Exercice 1. Autour de l'exponentielle intégrale

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $f(x)$ est défini si et seulement si $x \neq 0$. Ainsi, $D = \mathbb{R}^*$.

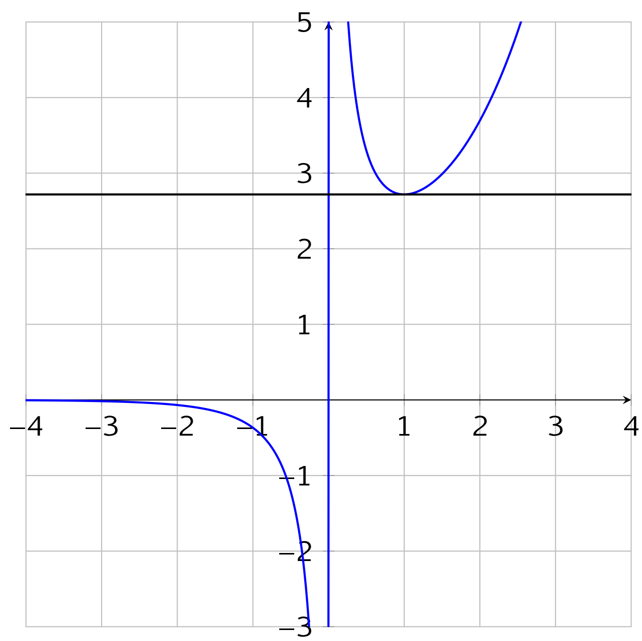
   (b) f est un quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur D, donc est dérivable. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \frac{e^x x - e^x 1}{x^2} = (x-1)\frac{e^x}{x} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^x$$

   (c) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors $e^x > 0$. Par conséquent, $f'(x) > 0 \iff 1 - \dfrac{1}{x} > 0 \iff 1 > \dfrac{1}{x}$. Dans le cas $x > 0$, cela équivaut à $x > 1$. Dans le cas $x < 0$, c'est vérifié. Conclusion, $f' > 0$ est strictement positive sur $]1, +\infty[$, sur $]-\infty, 0[$, et strictement négative sur $]0, 1[$. On en déduit que f est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$, strictement décroissante sur $]0, 1]$, puis strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

   Limites aux bords de D. En $-\infty$, $e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ et $1/x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$, donc $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$. En 0^-, $e^x \xrightarrow[x\to 0^-]{} 1$ et $1/x \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\infty$, donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$. En 0^+, $e^x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$ et $1/x \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$, donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$. En $+\infty$, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ d'après les croissances comparées.

   (d) Le graphe de f présente une tangente horizontale au point $(1, f(1)) = (1, e)$.



2. (a) f est continue car dérivable au vu de la question 1.b). D'après le théorème fondamental de l'intégration, F est dérivable et $F' = f$, ou encore $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F'(x) = e^x/x$.

   (b) $x \mapsto 2x$ est dérivable donc $x \mapsto F(2x)$ l'est également par composition de fonctions dérivables. On en déduit que G est dérivable et

$$\forall x > 0, G'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2\frac{e^{2x}}{2x} - \frac{e^x}{x} = \frac{e^{2x} - e^x}{x} = e^x \frac{e^x - 1}{x}$$

   (c) Soit $x > 0$. Alors $e^x > 0$ et $x > 0$. De plus, $e^x > e^0 = 1$ par stricte croissance de l'exponentielle. Ainsi, $G'(x) > 0$. On en déduit que G est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(d) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la relation de Chasles sur l'intégration,

$$G(x) = \int_1^{2x} f(t)dt - \int_1^x f(t)dt = \int_1^{2x} f(t)dt + \int_x^1 f(t)dt = \int_x^{2x} f(t)dt$$

(e) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in [x, 2x]$. Par croissance de l'exponentielle, $e^t \geq e^x$, puis $\dfrac{e^t}{t} \geq \dfrac{e^x}{t}$ car $t > 0$. On en déduit par croissance de l'intégrale

$$G(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \geq \int_x^{2x} \frac{e^x}{t} dt = e^x \int_x^{2x} \frac{dt}{t} = e^x [\ln(t)]_x^{2x} = e^x(\ln(2x) - \ln(x)) = e^x \ln(2)$$

