Rudiments de logique et de théorie des ensembles

Cornou Jean Louis

15 juillet 2025

1 Logique

On peut écrire les mathématiques uniquement à l'aide d'un petit nombre de signes fondamentaux : ceux désignant les opérations logiques élémentaires (conjonction, négation, existence), trois symboles mathématiques (égalité, appartenance, couple) et des lettres (ou symboles) en quantité non limitée. On formule alors des critères de formation des objets mathématiques et de leurs relations et on liste les axiomes de la théorie. Cela formalise entièrement la mathématique mais dépasse largement le but de cet enseignement. L'entier naturel 1 nécessite plusieurs dizaines de milliers de signes fondamentaux pour être correctement défini. Nous utiliserons des abréviations et quelques approximations pour rester intelligible.

1.1 Notions d'assertion, de prédicat

Définition 1 *On appelle **assertion** tout énoncé mathématique (un assemblage de symboles et de signes) pouvant être VRAI (V) ou FAUX (F).*

Exemple 1 *L'assertion « Tout nombre réel est positif ou négatif » est vraie. L'assertion « $\sqrt{2}$ est rationnel » est fausse. L'énoncé « 2+3 » n'est pas une assertion. L'énoncé « $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ » désigne seulement une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et ne peut être qualifié de vrai ou faux, ce n'est pas une assertion.*

Notation
*Lorsqu'une assertion $\mathcal{P}$ dépend des valeurs prises par un objet x, on notifie cette dépendance en notant $\mathcal{P}(x)$, on parle également de **prédicat** dans ce cadre. On distingue peu ces notions en première année.*

Exemple 2 *Soit x un nombre réel. Le prédicat $\mathcal{P}(x)$: « $x^2 + 3x - 4 < 0$ » peut être vraie ou fausse selon les valeurs prises par le réel x. $\mathcal{P}(0)$ est VRAIE, tandis que $\mathcal{P}(1)$ est FAUSSE.*

Définition 2 *On dit que deux assertions sont équivalentes quand elles ont même valeur de vérité, i.e elles sont simultanément VRAIES ou simultanément FAUSSES.*

Notation
Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux assertions. On note $\mathcal{P} \sim \mathcal{Q}$ ou encore $\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$ le fait que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes.

Exemple 3 *Soit x un réel strictement positif. Les assertions « $\ln(x) \geq 1$ » et « $x \geq e$ » sont équivalentes.*

☞ **Remarque**
Nous verrons plus loin que la logique permet de définir des ensembles en compréhension, i.e l'ensemble des objets a tels qu'un assertion donnée $\mathcal{P}(a)$ est VRAIE.

Définition 3 *Soit $\mathcal{P}(x)$ un prédicat. On dit que c'est*

- *une tautologie si elle est tout le temps vraie.*
- *une antilogie si elle est tout le temps fausse.*

Exemple 4 *Soit x un réel. Le prédicat $\mathcal{P}(x) : x^2 + 1 \geq 1$ est tout le temps vrai.*
Soit n un entier naturel. Le prédicat $\mathcal{Q}(n) : n + 1 = 0$ est tout le temps faux.

1.2 Opération sur les prédicats

Définition 4 *Soit $\mathcal{P}$ une assertion. On appelle **négation** de $\mathcal{P}$ l'assertion ayant les valeurs de vérité opposées. On la note $\neg\mathcal{P}$ ou non($\mathcal{P}$). On la définit via la table de vérité*

$\mathcal{P}$	$\neg\mathcal{P}$
V	F
F	V

Exemple 5 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}$ l'assertion « La fonction f ne s'annule jamais ». La négation de $\mathcal{P}$ est l'assertion « Il existe un réel x tel que $f(x) = 0$ ». Soit n un entier naturel non nul, la négation de « n est un entier premier » est « Le nombre de diviseurs positifs de n est différent de 2 ».*

Propriété 1 *Soit $\mathcal{P}$ une assertion. Alors $\neg\neg\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}$.*

Démonstration. On dresse la table de vérité suivante :

$\mathcal{P}$	$\neg\mathcal{P}$	$\neg\neg\mathcal{P}$
V	F	V
F	V	F

Propriété 2 *Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux assertions équivalentes. Alors*

$$\neg\mathcal{P} \equiv \neg\mathcal{Q}$$

Démonstration. Il suffit de dresser les tables de vérité.

Définition 5 *Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux prédicats. On appelle **conjonction** de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, notée $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ou $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ l'assertion étant VRAIE si, et seulement si, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont toutes deux VRAIES. On dresse la table de vérité*

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple 6 *Soit x, y deux réels. On peut étudier le système linéaire*

$$\begin{cases} x + y & = 2 \\ x - 2y & = 1 \end{cases}$$

C'est en réalité la conjonction « $x + y = 2 \wedge x - 2y = 1$ ».

Définition 6 *Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux prédicats. On appelle **disjonction** de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, notée $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ ou $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ l'assertion étant VRAIE si, et seulement si, $\mathcal{P}$ est VRAIE ou $\mathcal{Q}$ est VRAIE. On dresse la table de vérité*

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

⚠ **Attention**
Le « ou » mathématique est inclusif au contraire de la langue française.

✎ **Méthode**
Pour démontrer qu'une disjonction d'assertions est vraie, il suffit de supposer que l'une des assertions est FAUSSE et démontrer que l'autre est VRAIE. En effet, si l'une des deux assertions est vraie, la disjoction est nécessairement vraie.

Exemple 7 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles géométrique de raison q convergente. L'assertion « q=1 ou $|q| < 1$ » est VRAIE.*
Soit x, y deux réels tels que $xy = 0$. Alors $x = 0 \vee y = 0$. Démontrons-le rapidement. Supposons que $x \neq 0$. Alors on peut manipuler le réel $1/x$. Mais alors $y = \frac{1}{x}xy = \frac{1}{x}0 = 0$.

Propriété 3 (Lois de De Morgan) *Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ des assertions. On a alors les équivalences d'assertions suivantes :*

- $\neg(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \equiv (\neg\mathcal{P}) \vee (\neg\mathcal{Q})$.
- $\neg(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \equiv (\neg\mathcal{P}) \wedge (\neg\mathcal{Q})$.

