Sommes et produits finis

Cornou Jean-Louis

26 juin 2025

1 Sommes finies

1.1 Sommes simples

Dans tout ce qui suit, n désigne un entier naturel non nul et $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de n complexes.

Définition 1 *Pour tout entier k dans $[\![1,n-1]\!]$, on définit par récurrence la somme partielle d'indice k via*

$$\mathrm{S}_1 = a_1 \quad \textit{et} \quad \mathrm{S}_{k+1} = \mathrm{S}_k + a_{k+1}$$

La quantité S_n est appelée ***somme*** *de la famille $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, elle est notée $\sum_{k=1}^{n} a_k$.*

☞ **Remarque**
L'indice (ou symbole) k est muet. Il peut être remplacé par n'importe quel autre symbole.

Propriété 1

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration. On note $\mathcal{P}(n)$ l'assertion « $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$ » et on la démontre par récurrence. Initialisation : pour $n=1$, $\sum_{k=1}^{1} k = 1$ tandis que $1(1+1)/2 = 1$, ce qui démontre la validité de $\mathcal{P}(1)$. Hérédité : soit n un entier non nul tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n+1}{2}(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

ce qui démontre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Il s'ensuit par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

Propriété 2

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Démonstration. On procède de même par récurrence. Pour $n=1$, $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$, tandis que $1(1+1)(2+1)/6 = 1$, ce qui prouve l'initialisation. Soit n un entier non nul tel que la somme de 1 à n vérifie l'égalité attendue. Alors,

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6}(n(2n+1) + 6(n+1)) = \frac{n+1}{6}(2n^2+7n+6) = \frac{n+1}{6}(2n+3)(n+2)$$

ce qui démontre l'égalité souhaitée pour $n+1$.

Propriété 3

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Démonstration. Encore une fois, la récurrence est une méthode adaptée. Pour $n = 1$, la somme vaut $1^3 = 1$, tandis que le membre de droite vaut $(1(1+1)/2)^2 = 1^2 = 1$, ce qui prouve l'initialisation. Soit n un entier non nul tel qu'on a l'égalité souhaitée. Alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4}(n^2+4(n+1)) = \left(\frac{(n+1)}{2}\right)^2 (n^2+4n+4) = \left(\frac{(n+1)}{2}\right)^2 (n+2)^2,$$

ce qui démontre l'hérédité.

1.2 Manipulation de sommes simples

Propriété 4 *Soit $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ deux familles de n complexes et λ un complexe. Alors*

$$\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k + b_k) = \lambda\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$$

☞ **Remarque**
Cette dernière propriété s'appelle une propriété de linéarité.

Propriété 5 *Soit $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille constante, alors*

$$\sum_{k=1}^{n} a_i = na_1$$

Proposition - définition 1 *On appelle permutation de $[\![1,n]\!]$ toute fonction de $[\![1,n]\!]$ bijective dans $[\![1,n]\!]$. Elle ne fait que permuter les éléments entre eux. Il suffit pour cela que tous les $(\sigma(j))_{j\in[\![1,n]\!]}$ soient deux à deux distincts ou encore que $\{\sigma(j) | j \in [\![1,n]\!]\} = [\![1,n]\!]$.*

Démonstration. On a vu qu'une application d'un ensemble fini dans un ensemble ayant même nombre d'éléments est bijective ssi elle est injective ssi elle est surjective.

Propriété 6 (Changement d'indice) *Pour toute permutation σ de $[\![1,n]\!]$, les familles $(a_{\sigma(j)})_{j\in[\![1,n]\!]}$ et $(a_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ ont même somme. Cela s'écrit*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)}$$

Démonstration. admise dans le cours, proposée en exercice.

Proposition - définition 2 *Soit I un ensemble fini non vide d'indices et $(b_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de complexes indexée par I. Alors la somme de cette famille est la somme obtenue en numérotant de n'importe quelle façon les éléments de cette famille de 1 à $\mathrm{card}(\mathrm{I})$.*

Convention
La somme de toute famille indexée par l'ensemble vide est nulle.