(f) Comme $2 > 1$, $\ln(2) > \ln(1) = 0$. D'autre part, $e^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$. Ainsi, $\ln(2)e^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$. On en déduit d'après le théorème de comparaison, $G(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

3. (a) Le même argument qu'en 2.b) est valide et le calcul mène similairement

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, G'(x) = e^x \frac{e^x - 1}{x}$$

Soit $x < 0$. Alors $e^x < e^0 = 1$, donc $e^x - 1 < 0$. Or $e^x > 0$ et $x < 0$, donc $G'(x) > 0$. Conclusion, G est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$ et $t \in [2x, x]$ (attention à l'ordre des bornes car $x < 0$). On a la même minoration qu'en 2.e), toutefois la croissance de l'intégrale donne une majoration car $2x < x$. Cela entraîne $G(x) \leq \ln(2)e^x$. D'autre part, f est négative sur $\mathbb{R}_-^*$. D'après la croissance de l'intégrale en tenant compte de l'ordre des bornes, G est positive sur $\mathbb{R}_-^*$. Résumons, on a l'encadrement $0 \leq G(x) \leq \ln(2)e^x$. Or $e^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$. D'après le théorème d'encadrement, $G(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$.

4. (a) Soit $t \in [0, 1]$. Alors $e^t \geq e^0 = 1$ par croissance de l'exponentielle, donc $|e^t - 1| = e^t - 1$. De plus, $2|t| = 2t$. Introduisons la fonction $h : [0, 1] \to \mathbb{R}, t \mapsto e^t - 1 - 2t$. Alors h est dérivable et $h'(t) = e^t - 2$. h' est elle-même dérivable et $h''(t) = e^t > 0$. Donc h' est strictement croissante sur $[0, 1]$. Or $h'(0) = 1 - 2 < 0$ et $h'(1) = e - 2 > 0$. Comme h' est continue, le théorème des valeurs intermédiaires assure que h' s'annule exactement une fois sur $[0, 1]$. Notons α ce point d'annulation. Alors h est strictement décroissante sur $[0, \alpha]$, puis stricement croissante sur $[\alpha, 1]$. Or $h(0) = 0$ et $h(1) = e - 3 < 0$. On en déduit que $h \leq 0$ sur $[0, 1]$,i.e $e^t - 1 \leq 2t$ ou encore $|e^t - 1| \leq 2|t|$.

Soit $t \in [-1, 0]$. Alors $|e^t - 1| = 1 - e^t$ et $2|t| = -2t$. On introduit la fonction $g : [-1, 0] \to \mathbb{R}, t \mapsto 1 - e^t + 2t$. Alors g est dérivable et $g'(t) = -e^t + 2 \geq -1 + 2 = 1 > 0$. Ainsi, g est strictement croissante. Or $g(0) = 0$, dong $g \leq 0$. Ainsi, $1 - e^t \leq -2t$ ou encore $|e^t - 1| \leq 2|t|$.

(b) Soit $x \in]0, 1/2]$ et $t \in [x, 2x]$. Alors $t \in [0, 1]$, donc $e^t \leq 1 + 2t$ d'après ce qui précède, ce qui entraîne $f(t) \leq \dfrac{1}{t} + 2$ puisque $t > 0$. Par croissance de l'intégrale sur $[x, 2x]$, on en déduit que $G(x) \leq \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t} + 2\int_x^{2x} dt = \ln(2) + 2x$. En exploitant 2,e), on a également $G(x) \geq \ln(2)e^x$. Or $\ln(2)e^x \xrightarrow[x \to 0^+]{} \ln(2)$ et $\ln(2) + 2x \xrightarrow[x \to 0^+]{} \ln(2)$. On en déduit par théorème d'encadrement que $G(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} \ln(2)$.

