Exercices - Compléments d'analyse

Cornou Jean Louis

10 septembre 2025

1 Inégalités

1.1 Extension du cours

Parmi les six propriétés satisfaites par la relation $\leq$, lesquelles sont encore vérifiées par la relation $<$? Peut-on adapter les hypothèses des propriétés non conservées ?

1.2 Une inégalité trigonométrique

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$.

1.3 Valeur absolue et racine carrée

Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant chacune des égalités suivantes :

1. $|2x-1| = |3x+1|$.
2. $[2x^2-2x+5| = |-x^2+2x+9|$.
3. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+17} = \sqrt{24-x}$.
4. $\sqrt{1-2x} = |x+7|$.
5. $x|x| = 3x+2$.
6. $\sqrt{5x+6} = 2-3x$.

1.4 Résolution d'inéquations

Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant chacune des inégalités suivantes :

1. $\dfrac{2}{x} < x$.
2. $|x^2-10| \leq 6$.
3. $x+\sqrt{x^2-5x+4} < 2$.
4. $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1} > \dfrac{1}{2}$.
5. $2x+1 < \sqrt{x^2+8}$.
6. $\left(\dfrac{2x}{1-\sqrt{1+2x}}\right)^2 < 2x+9$.
7. $\ln(2x+1) < \ln(4-2x)$.
8. $e^{2+x} \geq 3e^{-x}$.
9. $x+\sqrt{x^2+1} > 0$.

1.5 Racine carrée et valeur absolue

1. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \sqrt{x+y} \leq \sqrt{x}+\sqrt{y}$.
2. En déduire que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, \quad x \geq y \Rightarrow \sqrt{x}-\sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}$.
3. En déduire que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \leq \sqrt{|x-y|}$.

1.6 Sur la partie entière

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer

1. $\lfloor x+p \rfloor$.
2. $\lfloor -x \rfloor$.
3. $\lfloor x+y \rfloor$.
4. $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$.

1.7 Inégalités ✠

1. Soit a, b deux réels. Montrer que

$$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

2. Soit a, b, c trois réels positifs. Montrer que

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq 8abc$$

3. Soit a, b deux réels strictement positifs tels que $a \leq b$. Montrer que

$$\frac{1}{8}\frac{(b-a)^2}{b} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{1}{8}\frac{(b-a)^2}{a}$$

4. Soit a, b, x, y quatre réels strictement positifs tels que $a+b=1$. Montrer que

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} \geq \frac{1}{ax+by}$$

1.8 Une égalité à partir de sommes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n$ une famille de n réels.

1. Montrer que $(\forall i \in [\![1,n]\!] a_i \geq 0) \wedge a_1 + \cdots + a_n = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], a_i = 0$.
2. On suppose que $a_1 + \cdots + a_n = n$ et $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = n$. Montrer que pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, $a_i = 1$.

2 Trigonométrie réelle

Le formulaire de trigonométrie doit être connu par cœur.

2.1 Valeurs exactes

Déterminer les valeurs exactes des quantités suivantes à l'aide de vos formules de trigonométrie.

1. $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
2. $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
3. $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ sans utiliser la première question.

2.2 Racines carrées emboîtées

On définit une suite à valeurs réelles u en posant $u_2 = \sqrt{2}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, u_{n+1} = \sqrt{2+\sqrt{u_n}}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$. En déduire que la suite u converge et préciser sa limite.

2.3 Un système trigonométrique

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer tous les réels x vérifiant les deux égalités :

$$\cos(x) = \cos(nx), \quad \sin(-x) = \sin(nx).$$

2.4

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Simplifier les expressions suivantes :

1. $\cos(x) + \cos(x + 2\pi/3) + \cos(x + 4\pi/3)$.
2. $\cos(x+y)\cos(x) + \sin(x+y)\sin(x)$.
3. $\cos(x+y+z) + \cos(x+y-z) + \cos(x-y+z) + \cos(-x+y+z)$.
4. $\sin^2(x+y) + \cos^2(x-y) - \sin(2x)\sin(2y)$.

2.5 Factoriser

Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser les expressions

1. $\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)$.
2. $\cos(x)-\sin(x)$.
3. $\cos^4(x)-\sin^4(x)$.
4. $\cos(4x)+2\sin(x)\sin(3x)$.
5. $\cos(x)+2\cos(2x)+\cos(3x)$.
6. $\sin(x)+\sin(2x)+\sin(7x)+\sin(8x)$.
7. $\dfrac{\sin(3x)+\sin(x)}{1+\cos(2x)}$.

2.6 Développer

Soit $x\in\mathbb{R}$. Démontrer les égalités suivantes :

1. $\cos(3x)=4\cos^3(x)-3\cos(x)$.
2. $\sin(3x)=\sin(x)\big(4\sin^2(x)-1\big)$.
3. $\cos(4x)=8\cos^4(x)-8\cos^2(x)+1$.
4. $\sin(4x)=\sin(x)\big(8\sin^3(x)-4\sin(x)\big)$.

2.7 Équations trigonométriques

Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant chacune des égalités suivantes

1. $\cos(x)-\cos(2x)=\sin(3x)$.
2. $\cos(5x)+2\cos(3x)+3\cos(x)=0$.
3. $\cos(x)+\sin(x)=\tan(x/2)$.
4. $\tan(x-\pi/4)=\tan(x)$.
5. $\sin(2x+\pi/3)=\cos(x-\pi/4)$.
6. $\cos^3(x)+\sin^2(x)=1$.
7. $\cos(x)-\cos(2x)=\sin(3x)$.
8. $2\sin^2(x)+\sin^2(2x)=2$.
9. $\dfrac{2\sin(x)}{2\cos(2x)-1}=\dfrac{1}{4\cos^2(x)-3}$.
10. $\dfrac{\sin(x)+\sin(3x)+\sin(5x)}{\cos(x)+\cos(3x)+\cos(5x)}=1$.

2.8 Inéquations trigonométriques

Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant chacune des inégalités suivantes

1. $0\leq\dfrac{\tan(x)}{\cos(x)}\leq 1$.
2. $-1\leq\cos^2(x)-\sin(x)-1\leq 0$.
3. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leq\cos^4(x)-\sin^4(x)\leq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
4. $\cos(x)+\sin(x)\leq 0$.

2.9 Étude de fonctions trigonométriques

Étudier les variations et limites éventuelles des fonctions suivantes sur leurs domaines de définition respectifs :

1. $f_1 : x\mapsto\sin(3x)-\cos(x)+\cos(2x)$.
2. $f_2 : x\mapsto\cos(5x)+2\cos(3x)+3\cos(x)$.
3. $f_3 : x\mapsto\cos(x)+\sin(x)-\tan(x/2)$.
4. $f_4 : x\mapsto\tan(x)/\cos(x)$.
5. $f_5 : x\mapsto\cos^2(x)-\sin(x)-1$.
6. $f_6 : x\mapsto\cos^4(x)-\sin^4(x)$.

2.10 Majoration de Huygens

On étudie la fonction $f : x\mapsto 2\sin(x)+\tan(x)-3x$.

1. Justifier que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer sa dérivée.
2. Étudier le signe de la quantité $2x^3-3x^2+1$ pour tout réel x dans l'intervalle $[0,1]$.
3. En déduire que
$$\forall x\in[0,\pi/2[,\quad 2\sin(x)+\tan(x)\geq 3x.$$
4. Cette dernière inégalité est-elle encore vraie pour $x\in]\pi/2,3\pi/2[$?

2.11 Une inégalité de concavité

Montrer que pour tout réel x dans $[0,\pi/2]$, $\sin(x)\geq 2x/\pi$.