Démonstration. On dresse les tables de vérité suivantes

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$	$\neg(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\neg$P	$\neg\mathcal{Q}$	$(\neg\mathcal{P}) \vee (\neg\mathcal{Q})$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Ceci démontre le premier point. En l'appliquant aux assertions $\neg\mathcal{P}$ et $\neg\mathcal{Q}$, il vient

$$\neg(\neg\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q}) \equiv (\neg\neg\mathcal{P}) \vee (\neg\neg\mathcal{Q}) \equiv \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$$

La négation implique alors

$$\neg\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q} \equiv \neg(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}),$$

ce qui prouve le second point.

Exemple 8 *Soit x et y deux réels. La négation de « $x = 0$ ou $y = 0$ » est « $x \neq 0$ et $y \neq 0$ ».*
Soit a, b, c trois réels. L'encadrement $a \leq b \leq c$ est en réalité la conjonction « $a \leq b \wedge b \leq c$ ». Sa négation est « $a > b \vee b > c$ » et non pas « $a > b \wedge b > c$ ».
Soit deux droites du plan, l'assertion « Ces droites sont parallèles et sécantes » a pour négation « Elles ne sont pas parallèles ou elles sont d'intersection vide ».

Propriété 4 *Soit $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ trois assertions. On a les équivalences d'assertions suivantes :*

- $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} \equiv \mathcal{Q} \wedge \mathcal{P}$ *commutativité de la conjonction*
- $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \equiv \mathcal{Q} \vee \mathcal{P}$ *commutativité de la disjonction*
- $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R} \equiv \mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$ *associativité de la conjonction*
- $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \vee \mathcal{R} \equiv \mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$ *associativité de la conjonction*
- $\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) \equiv (\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee (\mathcal{P} \wedge \mathcal{R})$ *distributivité de la conjonction par rapport à la disjonction*
- $\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R}) \equiv (\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{P} \vee \mathcal{R})$ *distributivité de la disjonction par rapport à la conjonction*

Démonstration. Laissée à titre d'exercice, établissez soigneusement les tables de vérité correspondantes (8 cas possibles).

⚠ **Attention**
Prêtez attention au parenthésage. L'assertion $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} \vee \mathcal{R}$ n'a aucun sens.

1.3 Implications

Définition 7 *Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux assertions. On définit l'assertion « $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$ » par « $(\neg\mathcal{P})$ ou $\mathcal{Q}$ », i.e $\mathcal{Q}$ ne peut être fausse quand $\mathcal{P}$ est vraie. Elle est notée $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$. Cela correspond à la table de vérité suivante :*

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

En langue française, on dit « Si $\mathcal{P}$, alors $\mathcal{Q}$ ». Quand l'implication est vraie, l'assertion $\mathcal{Q}$ est une condition ***nécessaire*** *de $\mathcal{P}$: si $\mathcal{P}$ est vraie, nécessairement $\mathcal{Q}$ est vraie. En outre, l'assertion $\mathcal{P}$ est une condition* ***suffisante*** *de $\mathcal{Q}$: il suffit de démontrer que $\mathcal{P}$ est vraie pour démontrer que $\mathcal{Q}$ est vraie.*

⚠ **Attention**
L'étude de l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ ne préjuge pas de la valeur de vérité de $\mathcal{P}$. Soit x et y deux réels, la mutiplication par 0 assure que l'implication « $x = y \Rightarrow 0 = 0$ » est vraie. Toutefois, on peut tout à fait choisir des réels x et y distincts.

⚠ **Attention**
L'implication est différente du « donc » en langue française. En particulier, les enchaînements de calculs ne sont pas des implications. Le « $\mathcal{P}$ donc $\mathcal{Q}$ » donc est en réalité la conjonction $\mathcal{P} \wedge (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$.

✎ **Méthode**
Lorsqu'on souhaite démontrer l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, on commence par écrire « Supposons $\mathcal{P}$, montrons $\mathcal{Q}$ ».

Définition 8 *Soit $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ une implication. L'implication $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ est appelée implication* ***réciproque*** *de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.*

Exemple 9 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles. L'implication « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente $\Rightarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée » est vraie. Toutefois, son implication réciproque « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée $\Rightarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente » ne l'est pas toujours. Nous préciserons cela plus tard avec la quantification.*

Définition 9 *Soit $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ une implication. L'implication $\neg\mathcal{Q} \Rightarrow \neg\mathcal{P}$ est appelée* ***contraposée*** *de l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.*

Exemple 10 *Soit z un complexe non nul. La contraposée de $|z| = 1 \Rightarrow \overline{z} = 1/z$ est $\overline{z} \neq 1/z \Rightarrow |z| \neq 1$.*

Propriété 5

$$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q} \equiv \neg\mathcal{Q} \Rightarrow \neg\mathcal{P}$$

Démonstration.

$$\neg\mathcal{Q} \Rightarrow \neg\mathcal{P} \equiv \neg\neg\mathcal{Q} \vee \neg\mathcal{P} \equiv \neg\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \equiv \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$$

✎ **Méthode**
Pour démontrer une implication, il peut être plus facile de démontrer sa contraposée. Soit x un rationnel. Alors l'implication « y irrationnel $\Rightarrow x + y$ irrationnel » est vraie. En effet, si $x + y$ est rationnel, alors $y = (x + y) - x$ est différence de deux rationnels donc rationnel.

Propriété 6 *Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux assertions.*

$$\neg(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \equiv \mathcal{P} \wedge \neg(\mathcal{Q})$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \neg(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) &\equiv \neg(\neg\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \quad \text{définition de l'implication} \\ &\equiv \neg\neg\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q} \quad \text{lois de De Morgan} \\ &\equiv \mathcal{P} \wedge \neg(Q) \quad \text{double négation} \end{aligned}$$

✎ **Méthode**
Pour démontrer que $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est fausse, on démontrer que $\mathcal{P}$ est vraie et que $\mathcal{Q}$ est fausse. Il s'agit de la méthode du contre-exemple.

1.4 Équivalences

Définition 10 *Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux assertions. L'assertion $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P})$ est notée $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$. C'est l'**équivalence** entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$. La table de vérité correspondante est la suivante :*

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

En langue française, on dit « $\mathcal{P}$ si et seulement si (abrégé en ssi) $\mathcal{Q}$ », ou encore « il faut et il suffit que $\mathcal{P}$ soit vraie pour que $\mathcal{Q}$ soit vraie ».

Exemple 11 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante. L'équivalence « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente $\iff$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée » est vraie.*

Définition 11 *Lorsque l'équivalence $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ est vraie, on dit que $\mathcal{P}$ est une* ***condition nécessaire et suffisante*** *(CNS) pour $\mathcal{Q}$.*

Proposition 1

$$\mathcal{P} \iff \mathcal{Q} \equiv \neg\mathcal{P} \iff \neg\mathcal{Q}$$

Démonstration. Laissée à titre d'exercice.

