

Problème : autour des fonctions de Lambert

Partie I : fonctions de Lambert

1. f est dérivable comme produit de fonctions dérivables et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$. On en déduit que $\forall x > -1, f'(x) > 0$. Comme $[-1, +\infty[$ est un intervalle, f est strictement croissante sur ce domaine donc y est injective. D'autre part, elle est continue, $f(-1) = -e^{-1}$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Donc $f([-1, +\infty[) = [-e^{-1}, +\infty[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

En conclusion, f induit une bijection de $[-1, +\infty[$ dans $[-e^{-1}, +\infty[$.

2. D'après ce qui précède, $\forall x > -1, f'(x) \neq 0$, donc W est dérivable sur $]f(-1), +\infty[=]-e^{-1}, +\infty[$. Soit $x > -e^{-1}$. Alors,

$$W'(x) = \frac{1}{f'(W(x))} = \frac{1}{(W(x)+1)e^{W(x)}} = \frac{1}{f(W(x))+e^{W(x)}} = \frac{1}{x+e^{W(x)}}$$

3. Comme $0 \in [-1, +\infty[$ et $f(0) = 0$, on en déduit que $W(0) = 0$. D'après ce qui précède, $W'(0) = \frac{1}{0+e^0} = 1$.

4. D'après la dérivabilité de W en 0, on a la limite

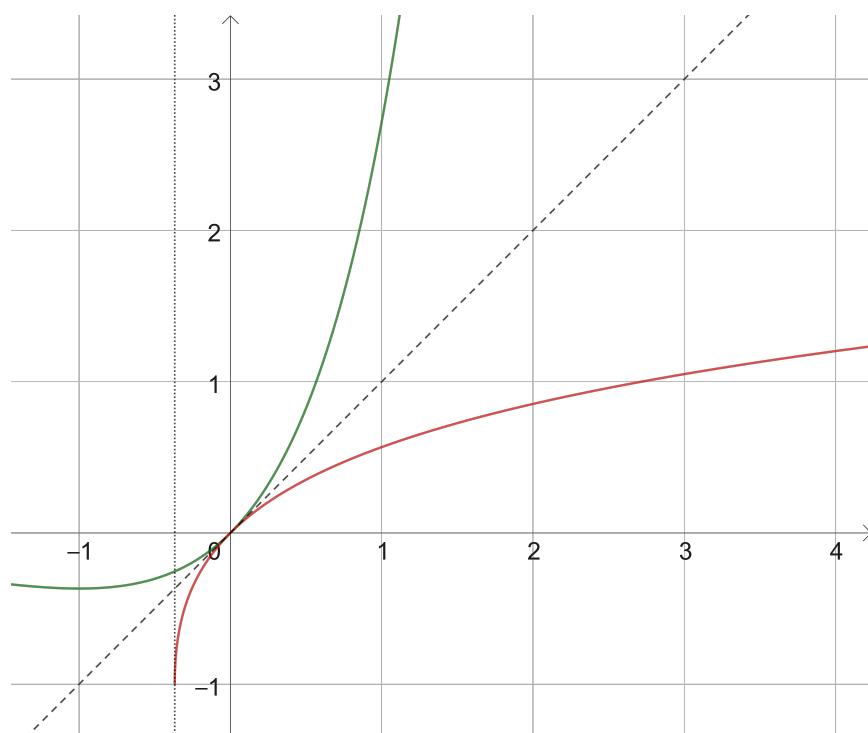
$$\frac{W(x)}{x} = \frac{W(x)-W(0)}{x-0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} W'(0) = 1$$

5. Comme $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, on en déduit que $W(x) \xrightarrow{+\infty} +\infty$. Mais alors les croissances comparées et la composition de limites donnent $\ln(W(x))/W(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Soit $x > 0$, comme $W(x)e^{W(x)} = x$, on obtient toutes quantités positives, $\ln(W(x)) + W(x) = \ln(x)$, puis

$$\frac{\ln(W(x))}{W(x)} + 1 = \frac{\ln(x)}{W(x)}$$

D'après les opérations sur les limites finies, on obtient $\frac{\ln(x)}{W(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$, puis par inverse d'une limite non nulle $\frac{W(x)}{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1/1 = 1$.

