

★★★

## Planche 1

★★★

1. Caractérisation séquentielle de la borne supérieure.
2. Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Déterminer toutes les fonctions  $f$  de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(a - x)$$

3. Pour tout  $x$  dans  $[0, 1[$ , on pose  $f(x) = \int_0^x (1-t^4)^{-1/2} dt$ . Montrer que  $f$  admet une limite  $\sigma$  en 1 et que la fonction ainsi prolongée est une bijection de  $[0, 1]$  dans  $[0, \sigma]$ . Établir la dérivation de sa réciproque et montrer que celle-ci vérifie l'équation différentielle  $y'' + 2y^3 = 0$ .

★★★

## Planche 2

★★★

1. Existence de la borne inférieure d'une partie non vide minorée de  $\mathbb{R}$ . Lien avec la borne supérieure.
2. Déterminer l'ensemble des réels  $x$  vérifiant

$$\cos^4(x) + \sin^6(x) = 1$$

3. Soit  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle définie par  $F_0 = 0, F_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ . Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \arctan \frac{1}{F_{2n+1}} + \arctan \frac{1}{F_{2n+2}} = \arctan \frac{1}{F_{2n}}$$

En déduire la limite de  $\sum_{k=0}^n \arctan \frac{1}{F_{2k+1}}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

★★★

## Planche 3

★★★

1. Caractérisation des parties convexes de  $\mathbb{R}$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(x_1, \dots, x_n)$  et  $(y_1, \dots, y_n)$  deux familles de  $n$  réels. On pose

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \left( \sum_{i=1}^n (x_i + ty_i)^2 \right)$$

En étudiant cette fonction, montrer que

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$$

3. On considère l'équation différentielle  $(E) y' + ay = b$  d'inconnue  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable, où  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont deux fonctions continues. On note  $S$  l'ensemble de ses solutions. Pour toute solution  $f$  de  $(E)$ , on note  $G_f$  son graphe. Montrer que  $(G_f)_{f \in S}$  est une partition de  $\mathbb{R}^2$ .