Une étude paramétrique de suite

1 On s'ennuie

1. $u_0 = \alpha > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$. Alors $u_{n+1} = u_n^2/(n+1) > 0$. Le principe de récurrence permet de conclure.

2 Un produit infini

2. Il s'agit d'une somme de suite géométrique de raison $1/\lambda$ différente de 1. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda^k} = \frac{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^{n+1}}}{1 - \frac{1}{\lambda}} = \frac{1 - \lambda^{-n}}{\lambda - 1}$$

3. Comme $\lambda \in]1,2[$, $|1/\lambda| < 1$, donc $\lambda^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $\dfrac{1-\lambda^{-n}}{\lambda-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\lambda-1}$ d'après les opérations sur les limites finies. La suite précédente est donc convergente de limite $1/(\lambda-1)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\ln(k)}{2^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} = \frac{\ln(n+1)}{2^{n+1}} \geq 0$$

Cette suite est donc croissante.

5. On considère la suite w définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^n \ln(n)$. Comme $|\lambda/2| < 1$, les croissances comparées entraînent $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. La définition de la limite avec $\varepsilon = 1 > 0$ fournit alors l'existence d'un entier n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad |w_n - 0| \leq 1$$

soit encore, toutes quantités positives,

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{\ln(n)}{2^n} \leq \frac{1}{\lambda^n}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $n \geq n_0$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} = \sum_{k=1}^{n_0} \frac{\ln(k)}{2^k} + \sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{n_0} \frac{\ln(k)}{2^k} + \sum_{k=n_0}^{n} \frac{1}{\lambda^k} \leq \sum_{k=1}^{n_0} \frac{\ln(k)}{2^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda^k}$$

Or $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente d'après la question 3, donc est bornée, donc est majorée. Posons M un majorant de cette suite. Alors

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{n_0} \frac{\ln(k)}{2^k} + M$$

Ainsi, la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée à partir du rang n_0, donc majorée. Elle est croissante d'après la question 4, donc convergente d'après le théorème de la limite monotone.

7. Notons ℓ la limite de la suite précédente. Soit $n \in \mathbb{N}$. Toutes quantités strictement positives,

$$\ln(p_n) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} k^{2^{-k}}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(k^{2^{-k}}\right) = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\ln(k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}$$

D'après ce qui précède, $\ln(p_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Par continuité de la fonction exponentielle, $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(\ell)$. Comme $\exp(\ell) > 0$, la suite p est convergente et sa limite est un réel strictement positif.

3 Généralités

8. Supposons que u est convergente et notons ℓ sa limite. D'après les opérations sur les limites finies, $u_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^2$, donc $u_n^2/(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ comme suite extraite de u. D'après l'unicité de la limite, $\ell = 0$.
9. $u_{n+1} \leq u_n \iff \dfrac{u_n^2}{n+1} \leq u_n \iff u_n \leq n+1$ car $n+1 > 0$ et $u_n > 0$ d'après la question 1.
10. (a) Procédons par récurrence. L'hypothèse de la question 10 fournit l'initialisation. Soit $n \geq n_0$ tel que $u_{n+1} \leq u_n$. Alors

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{n+2} \leq \frac{u_n^2}{n+2}$$

par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$ et $n+2 > 0$. Donc $u_{n+2} \leq \dfrac{(n+1)^2}{n+2}$ d'après la question précédente appliquée à l'entier n. Ainsi, $u_{n+2} \leq \dfrac{(n+1)(n+2)}{n+2} = n+1$. D'après la question précédente appliquée à l'entier $n+1$, cela entraîne $u_{n+2} \leq u_{n+1}$. D'après le principe de récurrence, $\forall n \geq n_0, u_{n+1} \leq u_n$.

(b) La question précédente montre que u est décroissante à partir d'un certain rang. Comme elle est positive, elle est minorée par 0 donc converge d'après le théorème de la limite monotone. D'après la question 8, sa limite est nécessairement nulle.
11. (a) La question précédente a démontré l'implication $\exists n_0 \in \mathbb{N}, u_{n_0+1} \leq u_{n_0} \Rightarrow u$ convergente . Sa contraposée est u diverge $\Rightarrow \forall n_0 \in \mathbb{N}, u_{n_0+1} > u_{n_0}$. Comme u est supposée divergente, u est strictement croissante, donc croissante.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $u_{n+1} > u_n$. D'après la question 9, cela entraîne $u_n > n+1$. Comme $n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, les théorèmes de comparaison indiquent que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

4 Étude paramétrique

12. On procède par récurrence. Initialisation pour $n = 0$. Alors $f_0 : x \mapsto u_0(x) = x$, donc $f_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+^*}$ est bien continue, croissante et surjective. Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que f_n est croissante continue et surjective. Alors $f_{n+1} = \dfrac{f_n^2}{n+1}$. Or $y \mapsto y^2/(n+1)$ est continue croissante et surjective, donc f_{n+1} l'est aussi par stabilité de l'ensemble de ces fonctions par composition. Le principe de récurrence permet de conclure.
13. Soit $\alpha \in E$ et $\alpha' \in]0, \alpha[$. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la croissance de f_n et la question 1,

$$0 < u_n(\alpha') \leq u_n(\alpha)$$

Or $\alpha \in E$, donc $(u_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. D'après la question 8, cette limite est nulle. D'après le théorème des gendarmes, $u_n(\alpha') \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc est convergente. Ainsi, $\alpha' \in E$. Conclusion, on a l'inclusion $]0, \alpha[\subset E$.