⚠ **Attention**
Lors d'un enchaînement de calculs, il ne faut pas écrire de symboles d'équivalences abusifs. Soit x un réel, on a bien l'implication $x = 0$ ou $x = 2\pi \Rightarrow \cos(x) = 1$, mais pas l'équivalence $x = 0$ ou $x = 2\pi \iff \cos(x) = 1$.

Exemple 12 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x^3 - 3x$. Pour étudier les variations de cette fonction dérivable, on peut par exemple étudier le signe de sa dérivée $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 3x^2 - 3$. Une rédaction possible est la suivante : soit $x \in \mathbb{R}$.*

$$\begin{aligned}
f'(x) > 0 &\iff 3x^2 - 3 > 0\\
&\iff x^2 - 1 > 0\\
&\iff (x-1)(x+1) > 0\\
&\iff (x-1 > 0 \wedge x+1 > 0) \vee (x-1 < 0 \wedge x+1 < 0)\\
&\iff (x > 1 \wedge x > -1) \vee (x < 1 \wedge x < -1)\\
&\iff x > 1 \vee x < -1
\end{aligned}$$

On conclut en disant que f' est strictement positive sur les intervalles $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$ et strictement négative sur l'intervalle $]-1,1[$. Ainsi, f est strictement croissante sur $]-\infty,-1]$, strictement décroissante sur $[-1,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

✎ **Méthode**
La plupart du temps, pour démontrer une équivalence, on démontre séparement une implication, puis sa réciproque. La rédaction propre d'équivalences est délicate ! Je vous conseille de découper le travail pour améliorer votre maîtrise en début d'année.

1.5 Quantification

Ce qui précède nous a permis de construire des opérations sur des assertions, notamment la disjonction et la négation. Afin de manipuler les prédicats $\mathcal{P}(x)$, on introduit deux nouvelles opérations logiques, appellées quantifications.

Définition 12 *Soit $\mathcal{P}(x)$ un prédicat. L'assertion*

$$\exists x, \mathcal{P}(x)$$

se lit : « Il existe un objet x tel que l'assertion $\mathcal{P}(x)$ est vraie. » Le symbole $\exists$ est appelé quantificateur existentiel.

Exemple 13

- *On peut considérer le prédicat $\mathcal{P}(x)$: « $x \in \mathrm{R} \wedge x^4 + 1 = 0$ ». On peut former l'assertion*

  $$\exists x, \left[x \in \mathbb{R} \wedge x^4 + 1 = 0\right]$$

  qu'on peut lire : il existe un objet x tel que x est un nombre réel et $x^4 + 1 = 0$. Celle-ci est par ailleurs fausse.
- *Soit $\mathcal{Q}(u)$ le prédicat « $u \in \mathbb{Z} \wedge u^{20} = 3^{12}$ ». On peut former l'assertion*

  $$\exists u, \left[u \in \mathbb{Z} \wedge u^{20} = 3^{12}\right]$$

  qui se lit : il existe un objet u tel que u est un entier relatif et $u^{20} = 3^{12}$. Elle est également fausse.

Méthode
Pour démontrer que l'assertion $\exists x, \mathcal{P}(x)$ est vraie, on construit un objet mathématique x tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie. C'est en général difficile !

Exemple 14 *Pour démontrer que $\exists x, (x \in \mathbb{Z} \wedge x(x+1) = 132)$ est vraie, on écrit que 11 est un entier relatif et que $11 \times 12 = 132$. Remarquez qu'on peut également proposer le raisonnement suivant : -12 est également un entier relatif et que $(-12) \times (-11) = 132$.*

Définition 13 *Soit $\mathcal{P}(x)$ un prédicat. L'assertion*

$$\forall x, \mathcal{P}(x)$$

se lit : « pour tout objet x, l'assertion $\mathcal{P}(x)$ est vraie. » Le symbole $\forall$ est appelé quantificateur universel.

Méthode
Pour démontrer que l'assertion $\forall x, \mathcal{P}(x)$ est vraie, on commence par écrire. Soit x. Montrons que $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

Exemple 15 *On considère le prédicat $\mathcal{P}(x) : x = x$. L'assertion $\forall x, x = x$ est vraie.*

Propriété 7 (Négation d'assertions quantifiées) *Soit $\mathcal{P}(x)$ un prédicat.*

- $\neg(\exists x, \mathcal{P}(x)) \equiv \forall x, \neg\mathcal{P}(x)$
- $\neg(\forall x, \mathcal{P}(x)) \equiv \exists x, \neg\mathcal{P}(x)$

Remarque
Expliquons ces propriétés à défaut de les démontrer. La négation logique de la phrase « il existe un être humain immortel » est « Tous les êtres humains sont mortels ». La négation logique de la phrase « Toute personne vivante respire » est « il existe une personne vivante qui ne respire pas ».

Propriété 8 (Quantification, disjonction et conjonction) *Soit $\mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{Q}(x)$ deux prédicats.*

- $\forall x, (\mathcal{P}(x) \wedge \mathcal{Q}(x)) \equiv (\forall x, \mathcal{P}(x)) \wedge (\forall x, \mathcal{Q}(x))$
- *Les assertions $\forall x, (\mathcal{P}(x) \vee \mathcal{Q}(x))$ et $(\forall x, \mathcal{P}(x)) \vee (\forall x, \mathcal{Q}(x))$ ne sont pas toujours équivalentes.*
- $\exists x, (\mathcal{P}(x) \vee \mathcal{Q}(x)) \equiv (\exists x, \mathcal{P}(x)) \vee (\exists x, \mathcal{Q}(x))$
- $\exists x, (\mathcal{P}(x) \wedge \mathcal{Q}(x)) \Rightarrow (\exists x, \mathcal{P}(x)) \wedge (\exists x, \mathcal{Q}(x))$ *mais la réciproque est généralement fausse.*

Remarque
De même, expliquons ces propriétés.