Exemple 1 *Une autre démonstration de la somme des entiers de 1 à n. Notons $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} k$ et effectuons le changement d'indice $k \mapsto n-k$. Alors*

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n}(n-k) = n(n+1) - \sum_{k=1}^{n} k = n(n+1) - \mathrm{S}_n$$

On en déduit que $2\mathrm{S}_n = n(n+1)$, donc que $\mathrm{S}_n = n(n+1)/2$.

Théorème 1 (Changement de variable) *Soit I un ensemble fini non vide d'indices et $(b_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de complexes indexée par I. On considère une bijection $f : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ et la famille de complexes $(c_j)_{j\in\mathrm{J}} = (b_{f^{-1}(j)})_{j\in\mathrm{J}}$. Alors*

$$\sum_{j\in\mathrm{J}} c_j = \sum_{i\in\mathrm{I}} b_i$$

Exemple 2 *Soit n un entier naturel non nul. Alors pour tout entier relatif p*

$$\sum_{z\in\mathbb{U}_n} z = \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\pi/n} = \sum_{k=p}^{p+n-1} e^{i2k\pi/n}$$

Propriété 7 *Soit $(a_k)_{0\leq k\leq n}$ une famille de $n+1$ complexes. Alors*

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$$

*On appelle une telle somme une somme **télecopique***

Démonstration. Par linéarité, cette somme vaut également

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_{k-1}\right)$$

On peut effectuer le changement d'indices $j = k-1$ dans la seconde somme, ce qui entraîne

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_{k-1}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j\right) = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k - \sum_{j=1}^{n-1} a_j - a_0 = a_n - a_0$$

Propriété 8 *Soit x un complexe. Alors*

$$\text{Si } x \neq 1, \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}. \quad \text{Sinon } \sum_{k=0}^{n} x^k = n+1$$

Démonstration. Si $x = 1$, alors pour tout entier k, $x^k = 1$ et la somme $\sum_{k=0}^{n} x^k$ vaut $1 \times \text{card}([\![0, n]\!]) = n+1$. Dans le cas $x \neq 1$, on assemble la quantité

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} = 1 - x^{n+1}.$$

La dernière égalité est valide par télescopage. Comme $x \neq 1$, on peut diviser par $1-x$, ce qui fournit l'égalité attendue.

Exemple 3 *Pour tout entier k non nul, on a $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. On en déduit que pour tout entier naturel non nul n,*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Exemple 4 *Soit n un entier naturel non nul et $\omega = \exp(2i\pi/n)$. Si $n \neq 1$, alors $\omega \neq 1$ et*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = \frac{1-1}{1-\omega} = 0$$

Si $n = 1$, $\omega = 1$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = n$.

Propriété 9 *Soit a et b deux complexes et n entier naturel, alors*

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right)$$

Démonstration. Dans le cas $n = 0$, les conventions d'écriture donnent $a^0 - b^0 = 1 - 1 = 0$ pour le membre de gauche, tandis que la somme de droite porte sur un ensemble vide, donc est nulle, ce qui prouve le résultat. Dans le cas n non nul, la quantité de droite donne par linéarité, puis par changement d'indice $j = k+1$ dans la première somme

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} = \sum_{j=1}^{n} a^j b^{n-j} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} = a^n b^0 - a^0 b^n = a^n - b^n$$

Application 1 (Factorisation de polynômes) *Soit* P *un polynôme à coefficients complexes (resp. réels), et a une racine de* P *(i.e un complexe tel que* $P(a) = 0$*). Alors il existe un polynôme* Q *à coefficients complexes (resp. réels) tel que*

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - a)Q(z)$$

Démonstration. Notons $(a_m)_{0\leq k\leq d}$ les coefficients complexes de P avec d le degré de P. Alors pour tout entier m dans $[\![0, d]\!]$, pour tout complexe z

$$z^m - a^m = (z-a)\sum_{k=0}^{m-1} z^k a^{m-1-k} = (z-a)Q_m(z)$$

en posant $Q_m(z) = \sum_{k=0}^{m-1} z^k a^{m-1-k}$ qui est bien une expression polynômiale en z. Mais alors on multiplie chacune des égalités par a_m et on somme de $m = 0$ à d, ce qui donne par linéarité

$$\sum_{m=0}^{d} a_m z^m - \sum_{m=0}^{d} a_m a^m = (z-a)\sum_{m=0}^{d} a_m Q_m(z)$$

