Préparer l'entrée en PCSI en mathématiques

Le travail que nous vous proposons pour préparer votre première année de classe prépa est double :

- vous assurer d'une bonne maîtrise du programme du lycée ;
- vous entraîner en calcul.

1 Le programme du lycée

Pour chaque point mentionné dans le programme du lycée ci-après, nous vous demandons de réfléchir à ce qu'il signifie : définition ou énoncé de théorème précis, image mentale, usage que vous pouvez en faire, interactions possibles avec d'autres parties du programme etc. Par exemple :

- «Intervalles de $\mathbb{R}$ » : quelle est la définition d'un intervalle ? comment représenter un intervalle ?
- «Croissance d'une fonction définie sur un intervalle» : quelle est la définition précise de «Croissance» ? Comment montre-t-on qu'une fonction est croissante ? (même si elle n'est pas dérivable)
- démonstration de « Formule de Moivre » : vous représentez-vous la situation ? avez-vous une idée de la preuve en tête ? Etes-vous capable de l'écrire complètement ?
- «Primitive d'une fonction continue» : qu'est-ce qu'une primitive ?

Si vous croisez des points que vous n'avez pas croisés dans votre scolarité, ne paniquez pas, tout sera comblé en début d'année !

Nous insistons sur le concept de **définition** : on ne peut pas se targuer d'être un bon scientifique si l'on ne sait pas de quoi on parle. Nous insistons également sur la **précision des énoncés** de théorèmes que vous devriez connaître : êtes-vous en mesure de citer le fameux TVI, avec toutes ses hypothèses et sa conclusion ?

S'il vous manque des informations et que vous n'avez pas sous la main vos cours de mathématiques du lycée, vous pouvez chercher les définitions et les énoncés précis en ligne à l'aide de sources valables.

1.1 Vocabulaire ensembliste et logique

— utiliser des variables ;

— mobiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fausse ;

— raisonner par disjonctions des cas, par l'absurde ;

— démontrer une propriété par récurrence.

1.2 Inégalités

— Manipulation d'inégalités, addition, multiplication par un réel positif.

— Valeur absolue.

— Intervalle de nombres réels.

— Croissance, décroissance d'une suite, d'une fonction à valeurs réelles.

1.3 Suites

— Suite définie par récurrence.

— Suite arithmétique, géométrique.

— Limite finie ou infinie d'une suite.

— Comportement d'une suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où q est un nombre réel.

— Toute suite croissante majorée (ou décroissante minorée) converge.

1.4 Limites des fonctions

— Limite finie ou infinie d'une fonction en $+\infty$, en $-\infty$, en un point. Asymptote parallèle à un axe de coordonnées.

— Limites faisant intervenir les fonctions de référence étudiées en classe de première : puissances entières, racine carrée, fonction exponentielle.

— Limites et comparaison, théorèmes des gendarmes.

— Opérations sur les limites.

1.5 Dérivation

— Taux de variation, tangente en un point, dérivabilité.

— Opérations sur les dérivées : somme, produit, composée.

— Lien entre le sens de variation d'une fonction dérivable et le signe de sa dérivée.

1.6 Continuité des fonctions d'une variable réelle

— Fonction continue en un point, sur un intervalle. Toute fonction dérivable est continue.

— Image d'une suite convergente par une fonction continue.

— Théorème des valeurs intermédiaires. Cas des fonctions continues strictement monotones.

1.7 Fonctions polynomiales

— Trinôme du second degré, forme canonique.

— Recherche de racines, somme et produit des racines.

1.8 Fonction exponentielle

— exp est l'unique fonction dérivable f telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

— Propriétés algébriques.

— Signe, variation, limites.

1.9 Fonction logarithme

— Fonction logarithme népérien, notée ln, construite comme réciproque de la fonction exponentielle.

— Propriétés algébriques du logarithme.

— Dérivée du logarithme, variations.

— Limites en 0 et en $+\infty$, courbe représentative. Lien entre les courbes représentatives des fonctions logarithme népérien et exponentielle.

— Croissance comparée du logarithme népérien et de $x \mapsto x^n$ en 0 et en $+\infty$.

1.10 Fonctions sinus et cosinus

- Définition géométrique du sinus et du cosinus d'un nombre réel.
- Parité, périodicité, valeurs remarquables.
- Dérivées, variations, courbes représentatives.

1.11 Primitives, équations différentielles

- Équation différentielle $y' = f$. Notion de primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.
- Primitives des fonctions de référence : $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, exponentielle, sinus, cosinus.
- Équation différentielle $y' = ay$, où a est un nombre réel. Équation différentielle $y' = ay + b$.

1.12 Calcul intégral

- Intégrale d'une fonction continue définie sur un segment $[a, b]$. Notation $\int_a^b f(x)dx$.
- Théorème : si f est une fonction continue sur $[a, b]$, alors la fonction F_a définie sur $[a, b]$ par $\mathrm{F}_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.
- Sous les hypothèses du théorème, relation $\int_a^b f(x)dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$ où F est une primitive quelconque de f. Notation $[\mathrm{F}(x)]_a^b$.
- Linéarité, positivité et intégration des inégalités. Relation de Chasles.
- Intégration par parties.

1.13 Combinatoire et dénombrement

- Combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments.
- Factorielle $n!$. Pour $0 \leq k \leq n$, formules $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
- Symétrie. Relation et triangle de Pascal.

1.14 Nombres complexes

- Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Partie réelle et partie imaginaire. Opérations.
- Conjugaison. Propriétés algébriques.
- Formule du binôme dans $\mathbb{C}$.
- Module d'un nombre complexe. Interprétation géométrique. Relation $|z|^2 = z\overline{z}$. Module d'un produit, d'un inverse.
- Arguments d'un nombre complexe non nul. Interprétation géométrique. Forme trigonométrique d'un complexe non nul.
- Exponentielle imaginaire, notation e^{it}. Relation fonctionnelle. Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul.
- Formules d'Euler. Formule de Moivre.

