1. $z^2-c^2=(z-c)(z+c)\neq 0$ d'après la règle du produit nul. On sait alors que le complexe z^2-c^2 possède exactement deux racines carrées complexes.
2. Comme le module est multiplicatif,

$$|z'|^2=|z'^2|=|z^2-c^2|=|(z-c)(z+c)|=|z-c||z+c|$$

3. D'une part, comme c est réel,

$$|z-c|^2=(z-c)\overline{(z-c)}=z\bar{z}-cz-c\bar{z}+|c|^2$$

De même

$$|z+c|^2=(z+c)\overline{(z+c)}=z\bar{z}+cz+c\bar{z}+|c|^2$$

La somme de ces deux égalités fournit donc

$$|z-c|^2+|z+c|^2=2\left(|z|^2+|c|^2\right)$$

On développe le carré et on utilise le résultat précédent et celui de la question 2, ce qui donne

$$(|z-c|+|z+c|)^2=|z-c|^2+|z+c|^2+2|z-c||z+c|=2\left(|z|^2+|z'|^2+|c|^2\right)$$

On remarque que les calculs précédents sont inchangés par échange de z et z', ainsi

$$(|z'-c|+|z'+c|)^2=|z'-c|^2+|z'+c|^2+2|z'-c||z'+c|=2\left(|z|^2+|z'|^2+|c|^2\right)$$

On en déduit que

$$|z-c|+|z+c|=|z'-c|+|z'+c|.$$

Or $z\in\mathcal{E}$. D'après le résulat admis en préambule, $|z+c|+|z-c|=2a$, donc $|z'-c|+|z'+c|=2a$. Toujours d'après ce résultat, $z'\in\mathcal{E}$.
4. Une identité remarquable donne

$$nn'=z^2-(iz')^2=z^2+z'^2=c^2$$

On calcule

$$(|n|+|n'|)^2=|n|^2+2|nn'|+|n'|^2=|z|^2+2\mathfrak{Re}(z\overline{iz'})+|iz'|^2+2|c^2|+|z|^2-2\mathfrak{Re}(z\overline{iz'})+|iz'|^2=2\left(|z|^2+|z'|^2+|c|^2\right)$$

D'après la question précédente, on a alors $(|n|+|n'|)^2=(|z-c|+|z+c|)^2$. Toutes quantités réelles positives, on peut passer à la racine carrée, ce qui donne

$$|n|+|n'|=|z-c|+|z+c|$$

5. Comme c est réel, $\mathfrak{Im}(z^2+z'^2)=0$, ce qui donne $xy+x'y'=0$. D'autre part, $\mathfrak{Re}(z^2+z'^2)=c^2$, ce qui donne

$$x^2-y^2+x'^2-y'^2=c^2=a^2-b^2$$

Or $z\in\mathcal{E}$, donc $y^2=b^2(1-x^2/a^2)$. De même, $z'\in\mathcal{E}$ d'après la question 3, donc $y'^2=b^2(1-x'^2/a^2)$. On obtient alors

$$x^2-b^2+\frac{b^2x^2}{a^2}+x'^2-b^2+\frac{b^2x'^2}{a^2}=a^2-b^2$$

On en déduit

$$(x^2 + x'^2)(1 + \frac{b^2}{a^2}) = a^2 + b^2$$

soit encore

$$x^2 + x'^2 = a^2$$

Mais alors

$$a^2 - y^2 - y'^2 = a^2 - b^2$$

donc

$$y^2 + y'^2 = b^2$$

6. L'idée est de calculer $(|n|-|n'|)^2 = |n|^2-2|n||n'|+|n|^2 = (|n|+|n'|)^2-4|n||n'| = (|z-c|+|z+c|)^2-4|nn'|$. Or $z \in \mathcal{E}$, donc $|z-c|+|z+c| = 2a$ et $|nn'| = c^2$. On en déduit

$$(|n|-|n'|)^2 = 4a^2 - 4c^2 = 4b^2$$

donc $|n|-|n'| = 2b$ ou $|n|-|n'| = -2b$. Or on sait que $|n|+|n'| = 2a$. Dans le premier cas, on obtient par somme et différence de ces deux dernières égalités $|n| = a+b$ et $|n'| = a-b$. Dans le deuxième cas, on obtient $|n| = a-b$ et $|n'| = a+b$.

7. Comme z diffère de c et $-c$, les complexes $z+c$ et $z-c$ sont non nuls, on peut parler de leurs arguments. Soit P un point de la bissectrice intérieure de $[MF)$ et $[MF')$ distinct de M, notons ζ son affixe. Alors

$$\arg(\zeta - z) \equiv \frac{\arg(c-z)+\arg(c+z)}{2} \equiv \frac{1}{2}\arg(c^2-z^2) \equiv \frac{1}{2}\arg(-z'^2) \equiv \frac{1}{2}(\pi+\arg(z'^2)) \equiv \frac{\pi}{2}+\arg(z')[2\pi]$$

Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{MP}$, donc les droites mentionnées sont perpendiculaires.

