Chaque colle comporte une question de cours ainsi qu'un ou plusieurs exercices.

1 Questions de cours.

- Toute définition, tout résultat dans l'ensemble des notions abordées doit être parfaitement su et peut être ajouté aux items suivants.
- Caractérisation séquentielle de la borne supérieure.
- $u_{n+1} = f(u_n)$. Monotonie de u si f est croissante, Monotonies contraires de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) si f est décroissante.
- Description de $E = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0\}$.
- Unicité de la limite.

2 Exercices.

Ils porteront sur le début du chapitre 9 suites numériques, jusqu'aux suites récurrentes incluses, mais n'aborderont pas la notion quantifiée de limite.

3 Chapitre 9 : suites numériques

3.1 Ensemble des réels $\mathbb{R}$

Approximation décimale d'un réel x à 10^{-n} près par défaut, par excès. Convergence de ces suites vers x. Tout réel est limite d'une suite de rationnels. Borne supérieure d'une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Caractérisation $a = \sup(X) \iff [(\forall x \in X, x \leq a) \wedge (\forall y < a, \exists x \in X, y < x)]$. En cas d'existence du maximum, $\max(X) = \sup(X)$. Caractérisation séquentielle de la borne supérieure. Croissance de la borne supérieure par inclusion. Extension de la définition et des caractérisations aux parties vides ou non majorées. Existence de la borne inférieure d'une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ et relation $\inf(X) = -\sup(-X)$. Adaptation des résultats précédents à la borne inférieure, extension aux parties vides ou non minorées. Étude de $x \mapsto d(x, \mathbb{Z})$. Notion de partie convexe, caractérisation des parties convexes de $\mathbb{R}$ à l'aide des intervalles. Démonstration de la bonne définition de la partie entière.

3.2 Exemples de suites

Suite majorée, minorée, bornée, croissante, décroissante, monotone. u est bornée ssi $|u|$ est majorée. Opérations sur les suites monotones. Propriétés à partir d'un certain rang. Suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ à l'aide d'une fonction itératrice qui stablise une partie A et un germe u_0 dans A. Monotonie de u si f est croissante, Monotonies contraires de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) si f est décroissante. Monotonie de u à l'aide du signe de $f - \mathrm{Id}$. Théorème du point fixe si f continue. Exemples de suites implicites. Suites arithmético-géométriques. Suites récurrentes doubles, $E = \{u \in K^{\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0\}$. E est stable par combinaison linéaire et $\varphi : E \to K^2, u \mapsto (u_0, u_1)$ est une bijection linéaire (surjectivité admise). Liberté de suites géométriques de raisons distinctes. Description de E dans le cas complexe, dans le cas réel.

3.3 Limite de suite

Définition de $u \to \ell$ dans le cas $\ell \in \mathbb{R}$. Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Opérations sur les limites finies. Toute suite convergente est bornée, passage à la limite dans les inégalités.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