2 La feuille d'exercices de calcul.

Autant le travail sur le programme de lycée peut se faire de façon purement mentale, autant l'entraînement en calcul nécessite **papier et stylo**.

Le but principal de cette (trop longue) feuille d'exercices est de vous entraîner pour gagner en rapidité et surtout en fiabilité dans toute séquence de calculs quelle qu'elle soit : additionner deux fractions, développer un produit, calculer sur les puissances, dériver ou intégrer etc. Cela vous sera bénéfique dans toutes les matières scientifiques !

Pour que votre travail soit pleinement utile, essayez de travailler la rigueur et de concevoir des procédures de contrôle de vos calculs : il faut acquérir des réflexes mathématiques tels que s'assurer avant de prendre un logarithme que la quantité en question est strictement positive, discuter en fonction du signe d'une expression dont on voudrait prendre la racine, évidemment vérifier qu'on ne divise pas par zéro, etc ; quelle formule ou quel résultat de cours vous a permis de passer d'une ligne à une autre, vérifier que votre solution d'une équation est bien solution, vérifier un signe, intégrer la dérivée que vous venez de calculer pour voir si vous retombez bien sur la fonction de départ, etc.

- Il est inutile de traiter l'intégralité des exercices ou des calculs proposés. Privilégiez la qualité à la quantité ! Un travail soigneux de 30 minutes par jour vous apprendra bien plus qu'une errance de 2 heures sans concentration.
- Si les exercices sont regroupés par thème, cela ne signifie pas qu'il faut les traiter tous d'affilée, vous pouvez répartir un thème sur plusieurs séances de travail et travailler en parallèle plusieurs thèmes.
- La trigonométrie est un objet d'étude fondamental en Mathématiques et un outil essentiel du cours de Physique. Elle mérite une attention particulière.
- Vous pouvez répartir votre travail par petites doses étalées tout au long de l'été, vous pouvez également décider d'y consacrer la dernière semaine, ou la dernière quinzaine du mois d'août : peu importe, pourvu que le travail soit fait.
- Enfin, même s'il ne s'agit pas de Mathématiques, n'oubliez pas de lire les oeuvres au programme de Lettres - ce que vous n'aurez pas le temps de faire pendant l'année, et d'entretenir votre niveau de LV1, c'est essentiel !
- Si vous détectez des erreurs, des incohérences ou avez des questions, vous pouvez me joindre à l'adresse jean-louis.cornou@ac-cned.fr

2.1 Mise en jambe

Objectif des premières sections de ce document : remise en forme après la pause estivale. En pratique, traiter un maximum d'exercices de chaque section.

2.1.1 Pour se faire la main

Exercice 1 *Calculer de deux façons*

$$A = \left(-\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + 1\right) - \left(-\frac{4}{3} + \frac{2}{5} - 2\right) + \left(-2 + \frac{5}{3}\right)$$

- *en calculant l'intérieur de chaque parenthèse*
- *en supprimant les parenthèses et en regroupant les termes qui donnent un résultat simple*

Exercice 2 *Soit a, b, c trois réels. Supprimer les parenthèses et les crochets dans les expressions suivantes (les réponses doivent être ordonnées, par exemple selon l'ordre alphabétique).*

- $A = ((a-c)-(a-b)) - ((b-c)-(a+c))$
- $B = (a-b+c)-(2a-3b-4c)+(b-a)$
- $C = [12-(a-b+16)]-[15+(b-a-15)]$
- $D = [(a-b)-(5-a)]+[b-7-(a-3))]$.

Exercice 3 *Simplifier les expressions suivantes :*

$$A = \frac{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}}{\frac{3}{4} - 1}, \quad B = \frac{\frac{5}{6} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{4}{5}}, \quad C = \frac{-3 + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}}{5 + \frac{2}{5} - \frac{2}{3}}$$

Exercice 4 *Soit a et b deux réels. Développer et réduire les expressions suivantes :*

$$A = 5(a^2 - 4b^3) - [9(2a^2 - b^3) - 2(a^2 - 5b^3)], \quad B = 3a^2(2b-1) - [2a^2(5b-3) - 2b(3a^2+1)]$$

2.1.2 Puissances

Le calcul sur les puissances pose des difficultés toutes l'année, en particulier le fameux a^{b^c}. Il est conseillé de travailler cette section plusieurs fois, en répétant le traitement des exercices.

Pour x un réel ou complexe non nul et n un entier naturel, par définition on a :

$$x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ termes}} \quad \text{et} \quad x^0 = 1$$

Règles de calcul : soit x et y deux réels non nuls et m, n deux entiers relatifs.

$$x^m x^n = x^{m+n} \quad \text{et} \quad (xy)^m = x^m y^m$$

$$\frac{1}{x^m} = x^{-m} \quad \text{et} \quad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

Convention usuelle : L'écriture x^{m^n} souffre d'un problème de parenthésage et peut désigner $(x^m)^n$ ou $x^{(m^n)}$. Comme $(x^m)^n = x^{mn}$, on convient habituellement que x^{m^n} désigne $x^{(m^n)}$.

Règle d'écriture : lorsqu'on a un produit de symboles, on n'écrit pas $b \times 2 \times 3 \times a$, encore moins $(b \times 2) \times (a \times 3)$, même au cours d'un calcul. On écrit directement, $6ab$ en respectant l'ordre alphabétique des lettres.

