IPESUP 2025/2026

Colle 10 filière PCSI Vendredi 12 décembre 2025

★★★

Planche 1

★★★

1. Unicité de la limite.
2. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on note $d(x,A) = \inf\{|x-a| : a \in A\}$. Montrer que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |d(x,A) - d(y,A)| \leqslant |x-y|$$
3. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$. À quelle condition nécessaire et suffisante, cette suite est-elle convergente ?

★★★

Planche 2

★★★

1. Monotonie de suites définies par récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Soit $A = \{\ln(p) - \ln(q) | (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2\}$. Déterminer pour tout réel x, $\inf\{|x-a| : a \in A\}$.
3. Calculer le terme général de la suite réelle u définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 2^n - 1$$

★★★

Planche 3

★★★

1. Description de $E = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0\}$.
2. Soit A, B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On suppose que $\forall (a,b) \in A \times B, a < b$, $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \mathbb{R}$. Montrer que $\sup(A) = \inf(B)$, puis que A et B sont des intervalles.
3. Étudier la convergence de la suite u définie par $u_0 = 1$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}}$$