6. La figure suivante représente le graphe de f en vert, et celui de W en rouge.



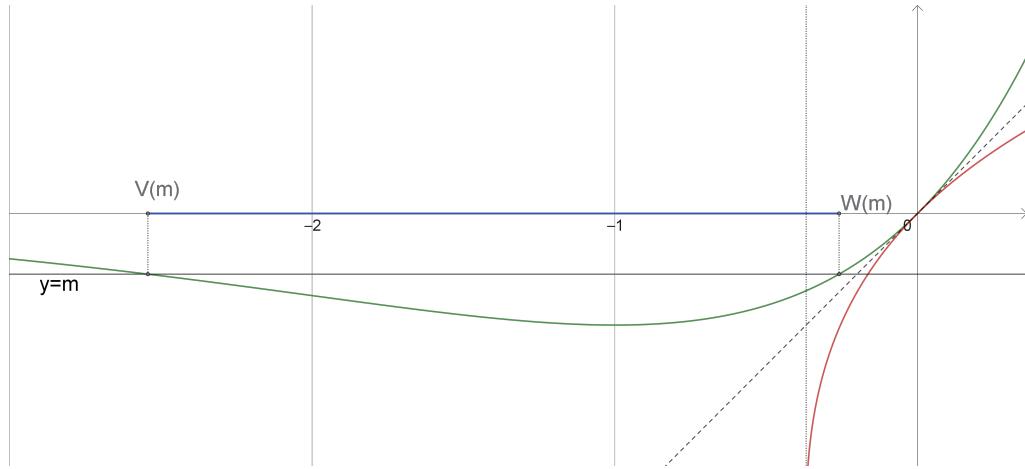
7. Comme en question 1, $\forall x < -1, f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty, -1]$. De plus, $xe^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ d'après les croissances comparées. Comme f est continue, $f(]-\infty, -1]) = [-e^{-1}, 0[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Ainsi, f induit une bijection de $]-\infty, -1]$ dans $[-e^{-1}, 0[$.

8. D'après les études précédentes, on a 4 cas différents :

- $m < -e^{-1}$, alors $m \notin f(\mathbb{R})$, donc il n'y pas de solutions.
- $m = -e^{-1}$, -1 est l'unique réel x tel que $xe^x = -e^{-1}$.
- $-e^{-1} < m < 0$. Alors m possède deux antécédents par f , à savoir $V(m)$ et $W(m)$.
- $0 \leq m$. Alors m possède un unique antécédent par f , à savoir $W(m)$.

9. Soit $x \in \mathbb{R}$. Les considérations précédentes donnent toujours quatre cas différents.

- $m < -e^{-1}$, alors $f(x) > m$. L'inéquation ne possède pas de solutions.
- $m = -e^{-1}$, alors $f(x) \leq -e^{-1} \iff x = -1$.
- $-e^{-1} < m < 0$, alors $f(x) \leq m \iff V(m) \leq x \leq W(m)$.
- $0 \leq m$, alors $f(x) \leq m \iff x \leq W(m)$.



Partie II - Approximation de W par un polynôme

II.A - Le théorème binomial d'Abel

10. Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $k \in [[1, n]]$. Si $k = 1$, alors

$$A_k(x) = x \quad \text{et} \quad A'_k(x) = 1 = A_0(x - a)$$

Sinon,

$$A'_k(x) = \frac{1}{k!} \left((x - ka)^{k-1} + x(k-1)(x - ka)^{k-2} \right) = \frac{(x - ka)^{k-2}}{k!} (x - ka + xk - x)$$

On reconnaît alors

$$A'_k(x) = \frac{(x - a - (k-1)a)^{k-1-1}}{(k-1)!} (x - a) = A_{k-1}(x - a)$$

11. Comme A_k est polynomiale de degré k , toute dérivée d'ordre supérieur ou égal à $k+1$ de A_k est la fonction nulle. Comme c'est le cas de j , $A_k^{(j)} = 0$. En particulier, $A_k^{(j)}(ja) = 0$.