Exercice 5 *Soit a, b, x, y des réels non nuls. Réduire les expressions suivantes*

- $A = (7xy)^3$
- $B = (3x^2y)^2$
- $C = (2a^2b^3)^5$
- $D = \left[\left(-\frac{a}{b}\right)^3\right]^2 \times [(-b)^2]^3$
- $E = xy \times \left(-\frac{2}{3}\right)x^2 \times \frac{3}{4}y^2$
- $F = \frac{2}{7}a^2 \times \left(-\frac{3}{4}\right)xy^3 \times \left(-\frac{2}{5}\right)a^2x$
- $G = \left(-\frac{3}{5}\right)a^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)b^2x \cdot (-x)^4.$
- $H = 4x^3 \cdot (-3y^2) \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)a^2x^2y^5.$

2.1.3 Sommes et produits de polynômes

Ces calculs n'ont absolument aucun intérêt si vous les présentez mal. La règle est de ne jamais écrire une somme de termes en vrac. Présentez par exemple le développement d'un produit de polynômes en utilisant à la fois des lignes et des colonnes, de façon à ce que le calcul soit lisible et le résultat juste.

Les polynômes seront définis dans l'année, mais vous avez déjà manipulé des expressions polynomiales comme $x^2 - 3x + 1$ ou $x - 2x^3 + 1$ où x désigne un nombre réel. Un polynôme doit impérativement être ordonné selon les puissances croissantes (ou décroissantes). Par exemple, on n'écrit pas $x - 2x^3 + 1$, mais $-2x^3 + x + 1$.
Dans tous les exercices de cette section, x, y, a, b désignent des nombres réels.

Exercice 6 *Réduire et ordonner les polynômes suivants :*

- $P(x) = 7x^3 + 8x + 4x - 2x^3 - 5x + 2$
- $Q(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}x - 3x^2 + \frac{x}{6} - \frac{5}{2}x^2 + 5 + 4x^2$
- $S(a) = 4a^2 - \frac{2}{3}a - \frac{2}{5}a^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}a - 5a + \frac{2}{15} - \frac{3}{4}$
- $T(x) = 4x^2 - \frac{7}{2} + \frac{3}{5}x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 - 5 + \frac{3}{2}x^3 + 7 - 2x.$

Somme de polynômes

On considère les polynômes

$$A = 2 - 5x + 4x^3, \quad B = -8x + 4x^2 + 6, \quad C = -2x^3 + 3 + x^2 + 2x$$

Pour calculer la somme A−B+C, on recopie sur trois lignes les polynômes ordonnés en laissant de l'espace pour les puissances manquantes.

$$\begin{array}{ccccccc}
A & = & 4x^3 & & -5x & +2 \\
-B & = & & -4x^2 & +8x & +6 \\
C & = & -2x^3 & +x^2 & +2x & +3
\end{array}$$

L'addition par colonnes donne alors

$$A - B + C = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$$

Exercice 7 *On considère les polynômes*

$$A = 3x^2 - 4x + 5, \quad B = 2x^2 + 4 - 5x, \quad C = 3 - x + 4x^2$$

Former les polynômes suivants :

- $A+B+C$.
- $A+B-C$.
- $A-B+C$.
- $-A+B+C$.

Produit de polynômes

On considère les polynômes

$$A = 3x^3 - 2 + 5x, \quad B = 2x^2 - 4x + 3$$

Pour effectuer le produit AB, on ordonne les polynômes A et B, puis on dispose les calculs comme une multiplication d'entiers à l'école primaire, en réservant de l'espace pour les puissances manquantes.

$$\begin{array}{cccccccc}
AB & = & & & +9x^3 & & +15x & -6 \\
 & & & -12x^4 & & -20x^2 & +8x & \\
 & & +6x^5 & & +10x^3 & -4x^2 & & \\
\hline
 & = & 6x^5 & -12x^4 & +19x^3 & -24x^2 & +23x & -6
\end{array}$$

Exercice 8 *Effectuer les produits suivants, réduire et ordonner les résultats :*

- $A = (4x^5 + 7 - 2x^3)(x^3 - 2x)$
- $B = (5x^3 - 2x)(3x - 4x^2)$
- $C = (7x^4 - 2x^3 + 4x^2)(3x^2 - 5)$
- $D = (2x^2 - 4 + 2x)(x^2 + 5 - 2x)$
- $E = (2x - 7x^2 + 5x^3)(3x - 5x^2 + 8)$.
- $F = \left(\frac{5}{4}x^3 - 2x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{7}{2}x^3 - 2x + \frac{1}{2}\right)$.
- $G = (3x^2 - 1)(x+1)(x-1)$.
- $H = (4x^3 - 7x + 2x^2 + 5)^2$

2.1.4 Calculs de factorielles

Pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on pose $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$. Par convention, $0! = 1$.

Exercice 9 *Simplifier*

$$\frac{12!}{8!}, \quad \frac{12!}{3!10!}, \quad \frac{1}{9!} - \frac{1}{10!}$$

Soit n un entier naturel non nul et k un entier compris entre 0 et n. On définit le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ par la formule

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exercice 10 *Avec les notations ci-dessus, montrer les égalités suivantes :*

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

2.2 Calcul formel

Objectif des paragraphes suivants : développer une aisance en calcul formel : identités remarquables, premier et second degré. En pratique, les identités remarquables sont à connaître et **à reconnaître**, que ce soit pour développer ou factoriser. En mathématiques, on factorise nettement plus souvent qu'on ne développe. Il faut sortir du « tout discriminant » sur les trinômes, les exercices suivants doivent être résolus sans le moindre calcul de discriminant.

2.2.1 Équations polynomiales du premier degré

Rappel : soit a, b, c, d quatre réels tels que b et d sont non nuls. Alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si et seulement si $ad = bc$.

