Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Cornou Jean-Louis

8 juillet 2025

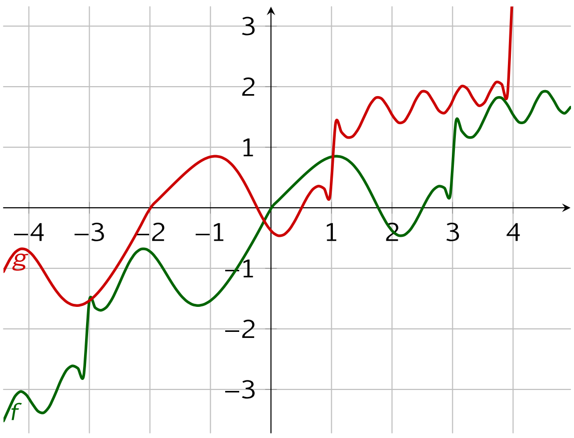
1 Généralités, études de fonctions

1.1 Généralités

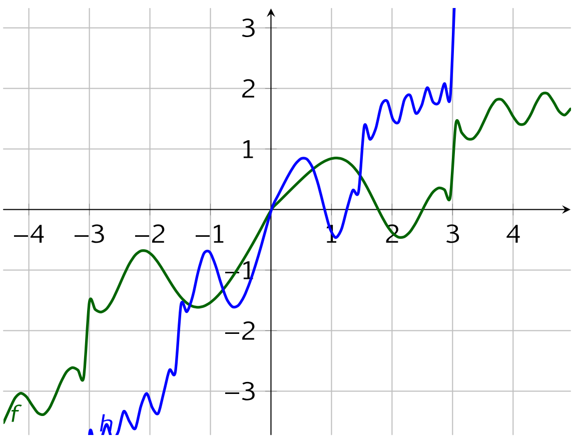
Définition 1 *Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}, x \mapsto f(x)$ une fonction. L'ensemble des éléments x de E tel que $f(x)$ est bien défini est appelé ensemble de définition de f, souvent noté D_f. Le graphe de f est la partie $\{(x, f(x)) | x \in \mathrm{D}_f\}$ de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$.*

Propriété 1 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et a un réel. Alors le graphe de la fonction $g : x \mapsto f(x+a)$ est obtene par translation du graphe de f par le vecteur $(-a, 0)$. Dans le cas $a \neq 0$, le graphe de la fonction $hx \mapsto f(ax)$ est obtenue via une affinité du graphe de f de base $(0y)$, de direction $(0x)$ de rapport $1/a$.*

Exemple 1 *On représente plus bas le graphe d'une fonction f en vert, et le graphe de la fonction $g : x \mapsto f(x+2)$ en rouge.*



Dans cette seconde illustration, le graphe de la fonction $h : x \mapsto f(2x)$ est représenté en bleu.



Définition 2 *On dit qu'une fonction f est paire (resp. impaire) lorsque $\forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$).*

✎ **Méthode**

L'étude d'une fonction paire (resp. impaire) peut être faite uniquement sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$. Le restant du graphe est obtenue par symétrie orthogonale par rapport à l'axe $(0x)$ (resp. par une symétrie centrale de centre 0).

Définition 3 *Une fonction f est dite périodique lorsqu'il existe un réel non nul T tel que $\forall x \in D_f, x + T \in D_f \wedge f(x+T) = f(x)$. L'ensemble $\{T \in \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)\}$ est appelé l'ensemble des périodes de f.*

Exemple 2 *La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est périodique de période 1.*

✎ **Méthode**

Soit f une fonction périodique, de plus petite période strictement positive T. Il suffit alors de l'étudier sur $[a, a+T]$ avec a un réel bien choisi. Le restant du graphe s'obtient par translation du sous-graphe obtenu. Si de plus, la fonction est de plus paire ou impaire, on peut par exemple choisir $a = -T/2$, et restreindre l'intervalle d'étude à $[0, T/2]$.

Définition 4 *Soit f une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles et λ un scalaire. Alors on définit la fonction λf via l'expression $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ pour tout réel x dans D_f.*
Soit f et g deux fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles. Alors on définit la fonction $f+g$ via l'expression $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ pour tout réel x dans $D_f \cap D_g$. Cette fonction est la somme des fonctions f et g.
Soit f et g deux fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles. Alors on définit la fonction fg via l'expression $(fg)(x) = f(x)g(x)$ pour tout réel x dans $D_f \cap D_g$. Cette fonction est le produit des fonctions f et g.

Définition 5 *Soit f et g deux fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles. Alors on définit la fonction $g \circ f$ via l'expression $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ pour tout réel x dans $D_f \cap f^{-1}(D_g)$.*

Exemple 3 *Soit $x \in \mathbb{R}$, la quantité $\ln(\sqrt{x^2+x-1}-1)$ est définie si et seulement si $x^2+x-1 \geq 0$ (i.e $x \in D_{\sqrt{}}$) et $\sqrt{x^2+x-1}-1 > 0$ (i.e $\sqrt{x^2+x-1}-1 \in D_{\ln}$). Or*

$$x^2+x-1 = \left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

On en déduit que $x^2+x-1 \geq 0 \iff x \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \vee x \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \iff x \in]-\infty, (-1-\sqrt{5})/2] \cup [(-1+\sqrt{5})/2, +\infty[$. D'autre part, soit x vérifiant le critère précédent, alors

$$\sqrt{x^2+x-1}-1 > 0 \iff \frac{x^2+x-2}{\sqrt{x^2+x-1}+1} > 0 \iff x^2+x-2 > 0$$

Or $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$, donc $x^2+x-2 > 0 \iff x \in]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$. L'intersection des deux domaines fournit alors l'équivalence $\ln(\sqrt{x^2+x-1}-1)$ est définie si et seulement si $x \in]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$ car $(\sqrt{5}-1)/2 < 1$ et $(-1-\sqrt{5})/2 > -2$.

Exemple 4 *Pour tout f fonction d'une variable réelle à valeurs réelles, on définit $|f|$ la valeur absolue de f comme la composée de f par la fonction valeur absolue. Elle est bien définie sur D_f.*

Définition 6 *Soit f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que $f \leq g$ (resp. $f \geq g$) lorsque $D_f = D_g$ et*

$$\forall x \in D_f, f(x) \leq g(x) \quad (resp. f(x) \geq g(x))$$

⚠ **Attention**

La négation de $f \leq g$ n'est pas $f > g$, mais $\exists x \in D_f, f(x) > g(x)$.

