Exercices - Polynômes et fractions rationnelles

1 Polynômes

1.1 Calculs

Soit $P = X^3 - X^2 + 3X - 1$ et $Q = 2X^2 - X + 1$. Calculer $PQ, P^2, Q^2, P \circ Q$ et $Q \circ P$.

1.2 Fainéantise

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer sans efforts le degré, le coefficient dominant, le coefficient constant et la somme des coefficients des polynômes suivants :

1. $(X+1)^n + (X-1)^n$.
2. $(X+1)^n - (X-1)^n$.
3. $(X^2+X)^n + (X^2-X)^n$.
4. $(X^2+X)^n - (X^2-X)^n$.

1.3 Équations à inconnue polynomiale

Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que

1. $P(2X) = P(X) - 1$.
2. $P(X^2) = (X^2+1)P$.
3. $P \circ P = P$.
4. $\exists Q \in \mathbb{K}[X], Q^2 = XP^2$.

1.4 Une suite de polynômes

On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $P_0 = 1, P_1 = -2X$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = -2XP_{n+1} - 2(n+1)P_n$$

1. Calculer P_2, P_3 et P_4.
2. Déterminer pour tout entier naturel n, le degré et le coefficient dominant de P_n.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, la fonction polynomiale associée à P_n a même parité que n.
4. Déterminer pour tout entier naturel n, $P_n(0)$.

1.5 Périodicité

Déterminer l'ensemble des fonctions polynomiales périodiques.

1.6 Décomposition pair/impair

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est impair lorsque $P(-X) = -P(X)$, on dit que P est pair lorsque $P(-X) = P(X)$.

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que P est pair si et seulement si ses coefficients d'indice impair sont tous nuls si et seulement s'il existe un polynôme R tel que $P = R(X^2)$.
2. Énoncer et démontrer un résultat similaire sur les polynômes impairs.
3. Démontrer que
$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \exists!(R_0, R_1) \in \mathbb{K}[X]^2, P = R_0(X^2) + XR_1(X^2)$$
4. Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $P(X)^2 = Q(X^2)$ (attention au parenthésage). Montrer qu'il existe un polynôme R tel que $P = R(X^2)$ ou $P = XR(X^2)$. Y a-t-il unicité d'un tel polynôme ?

1.7 Reste

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a, b \in \mathbb{K}$ tel que $a \neq b$.

1. Exprimer le reste R de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ à l'aide de $P(a)$ et $P(b)$.
2. Exprimer le reste R de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$ à l'aide de $P(a)$ et $P'(a)$.

1.8 Divisibilité composée

Soit A, B, P dans $\mathbb{K}[X]$. On suppose que P est non constant et que $A \circ P$ divise $B \circ P$. Montrer que A divise B.

1.9 Divisibilité composée, deuxième prise

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $P - X$ divise $(P \circ P) - X$.

1.10 Dix-septième problème de Hilbert

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$. Montrer qu'il existe $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = Q^2 + R^2$.

1.11 Racines de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré strictement inférieur à n.

1. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, calculer
$$\frac{1}{n} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} P(\omega)\omega^{-k}$$
2. On suppose à présent que $P \in \mathbb{Z}[X]$, $P(0) = 1$ et $\forall \omega \in \mathbb{U}_n, P(\omega) \in \mathbb{R}_+$. Montrer les coefficients de P appartiennent tous à $\{0, 1, -1\}$.

1.12 On a le droit ?

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Donner un sens à la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} P^{(n)}(X) X^{n+1}$. Exprimer sa dérivée en fonction de P.

1.13 Rigidité

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\forall k \in \mathbb{N}, P(k) = k^3$.

1.14 Une racine en plus

Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\sqrt{2}) = 0$. Montrer que $P(-\sqrt{2}) = 0$.

1.15 Équation dans $\mathbb{R}[X]$

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

1.16 Équation dans $\mathbb{C}[X]$

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(2X) = P'(X)P''(X)$.

1.17 Interpolation

Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré 2 tel que $P(-1) = 1, P(0) = 1$ et $P(1) = -1$. Déterminer ensuite l'ensemble
$$\{P \in \mathbb{R}[X] \quad | \quad P(-1) = 1 \wedge P(0) = -1 \wedge P(1) = -1\}$$

1.18 Sans calcul

Soit a, b, c trois scalaires deux à deux distincts. On pose

$$\mathrm{P}_a = \frac{(\mathrm{X}-b)(\mathrm{X}-c)}{(a-b)(a-c)}, \quad \mathrm{P}_b = \frac{(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-c)}{(b-a)(b-c)}, \quad \mathrm{P}_c = \frac{(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)}{(c-a)(c-b)}$$

Déterminer $\mathrm{P}_a + \mathrm{P}_b + \mathrm{P}_c$ sans calcul polynomial.