Exercice 11 *Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant les égalités suivantes :*

- $3x = 4$
- $\dfrac{4}{x-3} = 2$
- $\dfrac{2x+3}{x-5} = \dfrac{4}{3}$
- $\dfrac{3}{x-\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}-x}$

2.2.2 Identités remarquables

Soit a, b, c, x des réels.

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$
$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$$

Exercice 12 *Soit a, b, c des réels. Démontrer les égalités*

$$(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$$
$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$
$$a^3+b^3+c^3-3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\big((a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\big)$$

Exercice 13 *Soit a, x, y, des réels. Factoriser*

- $A = x^2-2x+1$
- $B = x^2+x+\dfrac{1}{4}$
- $C = 4x^2-4x+1$
- $D = a^2+4a+4$
- $E = 4x^3+8x^2y+4xy^2$
- $F = (x+y)^3-x^3-y^3$
- $G = (x-y)^3-x^3+y^3$
- $H = x^3+27y^3$
- $J = 8a^3-125$

Exercice 14 *Soit a, x, y, des réels. Compléter les pointillés pour obtenir une expression de la forme* $(T+U)^2$.

- $\mathrm{A} = x^2 + \cdots + 16$
- $\mathrm{B} = x^2 - \cdots + 9a^2$
- $\mathrm{C} = 4x^2 - 4x + \ldots$
- $\mathrm{D} = 9x^2 + 6x + \ldots$
- $\mathrm{E} = x^2 + \cdots + y^4$
- $\mathrm{F} = 4a^2x^2 - \cdots + 1$

Soit q un nombre réel ou complexe et n un entier naturel non nul.

$$\text{Si } q \neq 1, \quad 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\text{Si } q = 1, \quad 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = n + 1$$

Exercice 15 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Calculer les expressions suivantes*

- $\mathrm{A} = 1 + 3 + 9 + \cdots + 3^{2n}$
- $\mathrm{B} = 1 - a^2 + a^4 - a^6 + \cdots + (-1)^n a^{2n}$
- $\mathrm{C} = -1 + 4 - 16 + \cdots + (-1)^{n-1} 4^n$
- $\mathrm{D} = (-5) + (-5)^4 + (-5)^7 + \cdots + (-5)^{3n+1}$

2.2.3 Trinômes réels

Dans cette section, le but est de ne jamais utiliser les formules explicites du discriminant, mais de **développer d'autres complétences** : racines évidentes, somme et produit de racines.

Soit a, b, c trois réels tels que $a \neq 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$. Les réels x vérifiant $ax^2 + bx + c = 0$ sont appelés racines de ce trinôme.

- Il existe exactement deux réels x vérifiant $ax^2 + bx + c = 0$ si et seulement si $\Delta > 0$. Dans ce cas, ils valent respectivement $\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$. Leur somme vaut $\mathrm{S} = -\dfrac{b}{a}$ et leur produit vaut $\mathrm{P} = \dfrac{c}{a}$.
- Il existe exactement un réel x vérifiant $ax^2 + bx + c = 0$ si et seulement si $\Delta = 0$. Dans ce cas, il vaut $-\dfrac{b}{2a}$.
- Enfin, la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est du signe de a sauf entre les racines s'il y en a.

Remarque : Ne passez pas à côté d'éventuelles racines « évidentes ». En effet pour tous réels x, α, β, on a l'égalité : $(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$. Par exemple, si l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ d'inconnue réelle x possède deux solutions α et β, alors leur somme vaut 5 et leur produit 6. Or $6 = 6 \times 1 = 3 \times 2$ et $6 + 1 = 7$ et $3 + 2 = 5$. On obtient ainsi sans calcul de discriminant l'égalité $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ pour tout réels x. Les solutions cherchées sont donc 2 et 3.

Exercice 16 *Soit a un réel. Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant les égalités suivantes :*

- $8x^2 - 6x + 1 = 0$
- $x^2 - 10x + 16 = 0$
- $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{8})x + 4 = 0$
- $x^2 - (a+2)x + 2a = 0$
- $x^2 + (1+\pi)x + \pi = 0$
- $-x^2 + 8x + 6 = 0$
- $8x^2 + 6x + 1 = 0$
- $-x^2 + 6x = 0$
- $3x^2 = 8$
- $169x^2 + 13x - 1 = 0.$
- $x^2 + 4ax + 3a^2 = 0$
- $-12x^2 + 125 = 0$
- $-6x^2 + 7x - 1 = 0$

Exercice 17 *Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant les inéquations ou systèmes d'inéquations suivants :*

- $x^2+1>2x-3$
- $2x-1\leq x^2+4$
- $\dfrac{1}{x-1}<\dfrac{3}{x-2}$
- $\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x-2}\geq 1$
- $(x^2-5x+4)(x^2-4x+3)>0$
- $(x^2-5x+4)(x^2-9x+14)\leq 0$
- $5\leq x^2-14x+50\leq 26$
- $0\leq \dfrac{(x-3)^2}{(x+1)^2}<1.$

2.3 Analyse, premier passage

Dans les parties suivantes, on entre dans l'analyse par des études de signes et des manipulations d'inégalits. En pratique, deux objectifs : la rigueur dans les calculs et une meilleure compréhension de la valeur absolue.

2.3.1 Racines carrées

À retenir : la racine carrée ne prend que des valeurs positives, les quantités conjuguées, l'étude des carrés.