Définition 7 *Soit f une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles. On dit que f est*

- *croissante lorsque*

$$\forall (x,y) \in D_f^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

- *décroissante lorsque*
$$\forall (x,y) \in D_f^2, x \leq y, f(y) \leq f(x))$$
- *strictement croissante lorsque*
$$\forall (x,y) \in D_f^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$
- *strictement décroissante lorsque*
$$\forall (x,y) \in D_f^2, x < y, f(y) < f(x))$$
- *monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante*
- *strictement monotone lorsque'elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Définition 8 *Soit f une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles. On dit que f est majorée (resp. minorée) lorsque*
$$\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, f(x) \leq a \quad (\text{ resp. } f(x) \geq a)$$

Définition 9 *Soit f une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles. On dit que f est bornée lorsque f est à la fois majorée et minorée.*

Propriété 2 *Soit f une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles. Alors f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.*

Démonstration. Supposons que f est bornée. On note alors m et M un minorant et un majorant de f. Alors en particulier
$$\forall x \in D_f, -|m| \leq m \leq f(x) \leq M \leq |M|$$
On pose alors $a = \max(|m|, |M|)$, ce qui assure que
$$\forall x \in D_f, -a \leq f(x) \leq a, \quad \text{donc} \quad |f(x)| \leq a$$
Réciproquement, supposons que $|f|$ est majorée. Notons a un majorant de $|f|$. Alors
$$\forall x \in D_f, |f(x)| \leq a$$
On en déduit que
$$\forall x \in D_f, -a \leq f(x) \leq a$$
Ainsi, a est un majorant de f, et $-a$ est un minorant de f, ce qui prouve que f est bornée.

1.2 Rappels sur les limites

Récapitulatif

Limite d'une somme

$\lim f$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(f+g)$	L + L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Limite d'un produit

$\lim f$	L	$L>0$	$L>0$	$L<0$	$L<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim g$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim(fg)$	LL'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Limite d'un quotient : deux cas

— Limite du dénominateur non nulle :

$\lim f$	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim g$	$L' \neq 0$	$\pm\infty$	$L'>0$	$L'<0$	$L'>0$	$L'<0$	$\pm\infty$
$\lim(f/g)$	L/L'	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

— Limite du dénominateur nulle : étude de signe

$\lim f$	$L>0$ ou $+\infty$	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	0
$\lim g$	0^+	0^-	0^+	0^-	0
$\lim(f/g)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

1.3 Dérivation

Dans ce qui suit, on fixe I et J des intervalles non vides et non réduits à un point.

Définition 10 *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une application et $a \in \mathrm{I}$. On dit que f est dérivable en a lorsque la quantité $(f(x)-f(a))/(x-a)$ possède une limite finie quand x tend vers a. Dans ce cas, cette limite finie est notée $f'(a)$.*
On dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, l'application $\mathrm{I} \to \mathbb{R}, a \mapsto f'(a)$ est appelée dérivée de f, notée f'.

Définition 11 *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une application et $a \in \mathrm{I}$. On suppose f dérivable en a. L'ensemble*

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = f'(a)(x-a) + f(a)\right\}$$

est appelée tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$.

Propriété 3 *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ deux applications. Soit λ un réel. Soit $a \in \mathrm{I}$. On suppose f et g dérivable en a. Alors*

- *$\lambda f + g$ est dérivable en a et $(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a)$.*
- *fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.*
- *si $f(a) \neq 0$, alors $1/f$ est dérivable en a et $(1/f)'(a) = -f'(a)/f(a)^2$.*

Propriété 4 *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ deux applications. Soit $a \in \mathrm{I}$. On suppose $f(a) \in \mathrm{J}$, f dérivable en a et g dérivable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en a et*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Propriété 5 *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ une application. Soit $a \in \mathrm{I}$. On suppose que f est bijective et dérivable en a. Alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$. Dans ce cas,*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

Corollaire
Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ une application bijective et dérivable telle que $\forall x \in \mathrm{I}, f'(x) \neq 0$. Alors f^{-1} est dérivable et

$$\forall y \in \mathrm{J}, \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Théorème 1 *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable sur l'intervalle I. On a les équivalences suivantes*

- *f est croissante si et seulement si $f' \geq 0$.*
- *f est décroissante si et seulement si $f' \leq 0$.*
- *f est constante si et seulement si $f' = 0$.*
- *f est strictement croissante si et seulement si $f' \geq 0$ et $\{x \in \mathrm{I} | f'(x) = 0\}$ ne contient pas d'intervalle non vide et non réduit à un point.*
- *f est strictement décroissante si et seulement si $f' \leq 0$ et $\{x \in \mathrm{I} | f'(x) = 0\}$ ne contient pas d'intervalle non vide et non réduit à un point.*

⚠ **Attention**
C'est FAUX si l'ensemble de définition de f n'est pas un intervalle. La fonction inverse $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$ vérifie $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -1/x^2 < 0$. Pourtant, elle n'est pas décroissante. En effet, $-1 < 1$. pourtant $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$.

Corollaire
Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable sur l'intervalle I. Si $f' > 0$, alors f est strictement croissante. Si $f' < 0$, alors f est strictement décroissante.

✎ **Méthode (Tableau de variations)**
L'étude des variations d'une fonction dérivable f peut se représenter à l'aide d'un tableau de variations. On étudie tous les sous-intervalles de D_f où f' est de signe constant. On représente les domaines de stricte monotonie de f à l'aide de flèche ascendante ou descendante. On termine en indiquant les limites ou valeurs prises aux bords des domaines de stricte monotonie.

2 Fonctions polynomiales et rationnelles

Définition 12 *On appelle fonction polynômiale réelle toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe un entier n et un $n+1$-uplet de réels $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

On admet pour l'instant que les réels $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ sont uniquement déterminés par l'application f.

Définition 13 *Soit f une fonction polynômiale non nulle. L'entier $\max(k \in \mathbb{N}^* | a_k \neq 0\}$ est appelé degré de l'application polynômiale f. Il est noté $\deg(f)$. Le réel $a_{\deg(f)}$ est appelé coefficient dominant de f.*

Propriété 6 *Soit f une fonction polynômiale non constante. Notons d son degré (non nul) et a_d son coefficient dominant. Alors*

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_d x^d.$$

Plus précisément,

Parité de d	*Signe de a_d*	$\lim_{x\to-\infty} f(x)$	$\lim_{x\to+\infty} f(x)$
Pair	$+$	$+\infty$	$+\infty$
Pair	$-$	$-\infty$	$-\infty$
Impair	$+$	$-\infty$	$+\infty$
Impair	$-$	$+\infty$	$-\infty$

Démonstration. Avec des notations évidentes, pour tout réel x,

$$f(x) = a_d x^d \left(\sum_{k=0}^{d} \frac{a_k}{a_d} x^{k-d} \right) = a_d x^d \left(1 + \sum_{k=0}^{d-1} \frac{a_k}{a_d} x^{k-d} \right)$$

Dans la dernière somme mise en évidence, pour tout k dans $[\![0, d-1]\!]$, $k-d<0$, donc $\lim_{x\to\pm\infty} x^{k-d} = 0$, on en déduit que le terme entre parenthèses tend vers 1 quand x tend vers $\pm\infty$. Ainsi, la limite de f en $\pm\infty$ est la même que celle de son terme dominant.

Propriété 7 *Les fonctions polynomiales sont indéfiniment dérivables. Si l'on note d son degré, $f^{(d+1)} = 0$.*

Définition 14 *Soit f une fonction polynômiale. Les réels x tels que $f(x) = 0$ sont appelés les zéros de la fonction f ou les racines de la fonction f.*

Définition 15 *On appelle fonction rationnelle toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe une fonction polynômiale* P *et une fonction polynômiale non nulle* Q *telle que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{Q}(x) \neq 0 \Rightarrow f(x) = \frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}$$

Propriété 8 *Soit f une fonction rationnelle non nulle. Alors il existe deux fonctions polynômiales* P *et* Q *non nulles telles que* P *et* Q *ne possèdent aucune racine commune et*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{Q}(x) \neq 0, f(x) = \frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}$$

Cette écriture est unique à un facteur constant non nul près, dite forme irréductible de f. Avec cette écriture, les racines de P *sont appelées les zéros de f, tandis que les racines de* Q *sont appelées les pôles de f.*

Démonstration. Admis pour l'instant. Voir le chapitre sur l'arithmétique de K[X].

