Calcul intégral, équations différentielles

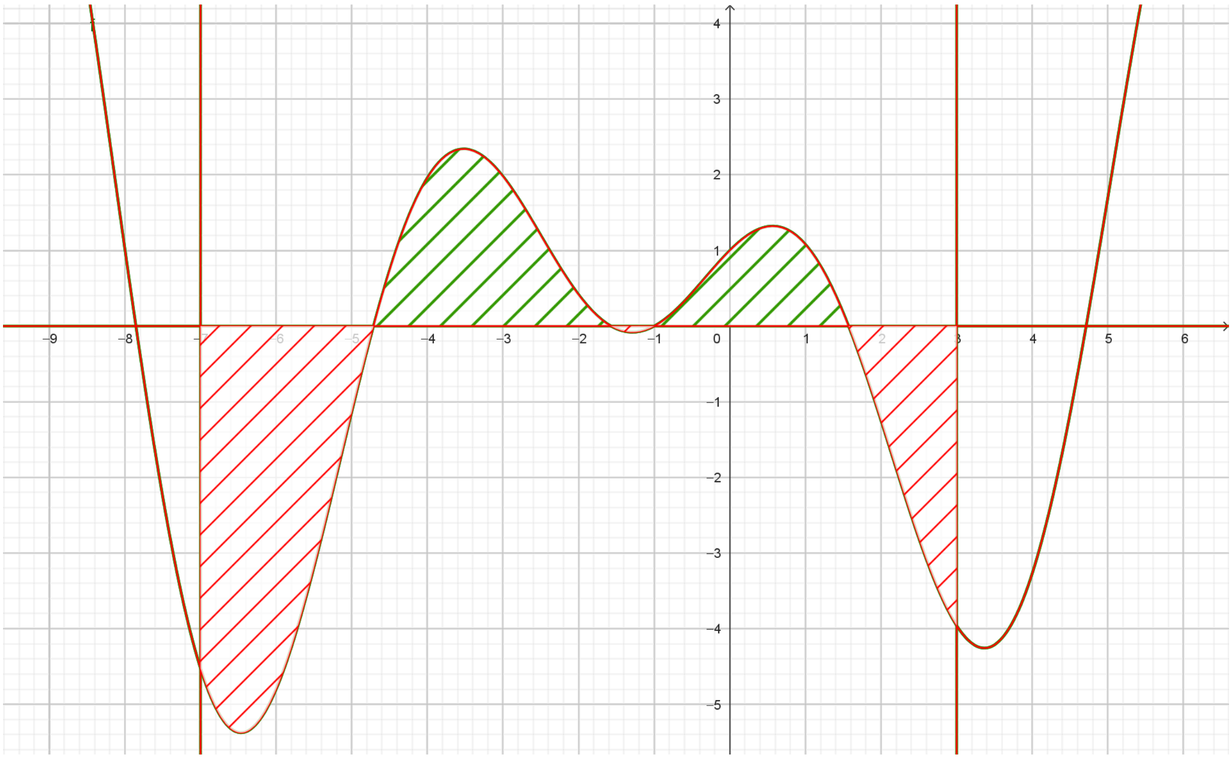
Cornou Jean-Louis

7 juillet 2025

1 Calcul intégral

1.1 Notion d'intégrale

Il s'agit ici de rappels avec peu de démonstrations. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, on peut définir $\int_a^b f$ comme la somme algébrique des aires signées sous la courbe de f. On rencontre la notation $\int_a^b f(x)dx$, où la variable x est muette. Cette notation peut notamment aider pour appliquer un changement de variable. En particulier, l'intégrale d'une fonction constante sur $[a,b]$, vaut cette constante multipliée par $(b-a)$.



Cette figure représente l'intégrale entre -7 et 1 de la fonction continue $x \mapsto (x+1)\cos(x)$. La zone hachurée en vert est comptée positivement, tandis que l'aire hachurée en roiuge est comptée négativement.

Propriété 1 *Soit $f, g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ deux applications continues et λ un réel. Alors*

$$\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g \quad \textit{linéarité de l'intégrale}$$

$$\forall c \in]a,b[, \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \quad \textit{relation de Chasles}$$

Propriété 2 *Avec les mêmes notations que précédemment, si $f \leq g$, alors*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

On dit que l'intégrale est croissante.

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

Démonstration. Le premier point s'explique via la linéarité de l'intégrale. Il suffit alors de constater que l'aire sous la courbe d'une fonction positive est positive. (Ceci est une explication plus qu'une démonstration). Pour le second point, on peut exploiter le fait que f vérifie $-|f| \leq f \leq |f|$. La croissance de l'intégrale implique alors $-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$, ce qui entraîne bien $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

Notation
On étend l'écriture $\int_a^b f((t)dt = -\int_b^a f(t)dt$ dans le cas où $a > b$, et $\int_a^a f(t)dt = 0$. Cette notation permet de prolonger la linéarité et la relation de Chasles, mais pas la croissance. Pour appliquer la croissance de l'intégrale, on fera attention à bien ordonner les bornes d'intégration.

1.2 Calcul de primitives

Dans toute la suite du cours, I et J désignent des intervalles non vides et non réduits à un point.

Définition 1 *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ une application. On dit qu'une fonction $\mathrm{F} : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ est une primitive de f lorsque F est dérivable et $\mathrm{F}' = f$.*

Propriété 3 *Soit F une primitive de f. Alors $\mathrm{G} : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ est une primitive de f si et seulement si $\mathrm{G} - \mathrm{F}$ est constante, i.e*

$$\exists a \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathrm{I}, \mathrm{G}(x) = \mathrm{F}(x) + a$$

Démonstration. On a vu qu'une fonction dérivable sur un intervalle est constante si et seulement si elle est de dérivée nulle. Ici $\mathrm{G}' - \mathrm{F}' = f - f = 0$.

⚠ **Attention**
Ce résultat est faux si l'on ne travaille pas sur un intervalle.

Théorème 1 (Théorème fondamental du calcul intégral) *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $x_0 \in \mathrm{I}$. Alors $\mathrm{F} : \mathrm{I} \to \mathbb{C}, x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$ est une primitive de f.*

Démonstration. La preuve complète est reportée au chapitre sur l'intégration au second semestre. On propose ici une preuve dans le cas f à valeurs réelles monotone. Supposons par exemple que f est croissante. Alors, soit $a \in \mathrm{I}$, pour tout réel x dans I strictement supérieur à a, la relation de Chasles implique

$$\frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a)}{x - a} = \frac{1}{x - a}\int_a^x f(t)dt$$

Mais alors, la croissance de f implique pour tout réel t dans l'intervalle $[a, x]$, $f(a) \leq f(t) \leq f(x)$, donc $f(a)(x-a) \leq \int_a^x f(t)dt \leq f(x)(x-a)$. Ainsi, on a l'encadrement par croissance de l'intégrale et positivité de $x - a$,

$$f(a) \leq \frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a)}{x - a} \leq f(x)$$

Comme f est continue, $f(x)$ tend vers $f(a)$ quand x tend vers a par valeurs supérieures. Donc le taux d'accroissement de F tend vers $f(a)$ quand x tend vers a par valeurs supérieures. On mène la même démarche pour $x < a$, ce qui implique que F est dérivable en a, de dérivée $f(a)$.

Notation
Si F désigne une primitive de f, on note $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$ sous la forme $[\mathrm{F}]_a^b$ ou $[\mathrm{F}(x)]_a^b$.