12. Pour tout j dans $[[0, n]]$, on pose $\mathcal{P}_j \ll \forall k \in [[j, n]], A_k^{(j)}(ja) = A_{k-j}(0) \gg$. On procède par récurrence.

Initialisation : pour $j = 0$, soit $k \in [[0, n]]$. Alors $A_k^{(0)}(0a) = A_k(0) = A_{k-0}(0)$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vrai.
Hérédité. Soit $j \in [[0, n]]$. Supposons $\mathcal{P}(j)$, démontrons $\mathcal{P}(j+1)$. Soit $k \in [[j+1, n]]$. Soit $x = (j+1)a$. D'après la question 10.

$$A_k^{(j+1)}(x) = (A'_k)^{(j)}(x) = (A_{k-1})^{(j)}(x - a) = A_{k-1}^{(j)}(ja)$$

Comme $k - 1 \in [[j, n]]$, on peut appliquer $\mathcal{P}(j)$, ce qui donne $A_{k-1}^{(j)}(ja) = A_{k-1-j}(0) = A_{k-(j+1)}(0)$. Conclusion,

$$A_k^{(j+1)}((j+1)a) = A_{k-(j+1)}(0)$$

ce qui prouve $\mathcal{P}(j+1)$. On conclut par le principe de récurrence.

13. Soit $(j, k) \in [[0, n]]^2$. On distingue trois cas. Si $j > k$, $A_k^{(j)}(ja) = 0$ d'après la question 11. Si $j = k$, on applique la question 12, ce qui donne $A_k^{(k)}(ka) = A_{k-k}(0) = A_0(0) = 1$. Enfin, si $j < k$, la même question 12 fournit $A_k^{(j)}(ja) = A_{k-j}(0)$. Or $k - j \geq 1$, donc $A_{k-j}(0) = 0$.

En conclusion, $A_k^{(j)}(ja) = 0$ si j diffère de k , et 1 sinon.

14. Soit $j \in [[0, n]]$. On dérive j fois l'égalité de fonctions infiniment dérivables précédente, puis on évalue en ja , ce qui donne par linéarité

$$P^{(j)}(ja) = \sum_{k=0}^n \alpha_k A_k^{(j)}(ja)$$

D'après ce qui précède, dans cette somme tous les termes pour k différent de j s'annulent. Il ne reste alors que

$$P^{(j)}(ja) = \alpha_j A_j^{(j)}(ja) = \alpha_j$$

15. On pose pour tout k dans $[[0, n]]$, \mathcal{H}_k : « $\forall x \in \mathbb{R}, Q^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} (x+y)^{n-k}$ » et on procède par récurrence. Initialisation : $k = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $Q^{(0)}(x) = Q(x) = (x+y)^n$ tandis que $\frac{n!}{(n-0)!} (x+y)^{n-0} = (x+y)^n$. Ainsi, \mathcal{H}_0 est vrai. Hérédité. Soit $k \in [[0, n-1]]$, supposons \mathcal{H}_k et démontrons \mathcal{H}_{k+1} . Soit $x \in \mathbb{R}$, comme $Q^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} (x+y)^{n-k}$, on peut de nouveau dériver, ce qui donne

$$Q^{(k+1)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} (n-k)(x+y)^{n-k-1} = \frac{n!}{(n-k-1)!} (x+y)^{n-k-1} = \frac{n!}{(n-(k+1))!} (x+y)^{n-(k+1)}.$$

Ainsi, \mathcal{H}_{k+1} est vrai, ce qui conclut par récurrence.