Exemple 5 *Soit f la fonction rationnelle définie par $f(x) = (x^2 - 2x + 1)/(x - 4x + 3)$ pour x réel dans un ensemble convenable. Le numérateur et le dénominateur possèdent 1 comme racine commune. Une forme irréductible de f est*

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 3, f(x) = \frac{x-1}{x-3}$$

Les racines de f sont alors 1, et ses pôles 3.

Théorème 2 *Soit $f = \frac{P}{Q}$ une fonction rationnelle non nulle sous forme irréductible. On note $a_n x^n$ le monôme de plus haut degré de P et $b_m x^m$ le monôme de plus haut degré de Q. Alors*

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

Propriété 9 *Toute fonction rationnelle est indéfiniment dérivable sur son ensemble de définition, i.e $\mathbb{R}$ privé de ses pôles.*

3 Exponentielle et logarithme, approche fonctionnelle

Afin d'introduire une pincée de dérivation partielle, on privilégie ici des équations fonctionnelles pour introduire les fonctions linéaires, logarithmiques et exponentielles.

3.1 Prélude sur les applications linéaires

Propriété 10 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable. On a l'équivalence*

$$\left[\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)\right] \iff [\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax]$$

Démonstration. On suppose que f vérifie $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)+f(y)$. Soit $y \in \mathbb{R}$. On étudie la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x+y)$. Comme $g : x \mapsto x+y$ et f sont dérivables, $h = f \circ g$ est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = f'(g(x))g'(x) = f'(x+y) \times 1 = f'(x+y)$$

Or $h = f + f(y)$, donc on a également

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = f'(x)$$

Conclusion, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f'(x+y)$. En particulier, $f'(0) = f'(y)$. Ce raisonnement est valide pour tout y dans $\mathbb{R}$. On a ainsi démontré $\forall y \in \mathbb{R}, f'(y) = f'(0)$. Posons alors $a = f'(0)$ et $m : y \mapsto f(y) - ay$. Cette application est dérivable et $\forall y \in \mathbb{R}, m'(y) = f'(y) - a = 0$ d'après ce qui précède. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, m est constante. Or $m(0) = f(0) - a \times 0$ et $f(0+0) = f(0) + f(0)$, donc $f(0) = 0$ et m est la fonction constante nulle.
Conclusion, $\forall y \in \mathbb{R}, f(y) = ay$.
Réciproquement, soit a un réel tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $f(x+y) = a(x+y) = ax+ay = f(x)+f(y)$.

3.2 Logarithme

Propriété 11 *L'ensemble des fonctions f dérivables de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+*}, f(xy) = f(x) + f(y)$$

est l'ensemble

$$\left\{x \mapsto a \int_1^x \frac{dt}{t} | a \in \mathbb{R}\right\}$$

Démonstration. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable vérifiant l'équation fonctionnelle indiquée. Fixons x un réel strictement positif et étudions la fonction $g_x : y \mapsto f(xy)$. Alors g est dérivable et vérifie grâce à la dérivée d'une composée :

$$\forall y \in \mathbb{R}^{+*}, g_x'(y) = xf'(xy) = 0 + f'(y)$$

En particulier, pour $y = 1$, $xf'(x) = f'(1)$. On note alors $a = f'(1)$ et f vérifie

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{a}{x}$$

De plus, en exploitant l'équation fonctionnelle en $x = 1$ et $y = 1$, on déduit $f(1) = f(1) + f(1)$, donc $f(1) = 0$. Ainsi, f est la primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $x \mapsto a/x$ s'annulant en 1. Avec les notations intégrales, il s'agit bien de $x \mapsto a\int_1^x \frac{dt}{t}$.
Réciproquement, soit $a \in \mathbb{R}$ et considérons l'application $h : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}, x \mapsto a\int_1^x \frac{dt}{t}$. Comme la fonction inverse est continue, on en déduit d'après le théorème fondamental du calcul intégral que h est dérivable. On considère alors un réel y strictement positif et on considère l'application $g : x \mapsto h(xy)$. Celle-ci est dérivable et vérife pour tout réel $x > 0$,

$$g'(x) = yh'(xy) = \frac{a}{x} = h'(x)$$

Par conséquent, comme $\mathbb{R}^{+*}$ est un intervalle, $g - h$ est constante égale (entre autres) à $g(1) - h(1) = h(y) - h(1) = h(y)$. En conclusion,

$$\forall x, y > 0, h(xy) = h(x) + h(y)$$

Définition 16 *L'application* $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{t}$ *est appelée logarithme népérien, noté* $\ln$.

Propriété 12 *Soit x, y des réels strictement positifs et n un entier relatif. Alors*

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$\ln(x^n) = n\ln(x)$$

Propriété 13 *Le logarithme népérien est continu et strictement croissant. C'est une bijection de* $\mathbb{R}_+^*$ *dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Voici une idée de preuve, il nous manque des outils pour être parfaitement rigoureux. Comme la fonction inverse est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, ln est dérivable d'après le théorème fondamental du calcul intégral et $\forall x > 0, \ln'(x) = 1/x > 0$. Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, ln est strictement croissante. D'autre part, ln est continu car dérivable. De plus, $\ln(2) \geq 1/2$ en minorant la fonction inverse sur $[1, 2]$ par la constante $1/2$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(2^n) = n\ln(2) \geq n/2$. Or $n/2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Donc $\ln(2^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Ainsi, ln est non majorée. Comme elle est croissante, $\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. En effectuant le changement de variable $y = 1/x$ dans les limites, $\ln(y) \xrightarrow[y\to0^+]{} \lim_{x\to+\infty} \ln(1/x) = \lim_{x\to+\infty} -\ln(x) = -\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires et ces limites, $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$, donc ln est surjective.

Définition 17 *Soit a un réel strictement positif et différent de* 1. *L'application* $\ln/\ln(a)$ *est appelé logarithme en base a.*

3.3 Exponentielle

Définition 18 *On appelle exponentielle la réciproque du logarithme népérien, c'est une application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}_+^*$. *Elle est notée* exp. *On pourra, par abus de notation, encore appeler exponentielle l'application* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x)$.