Corollaire
Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et F une primitive de f. Alors

$$\forall (a, b) \in \mathrm{I}^2, \int_a^b f(t)dt = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

Démonstration. Soit $(a,b) \in \mathrm{I}^2$. D'après le théorème fondamental du calcul intégral, $\mathrm{G} : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f. Comme F est également une primitive de f, il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{G} = \mathrm{F} + c$. Mais alors

$$\int_a^b f(t)dt = \mathrm{G}(b) = \mathrm{G}(b) - \mathrm{G}(a) = (\mathrm{F}(b) + c) - (\mathrm{F}(a) + c) = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

Théorème 2 (Intégration par parties) *Soit u et v deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle* I*. Alors*

$$\forall (x_0, x) \in \mathrm{I}^2, \int_{x_0}^x u(t)v'(t)dt = [u(x)v(x)]_{x_0}^x - \int_{x_0}^x u'(t)v(t)dt = u(x)v(x) - u(x_0)v(x_0) - \int_{x_0}^x u'(t)v(t)dt$$

Démonstration. Soit F une primitive de $u'v$. Alors $uv - \mathrm{F}$ est dérivable et $(uv-\mathrm{F})' = uv' + u'v - u'v = uv'$, donc $uv - \mathrm{F}$ est une primitive de uv'. Ainsi,

$$\int_{x_0}^x u(t)v'(t)dt = (uv-\mathrm{F})(x) - (uv-\mathrm{F})(x_0) = u(x)v(x) - u(x_0)v(x_0) - (\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0)) = [u(t)v(t)]_{x_0}^x - \int_{x_0}^x u'(t)v(t)dt$$

Théorème 3 (Changement de variable) *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ continue et $\varphi : \mathrm{J} \to \mathrm{I}$ de classe C^1. Alors, pour tous $(x_0, x) \in \mathrm{J}^2$,*

$$\int_{x_0}^x f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(u)du$$

Démonstration. Soit $(x_0, x) \in \mathrm{J}^2$. Soit F une primitive de f. Alors

$$\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(u)du = [\mathrm{F}(u)]_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} = (\mathrm{F} \circ \varphi)(x) - (\mathrm{F} \circ \varphi)(x_0)$$

D'autre part, $\mathrm{F} \circ \varphi$ est dérivable par composition de fonctions dérivables et

$$\forall x \in \mathrm{J}, (\mathrm{F} \circ \varphi)'(x) = (\mathrm{F}' \circ \varphi)(x)\varphi'(x) = (f \circ varphi)(x)\varphi'(x)$$

Par conséquent, $\mathrm{F} \circ \varphi$ est une primitive de $(f \circ \varphi)\varphi'$. Donc

$$(\mathrm{F} \circ \varphi)(x) - (\mathrm{F} \circ \varphi)(x_0) = \int_{x_0}^x (f \circ \varphi)(u)\varphi'(u)du$$

Exemple 1 *En exploitant l'application de classe C^1, $t \mapsto 2t^2$, on a*

$$\int_{-\pi}^{2\pi} \cos(2t^2)tdt = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{2\pi} \cos(2t^2)4tdt = \frac{1}{4}\int_{2\pi^2}^{8\pi^2} \cos(u)du = \frac{1}{4}[\sin(u)]_{2\pi^2}^{8\pi^2} = \frac{1}{3}\left(\sin(8\pi^2) - \sin(2\pi^2)\right)$$

Théorème 4 (Changement de variable, cas bijectif) *Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle* I *et $\varphi : \mathrm{J} \to \mathrm{I}$ une fonction C^1 bijective .*

$$\forall (y, y_0) \in \mathrm{I}^2, \int_{y_0}^y f(t)dt = \int_{\varphi^{-1}(y_0)}^{\varphi^{-1}(y)} f(\varphi(u))\varphi'(u)du$$

Démonstration. Soit $(y_0, y) \in \mathrm{I}^2$. On pose $x_0 = \varphi^{-1}(y_0)$ et $x = \varphi^{-1}(y)$. On applique le résulat précédent à $(x_0, x) \in \mathrm{J}^2$ ce qui donne

$$\int_{x_0}^x f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(u)du$$

Or $\varphi(x_0) = y_0$ et $\varphi(x) = y$, ce qui donne le résultat voulu.

Méthode

La rédaction des changements de variable ne doit, pour l'instant, *pas être trop détaillée. On peut se contenter d'écrire $t = \varphi(u), dt = \varphi'(u)du$ puis de remplacer les divers symboles dans le calcul d'une intégrale.*

Exemple 2 *Soit* F *une primitive d'une fonction f, a un réel non nul, b un réel. Alors $x \mapsto f(ax+b)$ admet pour primitive $x \mapsto \frac{1}{a}\mathrm{F}(ax+b)$. Il suffit de remarquer par exemple que cette dernière admet pour dérivée $x \mapsto \frac{a}{a}\mathrm{F}'(ax+b) = f(ax+b)$. Sinon, on effectue le changement de variable $u = ax+b$ qui entraîne $du = adx$ et donc*

$$\int_{y_0}^y f(ax+b)dx = \int_{ay_0+b}^{ay+b} f(u)\frac{du}{a} = \frac{1}{a}(\mathrm{F}(ay+b) - \mathrm{F}(ay_0+b))$$

Exemple 3 *Via le changement de variable* $t = \sin(u)$, *on a*

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \int_{\arcsin(0)}^{\arcsin(1)} \sqrt{1-\sin^2(u)}\cos(u)\,du = \int_0^{\pi/2} \cos^2(u)\,du = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1+\cos(2u))\,du = \frac{\pi}{4}$$

1.3 Catalogue de primitives à l'aide des fonctions usuelles

Dans le tableau suivant, on prêtera attention au fait que l'ensemble de définition n'est pas nécessairement un intervalle. Toutefois, l'intégration se fera toujours sur un sous-segment de l'ensemble de définition.

paramètre	$f(x)$	D_f	$\mathrm{F}(x)$
$n \in \mathbb{N}$	x^n	$\mathbb{R}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$n \in \mathbb{Z}^-, n \neq -1,$	x^n	$\mathbb{R}^*$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\ln(x)$
$\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	x^α	$\mathbb{R}^{+*}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
	$\exp(x)$	$\mathbb{R}$	$\exp(x)$
	$\ln(x)$	$\mathbb{R}^{+*}$	$x\ln(x) - x$
	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\sin(x)$
	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$-\cos(x)$
	$\exp(ix)$	$\mathbb{R}$	$-i\exp(ix)$
	$\tan(x)$	$\mathrm{D}_{\tan}$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$
	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x)$
	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x)$
	$\mathrm{th}(x)$	$\mathbb{R}$	$\ln(\mathrm{ch}(x))$
	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\arctan(x)$
	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$	$\arcsin(x)$
	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]1,+\infty[$	$\mathrm{argch}(x)$
	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]-\infty,-1[$	$-\mathrm{argch}(-x)$
	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{argsh}(x)$
	$\frac{1}{1-x^2}$	$]-1,1[$	$\mathrm{argth}(x)$

Exemple 4 *Soit* λ *un complexe non nul. Alors* $f : x \mapsto \exp(\lambda x)$ *est dérivable de dérivée de* $x \mapsto \lambda\exp(\lambda x)$. *Cela implique que* $\mathrm{F} : x \mapsto \frac{1}{\lambda}\exp(\lambda x)$ *est une primitive de* f. *On en déduit en écrivant* $\lambda = a + ib$ *avec* a, b *réels tels que* $(a,b) \neq (0,0)$, *que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathfrak{Re}(\mathrm{F}(x)) = \frac{a}{a^2+b^2}\exp(ax)\cos(bx) + \frac{b}{a^2+b^2}\exp(ax)\sin(bx)$$

définit une pritmive de $x \mapsto \exp(ax)\cos(bx)$, *tandis que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathfrak{Im}(\mathrm{F}(x)) = \frac{a}{a^2+b^2}\exp(ax)\sin(bx) - \frac{b}{a^2+b^2}\exp(ax)\cos(bx)$$

est une primitive de $x \mapsto \exp(ax)\sin(bx)$.