16. Soit $y \in \mathbb{R}$. La fonction $Q : x \mapsto (x+y)^n$ est polynomiale de degré n . On peut donc lui appliquer le résultat de la question 14, ce qui donne

$$Q = \sum_{k=0}^n Q^{(k)}(ka) A_k$$

Soit $k \in [[0, n]]$. D'après la question 15, $Q^{(k)}(ka) = \frac{n!}{(n-k)!} (ka+y)^{n-k}$. On obtient ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x+y)^n = y^n + \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)!} (ka+y)^{n-k} \frac{1}{k!} x (x-ka)^{k-1} = y^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x (x-ka)^{k-1} (y+ka)^{n-k}$$

17. Soit $y \in \mathbb{R}$. L'égalité précédente est une égalité de fonctions dérivables de la variable x , ce qui donne par dérivation

$$\forall x \in \mathbb{R}, n(x+y)^{n-1} = 0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (y+ka)^{n-k} ((x-ka)^{k-1} + (k-1)x(x-ka)^{k-2})$$

En particulier, pour $x = 0$, on obtient

$$ny^{n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (y+ka)^{n-k} (-ka)^{k-1}$$

En isolant le terme $k = n$, on obtient

$$ny^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (y+ka)^{n-k} (-ka)^{k-1} + \binom{n}{n} (y+na)^0 (-na)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (y+ka)^{n-k} (-ka)^{k-1} + (-na)^{n-1}$$

18. Tout le travail précédent est valide pour tous réels y et a . En particulier, l'égalité précédente est vraie pour $y = -n$ et $a = 1$, ce qui donne

$$n(-n)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (-n+k)^{n-k} (-k)^{k-1} + (-n)^{n-1}$$

ou encore

$$(n-1)(-n)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (n-k)^{n-k} (-k)^{k-1}$$

II.B - Développement en série entière

19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-n-1)^n}{(n+1)!} \frac{n!}{(-n)^{n-1}} = \frac{(-n-1)(1+1/n)^{n-1}}{n+1} = -\frac{1}{1+1/n} \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

D'après la dérivation du logarithme en 1, on obtient $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ln'(1) = 1/1 = 1$. D'après la continuité de l'exponentielle en 1, $\exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^1 = e$. Conclusion,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -e$$

20. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $1 + P_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n$ et $xP'_N(x) = \sum_{n=1}^N n a_n x^n = \sum_{n=0}^N n a_n x^n$. Le produit de ces sommes fournit

$$(1 + P_N(x))xP'_N(x) = \left(\sum_{k=0}^N a_k x^k \right) \left(\sum_{j=0}^N j a_j x^j \right) = \sum_{0 \leq k, j \leq N} a_k j a_j x^{k+j}$$

Dans cette dernière somme, les seuls termes fournissant x^N sont ceux d'indices (k, j) vérifiant $k + j = N$, i.e les indices $(k, N - k)$ pour k allant de 0 à N . On obtient ainsi un terme de la forme $\sum_{k=0}^N a_k (N - k) a_{N-k} x^N$. D'après l'unicité des coefficients polynomiaux de Q_N , on en déduit que

$$c_N = \sum_{k=0}^N a_k a_{N-k} (N - k)$$

21. En isolant les termes extrêmes, la somme de droite dans le résultat précédent vaut

$$a_0 a_N N + a_N 0 a_0 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(-k)^{k-1}}{k!} \frac{(k-N)^{N-k-1}}{(N-k)!} (N-k) = N a_N + \frac{1}{N!} \sum_{k=1}^{N-1} \binom{N}{k} (-1)^{N-k-1} (-k)^{k-1} (N-k)^{N-k}$$

D'après le résultat de la question 18, on obtient

$$c_N = N a_N - \frac{(N-1)(-N)^{N-1}}{N!} = N a_N - (N-1)a_N = a_N$$

22. D'une part, $\forall N \in \mathbb{N}^*, P_N(0) = 0$. Par conséquent, $P_N(0) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0$, donc $S(0) = 0$. D'autre part, $\forall N \in \mathbb{N}^*, P'_N(0) = a_1 = (-1)^0 / 1! = 1$. Par conséquent, $P'_N(0) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 1$, donc $S'(0) = 1$.