Théorème 3 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable. On a l'équivalence*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x)f(y) \iff [(\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \exp(ax)) \vee (f = 0)]$$

Démonstration. On suppose que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x)f(y)$. Dans un premier temps, on suppose de plus qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x - x_0 + x_0) = f(x - x_0)f(x_0) = f(x - x_0) \times 0 = 0$, donc f est constante nulle. On en déduit que si f n'est pas la fonction constante nulle, elle ne s'annule jamais. Plaçons-nous dorénavant dans ce cas. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geq 0$$

comme carré de réel. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$. On peut alors prendre le logarithme de f. Posons $g = \ln \circ f$, soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$g(x + y) = \ln(f(x + y)) = \ln(f(x)f(y)) = \ln(f(x)) + \ln(f(y)) = g(x) + g(y).$$

De plus, g est dérivable composée de fonctions dérivables. D'après la partie 3.1, il existe un réel a tel que $\forall x \in \mathbb{R} g(x) = ax$. En composant par l'exponentielle, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \exp(\ln(f(x)) = \exp(ax)$$

Réciproquement, soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \exp(ax)$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $f > 0$ d'après la définition de l'exponentielle. On peut prendre le logarithme de f.

$$\ln(f(x)f(y)) = \ln(f(x)) + \ln(f(y)) = ax + ay = a(x+y) = \ln(f(x+y))$$

Or le logarithme est injectif, donc $f(x)f(y) = f(x+y)$.

Propriété 14 *Pour tout réel x, pour tout entier relatif n,*

$$\exp(-x) = 1/\exp(x)$$

$$\exp(nx) = \exp(x)^n$$

Démonstration. La premier point vient de $1 = \exp(0) = \exp(x + (-x)) = \exp(x)\exp(-x)$. La suite est une récurrence classique laissée à votre soin.

Propriété 15 *La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie le problème de Cauchy*

$$f' = f \quad f(0) = 1$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que exp vérifie ces deux critères. $\exp(0)$ est l'unique antécédent de 0 par le logarithme. Or $\ln(1) = 0$, donc $\exp(0) = 1$. Notons que le logarithme est dérivable et $\forall t > 0, \ln'(t) = 1/t \neq 0$. D'après les critères de dérivabilité des réciproques, exp est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} = \exp(x)$$

Soit f une solution du problème de Cauchy. Posons $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)\exp(-x)$. Comme f, $x \mapsto -x$ et exp sont dérivables, h l'est également et

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = f'(x)\exp(-x) + f(x)(-1)\exp(-x) = f(x)\exp(-x) - f(x)\exp(-x) = 0$$

Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, h est constante. De plus, $h(0) = f(0)\exp(-0) = 1/1 = 1$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x)\exp(-x) = 1$ ou encore pour tout réel x, $f(x) = 1/\exp(-x) = \exp(x)$. Conclusion, $f = \exp$.

Corollaire
L'application exp *est strictement croissante.*

Démonstration. Par définition, $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$. Or $\exp' = \exp > 0$. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, exp est strictement croissante.

Propriété 16 (Inégalités de convexité) *Pour tout réel x, $\exp x \geq 1 + x$ avec égalité si et seulement si $x = 0$. Pour tout réel $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$ avec égalité si et seulement si $x = 0$.*

Démonstration. Il s'agit d'études de fonctions. Posons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \exp(x) - (1 - x)$. Comme exp et $x \mapsto 1 + x$ sont dérivables, f est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \exp(x) - 1 = \exp(x) - \exp(0)$$

D'après la stricte croissante de l'exponentielle, f est strictement positive sur $]0, +\infty[$ et strictement négative sur $]-\infty, 0[$. Comme ce sont des intervalles, f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Ainsi, f atteint un minimum uniquement en 0, qui vaut $f(0) = \exp(0) - (1 - 0) = 1 - 1 = 0$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \exp(x) > 1 + x$ et $\exp(0) = 1 + 0$.
Soit $x > -1$ tel que $x \neq 0$. Alors $1 + x > 0$ et $\exp(x) > 0$. On peut donc utiliser la stricte croissance du logarithme népérien sur l'inégalité $\exp(x) > 1 + x$, ce qui donne $\ln(\exp(x)) > \ln(1 + x)$ soit encore $1 + x > \ln(1 + x)$. D'autre, $1 + 0 = \ln(1 + 0)$. L'égalité est donc réalisée uniquement en 0.

☞ **Remarque**
Les droites d'équation $y = x$ et $y = 1 + x$ sont respectivement les tangentes de $x \mapsto \ln(1 + x)$ en 0 et de l'exponentielle en 0. Ces inégalités indiquent la position relative du graphe de ces deux fonctions relativement à ces tangentes.

3.4 Fonctions puissances

Définition 19 *Soit α un réel. Pour tout réel x strictement positif, on note* $x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$

☞ **Remarque**

Cette notation est cohérente avec les puissances entières d'un réel strictement positif. En effet, soit $x > 0$ et n un entier relatif. On a démontré que $n \ln(x) = \ln(x^n)$, donc que $\exp(n \ln(x)) = \exp(\ln(x^n)) = x^n$.

Définition 20 *L'application $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^\alpha$ est appelée fonction puissance de degré α. Dans le cas $\alpha \geq 0$, on peut la prolonger sur $\mathbb{R}^+$ via $0^\alpha = 0$ si $\alpha > 0$ et $0^0 = 1$.*

Propriété 17 *Avec la notation $e = \exp(1)$, pour tout réel x, $e^x = \exp(x \ln(e)) = \exp(x)$.*

Propriété 18 *Soit x et y deux réels strictement positifs, α, β deux réels. Alors*

$$\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$$
$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$$
$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$$
$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

Démonstration. Tout découle des propriétés fonctionnelles du logarithme et de l'exponentielle

$$\ln(x^\alpha) = \ln(\exp(\alpha \ln(x))) = \alpha \ln(x)$$
$$(xy)^\alpha = \exp(\alpha(\ln(xy)) = \exp(\alpha(\ln(x) + \ln(y))) = \exp(\alpha \ln(x) + \alpha \ln(y)) = \exp(\alpha \ln(x)) \exp(\alpha \ln(y))) = x^\alpha y^\alpha$$
$$x^{\alpha+\beta} = \exp(\alpha \ln(x) + \beta \ln(x)) = \exp(\alpha \ln(x)) \exp(\beta \ln(x)) = x^\alpha x^\beta$$
$$(x^\alpha)^\beta = \exp(\beta \ln(x^\alpha)) = \exp(\beta \alpha \ln(x)) = x^{\alpha\beta}$$

⚠ **Attention**

Ne pas confondre les expressions x^α et α^x !

Propriété 19 *Pour tout réel α, la fonction puissance de degré α p_α est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et*

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} = \alpha p_{\alpha-1}(x)$$

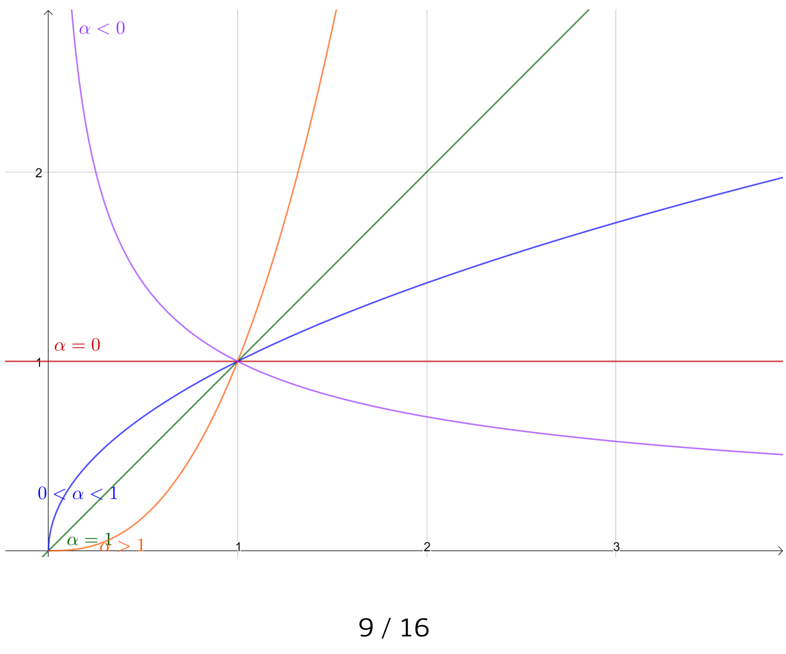
Pour $\alpha \geq 1$ et $\alpha = 0$, elle est également dérivable en 0, de dérivée 0 si $\alpha \neq 1$ et 1 si $\alpha = 1$. On en déduit que p_α est strictement croissante pour $\alpha > 0$, constante pour $\alpha = 0$, et strictement décroissante pour $\alpha < 0$.