Exercice 1 *Déterminer une primitive de* $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{|x|}$.

On étend le catalogue de primitives de fonctions usuelles via la dérivation des composées de fonctions. Dans ce qui suit, u désigne une fonction dérivable sur I en espérant que son image tombe dans le bon ensemble de définition.

paramètre	f	$u(\mathrm{I}) \subset$	F
$n \in \mathbb{N}$	$u'(u^n)$	$\mathbb{R}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$n \in \mathbb{Z}^-, n \neq -1,$	$u'(u^n)$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
	$\frac{u'}{u}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\ln(\lvert u \rvert)$
$\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$u'(u^\alpha)$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
	$u' \exp(u)$	$\mathbb{R}$	$\exp(u)$
	$u' \ln(u)$	$\mathbb{R}^{+*}$	$u \ln(\lvert u \rvert) - u$
	$u' \cos(u)$	$\mathbb{R}$	$\sin(u)$
	$u' \sin(u)$	$\mathbb{R}$	$-\cos(u)$
	$u' \exp(iu)$	$\mathbb{R}$	$-i \exp(iu)$
	$\tan(u)$	$\mathrm{D}_{\tan}$	$-\ln(\lvert \cos(u) \rvert)$
	$u' \mathrm{ch}(u)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(u)$
	$u' \mathrm{sh}(u)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(u)$
	$u' \mathrm{th}(u)$	$\mathbb{R}$	$\ln(\mathrm{ch}(u))$
	$\frac{u'}{1+u^2}$	$\mathbb{R}$	$\arctan(u)$
	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$]-1,1[$	$\arcsin(u)$
	$\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$	$]1,+\infty[$	$\mathrm{argch}(u)$
	$\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$	$]-\infty,-1[$	$-\mathrm{argch}(-u)$
	$\frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{argsh}(u)$
	$\frac{u'}{1-u^2}$	$]-1,1[$	$\mathrm{argth}(u)$

1.4 Fractions

On ne développe ici pas de méthode générale pour la primitivation des fonctions rationnelles. Dans ce qui suit, on accepte la notation $\int^x f(t)dt$ pour désigner une primitive d'une fonction f continue sur un intervalle.

Exemple 5 *Soit (a, b, c) des réels tels que $a \neq 0$. On considère la fonction f telle que $f(x) = \frac{1}{ax^2+bx+c}$. Si l'on note Z (éventuellement vide) l'ensemble des racines de la fonction polynomiale $x \mapsto ax^2 + bx + c$, f est bien définie sur $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}\backslash\mathrm{Z}$. Cherchons à présent une primitive F de f. Commençons par remarquer que pour tout réel x,*

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

en posant le fameux discriminant $\Delta = b^2-4ac$. Ainsi, avec la linéarité de la dérivation et un changement de variable $u = t + b/2a$

$$\int^x \frac{1}{at^2 + bt + c} dt = \frac{1}{a} \int^{x+b/2a} \frac{1}{u^2 - \frac{\Delta}{4a^2}} du$$

On doit alors distinguer trois cas.

— *Premier cas :* $\Delta = 0$. *On utilise alors la primitive* $u \mapsto -1/u$. *Ainsi,*

$$\int^x \frac{1}{at^2+bt+c}\,dt = \frac{1}{a}\left[-\frac{1}{u}\right]^{x+b/2a} = \frac{1}{a}\frac{-1}{x+b/(2a)} = -\frac{1}{ax+b/2}$$

— *Deuxième cas* $\Delta > 0$. *Alors pour tout réel u convenable,*

$$\frac{1}{(u-\sqrt{\Delta}/(2a))(u+\sqrt{\Delta}/(2a))} = \frac{a}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{1}{u-\sqrt{\Delta}/(2a)} - \frac{1}{u+\sqrt{\Delta}/(2a)}\right)$$

Ainsi,

$$\int^x \frac{1}{at^2+bt+c}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\int^{x+b/2a}\frac{du}{u-\sqrt{\Delta}/(2a)} - \int^{x+b/2a}\frac{du}{u+\sqrt{\Delta}/(2a)}\right) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\ln|x-x^-| - \ln|x-x^+|\right)$$

en notant $x^- = (-b-\sqrt{\Delta})/(2a)$ *et* $x^+ = (-b+\sqrt{\Delta})/(2a)$ *les racines réelles de* $1/f$. *En conclusion,*

$$\int^x \frac{1}{at^2+bt+c}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\ln\left|\frac{x-x^-}{x-x^+}\right|$$

— *Troisième cas* $\Delta < 0$. *On note* $\delta = \sqrt{-\Delta}$ *et on effectue le changement de variable* $u = \delta v/(2a)$,

$$\int^x \frac{1}{at^2+bt+c}\,dt = \frac{1}{a}\int^{2ax/\delta+b/\delta}\frac{\delta dv/(2a)}{\delta^2 v^2/(4a^2)+\delta^2/(4a^2)} = \frac{2}{\delta}\int^{(2ax+b)/\delta}\frac{dv}{v^2+1} = \frac{2}{\delta}\arctan\left(\frac{2ax+b}{\delta}\right)$$

Exemple 6 *Pour tout réel u,*

$$\begin{aligned}
\int \frac{du}{(1+u^2)^2} &= \int \frac{1+u^2-u^2}{(1+u^2)^2}\,du \\
&= \int \frac{du}{1+u^2} - \frac{1}{2}\int \frac{2u}{(1+u^2)^2}\,du \\
&= \arctan(u) - \frac{1}{2}\left(\frac{-u}{1+u^2} + \int \frac{du}{1+u^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\arctan(u) + \frac{u}{2(u^2+1)}
\end{aligned}$$

Exemple 7 *Calcul de* $\int \frac{x-3}{(2x^2+6x+5)^2}\,dx$. *L'étude de la forme canonique du dénominateur amène à* $2x^2 + 6x+5 = 2\left((x+3/2)^2+1/4\right)$. *On propose alors le changement de variable* $x+3/2 = u/2$, *qui entraîne* $dx = du/2$ *et*

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-3}{(2x^2+6x+5)^2}\,dx &= \frac{1}{8}\int \frac{u/2-3/2-3}{((u/2)^2+1/4)^2}\,du \\
&= \int \frac{u-9}{(u^2+1)^2}\,du \\
&= \int \frac{u}{(u^2+1)^2}\,du - 9\int \frac{du}{(u^2+1)^2} \\
&= \frac{-1}{2(u^2+1)} - 9\int \frac{1+u^2-u^2}{-1+u^2)^2}\,du \\
&= \frac{-1}{2(u^2+1)} - 9\left(\arctan(u) - \frac{1}{2}\int \frac{2u}{(u^2+1)^2}\,u\,du\right) \\
&= \frac{-1}{2(u^2+1)} - 9\arctan(u) + \frac{9}{2}\left(-\frac{u}{u^2+1} + \int \frac{du}{u^2+1}\right) \\
&= \frac{-1}{2(u^2+1)} - \frac{9u}{2(u^2+1)} - \frac{9}{2}\arctan(u)
\end{aligned}$$

