Exercices - Sommes et produits finis

Cornou Jean Louis

8 octobre 2025

1 Calculs divers

1.1

Soit n et p deux entiers naturels non nuls. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} j^3\ln(i)$.
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij$.
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{i}{j}$.
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \frac{i^2}{j}$.
5. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min(i,j)$.
6. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 2^{\min(i,j)}3^{\max(i,j)}$.
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$.
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!k$.
9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^3$.
10. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$.

1.2

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer les produits suivants :

1. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.
2. $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} i^j$.
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{k(k+1)}}$.
4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2k$.
5. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k+1)$.
6. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} e^{-k}$.

1.3

Soit n et p deux entiers naturels non nuls. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+p)}$.

1.4

1. Déterminer trois réels a,b,c tels que
$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,0\},\ \frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x+2}$$
2. En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

1.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer les égalités suivantes :

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n}(n+k)$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

1.6

Soit n et p deux entiers naturels.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n}^{p} \binom{k}{n} = \binom{p+1}{n+1}$.
2. On suppose $n \leq p$. Déterminer $\displaystyle\sum_{k=n}^{p}(k+1)\binom{k}{n}$.
3. On suppose n et p non nuls. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\prod_{j=0}^{p-1}(k+j)$.

1.7

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\binom{n}{k}$.

1. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n$.
2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n sous forme d'une autre somme plus simple.

1.8

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k}(-1)^k 2^{k-1} = 0$$

1.9

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor$.

1.10

Soit $n \in \mathbb{N}$. En écrivant $(n+1)^4$ à l'aide d'une somme télescopique, recalculer la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k^3$.

1.11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout complexe z, on pose $\mathrm{P}_n(z) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{z}{k}\right)$.

1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Déterminer une relation entre $\mathrm{P}_n(z)$ et $\mathrm{P}_n(z-1)$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\mathrm{P}_n(p)$ à l'aide de coefficients binomiaux.

1.12

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $(1+i)^{4n}$.
2. En déduire les valeurs des sommes

$$\sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \binom{4n}{2p} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p \binom{4n}{2p+1}$$

1.13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère les fonctions polynomiales $\mathrm{P} : x \mapsto (x+1)^n$ et $\mathrm{Q} : x \mapsto (x-1)^n$.

1. Calculer de deux manières différentes PQ et PP′.
2. En déduire la valeur des sommes

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}^2$$

1.14

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\mathrm{H}_n \notin \mathbb{N}$.

1.15

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels. On pose

$$\mathrm{S} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k$$

À quelle condition nécessaire et suffisante sur la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la fonction S est-elle injective ? surjective ? bijective ?

2 Complexes et trigonométrie

2.1

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. Montrer que

$$\left| \frac{1 - z^n}{1 - z} \right| \leq \frac{1 - |z|^n}{1 - |z|}$$

2.2

Soit $n \in \mathbb{N}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer les sommes suivantes

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx + y)$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx + y)$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \cos(kx + y)$.

2.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$.

1. Soit $p \in \mathbb{Z}$. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \omega^{kp}$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(z + \omega^k\right)^n = n\left(z^n + 1\right)$.

2.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n+1}\right)$. Soit $\mathrm{P} : z \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ une fonction polynomiale à coefficients complexes de degré au plus n. Soit M un réel positif tel que

$$\forall z \in \mathbb{U}, |\mathrm{P}(z)| \leq \mathrm{M}$$

1. Calculer $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}\left(\omega^j\right)$.
2. En déduire que $|\mathrm{P}(0)| \leq \mathrm{M}$.

2.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $j = \exp(2i\pi/3)$ puis

$$\mathrm{A} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 0[3]}}^{n} \binom{n}{k} \qquad \mathrm{B} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 1[3]}}^{n} \binom{n}{k} \qquad \mathrm{C} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 2[3]}}^{n} \binom{n}{k}$$

1. Calculer $\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C}$, $\mathrm{A} + j\mathrm{B} + j^2\mathrm{C}$ et $\mathrm{A} + j^2\mathrm{B} + j\mathrm{C}$.
2. En déduire la valeur de A.

2.6

Soit z_1 et z_2 deux complexes et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $|z_1| + |z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|$.
2. On pose $\mathrm{M} = \max(|z_1|, |z_2|)$. Montrer que $|z_1^n - z_2^n| \leq n\mathrm{M}^{n-1}|z_1 - z_2|$.
3. Soit $z \in \mathbb{C}$. on suppose que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} z^k = nz^n$. Montrer que $|z| \leq 1$.

2.7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $z_1, z_2, \ldots, z_n$ une famille de complexes tous non nuls. On suppose que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

Montrer que ces complexes ont tous le même argument modulo 2π.

2.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $2^n x/\pi \notin \mathbb{Z}$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin(2^k x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{\cos(2^n x)}{\sin(2^n x)}$$

2.9 ✠

Soit p un entier naturel impair. On pose $\omega = \exp(2i\pi/p)$ et $\delta = \exp(i\pi/p)$, puis

$$\Delta = \prod_{0\leq i<j\leq p-1} \left(\omega^j - \omega^i\right)$$

1. Montrer que

$$\sum_{0\leq i<j\leq p-1} (i+j) = \frac{p(p-1)^2}{2}.$$

2. Montrer que

$$\delta^{\frac{p(p-1)^2}{2}} = 1$$

3. En déduire que

$$\Delta = (2i)^{p(p-1)/2} \prod_{0\leq i<j\leq p-1} \sin\left(\frac{\pi(j-i)}{p}\right)$$

4. On admet que $\Delta^2 = p^p(-1)^{(p-1)/2}$. Montrer que

$$\Delta = i^{p(p-1)/2} p^{p/2}$$