- *Dire que « toute rivière possède une source et une embouchure » revient à dire que « toute rivière possède une source » et « toute rivière possède une embouchure ».*
- *Considérons l'assertion « toute personne est gentille ou méchante » et l'assertion « (toute personne est gentille) ou (toute personne est méchante) ». La deuxième assertion indique qu'il ne peut exister simultanément d'individus gentils et d'individus méchants, alors que la première assertion l'autorise parfaitement.*
- *Dire qu'il existe chat qui miaule ou dort, revient à dire qu'il existe un chat qui miaule ou qu'il existe un chat qui dort.*
- *Dire qu'il existe un professeur gentil et exigeant permet d'affirmer qu'il existe un professeur gentil et qu'il existe un professeur exigeant. En revanche, s'il existe un professeur gentil et s'il existe un professeur exigeant, rien ne garantit qu'il existe un professeur qui soit simultanément gentil et exigeant.*

Propriété 9 (Double quantification) *Soit $\mathcal{P}(x, y)$ un prédicat dépendant de deux objets. Alors*

- $\forall x, \forall y, \mathcal{P}(x, y) \equiv \forall y, \forall x, \mathcal{P}(x, y)$.
- $\exists x, \exists y, \mathcal{P}(x, y) \equiv \exists y, \exists x, \mathcal{P}(x, y)$.
- $\exists x, \forall y, \mathcal{P}(x, y) \Rightarrow \forall y, \exists x, \mathcal{P}(x, y)$. *La réciproque n'est pas vraie en toute généralité.*

Remarque
Prenons l'exemple de relations dans un groupe d'individus en considérant le prédicat $\mathcal{P}(x, y)$: « x a offert un cadeau à y ».

- $\forall x, \forall y, \mathcal{P}(x,y)$ *signifie que tout le monde a offert un cadeau à toute personne.* $\forall y, \forall x, \mathcal{P}(x,y)$ *signifie que toute personne a reçu un cadeau de la part de tout le monde. Ces deux situations sont les mêmes.*
- $\exists x, \exists y, \mathcal{P}(x,y)$ *signifie qu'au moins une personne a offert un cadeau à quelqu'un.* $\exists y, \exists x, \mathcal{P}(x,y)$ *signifie qu'au moins une personne a reçu un cadeau de la part de quelqu'un. Ces deux situations sont identiques.*
- $\exists x, \forall y, \mathcal{P}(x,y)$ *signifie qu'une personne a offert un cadeau à toutes les personnes présentes.* $\forall y, \exists x, \mathcal{P}(x,y)$ *signifie que toute personne a reçu au moins un cadeau de la part de quelqu'un. Effectivement, si la première situation est avérée, toute personne aura reçu un cadeau de la part du généreux donateur. En revanche, si tout le monde a reçu un cadeau, rien ne permet d'affimer que ces cadeaux proviennent de la même personne.*

Nous reviendrons sur ces différentes opérations de quantifications dans le cadre de la théorie des ensembles.

2 Théorie des ensembles, première approche

Les règles logiques précédemment établies ont été illustrées avec des notions mathématiques, mais n'ont aucun lien fondamental avec cette discipline. La théorie des ensembles, formalisée à la fin du 19ième siècle. fournit un cadre satisfaisant pour construire les mathématiques de première année. Nous nous contentons d'une présentation approchée pour ne pas détruire votre intuition. La théorie des ensembles se base sur trois symboles : l'égalité $=$, l'appartenance $\in$ et le couple $(\,,\,)$. Nous gardons une approche intuitive de ces opérations.

2.1 Objets, parties

Définition 14 *Un ensemble est une collection d'objets, les* ***éléments*** *de cet ensemble. Un élément x d'un ensemble E* ***appartient*** *à celui-ci, cette relation est notée $x \in E$.*

☞ **Remarque**
Cela ne définit rien, mais peu importe.

Notation
Lorsque la relation d'appartenance n'est pas satisfaite, on écrit $x \notin E$.

Exemple 16 *Les ensembles de nombres usuels : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. $2/7 \in \mathbb{Q}$, mais $2/7 \notin \mathbb{N}$.*

Définition 15 *L'ensemble ne contenant aucun élément est appelé* ***ensemble vide****. Il est noté $\emptyset$.*

Définition 16 *Soit E et F deux ensembles. On dit que E est* ***inclus*** *dans F lorsque tout élément de E appartient à F. On note $E \subset F$.*

✎ **Méthode**
La démonstration d'une inclusion $E \subset F$ commmence toujours de la même façon. « Soit $x \in E$. Montrons que $x \in F$. »

Exemple 17 *Soit a et b deux entiers naturels tels que a divise b. Alors l'ensemble des multiples de b est inclus dans l'ensemble des multiples de a.*

Définition 17 *Soit E et F deux ensembles. On dit que E et F sont égaux lorsque tout élément de E appartient à F et réciproquement. On le note $E = F$.*

Exemple 18 *Dans le plan réel muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le cercle de centre O et de rayon 1 est égal à l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$.*

✎ **Méthode**
Pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux, on pourra procéder en deux temps : montrer que E est inclus dans F, puis montrer que F est inclus dans E. On procède par « double inclusion ».

Définition 18 *Soit* E *un ensemble. On appelle* ***partie*** *de* E *tout ensemble inclus dans* E*. L'ensemble des parties de* E *est noté* $\mathcal{P}(\mathrm{E})$.

☞ **Remarque**
Cette définition cache un saut d'abstraction assez fort. Les objets de E*, des éléments de* E*, et les objets de* $\mathcal{P}(\mathrm{E})$*, des parties de* E*, sont de natures assez différentes d'un point de vue intuitif. Du point de vue ensembliste, on teste seulement la relation d'appartenance d'un objet à un ensemble.*

Exemple 19 *On considère l'ensemble* E *dont les élements sont les entiers* 1*,* 2 *et* 3*. On le note sous la forme* $\{1,2,3\}$*. Les éléments de* $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ *sont les parties de l'ensembles* $\{1,2,3\}$*. En gardant les notations sous formes de listes, il s'agit des parties*

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}.$$

On peut également noter $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ *à l'aide d'une liste entre crochets :*

$$\mathcal{P}(\mathrm{E}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

On constate par exemple que $1 \in \mathrm{E}$*, mais que* $\{1\} \notin \mathrm{E}$*. De manière similaire,* $\{1\} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$*, mais* $\{1\} \notin \mathrm{E}$*. Il faut bien distinguer l'objet* 1 *de l'ensemble ne contenant que* 1*, que l'on note* $\{1\}$*.*

Définition 19 *Soit* E *un ensemble et* F *une partie de* E*. On définit le* ***complémentaire*** *de* F *dans* E *comme l'ensemble des éléments de* E *n'appartenant pas à* F*. On le note*

$$\mathrm{C}_{\mathrm{E}}(\mathrm{F}) = \mathrm{E} \backslash \mathrm{F}$$

Notation
S'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble E*, on rencontre la notation* F^c *ou encore* $\overline{\mathrm{F}}$*. La notation* $\overline{\mathrm{F}}$ *est souvent utilisée en probabilités. Elle entre en conflit avec la notion d'adhérence en deuxième année.*

Propriété 10 *Soit* E *un ensemble et* F *une partie de* E*. Alors* $(\mathrm{F}^c)^c = \mathrm{F}$.

