IPESUP 2025/2026

Colle 2 filière PCSI   Vendredi 3 octobre 2025

⋆⋆⋆

Planche 1

⋆⋆⋆

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Quelle est la définition de la valeur absolue de x ? Continuité du sinus et du cosinus en 0, puis sur $\mathbb{R}$. Énoncé et démonstration.
2. Déterminer l'ensemble des réels x tels que $|x+3|-|x-1| = |2x+1|$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - v_n| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |v_n| \leqslant \varepsilon$$
Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier P tel que $\forall p \geqslant P, |u_p| \leqslant \varepsilon$.

⋆⋆⋆

Planche 2

⋆⋆⋆

1. La fonction inverse est-elle décroissante sur $\mathbb{R}^*$? Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 1$ et $f' = f$.
2. Soit $a \in]0,\pi[$. On pose $f : x \mapsto \dfrac{x-\cos(a)}{x^2-2x\cos(a)+1}$. Déterminer l'ensemble de définition de f, montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition. Exprimer sa dérivée. Déterminer le maximum et le minimum de la fonction f (s'ils existent).
3. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, la fonction tan est n-fois dérivable, et qu'il existe un fonction polynomiale P_n telle que $\tan^{(n)} = P_n(\tan)$. ($\tan^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de la foncton tangente).

⋆⋆⋆

Planche 3

⋆⋆⋆

1. Formules d'addition et de duplication du sinus. Énoncé. Inégalité triangulaire et son cas d'égalité. Énoncé et démonstration.
2. Démontrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1-\frac{x^2}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$
3. Soit $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Montrer que la fonction $x \mapsto \cos(x)+\cos(ax)$ n'est pas périodique.

⋆⋆⋆

Bonus

⋆⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie d'ensembles telle que
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \exists k \in [\![1,n]\!], E_i \cup E_j \subset E_k.$$
Montrer qu'il existe un entier k dans $[\![1,n]\!]$ tel que
$$\forall i \in [\![1,n]\!], E_i \subset E_k.$$