Exercice 18 *Soit $a\in\mathbb{R}$. Simplifier l'écriture des nombres suivants*

- $\sqrt{(-5)^2}$
- $\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}$
- $\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}$
- $\sqrt{(3-a)^2}$

Quantité conjuguée : pour rendre rationnel un dénominateur, on utilise l'idéntité remarquable $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. Ainsi,

$$\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{1}{2+\sqrt{2}}\times\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{4-2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

Exercice 19 *Démontrer les égalités suivantes :*

- $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}$
- $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{2}$
- $\sqrt{4-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$
- $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

2.3.2 Valeurs absolues

Les valeurs absolues sont d'un usage quotidien en analyse. Cette petite section a pour objectif de vous familiariser avec l'interprétation de la valeur absolue comme distance. Si a et b sont des réels vérifiant $|a-b|\leq 1$, cela signifie que la distance entre a et b est inférieure ou égale à 1. Cette notion, ici rafraîchie, sera largement approfondie en Sup.

Soit x un réel. On appelle valeur absolue de x, noté $|x|$, le réel défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Soit a un réel **positif**. On dispose des équivalences

$$|x| = a \iff x^2 = a^2$$

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

$$|x| \geq a \iff x \leq -a \text{ ou } a \leq x$$

Soit y un réel, on a l'équivalence

$$|x| \leq |y| \iff x^2 \leq y^2$$

Remarque : Soit x et y deux réels. L'égalité $|x+y| = |x|+|y|$ n'est pas vraie de manière générale. On dispose seulement de l'inégalité triangulaire : $|x+y| \leq |x|+|y|$.

Exercice 20 *Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant les inégalités suivantes :*

- $|x-3| \leq 4$
- $|2x+1| \geq 5$
- $|x+2| > -5$
- $|x-1| \leq |2x+3|$
- $|-2x+3| \leq 7$

2.3.3 Encadrements

L'analyse se base sur les inégalités et les encadrements. Il faut ici acquérir des **réflexes de rigueur** : le passage à l'inverse est-il licite ou non ? la multiplication membre à membre d'inégalités est-elle licite ou non ? etc. Il faut à **chaque étape de votre calcul, préciser la règle de calcul** utilisée. Par exemple, « la stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ », ce qui vous incite à contrôler si votre inégalité porte bien sur des réels strictement positifs.

Pour minimiser les erreurs de calcul, ne manipuler que des inégalités $<$ ou $\leq$.
Règles de calculs sur les inégalités :

- Addition membre à membre de deux inégalités de même sens.
- Multiplication par $\lambda > 0$ des deux membres d'une inégalité sans en changer le sens, renversement du sens de l'inégalité si $\lambda < 0$.
- Dans une inégalité où les deux membres sont strictement positifs, le passage à l'inverse renverse le sens de l'inégalité.
- Multiplication membre à membre de deux inégalités de même sens entre réels strictement positifs.

Exercice 21 *Soit a et b deux réels. Encadrer $a+b$, ab et a/b sachant que :*

- $3,2 < a < 3,3$ *et* $1,6 < b < 1,7$
- $-3,3 < a < -3,2$ *et* $1,6 < b < 1,7$
- $-3,3 < a < -3,2$ *et* $-1,7 < b < -1,6$

Exercice 22 *Soit x un réel différent de -1.*

- *Démontrer que* $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{1+x}$.
- *En déduire que si $x > -1/2$, on a* $\left|\dfrac{1}{1+x} - (1-x)\right| \leq 2x^2$.

2.4 Analyse, deuxième passage

Objectif : créer des automatismes sur les fonctions usuelles, ce qui nécessite des entraînements répétés. Il faut faire et refaire les calculs avec les fonctions usuelles jusqu'à pouvoir utiliser sans hésitation leur ensemble de définition, leur monotonie, leurs règles de calcul, et surout le LE FORMULAIRE DE TRIGONOMÉTRIE.

2.4.1 Logarithmes et exponentielles

Une section à faire et refaire, tant que vous ne maîtrisez pas sans la moindre hésitation les règles de transformation d'une somme en produit ou d'un produit en somme par les fonctions logarithme et exponentielle.

Il n'est pas question de donner ici les constructions des fonctions exponentielle et logarithme, qui feront l'objet d'un chapitre de cours, mais seulement de rappeler les principales règles de calcul.

La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie pour tous réels a et b strictement positifs

$$\ln(ab)+\ln(a)+\ln(b) \quad \text{et} \quad \ln(1)=0$$

On en déduit

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln(a) \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$$

⚠ **Attention**
Écrire $\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$ *exige d'avoir* $x>0$ *et* $y>0$

La fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$ et vérifie pour tous réels a et b

$$\exp(a+b)=\exp(a)\exp(b) \quad \text{et} \quad \exp(0)=1$$

On en déduit

$$\exp(-b)=\frac{1}{\exp(b)} \quad \text{et} \quad \exp(a-b)=\frac{\exp(a)}{\exp(b)}$$

De plus,

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*, \quad \exp(\ln(x))=x$$
$$\forall y\in\mathbb{R}, \quad \ln(\exp(y))=y$$

Exercice 23 *Simplifier*

$$A=\ln\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^{20}\right)+\ln\left(\left(2-\sqrt{3}\right)^{20}\right)$$
$$B=\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)+\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

Exercice 24 *Simplifier les nombres réels suivants*

$$e^{3\ln(2)}, \quad \ln(\sqrt{e}), \quad \ln(e^{1/3}), \quad e^{-2\ln 3}, \quad \ln(e^{-1/2}), \quad \ln(\sqrt[5]{e})$$

Exercice 25 *Simplifier les expressions suivantes :*

- $A=e^{\ln 3-\ln 2}$
- $B=-e^{-\ln 1/2}$
- $C=e^{-\ln\ln 2}$
- $D=\ln\left(\frac{1}{e^{17}}\right)$
- $F=\ln(\sqrt{e^4})-\ln(\sqrt{e^2})$
- $G=\ln\left(\sqrt{\exp(-\ln e^2)}\right)$
- $H=\exp\left(-\frac{1}{3}\ln(e^{-3})\right)$

Exercice 26 *Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant les inégalités suivantes :*

- $e^{3x-5} \geq 12$
- $1 \leq e^{-x^2+x}$
- $e^{1+\ln x} \geq 2$
- $e^{-6x} \leq \sqrt{e}$

2.4.2 Trigonométrie

Toutes les formules sont à savoir sur le bout des doigts, c'est encore une section **à faire et à refaire** au cours de l'été pour simplifier sans hésiter et sans erreur du type $\sin(3\pi/2+\alpha)$.

