1 Généralités

1. Soit f une fonction constante de F. On note c un réel tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c$. Alors $|f(0+0) = f(0)f(0)|$, donc $c^2 = |c|$, donc $c = 0$ ou $c = 1$ ou $c = -1$. Réciproquement, soif f la fonction constante nulle. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $|f(x+y)| = |0| = 0$ et $|f(x)f(y)| = |0||0| = 0$. Donc la fonction constante nulle appartient à F. On vérifie de même que la fonction constante égale à 1 et la fonction constante égale à -1 sont bien dans F.
2. On considère la fonction f définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$
Montrons que $f \in F$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Comme $|-1| = |1| = 1$, on constate que $|f(x+y)| = 1$ et $|f(x)||f(y)| = 1$. Ainsi, $f \in F$. D'autre part, $f(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} -1 \neq f(0)$, donc f n'est pas continue en 0.
3. L'exponentielle vérifie
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$
A fortiori, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\exp(x+y)| = |\exp(x)||\exp(y)|$, donc $\exp \in F$. On sait que l'exponentielle est continue (car dérivable) et non constante puisque strictement croissante.
4. Soit $f \in F$. Avec les mêmes techniques qu'en première question, on obtient $f(0)^2 = |f(0)|$, donc $f(0) \in \{0, 1-1\}$. Réciproquement, on dispose de fonctions dans F (les fonctions constantes correspondantes) qui prennent les valeurs $0, 1, -1$ en 0. Conclusion, $\{f(0) | f \in F\} = \{0, 1, -1\}$.
5. Soit $f \in F$ telle que f s'annule. On dispose d'un réel x tel que $f(x) = 0$. Soit $y \in \mathbb{R}$. Alors
$$|f(y)| = |f(y-x+x)| = |f(y-x)||f(x)| = |f(y-x)| \cdot |0| = 0$$
Donc $f(y) = 0$. Ainsi, f est la fonction identiquement nulle.
6. Soit $f \in F$ impaire. Alors $f(0) = 0$. D'après la question précédente, f est la fonction constante nulle. Réciproquement, la fonction identiquement nulle est impaire et appartient à F.
7. Soit $f \in F$ paire. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors
$$|f(0)| = |f(x-x)| = |f(x)f(-x)| = |f(x)||f(x)| = f(x)^2$$
Ainsi, $f(x)^2 \in \{0, 1, -1\}$ d'après la question 4. Si $f(x) = 0$, alors f est la fonction identiquement nulle d'après la question 5. D'autre part, $-1 < 0$. Il ne reste que le cas $f(x)^2 = 1$, i.e $f(x) = 1$ ou $f(x) = -1$. Attention, le signe de $f(x)$ dépend de x.

   Réciproquement, la fonction identiquement nulle est paire et appartient à F. D'autre part, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \pm 1$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$. Alors $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x+y)| = |\pm 1| = 1$ et $|f(x)f(y)| = 1$.

   Conclusion, l'ensemble des fonctions paires de F vaut
$$\{x \mapsto 0\} \cup \{x \mapsto \pm 1\} \cap P$$
où P désigne l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
8. Soit $f \in F^+$. Alors $f \in F$. Si f s'annule, alors f est la fonction constante égale à 0 d'après la question 5. Supposons que f ne s'annule jamais. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $f(x) = f(x/2 + x/2) = f(x/2)^2 \geq 0$. Or f ne s'annule jamais, donc $f(x) > 0$. Ainsi, f est strictement positive.
9. Soit $f \in F^+$. Alors $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 |f(x+y)| = |f(x)f(y)|$, donc $f \in F$. Ainsi, $F^+ \subset F$. De même, comme $|-1| = 1$, $F^- \subset F$. On en déduit que $F^+ \cup F^- \subset F$. Montrons que l'inclusion $F \subset F^+ \cup F^-$ est fausse. Considérons la fonctions f construite en question 2 qui appartient à F. Elle ne s'annule pas et change de signe, donc ne peut appartenir à F^+ d'après la question 8. En reprenant le même argument que précédemment, les fonctions de F^- sont soit identiquement nulles, soit strictement négatives. Ainsi, f n'appartient pas non plus à F^-. Ainsi, $f \in F$ mais $f \notin F^+ \cup F^-$. Comme cette inclusion est fausse, l'égalité $F = F^+ \cup F^-$ est fausse.
10. On considère l'application $\Psi : F^+ \to F^-, f \mapsto -f$. Commençons par montrer qu'elle est bien définie. Soit $f \in F^+$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $(-f)(x+y) = -f(x+y) = -f(x)f(y) = -(-f)(x)(-f)(y)$. Donc $-f \in F^-$. Ainsi, Φ est bien à valeurs dans F^-. De même, on démontre que $\Phi : F^- \to F^+, f \mapsto -f$ est bien définie. Il vient alors $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{F^+}$ et $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{F^-}$, ce qui entraîne la bijectivité de Ψ.

