

Chaque colle comporte une question de cours ainsi qu'un ou plusieurs exercices. On prêter attention à l'utilisation correcte des quantificateurs, la rédaction rigoureuse de démonstration des implications et des équivalences, ainsi que l'emploi maîtrisé des différents modes de raisonnements. Les manipulations propres d'inégalités sont également un attendu fort.

## 1 Questions de cours.

- Toute définition, tout résultat dans l'ensemble des notions abordées (en particulier le formulaire de trigo) doit être parfaitement su et peut être ajouté aux items suivants.
- Lois de De Morgan : négation d'une disjonction, négation d'une conjonction. Énoncé et démonstration.
- L'exponentielle est l'unique fonction  $f$  dérivable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui vérifie  $f(0) = 1$  et  $f' = f$ . Méthode par analyse-synthèse, en supposant l'exponentielle connue.
- Inégalité triangulaire et son cas d'égalité. Inégalité triangulaire inverse. Énoncé et démonstration.
- Caractérisation de la partie entière par encadrement. Énoncé et démonstration.
- Continuité du sinus et du cosinus en 0, puis sur  $\mathbb{R}$ . Énoncé et démonstration.

## 2 Exercices.

Ils peuvent porter sur les deux paragraphes suivants, et exploiter toute notion du lycée.

## 3 Chapitre 1 : logique et théorie des ensembles

### Rudiments de logique

Notion d'assertion, de prédicat, table de vérité, négation, conjonction, disjonction. Double négation. Lois de De Morgan, négation d'une disjonction, négation d'une conjonction. Les preuves sont faites via des tables de vérité. Implication, contraposée, réciproque, équivalence.

### Quantification

Quantification, quantificateur universel, existentiel, existence d'un unique élément. Négation d'une assertion utilisant des quantificateurs. Conventions liées à l'ensemble vide. Double quantification, parenthésage d'une conjonction ou d'une disjonction quantifiée.

### Modes de raisonnements

Disjonction de cas, raisonnement par l'absurde, analyse-synthèse, récurrences simple, double, forte.

### Ensembles

Éléments, relation d'appartenance. Parties, relation d'inclusion, ensemble  $\mathcal{P}(E)$  des parties de  $E$ . Ensemble vide. Complémentaire. Différence. Définition d'un ensemble en extension, par une image, en compréhension. Produit cartésien d'une famille finie d'ensembles. Union, intersection d'une famille d'ensembles  $(E_i)_{i \in I}$ . Complémentaire d'une union, d'une intersection. Notion de recouvrement, de famille disjointe, de partition. Exemple des fibres de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ .

## 4 Chapitre 2 : révisions et compléments d'analyse

### Relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$

Axiomes d'une relation d'ordre totale, compatibilité avec l'addition par un réel quelconque et avec la multiplication par un réel positif dans  $\mathbb{R}$ . Multiplication par un réel négatif, Signe d'un inverse, décroissance de la fonction inverse sur  $\mathbb{R}_-^*$ , et sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Fonction (strictement)(dé)croissante, (strictement) monotone. Lorsque  $f$  est strictement

croissante sur  $A$ ,  $\forall (x, y) \in A^2, (x \leq y \iff f(x) \leq f(y))$ . Valeur absolue, multiplicativité, lien avec la racine carrée, encadrement par majoration de la valeur absolue. Inégalité triangulaire et son cas d'égalité. Inégalité triangulaire inverse. Encadrement de fractions. Intervalles de  $\mathbb{R}$ , parties majorées, minorées, bornées. Majorants, minorants, maximum, minimum. Unicité du maximum (resp. minimum) en cas d'existence. Partie entière d'un réel (existence admise). Caractérisation par encadrement. Croissance de  $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ .

## Trigonométrie réelle

Définition géométrique du cosinus et du sinus. Valeurs remarquables, formules d'addition, de duplication, de factorisation, de linéarisation. Fonction tangente. Addition et duplication. Expressions de  $\cos(a)$  et  $\sin(a)$  en fonction de  $t = \tan(a/2)$ . Continuité du sinus et du cosinus sur  $\mathbb{R}$ . Dérivabilité du sinus et du cosinus sur  $\mathbb{R}$ , expressions des dérivées, variations. Dérivabilité de la tangente, expression de la tangente, variations. Inégalité  $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$ .

★ ★ ★ ★ ★