Soit $\beta \in F$ et $\beta' \in]\beta, +\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la croissance de f_n, on a

$$u_n(\beta) \leq u_n(\beta')$$

Or $\beta \in F$, donc $u_n(\beta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ d'après la question 11.b. D'après les théorèmes de comparaison, $u_n(\beta') \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. En particulier, la suite $(u_n(\beta'))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente, donc $\beta' \in F$. Conclusion, $]\beta, +\infty[\subset F$.

14. Supposons l'existence d'un entier n_0 tel que $u_{n_0}(\beta) \geq n_0 + 2$. Montrons que cette inégalité est encore vraie pour tous les entiers suivants par récurrence. Soit $n \geq n_0$ tel que $u_n(\beta) \geq n+2$. Alors

$$u_{n+1}(\beta) = \frac{u_n^2(\beta)}{n+1} \geq \frac{(n+2)^2}{n+1} \geq \frac{(n+2)^2 - 1}{n+1} = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+1)} = n+3$$

Ainsi, $\forall n \geq n_0, u_n(\beta) \geq n+2$. Comme $n+2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, les théorèmes de comparaison entraînent $u_n(\beta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. En particulier, la suite $(u_n(\beta))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, donc $\beta \in F$.

15. Considérons le réel $\alpha = 1$, alors $u_0(1) = 1$ et $u_1(1) = 1^2/(2) = 1/2$. Ainsi $u_0(1) \leq u_1(1)$. On dispose bien d'un entier n_0, à savoir 0 tel que $u_{n_0+1}(1) \leq u_{n_0}(1)$. D'après la question 10, la suite $u(1)$ est convergente, donc $1 \in E$ et E est non vide. D'autre part, le réel $\beta = 2$ vérifie $u_0(2) = 2 \geq 0+2$. D'après la question prédédente, $2 \in F$. D'après la question 13, $]2, +\infty[\subset F$. Par décroissance du complémentaire pour l'inclusion, $E \subset]0, 2]$. En particulier 2 est un majorant de E. Donc la borne supérieure de E est un réel bien défini.

16. Soit $x \in]0, \gamma[$. Alors $x < \gamma$. Or γ est le plus petit des majorants de E, donc x n'est pas un majorant de E. Donc il existe $\alpha \in]x, \gamma[$ tel que $\alpha \in E$. Or $]0, \alpha[\in E$ d'après la question 13. Comme $x \in]0, \alpha[$, $x \in E$. Conclusion, $]0, \gamma[\subset E$.

    Soit $x \in]\gamma, +\infty[$. Alors γ ne majore pas x et γ majore E, donc $x \notin E$, i.e $x \in F$.Conclusion, $]\gamma, +\infty[\subset F$.

17. Supposons $\alpha \in E$. Alors $u(\alpha)$ est convergente, de limite nulle d'après la question 8. D'après la définition de la limite appliquée à la précision $\varepsilon = 1/2$. Il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0, |u_n - 0| < 1/2$. En particulier, $u_{n_0}(\alpha) < 1/2$. La deuxième assertion implique trivialement la troisième. Supposons à présent qu'il existe un entier n tel que $u_n < 1$. Alors $u_{n+1}(\alpha) = u_n(\alpha)\dfrac{u_n(\alpha)}{n+1} \leq u_n$. D'après la question 10, cela entraîne la convergence de la suite $u(\alpha)$, i.e $\alpha \in E$. La chaîne d'équivalences est ainsi démontrée.

18. D'après la question précédente, on dispose d'un entier n tel que $u_n(\alpha) < 1/2$. Or f_n est surjective d'après la question 12, donc il existe un réel strictement positif α' tel que $f_n(\alpha') = 1/2$. Si $\alpha' \leq \alpha$, la croissance de f_n entraîne $1/2 = u_n(\alpha') \leq u_n(\alpha)$ ce qui contraire à l'hypothèse. Par conséquent, $\alpha' > \alpha$. D'autre part, $u_n(\alpha') = 1/2 < 1$. D'après la question précédente, cela suffit à justifier que la suite $u(\alpha')$ est convergente, i.e $\alpha' \in E$.