2 Fonctions continues de F

1. Si f s'annule, c'est la fonction identiquement nulle d'après la question 1.5. Supposons que f ne s'annule jamais. On souhaite démontrer que f est de signe constant. Supposons que f change de signe. Il existe deux réels distincts a et b tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Mais alors f est continue sur le segment d'extrémités a, b ($[a, b]$ ou $[b, a]$ selon l'ordre) et 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule entre a et b ce qui est contraire aux hypothèses. En conséquence, f est de signe constant, strictement positive ou strictement négative.
2. Soit $f \in F_c$ telle que $f > 0$.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après 1.4, $f(0) = 1$, donc $f(0x) = 1 = f(x)^0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(nx) = f(x)^n$. Alors
   $$|f(nx+x)| = |f(nx)||f(x)| = f(x)^n|f(x)|$$
   Or $f > 0$, donc $f((n+1)x = f(x)^n f(x) = f(x)^{n+1}$. Le principe de récurrence donne alors $\forall n \in \mathbb{N}, f(nx) = f(x)^n$. Soit $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$. Alors
   $$|f(nx-nx)| = |f(nx)||f(-nx)|$$
   Toujours comme $f > 0$, on obtient $1 = f(nx)f(-nx)$. Or $-n \in \mathbb{N}$, donc $1 = f(nx)f(x)^{-n}$. Comme $f(x) \neq 0$, on obtient $f(nx) = 1/(f(x)^{-n}) = f(x)^n$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{Z}^*$. On exploite ce qui précède avec le réel $x = 1/n$, ce qui donne $f(1) = f(1/n)^n$. Ainsi, $f(1/n) = f(1)^{1/n}$.

   (c) Soit $r \in \mathbb{Q}$. On dispose d'un entier relatif p et d'un entier naturel non nul q tels que $r = p/q$. D'après les résultats précédents, on obtient
   $$f(r) = f(\frac{p}{q}) = f(p \times \frac{1}{q}) = f(\frac{1}{q})^p = \left(f(1)^{1/q}\right)^p = f(1)^{p/q} = f(1)^r$$
   (d) Soit $x \in \mathbb{R}$. On dispose d'une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels tels que $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. Par continuité de f en x, $f(r_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(r_n) = f(1)^{r_n}$ et $y \mapsto f(1)^y$ est continue, donc $f(1)^{r_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)^x$. D'après l'unicité de la limite, $f(x) = f(1)^x$.
3. Soit $f \in F_c$. Premier cas : $f = 0$. Rien à dire. Deuxième cas : $f > 0$. D'après ce qui précède, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(1)^x$. Troisième cas : $f < 0$. Alors $-f > 0$ et $f \in F_+$, donc $-f \in F^- \subset F$. Comme $-f$ est continue, ce qui précède appliqué à $-f$ donne $\forall x \in \mathbb{R}, -f(x) = (-f(1))^x$ ou encore $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -(-f(1))^x$.

   Réciproquement, la fonction nulle est continue et appartient à F, donc à F_c. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : x \mapsto a^x$. Alors f est continue. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors
   $$|f(x+y)| = |a^{x+y}| = |a^x a^y| = |a^x||a^y| = |f(x)||f(y)|$$
   Ainsi, $f \in F_c$. Enfin, soit $b \in \mathbb{R}_-^*$ et $f : x \mapsto -(-b)^x$. Alors f est continue et
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |f(x+y)| = |-(-b)^{x+y}| = |(-b)^x(-b)^y| = |-(-b)^x||-(-b)^y| = |f(x)||f(y)|$$
   En conclusion,
   $$F_c = \{x \mapsto 0\} \cup \{x \mapsto a^x | a \in \mathbb{R}_+^*\} \cup \{x \mapsto -(-b)^x | b \in \mathbb{R}_-^*\}$$

3 Fonctions dérvivables de F

1. Soit $f \in F_d$. Alors f est continue car dérivable, donc $f \in F_c$. Ainsi, f est de l'un des trois formes précédentes. Réciproquement, ces trois formes sont dérivables. En conclusion,
   $$F_d = \{x \mapsto 0\} \cup \{x \mapsto a^x | a \in \mathbb{R}_+^*\} \cup \{x \mapsto -(-b)^x | b \in \mathbb{R}_-^*\}$$
2. Soit $f \in F_d$. Si f s'annule, f est identiquement nulle. Comme f est continue, f est de signe constant. Dans le cas $f > 0$, alors $f \in F^+$, i.e $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)f(y)$ et $f(0) = 1$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $y \mapsto f(x+y)$ est dérivable car f et $y \mapsto x+y$ est dérivable. Ainsi,
   $$\forall y \in \mathbb{R}, f'(x+y) = f(x)f'(y)$$

En particulier, $f'(x+0) = f'(x) = f(x)f'(0)$. En posant $a = f'(0)$, on obtient $f' = af$. Donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ce^{ax}$. Or $f(0) = 1$, donc $c = 1$. Réciproquement la fonction $x \mapsto e^{ax}$ est dérivable et dans F.

Il reste le cas $f < 0$. Mais alors $f \in F^-$ et $-f \in F^+$. Comme $-f$ est dérivable, ce qui précède entraîne qu'il existe un réel a tel que $\forall x \in \mathbb{R}, -f(x) = e^{ax}$, i.e $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -e^{ax}$. Réciproquement, ces fonctions sont dérivables et dans F.

Conclusion,

$$F_d = \{x \mapsto 0\} \cup \{x \mapsto e^{ax} | a \in \mathbb{R}\} \cup \{x \mapsto -e^{ax} | a \in \mathbb{R}\}$$