2.2 Extension, compréhension

Définition 20 *Définir un ensemble en* ***extension****, c'est donner la liste de ses éléments, que l'on met entre accolades.*

Exemple 20 $\{1,3,5,9\}$, $\{3k+1 | k \in \mathbb{Z}\}$, $\{\ln(1+e^x) | x \in \mathbb{R}\}$.

Définition 21 *Définir un ensemble en* ***compréhension****, c'est définir ses éléments selon un (ou plusieurs) critère(s). Soit* E *un ensemble, et* $\mathcal{P}(x)$ *une assertion dépendant d'un objet* x *de* E*. On note* $\{x \in \mathrm{E} | \mathcal{P}(x)\}$ *l'ensemble des éléments de* E *tels que l'assertion* $\mathcal{P}(x)$ *est vraie.*

Exemple 21
- $\{x \in \mathbb{R} | x + \sqrt{x^2+1} > 1\} =]0, +\infty[$.
- $\{(x,y,z) \in (\mathbb{N}^*)^3 | x^3 + y^3 = z^3\} = \emptyset$.
- $\{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\} = \{e^{it} | t \in \mathbb{R}\}$.

⚠ **Attention**
Soit x *un élément d'un ensemble* E*. L'ensemble constitué du seul élément* x *est noté* $\{x\}$ *(on l'a défini en extension). L'ensemble* $\{x\}$ *est une partie de* E*, ce qui se note* $\{x\} \subset \mathrm{E}$*, tandis que* x *est un élément de* E*, ce qui se note* $x \in \mathrm{E}$*.*

2.3 Quelques opérations sur les ensembles

Définition 22 *Soit* E *et* F *deux ensembles. L'ensemble des éléments appartenant à la fois à* E *et à* F *est appelé l'****intersection*** *de* E *et* F*. Il est noté* $\mathrm{E} \cap \mathrm{F}$*.*

Définition 23 *Soit* E *et* F *deux ensembles. L'ensemble des éléments appartenant à* E *ou à* F *est appelé l'****union*** *de* E *et* F*. Il est noté* $\mathrm{E} \cup \mathrm{F}$*.*

Propriété 11 *Soit* E *un ensemble,* A *et* B *deux parties de* E. *Alors*

- $E\backslash(A\cap B) = (E\backslash A)\cup(E\backslash B)$.
- $E\backslash(A\cup B) = (E\backslash A)\cap(E\backslash B)$.

Démonstration.
- Soit $x \in E$. D'après les lois de De Morgan,

$$\begin{aligned} x\in E\backslash(A\cap B) &\iff x\notin(A\cap B) \iff \neg(x\in A\cap B) \iff \neg(x\in A\wedge x\in B) \iff \neg(x\in A)\vee\neg(x\in B) \\ &\iff x\notin A\vee x\notin B \iff (x\in E\backslash A)\vee(x\in E\backslash B) \iff x\in(E\backslash A)\cup(E\backslash B) \end{aligned}$$

  Ainsi, les ensembles $E\backslash(A\cap B)$ et $(E\backslash A)\cup(E\backslash B)$ ont les mêmes éléments. Ils sont égaux.
- On applique ce qui précède à A^c et B^c, ce qui donne $(A^c\cap B^c)^c = (A^c)^c\cup(B^c)^c = A\cup B$. En prenant de nouveau le complémentaire, on obtient $A^c\cap B^c = (A\cup B)^c$, ce qui est le résultat attendu.

Définition 24 *Soit* E *un ensemble, puis* A *et* B *deux parties de* E. *La **différence** de* A *par* B *est l'ensemble des éléments de* A *n'appartenant pas à* B, *i.e* $\{x\in A | x\notin B\}$. *Il est noté* $A\backslash B$.

3 Quantification en pratique

Comme vu précédemment, les objets manipulés peuvent modifiés la valeur de vérité d'une assertion qui en dépend. On peut même utiliser ce fait pour définir des ensembles en compréhension. Dans toute la suite de cette partie, on se donne E un ensemble, et $\mathcal{P}(x)$ une assertion dont la valeur de vérité dépend d'un élément x de E.

Définition 25 *L'assertion*

$$\forall x\in E, \mathcal{P}(x)$$

est définie comme vraie lorsque $\mathcal{P}(x)$ *est vraie pour tout* x *dans* E. *Le symbole* $\forall$ *est appelé **quantificateur unversel**. En langue française, cela se lit, « pour tout élément* x *de* E*, on a* $\mathcal{P}(x)$ *».*

☞ Remarque

Le symbole x *utilisé dans l'écriture précédente est « muet ». Il peut être remplacé par n'importe quel autre symbole.*

Exemple 22 $[E\subset F] \iff [\forall y\in E, y\in F]$.

$[\forall x\in\mathbb{R}, x^2+x-1\geq 0]$ *est fausse.*

✎ Méthode

Pour démontrer proprement l'assertion « $\forall x\in E, \mathcal{P}(x)$ *», on commence la rédaction par : « Soit* $x\in E$*. Démontrons* $\mathcal{P}(x)$*. »*

Définition 26 *L'assertion*

$$\exists x\in E, \mathcal{P}(x)$$

est définie comme vraie lorsque $\mathcal{P}(x)$ *est vraie pour au moins un élément* x *de* E. *Le symbole* $\exists$ *est appelé **quantificateur existentiel**. En langue française, cela se lit, « il existe un élément* x *de* E *tel qu'on a* $\mathcal{P}(x)$ *».*

☞ Remarque

La lettre x *est encore muette ici. On peut la remplacer par tout autre symbole.*

Exemple 23 *L'assertion « Il existe une suite à valeurs réelle non majorée et qui ne tend pas vers* $+\infty$ *» est vraie.*

$[E\cap F\neq\emptyset] \iff [\exists x\in E, x\in F]$.

⚠ Attention

Les problèmes d'existence sont très difficiles en mathématiques, en général bien plus que les problèmes universels.