On pose alors $Q(z) = \sum_{m=0}^{d} a_m Q_m(z)$ pour tout complexe z, ce qui définit bien un polynôme à coefficients complexes et on reconnaît

$$P(z) - P(a) = (z-a)Q(z)$$

Comme a est une racine de P, on en déduit que

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z-a)Q(z)$$

Propriété 10 (Somme de suites classiques) *Soit* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite arithmétique,* $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite géométrique de raison q, n, et m deux entiers naturels tels que* $n \leq m$*. Alors*

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = \frac{a_n + a_m}{2}(m-n+1)$$

On retient que la somme vaut la moyenne des termes extrêmes fois le nombre de termes.

$$\text{Si } q \neq 1, \sum_{k=n}^{m} g_k = \frac{g_n - g_{m+1}}{1-q}$$

On retient que la somme vaut le premier terme moins le premier terme oublié, le tout divisé par un moins la raison.

$$\text{Si } q = 1, \sum_{k=n}^{m} g_k = g_n(n-m+1)$$

Démonstration. Notons r une raison de la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Alors pour tout entier k, $a_k = a_0 + rk$. Ainsi, par linéarité de la somme

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = \sum_{k=n}^{m}(a_0 + rk) = a_0(m-n+1) + r\sum_{k=n}^{m} k = a_0(m-n+1) + r\sum_{k=0}^{m} k - r\sum_{k=0}^{n-1} k = a_0(m-n+1) + rm\frac{m+1}{2} - r(n-1)\frac{n}{2}$$

D'autre part,

$$\frac{a_n + a_m}{2}(m-n+1) = \frac{a_0 + rn + a_0 + mn}{2}(m-n+1) = a_0(m-n+1) + \frac{r}{2}(n+m)(m-n+1) = a_0(m-n+1) + \frac{r}{2}(m^2+m-n^2+n)$$

Comme $m^2 + m = m(m+1)$ et $n^2 - n = n(n-1)$, on retrouve le résultat annoncé.
On peut également démontrer cette égalité par un changement d'indice.
Le cas géométrique découle d'un télescopage comme en propriété 8. Le cas $q = 1$ correspond à celui d'une suite constante comme vue en propriété 5. Dans le cas $q \neq 1$, on a

$$\sum_{k=n}^{m} g_k = \sum_{k=n}^{m} g_n q^{k-n} = g_n \sum_{j=0}^{m-n} q^j = g_n \frac{1-q^{m-n+1}}{1-q} = \frac{g_n - g_n q^{m-n+1}}{1-q} = \frac{g_n - g_{m+1}}{1-q}$$

Exemple 5 *Soit x un réel et n un entier naturel. Déterminer une expression factorisée de $\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$ et en déduire une expression factorisée de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.*
La propriété morphique de l'exponentielle complexe assure que la suite $(e^{ikx})_k = (\exp(ix)^k)_k$ est une suite géométrique. On souhaite alors exploiter le résultat précédent, mais il faut bien prêter attention aux deux cas possibles :

— *Premier cas : $e^{ix} = 1 \iff x \equiv 0[2\pi]$. Dans ce cas, la suite est constante et $\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = (n+1)$. Les parties réelle et imaginaire entraînent alors dans ce cas*
$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = n+1 \quad et \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = 0$$
— *Deuxième cas : $e^{ix} \neq 1 \iff x \not\equiv 0[2\pi]$. Dans ce cas,*
$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}$$
On exploite alors la technique de l'angle moitié pour obtenir une expression factorisée
$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{e^{i(n+1)x/2}}{e^{ix/2}} \frac{-2i\sin((n+1)x/2)}{-2i\sin(x/2)} = e^{inx/2}\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$$
On peut alors prendre les parties réelle et imaginaire de cette dernière expression, ce qui implique que
$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{\cos(nx/2)\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)} \quad et \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin(nx/2)\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$$

