Calcul matriciel

Cornou Jean-Louis

10 décembre 2025

L'objectif de ce chapitre est essentiellement pratique : se familiariser avec le calcul matriciel. Les structures d'espaces vectoriels qui donnent un sens algébrique à ces opérations sont établies plus tard dans l'année. Dans tout ce qui suit, le symbole $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour alléger le texte, les symboles n, p, q désignent des entiers naturels non nuls.

1 Opérations sur les matrices

1.1 Notion de matrice.

Définition 1 *On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, i.e une application de $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ dans $\mathbb{K}$. L'ensemble de ces objets est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*

Notation
On note classiquement une telle matrice sous la forme $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$. On la représente sous forme rectangulaire de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p-1} & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p-1} & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p-1} & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,j} & \cdots & a_{n-1,p-1} & a_{n-1,p} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p-1} & a_{n-1,p} \end{pmatrix}$$

Notation
L'ensemble de ces objets est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note de manière raccourcie $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 2 *Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. On dit que $a_{i,j}$ est le coefficient de A de place (i,j). Il est placé en i-ième ligne et j-ième colonne.*

⚠ **Attention**
Il faut mémoriser la convention d'ordre sur la numérotation des coefficients et la représentation rectangulaire des matrices.

Exercice 1 *Représenter en tableau rectangulaire la matrice $A = (i - j^2)_{1\leq i\leq 4, 1\leq j\leq 3}$.*

Définition 3 *Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*

- *Soit $i \in [\![1,n]\!]$. La famille de scalaires $(a_{i,k})_{1\leq k\leq p}$ est appelée la i-ième ligne de A, parfois notée L_i, c'est un élément de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$.*
- *Soit $j \in [\![1,p]\!]$. La famille de scalaires $(a_{k,j})_{1\leq j\leq n}$ est appelée la j-ième ligne de A, parfois notée C_j, c'est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.*

Définition 4 *Soit $(s,t) \in \mathbb{N}^2$. On appelle symbole de Kronecker le scalaire 1 si $s = t$, 0 si $s \neq t$. Il est noté $\delta_{s,t}$.*

Définition 5 *Soit* $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. *On appelle matrice élémentaire d'indice* (i,j) *la matrice dont tous les coefficients sont nuls, excepté le coefficient de place* (i,j) *qui vaut* 1. *Elle est notée* $\mathrm{E}_{i,j}^{(n,p)}$ *ou* $\mathrm{E}_{i,j}$ *s'il n'y a pas d'ambiguïté sur ses dimensions.*

Propriété 1 *Soit* $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. *Les coefficients de la matrice élémentaire* $\mathrm{E}_{i,j}$ *sont donnés par la famille*

$$\forall (k,l) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], (\mathrm{E}_{i,j})_{k,l} = \delta_{i,k}\delta_{j,l}$$

Démonstration. Soit $(k,l) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. Alors si k est différent de i ou l différent de j, le coefficient $(\mathrm{E}_{i,j})_{k,l}$ de place (k,l) de la matrice élémentaire $\mathrm{E}_{i,j}$ est nul. D'autre part, $\delta_{i,k}\delta_{j,l}$ est nul comme produit de réels dont l'un est nul. Si $k=i$ et $j=l$, alors le coefficient $(\mathrm{E}_{i,j})_{k,l}$ de place (k,l) de la matrice élémentaire $\mathrm{E}_{i,j}$ vaut 1. D'autre part, dans ce cas, $\delta_{i,k}\delta_{j,l} = 1 \times 1 = 1$. Dans tous les cas, on a égalité.

Notation
La matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *de coefficients tous nuls est notée* $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$. *S'il n'y a pas d'ambiguïté, on la note* 0 *ou* $0_{n,p}$, *voire* 0_n *lorsque* $n = p$.

Définition 6 *Les matrices de* $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ *sont appelées matrices-lignes. Les matrices de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *sont appelées matrices colonnes.*

1.2 Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Définition 7 *Soit* $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\le i\le n, 1\le j\le p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *La matrice* $(\lambda a_{i,j})_{1\le i\le n,1\le j\le p}$ *est appelée le produit du scalaire* λ *par la matrice* A. *Elle est notée* $\lambda \cdot \mathrm{A}$ *ou* $\lambda\mathrm{A}$.

☞ **Remarque**
Cela fournit une application $\mathbb{K} \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), (\lambda, \mathrm{A}) \mapsto \lambda\mathrm{A}$ *qu'on appelle parfois multiplication externe. Attention, il ne s'agit pas d'une loi de composition interne.*

Définition 8 *Soit* $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\le i\le n,1\le j\le p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $\mathrm{B} = (b_{i,j})_{1\le i\le n,1\le j\le p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *La matrice* $(a_{i,j} + b_{i,j})_{1\le i\le n,1\le j\le p}$ *est appelée la somme des matrices* A *et* B, *elle est notée* $\mathrm{A}+\mathrm{B}$.

Propriété 2 *L'ensemble* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *muni de l'addition définie ci-dessus vérifie les points suivants :*

- $\forall (\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^3, (\mathrm{A}+\mathrm{B})+\mathrm{C} = \mathrm{A}+(\mathrm{B}+\mathrm{C})$.
- $\forall \mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \mathrm{A} + 0_{n,p} = 0_{n,p} + \mathrm{A} = \mathrm{A}$.
- $\forall \mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \mathrm{A} + (-\mathrm{A}) = (-\mathrm{A}) + \mathrm{A} = 0_{n,p}$.
- $\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2, \mathrm{A}+\mathrm{B} = \mathrm{B}+\mathrm{A}$.

On dit que $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ *est un groupe commutatif.*

Démonstration. Soit A et B des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

- Associativité : Soit $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $\mathrm{C} = (c_{i,j})_{1\le i\le n,1\le j\le p}$ la famille de ses coefficients. Fixons (i,j) dans $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. Avec des notations évidentes, d'après la définition de la somme de matrices, on a

  $$((\mathrm{A}+\mathrm{B})+\mathrm{C})_{i,j} = (\mathrm{A}+\mathrm{B})_{i,j} + c_{i,j} = (a_{i,j} + b_{i,j}) + c_{i,j}$$

  Or l'addition dans $\mathbb{K}$ est associative dans $\mathbb{K}$. On en déduit que

  $$(a_{i,j} + b_{i,j}) + c_{i,j} = a_{i,j} + (b_{i,j} + c_{i,j}) = a_{i,j} + (\mathrm{B}+\mathrm{C})_{i,j} = (\mathrm{A}+(\mathrm{B}+\mathrm{C}))_{i,j}$$

  Ceci étant vrai pour tout (i,j) dans $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on en déduit que $(\mathrm{A}+\mathrm{B})+\mathrm{C} = \mathrm{A}+(\mathrm{B}+\mathrm{C})$.
- Neutre : On vérifie que la matrice $0 = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$ est le neutre de cette lci. Fixons (i,j) dans $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. Alors, comme 0 est le neutre de l'addition dans $\mathbb{K}$, on a

  $$(\mathrm{A}+0)_{i,j} = a_{i,j} + 0 = a_{i,j} = \mathrm{A}_{i,j} \quad \text{et} \quad (0+\mathrm{A})_{i,j} = 0 + a_{i,j} = a_{i,j} = \mathrm{A}_{i,j}$$

  Comme ceci est vrai pour tout (i,j) dans $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on en déduit que $\mathrm{A}+0 = 0+\mathrm{A} = \mathrm{A}$, donc que la matrice nulle est le neutre de cette lci.

— Symétrique : on note $A' = (-a_{i,j})_{1\le i\le n, 1\le j\le p}$, ce qui est possible puisque tout élément de $\mathbb{K}$ possède un symétrique par l'addition de $\mathbb{K}$. Fixons (i,j) dans $[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$. Alors

$$(A+A')_{i,j} = a_i, j + (-a_{i,j}) = 0 \quad \text{et} \quad (A'+A)_{i,j} = -a_{i,j} + a_{i,j} = 0$$

On conclut donc que $A + A' = A' + A = 0$, donc que A admet un symétrique pour cette lci.

— Commutativité. Comme le corps $\mathbb{K}$ est commutatif,

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!], a_{i,j} + b_{i,j} = b_{i,j} + a_{i,j}$$

On en déduit que $A + B = B + A$, donc que la lci est commutative.

En conclusion, $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe commutatif.

