Chaque colle comporte une question de cours ainsi qu'un ou plusieurs exercices.

1 Questions de cours.

- Toute définition, tout résultat dans l'ensemble des notions abordées doit être parfaitement su et peut être ajouté aux items suivants.
- Factorisation d'un polynôme P par $X-a$ lorsque $P(a)=0$. Énoncé et démonstration.
- Binôme (de Newton). Énoncé et démonstration.
- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable vérifie $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y)=f(x)+f(y)$ ssi $\exists a\in\mathbb{R}, \forall x\in\mathbb{R}, f(x)=ax$.
- $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ dérivable vérifie $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2, f(xy)=f(x)+f(y)$ ssi $\exists a\in\mathbb{R}, \forall x\in\mathbb{R}, f(x)=a\ln(x)$.
- Dérivabilité et expression des dérivées des fonctions circulaires réciproques. Énoncé et démonstration.

2 Exercices.

Ils peuvent porter sur le chapitre le chapitre 5 : sommes et produits finis et le chapitre 6 : fonctions usuelles.

3 Chapitre 5 : sommes et produits finis

Sommes finies

Notion de somme finie d'une famille de complexes. Expressions factorisées de $\sum_{k=1}^{n} k, \sum_{k=1}^{n} k^2, \sum_{k=1}^{n} k^3$. Linéarité, changement de variable. La rédaction des changements de variables n'est pas rigoureuse, même si les étudiants doivent savoir que cela repose sur la notion de bijection. Somme sur un ensemble vide. Somme télescopique. Factorisation de a^n-b^n par $a-b$. Factorisation d'un polynôme P par $X-a$ lorsque $P(a)=0$. Sommes de suites géométriques, arithmétiques. $\sum_{k=0}^{n}\cos(kx), \sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$. Découpage de sommes, sommes doubles, rectangulaires, triangulaires.

Produits finis et binôme

Notion de produit fini d'une famille de complexes. $\prod_{i=1}^{n} a_i b_i, \prod_{i=1}^{n}\lambda a_i$, produit vide, changement de variable. Produit télescopique. Factorielle d'un entier. Coefficient binomial $\binom{n}{k}$. Symétrie, relation de Pascal. Binôme, application à la linéarisation de $\cos^n(x), \sin^n(x)$, à la mise sous forme polynomiale $\cos(nx)=P(\cos(x))$. Technique de dérivation pour le calcul de somme.

4 Chapitre 6 : fonctions usuelles

4.1 Généralités

Graphe d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Graphe de $x\mapsto f(x+a)$, de $x\mapsto f(bx)$. Restriction du domaine d'étude par périodicité, parité/imparité. Domaine de définition d'une composée. f est bornée ssi $|f|$ est majorée. Opérations sur les limites, opérations sur les dérivées. Dérivabilité d'une fonction réciproque et $(f^{-1})'=1/f'\circ f^{-1}$ en cas de dérivabilité.

4.2 Fonctions polynomiales et rationnelles

Unicité des coefficients d'une fonction polynomiale admise. Dérivabilité, limites à l'aide des termes dominants. Extension aux fonctions rationnelles.

4.3 Logarithme et exponentielle

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable vérifie $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$ ssi $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax$. Logarithme népérien défini via $x \mapsto \displaystyle\int_1^x dt/t$. $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivable vérifie $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, f(xy) = f(x) + f(y)$ ssi $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a\ln(x)$. Variations et limites. Logarithme en base a. Exponentielle définie comme la réciproque du logarithme népérien. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable vérifie $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)f(y)$ ssi $f = 0$ ou $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \exp(ax)$. exp est l'unique solution du problème de Cauchy $y' = y, y(0) = 1$. Variations, limites. Inégalités de convexité/concavité de ln et exp. Fonctions puissances d'exposant réel, propriétés algébriques, variations, limites. Croissances comparées.

4.4 Fonctions hyperboliques

Décomposition en partie paire et impaire d'une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}$ centrée en 0. Cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique sont les parties paire et impaire de exp. Dérivabilité, dérivées, variations, limites. $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$, formules d'addition. Tangente hyperbolique, dérivabilité, dérivée, variations, limites, formule d'addition.

4.5 Fonctions circulaires réciproques

arcsin définie comme réciproque de $\sin_{|[-\pi/2,\pi/2]}^{|[-1,1]}$. Imparité, valeurs remarquables, dérivabilité sur $]-1,1[$, dérivée. arccos définie comme réciproque de $\cos_{|[0,\pi]}^{|[-1,1]}$. Valeurs remarquables, dérivabilité sur $]-1,1[$, dérivée. arctan définie comme la réciproque de $\tan_{|]-\pi/2,\pi/2[}$. Valeurs remarquables, dérivabilité, dérivée, limites.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