Le changement de variable s'écrit également $u = 2x+3$. *Ainsi,*

$$\int \frac{x-3}{(2x^2+6x+5)^2}\,dx = -\frac{9x+14}{2(2x^2+6x+5)} - \frac{9}{2}\arctan(2x+3)$$

Exercice 2 *On considère la fonction rationnelle $f : x \mapsto \frac{1}{(ax^2+bx+c)^2}$. Rechercher une primitive de f à l'aide d'une intégration par parties et du résultat précédent.*

1.5 Radicaux

De même que précédemment, on ne développe pas ici de méthode générale. On considère deux réels c, d tels que $c \neq 0$, puis la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{cx+d}}$ pour tout réel x convenable (c'est un bon exercice de déterminer l'ensemble de définition de f). Alors

$$\int^x \frac{dt}{\sqrt{ct+d}} = \frac{2}{c}\sqrt{cx+d}$$

On considère à présent la fonction $g(x) = \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ avec a un réel non nul. Cela amène à considérer des fonctions circulaires et hyperboliques réciproques.
On effectue le changement de variable $y = x + b/(2a)$, ce qui implique

$$\int^{\mathrm{X}} g(x)dx = \int^{\mathrm{X}+b/(2a)} \frac{1}{\sqrt{a(y^2+\Delta)}}dy$$

Si $\Delta = 0$, cela revient à primitiver $1/|y|$ via le logarithme népérien. Sinon, on choisit le bon intervalle de définition en fonction des signes de a et de Δ et on est ainsi ramené à la détermination d'une primitive de

- $h(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2+\delta^2}}$ ou de
- $p(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-\delta^2}}$ ou de
- $q(y) = \frac{1}{\sqrt{\delta^2-y^2}}$.

Dans le premier cas, il suffit d'effectuer le changement de variables $y = \delta\,\mathrm{sh}(z)$, dans le deuxième $y = \delta\,\mathrm{ch}(z)$, dans le troisième $y = \delta\sin(z)$.

Exemple 8 *Calcul de $\int_{-4}^{0} \sqrt{-t^2-4t}\,dt$. L'intégrande est bien définie d'après l'étude du signe de $-t^2-4t$ sur $[-4, 0]$. On remarque ensuite via la forme canonique que*

$$\forall t \in [-4,0], -t^2-4t = \sqrt{4-(t+2)^2}$$

On propose alors le changement de variable $t+2 = 2\sin(u)$, ce qui amène

$$\int_{-4}^{0} \sqrt{-t^2-4t} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\sqrt{1-\sin^2(u)}2\cos(u)du = 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(u)du = 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos(2u)}{2}du = 2\pi$$

1.6 Fonctions trigonométriques

Rappelons qu'on a déterminé un moyen de transformer tout polynôme en $\cos(x)$ en expression linéaire en $\cos(kx)$ avec k parcourant un segment d'entiers relatifs. On en déduit aisément des primitives via la linéarité de la primitive et les fonctions $x \mapsto -\frac{1}{k}\cos(kx)$, $x \mapsto \frac{1}{k}\sin(kx)$ quand k **est non nul!**
On considère une fonction rationnelle f en $\cos(x)$ et $\sin(x)$, i.e il existe des familles $(a_{i,j})$, $(b_{k,l})$ presque nulles de réels telles que

$$\forall x \in \mathrm{D}_f, f(x) = \frac{\sum a_{i,j}\sin^i(x)\cos^j(x)}{\sum b_{k,l}\cos^k(x)\sin^l(x)}$$

On écrit alors formellement le changement de variable $t = \tan(x/2)$ en espérant que l'intervalle d'intégration le permette (sinon, il faut découper). Celui-ci implique avec beaucoup de guillemets

$$x = 2\arctan(t) \quad \text{et} \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

On a alors

$$\int^y f(x)dx = \int^{\tan(y/2)} f(2\arctan(t))\frac{2}{1+t^2}dt$$

Or rappelons (voir chapitre 2) qu'on dispose des expressions suivantes :

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

On se retrouve alors à déterminer une primitive sous la forme

$$\int^y f(x)dx = \int^{\tan(y/2)} \frac{\sum a_{i,j}(\frac{1-t^2}{1+t^2})^i(\frac{2t}{1+t^2})^j}{\sum b_{k,l}(\frac{1-t^2}{1+t^2})^k(\frac{2t}{1+t^2})^l}\frac{2}{1+t^2}dt$$

Ainsi, il s'agit de déterminer une primitive d'une fraction rationnelle, puis de la composer avec $u \mapsto \tan(u/2)$.
Il existe bien d'autres méthodes, via d'autres linéarisation, ou des changements de variables $u = \cos(t)$ ou $u = \sin(t)$ mais ceux-ci ne fonctionnent pas toujours. Tout cela est couvert par ce qu'on appelle les règles de Bioche, mais que nous ne détaillerons pas ici.

Exemple 9 *Calcul de* $\int \frac{dt}{\sin(t)}$. *On propose le changement de variable* $u = \cos(t)$, *qui entraîne* $du = -\sin(t)dt$ *et*

$$\begin{aligned}\int^x \frac{dt}{\sin(t)} &= \int^x \frac{\sin(t)dt}{\sin^2(t)}\\ &= \int^{\cos(x)} \frac{-du}{1-u^2}\\ &= \frac{1}{2}\int^{\cos(x)}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du\\ &= \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right]^{\cos(x)}\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}\right)\\ &= \ln|\tan(x/2)|\end{aligned}$$

Exercice 3 *Calculer une primitive de* $t \mapsto \frac{\tan(t)}{1+\sin(3t)}$ *via le changement de variable* $u = \sin(t)$.

1.7 Fractions exponentielles

Le calcul de $\int \mathrm{R}(e^{ax})dx$ avec a non nul revient à celui de $\int \mathrm{R}(u)\frac{du}{au}$ via le changement de variable $u = e^{ax}$. On se ramène ainsi à une fraction rationnelle.

Exemple 10 *Calcul de* $\int \frac{e^{2x}+4e^x}{e^{2x}+4}dx$. *On propose le changement de variable* $u = e^x$ *qui entraîne* $du = e^x dx$ *et*

$$\int^y \frac{e^{2x}+4e^x}{e^{2x}+4}dx = \int^{e^x}\frac{u+4}{u^2+4}du = \frac{1}{2}\int^{e^y}\frac{2u}{u^2+4}+4\int^{e^y}\frac{1}{u^2+4}du = \frac{1}{2}\left[\ln(u^2+4)\right]^{e^y}+2\left[\arctan(u/2)\right]^{e^y}$$

Donc

$$\int^y \frac{e^{2x}+4e^x}{e^{2x}+4}dx = \frac{1}{2}\ln(e^{2y}+4)+2\arctan(e^y/2)$$

1.8 Fonctions à valeurs complexes

Beaucoup de primitives indiquées dans le catalogue ou découlant des changements de variables précédents sont à valeurs en général réelles. Lorsqu'on reconnaît $u'\exp(u)$ avec $u : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$, on peut directement utiliser $\exp(u)$ comme primitive. De manière plus générale, que faire lorsque f comporte une partie imaginaire non nulle ? On sépare proprement $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ et on primitive les deux séparément.