1.19 Factorisations

Factoriser dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, puis dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ les polynômes

1. $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$.
2. $\mathrm{X}^4 - 4$.
3. $\mathrm{X}^4 + 1$.
4. $\mathrm{X}^6 + 27$.
5. $(\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1)^2 + 1$.
6. $\mathrm{X}^5 - 10\mathrm{X}^4 + 25\mathrm{X}^3 - 25\mathrm{X}^2 + 10\mathrm{X} - 1$.
7. $\mathrm{X}^{2n} - 2\cos(na)\mathrm{X}^n + 1$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in]0, \pi[$.

1.20 Factorisation

Soit $\mathrm{P} = (1-\mathrm{X}^2)^3 + 8\mathrm{X}^3$.

1. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $\left(\dfrac{1-z^2}{2z}\right)^3 = -1$.
2. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, puis dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

1.21 Produit eulérien

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En factorisant $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{X}^k$ dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, déterminer la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$.

1.22 Polynômes de Hilbert

On pose $\mathrm{P}_0 = 1$, puis pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\mathrm{X}+k)$. On pose également

$$\mathrm{E} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}] \quad | \quad \mathrm{P}(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}\}$$

l'ensemble des polynômes à coefficients complexes qui stabilisent $\mathbb{Z}$. Enfin, on pose

$$\mathrm{F} = \left\{\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \mathrm{P}_k | n \in \mathbb{N}, (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}\right\}$$

l'ensemble des combinaisons entières des polynômes $(\mathrm{P}_k)_{k\in\mathbb{N}}$. L'objectif de cet exercice est de démontrer l'égalité $\mathrm{E} = \mathrm{F}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $\deg(\mathrm{P}_n) = n$ et $\mathrm{P}_n \in \mathrm{E}$.
2. Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2, \forall (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2, a\mathrm{P} + b\mathrm{Q} \in \mathrm{E}$.
3. En déduire que $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$.
4. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. On note n le degré de P. Montrer qu'il existe des complexes $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \mathrm{P}_k$. On pourra raisonner par récurrence sur n.
5. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$. Montrer qu'il existe un entier naturel n et des entiers relatifs $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \mathrm{P}_k$.
6. Conclure.

1.23 Polynômes de Tchebyshev ♡

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $\mathrm{T}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \cos(nt) = \mathrm{T}_n(\cos(t))$$

2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{T}_{n+2} = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1} - \mathrm{T}_n$$

3. Pour tout entier naturel n, déterminer le degré, le coefficient dominant et les racines de T_n.

1.24 Localisation de racines

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme unitaire dans $\mathbb{C}[X]$. Soit z une racine non nulle de P.

1. Montrer que
$$|z|^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^k.$$
2. En déduire que
$$|z| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|a_{n-1-i}|}{|z|^i}.$$
3. En déduire que
$$|z| \leq \max\left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right).$$
4. Démontrer la borne de Cauchy
$$|z| \leq 1 + \max(|a_0|, \ldots, |a_{n-1}|).$$

2 Fractions rationnelles

2.1 Racine carrée

Existe-t-il une fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F^2 = X$?

2.2 Logarithme

Soit $F \in \mathbb{C}(X) \backslash \mathbb{C}$. Existe-t-il une fraction rationnelle $G \in \mathbb{C}(X)$ telle que $G' = F'/F$?

2.3 Décomposition en éléments simples

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ puis dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

1. $\dfrac{X}{X^2 - 4}$.
2. $\dfrac{X^3 - 3X^2 + X - 4}{X - 1}$.
3. $\dfrac{X^5 + X^4 + 1}{X^3 - X}$.
4. $\dfrac{X + 1}{X^4 + 1}$.
5. $\dfrac{X}{(X^2 + 1)(X^2 + 4)}$.
6. $\dfrac{X^2 + X + 1}{(X - 1)^3(X + 1)}$ sous la forme $\frac{a}{X+1} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2} + \frac{d}{(X-1)^3}$.
7. $\dfrac{2X^3 + X^2 - X + 1}{X^2 - 2X + 1}$ sous la forme $P + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2}$.
8. $\dfrac{2X^4 + X^3 + 3X^2 - 6X + 1}{2X^3 - X^2}$ sous la forme $P + \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X-1/2}$.

En déduire l'expression de leurs dérivées n-ièmes, ainsi qu'un calcul de primitive dans $\mathbb{R}(X)$.