Propriété 3 — *La multiplication externe par un scalaire est distributive à gauche par rapport à l'addition matricielle :*

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}^2), \lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$$

— *La multiplication externe par un scalaire est distributive à droite par rapport à l'addition du corps $\mathbb{K}$:*

$$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), (\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$$

— *La multiplication externe agit à gauche sur les matrices*

$$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$$

— *Le neutre mutliplicatif de $\mathbb{K}$ laisse les matrices invariantes par multiplication externe*

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), 1_K A = A$$

Démonstration. Il s'agit de vérifications immédiates qui découlent de la structure d'anneau de $\mathbb{K}$ transportés sur chaque coefficient des matrices considérées. Les deux premiers points découlent de la distributivité de l'addition sur la multiplication dans $\mathbb{K}$. Le troisième point découle de l'associativité du produit dans $\mathbb{K}$. Le quatrième découle des propriétés du neutre multiplicatif de $\mathbb{K}$

☞ Remarque

Muni de toutes ces propriétés, on dit que l'ensemble $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel).

Définition 9 *Soit $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^I$ une famille quelconque de matrices à n lignes et p colonnes. On appelle combinaison linéaire des matrices $(A_i)_{i\in I}$ toute matrice de la forme*

$$\sum_{i\in I} \lambda_i A_i$$

avec $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ une famille de scalaires nulles sauf pour un nombre fini d'entre eux.

Propriété 4 *Soit $A = (a_{i,j})_{1\le i\le n, 1\le j\le p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors A est combinaison linéaire de matrices élémentaires. Plus précisément,*

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} E_{i,j}$$

Démonstration. Pour montrer que deux matrices sont égales, il suffit de vérifier que tous leurs coefficients sont égaux. Soit $(k,l) \in [\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$. Alors d'après la définition de la multiplication externe et des sommes de matrices,

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} E_{i,j}\right)_{k,l} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\left(E_{i,j}\right)_{k,l} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\delta_{i,k}\delta_{j,l} = a_{k,l}$$

Comme le coefficient de A de place (k,l) vaut $a_{k,l}$, on en déduit que ces deux matrices sont égales.

1.3 Le produit matriciel entre $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Les raisons profondes de cette définition seront établies au prochain semestre. Donnons un exemple introductif légèrement niais. Pour préparer un pain, on lit qu'il faut 500g de farine, 15 cl d'eau et 5g de sel. Pour préparer des crêpes, il me faut 330g de farine, 75 cl d'eau et 10g de sel. Si je souhaite préparer 3 pains et 2 unités de crêpes, les quantités requises sont $3 \times 500 + 2 \times 330$ grammes de farine, $3 \times 15 + 2 \times 75$ centilitres d'eau et $3 \times 5 + 2 \times 10$ grammes de sel. On l'écrit sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 500 & 330 \\ 15 & 75 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 500 + 2 \times 330 \\ 3 \times 15 + 2 \times 75 \\ 3 \times 5 + 2 \times 10 \end{pmatrix}$$

A l'inverse, si l'on dispose de 1000 grammes de farines, 200 centilitres d'eau, et 20 grammes de sel, on se demande combien de pain et de crêpes on peut préparer, ce qui revient à résoudre le système linéaire $500x + 330y = 1000, 15x + 75y = 200, 5x + 10y = 20$. On l'écrit sous forme matricielle sous la forme

$$\begin{pmatrix} 500 & 330 \\ 15 & 75 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 200 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Remarque fondamentale : le nombre de colonnes de la première matrice est égal au nombre de lignes de la seconde matrice.

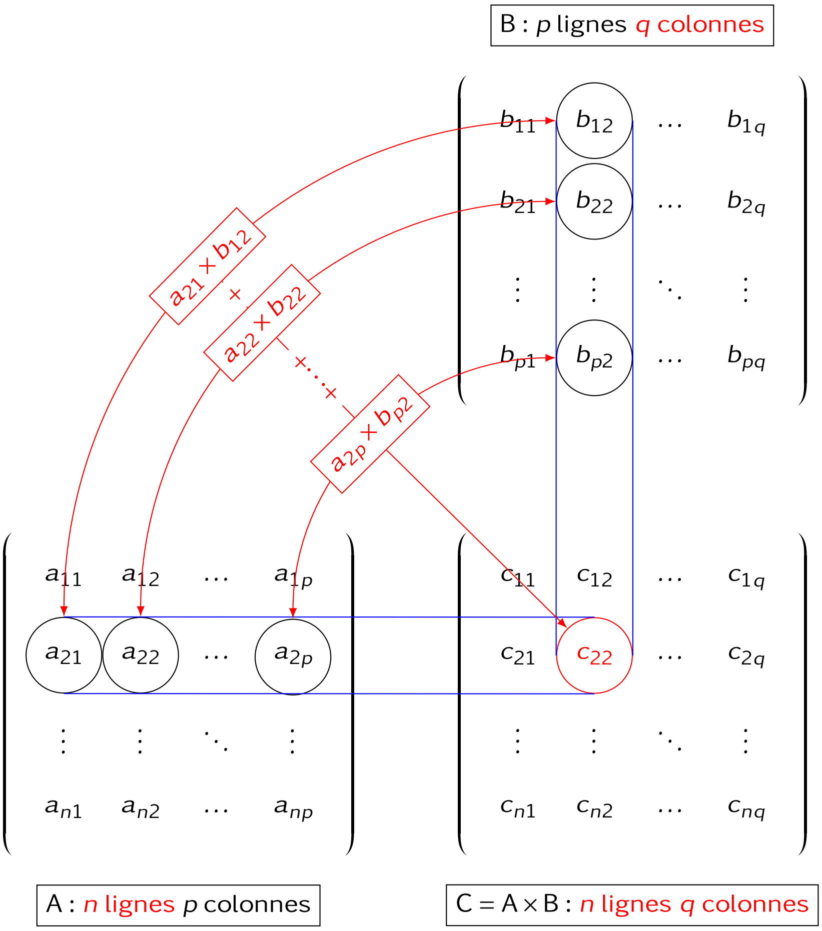
Définition 10 *Soit* $\mathrm{A} = (a_{i,k})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $\mathrm{B} = (b_{k,j})_{1 \leq k \leq p, 1 \leq j \leq q} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$*. Pour tout* (i,j) *dans* $[\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$*, on pose*

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

La matrice $\mathrm{C} = (c_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq q} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ *est appelée produit de la matrice* A *et de la matrice* B*, notée* AB.

⚠ **Attention**
L'ordre des matrices a une importance primordiale, tout comme l'ordre des indices, ainsi que les dimensions des matrices considérées. Inutile d'essayer de multiplier une matrice à 3 *lignes et* 4 *colonnes par une matrices à* 3 *lignes et de* 2 *colonnes. Ce n'est pas défini.*

Pour calculer des produits matriciels, on propose souvent la disposition en quiconce suivante (bien que je connaisse des professeurs qui la détestent) :



Exercice 2 *Calculer le produit matriciel des matrices* $A = (i+j)_{1\leq i\leq 4, 1\leq j\leq 2}$ *et* $B = (|i-j|)_{1\leq i\leq 2, 1\leq j\leq 3}$*, puis le produit de* B *par* A*. Sont-ils égaux ?*

Exemple 1 *Cas particulier importants :*

- *Le produit d'une matrice de* $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ *par une matrice de* $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ *(i.e une matrice colonne à p lignes) est une matrice à n lignes,* 1 *colonne.*
- *Le produit d'une matrice ligne à p colonnes, i.e une matrice dans* $\mathcal{M}_{1,p}(K)$ *par une matrice à p lignes, q colonnes, i.e une matrice dans* $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ *est une matrice ligne à q colonnes, i.e un élément de* $\mathcal{M}_{1,q}(\mathbb{K})$*.*
- *Le produit d'une matrice ligne à p colonnes par une matrice colonne à p lignes donne une matrice de taille* 1×1*.*
- *Le produit d'une matrice colonne à n lignes par une matrice ligne à q colonnes donne une matrice de taille* $n\times q$*, i.e à n lignes et q colonnes.*

Propriété 5 *Avec les mêmes notations qu'en définition du produit matriciel, on pose pour tout entier* i *dans* $[\![1,n]\!]$*,* $L_i(A)$ *la* i*-ième ligne de* A*, pour tout entier* j *dans* $[\![1,q]\!]$*,* $C_j(B)$ *la* j*-ième colonne de* B*. Alors*

$$L_i(A)C_j(B) = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$$

Démonstration. Les coefficients de $L_i(A)$ sont les $(a_{i,k})_{1\leq k\leq p}$, ceux de $C_j(B)$ sont les $(b_{k,j})_{1\leq k\leq p}$. On en déduit que le produit de ces matrices est une matrice à 1 ligne et 1 colonne, dont le coefficient est donné par $\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$. On reconnaît alors le coefficient de place (i,j) du produit matriciel de A par B, soit $c_{i,j}$ avec les notations précédentes.