Exemple 11 *Calcul* $\int^x \frac{dt}{t-i}$. *Ceux qui osent dire* $\ln(x-i)$ *prennent un banissement à vie! On commence par écrire*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{1}{t-i} = \frac{t+i}{|t-i|^2} = \frac{t}{t^2+1} - i\frac{1}{t^2+1}$$

On en déduit par linéarité de l'intégrale que

$$\int^x \frac{dt}{t-i} = \int^x \frac{t}{t^2+1}dt - i\int^x \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - i\arctan(x)$$

Exercice 4 *On note* $j = e^{2i\pi/3}$. *Calculer une primitive de* $\mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto \frac{1}{t-j}$.

✎ Méthode

Que retient-on de ce bestiaire gigantesque pour primitiver une fonction f ?

— *Reconnaît-on une forme du catalogue de primitives ?*
— *Reconnaît-on une composée du catalogue de primitives ?*
— *Peut-on faire un changement de variable pour se ramener à une forme connue ? Les changements de variable affine, inverse, exponentielle,* $\tan(t/2)$ *sont à votre initiative.*
— *S'il s'agit d'une fraction rationnelle, on essaye de faire descendre le degré des dénominateurs via une IPP ou de décomposer en somme de fractions rationnelles.*
— *Prêter attention aux domaines d'intégration, en particulier si les fonctions sont à valeurs complexes.*

2 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ et $b : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ deux applications continues. On note dans tout ce qui suit

$$(\mathrm{E}) \qquad y' + ay = b.$$

On appelle solution de (E) toute fonction f dérivable de I dans $\mathbb{C}$ telle que

$$\forall x \in \mathrm{I}, f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$$

L'équation (E) d'inconnue y est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre. On note également

$$(\mathrm{E}_h) \qquad y' + ay = 0$$

Cette équation différentielle linéaire du premier ordre est appelée l'équation homogène associée à (E). On dit parfois qu'on intègre cette équation différentielle lorsqu'on recherche ses solutions.

2.1 Structure des solutions

Propriété 4 (Solutions de l'équation homogène) *Soit* A *une primitive de a. Alors une foncton* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ *dérivable est solution de* (E_h) *si et seulement si*

$$\exists c \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathrm{I}, f(x) = c\exp(-\mathrm{A}(x))$$

Démonstration. Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ dérivable. On note $g = f\exp(\mathrm{A})$. Alors g est dérivable par produit et composition de fonctions dérivables et

$$\forall x \in \mathrm{I}, g'(x) = f'(x)\exp(\mathrm{A}(x)) + f(x)(a(x))\exp(\mathrm{A}(x)) = (f'(x) + a(x)f(x))\exp(\mathrm{A}(x))$$

Comme l'exponentielle ne s'annule jamais, on l'équivalence f solution de (E_h) ssi $g' = 0$. Comme I est un intervalle, ceci équivaut à g constante. En conclusion, f solution de (E_h) équivaut à $\exists c \in \mathbb{C}, f\exp(\mathrm{A}) = c$ soit encore $\exists c \in \mathbb{C}, f = c\exp(-\mathrm{A})$ puisque l'exponentielle ne s'annule jamais.

Propriété 5 (Structure des solutions de l'équation avec second membre) *Avec les mêmes notations que précédemment, soit p une solution (dite particulière) de* (E)*. L'ensemble des solutions de* (E) *est*

$$\{p + c\exp(-\mathrm{A}) | c \in \mathbb{C}\}$$

Démonstration. Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ dérivable. Posons $g = f - p$. Alors g est dérivable comme différence de fonctions dérivables et

$$g' + ag = f' - p' + af - ap = f' + af - b$$

puisque p est solution de (E). On en déduit l'équivalence f est solution de (E) ssi g est solution de (E) ssi $\exists c \in \mathbb{C}, g = ce^{-\mathrm{A}}$ ssi $\exists c \in \mathbb{C}, f = p + ce^{-\mathrm{A}}$.

Exemple 12 *On choisit $a : t \mapsto \frac{t}{t+2}$ bien définie pour tout réel $t \in [-2, +\infty[= \mathrm{I}$. Résolvons l'équation différentielle homogène $y' + ay = 0$. D'après le résultat précédent, il suffit de déterminer une primitive de a. Il suffit de décomposer a via $\forall t \in \mathrm{I}, a(t) = 1 - \frac{2}{t+2}$, ce qui amène à définir $\forall t \in \mathrm{I}, \mathrm{A}(t) = t - 2\ln(t+2)$. Ainsi, les solutions de cette équation différentielle sont les applications de la forme*

$$\mathrm{I} \to \mathbb{C}, t \mapsto c\exp[t - 2\ln(t+2)] = ce^{-t}(t+2)^2$$

Propriété 6 *Soit x_0 un élément de* I*. Alors $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ est solution de* (E) *si et seulement si*

$$\exists c \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathrm{I}, f(x) = c\exp(-\mathrm{A}(x)) + \exp(-\mathrm{A}(x)) \int_{x_0}^{x} b(t)\exp(\mathrm{A}(t))dt$$

Démonstration. Il suffit de vérifier que le second terme, notons-le p, de la somme est une solution particulière de (E). On note B le terme intégral qui définit une application dérivable puisque b et $\exp(-\mathrm{A})$ sont continues. Alors $\exp(-\mathrm{A})\mathrm{B}$ est dérivable par produit de fonctions dérivables et

$$p' = -\mathrm{A}'\exp(-\mathrm{A})\mathrm{B} + \exp(-\mathrm{A})\mathrm{B}' = -a\exp(-\mathrm{A}) + \exp(-\mathrm{A})b\exp(\mathrm{A})$$

d'après le théorème fondamental de l'intégration. Ainsi, $p' = -a\exp(-\mathrm{A})\mathrm{B} + b = -ap + b$, donc p est solution particulière de (E).

Définition 2 *Soit x_0 un élement de* I *et y_0 un complexe. On appelle problème de Cauchy l'ensemble des critères*

$$y(x_0) = y_0, \quad y' + a(x)y = b(x)$$

Théorème 5 *Pour tout x_0 élément de* I*, complexe y_0, le problème de Cauchy possède une unique solution. Il s'agit de l'application*

$$f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}, x \mapsto y_0\exp(\mathrm{A}(x_0))\exp(-\mathrm{A}(x)) + \exp(-\mathrm{A}(x)) \int_{x_0}^{x} b(t)\exp(\mathrm{A}(t))dt$$

Démonstration. On a déjà caractérisé l'ensemble des solutions en propriété 6. Il suffit alors d'étudier le critère $y(x_0) = y_0$. La forme générale des solutions amène alors

$$c\exp(-\mathrm{A}(x_0)) + \exp(-\mathrm{A}(x_0)) \times \int_{x_0}^{x_0} b(t)\exp(\mathrm{A}(t))dt = c\exp(-\mathrm{A}(x_0))$$

Par conséquent, une solution vérifie le critère $y(x_0) = y_0$ si et seulement si $c\exp(-\mathrm{A}(x_0)) = y_0$, i.e $c = y_0\exp(\mathrm{A}(x_0)$ puisque l'exponentielle ne s'annule pas. Ceci prouve l'unicité. L'existence résulte de la propriété 6 et de la vérification immédaite $f(x_0) = y_0$.

Exemple 13 *Résoudre le problème de Cauchy : $y' + y/t = e^t, y(1) = 0$ sur un intervalle que l'on déterminera. On dispose de la primitive $\mathrm{A} : t \mapsto \ln(t)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Il reste à primitiver $t \mapsto e^t\exp(\ln(t)) = te^t$. Une intégration par parties fournit*

$$\int^{x} te^t dt = xe^x - \int^{x} e^t dt = xe^x - e^x$$

Les solutions générales sont donc de la forme $t \mapsto \frac{c}{t^2} + (te^t - e^t)e^{-\ln(t)}$. L'évalution en 1 impose $c = 0$, donc l'unique solution est l'application $t \mapsto e^t - e^t/t$.