✎ Méthode

Pour démontrer l'assertion « $\exists x\in E, \mathcal{P}(x)$ *», il est judicieux de commencer par rédiger : « Construisons* $x\in E$ *tel que* $\mathcal{P}(x)$ *».*

Convention
L'assertion $\exists x \in \emptyset, \mathcal{P}(x)$ *est toujours fausse. L'assertion* $\forall x \in \emptyset, \mathcal{P}(x)$ *est toujours vraie.*

Exemple 24 *Prenons l'ensemble des entiers multiples de 3 : on pose* $E = \{3k | k \in \mathbb{Z}\}$*. On peut écrire la chose quantifiée suivante :*

$$\forall x \in E, \exists k \in \mathbb{Z}, x = 3k$$

Méthode
La quantification existentielle permet de manipuler proprement les ensembles définis en extension

Définition 27 *L'assertion*

$$\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$$

est définie comme vraie lorsque

— $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$ *est vraie, et*

— $\{x \in E | \mathcal{P}(x)\}$ *est réduit à un seul élément.*

On lit « Il existe un unique élément x *de* E *tel qu'on a* $\mathcal{P}(x)$ *».*

Exemple 25 *L'assertion* $\exists! x \in \mathbb{R}, x^2 = 2$ *est fausse. En effet, on connaît au moins deux tels réels* $\sqrt{2}$ *et* $-\sqrt{2}$ *qui ont le bon goût d'être distincts. Notez que l'assertion* $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2$ *est en revanche vraie.*
L'assertion $\exists! x \in \mathbb{R}, x^2 = -1$ *est fausse. Cette fois-ci, c'est l'existence qui fait défaut.* $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$*, donc* $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq -1$*.*

Propriété 12

$$\exists! x \in E, \mathcal{P}(x) \equiv [\exists x \in E, \mathcal{P}(x)] \wedge [\forall y \in E \forall z \in E, [\mathcal{P}(y) \wedge \mathcal{P}(z)] \Rightarrow y = z]$$

Méthode
Pour démontrer l'existence et l'unicité d'un objet dans un ensemble E *qui vérifie une propriété* $\mathcal{P}$*, on procède en général en deux temps. D'une part, on construit un exemple d'objet dans* E *qui vérifie* $\mathcal{P}$*. Dans un deuxième temps, on démontre l'unicité en rédigeant de la manière suivante :*
« Soit y *et* z *dans* E *qui vérifient* $\mathcal{P}$*. Montrons* $y = z$*. »*

Propriété 13

$$\neg(\forall x \in E, \mathcal{P}(x)) \equiv \exists x \in E, \neg\mathcal{P}(x)$$

$$\neg(\exists x \in E, \mathcal{P}(x)) \equiv \forall x \in E, \neg\mathcal{P}(x)$$

⚠ **Attention**
La négation ne change pas le symbole d'appartenance !

Exemple 26 *Soit* f *une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. On dit que* f *est continue lorsque*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

La négation de cette assertion est la suivante :

$$\exists x \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \delta \wedge |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Exemple 27 *Soit* f *une fonction réelle de la variable réelle.*

La fonction f *est constante :* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) = f(y) \iff \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in R, f(x) = C$*.*

La fonction f *est de signe constant :* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) \geq 0$*.*

La fonction f *n'est pas majorée :* $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \geq M$*.*

La fonction f *est la fonction nulle :* $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$*.*

La fonction f *s'annule :* $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$*.*

La fonction f *s'annule une seule fois :* $\exists! x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$*.*

La fonction f *s'annule sur* $\mathbb{R}^+$ *:* $\exists x \in \mathbb{R}^+, f(x) = 0$*.*

La fonction f *ne s'annule que sur* $\mathbb{R}^+$ *:* $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \Rightarrow x \geq 0$*.*

La fonction f ne prend que des valeurs positives : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.

La fonction f ne prend des valeurs positives que sur $\mathbb{R}^+$: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$.

La fonction f est croissante : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

Tout réel possède un antécédent par f : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y$.

La fonction f prend des valeurs deux à deux distinctes : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ *ou encore* $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

⚠ **Attention**
L'utilisation de symboles de quantification comme abréviations françaises est interdite dans les copies !

4 Modes de raisonnement

Outre les implications et leurs enchaînements déjà vus précédemment, on dispose d'autres méthodes pour démontrer la véracité d'énoncés mathématiques.

4.1 Disjonction de cas

Soit $\mathcal{P}(x)$ une assertion dépendant d'un objet x dans un ensemble E. Pour démontrer $\forall x \in \mathrm{E}, \mathcal{P}(x)$, on peut distinguer différentes possibilités pour les valeurs de x et démontrer que $\mathcal{P}(x)$ est vraie dans chaque cas.

Exemple 28 *Montrer que pour tout entier naturel n, 2 divise $n(n+1)$. Soit n est un entier naturel pair. Alors il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$. Mais alors, $n(n+1) = 2k(n+1)$ est divisible par 2. Soit n est un entier naturel impair, auquel cas il existe un entier naturel k' tel que $n = 2k'+1$. Alors, on a $n(n+1) = n(2k'+2) = 2n(k'+1)$ est divisible par 2.*

4.2 Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer une assertion, on peut supposer sa négation et chercher une absurdité.

Exemple 29 *Démontrons que* $\ln 3/\ln 2$ *est irrationnel par l'absurde. Supposons donc que* $\ln 3/\ln 2$ *est un rationnel. Alors il existe un entier relatif a et un entier naturel non nul b tels que* $\ln 3/\ln 2 = a/b$. *Or* $\ln 3/\ln 2$ *est positif puisque* $\ln 3 \geq \ln 1 = 0$ *et* $\ln 2 \geq \ln 1 = 0$ *par croissance du logarithme. Mais alors,* $\ln(3^b) = \ln(2^a)$ *et* $3^b = 2^a$. *On a alors l'égalité de l'entier impair 3^b avec l'entier 2^a. Si $a \neq 0$, alors 2^a est pair, ce qui donne une absurdité. Si $a = 0$, alors* $\ln 3 \ln 2 = 0$, *ce qui est également absurde. Ainsi* $\ln 3/\ln 2$ *est irrationnel.*

4.3 Analyse-synthèse

Pour répondre à un problème d'existence, ou déterminer les éléments d'un ensemble, il peut être adapté de procéder par analyse-synthèse. La phase d'analyse consiste à supposer l'existence d'un tel objet ou considérer un élément de cet ensemble, puis à en déterminer des propriétés. On parvient parfois (souvent) à démontrer qu'un tel objet est unique. La phase de synthèse consiste à démontrer que les candidats déterminés auparavant satisfont effectivement les critères attendus ou appartiennent effectivement à l'ensemble de départ.