8. Voir figure en dernière page.

9. D'après la question 6, l'inclusion

$$f(\mathcal{E}) \cup g(\mathcal{E}) \subset \{s \in \mathbb{C} \,|\, |s| = a+b\} \cup \{s \in \mathbb{C} \,|\, |s| = a-b\}$$

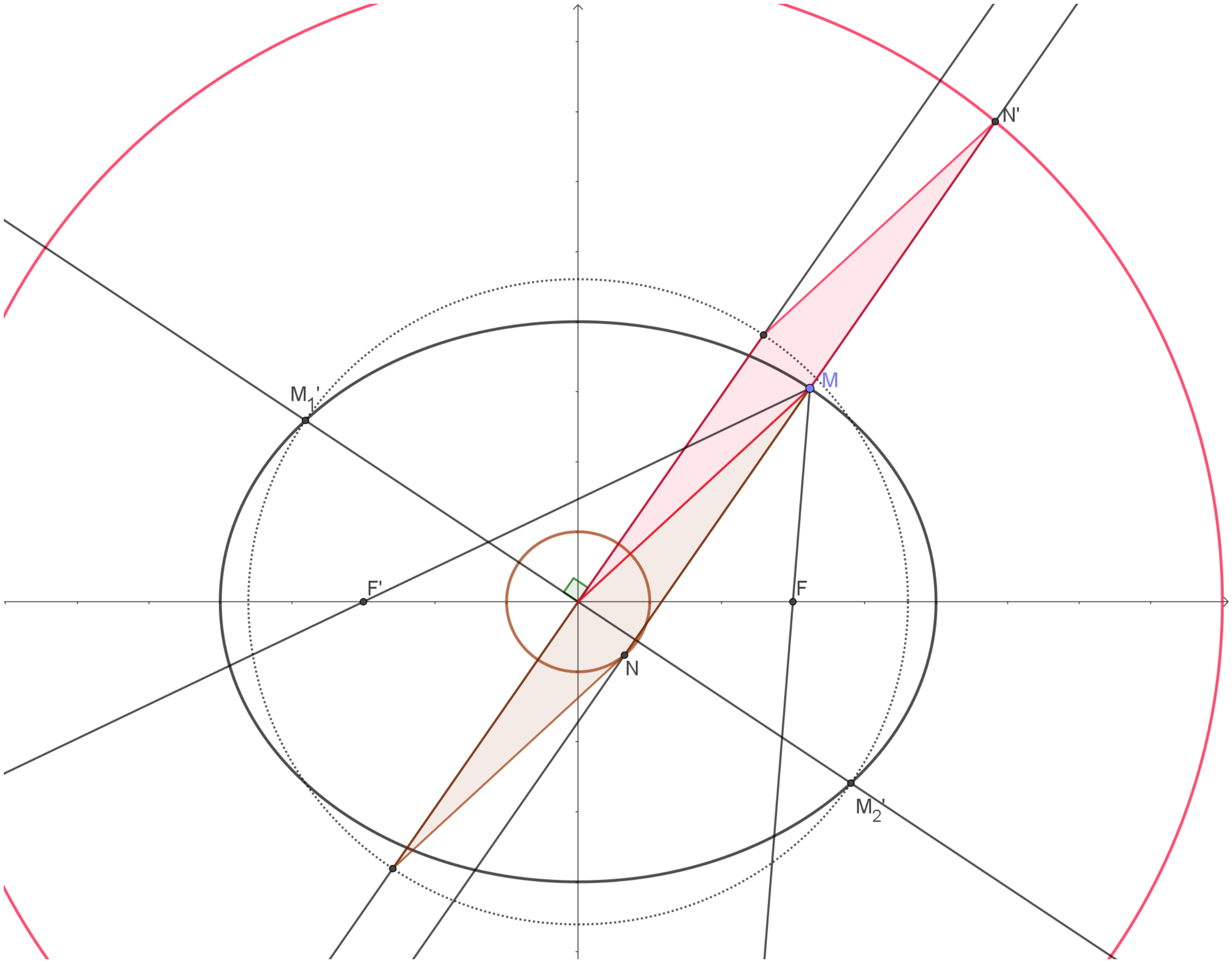
est claire. Réciproquement, soit n un complexe de module $a-b$. Alors $n \neq 0$ puisque $a > b$. On peut donc poser $z = (n^2+c^2)/(2n)$. En notant $n = \alpha + i\beta$, et $z = x+iy$ avec $(\alpha, \beta, x, y) \in \mathbb{R}^4$, on identifie parties réelle et imaginaire, ce qui donne

$$x = \frac{\alpha(\alpha^2+\beta^2+c^2)}{2(\alpha^2+\beta^2)} \quad \text{et} \quad y = \frac{\beta(\alpha^2+\beta^2-c^2)}{2(\alpha^2+\beta^2)}$$

Mais alors, comme $\alpha^2+\beta^2 = (a-b)^2$ et $a^2 = b^2+c^2$,

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} &= \frac{1}{4(a-b)^4}\left(\frac{\alpha^2}{a^2}((a-b)^2+c^2)^2+\frac{\beta^2}{b^2}((a-b)^2-c^2)^2\right) \\ &= \frac{1}{4(a-b)^4}\left(\frac{\alpha^2}{a^2}(2a^2-2ab)^2+\frac{\beta^2}{b^2}(2b^2-2ab)^2\right] \\ &= \frac{4(a-b)^2}{4(a-b)^4}[\alpha^2+\beta^2] \\ &= 1\end{aligned}$$

Donc $z \in \mathcal{E}$. Le même raisonnement avec un complexe de module $a+b$ et la même définition $z = (n^2+c^2)/(2n)$ fournit également un complexe $z \in \mathcal{E}$. On a ainsi l'inclusion réciproque entre les cercles de rayon $a+b$ et $a-b$ et l'union $f(\mathcal{E}) \cup g(\mathcal{E})$.



N'
M
M_1'
F'
F
N
M_2'