19. Si γ appartient à E, la question précédente entraîne l'existence d'un élément de E strictement plus grand que γ, ce qui nie le statut majorant de γ par rapport à E. Par conséquent, $\gamma \in F$. Ainsi, $[\gamma, +\infty[\subset F$. Le complémentaire dans $\mathbb{R}_+^*$ fournit alors $E \subset]0, \gamma[$. Comme l'autre inclusion a été établie en question 16, on a l'égalité $E =]0, \gamma[$. Le complémentaire dans $\mathbb{R}_+^*$ entraîne finalement $F = [\gamma, +\infty[$.

5 Détermination de γ

20. Comme v est divergente, la contraposée de la question 14 fournit $\forall n \in \mathbb{N}, v_n > n+1$. Supposons par l'absurde qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_n > n+2$. Or f_n est surjective, donc on dispose d'un réel strictement positif β tel que $u_n(\beta) = n+2$. Mais alors la question 14 entraîne $\beta \in F$. Mais alors $\gamma \leq \beta$ d'après la description de F. Par croissance de f_n, on obtient

$$n+2 < v_n = u_n(\gamma) \leq u_n(\beta) = n+2$$

Cette absurdité entraîne alors $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq n+2$.

21. D'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1+\frac{1}{n} \leq \frac{v_n}{n} \leq 1+\frac{2}{n}$$

Les suites encadrantes tendent toutes deux vers 1. Le théorème d'encadrement entraîne alors la convergente de la suite $(v_n/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers1.

22. Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons tout d'abord que la question 20 entraîne $0 \leq \varepsilon_n \leq 1$.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1} &= n+3-\frac{v_n^2}{n+1} = n+3-\frac{(n+2-\varepsilon_n)}{n+1} \\ &= n+3-\left((n+1)+2(1-\varepsilon_n)+\frac{(1-\varepsilon_n)^2}{n+1}\right) \\ &= 2\varepsilon_n - \frac{(1-\varepsilon_n)^2}{n+1} \geq 2\varepsilon_n - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

23. Imaginons un instant qu'il existe un entier n_0 tel que $\varepsilon_{n_0} \geq \dfrac{1}{n_0+1}$. Ce qui précède entraîne alors $\varepsilon_{n_0+1} \geq \varepsilon_{n_0}$ et a fortiori $\varepsilon_{n_0+1} \geq \dfrac{1}{n_0+2}$. Mais alors une récurrence simple entraîne la croissance de $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir du rang n_0. Comme elle est majorée par 1, elle converge et sa limite ℓ vérifie alors $\ell \geq \varepsilon_{n_0} > 0$. Or le passage à la limite dans l'inégalité $\forall n \in \mathbb{N}, \varepsilon_n \geq 2\varepsilon - 1/(n+1)$ fournit $2\ell \geq \ell - 0$, i.e $\ell \leq 0$. Cette absurdité assure donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \varepsilon_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Le théorème d'encadrement entraîne $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

24. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\frac{u_{n+1}(\alpha)}{u_{n+1}(\gamma)} = \left(\frac{u_n(\alpha)}{u_n(\gamma)}\right)^2$$

Une récurrence banale entraîne alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_n(\alpha)}{u_n(\gamma)} = \left(\frac{u_0(\alpha)}{u_0(\gamma)}\right)^{2^n} = \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{2^n}$$

Comme on sait que $v_n/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, le résultat souhaité en découle.

25. La limite de la question précédente fournit par passage au logarithme (toutes quantités positives)

$$\ln(u_n(\alpha)) - 2^n \ln(\alpha/\gamma) - \ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

soit encore, par croissances comparées ($\ln(n)/2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$)

$$\frac{\ln(u_n(\alpha))}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(\alpha/\gamma)$$

Cette dernière limite est nulle si et seulement si $\alpha = \gamma$.

26. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \frac{\ln(v_{n+1})}{2^{n+1}} - \frac{\ln(v_n)}{2^n} &= \frac{\ln\left(\frac{v_n^2}{n+1}\right)}{2^{n+1}} - \frac{\ln(v_n)}{2^n} \\ &= \frac{2\ln(v_n) - \ln(n+1)}{2^{n+1}} - \frac{\ln(v_n)}{2^n} = -\frac{-\ln(n+1)}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

27. Soit $n \in \mathbb{N}$. Une sommation télescopique dans l'expression précédente fournit

$$\frac{\ln(v_n)}{2^n} - \frac{\ln(v_0)}{2^0} = -\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\ln(j+1)}{2^{j+1}} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}$$

La question précédente fournit la limite $\ln(v_n)/2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(\gamma)$$

La continuité de l'exponentielle entraîne alors

$$\prod_{k=1}^{n} k^{2^{-k}} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$$

Par unicité de la limite,

$$\gamma = \prod_{k=1}^{+\infty} k^{2^{-k}}.$$