23. Soit x, y deux réels dans $]-e^{-1}, 0]$ tels que $x \leq y$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $n \in [[1, N]]$. Alors $-x \geq -y \geq 0$. Or $t \mapsto t^n$ est croissante sur \mathbb{R}_+ , donc $(-x)^n \geq (-y)^n$. Comme $n^{n-1}/n! \geq 0$, on en déduit $n^{n-1}(-x)^n/n! \geq n^{n-1}(-y)^n/n!$, puis $(-n)^{n-1}x^n/n! \leq (-n)^{n-1}y^n/n!$. Après sommation pour n allant de 1 à N , on en déduit $P_N(x) \leq P_N(y)$. Enfin, en passant à la limite quand N tend vers $+\infty$, on obtient $S(x) \leq S(y)$, ce qui prouve la croissance de S sur cet intervalle.

24. Soit $x \in]-e^{-1}, 0[$. Comme $S(0) = 0$, et S est strictement croissante sur $] -e^{-1}, 0[$, S est de signe négatif sur $] -e^{-1}, 0[$. Or $(1 + S(x))xS'(x) = S(x)$, $x < 0$ et $S'(x) > 0$, donc $1 + S(x) > 0$, donc $S(x) > -1$.

25. Soit $x \in]-e^{-1}, e^{-1}[$, comme S et \exp sont dérivables, h l'est. D'après l'équation différentielle satisfaite par S ,

$$xh'(x) = xS'(x)e^{S(x)} + S(x)S'(x)e^{S(x)} = xS'(x)(1 + S(x))e^{S(x)} = S(x)e^{S(x)} = h(x)$$

26. Sur l'intervalle $]0, e^{-1}[$, l'équation différentielle $xy' - y = 0$ équivaut à $y' = \frac{1}{x}y$. Comme $x \mapsto \ln(x)$ est une primitive de $x \mapsto 1/x$ sur cet intervalle, les solutions sont de la forme $x \mapsto Ce^{\ln(x)} = Cx$, $C \in \mathbb{R}$. On procède de même sur l'intervalle $] -e^{-1}, 0[$ sur lequel on choisit $x \mapsto \ln(-x)$ est une primitive de $x \mapsto 1/x$. Les solutions sur cet intervalle sont donc de la forme $x \mapsto De^{\ln(-x)} = -Dx$, $D \in \mathbb{R}$.

Soit à présent f une solution de $xy' - y = 0$ sur l'intervalle $] -e^{-1}, e^{-1}[$. C'est en particulier une solution sur les deux intervalles précédents. On dispose donc de réels C et D tels que $\forall x \in]-e^{-1}, 0[, f(x) = -Dx$ et $\forall x \in]0, e^{-1}[$, $f(x) = Cx$. Or f est dérivable en 0, ce qui impose $D = -C$. D'autre part, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$. Conclusion, on dispose d'un réel C tel que $\forall x \in]-e^{-1}, e^{-1}[$, $f(x) = Cx$. La réciproque est une vérification sans difficulté.

27. Le travail précédent indique qu'il existe un réel C tel que

$$\forall x \in]-e^{-1}, e^{-1}[, h(x) = Cx$$

Soit $x \in]-e^{-1}, e^{-1}[\setminus \{0\}$, alors d'après la continuité de S et S' en 0,

$$\frac{h(x)}{x} = e^{S(x)} \frac{S(x)}{x} = e^{S(x)}(1 + S(x))S'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} e^0(1 + 0)1 = 1$$

Autrement dit, $C = 1$. Ainsi, $f(S(x)) = x$.

Si $x \geq 0$, cela implique $S(x) = W(x)$ d'après la question 8. On considère le cas $e^{-1} < x < 0$ à présent. Il y a deux solutions à savoir $V(x)$ et $W(x)$ d'après la question 8. Or $V(x) \leq -1$ et $S(x) > -1$ d'après la question 24. Donc $S(x) = W(x)$.

