Exercices - Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$, limites et continuité

1 Calculs, opérations

1.1 Quelques limites

Étudier l'existence et la valeur des limites éventuelles suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\exp(\cos(x))$.
2. $\lim_{x\to\pi/3} \frac{\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)}{x-\pi/3}$.
3. $\lim_{x\to2} \frac{x^2-x-2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x^2+2x-4}}$
4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sin(x^2)}{1+x^2}$.
5. $\lim_{x\to+\infty} \cos(x^2)$.
6. $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.
7. $\lim_{x\to0} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.
8. $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^x$.
9. $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{|x^2-3x+2|}}{2x^2-x-1}$.
10. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+4}}$.
11. $\lim_{x\to1} \frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}$.
12. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x}-x$.
13. $\lim_{x\to1} \ln(x)\ln(\ln(x))$.
14. $\lim_{x\to1} \frac{1-x}{\arccos(x)}$.

1.2 Partie entière

On considère la fonction $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor} & \text{si } x\neq0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f.

1.3 Encore la partie entière

On considère la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor & \text{si } x\neq0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

Pour chaque point $x\in\mathbb{R}$, étudier l'existence d'une limite à gauche, d'une limite à droite et la continuité de f en x.

1.4 Limites et prolongements du sinus

1. Montrer que la fonction sin n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que la fonction $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, x\mapsto x^n\sin(1/x)$ est prolongeable par continuité en 0. Préciser son prolongement.
3. La fonction $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, x\mapsto\sin(1/x)$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

1.5

Soit $(f,g)\in\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)^2$ deux fonctions continues. Montrer que $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ sont continues.

1.6 Toujours les entiers

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On pose $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \lfloor x \rfloor + f(x - \lfloor x \rfloor)$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur f, la fonction g est-elle continue ?

2 Équations fonctionnelles

2.1 Équation fonctionnelle de Cauchy ♡

Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

2.2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x^2)$. Montrer que f est constante.

2.3

Déterminer toutes les fonctions continues telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y)f(x - y) = f(x)^2 f(y)^2$.

3 Monotonie

3.1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijective et croissante. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

3.2 Cas particulier de la caractérisation séquentielle

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante. On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\ell \in [-\infty, +\infty]$ telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$. Est-ce encore vrai si f n'est plus supposée croissante ?

3.3

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. On suppose que la fonction $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante. Montrer que f est continue.

4 Lipschitz

4.1 Distance à une partie

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on pose $f(x) = \inf_{x\in A} |x - a|$. Montrer que f est Lipschitzienne.

4.2 Continue, mais pas Lipschitzienne

Montrer que $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas Lipschitzienne.

4.3 ✠

Soit f et g deux fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on pose

$$M(x) = \sup_{t\in[-1,1]} (f(t) + xg(t))$$

Montrer que M est bien définie sur $\mathbb{R}$, puis Lipschitzienne.

4.4 Somme de Riemann alternée

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ lipschitzienne. Montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

5 Valeurs intermédiaires

5.1

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \in [0,1[$. Montrer que f admet un point fixe.

5.2 Brouwer en dimension un

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.

5.3 Connexité

Soit I un intervalle et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $f(\mathrm{I}) \subset \mathbb{Z}$. Montrer que f est constante.

5.4

Soit a, b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. On suppose que $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$. Montrer que f est continue.

5.5 Cordes universelles

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right], f(x_n) = f\left(x_n + \frac{1}{n}\right)$$

5.6 Une définition alternative de $\pi/2$

On admet que $\cos(2) < 0$. En utilisant la continuité du cosinus, démontrer que l'ensemble

$$\mathrm{E} = \{t \in [0,2] \mid \cos(t) = 0\}$$

admet un minimum.

5.7 Valeur moyenne

Soit a, b deux réels tels que $a < b$. Soit f, g deux fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles. On suppose que $g \geq 0$. Montrer que

$$\exists c \in [a,b], \quad \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

5.8

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)^2 = 1$.

6 Bornes atteintes

6.1 Décollement

Soit f, g deux fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall x \in [0,1], 0 < f(x) < g(x)$$

Montrer que

$$\exists \mathrm{C} > 1, \forall x \in [0,1], \mathrm{C}f(x) \leq g(x)$$

6.2

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. On suppose que f est continue et surjective. Montrer que f s'annule une infinité de fois.

6.3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$. Montrer que f possède un minimum global.