Colle 8 filière PCSI Vendredi 28 novembre 2025

⋆⋆⋆

## Planche 1

⋆⋆⋆

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Solutions réelles de $y'' + ay' + by = 0$. Énoncé. Solutions homogènes de $y' + ay = 0$. Énoncé et démonstration.
2. En se ramenant à une équation différentielle d'ordre 2, résoudre $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$.
3. Chercher une solution bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y' + y = \ln(x)$.

⋆⋆⋆

## Planche 2

⋆⋆⋆

1. Énoncer l'inégalité triangulaire en calcul intégral. Solutions complexes de $y'' + ay' + by = 0$. Énoncé et démonstration.
2. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont les solutions réelles sont les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{C + x}{1 + x^2}$, $C \in \mathbb{R}$.
3. Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. Résoudre le système différentiel $x'' = \omega y'$, $y'' = -\omega x'$ d'inconnues $x, y$ deux fois dérivables à valeurs réelles.

⋆⋆⋆

## Planche 3

⋆⋆⋆

1. Donner un exemple de problème de Cauchy. Théorème fondamental du calcul intégral, énoncé général et démonstration dans un cas particulier à préciser.
2. Résoudre l'équation différentielle $y' - \arctan(x)y = 0$.
3. Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $g \geqslant 0$ et que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \leqslant 1 + \int_0^x f(t)g(t)dt$$
Démontrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \leqslant \exp\left(\int_0^x g(t)dt\right)$$

⋆⋆⋆

## Bonus

⋆⋆⋆

Résoudre proprement $y' = \sin(y)$, en admettant l'unicité des problèmes de Cauchy correspondants.