x = 0 \Rightarrow y > 0, \quad (\mathcal{Q})\, x > 0 \Rightarrow y < 0, \quad (\mathcal{R})\, y \neq 0 \Rightarrow z > 0$$

Classer les réels x, y, z dans l'ordre croissant.

1.14 Analyse-synthèse

Déterminer toutes les fonctions dérivables f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, xf'(x) = -f(x)$$

Indication : si f désigne une telle fonction, introduire la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto xf(x)$

1.15 Analyse-synthèse

Déterminer tous les réels x vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, x^{n+2} \leq x^{n+1} + x^n$$

1.16 Théorème de récurrence ✠

Soit A une partie de $\mathbb{N}$. On suppose que $0 \in A$ et $\forall n \in A, n+1 \in A$ et on souhaite démontrer que $A = \mathbb{N}$. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que $A \neq \mathbb{N}$. On rappelle que A^c désigne le complémentaire de A, i.e $\mathbb{N} \backslash A$.

1. Justifier l'existence du minimum de A^c. On le note b dans ce qui suit.
2. Justifier que $b-1$ est un entier naturel et qu'il n'appartient pas à A^c.
3. Conclure.

1.17 Récurrence

Déterminer un entier naturel n_0 (le plus petit possible) tel que

$$\forall n \geq n_0, 3^n < n!$$

1.18 Encore une récurrence

On considère la suite u à valeurs réelles définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq 2^n$$

1.19 Termes d'une suite

On pose pour tout entier naturel n, $u_n = \left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n$. Montrer que pour tout entier naturel n, u_n est un entier pair.

1.20 De l'art de dire n'importe quoi

La « preuve » suivante prétend montrer par récurrence sur $n \geq 1$ qu'étant donné n nombres réels $u_1, u_2, \ldots, u_n$, ils sont en fait tous égaux.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P(n)$ l'assertion « $\forall (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n, u_1 = u_2 = \cdots = u_n$. » Montrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$. **Initialisation**. S'il n'y a qu'un nombre u_1, il n'y a rien à montrer, ce qui montre $P(1)$. **Hérédité.** Soit $n \geq 1$ un entier tel que $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.
  Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. D'après $P(n)$, on a déjà $u_1 = u_2 = \cdots = u_n$. Par ailleurs, si l'on pose $u'_1 = u_2, u'_2 = u_3, \ldots, u'_n = u_{n+1}$ et que l'on applique $P(n)$ à la famille $(u'_1, \ldots, u'_n)$, on obtient $u'_1 = \cdots = u'_{n-1} = u'_n$, c'est-à-dire $u_2 = \cdots = u_n = u_{n+1}$. Cela entraîne que $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = u_{n+1}$, et montre donc la propriété voulue.

Le résultat est évidemment faux. Où est le problème ?

2 Ensembles

2.1 Écritures ensemblistes

Écrire mathématiquement les ensembles suivants :

1. l'ensemble des triplets de réels dont la somme est le double du produit.
2. l'ensemble des couples de rationnels dont la somme est un entier pair.
3. l'ensemble des sommes de carrés de deux entiers.
4. l'ensemble des réels dont une certaine puissance est nulle.
5. l'ensemble des réels images de la fonction $x \mapsto \cos(x) + x^2$.
6. l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont 1-périodiques.

2.2 Appartenance et inclusion

Soit $E = \{0, 1, 2\}$. Déterminer les assertions correctes dans la liste suivante :

1. $E \in \mathbb{N}$.
2. $E \subset \mathbb{N}$.
3. $E \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
4. $E \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
5. $1 \in E$.
6. $1 \subset E$.
7. $\{1\} \in E$.
8. $\{1\} \subset E$.
9. $\emptyset \in E$.
10. $\emptyset \subset E$.
11. $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$.
12. $\{\emptyset\} \subset E$.

2.3 Lourdeur mathématique

Décrire plus courtement (les symboles x et y doivent disparaître) l'ensemble défini par compréhension suivant :

$$\left\{ \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \middle| \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \left[\left(ax^2 + bx + c = 0 \wedge ay^2 + by + c = 0 \right) \Rightarrow x = y \right] \quad \right\}$$

2.4 Unions et intersections ensemblistes

Démontrer les deux égalités ensemblistes suivantes

$$]-1, +\infty[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}, n \right[\qquad \text{et} \qquad [0, 1[= \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}, n \right[.$$

2.5 Simplifications

Soit E un ensemble, A, B, C trois parties de E. Pour toute partie D de E, D^c désigne le complémentaire de D, i.e $E \backslash D$. Déterminer plus simplement les ensembles suivants

1. $(A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c)$.
2. $A \cup (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$.

2.6 Équivalences ensemblistes

Soit E un ensemble, A, B, C des parties de E. Démontrer les équivalences suivantes

1. $A \cup B \subset C \iff (A \subset C) \wedge (B \subset C)$.
2. $C \subset A \cap B \iff (C \subset A) \wedge (C \subset B)$.
3. $A \subset B \iff \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.
4. $A \cap B = \emptyset \iff A \subset B^c \iff B \subset A^c$.

2.7 Suffit-il de ?

Soit A et B deux parties de $\mathbb{N}$. Pour tout entier naturel n, $[\![0, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à n.

1. Démontrer l'équivalence suivante :

$$A = B \iff (\forall n \in \mathbb{N}, A \cap [\![0, n]\!] = B \cap [\![0, n]\!])$$

2. L'équivalence suivante est-elle vraie ?

$$A = B \iff (\exists n \in \mathbb{N}, A \cap [\![0, n]\!] = B \cap [\![0, n]\!])$$

2.8 Différence symétrique

Soit E un ensemble. Pour toutes parties A, B de E, on appelle différence symétrique de A et B l'ensemble $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Il est noté $A \Delta B$.

1. Montrer que $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \Delta B = B \Delta A$.
2. Montrer que $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
3. Soit A une partie de E. Déterminer l'ensemble des parties X de E vérifiant l'égalité ensembliste $A \Delta X = A$.

2.9 Un découpage

Soit E un ensemble et n un entier naturel non nul. Soit $A_0, A_1, \dots, A_n$ des parties de E telles que

- $A_0 = \emptyset$,
- $\forall i \in [\![0, n-1]\!], A_i \subset A_{i+1} \wedge A_i \neq A_{i+1}$.
- $A_n = E$.

Pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, on pose $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$. Montrer que la famille $(B_1, \dots, B_n)$ est une partition de E.

2.10 « Addition » d'ensembles

Pour toutes parties A et B de $\mathbb{R}$, on définit $A \dagger B = \{a + b | (a, b) \in A \times B\}$. Le symbole $\dagger$ s'appelle un obèle.

1. Dresser la liste des éléments de $\{-1, 0, 1\} \dagger \{2, 4\}$.
2. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que $A \dagger \mathbb{R} = \mathbb{R}$.
3. Montrer que $\forall (A_1, A_2, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})^3, (A_1 \cap A_2) \dagger B \subset (A_1 \dagger B) \cap (A_2 \dagger B)$.
4. L'assertion $\forall (A_1, A_2, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})^3, (A_1 \cap A_2) \dagger B = (A_1 \dagger B) \cap (A_2 \dagger B)$ est-elle vraie ?

2.11 Composantes

1. Soit E et F deux ensembles. Montrer l'équivalence
$$\mathbb{N} \times E \subset \mathbb{N} \times F \iff E \subset F$$
2. Soit A, B, C trois ensembles tous non vides. Montrer l'implication
$$A \times B \subset B \times C \Rightarrow A \subset C$$