2.2 Méthodes d'intégration

Variation de la constante : L'idée pour chercher une solution particulière p de (E) est de la chercher sous la forme $c(x)\exp(-\mathrm{A}(x))$, ce qui amène à

$$\forall x \in \mathrm{I}, c'(x) = b(x)\exp(\mathrm{A}(x))$$

et donc à rechercher des primitives de $b\exp(\mathrm{A})$. Cette méthode est validée par le théorème de structure des solutions.
Superposition : La fonction b est parfois lourde à manipuler, on peut exploiter le fait que pour toutes fonctions b_1, b_2 telles que $b_1 + b_2 = b$, pour toutes solutions y_1 de $y' + ay = b_1$, y_2 de $y' + ay = b_2$, alors $y_1 + y_2$ est solution de (E).

Exercice 5 *Trouver des solutions particulières de $y' - 2xy = e^{x+x^2}$.*

Dans certains cas particuliers, on connaît déjà la forme des solutions particulières (car on connaît déjà les formes des primitives associées via des IPP)

— a constante non nulle, b polynomiale. On peut chercher les solutions particulières sous forme polynomiale de même degré.

— a constante nulle, b polynomiale de degré n. On peut chercher les solutions particulières sous forme polynomiale de degré $n+1$.

— $b : x \mapsto e^{\alpha}x$ et a constante différente de $-\alpha$. On peut chercher les solutions particulières sous la forme $x \mapsto c_0 e^{\alpha x}$.

— $b : x \mapsto e^{\alpha}x$ et a constante égale à $-\alpha$. On peut chercher les solutions particulières sous la forme $x \mapsto c_0 x e^{\alpha x}$.

— a constante et $b : x \mapsto \cos(\omega x + \varphi)$ avec ω non nul. On peut chercher les solutions particulières sous la forme $c_0 \cos(\omega x + \psi)$.

Exemple 14 *Un exemple d'équation différentielle non résolue. On recontre parfois des équations différentielles du premier ordre de la forme $\alpha y' + \beta y = \delta$ avec $\alpha : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$, $\beta : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ et $\delta : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ des fonctions continues. Si la fonction α ne s'annule pas, on est ramené au cas du cours via $a = \beta/\alpha$ et $b = \delta/\alpha$. Sinon, on dit que l'équation différentielle est non résolue. Prenons l'équation différentielle*

$$(\mathrm{E}) x^2 y' + y = 1$$

On l'intègre séparément sur deux sous intervalles de $\mathbb{R}$: $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ via l'équation différentielle $(\mathrm{E}_r) y' + y/x^2 = 1/x^2$. On doit alors considérer $a : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/x^2$ dont on peut déterminer une primitive, à savoir $\mathrm{A} : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto -1/x$. On remarque de plus que $x \mapsto 1$ est une solution particulière. Réunissons tout ceci : soit f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable solution de $\mathbb{R}$. Alors $f_{|\mathbb{R}^{+*}}$ est solution de (E_r), donc

$$\exists a \in \mathbb{R}, \forall x > 0, f(x) = 1 + ae^{-1/x}$$

De même, $f_{|\mathbb{R}^{-*}}$ est solution de (E_r) donc

$$\exists b \in \mathbb{R}, \forall x < 0, f(x) = 1 + be^{-1/x}$$

Il faut à présent utiliser la régularité de f en 0 pour obtenir des contraintes sur a et b. Tout d'abord, on constate que $\lim\limits_{x\to 0^-} \exp(-1/x) = +\infty$, donc que la continuité de f en 0 implique $b = 0$. D'autre part, les croissances comparées semblent assurées que f est dérivable à droite en 0 pour toute valeur réelle de a. On passe alors à la synthèse.
Soit a un réel et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 1$ si $x \leq 0, 1 + a\exp(-1/x)$ si $x > 0$. Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. D'autre part, pour tout réel $x > 0$,

$$g'(x) = a\frac{1}{x^2}\exp(-1/x)$$

et $\lim\limits_{x\to 0^+} g'(x) = 0$ par croissances comparées. Le théorème de la limite de la dérivée (que nous verrons plus tard dans l'année) assure alors que g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$. Il reste à alors vérifier que g vérifie (E), ce qui ne pose pas problème sur $\mathbb{R}^*$ d'après les calculs précédents. En 0, il s'agit d'une vérification $0 \times 0 + 1 = 1$.

3 Équations différentielles linéaires du second ordre

Soit a et b deux complexes, puis f une fonction $\mathrm{I} \to \mathbb{C}$ d'un intervalle réel I dans $\mathbb{C}$ continue. On note

$$(\mathrm{E}) \qquad y'' + ay' + by = f(x)$$

Une solution de E est une fonction $g : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ deux fois dérivable telle que

$$\forall x \in \mathrm{I}, g''(x) + ag'(x) + bg(x) = f(x)$$

L'équation (E) d'inconnue y est appelée équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. On lui associe l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants

$$(\mathrm{E}_h) \qquad y'' + ay' + by = 0$$

appelée équation homogène associée.

3.1 Structure des solutions

Propriété 7 *Soit g et h deux solutions de* (E). *Alors $g - h$ est solution de* (E_h).

Démonstration. $g - h$ est alors deux fois dérivable et $g'' + ag' + bg = f = h'' + ah' + bh$, ce qui entraîne par linéarité de la dérivation $(g-h)'' + a(g'-h') + b(g-h) = 0$, donc $g - h$ solution de (E_h).

Propriété 8 *Soit p une solution particulière de* (E). *Alors l'ensemble des solutions de* (E) *est*

$$\{p + g | g \text{ solution de } (\mathrm{E}_h)\}$$

Démonstration. Soit h une fonction deux fois dérivable solution de (E), alors $h - p$ est solution de (E_h) d'après ce qui précède. Donc, en posant $g = h - p$, on a bien $h = p + g$ avec g solution de (E_h). Réciproquement, si g est solution de (E_h) alors, $p + g$ est deux fois dérivable et

$$(p+g)'' + a(p+g)' + b(p+g) = (p'' + ap' + bp) + (g'' + ag' + bg) = f + 0 = f$$

donc $p + g$ est solution de (E).

Définition 3 *Le polynôme caractéristique de l'équation* (E_h) *est le polynôme* $\mathrm{X}^2 + a\mathrm{X} + b$.

Avant d'établir l'ensemble des solutions homogènes, on détaille un résultat sur les sommes d'exponentielles.

Lemme 1 *Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\lambda \neq \mu$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. On suppose que*

$$\forall x \in \mathrm{I}, \alpha e^{\lambda x} + \beta e^{\mu x} = 0$$

Alors $\alpha = 0$ et $\beta = 0$. On dit que la famille de fonctions $\left(x \mapsto e^{\lambda x}, x \mapsto e^{\mu x}\right)$ est libre.

Démonstration. Comme l'exponentielle ne s'annule jamais, on peut écrire

$$\forall x \in \mathrm{I}, \alpha = -\beta e^{(\mu - \lambda)x}$$

Il s'agit d'une égalité de fonctions dérivables sur I, ce qui entraîne par dérivation

$$\forall x \in \mathrm{I}, 0 = -\beta(\mu - \lambda)e^{(\mu-\lambda)x}$$

Comme $\lambda \neq \mu$ et l'exponentielle ne s'annule jamais, on en déduit $\beta = 0$, puis $\alpha = 0$.

