

★★★

Planche 1

★★★

1. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente. Que dire de ses sous-suites ? Le démontrer.
2. Étudier l'éventuelle limite de la suite réelle u définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (2026 + (-1)^n)^{1/n}.$$

3. Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $]0, 1[$, convergente de limite dans $]0, 1[$. On définit par récurrence deux suites u, v par $u_0 \leq v_0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \lambda_n u_n + (1 - \lambda_n) v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = (1 - \lambda_n) u_n + \lambda_n v_n$$

Montrer que u et v sont convergentes de même limite.

★★★

Planche 2

★★★

1. Soit $q \in \mathbb{C}$. Quel est le comportement en l'infini de la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$?
2. On définit par récurrence $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ via $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{u_n} - 1$. Étudier sa convergence.
3. On considère une suite réelle u vérifiant

$$\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{n+p}{np}.$$

Montrer que u converge.

★★★

Planche 3

★★★

1. Théorème de la limite monotone. Énoncé et démonstration.
2. On définit pour tout entier naturel n , $u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Montrer que u est divergente.
3. Soit u une suite réelle positive vérifiant $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, u_{n+m} \leq u_n + u_m$. Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente de limite égale à sa borne inférieure.

★★★

Bonus

★★★

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$ et $u_n \rightarrow +\infty$. Montrer que u admet une suite extraite $u \circ \varphi$ vérifiant $u_{\varphi(n)} - n \rightarrow 0$.