Les calculatrices et documents ne sont pas autorisés.

Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Il est rappelé qu'il est tenu compte dans l'évaluation, de la présentation et la rédaction des copies. Les résultats doivent être encadrés.

Exercice : La fonction cotangente

n désigne un entier naturel non nul et on pose $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right) = e^{2i\pi/n}$. On appelle cotangente la fonction $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$. Elle est notée cot.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction cotangente. Il est noté D dans ce qui suit.
2. Montrer que $\forall x \in D, \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x)$.
3. Démontrer que cot est dérivable, exprimer sa dérivée, puis tracer l'allure du graphe de cot.
4. Déterminer l'ensemble des réels x dans D tels que $\cot(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
5. On pose $F : D \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln|\sin(x)|$. Montrer que F est dérivable et que $F' = \cot$.
6. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Exprimer $\frac{1+\omega^k}{1-\omega^k}$ à l'aide de cot.
7. Soit $(a,b) \in D^2$ tel que $a + b \in D$. Exprimer $\cot(a+b)$ en fonction de $\cot(a)$ et $\cot(b)$.
8. On admet la factorisation suivante :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(z - \omega^k\right)$$

   (a) Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{i2\pi x} - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{2\pi}{n}x} - e^{i\frac{2\pi}{n}k}\right)$$

   (b) ✠ On admet que $\sum_{k=0}^{n-1} k = n(n-1)/2$. Déduire du résultat précédent que, pour tout réel x,

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{\pi}{n}(x+k)} - e^{-i\frac{\pi}{n}(x+k)}\right) = 2i^n \sin(\pi x)$$

   (c) En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{x+k}{n}\pi\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sin(\pi x)$$

9. Déduire du résultat précédent

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}, \quad \cot(\pi x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cot\left(\frac{x+k}{n}\pi\right)$$

Problème : Treillis discrets de $\mathbb{C}$.

Ce problème est long et les questions ne sont pas ordonnées par difficulté croissante. Faites de votre mieux et privilégiez la qualité à la quantité.

Notations et définitions

- $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des complexes de module 1.
- Pour tout entier naturel non nul n, $\mathbb{U}_n$ désigne l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.
- On pose $j = \exp\left(i\dfrac{2\pi}{3}\right)$
- On pose $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ l'ensemble des complexes de module inférieur ou égal à 1.
- Soit A une partie de $\mathbb{C}$. On dit que
  - ◊ A est stable par produit lorsque $\forall (z_1, z_2) \in A^2, z_1 z_2 \in A$.
  - ◊ A est de type SC lorsque $\forall (z_1, z_2) \in A^2, z_1^2 + z_2^2 \in A$.
  - ◊ A est discret lorsque $A \cap D$ est fini (éventuellement vide). Dans ce cas, on note $V(A)$ le nombre d'éléments de $A \cap D$.

  Lorsque A vérifie les trois critères précédents, on dit que A est un treillis discret.

Partie 1. Exemples

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ est un treillis discret et préciser $V(\mathbb{Z})$.
2. Montrer que l'ensemble des imaginaires purs, on peut le noter $i\mathbb{R}$, n'est pas un treillis discret.
3. Montrer que D n'est pas un treillis discret.
4. On considère la partie $J = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathfrak{Re}(z) > 1 \wedge \mathfrak{Im}(z) = 0\}$ des complexes de partie réelle strictement supérieure à 1 et de partie imaginaire nulle. Montrer que J est un treillis discret et préciser $V(J)$.
5. On pose $E = \left\{a + bj \,|\, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\right\} = \left\{z \in \mathbb{C} \,|\, \exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2, z = a + bj\right\}$.
   (a) Montrer que $1 + j + j^2 = 0$ et que $\bar{j} = j^2$.
   (b) Montrer que E est stable par produit.
   (c) Pour tout couple d'entiers relatifs (a, b), montrer que
   $$|a + bj|^2 = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2.$$
   (d) Montrer que $E \cap D = \{0\} \cup \mathbb{U}_6$.
   (e) Démontrer que E est un treillis discret et calculer $V(E)$.
6. On pose $F = \left\{z \in \mathbb{C} \,|\, z^2 \in E\right\}$. Montrer que F est un treillis discret et que $V(F) = 13$.

Partie 2. Quelques résultats généraux

7. Soit A une partie de $\mathbb{C}$ stable par produit et discrète. On suppose de plus que A est stable par somme, i.e $\forall (z_1, z_2) \in A^2, z_1 + z_2 \in A$. Montrer que A est un treillis discret.

Dans la suite de cette partie jusqu'à la question 13 incluse, on fixe A un treillis discret.

8. Montrer que $\forall z \in A, \forall n \in \mathbb{N}^*, z^n \in A$.
9. Est-il alors possible que A contienne un élément de module dans $]0, 1[$?
10. Montrer que si $i \in A$, alors $\{0\} \cup \mathbb{U}_4 \subset A$.
11. Montrer que si $j \in A$, alors $\mathbb{U}_6 \subset A$.
12. Montrer que $A \cup \{0\}$ est un treillis discret.
13. On pose $B = A \backslash \{0\}$. Montrer que B est un treillis discret si et seulement si $\forall (z_1, z_2) \in B^2, z_1/z_2 \notin \{-i, i\}$.

Partie 3. Autour des racines de l'unité

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

14. Montrer que $\mathbb{U}_n$ est stable par produit.
15. Montrer que si n est pair, alors $\{z^2 | z \in \mathbb{U}_n\} = \mathbb{U}_{n/2}$.
16. Montrer que si n est impair, alors $\{z^2 | z \in \mathbb{U}_n\} = \mathbb{U}_n$.

On pose $S_n = \{z_1 + z_2 | (z_1, z_2) \in \mathbb{U}_n^2\} = \{z \in \mathbb{C} | \exists (z_1, z_n) \in \mathbb{U}_n^2, z = z_1 + z_2\}$ l'ensemble des sommes de racines n-ièmes de l'unité.

17. Montrer que $\forall z \in S_n, |z| \leq 2$.
18. Montrer que $0 \in S_n$ si et seulement n est pair.
19. Montrer que si n est impair et supérieur ou égal à 5, alors S_n contient un complexe de module dans $]0, 1[$.
20. Montrer que si n est pair et supérieur ou égal à 8, alors S_n contient un complexe de module dans $]0, 1[$.

Partie 4. Classification

On admet le résultat suivant : soit G un ensemble fini, non vide, stable par produit et inclus dans $\mathbb{U}$. Alors il existe un entier naturel non nul n tel que $G = \mathbb{U}_n$.

21. ✠✠ Démontrer que pour tout treillis discret A, $V(A) \in \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 13\}$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