Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$\omega_n = \exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$e_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, k \mapsto \exp\left(i2\pi\frac{k}{n}\right)$$

$$G_n = \sum_{k=0}^{n-1} e_n\left(k^2\right)$$

L'objectif de ce problème est de déterminer le module de G_n selon les valeurs de n. La détermination de l'argument de G_n, quand G_n est non nulle, nécessite des outils d'arithmétique plus avancés.

Partie 0 : Résultat fondamental

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^k = 0.$$

Partie I : Exemples

2. Calculer G_2, G_3 et G_4.
3. (a) Montrer que

$$1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0.$$

   (b) En déduire un trinôme dont $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est racine.

   (c) En déduire les valeurs explicites de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

   (d) Calculer G_5.
4. (a) Montrer que

$$G_7 + \overline{G_7} = 0.$$

   (b) Montrer que

$$G_7\overline{G_7} = 7.$$

   (c) En déduire que

$$G_7 = i\sqrt{7}.$$

5. (a) Montrer que

$$2i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = \omega_{11} - \omega_{11}^{10}.$$

   (b) Montrer que

$$i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) = \frac{\omega_{11}^3 - 1}{\omega_{11}^3 + 1}.$$

   (c) Montrer que

$$4i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) + i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) = G_{11}.$$

Partie II : Module

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Soit $\ell \in \mathbb{Z}$. En faisant attention aux cas particuliers, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e_n(k\ell)$.

7. (a) Montrer que
$$|G_n|^2 = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} e_n(k^2-\ell^2).$$

   (b) Soit $m \in \mathbb{Z}$. Montrer que la suite u définie par
$$\forall d \in \mathbb{Z}, u_d = \sum_{k=d}^{d+n-1} e_n(2km+k^2)$$
   est constante.

   (c) En déduire que
$$|G_n|^2 = \sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} e_n(2k\ell+\ell^2)$$

   (d) Montrer que si n est impair, $|G_n| = \sqrt{n}$.

   (e) Montrer que si n est pair et $n/2$ est pair, alors $|G_n| = \sqrt{2n}$.

   (f) Montrer que si n est pair et $n/2$ impair, alors $G_n = 0$.