Théorème 6 (Solutions homogènes à valeurs complexes) *Soit λ et μ les racines de* P, *i.e deux complexes tels que* $\mathrm{P} = (\mathrm{X} - \lambda)(\mathrm{X} - \mu)$. *Alors*

— *Premier cas $\lambda \neq \mu$: Les solutions de (E_h) sont de la forme*

$$x \mapsto \alpha e^{\lambda x} + \beta e^{\mu x}$$

On dit alors que $(x \mapsto e^{\lambda x}, x \mapsto e^{\mu x})$ forme un système fondamental de solutions de (E_h).

— *Deuxième cas $\lambda = \mu$: Les solutions de (E_h) sont de la forme*

$$x \mapsto (\alpha + \beta x) e^{\lambda x}$$

On dit alors que $(x \mapsto e^{\lambda x}, x \mapsto x e^{\lambda x})$ forme un système fondamental de solutions de (E_h).

Démonstration. On considère une fonction $g : I \to \mathbb{C}$ deux fois dérivable et on note alors $h : I \to \mathbb{C}, x \mapsto g(x)\exp(-\lambda x)$. Alors h est deux fois dérivable comme produit de fonctions deux fois dérivables et

$$\forall x \in I, h'(x) = (g'(x) - \lambda g(x))\exp(-\lambda x) \quad \text{et} \quad h''(x) = (g''(x) - 2\lambda g'(x) + \lambda^2 g(x))\exp(-\lambda x)$$

En particulier,

$$\forall x \in I, h''(x) + (\lambda - \mu)h'(x) = (g''(x) + ag'(x) + bg(x))e^{-\lambda x}$$

Comme l'exponentielle ne s'annule jamais, on en déduit que g est solution de (E_h) si et seulement si h' est solution de $y' + (\lambda - \mu)y = 0$. Or on connaît les solutions de cette dernière équation différentielle. Ainsi, g est solution de (E_h) si et seulement si $\exists \gamma \in \mathbb{C}, \forall x \in I, h'(x) = \gamma e^{(\mu - \lambda)(x)}$. C'est alors qu'on distingue deux cas.

— Premier cas $\lambda = \mu$. Les primitives des fonctions constantes entraînent que g est solution de (E_h) si et seulement si $\exists \gamma \in \mathbb{C}, \exists \alpha \in \mathbb{C}, \forall x \in I, h(x) = \alpha + \gamma x$. Comme l'exponentielle ne s'annule jamais, on a alors g est solution de (E_h) si et seulement si $\exists \gamma \in \mathbb{C}, \exists \alpha \in \mathbb{C}, \forall x \in I, g(x) = (\alpha + \gamma x)e^{\lambda x}$.

— Deuxième cas $\lambda \neq \mu$. Alors, on sait primitiver $x \mapsto e^{(\mu - \lambda)x}$. Ainsi, g est solution de (E_h) si et seulement si $\exists \gamma \in \mathbb{C}, \exists \alpha \in \mathbb{C}, \forall x \in I, h(x) = \alpha + \frac{\gamma}{\mu - \lambda} e^{(\mu - \lambda)x}$. Comme l'exponentielle ne s'annule jamais, g est solution de (E_h) si et seulement si $\exists \beta \in \mathbb{C}, \exists \alpha \in \mathbb{C}, \forall x \in I, g(x) = \alpha e^{\lambda x} + \beta e^{\mu x}$.

Théorème 7 (Solutions homogènes à valeurs réelles dans le cas $(a, b) \in \mathbb{R}^2$) *On suppose ici que a et b sont des réels. On note alors $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant du polynôme $X^2 + aX + b$. La structure des solutions **à valeurs réelles** est alors la suivante :*

— *Si $\Delta > 0$, alors, en notant λ et μ les racines réelles de $X^2 + aX + b$, les solutions de (E_h) sont de la forme*

$$x \mapsto Ae^{\lambda x} + Be^{\mu x} \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

— *Si $\Delta = 0$, alors en notant λ l'unique racine de $X^2 + aX + b$, les solutions de (E_h) sont de la forme*

$$x \mapsto (A + Bx)e^{\lambda x} \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

— *Si $\Delta < 0$, alors les racines complexes λ et μ sont conjuguées. On note alors $\lambda = \delta + i\omega = \overline{\mu}$ avec $(\delta, \omega) \in \mathbb{R}^2$. Les solutions de (E_h) sont alors de la forme*

$$x \mapsto Ae^{\delta x}\cos(\omega x) + Be^{\delta x}\sin(\omega x) \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

ou encore

$$x \mapsto Ae^{\delta x}\cos(\omega x + \varphi) \quad \text{avec} \quad (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2$$

Démonstration. Soit S une solution réelle de (E_h).

— Dans le cas où le discriminant est strictement positif, les racines λ et μ sont réelles. On dispose de complexes α, β tels que

$$\forall x \in I, S(x) = \alpha e^{\lambda x} + \beta e^{\mu x} = \overline{\alpha e^{\lambda x} + \beta e^{\mu x}} = \overline{\alpha} e^{\lambda x} + \overline{\beta} e^{\mu x}$$

car λ et μ sont réelles. On en déduit

$$\forall x \in I, (\alpha - \overline{\alpha})e^{\lambda x} + (\beta - \overline{\beta})e^{\mu x} = 0$$

Comme $\lambda \neq \mu$, on peut appliquer le lemme de liberté précédent, ce qui entraîne $\alpha = \overline{\alpha}$ et $\beta = \overline{\beta}$. Ainsi, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

— Dans le cas du discriminant nul, on dispose de complexes α, β tels que

$$\forall x \in \mathrm{I}, \mathrm{S}(x) = (\alpha + \beta x)e^{\lambda x} = \overline{(\alpha + \beta x)e^{\lambda x}} = (\overline{\alpha} + \overline{\beta}x)e^{\lambda}x$$

puisque λ est réel. On en déduit puisque l'expoenentielle ne s'annule pas

$$\forall x \in \mathrm{I}, (\alpha - \overline{\alpha}) + (\beta - \overline{\beta})x = 0$$

Il s'agit d'une fonction polynomiale nulle sur un intervalle réel ni vide, ni réduit à un point. Par conséquent, ses coefficients sont nuls, i.e $\alpha = \overline{\alpha}$ et $\beta = \overline{\beta}$. On en déduit que $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

— Dans le cas où le discriminant est strictement négatif, on reprend les notations du théorème. On dispose de complexes α, β tels que

$$\forall x \in \mathrm{I}, \mathrm{S}(x) = \alpha e^{\delta x} e^{i\omega x} + \beta e^{\delta x} e^{-i\omega x} = \overline{\alpha e^{\delta x} e^{i\omega x} + \beta e^{\delta x} e^{-i\omega x}} = \overline{\alpha} e^{\delta x} e^{-i\omega x} + \overline{\beta} e^{\delta x} e^{i\omega x}$$

On en déduit, comme l'exponentielle ne s'annule jamais

$$\forall x \in \mathrm{I}, (\alpha - \overline{\beta})e^{i\omega x} + (\beta - \overline{\alpha})e^{-i\omega x} = 0$$

Comme les racines sont non réelles, $\omega \neq 0$, donc $\omega \neq -\omega$. Le lemme de liberté des exponentielles entraîne alors $\alpha = \overline{\beta}$. On pose alors $\mathrm{A} = \mathfrak{Re}(\alpha)/2$ et $\mathrm{B} = -\mathfrak{Im}(\alpha)/2$, qui sont bien deux réels et entraînent

$$\forall x \in \mathrm{I}, \mathrm{S}(x) = e^{\delta x}(\mathrm{A}\cos(\omega x) + \mathrm{B}\sin(\omega x))$$

Réciproquement, toutes ces formes sont bien à valeurs réelles, deux fois dérivables et solutions de (E_h).