Quelques rappels :

- la fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est 2π-périodique, i.e pour tout réel x, $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$ et impaire, i.e pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$.
- la fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est 2π-périodique, i.e pour tout réel x, $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ et paire, i.e pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$.
- $\cos^2 + \sin^2 = 1$

Début du formulaire. Soit a un réel

- $\cos(-a) = \cos(a)$.
- $\cos(\pi - a) = -\cos(a)$.
- $\cos(\pi + a) = -\cos(a)$.
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a)$.
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin(a)$.
- $\sin(-a) = -\sin(a)$.
- $\sin(\pi - a) = \sin(a)$.
- $\sin(\pi + a) = -\sin(a)$.
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos(a)$.
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a)$.

Notation
Soit x et a deux réels. On note $x \equiv a[2\pi]$ lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $x = a + 2k\pi$.

Résolution d'équations trigonométriques. Soit x et a deux réels. On a les équivalences

- $\sin(x) = \sin(a) \iff x \equiv a[2\pi]$ ou $x \equiv \pi - a[2\pi]$.
- $\cos(x) = \cos(a) \iff x \equiv a[2\pi]$ ou $x \equiv -a[2\pi]$.

Par exemple pour résoudre l'équation $\sin(3x) = \sin(x)$ d'inconnue réelle x. On écrit : soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\sin(3x) = \sin(x) \iff 3x \equiv x[2\pi] \vee 3x \equiv \pi - x[2\pi] \iff x \equiv 0[\pi] \vee x \equiv \pi/4[\pi/2]$$

L'ensemble des réels recherchés est donc

$$\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exercice 27 *Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant les égalités suivantes :*

- $\sin(x) = \sin(\pi - 3x)$.
- $\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \sin(3x + \frac{\pi}{2})$.
- $\cos(2x) + \cos(\frac{x}{2})$.
- $\cos(\frac{7\pi}{5} - x) = \cos(\frac{2\pi}{5} + 3x)$.
- $\cos(x) = \sin(\frac{7x}{5})$.
- $\cos(4x) = \sin(7x)$.
- $\sin(\frac{5\pi}{2} - x) + \cos(x) = 0$
- $\sin(2x) + \cos(3x) = 0$

Suite du formulaire. Soit a et b deux réels

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$.

Formules de duplication. Soit a un réel

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$.
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.

Valeurs remarquables.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Exercice 28 *Résoudre les systèmes suivants d'inconnue réelle x*

- $\begin{cases} \sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$
- $\begin{cases} \cos(x) = -\frac{1}{2} \\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

Exercice 29 *En remarquant que* $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4}$, *calculer* $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ *et* $\tan\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 30 *Soit a un réel non congru à 0 modulo $\pi/2$. Simplifier l'expression*

$$\frac{\sin(2a)}{\sin(a)} - \frac{\cos(2a)}{\cos(a)}$$

Exercice 31 *Calculer* $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ *en fonction de* $\sin(x)$ *et* $\cos(x)$ *pour tout réel x. En déduire l'ensemble des réels x vérifiant les égalités suivantes :*

- $\sin(x) + \cos(x) = 1$.
- $\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2}$

Exercice 32 *Déterminer l'ensemble des réels x dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ vérifiant l'inégalité*

$$16\sin^4\left(x + \frac{\pi}{10}\right) \geq 1$$

2.5 Nombres complexes

Fondamentaux en mathématiques, les nombres complexes sont fréquemment utilisés en physique. Cette section comporte un entraînement systématique de calcul.

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes. Alors

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2},\quad \overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$$

$$|z_1|^2=z_1\cdot\overline{z_1}\quad\text{ou encore}\quad |z_1|=\sqrt{z_1\cdot\overline{z_1}}$$

$$\text{Si}\quad z_1\neq 0,\quad \frac{1}{z_1}=\frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2}\quad\text{et}\quad \frac{z_2}{z_1}=\frac{z_2\overline{z_1}}{|z_1|^2}$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \left|z_1^n\right|=|z_1|^n$$

$$\text{Si}\quad z_1\neq 0,\quad \forall n\in\mathbb{Z},\quad \left|z_1^n\right|=|z_1|^n$$

Exercice 33 *Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :*

- $a=(3+4i)(4-3i)$.
- $b=(3-i)^2$
- $c=(2+i\sqrt{3})(2-i\sqrt{3})$
- $d=\dfrac{2}{1+i}$
- $e=\dfrac{1}{3-i\sqrt{2}}$
- $f=\dfrac{1}{i\sqrt{2}-1}$
- $g=\dfrac{2-5i}{3+2i}$
- $h=\dfrac{6+3i}{1-2i}$
- $k=\dfrac{3i}{3+4i}$
- $l=\dfrac{2}{1-2i}+\dfrac{3}{2+i}$
- $m=2i-\dfrac{3}{i-3}$

Nombres complexes de module 1. Soit α,α' des nombres réels et n un entier naturel. Par définition,

$$e^{i\alpha}=\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)$$

Formulaire

$$e^{i\alpha}e^{i\alpha'}=e^{i(\alpha+\alpha')},\quad \frac{1}{e^{i\alpha}}=e^{-i\alpha}=\overline{e^{i\alpha}},\quad \left(e^{i\alpha}\right)^n=e^{in\alpha},\quad \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha'}}=e^{i(\alpha-\alpha')}$$