Soit $x \in [-1/2, 0[$ et $t \in [2x, x]$. Alors $t \in [-1, 0]$, ce qui donne $e^t \geq 1 + 2t$, puis $f(t) \leq \dfrac{1}{t} + 2$. La croissance de l'intégrale sur $[2x, x]$ donne alors $G(x) \geq \dfrac{x}{2x}\dfrac{dt}{t} + 2\displaystyle\int_x^{2x} dt = \ln(2) + 2x$. Or $G(x) \leq \ln(2)e^x$ d'après la question 3.b). Comme $\ln(2) + 2x \xrightarrow[x \to 0^-]{} \ln(2)$ et $\ln(2)e^x \xrightarrow[x \to 0^-]{} \ln(2)$, le théorème d'encadrement entraîne $G(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} \ln(2)$.

Conclusion, $G(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \ln(2)$.

Exercice 2. Logique en vrac

1. (a) Notons $\mathcal{T}$ l'assertion étudiée. On dresse une table de vérité.

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$	$P \Rightarrow R$	$\mathcal{T}$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

$\mathcal{T}$ est vraie dans tous les cas de figures. C'est une tautologie.

   (b) Notons $\mathcal{S}$ l'implication réciproque. La table précédente fournit alors

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$	$P \Rightarrow R$	$\mathcal{S}$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	F
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

D'après les troisième et sixième lignes, ce n'est pas une tautologie.

2. (a) En dressant une table de vérité, il est clair que $P \wedge P \equiv P$. On en déduit $P \uparrow P \equiv \neg(P \wedge P) \equiv \neg P$.
   (b) D'après les lois de De Morgan, $P \uparrow (Q \uparrow Q) \equiv P \uparrow (\neg Q) \equiv \neg(P \wedge (\neg Q)) \equiv \neg P \vee (\neg\neg Q) \equiv \neg P \vee Q \equiv P \Rightarrow Q$.
   (c) Toujours d'après les lois de De Morgan, $P \uparrow (P \uparrow Q) \equiv \neg(P \wedge (\neg(P \wedge Q))) \equiv \neg(P \wedge (\neg P \vee \neg Q)) \equiv \neg((P \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q))$. Or $P \wedge \neg P$ est une antilogie, donc $(P \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q) \equiv (P \wedge \neg Q)$. On poursuit alors $P \uparrow (P \uparrow Q) \equiv \neg(P \wedge \neg Q) \equiv \neg P \vee \neg\neg Q \equiv \neg P \vee Q \equiv P \Rightarrow Q$.
   (d) D'après 2.a), $(P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q) \equiv \neg(P \uparrow Q) \equiv \neg\neg(P \wedge Q) \equiv P \wedge Q$.
   (e) Toujours d'après 2.a), $(P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q) \equiv (\neg P) \uparrow (\neg Q) \equiv \neg((\neg P) \wedge (\neg Q)) \equiv (\neg\neg P) \vee (\neg\neg Q) \equiv P \vee Q$.
3. On dresse une table de vérité

P	Q	R	$P \uparrow Q$	$(P \uparrow Q) \uparrow R$	$Q \uparrow R$	$P \uparrow (Q \uparrow R)$
V	V	V	F	V	F	V
V	V	F	F	V	V	F
V	F	V	V	F	V	F
V	F	F	V	V	V	F
F	V	V	V	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V

La deuxième ligne (par exemple) indique que $(P \uparrow Q) \uparrow R$ et $P \uparrow (Q \uparrow R)$ ne sont pas équivalentes.

4. Supposons C faux. Alors $\neg C$ est vrai, donc $A \vee \neg C$ est vrai. D'après l'équivalence $C \iff (A \vee (\neg C))$, cela signifique que C est vrai, ce qui est absurde. Ainsi, C est vrai. Mais alors $A \vee \neg C$ est vrai toujours d'après l'équivalence précédente. Comme $\neg C$ est faux, on en déduit que A est vrai, puis que B est vrai d'après l'équivalence $A \iff (B \wedge C)$. Conclusion, A, B, C sont tous vrais.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