☞ **Remarque**
La plupart du temps, on identifie $\mathbb{K}$ *et* $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$*.*

Propriété 6 *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$*. Alors le produit* AX *est une matrice colonne qui est combinaison linéaire des colonnes de* A*.*

Démonstration. Notons $X = (x_{k,1})_{1\leq k\leq p}$ les coefficients de X. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]\times[\![1,1]\!]$, alors le coefficient de place $(i,j) = (i,1)$ de la matrice produit AX vaut

$$\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}x_{k,1}$$

Ainsi, la matrice colonne AX a pour coefficients $(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}x_{k,1})_{1\leq i\leq n}$. Or $C_k(A)$, la colonne de rang k de A est constituée des coefficients $(a_{i,k})_{1\leq i\leq n}$. D'après les combinaisons linéaires de matrices, la matrice colonne $\sum_{k=1}^{p} x_{k,1}C_k(A)$ a pour coefficients $(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}x_{k,1})_{1\leq i\leq n}$. On reconnaît alors la matrice AX.

Théorème 1 (Produit de matrices élémentaires) *Soit* $(i,j) \in [\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$ *et* $(k,l) \in [\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]$. *Alors*

$$E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$$

Démonstration. Soit $(r,t) \in [\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]$, alors d'après la définition du produit matriciel

$$(E_{i,j}E_{k,l})_{r,t} = \sum_{s=1}^{p}(E_{i,j})_{r,s}(E_{k,l})_{s,t} = \sum_{s=1}^{p}\delta_{i,r}\delta_{j,s}\delta_{k,s}\delta_{l,t}$$

- Premier cas : $j \neq k$. Alors les coefficients de Kronecker $\delta_{j,s}\delta_{k,s}$ seront nuls pour tout s dans $[\![1,p]\!]$, donc la somme sera nulle.
- Deuxième cas $j = k$. Alors, un seul terme de cette somme est non nul, le terme pour $s = j = k$. Dans ce cas,

  $$(E_{i,j}E_{k,l})_{r,t} = \delta_{i,r}\delta_{l,t}$$

  On reconnaît alors le coefficient de place (r,t) de la matrice élémentaire $E_{i,l}$.

Dans tous les cas,

$$(E_{i,j}E_{k,l})_{r,t} = \delta_{j,k}(E_{i,l})_{r,t}$$

Comme cela est vrai pour tout (r,t) dans $[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]$, on a bien l'égalité de matrices annoncée.

Propriété 7 *Dans le cas où $n = p = q$ est supérieur ou égal à 2, le produit matriciel n'est pas commutatif.*

Démonstration. Effectuons le produit matriciel de $E_{1,1}$ par $E_{1,2}$. D'après ce qui précède,

$$E_{1,1}E_{1,2} = E_{1,2} \quad \text{et} \quad E_{1,2}E_{1,1} = 0$$

Ainsi, $E_{1,1}E_{1,2} \neq E_{1,2}E_{1,1}$.

Propriété 8 (Associativité) *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$. *Alors*

$$(AB)C = A(BC)$$

Démonstration. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$. Avec des notations évidentes, l'associativité et la distributivité du produit dans $\mathbb{K}$ assure que

$$((AB)C)_{i,j} = \sum_{k=1}^{r}(AB)_{i,k}c_{k,j} = \sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{l=1}^{q}a_{i,q}b_{q,k}\right)c_{k,j} = \sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{q}a_{i,q}b_{q,k}c_{k,j}$$

De même

$$(A(BC))_{i,j} = \sum_{l=1}^{q}a_{i,q}(BC)_{q,j} = \sum_{l=1}a_{i,q}\left(\sum_{k=1}^{r}b_{q,k}c_{k,j}\right) = \sum_{l=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}a_{i,q}b_{q,k}c_{k,j}$$

Comme la somme est commutative dans $\mathbb{K}$, on peut affimer que ces deux sommes sont égales pour tout (i,j) dans $[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, donc que les matrices (AB)C et A(BC) sont égales.

Propriété 9 (Bilinéarité du produit matriciel) *Soit* $(A,B) \in (\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}))^2$ *et* $(C,D) \in (\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}))^2$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$.

- *Linéarité à gauche*

  $$(\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC$$

- *Linéarité à droite*

  $$A(\lambda C + \mu D) = \lambda AC + \mu AD$$

Démonstration. On vérifie ces égalités de matrices coefficient par coefficient. Elles résultent de la distributivité dans $\mathbb{K}$ et de la commutativité du produit dans $\mathbb{K}$. Soit $(i,j) \in [\![1,n,]\!] \times [\![1,q]\!]$. Alors, la linéarité des sommes dans $\mathbb{K}$ entraîne

$$((\lambda A + \mu B)C)_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} (\lambda A + \mu B)_{i,k} C_{k,j} = \lambda \sum_{k=1}^{q} A_{i,k} C_{k,j} + \mu \sum_{k=1}^{q} B_{i,k} C_{k,j} = \lambda (AC)_{i,j} + \mu (BC)_{i,j}$$

On procède de même pour la linéarité à droite.

Propriété 10 *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

— *Soit* $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. *On considère la matrice élémentaire* $E_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *alors la matrice* $E_{i,j}A$ *est constituée de la* j*-ième ligne de* A *placée en* i*-ième ligne. Tous les autres coefficients sont nuls*

— *Soit* $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$. *On considère la matrice élémentaire* $E_{i,j} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. *La matrice* $AE_{i,j}$ *est constituée de la* i*-ième colonne de* A *placée en* j*-ième colonne. Tous les autres coefficients sont nuls.*

Démonstration. On peut faire un diagramme de multiplication ou faire le feignant en écrivant

$$E_{i,j}A = E_{i,j} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} a_{k,l} E_{k,l} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} a_{k,l} E_{i,j} E_{k,l} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} a_{k,l} \delta_{j,k} E_{i,l} = \sum_{l=1}^{p} a_{j,l} E_{i,l}$$

On constate ainsi que seuls les coefficients en i-ième ligne de $E_{i,j}A$ sont non nuls. D'après ce qui précède, $L_i(E_{i,j}A) = (a_{j,l})_{1 \le l \le p} = L_j(A)$. D'autre part,

$$AE_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} a_{k,l} E_{k,l} \right) E_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} a_{k,l} E_{k,l} E_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} a_{k,l} \delta_{i,l} E_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} E_{k,j}$$

Nous constatons que seuls les coefficients en j-ième colonne de $AE_{i,j}$ sont non nuls et qu'on a $C_j(AE_{i,j}) = (a_{k,i})_{1 \le k \le n} = C_i(A)$.

Exemple 2 *Cas particulier : on considère les matrices élémentaires* $E_{i,1}$ *dans* $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ *pour* i *allant de* 1 *à* p. *Alors la matrice* $AE_{i,1}$ *est une matrice colonne à* n *lignes égale à la* i*-ième colonne de* A. *Si l'on considère les matrices élémentaires* $E_{1,j} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ *pour* j *allant de* 1 *à* n, *alors la matrice* $E_{1,j}A$ *est une matrice ligne à* p *colonnes constituée de la* j*-ième ligne de* A.

1.4 Transposition

Définition 11 *Soit* $A = (a_{i,j})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *La matrice de coefficients* $(a_{i,j})_{1 \le j \le p, 1 \le i \le n}$ *est appelée matrice transposée de* A. *Elle appartient à* $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ *et est notée* A^T

☞ **Remarque**
Le coefficient de place (i,j) *de* A^T *est celui de place* (j,i) *de* A *car la place tient compte de l'ordre des indices.*

Notation
On trouve encore l'ancienne notation ${}^tA$.