Exercice 34 *Mettre sous forme algébrique, placer sur un cercle trigonométrique et écrire sous forme trigonométrique $e^{i\alpha}$ les complexes suivants :*

- $a=e^{0i\pi}$
- $b=e^{i2\pi/3}$
- $c=e^{2i\pi}$
- $d=e^{i\pi}$
- $f=e^{-2i\pi}$
- $g=-e^{i\pi/2}$
- $h=e^{-i\pi/2}$
- $j=-e^{i\pi/3}$
- $k=ie^{i\pi/4}$
- $l=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-i\dfrac{1}{2}$
- $m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 35 *On pose $j=e^{2i\pi/3}$.*

- *Montrer que $j^3=1$ puis que $1+j+j^2=0$.*
- *Résoudre l'équation $z^2-z+1=0$ d'inconnue complexe z. On note z_1 l'unique solution de partie imaginaire positive et z_2 l'autre solution.*
- *Montrer que $z_1-1=j$ et $z_2-1=j^2$. En déduire pour tout entier naturel n, z_1 et z_2 sont solutions de $(z-1)^{n+2}+z^{2n+1}=0$*
- *Montrer que $(1+j)^3+(1+j^2)^3=-2$*

2.6 Analyse, troisième passage

Encore de l'analyse : calculs de limites, de dérivées et d'intégrales. Objectif : apprendre à factoriser pour lever une forme indéterminée dans un calcul de limites, appliquer les formules de dérivation, s'entraîner à reconnaître les primitives usuelles.

2.6.1 Calculs de limites

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Si f est bornée et si $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, alors $f(x)g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
Croissances comparées

$$\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0, \quad \frac{e^x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty, \quad x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0.$$

Exercice 36 *Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :*

- $a : x \mapsto e^{-\sqrt{x}}$
- $b : x \mapsto \dfrac{x+7}{4x+3}$
- $c : x \mapsto \dfrac{x^2+5}{x^3-1}$
- $d : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$
- $e : x \mapsto \cos(x^2)e^{-x}$
- $f : x \mapsto \dfrac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}$
- $g : x \mapsto (2+\sin(x))x$

Une technique essentielle pour le calcul de limite est la mise en facteur des termes prépondérants. Considérons $F : x \mapsto \frac{x^5-4x^4+2x^2-30}{x^3+5x-4}$. Pour déterminer sa limite en $+\infty$, on examine le terme prépondérant du numérateur x^5 de limite $+\infty$, au dénominateur c'est le terme x^3 de limite $+\infty$. Pour lever l'indétermination, on écrit pour tout réel x

$$F(x) = \frac{x^5\left(1-\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^3}-\frac{30}{x^5}\right)}{x^3\left(1+\frac{5}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)} = x^2\frac{1-\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^3}-\frac{30}{x^5}}{1+\frac{5}{x^2}-\frac{4}{x^3}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

Exercice 37 *Utiliser cette technique pour déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :*

- $g_1 : x \mapsto \dfrac{x+3}{2-x}$
- $g_2 : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$
- $g_3 : x \mapsto \dfrac{x^2-3x+1}{-x^2+x-1}$
- $g_4 : x \mapsto \dfrac{x+\ln(x)}{2x-\ln(x)}$
- $g_5 : x \mapsto \dfrac{2e^x-x}{e^x+1}$

2.6.2 Dérivations

Soit u et v deux fonctions dérivables, λ et α deux réels et n un entier relatif.

Fonction	$u+v$	λu	uv	u^n	$\frac{1}{u}$	$\frac{u}{v}$	$x \mapsto e^x$
Dérivée	$u'+v'$	$\lambda u'$	$u'v+uv'$	$nu'u^{n-1}$	$-\frac{u'}{u^2}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$x \mapsto e^x$

Fonction	ln	$u\circ v$	$\ln\lvert u\rvert$	u^α	$\sqrt{\cdot}$	sin	cos
Dérivée	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$(u'\circ v)v'$	$\frac{u'}{u}$	$\alpha u'u^{\alpha-1}$	$\frac{1}{2\sqrt{\cdot}}$	cos	$-\sin$

Exemple. Soit $F : x \mapsto \sqrt{x-1}$. La fonction $g : x \mapsto x-1$ est définie et dérivable sur $]1,+\infty[$ et pour tout $x > 1$, $g(x) \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $f : y \mapsto \sqrt{y}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, $F = f \circ g$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ comme composée des fonctions dérivables f et g. De plus, pour tout $x \in]1,+\infty[$, on a

$$F'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

Exercice 38 *Justifier la dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes : mettre le résultat sous une forme propice à une éventuelle étude de signe.*

- $x \mapsto (x-1)^3$
- $x \mapsto (x^2-1)^3$
- $x \mapsto 3x^2-6x+1$
- $x \mapsto (x-1)(x-2)$
- $x \mapsto \dfrac{x+1}{x+3}$
- $x \mapsto \dfrac{3-x}{2+x}$
- $x \mapsto \dfrac{3x+1}{1-x}$
- $x \mapsto 3x^2 - \dfrac{1}{x}$
- $x \mapsto (x-2)(3-x)(x-4)$
- $x \mapsto \dfrac{3x^2-2x+1}{-x+2}$
- $x \mapsto \dfrac{x^2-2x+3}{x^2-x+2}$
- $x \mapsto \sqrt{2x-3}$
- $x \mapsto \sqrt{x^2-2x+5}$
- $x \mapsto \sqrt[5]{x^2+1}$
- $x \mapsto \dfrac{1}{-x+2}$
- $x \mapsto \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$
- $x \mapsto \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - 2x\right)$
- $x \mapsto \sin(2x)\cos(x)$
- $x \mapsto 6\cos^2(x) - 6\cos(x) - 9$
- $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{1+\cos(x)}$
- $x \mapsto 2\sin(x)\cos(x)+\sin(x)+\cos(x)$
- $x \mapsto \dfrac{\sin(x) - x\cos(x)}{x\sin(x)+\cos(x)}$
- $x \mapsto \ln(5x-1)$
- $x \mapsto \ln(x^2+1)$
- $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$
- $x \mapsto \ln(\ln(x))$
- $x \mapsto \ln|7-2x|$
- $x \mapsto x\ln(x) - x$
- $x \mapsto e^{3x}$
- $x \mapsto e^{x^2-x+1}$
- $x \mapsto e^{\sin(x)}$
- $x \mapsto \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$
- $x \mapsto e^{x\ln(x)}$
- $x \mapsto xe^{1/x}$
- $x \mapsto \ln(e^{2x} - e^x + 1)$
- $x \mapsto \dfrac{x}{1+e^{-x}}$
- $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$
- $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$
- $x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}}$