☞ **Remarque**
Dans le cas $\Delta < 0$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a une expression directe de δ et ω. Les racines complexes de $\mathrm{X}^2 + a\mathrm{X} + b$ sont alors $(-a \pm i\sqrt{4b - a^2})/2$, i.e $\delta = -a/2$ et $\omega = \sqrt{-\Delta}/2 = \sqrt{4b - a^2}/2$.

Exemple 15 *Les solutions de $y'' - y' - y = 0$ sont de la forme $x \mapsto \alpha e^{\Phi x} + \beta e^{x/\Phi}$ avec $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$. Les solutions de $y'' + y' + y = 0$ amènent à l'étude des racines du polynôme $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$, qui valent $(1 \pm i\sqrt{3})/2$. Les solutions sont donc de la forme $x \mapsto \alpha e^{(1+i\sqrt{3})x/2} + \beta e^{(1-i\sqrt{3})x/2}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Parmi ces solutions, on peut chercher celles qui sont à valeurs réelles. D'après le théorème précèdent, elles sont de la forme $x \mapsto a e^{x/2}\cos(\sqrt{3}x/2) + b e^{x/2}\sin(\sqrt{3}x/2)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.*

Définition 4 *Soit x_0 un élément de I, ainsi que y_0, y_0' deux complexes. On appelle problème de Cauchy l'ensemble des critères*

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', y'' + ay' + b = f$$

Théorème 8 (admis) *Soit x_0 un élément de I, ainsi que y_0, y_0' deux complexes. Alors il existe une unique solution s du problème de Cauchy précédent, i.e une unique fonction deux fois dérivable s de I dans $\mathbb{C}$ telle que*

$$s(x_0) = y_0, s'(x_0) = y_0', \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathrm{I}, s''(x) + as'(x) + bs(x) = f(x)$$

Démonstration. Vue en deuxième année avec les équations différentielles à valeurs matricielles. Examinons toutefois le cas d'un problème de Cauchy homogène. On connaît la structure des solutions via la propriété précédente. Notons (y_1, y_2) un système fondamental de solutions de (E_h) et g une fonction de I dans $\mathbb{C}$ deux fois dérivable. Alors g satisfait le problème de Cauchy si et seulement si

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, g = \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha y_1(x_0) + \beta y_2(x_0) = y_0, \alpha y_1'(x_0) + \beta y_2'(x_0) = y_0'$$

Il s'agit alors de résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$$

Un critère nécessaire et suffisant pour qu'il existe une unique solution à ce système linéaire est $y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0) \neq 0$. Examinons cette quantité dans les deux cas possibles.

— Premier cas : $\mathrm{X}^2 + a\mathrm{X} + b$ possède deux racines distinctes $\lambda \neq \mu$. Alors on choisit $y_1 : x \mapsto e^{\lambda x}$ et $y_2 : x \mapsto e^{\mu x)}$. La quantité précédente vaut alors

$$y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0) = (\mu - \lambda)e^{(\lambda+\mu)x_0}$$

qui est bien non nulle.

— Deuxième cas : Les racines de $X^2 + aX + b$ sont confondues. Alors on choisit $y_1 x \mapsto e^{\lambda x}$ et $y_2 : x \mapsto xe^{\lambda x}$. Alors
$$y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0) = (\lambda x_0 + 1)e^{2\lambda x_0} - \lambda x_0 e^{2\lambda x_0} = e^{2\lambda x_0}$$
est encore non nul.

Ainsi, dans tous les cas, ce système linéaire possède une et une seule solution et le problème de Cauchy associé possède une et seule solution.

3.2 Méthodes d'intégration

Recherche de solutions particulières pour **certaines formes** de f :

— Si f est une fonction polynômiale, on cherche une solution particulière sous forme polynômiale de degré « proche ».

— Si f est de la forme $x \mapsto Ae^{\nu x}$, on recherche les solutions particulières sous la forme $x \mapsto (B + Cx)e^{\nu x}$. Cela ramène l'étude à des études polynomiales et des systèmes linéaires portant sur B et C.

Exemple 16 *Soit* (E) *l'équation différentielle* $y'' - 2y' + y = e^{-x}$. *Le polynôme caractéristique* $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ *est de discriminant nul. On recherche une solution particulière sous la forme* $g : x \mapsto (B + Cx)e^{-x}$ *avec* B *et* C *des constantes. Cette forme est bien entendu dérivable et*
$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (C - B - Cx)e^{-x} \quad \textit{et} \quad g''(x) = (-C + B - C + Cx)e^{-x}$$
Ainsi,
$$\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) - 2g'(x) + g(x) = e^{-x}\left[B - 2C + Cx - 2(C - B - Cx) + (B + Cx)\right] = e^{-x}\left[4B - 4C + 4Cx\right]$$
On en déduit qu'il suffit que $4C = 0$ *et* $4B - 4C = 1$ *pour que g soit une solution particulière de* (E)*, donc* $B = 1/4$ *et* $C = 0$ *suffisent. Ainsi,* $g : x \mapsto e^{-x}/4$ *est solution particulière de* (E)*. Les solutions générales de* (E) *sont donc de la forme* $x \mapsto (a + bx)e^x + e^{-x}/4$ *avec* $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

Variation de la constante Notons λ une racine complexe de $X^2 + aX + b$. On peut rechercher une solution particulière sous la forme $p : x \mapsto \alpha(x)e^{\lambda x}$ avec $\alpha : I \to \mathbb{C}$ deux fois dérivable. Alors
$$\forall x \in I, p''(x) + ap'(x) + bp(x) = (\alpha''(x) + (2\lambda + a)\alpha'(x) + \alpha(\lambda^2 + a\lambda + b))e^{\lambda x} = (\alpha''(x) + (2\lambda + a)\alpha'(x))e^{\lambda x}$$
Ainsi, si α vérifie $\forall x \in I, \alpha''(x) + (2\lambda + a)\alpha'(x) = f(x)e^{-\lambda x}$, on obtiendra une solution particulière p de (E). On est ainsi ramené à l'étude d'une équation différentielle de premier ordre
$$(E_2) y'(x) + (2\lambda + a)y(x) = f(x)e^{\lambda x}$$
et le calcul d'une primitive d'une solution de (E_2) pour déterminer α et ainsi une solution particulière p de (E).

Principe de superposition : Si f est trop lourde à manipuler, on la décompose en somme et on recherche des solutions particulières correspondant à chaque terme, puis on somme ces solutions particulières.

Méthode générale hors programme : On note (y_1, y_2) un système fondamental de solutions de (E_h) (cf plus haut). Les solutions reviennent alors à résoudre le système
$$\begin{cases} \alpha' y_1 + \beta' y_2 & = 0 \\ \alpha' y_1' + \beta' y_2' & = f \end{cases}$$
d'inconnues les fonctions $\alpha : I \to \mathbb{C}, \beta : I \to C$. Ce système linéaire possède toujours (admis) une unique solution (α', β'). On obtient alors à l'aide de primitives (α, β) les solutions générales de (E) sous la forme
$$y = \alpha y_1 + \beta y_2$$