Propriété 11 *La transposition est une application linéaire, i.e*

$$\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad (\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$$

Démonstration. Soit $(j,i) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$. Alors

$$(\lambda A + \mu B)_{i,j} = \lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}$$

Ainsi, le coefficient de place (j,i) de sa transposée vaut

$$(\lambda A + \mu B)^T_{j,i} = \lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}$$

On reconnaît alors $A^T_{j,i} = a_{i,j}$ et $B^T_{j,i}) = b_{i,j}$, ce qui s'écrit

$$(\lambda A + \mu B)^T_{j,i} = \lambda A^T_{j,i} + \mu B^T_{j,i}$$

Comme ceci est vrai pour tout $(j,i) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$, on en déduit l'égalité de matrices

$$(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$$

Propriété 12 *La transposition est « anti-multiplicative », i.e*

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \quad (AB)^{\mathsf{T}} = (B^{\mathsf{T}})(A^{\mathsf{T}})$$

Démonstration. Pour alléger les notations, nous notons les coefficients des matrices transposées avec des apostrophes. Notons $C = AB$. Soit $(j,i) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,n]\!]$. Alors le coefficient de place (i,j) de AB vaut

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} a'_{k,i} b'_{j,k} = \sum_{k=1}^{p} b'_{j,k} a'_{k,i}$$

On reconnaît alors le coefficient de place (j,i) du produit $(B^{\mathsf{T}})(A^{\mathsf{T}})$. Comme cela est vrai pour tout (j,i) dans $[\![1,q]\!] \times [\![1,n]\!]$, on a l'égalité de matrices $C^{\mathsf{T}} = (B^{\mathsf{T}})(A^{\mathsf{T}})$, i.e $(AB)^{\mathsf{T}} = (B^{\mathsf{T}})(A^{\mathsf{T}})$.

Propriété 13 *La transposition est involutive.*

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \left(A^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}} = A$$

Démonstration. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. Alors le coefficient de place (j,i) de A^{T} vaut $a_{i,j}$. Par conséquent, celui de place (i,j) de $(A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}$ vaut $a_{i,j}$. Comme cela est vrai pour tous les indices, on a l'égalité de matrices annoncée.

2 Matrices carrées.

2.1 Anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarquons que si l'on multiplie une matrice à n lignes et n colonnes par une matrice à n lignes et n colonnes, on obtient une matrice à n lignes et n colonnes. Ainsi, le produit matriciel fournit une loi de composition interne à l'ensemble des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 12 *On appelle matrice identité de taille n, la matrice de coefficients* $(\delta_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$*. Elle est notée* I_n.

Propriété 14 *La matrice* I_n *vérifie*

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AI_n = I_nA = A$$

On dit que c'est le neutre multiplicatif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Alors le coefficient de place (i,j) de la matrice AI_n vaut

$$(AI_n)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\delta_{k,j} = a_{i,j} = A_{i,j}$$

Pour la matrice I_nA, cela donne

$$(I_nA)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k} a_{k,j} = a_{i,j} = A_{i,j}$$

Comme cela est vrai pour tout (i,j) dans $[\![1,n]\!]^2$, on a l'égalité de matrices $AI_n = I_nA = A$.

⚠ **Attention**
Supposons $n \geq 2$*. Alors, on a vu que* $E_{1,1}E_{1,2} = E_{1,2}$ *tandis que* $E_{1,2}E_{1,1} = 0$*. Ainsi, le produit n'est pas commutatif et la règle du produit nul valide dans* $\mathbb{K}$*, ne l'est plus dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriété 15 (Formules du binôme et de Bernoulli) *Soit* $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ *tel que* $AB = BA$ *(on dit que* A *et* B *commutent). Alors pour tout entier naturel n,*

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

$$A^n - B^n = (A-B)\sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{n-1-k}$$

Démonstration. Voir le cours sur les anneaux.

⚠ **Attention**
Appliquer la formule du binôme ou celle de Bernoulli à des matrices sans préciser qu'elles commutent est pénalisé.

Exercice 3 *Calculer les puissances de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Un peu de zoologie

Définition 13 *On appelle matrice scalaire toute matrice de la forme* λI_n*, avec* $\lambda \in \mathbb{K}$.

Définition 14 *Soit* $A \in \mathbb{K}$. *On dit que* A *est*

- *symétrique lorsque* $A^T = A$.
- *antisymétrique lorsque* $A^T = -A$

Notation
L'ensemble des matrices symétriques est notée $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$*, celui des matrices antisymétriques est noté* $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

⚠ **Attention**
Ces espaces sont stables par combinaison linéaire. Pour $n \geq 2$*, il ne sont pas stables par produit.*

Propriété 16

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{0\}$$

Démonstration. Il est clair que la matrice nulle est à la fois symétrique et antisymétrique. Soit A une matrice à la fois symétrique et antisymétrique. Alors

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{i,j} = a_{j,i} = -a_{j,i}$$

Donc

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, 2a_{j,i} = 0$$

Ainsi, tous les coefficients de A sont nuls et $A = 0$.

Propriété 17 *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Alors*

$$\exists!(S,A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{K}), M = S + A$$

Plus précisément, ces matrices ont pour forme $S = (M + M^T)/2$ *et* $A = (M - M^T)/2$.

Démonstration. D'une part, $(M + M^T)/2 + (M - M^T)/2 = M$. Par linéarité et involutivité de la transposition, $((M + M^T)/2)^T = (M^T + M)/2$, donc $(M + M^T)/2$ est symétrique. De même, $((M - M^T)/2)^T = (-M^T + M)/2 = -(M - M^T)/2$, ce qui en fait une matrice antisymétrique. On a ainsi prouvé l'existence de la décomposition, et que la forme annoncée est satisfaisante.
Prouvons l'unicité, soit (S', A') un autre couple qui satisfait ces critères. Alors $S - S' = A' - A$. Commes $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont stables par combinaison linéaires, $S - S'$ est symétrique et $A' - A$ est antisymétrique. D'après ce qui précède, cette matrice est nulle, donc $S = S'$ et $A = A'$.

Définition 15 *Soit* $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *On dit que* A *est*

- *diagonale lorsque* $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.
- *triangulaire supérieure lorsque* $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.
- *triangulaire supérieure stricte lorsque* $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \geq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.
- *triangulaire inférieure lorsque* $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.
- *triangulaire inférieure stricte lorsque* $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \leq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.

Notation
On note parfois une matrice diagonale sous la forme $\mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$. *On rencontre les notations* $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ *pour désigner ces ensembles de matrices.*

Propriété 18 *Tous ces ensembles sont stables par produit. De plus, la diagonale de leur produit est composée des produits des éléments diagonaux de chaque matrice. Plus précisément, soit* A, B *deux telles matrices, alors pour tout entier* i *dans* $[\![1,n]\!]$, $(\mathrm{AB})_{i,i} = \mathrm{A}_{i,i}\mathrm{B}_{i,i}$

Démonstration. — Soit A et B deux matrices diagonales et C = AB. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Alors le coefficient de place (i,j) de la matrice C vaut

$$\mathrm{C}_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

Si i est différent de j, pour tout k dans $[\![1,n]\!]$, $a_{i,k}b_{k,j} = 0$ car A et B sont diagonales. Si $i = j$, alors un seul terme dans la somme est non nul, celui pour $k = i = j$, i.e $\mathrm{C}_{i,i} = a_{i,i}b_{i,i}$. En conclusion C est diagonale et pour tout entier i dans $[\![1,n]\!]$, $(\mathrm{AB})_{i,i} = a_{i,i}b_{i,i}$.

— Soit A et B deux matrices triangulaires supérieures, C = AB, et $i > j$ dans $[\![1,n]\!]^2$. Alors

$$\mathrm{C}_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

Or pour tout entier k dans $[\![1,n]\!]$, si $k < i$, $a_{i,k} = 0$. Si $k \geq i$, alors par transitivité $k > j$, donc $b_{k,j} = 0$. Dans tous les cas, $a_{i,k}b_{k,j} = 0$ et la somme précédente est nulle. Donc $\mathrm{C}_{i,j} = 0$ et ce pour tous indices i, j tels que $i > j$. Ainsi, C est triangulaire supérieure. Soit à présent i dans $[\![1,n]\!]$, alors

$$\mathrm{C}_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i}$$

Avec la même analyse que précédemment, seul un terme de la somme sera non nul, celui pour $k = i$. On obtient donc $\mathrm{C}_{i,i} = a_{i,i}b_{i,i}$.

— On se place dans le cas supérieur stricte, alors avec les mêmes notations, fixons $i \geq j$ dans $[\![1,n]\!]^2$.

$$\mathrm{C}_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

Pour tout entier k dans $[\![1,n]\!]$, si $k \leq i$, alors $a_{i,k} = 0$. Si $k > i$, alors $k \geq j$ par transitivité et $b_{k,j} = 0$. Dans tous les cas, $a_{i,k}b_{k,j} = 0$ et la somme précédente est nulle. Ainsi, C est supérieure stricte. Dans ce cas, la diagonale ne comporte que des zéros.