Exemple 30 *Démontrer qu'il existe une unique fonction dérivable f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x)$$

Analyse : Soit f une telle fonction. Alors la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)\exp(-x)$ *est dérivable comme produit de fonctions dérivables et elle vérifie*

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = f'(x)\exp(-x) - f(x)\exp(x) = f(x)\exp(-x) + f(x)\exp(-x) = 0$$

Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, cela signifie que g est constante égale à $g(0) = f(0)\exp(-0) = 1$. On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \exp(x)$$

Cette phase d'analyse a démontré qu'il y a au plus une fonction satisfaisant les critères attendus. Synthèse : On pose $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x)$. Alors h est dérivable puisque l'exponentielle est dérivable et elle vérifie $h' = h$. De plus, $h(0) = \exp(0) = 1$. Ainsi, la fonction h convient, ce qui prouve l'existence et l'unicité de la fonction attendue.

4.4 Récurrences

Théorème 1 (admis) *Toute partie A non vide de $\mathbb{N}$ admet un unique minimum, i.e il existe un unique élément a de A tel que*

$$\forall x \in \mathrm{A}, a \leq x$$

Propriété 14 *Soit A une partie de $\mathbb{N}$. On suppose que A n'est pas vide et que*

$$\forall n \in \mathrm{A}, n+1 \in \mathrm{A}.$$

Alors, en notant a le minimum de A, $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{N} | a \leq x\}$.

Démonstration. Délicate et hors-programme. Elle est proposée à titre d'exercice dans le cas particulier $\min(\mathrm{A}) = 0$.

Méthode (Récurrence simple)
Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant d'un entier naturel n. On suppose que $\exists n_0, \mathcal{P}(n_0)$ est vraie, puis que $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Alors $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exemple 31 *Soit a un réel supérieur ou égal à -1. Démontrons par récurrence que pour tout entier n,*

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

Initialisation : $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \cdot a = 1$, donc $(1+a)^0 \geq 1 + 0 \cdot a$. Hérédité : Soit n un entier naturel tel que $(1+a)^n \geq 1 + na$. Alors, $(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a)$. Comme $(1+a) \geq 0$, on peut multiplier l'inégalité $(1+a)^n \geq 1 + na$ par $(1+a)$ sans changer le sens de l'inégalité, soit

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a$$

puisque na^2 est un réel positif. On a ainsi démontré l'hérédité.

Méthode (Récurrence double)
Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant d'un entier naturel n. On suppose que $\exists n_0, \mathcal{P}(n_0) \wedge \mathcal{P}(n_0+1)$ est vraie, puis que $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \wedge \mathcal{P}(n+1) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)$ est vraie. Alors $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exemple 32 *On se donne une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n$$

Démontrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (1-2n)(-1)^n$$

Initialisations :

$$(1 - 2 \times 0)(-1)^0 = 1 \times 1 = 1 = u_0$$
$$(1 - 2 \times 1)(-1)^1 = (-1) \times (-1) = 1 = u_1$$

Hérédité : soit n un entier tel que u_n et u_{n+1} vérifient l'égalité souhaitée. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= -2(1 - 2(n+1))(-1)^{n+1} - (1-2n)(-1)^n \\ &= (-1)^n [2(-1-2n) - 1 + 2n] \\ &= (-1)^n [-3 - 2n] \\ &= (-1)^{n+2} [1 - 2(n+2)] \end{aligned}$$

Exemple 33 *On se donne une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = 0$, $u_0 = 1$ et,*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Démontrons que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Initialisations :

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = \frac{1}{\sqrt{5}}1 - \frac{1}{\sqrt{5}}1 = 0 = u_0$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = u_1$$

Hérédité : Soit n un entier tel que u_n et u_{n+1} vérifient l'égalité souhaitée. Alors

$$u_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

On note alors $\Phi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. Ce réel vérifie

$$\Phi^2 = \frac{1}{4}(1+5+2\sqrt{5}) = 1 + \Phi$$

dont on déduit que

$$\Phi^n + \Phi^{n+1} = \Phi^n(1+\Phi) = \Phi^n\Phi^2 = \Phi^{n+2}$$

De même, le réel $\Psi = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ vérifie $\Psi^2 = 1+\Psi$ et $\Psi^n + \Psi^{n+1} = \Psi^{n+2}$. Ainsi,

$$u_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2},$$

ce qui démontre l'hérédité.

Méthode (Récurrence forte)
Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant d'un entier naturel n. On suppose que $\exists n_0, \mathcal{P}(n_0)$ est vraie, puis que

$$\forall n \geq n_0, \bigwedge_{k=n_0}^{n} \mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$$

est vraie. Alors $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exemple 34 *On se donne une suite réelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence via $b_0 = 1$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{(n-k+1)!}$$

Démontrons par récurrence forte que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |b_n| \leq 1$$

Initialisation : $|b_0| = 1 \leq 1$. Hérédité. Soit n un entier non nul tel que $\forall k \in [\![0, n-1]\!], |b_k| \leq 1$. Alors

$$|b_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|b_k|}{(n-k+1)!} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k-n+1)!} = \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j!} \leq e - 2 \leq 1$$

5 Théorie des ensembles, deuxième passage

5.1 Opérations sur une famille d'ensembles

Dans ce qui suit, on fixe une famille d'ensembles $(\mathrm{E}_i)_{i\in\mathrm{I}}$. I désigne l'ensemble des indices qui permettent d'étiqueter chacun de ces ensembles, il peut être fini, infini comme $\mathbb{N}$ ou beaucoup plus gros. En première approche, on peut prendre l'exemple $\mathrm{I} = \{1, 2, \dots, n\}$ des entiers compris entre 1 et n, où n désigne un entier naturel non nul. Un exemple plus abstrait mais fort utile est de considérer la famille des parties d'un ensemble E.