Propriété 11 *Soit I un ensemble fini d'indices et $(\mathrm{J}_k)_{k\in\mathrm{K}}$ une partition de I. On se donne une famille de complexes $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$ indexée par I. On lui associe pour tout k dans K les sous-familles $(a_i)_{i\in\mathrm{J}_k}$. Alors*
$$\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i = \sum_{k\in\mathrm{K}}\left(\sum_{i\in\mathrm{J}_k} a_i\right)$$

☞ **Remarque**
Cette propriété permet de « regrouper les termes » de manière à simplifier les calculs.

Exemple 6
$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k = \sum_{\substack{k=0\\ k\ pair}}^{2n}(-1)^k k + \sum_{\substack{k=0\\ k\ impair}}^{2n}(-1)^k k = \sum_{p=0}^{n}(2p) - \sum_{q=0}^{n-1}(2q+1) = 2\frac{n(n+1)}{2} - 2\frac{(n-1)n}{2} - n = n$$

Exemple 7 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à calculer $\sum_{i=1}^{n} \min(i^2-1, i+2)$. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Alors*
$$i^2 - 1 \geq i+2 \iff i^2 - i - 3 \geq 0 \iff i \in [\frac{1}{2}(1-\sqrt{13}), \frac{1}{2}(1+\sqrt{13})]$$
Or $1-\sqrt{13} < 0$ et $2 < \frac{1}{2}(1+\sqrt{13}) < 3$. On en déduit
$$i^2 - 1 \geq i+2 \iff i \in [\![1,2]\!] \iff i \in \{1,2\}$$
Mais alors si $n = 1$,
$$\sum_{i=1}^{n} \min(i^2-1, i+2) = \sum_{i=1}^{1}(i^2-1) = 0$$
si $n = 2$,
$$\sum_{i=1}^{n} \min(i^2-1, i+2) = \sum_{i=1}^{2}(i^2-1) = 0+3 = 3$$
si $n \geq 3$,
$$\sum_{i=1}^{n} \min(i^2-1, i+2) = \sum_{i=1}^{2}(i^2-1) + \sum_{i=2}^{n}(i+2) = 3 + \sum_{i=3}^{n}(i+2) = 3 + (n-3+1)\frac{1}{2}(5+n+2) = 3 + \frac{1}{2}(n+2)(n+7)$$

1.3 Sommes multiples

☞ **Remarque**
Faire des dessins

Définition 2 *Toute somme d'une famille de complexes indexée par une partie I de $\mathbb{N}^p$ avec $p \geq 2$ est appelé somme multiple.*

Exemple 8 *Soit n et m deux entiers naturels non nuls, $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de n complexes, puis $(b_j)_{1\leq j\leq m}$ une famille de m complexes. Alors*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J}\left(a_i b_j\right)$$

Exemple 9 *Soit $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille complexe à n éléments. Alors*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j$$

Exemple 10 *Soit $(z_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de n complexes. Alors*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \overline{z_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \mathfrak{Re}(z_i\overline{z_j})$$

Propriété 12 (Sommation rectangulaire) *Soit $(a_{i,j})_{I\times J}$ une famille de réels indexées par $I\times J$ le produit cartésien de deux parties finies de $\mathbb{N}$. Alors*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_{i,j}\right)$$

Propriété 13 (Sommation triangulaire) *Soit n un entier non nul et $I = \{(i,j)\in [\![1,n]\!]^2 | i\leq j\}$. Alors, pour toute famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in I}$ de réels indexée par I,*

$$\sum_{(i,j)\in I} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}\right)$$

Exemple 11 *Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2}$. Alors*

$$\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} a_{i,j} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i+j=k} a_{i,j} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} a_{i,k-i}$$

Exemple 12 *Soit n un entier naturel non nul. Alors*

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} |i-j| = 2\sum_{1\leq i<j\leq n}(j-i) = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}(j-i) = 2\sum_{i=1}^{n}\frac{(1+n-i)}{2}(n-i) = \sum_{i=1}^{n}(n-i) + \sum_{i=1}^{n}(n-i)^2$$