Démonstration. p_α est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme composée de fonctions dérivables. Pour tout réel $x > 0$,

$$p'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{x} \exp'(\alpha \ln(x)) = \alpha x^{-1} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} = \alpha p_{\alpha-1}(x)$$

Comme les fonctions puissances sont des exponentielles de quelque chose, elles sont strictement positives (sauf peut-être en 0), ce qui donne les sens de variation indiqués.

Représentations graphiques



3.5 Croissances comparées

Propriété 20 *Les fonctions puissances admettent les limites suivantes :*

- *Si* $\alpha > 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$, *et* $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$.
- *Si* $\alpha < 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$ *et* $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$.

Démonstration. Il s'agit de limites de composées à l'aide des limites de l'exponentielle et du logarithme précédemment établies.

Propriété 21 (Croissances comparées) *Soit* α, β *des réels strictement positifs. Alors*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} |\ln(x)|^\alpha x^\beta = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\alpha x}|x|^\beta = 0$$

Démonstration. On commence par le cas particulier $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, tous les autres s'en déduiront. On dispose de l'inégalité de concavité du logarithme, $\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1 \leq x$. On en déduit $\forall x > 1, \ln(\sqrt{x}) \leq \sqrt{x}$, puis $\forall x > 1, \forall x > 1, \ln(x)/x \leq 2/\sqrt{x}$. On en déduit par théorème d'encadrement que $\lim_{x\to+\infty} \ln(x)/x = 0$.
Soit $x > 1$, alors

$$\frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = \left(\frac{\ln(x)}{x^{\beta/\alpha}}\right)^\alpha = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha \left(\frac{\ln(x^{\beta/\alpha})}{x^{\beta/\alpha}}\right)^\alpha$$

Comme on connaît les limites des fonctions puissances, on peut faire le changement de variable $y = x^{\beta/\alpha}$ qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, mais alors $\ln(y)/y \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$, puis $(\ln(y)/y)^\alpha \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$. On en déduit

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0$$

Les autres en découlent par les changements de variables respectifs, $y = 1/x$, $y = \ln(x)$, puis $y = -x$.

4 Fonctions hyperboliques

Théorème 4 *Soit* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *une fonction définie sur un intervalle stable par* $-\mathrm{id}$. *Alors il existe un unique couple* (g, h) *de fonctions de* I *dans* $\mathbb{R}$ *respectivement paire et impaire telle que* $f = g + h$.

Démonstration. Analyse : si un tel couple existe, alors pour tout réel x dans I, $f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$. On en déduit que $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et que $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Ceci prouve l'unicité d'un tel couple. La synthèse ne pose pas problème : il suffit de vérifier que $x \mapsto f(x) + f(-x)$ est paire, puis que $x \mapsto f(x) - f(-x)$.

Définition 21 *On appelle cosinus hyperbolique la partie paire de l'exponentielle et sinus hyperbolique la partie impaire de l'exponentielle. Elles sont notées* ch *et* sh.

Propriété 22 *Pour tout réel* x,

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

Démonstration. Voir la phase d'analyse du théorème de décomposition en parties paire/impaire.

Propriété 23 *Ces deux fonctions sont dérivables et vérifient pour tout réel* x

$$\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x), \quad \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$$

Démonstration. L'exponentielle étant dérivable, on a pour tout réel x,

$$\operatorname{ch}'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \operatorname{sh}(x)$$

$$\operatorname{sh}'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \operatorname{ch}(x)$$

Propriété 24 *La fonction cosinus hyperbolique est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$. Elle induit une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$. La fonction sinus hyperbolique est strictement croissante. Elle induit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. La seule chose à montrer est le signe du sinus hyperbolique. Or, pour tout réel x, comme l'exponentielle est à valeurs strictement positives

$$\operatorname{sh}(x) > 0 \iff e^x > e^{-x} \iff e^{2x} > 1 \iff 2x > 0 \iff x > 0$$

d'après la stricte croissance du logarithme. Ainsi, le sinus hyperbolique est strictement positif sur $\mathbb{R}^{+*}$, nulle en 0, et strictement négatif sur $\mathbb{R}^{-*}$. Il est clair que le cosinus hyperbolique est strictement positif sur $\mathbb{R}$. Les sens de variations découlent de la propriété précédente, et les limites découlent de celle de l'exponentielle réelle. On conclut par continuité via le théorème de la bijection.

Propriété 25 *Pour tous réels a et b,*

$$\operatorname{ch}^2(a) - \operatorname{sh}^2(a) = 1$$

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$$

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b)$$

Démonstration.

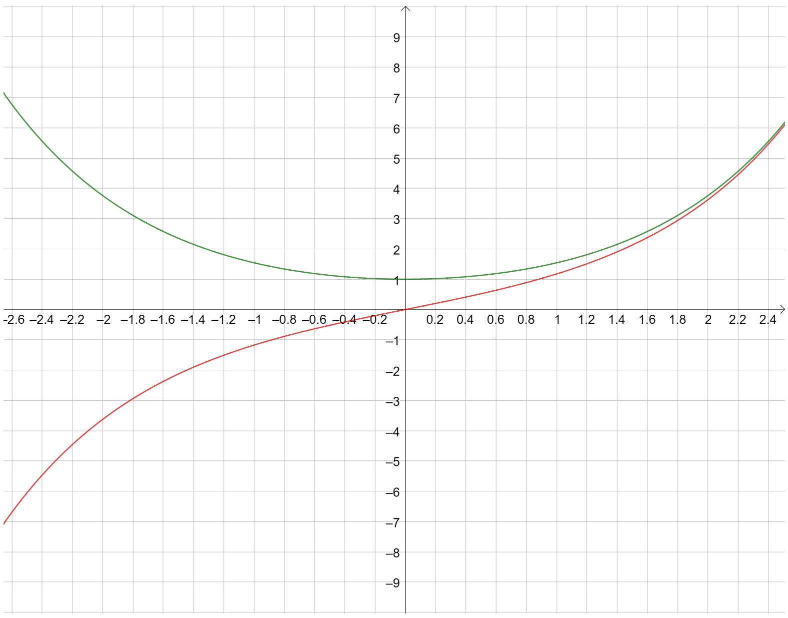
$$\frac{\exp(2a)+2+\exp(-2a)}{4} - \frac{\exp(2a)-2+\exp(2a)}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\left(e^a+e^{-a}\right)\left(e^b+e^{-b}\right)+\left(e^a-e^{-a}\right)\left(e^b-e^{-b}\right) = e^{a+b}+e^{a-b}+e^{-a+b}+e^{-a-b}+e^{a+b}-e^{a-b}-e^{-a+b}+e^{-a-b} = 2e^{a+b}+2e^{-a-b} = 2\operatorname{ch}(a+b)$$

$$\left(e^a-e^{-a}\right)\left(e^b+e^{-b}\right)+\left(e^a+e^{-a}\right)\left(e^b-e^{-b}\right) = e^{a+b}-e^{-a+b}+e^{a-b}-e^{-a-b}+e^{a+b}-e^{a-b}+e^{-a+b}-e^{-a-b} = 2e^{a+b}-2e^{-a-b} = 2\operatorname{sh}(a+b)$$