— Soit A et B triangulaires inférieures, alors A^T et B^T sont triangulaires supérieures. D'après ce qui précède, $(\mathrm{AB})^\mathsf{T} = \mathrm{B}^\mathsf{T}\mathrm{A}^\mathsf{T}$ est triangulaire supérieure, i.e AB est triangulaire inférieure. De plus, la transposition laisse la diagonale inchangée, donc le résultat sur les coefficients diagonaux reste valide.

— On refait comme précédemment en transposant.

2.2 Groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Définition 16 *Soit* $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *On dit que* A *est inversible lorsque*

$$\exists \mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{AB} = \mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$$

Une telle matrice B *est appelée inverse de* A.

Propriété 19 *Soit* $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *une matrice inversible. Alors son inverse est unique. Il est noté* A^{-1}.

Démonstration. Soit $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2$ deux inverses de A. Alors

$$\mathrm{B}_1 = \mathrm{B}_1\mathrm{I}_n = \mathrm{B}_1(\mathrm{AB}_2) = (\mathrm{B}_1\mathrm{A})\mathrm{B}_2 = \mathrm{I}_n\mathrm{B}_2 = \mathrm{B}_2$$

⚠ **Attention**
Interdiction d'utiliser la notation A^{-1} *avant d'avoir prouvé l'inversibilité d'une matrice.*

Définition 17 *L'ensemble des éléments inversibles de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est appelé groupe linéaire d'ordre* n *sur* $\mathbb{K}$, *noté* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Propriété 20 *La structure* $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ *vérifie les propriétés suivantes :*

— $\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), (\mathrm{AB})\mathrm{C} = \mathrm{A}(\mathrm{BC})$.

— $\forall (A,B) \in GL_n(\mathbb{K})^2, AB \in GL_n(\mathbb{K})$.
— $\forall A \in GL_n(\mathbb{K}), AI_n = I_nA = A$.
— $\forall A \in GL_n(\mathbb{K}), A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$.

Pour $n \geq 2$, le produit dans $GL_n(\mathbb{K})$ n'est pas commutatif, i.e il existe des matrices inversibles A, B telles que $AB \neq BA$.

Démonstration. — Associativité du produit matriciel déjà démontrée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A fortiori, elle est valide dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

— Soit $(A,B) \in GL_n(\mathbb{K})^2$. Montrons que AB est inversible. On calcule les produits suivants :

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$$

Par conséquent, $B^{-1}A^{-1}$ satisfait tous les critères pour que AB soit inversible. On a prouvé au passage que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

— Le neutre multiplicatif I_n est valide dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a fortiori valide dans $GL_n(\mathbb{K})$.

— Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$, donc A satisfait les critères pour que A^{-1} soit inversible. On a prouvé au passage que $(A^{-1})^{-1} = A$.

Supposons que $n \geq 2$. On pose $A = I_n + E_{1,2}$ et $B = I_n + E_{2,1}$. Commençons par montrer que ces matrices sont inversibles. On remarque que $A(I_n - E_{1,2}) = I_n + E_{1,2} - E_{1,2} + E_{1,2}E_{1,2} = I_n$ et que $(I_n - E_{1,2})A = I_n + E_{1,2} - E_{1,2} + E_{1,2}E_{1,2} = I_n$. Ainsi, A est inversible. De même, on montre que $B(I_n - E_{2,1}) = (I_n - E_{2,1})B = I_n$. De plus, $AB = (I_n + E_{1,2})(I_n + E_{2,1}) = I_n + E_{1,2} + E_{2,1} + E_{1,1}$, tandis que $BA = (I_n + E_{2,1})(I_n + E_{1,2}) = I_n + E_{1,2} + E_{2,1} + E_{2,2}$. Ainsi, $AB - BA = E_{1,1} - E_{2,2}$ est une matrice non nulle, donc les matrices A et B ne commutent pas.

Exercice 4 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle telle que $AB = 0$. La matrice A est-elle inversible ?*

Propriété 21 *Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$, auquel cas*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Démonstration. On assemble les produits matriciels :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ cd-dc & -cb+da \end{pmatrix} = (ad-bc)I_2$$

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} da-bc & db-bd \\ -ca+ac & -bc+ad \end{pmatrix} = (ad-bc)I_2$$

Si $ad - bc \neq 0$, alors la matrice $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ est bien définie. Le calcul précédent montre alors que A est inversible, d'inverse cette dernière matrice. Si $ad - bc = 0$, et $(a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)$, le calcul précédent fournit une matrice B non nulle telle que $AB = 0$. Si A est inversible alors $B = I_2B = A^{-1}AB = A^{-1}0 = 0$, ce qui est faux. Enfin, si $ad - bc = 0$ et $(a,b,c,d) = (0,0,0,0)$, alors A est la matrice nulle qui n'est pas inversible.

Propriété 22 *Soit $(A,B) \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Démonstration. Déjà vu précédemment.

Propriété 23 *Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors A^T est inversible et*

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$

Démonstration. Assemblons le produit matriciel $(A^T)(A^{-1})^T$. D'après les propriétés sur la transposée d'un produit, on a

$$(A^T)(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n$$

De même,

$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I_n^T = I_n$$

Ainsi, A^T est inversible et son inverse vaut $(A^{-1})^T$.

Exercice 5 *Exhiber des matrices symétriques inversibles, symétriques non inversibles, antisymétriques inversibles, antisymétriques non inversibles.*

Propriété 24 *Soit* $\mathrm{D} = (d_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ *une matrice diagonale dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. Alors* D *est inversible si et seulement si* $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $d_{i,i} \neq 0$*, auquel cas son inverse* D^{-1} *est diagonale et a pour coefficients diagonaux* $(1/d_{i,i})_{1\leq i\leq n}$*.*

Démonstration. Supposons que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $d_{i,i} \neq 0$. Alors on peut considérer la matrice diagonale $\mathrm{D}' = \mathrm{diag}(1/d_{i,i})_i$. D'après les propriétés sur les produits de matrices diagonales, DD' est diagonale et ses coefficients diagonaux valent $(d_{i,i}/d_{i,i})_i = (1)_i$, c'est donc la matrice I_n. Idem dans l'autre sens.
Réciproquement, supposons D inversible. Notons $\tilde{\mathrm{D}}$ son inverse et $(\tilde{d}_{i,k})_{1\leq i\leq n, 1\leq k\leq n}$ ses coefficients. Alors, soit i un entier dans $[\![1,n]\!]$, l'égalité matricielle $\mathrm{D}\tilde{\mathrm{D}} = \mathrm{I}_n$ entraîne en particulier

$$\sum_{k=1}^{n} d_{i,k}\tilde{d}_{k,i} = \delta_{i,i} = 1$$

Comme D est diagonale, seul le terme pour $k = i$ est non nul dans cette somme, ce qui donne

$$d_{i,i}\tilde{d}_{i,i} = 1$$

Comme ce produit de scalaires est non nul, ses deux facteurs sont non nuls. En particulier, $d_{i,i}$ est non nul.

Propriété 25 *Soit* $\mathrm{T} = (t_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *une matrice triangulaire supérieure (respectivement inférieure). Alors* T *est inversible si et seulement si* $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $t_{i,i} \neq 0$*, auquel cas son inverse est triangulaire supérieure (respectivement inférieure). Dans ce cas, pour tout entier* i *dans* $[\![1,n]\!]$ *le coefficient de* T^{-1} *de place* (i,i) *vaut* $1/t_{i,i}$*.*

Démonstration. Reportée au chapitre sur les applications linéaires en dimension finie.

Exercice 6 *La matrice* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *est-elle inversible ? Déterminer son inverse, le cas échéant.*

3 Systèmes linéaires

L'objectif de cette section est de présenter les systèmes linéaires. On peut formaliser quelques opérations dites « élémentaires », mais nous ne disposons pas de tous les outils pour prouver ce qui suit. On se contentera de croire que les exemples présentés et leurs méthodes se généralisent sans difficultés. Selon le programme, « toute technicité est exclue ».

