Exercices - Fonctions usuelles

Cornou Jean Louis

16 juillet 2025

1 Études de fonctions

1.1 Domaines de définition

Déterminer l'ensemble de défintion des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - x + 3}$.
2. $x \mapsto \ln(x^2)$.
3. $x \mapsto 2\ln(x)$.
4. $x \mapsto \exp(\ln(\tan(x)))$.
5. $x \mapsto \sqrt{\sin(\ln(x))}$.
6. $x \mapsto \dfrac{1}{1 + \frac{1}{\ln(x)}}$.
7. $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x) + \sin(x)}$.

1.2 Images

Déterminer les ensembles suivants :

1. $\exp(]0,1[)$.
2. $(x \mapsto x^2 + x + 1)([0,1])$.
3. $(x \mapsto \dfrac{x+1}{x-2})^{-1}(\{2\})$.
4. $\cos^{-1}\left(\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\right)$.
5. $(\exp \circ \cos)\Big((\exp \circ \cos)^{-1}([1, e])\Big)$.

1.3 Arithmétique par une fonction réelle

1. Étudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ et tracer son graphe.
2. Déterminer tous les entiers naturels non nuls a, b distincts tels que $a^b = b^a$.

1.4

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $a \leq b$. Étudier la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1 + ax)}{\ln(1 + bx)}$ et en déduire que

$$\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right)\ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leq (\ln(2))^2$$

1.5

Étudier et tracer le graphe des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$.
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{sh}(x)}$.
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{th}(x)}$.
4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{2x\sqrt{1 - x^4}}{1 + x^4}$.
5. $f_5 : x \mapsto x\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1.6 Optimisation

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^{1/x}$ admet un maximum. Le déterminer ainsi que les réels en lequel il est atteint.
2. En déduire que $\{n^{1/n} | n \in \mathbb{N}^*\}$ admet un maximum. Le déterminer.

1.7

On considère la fonction $u : x \mapsto \dfrac{x\ln(x)-x}{x+1}$.

1. Déterminer le domaine de définition D_u de u et le domaine de dérivabilité de u.
2. Montrer qu'il existe un unique réel, noté α tel que u est décroissante sur $]-\infty,\alpha]\cap D_u$ et croissante sur $[\alpha,+\infty[\cap D_u$.
3. Montrer que $u(\alpha)=-\alpha$. En déduire que u admet un minimum m et que celui-ci appartient à l'intervalle $[-1,-1/2[$.
4. Déterminer les limites u aux extrémités de son domaine de définition.

On prolonge u en 0 en posant $u(0)=0$. La fonction obtenue est encore notée u.

5. Déterminer $u^{-1}(\{0\})$.
6. Montrer que $\frac{u(x)}{x}$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.
7. Étudier les limites de $u'(x)$ et $u(x)/x$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Les comparer.
8. Tracer l'allure du graphe de u.

1.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction n-fois dérivable. Sa dérivée n-ième est notée $f^{(n)}$.

1. On suppose que f est impaire. Que dire de $f^{(n)}$?
2. On suppose que f est paire. Que dire de $f^{(n)}$?
3. On suppose que f est périodique. Que dire de $f^{(n)}$?

1.9

On pose

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(1+x)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. Montrer que $f'(1)=0$ sans calculer explicitement la dérivée de f.
3. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{x^2+x}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \ln(1+x)\right]$$
4. Montrer que $\forall y \geq 0, \ln(1+y) \leq y$ et en déduire que la fonction dérivable $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \ln(1+x)$ vérifie $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) \leq \frac{1-x}{x(1+x)}$.
5. En déduire les variations de f. On précisera en particulier si elle admet un maximum et la valeur de ce maximum le cas échéant.
6. Déterminer la limite de f en 0. En déduire sa limite en $+\infty$.

1.10

On pose $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$, $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $h : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$. Étudier et tracer le graphe ces trois fonctions. Rechercher des inégalités entre ces trois fonctions sur des domaines convenables.

1.11 Découper le travail

Tracer le graphe de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0)=1$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

1.12

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{x^2} - 1$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! u_n \in \mathbb{R}, f(u_n) = 1/n$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie admet une limite finie. La déterminer.

1.13

Montrer que

$$\forall x > 0, \quad \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

1.14

Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ quand n tend vers $+\infty$.

1.15

Déterminer la valeur des réels suivants

1. $\arccos(\cos(\pi/6))$.
2. $\arccos(\cos(-\pi/6))$.
3. $\arcsin(\sin(12\pi))$.
4. $\arctan(\tan(3\pi/4))$.

1.16

Étudier et simplifier les fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sin(\arccos(x))$.
2. $x \mapsto \tan(\arcsin(x))$.
3. $x \mapsto \cos(\arctan(x))$.
4. $x \mapsto \arccos(x) + \arcsin(x)$.
5. $x \mapsto \arcsin(x) + \arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right)$.
6. $x \mapsto \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.
7. $x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.
8. $x \mapsto \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.
9. $x \mapsto 2\arcsin(\sqrt{x}) - \arcsin(2x-1)$.

1.17 À propos de l'arctangente

1. Simplifier pour tout réel non nul x, $\arctan(x) + \arctan(1/x)$.
2. (a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $xy < 1$. Montrer que

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

   (b) Même question en supposant $xy > 1$.
3. (a) Montrer que $\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8) = 5\pi/4$.
   (b) Déterminer l'ensemble des réels x tels que

$$\arctan(x-3) + \arctan(x) + \arctan(x+3) = 5\pi/4$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$$

   (a) Simplifier pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right)$.
   (b) Montrer que la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

1.18

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$\mathrm{P}_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{x}{k}\right)$$

Étudier P_n.

1.19

1. Étudier la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}(x)$.
2. En déduire que $\forall x \in]0,1[, 1 + x \leq \exp(\mathrm{sh}(x)) \leq \dfrac{1}{1-x}$.
3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose pour tout entier $n \geq 2$,

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=n}^{np} \mathrm{sh}\left(\frac{1}{k}\right)$$

Déduire de ce qui précède que la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\geq 2}$ est convergente et déterminer sa limite.

1.20

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable. On pose $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que g est deux-fois dérivable.
2. Montrer que $f'' \geq 0 \iff g'' \geq 0$.

1.21

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = x^2 \tan\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(\frac{2}{x}\right)$$

Montrer que f est dérivable en 0.

1.22 Au secours ! ✠

Soit $x \in [0,1[$. On pose

$$f : [0, \pi/2[\to \mathbb{R}, t \mapsto \arcsin\left(\frac{(1+x)\sin(t)}{1 + x\sin^2(t)}\right)$$

Montrer que f est dérivable et calculer f'.