☞ **Remarque**

La première propriété montre que pour tout réel t, le couple $(x,y) = (\operatorname{ch}(t),\operatorname{sh}(t))$ vérifie $x^2 - y^2 = 1$, qui l'équation d'une hyperbole (équilatère). Ceci justifie l'appellation « hyperbolique » de ces fonctions.



Définition 22 *Pour tout réel x, on définit $\operatorname{th}(x) = \operatorname{sh}(x)/\operatorname{ch}(x)$. L'application ainsi définie sur $\mathbb{R}$ est appelée tangente hyperbolique.*

Propriété 26 *La fonction* th *est impaire.*

Propriété 27 *La fonction* th *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et vérifie pour tout réel* x*,*

$$\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x)$$

Démonstration. La tangente hyperbolique est dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule jamais. De plus,pour tout réel x,

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{sh}'(x)\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}'(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x)$$

Propriété 28 *La fonction* th *est strictement croissante et induit une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $]-1,1[$.

Démonstration. Remarquons que pour tout réel x, $e^{-x} > 0$, donc que $e^x - e^{-x} < e^x + e^{-x}$, ainsi $\mathrm{sh}(x) < \mathrm{ch}(x)$. Mais alors, $\mathrm{sh}(-x) < \mathrm{ch}(-x)$ entraîne $-\mathrm{ch}(x) < \mathrm{sh}(x)$. Tout ceci entraîne que th est d'image incluse dans $]-1,1[$. Ainsi, th^2 est d'image incluse dans $[0,1[$ et la propriété précédente implique que th est strictement croissante. D'autre part,

$$\mathrm{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x}\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

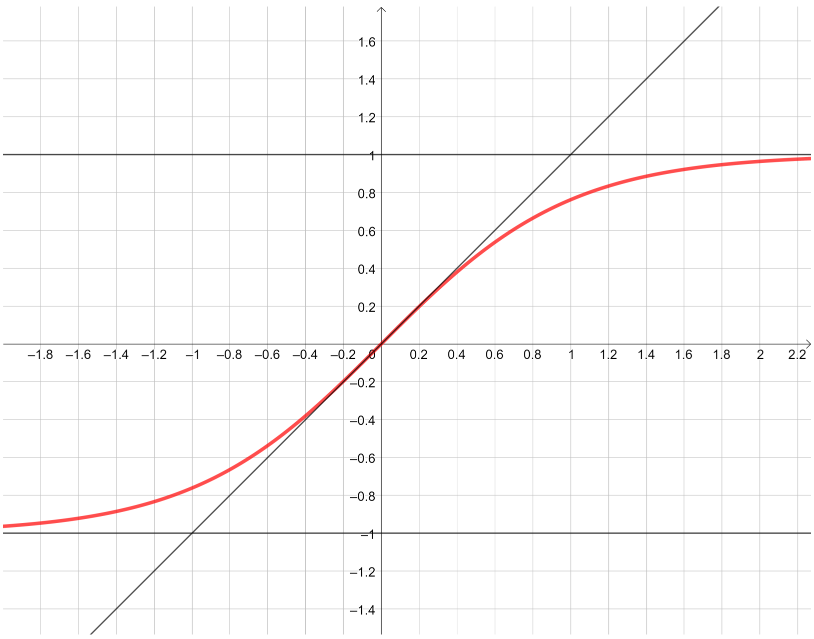
Ceci implique que $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{th}(x) = 1$. Par imparité, on en déduit que $\lim_{x \to -\infty} \mathrm{th}(x) = -1$. Le théorème de la bijection permet de conclure.

Propriété 29 *Pour tous réels* a *et* b*,*

$$\mathrm{th}(a+b) = \frac{\mathrm{th}(a) + \mathrm{th}(b)}{1 + \mathrm{th}(a)\mathrm{th}(b)}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathrm{th}(a+b) &= \frac{\mathrm{sh}(a+b)}{\mathrm{ch}(a+b)} \\
&= \frac{\mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b)}{\mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)} \\
&= \frac{\mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b)}{\mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b)} \frac{\frac{\mathrm{sh}(a)}{\mathrm{ch}(a)} + \frac{\mathrm{sh}(b)}{\mathrm{ch}(b)}}{1 + \frac{\mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)}{\mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b)}} \\
&= \frac{\mathrm{th}(a) + \mathrm{th}(b)}{1 + \mathrm{th}(a)\mathrm{th}(b)}
\end{aligned}$$



5 Fonctions circulaires réciproques

5.1 Arcsinus

Proposition - définition 1 *Le sinus induit une bijection de* $[-\pi/2, \pi/2]$ *dans* $[-1, 1]$*. Sa réciproque est appelée arcsinus, notée* arcsin*. C'est une application de* $[-1, 1]$ *dans* $[-\pi/2, \pi/2]$*.*

⚠ **Attention**
Il faut mémoriser le choix de l'ensemble d'arrivée de l'arcsinus.

Propriété 30

$$\arcsin(-1) = -\pi/2, \quad \arcsin(0) = 0, \quad \arcsin(1) = \pi/2$$

L'application arcsin *est impaire et strictement croissante. Elle est dérivable sur* $]-1, 1[$*, non dérivable en* -1 *et* 1*. Pour tout réel* $x \in]-1, 1[$*,*