On obtient alors

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} |i-j| = \frac{n-1+0}{2}n + \sum_{j=0}^{n-1} j^2 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{n(n-1)}{6}(3+2n-1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

Exemple 13 *Pour déterminer la somme $\sum_{0\leq i,j\leq n}(i+j)^2$, on peut développer le carré à l'intérieur, puis manipuler trois sommes rectangulaires (faites-le à titre d'exercice). Une autre possibilité est la suivante :*

$$\sum_{0\leq i,j\leq n}(i+j)^2 = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i+j=k}(i+j)^2 = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i+j=k}k^2 = \sum_{k=0}^{n}k^2(k+1) = \sum_{k=0}^{n}k^3 + \sum_{k=0}^{n}k^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On trouve alors

$$\sum_{0\leq i,j\leq n}(i+j)^2=\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2n+1}{3}\right)=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$$

Exemple 14 *Pour tout entier p, on note $\mathrm{T}_p=\sum_{k=1}^{p}k=p(p+1)/2$. On considère la famille $(ij)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ Pour tout entier k dans $[\![1,n]\!]$, on note $\mathrm{I}_k=\{k\}\times[\![1,k]\!]\cup[\![1,k]\!]\times\{k\}=\{(i,j)\in[\![1,k]\!]^2|i=k\vee j=k\}$. Alors*

$$\sum_{(i,j)\in\mathrm{I}_k}ij=\sum_{i=1}^{k-1}ik+k^2+\sum_{j=1}^{k-1}kj=k\left(\sum_{i=1}^{k-1}i+k+\sum_{j=1}^{k-1}k\right)=k((k-1)k+k)=k^3$$

On en déduit par regroupement que

$$\mathrm{T}_n^2=\left(\sum_{i=1}^{n}i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}j\right)=\sum_{1\leq i,j\leq n}ij=\sum_{k=1}^{n}k^3$$

2 Produits finis

Dans tout ce qui suit n désigne un entier naturel non nul.

Définition 3 *Soit $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille de n complexes. On définit par récurrence*

$$\mathrm{P}_1=a_1,\quad\forall k\in[\![1,n-1]\!],\mathrm{P}_{k+1}=\mathrm{P}_k a_{k+1}$$

*La quantité P_n est appelé **produit** de la famille $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ et notée $\prod_{i=1}^{n}a_i$.*

Définition 4 *Pour tout entier n non nul, on définit la factorielle de n, notée $n!$ par*

$$n!=\prod_{k=1}^{n}k$$

La factorielle de 0 est définie comme 1.

Comme le produit de complexes est commutatif, on peut effectuer le produit dans n'importe quel ordre, ce qui permet de définir le produit $\prod_{j\in\mathrm{I}}a_j$ de toute famille indexée par un ensemble d'indices fini I.

Convention
Le produit d'une famille indexée par l'ensemble vide vaut 1.

Propriété 14

$$\prod_{i=1}^{n}(a_ib_i)=\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\prod_{i=1}^{n}b_i\right)$$

$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda a_i)=\lambda^n\prod_{i=1}^{n}a_i$$

Théorème 2 (Changement de variable) *Soit $(b_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de complexes, $f:\mathrm{I}\to\mathrm{J}$ une bijection et $(c_j)_{j\in\mathrm{J}}=(b_{f^{-1}(j)})_{j\in\mathrm{J}}$. Alors*

$$\prod_{j\in\mathrm{J}}c_j=\prod_{i\in\mathrm{I}}b_i$$

Propriété 15 *Soit $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de complexes tous non nuls. Alors*

$$\prod_{k=1}^{n-1}\frac{a_{i+1}}{a_i}=\frac{a_n}{a_1}$$

Cela s'appelle un produit télescopique.

Exemple 15 *Soit n un entier naturel non nul et $\omega = \exp(2i\pi/n)$, alors*

$$\prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = \omega^{\sum_{k=0}^{n-1} k} = \omega^{n(n-1)/2}$$

Attention, on ne peut pas écrire $\omega^{n(n-1)/2} = (\omega^n)^{(n-1)/2}$ car $(n-1)/2$ n'est pas nécessairement entier. On distingue alors deux cas.