3.1 Systèmes linéaires en dimension 2 et 3

Soit $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq 2}$ et $(b_i)_{1\leq i\leq 2}$ des familles de complexes (ou de réels). Rechercher les complexes (ou les réels) x_1 et x_2 qui vérifient

$$\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 & = & b_2 \end{array}$$

c'est résoudre le système linéaire de matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$, d'inconnue $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, et de second membre $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

✎ **Méthode**
On effectue ce que l'on appelle des « opérations élémentaires » pour résoudre un tel système. La première égalité

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 = b_1$$

est appelée première ligne du système et notée L_1*. Le seconde égalité*

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 = b_2$$

est appelée seconde ligne du système et notée L_2. Si l'on multiplie la première égalité par le complexe $a_{2,1}$, on obtient

$$a_{2,1}a_{1,1}x_1 + a_{2,1}a_{1,2}x_2 = a_{2,1}b_1$$

Cette opération se symbolise via $L_1 \leftarrow a_{2,1}L_1$ On peut également multiplier la seconde ligne par le complexe $a_{1,1}$, ce que l'on note $L_2 \leftarrow a_{1,1}$, ce qui donne

$$a_{1,1}a_{2,1}x_1 + a_{1,1}a_{2,2}x_2 = a_{1,1}b_2$$

On peut ensuite retrancher la première égalité à la seconde, ce qui s'écrit $L_2 \leftarrow L_1 - L_2$ et donne

$$(a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{2,2})x_2 = a_{1,1}b_2 - a_{2,1}b_1$$

De manière similaire, $L_1 \leftarrow a_{2,2}L_1 - a_{1,2}L_2$ fournit

$$(a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{1,2})x_1 = a_{2,2}b_1 - a_{1,2}b_2$$

Si tous les coefficients manipulés sont non nuls, et si la quantité $a_{1,1}a_{1,2} - a_{1,2}a_{2,1}$ est non nulle, les calculs effectués peuvent être remontés, ce qui revient à dire qu'on a manipulé des équivalences et que le sytème possède une unique solution

$$\begin{pmatrix} \frac{a_{2,2}b_1 - a_{1,2}b_2}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{1,2}} \\ \frac{a_{1,1}b_2 - a_{2,1}b_1}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{2,2}} \end{pmatrix}$$

Interprétation géométrique dans le cas réel : Si le couple $(a_{1,1}, a_{1,2})$ est différent du couple nul $(0,0)$. La première ligne peut être comprise comme une équation de droite affine. De même pour la seconde ligne dans le cas où le couple $(a_{2,1}, a_{2,2})$ est non nul. La résolution du système linéaire revient alors à rechercher l'intersection entre ces deux droites. On a alors trois cas possibles :

- Les deux droites sont sécantes, ce qui se traduit algébriquement par $a_{1,1}a_{1,2} - a_{1,2}a_{2,1} \neq 0$ (cf chapitre sur le déterminant). Alors il existe un unique point d'intersection fourni par l'expression précédemment établie.
- Les deux droites sont parallèles, ce qui se traduit algébriquement par $a_{1,1}a_{1,2} - a_{1,2}a_{2,1} = 0$. On a alors deux sous-cas
  - Les deux droites sont confondues, i.e $a_{2,2}b_1 = a_{1,2}b_2$. L'intersection vaut alors cette droite entière.
  - Les deux droites sont non sécantes, i.e $a_{2,2}b_1 \neq a_{1,2}b_2$. L'intersection recherchée est alors vide.

Exemple 3 *Résolvons $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'inconnues réelles x et y. Il peut s'écrire sous la forme*

$$\begin{cases} x + 2y &= 0 \quad (L_1) \\ 3x + 4y &= 1 \quad (L_2) \end{cases}$$

Via la manipulation élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, il est équivalent à

$$\begin{cases} x + 2y &= 0 \quad (L_1) \\ x &= 1 \quad (L_2) \end{cases}$$

soit encore

$$\begin{cases} y &= -1/2 \quad (L_1) \\ x &= 1 \quad (L_2) \end{cases}$$

☞ **Remarque**

L'ensemble des manipulations élémentaires à effectuer n'est pas unique. On a ici fait le choix d'éliminer l'inconnue y en premier puisque le coefficient multiplicatif à exploiter est entier et non rationnel.

✎ **Méthode**

Considérons un système de dimension 3, i.e on dispose de trois lignes L_1, L_2, L_3 correspondant chacune à une équation de plan dans $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{C}^3$). On commence par isoler les coefficients non nuls devant chaque inconnue x, y ou z. Puis on effectue des multiplications, puis une soustraction pour éliminer l'une des inconnues dans deux lignes. Il ne reste alors qu'un sous-système de dimension 2 auquel on applique la méthode précédente.

Interprétation géométrique dans le cas réel : Résoudre une système linéaire en dimension 3 revient à chercher l'intersection de trois plans affines (dans le cas où chaque ligne du système est non triviale). Plusieurs cas géométriques se présentent : deux plans affines peuvent être sécants, auquel cas leur intersections est une droite. Sinon, deux plans affines sont parallèles, d'intersection un plan ou le vide. Il reste à envisager l'intersection d'une droite affine et d'un plan affine, ce qui peut donner le vide, un point ou une droite affine.

Exemple 4 *Résolvons le système linéaire* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *d'inconnues réelles x, y et z. Ecrivons-le sous la forme*

$$\begin{array}{rcll} x+2y+3z & = & 0 & (\mathrm{L}_1) \\ 3y+4z & = & 1 & (\mathrm{L}_2) \\ -x+y+z & = & -1 & (\mathrm{L}_3) \end{array}$$

Via la manipulation élémentaire $\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_1$, il est équivalent à

$$\begin{array}{rcll} x+2y+3z & = & 0 & (\mathrm{L}_1) \\ 3y+4z & = & 1 & (\mathrm{L}_2) \\ 3y+4z & = & -1 & (\mathrm{L}_3) \end{array}$$

Les lignes L_2 et L_3 sont clairement incompatibles (les plans correspondants sont parallèles et d'intersection vide). Ainsi, ce système ne possède aucune solution.

Exercice 7 *Résoudre les systèmes linéaires* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *d'inconnues réelles x, y et z*

3.2 Matrices d'opérations élémentaires

Définition 18 *Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On note*

$$\mathrm{T}_{i,j}(\lambda) = \mathrm{I}_n + \lambda \mathrm{E}_{i,j}$$

Une telle matrice est appelée matrice de transvection

Propriété 26 *Les matrices de transvection sont inversibles. De plus,*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \left(\mathrm{T}_{i,j}(\lambda)\right)^{-1} = \mathrm{T}_{i,j}(-\lambda)$$

Démonstration. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.. Effectuons le produit

$$\mathrm{T}_{i,j}(\lambda)\mathrm{T}_{i,j}(-\lambda) = (\mathrm{I}_n + \lambda \mathrm{E}_{i,j})(\mathrm{I}_n - \lambda \mathrm{E}_{i,j}) = \mathrm{I}_n + \lambda \mathrm{E}_{i,j} - \lambda \mathrm{E}_{i,j} - \lambda^2 \mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{i,j}$$

Comme on a supposé que i et différent de j, on a $\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{i,j} = 0$, ainsi $\mathrm{T}_{i,j}(\lambda)\mathrm{T}_{i,j}(-\lambda) = \mathrm{I}_n$. En appliquant ce résultat à (i,j) et $-\lambda$, on trouve de même $\mathrm{T}_{i,j}(-\lambda)\mathrm{T}_{i,j}(\lambda) = \mathrm{I}_n$. Ainsi, $\mathrm{T}_{i,j}(\lambda)$ est inversible et son inverse vaut $\mathrm{T}_{i,j}(-\lambda)$.

Définition 19 *Soit $i \in [\![1,n]\!], \alpha \in \mathbb{K}^*$. On note*

$$\mathrm{D}_i(\alpha) = \mathrm{I}_n + (\alpha - 1)\mathrm{E}_{i,i}$$

Une telle matrice est appelée matrice de dilatation.

Propriété 27 *Les matrices de dilatations sont inversibles. De plus,*

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \forall \alpha \in \mathbb{K}^*, \quad (\mathrm{D}_i(\alpha))^{-1} = \mathrm{D}_i(1/\alpha)$$

Démonstration. Soit $i \in [\![1,n]\!]$ et $\alpha \in \mathbb{K}^*$. Comme $\mathrm{E}_{i,i}\mathrm{E}_{i,i} = \mathrm{E}_{i,i}$, on effectue le produit

$$\mathrm{D}_i(\alpha)\mathrm{D}_i(1/\alpha) = (\mathrm{I}_n + (\alpha-1)\mathrm{E}_{i,i})(\mathrm{I}_n + (\frac{1}{\alpha} - 1)\mathrm{E}_{i,i}) = \mathrm{I}_n + (\alpha - 1 + \frac{1}{\alpha} - 1 + (\alpha-1)(\frac{1}{\alpha} - 1))\mathrm{E}_{i,i} = \mathrm{I}_n$$

On applique ce calcul aux réels $1/\alpha$ et α, ce qui permet d'écrire $\mathrm{D}_i(1/\alpha)\mathrm{D}_i(\alpha) = \mathrm{I}_n$. En conclusion, $\mathrm{D}_i(\alpha)$ est inversible et son inverse vaut $\mathrm{D}_i(1/\alpha)$.