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

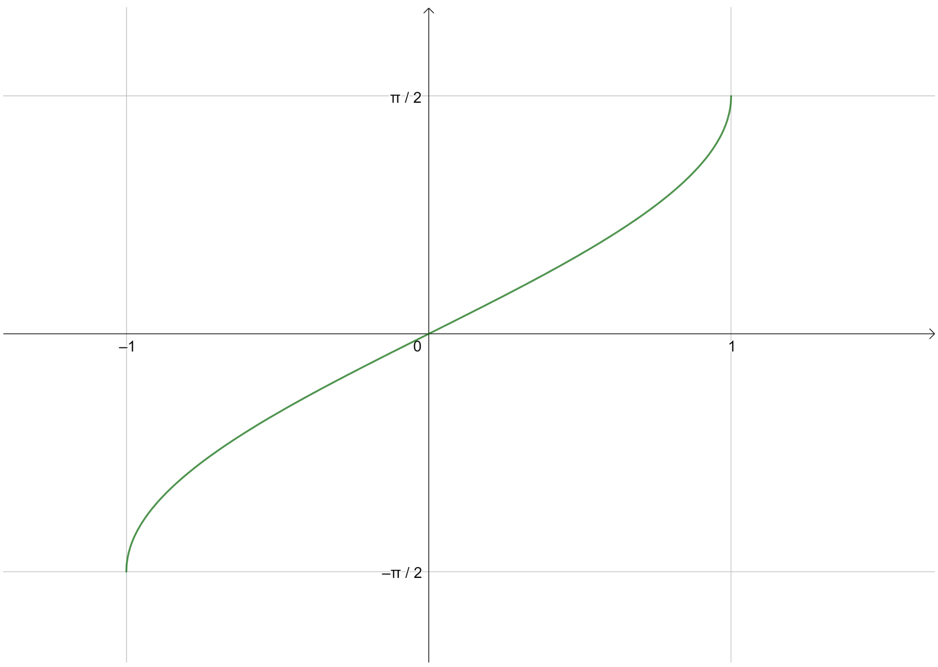
Démonstration. Les premiers résultats découlent des valeurs remarquables du sinus. Sa stricte croissance résulte de celle du sinus sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Elle est impaire puisque le sinus est impair sur $[-\pi/2, \pi/2]$. D'autre part, pour tout réel $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\sin'(y) = \cos(y)$ n'est nul que pour $y = \pm\pi/2$, *i.e* $\sin(y) = \pm 1$. Par conséquent, l'arcsinus est dérivable sur $]-1, 1[$, et pour tout réel $x \in]-1, 1[$,

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

On remarque alors que $\cos(\arcsin(x)) > 0$, puisque $\arcsin(x) \in]-\pi/2, \pi/2[$. Par conséquent, $\cos^2(\arcsin(x)) + \sin^2(\arcsin(x)) = 1$ implique $\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$, donc par positivité, $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$. Ainsi,

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Représentation graphique



5.2 Arccosinus

Proposition - définition 2 *Le cosinus induit une bijection de* $[0, \pi]$ *dans* $[-1, 1]$. *Sa réciproque est appelée arccosinus, notée* arccos. *Il s'agit d'une application de* $[-1, 1]$ *dans* $[0, \pi]$.

⚠ **Attention**
Il faut mémoriser l'ensemble d'arrivée de l'arccosinus.

Propriété 31

$$\arccos(-1) = \pi, \quad \arccos(0) = \pi/2, \quad \arccos(1) = 0$$

L'arccosinus est strictement décroissant, dérivable sur $]-1, 1[$, *non dérivable en* -1 *et* 1. *De plus, pour tout réel* $x \in]-1, 1[$,

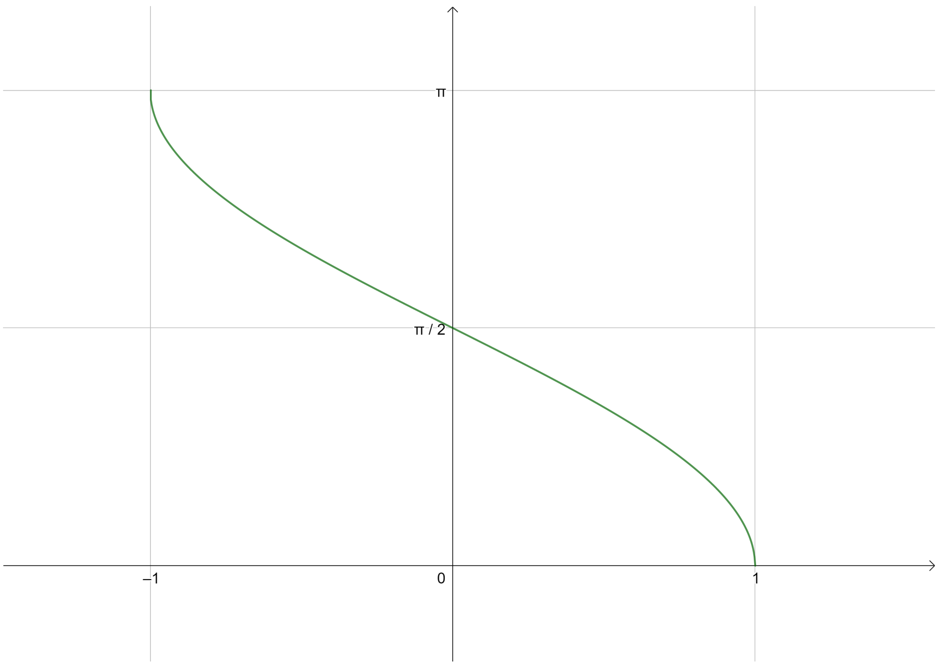
$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Démonstration. Les valeurs remarquables du cosinus donnent les premières égalités. La réciproque est de même monotonie que $\cos_{|[0,\pi]}$, donc strictement décroissant. De plus, $\cos' = -\sin$ ne s'annule qu'en 0 et π sur cet intervalle. Par conséquent, pour tout réel x différent de -1 et 1,

$$\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))}$$

Mais alors, comme le sinus est positif sur $[0, \pi]$ et $\sin^2(\arccos(x)) = 1 - \cos^2(\arccos(x)) = 1 - x^2$, $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$. On en déduit

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



5.3 Arctangente

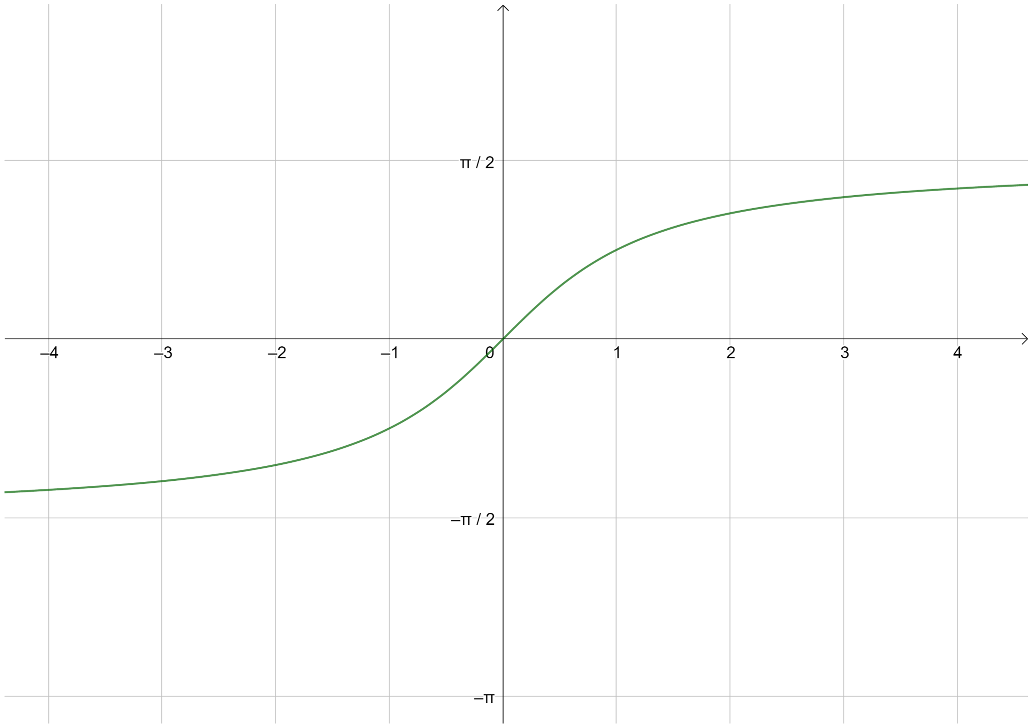
Proposition - définition 3 *La tangente induit une biejction de* $]-\pi/2, \pi/2[$ *dans* $\mathbb{R}$. *Sa réciproque est appelée arctangente, notée* arctan. *Il s'agit d'une application de* $\mathbb{R}$ *dans* $]\pi/2, \pi/2[$.