2.6.3 Primitives

Soit u et v deux fonctions continues, de primitives respectives U et V. Soit λ un réel, α un réel distinct de -1 et n un entier relatif distinct de -1.

Fonction	$u+v$	λu	ue^U	$(v \circ U)u$	uU^n	uU^α	$\frac{u}{U}$	$u\sin(U)$	$u\cos(U)$
Primitive	$U+V$	λU	e^U	$V \circ U$	$\frac{1}{n+1}U^{n+1}$	$\frac{1}{\alpha+1}U^{\alpha+1}$	$\ln\lvert U\rvert$	$-\cos(U)$	$\sin(U)$

Exercice 39 *Déterminer l'ensemble des primitives de $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}_-^*$.*

Exercice 40 *Calculer les primitives des fonctions suivantes, puis dériver le résultat obtenu pour contrôler vos réponses.*

- $x \mapsto x^{16} - 35x^{13} - 3x^8 + 20x^4 + 56x^3 + 51x^2 + 18x + 1$
- $x \mapsto \dfrac{1}{x}$
- $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$
- $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$
- $x \mapsto \dfrac{1}{x^4}$
- $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$
- $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$
- $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^3}$
- $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^4}$

- $x \mapsto \dfrac{1}{2x+1}$
- $x \mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^2}$
- $x \mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^3}$
- $x \mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^4}$

Exercice 41 *Pour la physique. Soit* A, τ, ω *des réels non nuls et* φ *un réel.*

1. *Dériver les fonctions suivantes*
   - $t \mapsto \sin(t)e^t$
   - $t \mapsto \cos(t)e^t$
   - $t \mapsto \cos(\omega t)e^t$
   - $t \mapsto \sin(\omega t)e^t$
   - $t \mapsto \sin(t)e^{-t/\tau}$
   - $t \mapsto \cos(t)e^{-t/\tau}$
   - $t \mapsto \cos(\omega t)e^{-t/\tau}$
   - $t \mapsto \sin(\omega t)e^{-t/\tau}$
2. *Calculer les intégrales suivantes*
   - $\displaystyle\int_{10}^{20} \frac{dv}{v}$
   - $\displaystyle\int_0^1 e^{-2t}\,dt$
   - $\displaystyle\int_{10^{-5}}^{10^{-2}} \frac{dp}{2p}$
   - $\displaystyle\int_{275}^{315} 2\frac{dT}{T}$
   - $\displaystyle\int_0^{2\pi/\omega} A\cos(\omega t+\varphi)\,dt$

Exercice 42 *Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes*

- $x \mapsto (x+2)\sqrt{3x+6}$
- $x \mapsto \sin(2x)$
- $x \mapsto \dfrac{\sin(\ln(x))}{x}$
- $x \mapsto 2^x + 2^{-x}$

Intégration par parties : soit u et v deux fonctions dérivables, de dérivées continues sur un intervalle $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

Exercice 43

1. *Calculer* $\displaystyle\int_0^1 te^t\,dt$*, puis* $\displaystyle\int_0^1 t^2e^t\,dt$.
2. *En remarquant que* $\ln = 1\times\ln$*, calculer* $\displaystyle\int_1^2 \ln(t)\,dt$.
3. *En effectuant deux intégrations par parties successives, calculer* $\displaystyle\int_0^{\pi} e^t\sin(t)\,dt$.

Exercice 44 *Calculer*

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^t\sin(2t)\,dt$.
2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\sin(x)\,dx$.
3. $\displaystyle\int_1^4 (x+3)\ln(x)\,dx$.
4. $\displaystyle\int_0^2 t^3e^t\,dt$.

2.7 Dénombrement et probabilités

Exercice 45 *Une classe de 41 élèves planche sur un devoir. Sachant qu'il ne peut y avoir d'ex-æquo, combien de classements possibles peut-on dénombrer*

1. *au total ?*
2. *si l'on sait d'avance que l'élève MICHU est premier ?*
3. *sachant qu'il y a 15 étudiants qui jouent au tennis, 26 qui jouent au badminton et que ces derniers sont toujours classés devant les joueurs de tennis ?*

Exercice 46

1. *On lance simultanément deux dés équilibrés à 6 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir*
   (a) *un double ?*
   (b) *une somme des deux dés égale à* 9 *?*
   (c) *un minimum des deux dés égale à* 4 *?*
2. *On lance cinq fois un dé équilibré à 6 face. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois un nombre pair ?*
3. *On lance simultanément trois dés équilibrés à 6 faces. Quelles est la probabilité d'obtenir un* 1*, un* 2*, et un* 4*, dans n'importe quel ordre, ou bient trois chiffres de même parité ?*
4. *On lance six fois un dé équilibré à 6 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir chacun des numéros de 1 à 6 ?*