Définition 20 *Soit σ une permutation de $[\![1,n]\!]$. On note P_σ la matrice de coefficients $(\delta_{i,\sigma(j)})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$. Une telle matrice est appelée matrice de permutation.*

Exemple 5 *Soit γ la permutation de $[\![1,4]\!]$ définie par*

$$\gamma(1) = 4, \gamma(4) = 1, \gamma(2) = 3, \gamma(3) = 2$$

Alors la matrice de permutation associée s'écrit

$$\mathrm{P}_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que les chaque ligne et chaque colonne d'une matrice de permutation ne comporte qu'un seul coefficient égal à 1, tous les autres sont nuls.

Propriété 28 *Toutes les matrices de permutation sont inversibles. De plus,*

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, (\mathrm{P}_\sigma)^{-1} = (\mathrm{P}_{\sigma^{-1}})$$

où σ^{-1} désigne la réciproque de la permutation σ.

Démonstration. Soit σ une permutation de $[\![1,n]\!]$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$(\mathrm{P}_\sigma \mathrm{P}_{\sigma^{-1}})_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)} \delta_{k,\sigma^{-1}(j)}$$

Soit k un entier dans $[\![1,n]\!]$, alors comme σ^{-1} est une bijection, on a l'équivalence $k = \sigma^{-1}(j) \iff \sigma(k) = j$. Par conséquent, on a l'égalité des symboles de Kronecker $\delta_{k,\sigma^{-1}(j)} = \delta_{\sigma(k),j}$. On en déduit

$$(\mathrm{P}_\sigma \mathrm{P}_{\sigma^{-1}})_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)} \delta_{\sigma(k),j}$$

Dans le cas où $i = j$, tous les termes de la somme sont nuls, excepté pour k tel que $\sigma(k) = i = j$, i.e $k = \sigma^{-1}(i)$. Dans ce cas, on obtient

$$(\mathrm{P}_\sigma \mathrm{P}_{\sigma^{-1}})_{i,i} = 1$$

Dans le cas où $i \neq j$, tous les termes de la somme sont nuls, puisque l'un des deux symboles de Kronecker est toujours nul. Ainsi, dans ce cas, on a

$$(\mathrm{P}_\sigma \mathrm{P}_{\sigma^{-1}})_{i,j} = 0$$

On retrouve ainsi l'égalité de matrices, $\mathrm{P}_\sigma \mathrm{P}_{\sigma^{-1}} = \mathrm{I}_n$. En appliquant ce qui précède à la permutation σ^{-1}, on obtient $\mathrm{P}_{\sigma^{-1}} \mathrm{P}_\sigma = \mathrm{I}_n$. Ainsi, la matrice P_σ est inversible, d'inverse $\mathrm{P}_{\sigma^{-1}}$.

Nous n'aurons besoin que de certaines matrices de permutation pour la résolution de systèmes linéaires.

Définition 21 *On suppose $n \geq 2$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. On note $\tau_{i,j}$ l'application*

$$[\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!], k \mapsto \begin{cases} k & \text{si } k \notin \{i,j\} \\ i & \text{si } k = j \\ j & \text{si } k = i \end{cases}$$

Une telle permutation est appelée transposition.

Propriété 29 *L'application $\tau_{i,j}$ est involutive et*

$$\mathrm{P}_{\tau_{i,j}} = \mathrm{T}_{i,j}(1)\mathrm{D}_i(-1)\mathrm{T}_{j,i}(1)\mathrm{T}_{i,j}(-1)$$

Démonstration. Il est clair que $\tau_{i,j}(i) = j$, donc que $\tau_{i,j}(\tau_{i,j}(i)) = i$, soit $\tau_{i,j}^2(i) = i$. De même, $\tau_{i,j}^2(j) = j$. Enfin, tous les autres entiers sont fixes par $\tau_{i,j}$, donc par $\tau_{i,j}^2$. En conclusion, $\tau_{i,j}^2 = \mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}$, ce qui prouve l'involutivité de $\tau_{i,j}$. Comme i est différent de j, le produit matriciel de droite s'écrit

$$\begin{aligned}
(\mathrm{I}_n + \mathrm{E}_{i,j})(\mathrm{I}_n - 2\mathrm{E}_{i,i})(\mathrm{I}_n + \mathrm{E}_{j,i})(\mathrm{I}_n - \mathrm{E}_{i,j}) &= (\mathrm{I}_n + \mathrm{E}_{i,j} - 2\mathrm{E}_{i,i})(\mathrm{I}_n + \mathrm{E}_{j,i})(\mathrm{I}_n - \mathrm{E}_{i,j}) \\
&= (\mathrm{I}_n + \mathrm{E}_{j,i} + \mathrm{E}_{i,j} + \mathrm{E}_{i,i} - 2\mathrm{E}_{i,i})(\mathrm{I}_n - \mathrm{E}_{i,j}) \\
&= (\mathrm{I}_n + \mathrm{E}_{j,i} + \mathrm{E}_{i,j} - \mathrm{E}_{i,i})(\mathrm{I}_n - \mathrm{E}_{i,j}) \\
&= \mathrm{I}_n + \mathrm{E}_{j,i} + \mathrm{E}_{i,j} - \mathrm{E}_{i,i} - \mathrm{E}_{i,j} - \mathrm{E}_{j,j} + \mathrm{E}_{i,j} \\
&= \mathrm{I}_n + \mathrm{E}_{j,i} + \mathrm{E}_{i,j} - \mathrm{E}_{i,i} - \mathrm{E}_{j,j}
\end{aligned}$$

On reconnaît alors une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls excepté ceux de place (i,i) et (j,j) qui valent 0. Les coefficients de place (i,j) et (j,i) valent tous deux 1. C'est bien la matrice de la transposition $\tau_{i,j}$.

Exercice 8 *Déterminer toutes les matrices de permutation symétriques.*

3.3 Effet des opérations élémentaires sur les lignes et colonnes

Dans tout ce qui suit, on fixe A une matrice dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Pour tout entier i dans $[\![1,n]\!]$, on note L_i sa ligne de rang i.
On regarde dans un premier temps l'effet d'une multplication **à gauche** de A par une des matrices précédentes. Fixons $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\alpha \in \mathbb{K}^*$.

Propriété 30 *La matrice* $\mathrm{T}_{i,j}(\lambda)\mathrm{A}$ *est obtenue en remplaçant la i-ième ligne de* A *par* $\mathrm{L}_i + \lambda \mathrm{L}_j$. *Les autres lignes sont inchangées. On code cette transformation de* A *en écrivant* $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \lambda \mathrm{L}_j$.

Propriété 31 *La matrice* $\mathrm{D}_i(\alpha)\mathrm{A}$ *est obtenue en remplaçant la i-ième ligne de* A *par* $\alpha \mathrm{L}_i$. *Les autres lignes sont inchangées. On code cette transformation de* A *en écrivant* $\mathrm{L}_i \leftarrow \alpha \mathrm{L}_i$.

Propriété 32 *La matrice* $\mathrm{P}_{\tau_{i,j}}\mathrm{A}$ *est obtenue en échangeant les lignes d'indice i et j de* A. *Les autres lignes sont inchangées. On code cette transformation de* A *en écrivant* $\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$.

Pour tout entier j dans $[\![1,p]\!]$, on note C_j la j-ième colonne de A. On regarde à présent l'effet d'une multiplication **à droite** de A par une des matrices précédentes. Fixons $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\alpha \in \mathbb{K}^*$.

Propriété 33 *La matrice* $\mathrm{AT}_{i,j}(\lambda)$ *est obtenue en remplaçant la j-ième colonne de* A *par* $\mathrm{C}_j + \lambda \mathrm{C}_i$. *Les autres colonnes sont inchangées. On code cette transformation de* A *en écrivant* $\mathrm{C}_j \leftarrow \mathrm{C}_j + \lambda \mathrm{C}_i$.