Propriété 32 *L'arctangente est impaire, strictement croissante, dérivable et*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Démonstration. Comme la tangente restreinte à $]-\pi/2, \pi/2[$ est impaire et strictement croissante, c'est également le cas pour sa réciproque. D'autre part, pour tout réel $y \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\tan'(y) = 1 + \tan^2(y) \geq 1 > 0$. Par conséquent, l'arctangente est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$



6 Dérivation de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

Définition 23 *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur un intervalle réel. On appelle partie réelle de f l'application $\mathfrak{Re}(f) : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathfrak{Re}(f(x))$ et partie imaginaire de f l'application $\mathfrak{Im}(f), \mathrm{I} \to \mathbb{C}, x \mapsto \mathfrak{Im}(f(x))$*

Définition 24 *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur un intervalle réel et a un élément de I. On dit que f est dérivable en a lorsque $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont dérivables en a. On définit alors la dérivée de f en a via*

$$f'(a) = \mathfrak{Re}(f)'(a) + i\mathfrak{Im}(f)'(a)$$

Propriété 33 *Extension des opération sur la dérivation : Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ et $g : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $\lambda f + g$ est dérivable de dérivée $\lambda f' + g'$ et fg est dérivable de dérivée $f'g + fg'$.*

Démonstration. Posons $a = \mathfrak{Re}(\lambda)$ et $b = \mathfrak{Im}(\lambda)$. Alors

$$\lambda f + g = (a+ib)(\mathfrak{Re}(f) + i\mathfrak{Im}(f)) + \mathfrak{Re}(g) + i\mathfrak{Im}(g) = a\mathfrak{Re}(f) - b\mathfrak{Im}(f) + \mathfrak{Re}(g) + i(a\mathfrak{Im}(f) + b\mathfrak{Re}(f))$$

Comme on a bien mis en évidence des fonctions à valeurs réelles, le tout est dérivable et les propriétés des fonctions dérivables à valeurs réelles entraînent

$$(\lambda f + g)' = a\mathfrak{Re}(f)' - b\mathfrak{Im}(f)' + \mathfrak{Re}(g)' + i\left(a\mathfrak{Im}(f)' + b\mathfrak{Re}(f)'\right) = \lambda f' + g'$$

D'autre part,

$$\mathfrak{Re}(fg) = \mathfrak{Re}(f)\mathfrak{Re}(g) - \mathfrak{Im}(f)\mathfrak{Im}(g) \quad \text{et} \quad \mathfrak{Im}(fg) = \mathfrak{Re}(f)\mathfrak{Im}(g) + \mathfrak{Im}(f)\mathfrak{Re}(g)$$

Toutes les fonctions apparaissant à droite sont des sommes et produits de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ dérivables, donc dérivables. Donc $\mathfrak{Re}(fg)$ et $\mathfrak{Im}(fg)$ sont dérivables, donc fg est dérivable. De plus,

$$\mathfrak{Re}(fg) = \mathfrak{Re}(f)'\mathfrak{Re}(g) + \mathfrak{Re}(f)\mathfrak{Re}(g)' - \mathfrak{Im}(f)'\mathfrak{Im}(g) - \mathfrak{Im}(f)\mathfrak{Im}(g)' \quad \text{et} \quad \mathfrak{Im}(fg) = \mathfrak{Re}(f)'\mathfrak{Im}(g) + \mathfrak{Re}(f)\mathfrak{Im}(g') + \mathfrak{Im}(f)'\mathfrak{Re}(g) + \mathfrak{Im}(f)\mathfrak{Re}(g)'$$

Enfin,

$$\begin{aligned}(fg)' &= \mathfrak{Re}(f)'\mathfrak{Re}(g) + \mathfrak{Re}(f)\mathfrak{Re}(g)' - \mathfrak{Im}(f)'\mathfrak{Im}(g) - \mathfrak{Im}(f)\mathfrak{Im}(g)' + i\left(\mathfrak{Re}(f)'\mathfrak{Im}(g) + \mathfrak{Re}(f)\mathfrak{Im}(g') + \mathfrak{Im}(f)'\mathfrak{Re}(g) + \mathfrak{Im}(f)\mathfrak{Re}(g)'\right)\\ &= \mathfrak{Re}(f)'g + i\mathfrak{Im}(f)'g + f\mathfrak{Re}(g)' + if\mathfrak{Im}(g)'\\ &= f'g + fg'\end{aligned}$$

Propriété 34 *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur* I*. Alors l'application* $\exp(f)$ *est dérivable et*

$$\forall x \in \mathrm{I}, \exp(f)'(x) = f'(x)\exp(f(x))$$

Démonstration. On a le produit

$$\exp(f) = \exp(\mathfrak{Re}(f))\exp(i\mathfrak{Im}(f)) = \exp(\mathfrak{Re}(f))(\cos(\mathfrak{Im}(f)) + i\sin(\mathfrak{Im}(f)))$$

Comme $\mathfrak{Re}(f)$, $\mathfrak{Im}(f)$, cos et sin sont dérivables (par définition de la dérivabilité d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$), on peut exploiter une dérivation de produit et de composées, ce qui donne

$$\exp(f)' = \exp(\mathfrak{Re}(f))'\exp(i\mathfrak{Im}(f)) + \exp(\mathfrak{Re}(f))\left(-\mathfrak{Im}(f)'\sin(\mathfrak{Im}(f)) + \mathfrak{Im}(f)'\cos(\mathfrak{Im}(f))\right) = \mathfrak{Re}(f)'\exp(f) + i\mathfrak{Im}(f)'\exp(f) = f'\exp(f)$$

Définition 25 *Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. On note $x^\alpha = \exp(\alpha\ln(x))$. La fonction $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}, x \mapsto x^\alpha$ est appelée fonction puissance de degré α.*

Propriété 35 *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}, x \mapsto x^\alpha$ est dérivable et*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

Démonstration. Le logarithme est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $\alpha\ln$ l'est également. D'après la propriété précédente, $\exp(\alpha\ln)$ l'est également et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exp(\alpha\ln)'(x) = \alpha\ln'(x)\exp(\alpha\ln(x)) = \frac{\alpha}{x}\exp(\alpha\ln(x)) = \alpha\exp(-\ln(x))\exp(\alpha\ln(x)) = \alpha\exp((\alpha-1)\ln(x)) = \alpha x^{\alpha-1}$$