— *Premier cas : n est pair. Dans ce cas, il existe un entier p tel que $n = 2p$ et le produit étudié vaut*

$$\omega^{p(2p-1)} = (\omega^p)^{2p-1} = (-1)^{2p-1} = -1$$

— *Deuxième cas : n est impair. Alors il existe un entier q tel que $n = 2q+1$ et le produit étudié vaut*

$$\omega^{(2q+1)q} = \left(\omega^{2q+1}\right)^q = 1^q = 1$$

On remarque que le produit étudié coïncide avec $(-1)^{n+1}$. En conclusion,

$$\prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = (-1)^{n+1}$$

Ceux qui osent prendre un logarithme de complexes seront châtiés !

Exemple 16 *Soit $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^3$. On note pour tout entier k dans $[\![1,3]\!]$,*

$$\sigma_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le 3} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$$

Ces expressions vérifient

$$\sigma_1 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \sigma_2 = a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3, \quad \sigma_3 = a_1 a_2 a_3$$

On constate que pour tout complexe z, on a

$$(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3) = z^3 - \sigma_1 z^2 + \sigma_2 z - \sigma_3$$

Définition 5 *Soit n un entier naturel et k un entier relatif, on définit le coefficient binomial « k parmi n », noté $\binom{n}{k}$ via*

$$\text{Si } k < 0, \quad \binom{n}{k} = 0$$

$$\text{Si } k > n, \quad \binom{n}{k} = 0$$

$$\text{Si } k \in [\![0, n]\!], \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Propriété 16 *Soit k un entier relatif et n un entier naturel. Alors*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Démonstration. La première égalité est triviale. Si $k = n$, la seconde égalité revient à $0+1 = 1$. Si $k < n$, on exploite les formes factorielles.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k+1)k!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k}\right) \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\,\frac{n+1}{(k+1)(n-k)} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

Si $k > n$ ou $k < 0$, cela revient à vérifier des égalités triviales.

3 Le binôme (de Newton)

Théorème 3 *Soit n un entier naturel, ainsi que a et b deux complexes.*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration. Procédons par récurrence sur l'entier n. Pour $n = 0$, $(a+b)^0 = 1$, tandis que

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1,$$

ce qui prouve l'initialisation. Soit n un entier tel que l'égalité attendue est vérifiée. Alors

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

Ceci prouve le résultat au rang $n+1$, et donc sa validité pour tout entier p par récurrence.

☞ **Remarque**
Une preuve combinatoire de ce résultat sera détaillée lors du chapitre correspondant.

Exemple 17 *Soit* N *un entier naturel. Pour tout complexe z, on pose* $S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}$. *Soit a et b deux complexes, alors*

$$S_N(a+b) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(a+b)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \frac{b^{n-k}}{(n-k)!}$$

D'autre part,

$$S_N(a)S_N(b) = \left(\sum_{i=0}^{N} \frac{a^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{N} \frac{b^j}{j!}\right) = \sum_{n=0}^{2N} \sum_{i+j=n} \frac{a^i}{i!} \frac{b^j}{j!} = \sum_{n=0}^{2N} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \frac{b^{n-k}}{(n-k)!}$$

Ainsi,

$$S_N(a+b) - S_N(a)S_N(b) = \sum_{n=N+1}^{2N} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \frac{b^{n-k}}{(n-k)!}$$

Un petit oiseau me dit que cette différence tend vers 0 *quand* N *tend vers* $+\infty$.