Propriété 34 *La matrice* $\mathrm{AD}_j(\alpha)$ *est obtenue en remplaçant la j-ième ligne de* A *par* $\alpha \mathrm{C}_j$. *Les autres colonnes sont inchangées. On code cette transformation de* A *en écrivant* $\mathrm{C}_j \leftarrow \alpha \mathrm{C}_j$.

Propriété 35 *La matrice* $\mathrm{AP}_{\tau_{i,j}}$ *est obtenue en échangeant les colonnes d'indice i et j de* A. *Les autres colonnes sont inchangées. On code cette transformation de* A *en écrivant* $\mathrm{C}_i \leftrightarrow \mathrm{C}_j$.

Démonstration. Tout découle de la propriété 10 sur les produits $\mathrm{AE}_{i,j}$ et $\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{A}$.

3.4 Solutions d'un système linéaire

On fixe toujours une matrice A dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On recherche l'ensemble des matrices X dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ telles que AX = B. Cette équation d'inconnue X dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ s'appelle un système linéaire de matrice A et de second membre B. Avec des notations évidente, il s'écrit également

$$\begin{aligned}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,j}x_j + \cdots + a_{1,p}x_p &= b_1 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,j}x_j + \cdots + a_{2,p}x_p &= b_2 \\
&\cdots \\
a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,j}x_j + \cdots + a_{i,p}x_p &= b_i \\
&\cdots \\
a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,j}x_j + \cdots + a_{n,p}x_p &= b_n
\end{aligned}$$

Exposons d'abord quelques résultats théoriques sur ce problème :

Définition 22 *Soit* $AX = B$ *un système linéaire de matrice* A *dans* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et de second membre* B *dans* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$*. Le système homogène associé est le système* $AX = 0$ *de même matrice* A *et de second membre nul.*

Définition 23 *Ce système linéaire est dit compatible lorsqu'il possède une solution, i.e il existe* X *dans* $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ *tel que* $AX = B$*.*

Propriété 36 *Le système linéaire* $AX = B$ *est compatible si et seulement si* B *est une combinaison linéaire des colonnes de* A*.*

Démonstration. On a établi que pour toute matrice colonne X à p lignes, la matrice AX est une combinaison linéaire des colonnes de A. Ainsi, le système est compatible si et seulement si B est combinaison linéaire des colonnes de A.

Propriété 37 *Soit* $AX = B$ *un système linéaire compatible. On note* X_0 *une solution particulière de ce système. Alors l'ensemble des solutions de ce système est*

$$\{X_0 + Y | AY = 0\}$$

i.e la somme de X_0 *et des solutions du système homogène associé.*

Démonstration. Soit X une matrice colonne à p lignes. Alors, d'après la distributivité du produit matriciel, on a l'équivalence

$$AX = B \iff AX = AX_0 \iff A(X - X_0) = 0 \iff X - X_0 \in \{Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) | AY = 0\}$$

Le théorème de Rouché est malheureusement inacessible à ce stade de l'année et hors-programme. Exposons tout de même un cas particulier.

Propriété 38 *On suppose que* $n = p$ *et que* A *est inversible. Alors le système linéaire* $AX = B$ *possède une unique solution,* $A^{-1}B$*. Le système est alors dit de Cramer.*

Démonstration. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Comme la multiplication par A^{-1} est bijective, on a les équivalences

$$AX = B \iff A^{-1}AX = A^{-1}B \iff I_nX = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B$$

Ainsi, le solution possède une unique solution, à savoir $A^{-1}B$.

3.5 Résolution algorithmique des systèmes linéaires

Exercice 9 *Résoudre le système suivant :*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Définition 24 *La matrice* A *de lignes* $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ *est dite échelonnée en lignes lorsque*

- *Si une ligne de* A *est nulle, toutes les suivantes le sont aussi.*
- *Pour tout* $i > 1$*, si* L_i *est une ligne non nulle, son premier coefficient non nul est situé strictement à droite du premier coefficient non nul de* L_{i-1}*.*

On dit de plus que A *est echelonnée en lignes réduite lorsque le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle vaut* 1*.*

On retient plus rapidement qu'une matrice est échelonnée en lignes lorsque chaque ligne non nulle commence par davantage de 0 que la précédente.

Exemple 6 *Les trois matrices suivantes sont échelonnées, aucune d'entre elles n'est réduite.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -10 & 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice suivante n'est pas échelonnée

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

✎ **Méthode (Résolution d'un système échelonné)**
On remonte les calculs à partir de la dernière ligne. Le système homogène associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

s'écrit

$$\begin{cases} 2x & +0y & +z & -3t & = & 0 \\ & & z & +5t & = & 0 \\ & & & 6t & = & 0 \end{cases}$$

d'inconnues $(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4$*. En remontant, on obtient* $t = 0$*,* $z = 0$*, puis* $x = 0$*. Les solutions sont donc les 4-uplets de la forme* $(0,y,0,0)$ *avec* $y \in \mathbb{K}$*.*

Définition 25 *Soit* A *une matrice échelonnée. On appelle pivots les premiers coefficients non nuls de chaque ligne non nulle.*

Exemple 7 *Dans l'exemple précédent, les pivots valent* 2*,* 1 *et* 6*.*

✎ **Méthode (Algorithme de Gauss)**
Via des opérations élémentaires sur les lignes de A*, on va se ramener à un système équivalent* $A'X = B'$ *et où la matrice* A' *est échelonnée. Soit*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Opération	*Résultat obtenu*	*But cherché*
$L_1 \leftrightarrow L_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$	$m_{1,1} \neq 0$
$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -14 & -3 & 0 \end{pmatrix}$	$m_{3,1} = 0$
$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{14}{3}L_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -\frac{14}{3} \end{pmatrix}$	$m_{3,2} = 0$

On obtient une matrice échelonne possédant trois pivots : $1, -3$ *et* -3*.*
La validité de cette méthode est assurée par le fait que toutes les matrices d'opérations élémentaires sont inversibles. Examinons le cas d'un second membre $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et résolvons* $MX = B$*. On applique les mêmes opérations élémentaires à la matrice* B*, ce qui entraîne*

Opération	*Résultat obtenu*
$L_1 \leftrightarrow L_2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{14}{3}L_2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{23}{3} \end{pmatrix}$

Il nous reste à présent à résoudre le système échelonné

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -\frac{14}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{23}{3} \end{pmatrix}$$

La dernière ligne fournit $-3z - \frac{14}{3}t = -\frac{23}{3}$, *donc* $z = -\frac{14}{9}t + \frac{23}{9}$. *La deuxième ligne fournit* $-3y + t = 1$, *donc* $y = \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}$. *Enfin, la première ligne fournit* $x+5y+2z-t=1$, *donc* $x = -5(\frac{1}{3}t - \frac{1}{3}) - 2(-\frac{14}{9}t + \frac{23}{9}) - t + 1 = \frac{4}{9}t - \frac{22}{9}$. *En conclusion, l'ensemble des solutions de ce système linéaire vaut*

$$\left\{\left(\frac{4}{9}t - \frac{22}{9}, \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}, -\frac{14}{9}t + \frac{23}{9}, t\right) \middle| t \in \mathbb{K}\right\}$$

Dans la présentation des résolutions des systèmes linéaires, on peut utiliser la matrice par blocs $\begin{pmatrix} \mathrm{M} & \mathrm{B} \end{pmatrix}$, que l'on appelle matrice augmentée.

Application 1 (Calcul de l'inverse d'une matrice) *Soit* $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *On la transforme par l'algorithme de Gauss en matrice identité, on commence par l'échelonner en lignes, puis on l'échelonne en colonnes. Si les pivots apparaissant sont non nuls, la matrice est inversible. Avec des dilatations, on la transforme en matrice* I_n. *Les mêmes opérations appliquées à la matrice* I_n *font apparaître l'inverse de* A *sous réserve que l'algorithme fournisse des pivots tous non nuls. Prenons l'exemple* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Opération	*Matrice* A	*Matrice* I_n
$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 + L_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

On en déduit que l'inverse de A *vaut* $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

De même que pour les systèmes linéaires, on peut présenter les opérations élémentaires sur la matrice augmentée $\begin{pmatrix} \mathrm{M} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$.

Exercice 10 *Inverser la matrice suivante par l'algorithme de Gauss :* $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

On dispose du résultat théorique suivant, que je ne démontre pas.

Théorème 2 (Élimination de Gauss-Hölder) *Soit* $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *Alors il existe une suite de transvections permettant de transformer* A *en matrice échelonnée.*