Définition 28 *L'union de la famille $(\mathrm{E}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est l'ensemble $\{x|\exists i \in \mathrm{I}, x \in \mathrm{E}_i\}$. Elle est notée $\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{E}_i$.*

Exemple 35 *Pour tout entier relatif n, on pose $\mathrm{E}_n = [n, n+1[= \{x \in \mathbb{R}|n \leq x < n+1\}$. Alors*

$$\bigcup_{n=-3}^{5} = [-3, 5[, \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}_n = [0, +\infty[, \quad \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{E}_n = \mathbb{R}$$

Définition 29 *L'intersection de la famille $(\mathrm{E}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est l'ensemble $\{x|\forall i \in \mathrm{I}, x \in \mathrm{E}_i\}$. Elle est notée $\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{E}_i$.*

Exemple 36 *Pour tout entier relatif n, on pose $\mathrm{F}_n = [-n-1, n+1[= \{x \in \mathbb{R}| -n \leq x < n+1\}$. Alors*

$$\bigcap_{n=-3}^{5} \mathrm{F}_n = \emptyset, \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{F}_n = [-1, 1[, \quad \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{F}_n = \emptyset$$

Propriété 15 *Soit E un ensemble et $(\mathrm{F}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de parties de E. Alors*

- $\overline{\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{F}_i} = \bigcap_{i\in\mathrm{I}} \overline{\mathrm{F}_i}$.
- $\overline{\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{F}_i} = \bigcup_{i\in\mathrm{I}} \overline{\mathrm{F}_i}$.

Définition 30 *Soit E_1 et E_2 deux ensembles. Soit $x_1 \in \mathrm{E}_1$ et $x_2 \in \mathrm{E}_2$. L'objet (x_1, x_2) est appelé couple de première composante x_1 et de deuxième composante x_2. L'ensemble*

$$\{(x_1, x_2)|x_1 \in \mathrm{E}_1, x_2 \in \mathrm{E}_2\}$$

est appelé produit cartésien de E_1 et E_2, noté $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \dots, \mathrm{E}_n$ une famille finie de n ensembles. Soit $x_1 \in \mathrm{E}_1, x_2 \in \mathrm{E}_2, \dots, x_n \in \mathrm{E}_n$. L'objet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est appelé n-uplet de composantes $x_1, \dots, x_n$. L'ensemble

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n)|x_1 \in \mathrm{E}_1, x_2 \in \mathrm{E}_2, \dots, x_n \in \mathrm{E}_n\}$$

est appelé produit cartésien de la famille $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n$. Il est noté $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times \cdots \times \mathrm{E}_n$ ou encore $\prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i$. Dans le cas où $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_2 = \cdots = \mathrm{E}_n$, on le note encore E^n.

Exemple 37 *Il est classique de décrire les points du plan par leurs coordonnées (x, y) dans un repère fixé à l'avance. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ permet de manipuler ces objets. Dans l'espace tridimensionnel, on recourt similairement à $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)|x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$. Dans ce cadre, deux points sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales.*

5.2 Parties et découpages

Il peut être pertinent dans un problème d'avoir une description plus précise d'un ensemble, notamment en le découpant en parties plus finement comprises. Toutefois, un tel découpage peut faire perdre de l'information s'il est inadapté.

Définition 31 *Soit E un ensemble et $(\mathrm{F}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de parties de E. On dit que cette famille est*

- *un recouvrement de E lorsque $\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{F}_i = \mathrm{E}$.*
- *disjointe de E lorsque $\forall (i, j) \in \mathrm{I}^2, i \neq j \Rightarrow \mathrm{F}_i \cap \mathrm{F}_j = \emptyset$.*
- *un recouvrement disjoint lorsque c'est un recouvrement et lorsqu'elle est disjointe.*

- *une partition de* E *lorsque c'est un recouvrement disjoint et* $\forall i \in \mathrm{I}, \mathrm{F}_i \neq \emptyset$.

Exemple 38 *Soit* $\mathrm{E} = \{1, 2, 3\}$. *On considère la famille de ses parties* $\mathcal{P}(\mathrm{E}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$. *C'est un recouvrement de* E, *mais il n'est pas disjoint puisque* $\{1\} \cap \{1, 2\} = \{2\} \neq \emptyset$.

Exemple 39 *On considère* $\mathbb{Z}$ *l'ensemble des entiers relatifs,* A *l'ensemble des entiers relatifs pairs et* B *l'ensemble des entiers relatifs impairs. Alors la famille* (A, B) *est une partition de* $\mathbb{Z}$. *En effet,*

- *Tout entier relatif est pair ou impair, donc appartient à* A *ou* B, *ce qui signifie* $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{E}$. *C'est un recouvrement.*
- *Aucun entier relatif ne peut être simultanément pair et impair.* $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$. *Cette famille est disjointe.*
- $0 \in \mathrm{A}$ *donc* $\mathrm{A} \neq \emptyset$, $1 \in \mathrm{B}$ *donc* $\mathrm{B} \neq \emptyset$.

Exemple 40 *On considère la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 1$. *Pour tout réel* a, *on pose* $\mathrm{F}_a = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = a\}$. *Montrons que la famille* $(\mathrm{F}_a)_{a \in \mathbb{R}}$ *est un recouvrement disjoint de* $\mathbb{R}$, *mais que ce n'est pas une partition de* $\mathbb{R}$.

— *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *On cherche à construire* $a \in \mathbb{R}$ *tel que* $x \in \mathrm{F}_a$, *autrement dit tel que* $f(x) = a$. *Il suffit alors de poser* $a = x^2 + 1$. *Résumons, on a démontré* $\forall x \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R}, x \in \mathrm{F}_a$, *soit encore* $\mathbb{R} \subset \bigcup_{a \in \mathbb{R}} \mathrm{F}_a$. *L'autre inclusion étant évidente, il y a égalité. La famille* $(\mathrm{F}_a)_{a \in \mathbb{R}}$ *est donc un recouvrement de* $\mathbb{R}$.

— *Montrons qu'elle est disjointe par contraposition. Soit* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $\mathrm{F}_a \cap \mathrm{F}_b \neq \emptyset$. *On dispose d'un réel* x *tel que* $x \in \mathrm{F}_a \cap \mathrm{F}_b$. *Cela signifie que* $f(x) = a$ *et* $f(x) = b$. *Mais alors* $a = b$. *Résumons, on a démontré* $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{F}_a \cap \mathrm{F}_b \neq \emptyset \Rightarrow a = b$, *ce qui équivaut à* $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a \neq b \Rightarrow \mathrm{F}_a \cap \mathrm{F}_b = \emptyset$.

— $\mathrm{F}_0 = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$ *puisque* $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq 1 > 0$. *Cette famille n'est pas une partition.*

En revanche, la famille $(\mathrm{F}_a)_{1 \leq a}$ *est bien une partition de* $\mathbb{R}$, *je vous laisse y réfléchir.*

Nous nous arrêtons ici sur ces notions de découpages. Elles seront utiles pour la manipulation de sommes et de produits finis afin de mieux organiser vos calculs, puis plus tard dans l'année pour le dénombrement et les probabilités.