Exercices - Calcul matriciel

1 Opérations matricielles

1.1 Contre-exemples

1. Déterminer deux matrices A, B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telles que $AB = 0$ et $BA \neq 0$.
2. Déterminer deux matrices A, B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telles que $AB = 0$, $BA = 0$, $A \neq 0$ et $B \neq 0$.

1.2 Équation matricielle

Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ telles que

$$M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3 Rotation

Pour tout réel t, on pose $R(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$.

1. Déterminer, pour tous réels, s, t, tout entier relatif n, $R(s)R(t)$ et $R(t)^n$.
2. Calculer pour tout réel t, $R(t)^{\mathsf{T}} R(t)$.
3. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application $f : \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto R(t)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est bijective et déterminer sa réciproque.

1.4 Rotation et symétrie

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ telle que $A^{\mathsf{T}} A = I_2$.

1. On suppose que $ad - bc = 1$. Montrer que

$$\exists t \in \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

2. On suppose que $ad - bc = -1$. Montrer que

$$\exists t \in \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{pmatrix}$$

1.5 Antidiagonale

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}).$$

Déterminer A^n, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

1.6 Étude paramétrique d'inversiblité

1. Pour tout $m \in \mathbb{C}$, on pose $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur m, cette matrice est-elle inversible ?
2. Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{C}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Calculer son inverse lorsque c'est le cas.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} \lambda-3 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-3 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}$. Étudier en fonction de λ l'inversibilité de A.

1.7 La base

1. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.
2. Soit $m \in \mathbb{C}$. Résoudre le système linéaire d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$

$$\begin{cases} x - z & = & m \\ -2x + 3y + 4z & = & 1 \\ y + z & = & 2m \end{cases}$$

1.8 Une matrice triangulaire

Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

1.9 Une matrice à coefficients dans $\mathbb{U}_n$

Soit $n \geq 2$. On pose $\omega = \exp(2i\pi/n)$ et $V = \left(\omega^{(k-1)(l-1)}\right)_{1 \leq k, l \leq n}$. $\overline{V}$ désigne la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de V.

1. Calculer $V\overline{V}$ et $\overline{V}V$.
2. En déduire que V est inversible, puis calculer son inverse.
3. Calculer V^2.

1.10 Matrices stochastiques ✠

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est stochastique lorsque

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 a_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

1. Soit A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices stochastiques. Montrer que AB est stochastique.
2. Déterminer l'ensemble des matrices stochastiques inversibles, dont l'inverse est stochastique.

1.11 Centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = BA$$

1.12 Trace en taille 2

Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$. On appelle trace d'une matrice A la somme de ses coefficients diagonaux, elle est notée $\mathrm{tr}(A)$.

1. Montrer que $A^2 - \mathrm{tr}(A)A$ est une matrice scalaire.
2. Montrer que $(AB-BA)^2$ est une matrice scalaire.

1.13 Étude paramétrique

Pour tout réel t, on pose $A_t = \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix}$. On pose de plus, $\mathcal{A} = \{A_t \mid t \in \mathbb{R}\}$.

1. Soit $(s,t) \in \mathbb{R}^2$. Calculer A_tA_s. Cette matrice appartient-elle à $\mathcal{A}$?
2. Soit $t \in \mathbb{R}$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur t, la matrice A_t est-elle inversible ? Calculer son inverse dans ce cas.
3. Déterminer les matrices de $\mathcal{A}$ inversibles et dont l'inverse est dans $\mathcal{A}$.

1.14

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^4.
2. Montrer que A est inversible si et seulement si $x \neq 0$.
3. On suppose que $x \neq 0$. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

1.15

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

1.16 Puissances

Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 1+\sin(t) & \cos(t) \\ \cos(t) & 1-\sin(t) \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 Systèmes linéaires

2.1 Calcul

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

1. $\begin{cases} u & & +w & = 1 \\ & v & +w & = 0 \\ u & +v & & = 1 \\ 2u & +3v & & = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x & +y & +z & = 1 \\ x & +2y & +3z & = 2 \\ x & -y & +2z & = -1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x & +y & +z & +t & = 1 \\ 2x & +y & +z & +t & = 1 \\ 2x & +2y & +2z & & = 2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 4x & +3y & = 2 \\ 2x & +y & = 5 \\ 3x & +2y & = 2 \end{cases}$

2.2 Huns et consorts

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer , J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. Montrer que J n'est pas inversible.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Déterminer deux réels α et β tels que $A^2 + \alpha A + \beta I_3 = 0$.
5. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
6. Soit u, v, w trois suites réelles définies par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n + 2w_n \end{cases}$$

   Déterminer explicitement u_n, v_n et w_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Résoudre le système linéaire d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = -1 \end{cases}$$

2.3 Quel rapport ?

Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$$

2.4 Existence de solutions

Soit $m \in \mathbb{R}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 1 \\ m \end{pmatrix}$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur m existe-t-il une matrice $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $AX = B$?

2.5

Soit P un polynôme de degré 5. Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que

$$Q^{(5)} + Q^{(4)} + Q^{(3)} + Q^{(2)} + Q' + Q = P$$