Application 2 (Linéarisation de fonctions trigonométriques) *Soit x un réel, on a pour objectif de transformer une expression polynômiale en* $\cos(x)$ *et* $\sin(x)$ *(par exemple* $\cos^4(x)\sin^3(x)$*) en expression linéaire, i.e ne faisant intervenir que des* $\cos(y)$ *et/ou* $\sin(z)$ *avec y et z des réels adaptés (typiquement,* $x/2, 2x, 3x$*, etc), tout cela, à des fins de primitivation. On sait déjà via les formules d'addition que pour tous réels a et b*

$$2\cos(a)\sin(b) = \sin(a+b) - \sin(a-b)$$
$$2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$$
$$2\sin(a)\sin(b) = \cos(a+b) - \cos(a-b)$$

Par exemple,

$$\cos^3(x) = \frac{1}{2^3}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x}\right) = \frac{1}{8}(2\cos(3x) + 6\cos(x)) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$$

Fixons n un entier naturel non nul, alors

$$\begin{aligned}
2^n \cos^n(x) &= \left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{ix}\right)^k \left(e^{-ix}\right)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i(2k-n)x} \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ 2k<n}}^{n} \binom{n}{k} e^{i(2k-n)x} + \sum_{\substack{k=0 \\ 2k>n}}^{n} \binom{n}{k} e^{i(2k-n)x} + \sum_{\substack{k=0 \\ 2k=n}}^{n} \binom{n}{k} e^{i(2k-n)x}
\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $j = n - k$ *dans la deuxième somme précédemment écrite, cela entraîne*

$$\sum_{\substack{k=0 \\ 2k>n}}^{n} \binom{n}{k} e^{i(2k-n)x} = \sum_{\substack{j=0 \\ 2j<n}}^{n} \binom{n}{n-j} e^{i(n-2j)x} = \sum_{\substack{j=0 \\ 2j<n}}^{n} \binom{n}{j} e^{-i(2j-n)x}$$

On regroupe alors les deux premières sommes sous la forme

$$\sum_{\substack{k=0 \\ 2k<n}}^{n} \binom{n}{k} e^{i(2k-n)x} + \sum_{\substack{k=0 \\ 2k>n}}^{n} \binom{n}{k} e^{i(2k-n)x} = \sum_{\substack{k=0 \\ 2k<n}}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{i(2k-n)x} + e^{-i(2k-n)x}\right) = \sum_{\substack{k=0 \\ 2k<n}}^{n} \binom{n}{k} 2\cos((2k-n)x)$$

Finalement, lorsque n est impair,

$$\cos^n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\substack{k=0 \\ 2k<n}}^{n} \binom{n}{k} \cos((2k-n)x)$$

et lorsque n est pair

$$\cos^n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\substack{k=0 \\ 2k<n}}^{n} \binom{n}{k} \cos((2k-n)x) + \frac{1}{2^n}\binom{n}{n/2}$$

Autre exemple,

$$\sin^4(x) = \frac{1}{i^4 2^4}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^4 = \frac{1}{2^4}\left(e^{i4x} - 4e^{2x} + 6e^{i0x} - 4e^{-i4x} + e^{i4x}\right) = \frac{1}{2^4}\left(2\cos(4x) - 8\cos(2x) + 6\right)$$

Ainsi,

$$\sin^4(x) = \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$$

Un dernier exemple

$$\begin{aligned}
\sin^5(x) &= \frac{1}{i^5 2^5}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^5 \\
&= \frac{i}{2^5}\left(e^{i5x} - 5e^{i3x} + 10e^{ix} - 10e^{-ix} + 5e^{-i3x} - e^{-i5x}\right) \\
&= \frac{i}{2^5}\left(2i\sin(5x) - 10i\sin(3x) + 20i\sin(x)\right) \\
&= -\frac{1}{16}\sin(5x) + \frac{5}{16}\sin(3x) - \frac{5}{8}\sin(x)
\end{aligned}$$

Vous pouvez à titre d'exercice rechercher une expression générale de $\sin^n(x)$ *en fonction des* $\sin(kx)$ *à l'aide du binôme, ou en vous aidant de la formule précédente de* $\cos^n(x)$ *et* $\sin(x) = \cos(\pi/2 - x)$*. C'est la méthode qui importe ici, et non le résultat.*

Exercice 1 *Soit x un réel. A l'aide des formules d'Euler, linéairiser l'expression* $\sin^2(x)\cos^3(x)$*. Il y a beaucoup de manières de procéder.*