

★★★

Planche 1

★★★

1. Caractérisation séquentielle de la borne supérieure.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer toutes les fonctions f de classe C^2 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(a - x)$$

3. Pour tout x dans $[0, 1]$, on pose $f(x) = \int_0^x (1 - t^4)^{-1/2} dt$. Montrer que f admet une limite σ en 1 et que la fonction ainsi prolongée est une bijection de $[0, 1]$ dans $[0, \sigma]$. Établir la dérivabilité de sa réciproque et montrer que celle-ci vérifie l'équation différentielle $y'' + 2y^3 = 0$.

★★★

Planche 2

★★★

1. Existence de la borne inférieure d'une partie non vide minorée de \mathbb{R} . Lien avec la borne supérieure.
2. Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant

$$\cos^4(x) + \sin^6(x) = 1$$

3. Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle définie par $F_0 = 0, F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \arctan \frac{1}{F_{2n+1}} + \arctan \frac{1}{F_{2n+2}} = \arctan \frac{1}{F_{2n}}$$

En déduire la limite de $\sum_{k=0}^n \arctan \frac{1}{F_{2k+1}}$ quand n tend vers $+\infty$.

★★★

Planche 3

★★★

1. Caractérisation des parties convexes de \mathbb{R} .
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*, (x_1, \dots, x_n)$ et (y_1, \dots, y_n) deux familles de n réels. On pose

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \left(\sum_{i=1}^n (x_i + ty_i)^2 \right)$$

En étudiant cette fonction, montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$$

3. On considère l'équation différentielle $(E) y' + ay = b$ d'inconnue $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, où $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues. On note S l'ensemble de ses solutions. Pour toute solution f de (E) , on note G_f son graphe. montrer que $(G_f)_{f \in S}$ est une partition de \mathbb{R}^2 .