Partie III - Approximation de W par itération

28. Si $x = 0$, Φ est la fonction nulle et l'inégalité est triviale. On se place dans le cas $x \in]0, e]$ dans ce qui suit.

Comme $W(x)e^{W(x)} = x$, on en déduit $W(x) = xe^{-W(x)}$ puisque l'exponentielle ne s'annule jamais. Ainsi,

$$\Phi(W(x)) = x \exp(-x \exp(-W(x))) = x \exp(-W(x)) = W(x)$$

29. Φ est un produit et composée de fonctions infiniment dérивables donc infiniment dérivable, donc de classe C^2 . Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\Phi'(t) = x(xe^{-t})\exp(-xe^{-t}) = x^2 \exp(-t - xe^{-t})$$

Étudions $g : t \mapsto -t - xe^{-t}$ pour obtenir une majoration de Φ' . C'est une fonction dérivable et

$$g'(t) = -1 + xe^{-t}$$

Par conséquent, comme $x > 0$, $g'(t) > 0 \iff e^{-t} > 1/x \iff -t > \ln(1/x) \iff t < \ln(x)$. On en déduit que g est strictement croissante sur l'intervalle $] -\infty, \ln(x)]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[\ln(x), +\infty[$. Donc g atteint un maximum en $\ln(x)$ qui vaut

$$g(\ln(x)) = -\ln(x) - x \exp(-\ln(x)) = -\ln(x) - 1$$

Mais alors, par croissance de l'exponentielle,

$$\Phi(t) = x^2 \exp(g(t)) \leq x^2 \exp(g(\ln(x))) = x^2 \exp(-\ln(x) - 1) = \frac{x^2}{xe} = \frac{x}{e}$$

D'autre part, $x^2 \geq 0$ et $\exp \geq 0$, donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq \Phi'(t) \leq \frac{x}{e}$$

30. Comme Φ' est continue de primitive Φ sur le segment d'extrémités w_n et $W(x)$, le théorème fondamental du calcul intégral assure que

$$\Phi(w_n) - \Phi(W(x)) = \int_{w_n}^{W(x)} \Phi'(t) dt$$

On utilise alors l'inégalité triangulaire en faisant attention à l'ordre des bornes

$$|w_{n+1} - W(x)| = |\Phi(w_n) - \Phi(W(x))| \leq \left| \int_{w_n}^{W(x)} |\Phi'(t)| dt \right|$$

Or la croissance de l'intégrale donne

$$\left| \int_{w_n}^{W(x)} |\Phi'(t)| dt \right| \leq \left| \int_{w_n}^{W(x)} \frac{x}{e} dt \right| = \frac{x}{e} |W(x) - w_n|$$

Conclusion,

$$|w_{n+1} - W(x)| \leq \frac{x}{e} |w_n - W(x)|$$

31. Pour tout n dans \mathbb{N} , on pose $\mathcal{P}(n) : « |w_n - W(x)| \leq \left(\frac{x}{e}\right)^n |1 - W(x)| »$ et on procède par récurrence.

Initialisation : pour $n = 0$, alors $w_0 - W(x) = 1 - W(x)$ et $(x/e)^0 = 1$, donc il y a égalité et inégalité a fortiori. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$. D'après la question précédente et $\mathcal{P}(n)$,

$$|w_{n+1} - W(x)| \leq \frac{x}{e} |w_n - W(x)| \leq \frac{x}{e} \left(\frac{x}{e}\right)^n |1 - W(x)| = \left(\frac{x}{e}\right)^{n+1} |1 - W(x)|$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et le principe de récurrence permet de conclure.

Mais alors $|x/e| < 1$ donc $(x/e)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\left(\frac{x}{e}\right)^n |1 - W(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Le théorème d'encadrement donne alors $|w_n - W(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, i.e $w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} W(x)$.