Chaque colle comporte une question de cours ainsi qu'un ou plusieurs exercices.

1 Questions de cours.

- Toute définition, tout résultat dans l'ensemble des notions abordées doit être parfaitement su et peut être ajouté aux items suivants.
- $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivable vérifie $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, f(xy) = f(x) + f(y)$ ssi $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a\ln(x)$.
- Dérivabilité et expression des dérivées des fonctions circulaires réciproques. Énoncé et démonstration.
- Théorème fondamental du calcul intégral pour une fonction continue sur un intervalle à valeurs complexes. Démonstration dans le cas particulier d'une fonction continue à valeurs réelles et croissante.

2 Exercices.

Ils peuvent porter sur le chapitre le chapitre 6 : fonctions usuelles et le chapitre 7 : calcul intégral, jusqu'au calcul de primitives.

3 Chapitre 6 : fonctions usuelles

3.1 Généralités

Graphe d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Graphe de $x \mapsto f(x+a)$, de $x \mapsto f(bx)$. Restriction du domaine d'étude par périodicité, parité/imparité. Domaine de définition d'une composée. f est bornée ssi $|f|$ est majorée. Opérations sur les limites, opérations sur les dérivées. Dérivabilité d'une fonction réciproque et $(f^{-1})' = 1/f' \circ f^{-1}$ en cas de dérivabilité.

3.2 Fonctions polynomiales et rationnelles

Unicité des coefficients d'une fonction polynomiale admise. Dérivabilité, limites à l'aide des termes dominants. Extension aux fonctions rationnelles.

3.3 Logarithme et exponentielle

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable vérifie $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$ ssi $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax$. Logarithme népérien défini via $x \mapsto \displaystyle\int_1^x dt/t$. $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivable vérifie $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, f(xy) = f(x) + f(y)$ ssi $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a\ln(x)$. Variations et limites. Logarithme en base a. Exponentielle définie comme la réciproque du logarithme népérien. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable vérifie $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)f(y)$ ssi $f = 0$ ou $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \exp(ax)$. exp est l'unique solution du problème de Cauchy $y' = y, y(0) = 1$. Variations, limites. Inégalités de convexité/concavité de ln et exp. Fonctions puissances d'exposant réel, propriétés algébriques, variations, limites. Croissances comparées.

3.4 Fonctions hyperboliques

Décomposition en partie paire et impaire d'une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}$ centrée en 0. Cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique sont les parties paire et impaire de exp. Dérivabilité, dérivées, variations, limites. $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$, formules d'addition. Tangente hyperbolique, dérivabilité, dérivée, variations, limites, formule d'addition.

3.5 Fonctions circulaires réciproques

arcsin définie comme réciproque de $\sin_{|[-\pi/2,\pi/2]}^{|[-1,1]}$. Imparité, valeurs remarquables, dérivabilité sur $]-1,1[$, dérivée. arccos définie comme réciproque de $\cos_{|[0,\pi]}^{|[-1,1]}$. Valeurs remarquables, dérivabilité sur $]-1,1[$, dérivée. arctan définie comme la réciproque de $\tan_{|]-\pi/2,\pi/2[}$. Valeurs remarquables, dérivabilité, dérivée, limites.

4 Chapitre 7 : calcul intégral

4.1 Calcul d'intégrales

Notion d'intégrale à l'aide d'aire signée sous la courbe. Propriétés fondamentales, linéairité, relation de Chasles, croissance dans le cas d'une fonction à valeurs réelles, inégalité triangulaire dans le cas général. Notion de primitive. Théorème fondamental du calcul intégral. Théorème d'intégration par parties, de changement de variables (cas général, cas bijectif). D'après le programme officiel, les hypothèses de régularité ne sont pas un attendu dans la pratique, on se contera de manipulations formelles.

Méthodes de calcul : primitives usuelles, composées, passage par les complexes, fractions rationnelles du type $x \mapsto 1/(ax^2+bx+c)$ en trois cas, expressions à radicaux, fractions trigonométriques, fractions exponentielles. On fournira les changements de variable à effectuer si ceux-ci ne sont pas triviaux.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