Une étude paramétrique de suite

On fixe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ jusqu'à la fin de la partie 3. On définit par récurrence la suite u par

$$u_0 = \alpha \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1}$$

L'objet de ce problème est l'étude de la suite u en fonction du paramètre α.

1 On s'ennuie

1. Montrer à l'aide d'une récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$$

2 Un produit infini

On souhaite démontrer ici que la suite p définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \prod_{k=1}^{n} k^{2^{-k}}$$

est convergente et que sa limite est un réel strictement positif. On fixe λ un réel dans l'intervalle $]1, 2[$.

2. Exprimer le terme général de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
3. En déduire que cette dernière suite converge et préciser sa limite.
4. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
5. Á l'aide d'une suite convergente bien choisie, montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{\ln(n)}{2^n} \leq \frac{1}{\lambda^n}$$

6. Déduire de ce qui précède la convergence de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. Démontrer que la suite p est convergente et que sa limite appartient à $\mathbb{R}_+^*$.

Dans tout ce qui suit, on peut noter $\prod_{k=1}^{+\infty} k^{2^{-k}}$ cette limite.

3 Généralités

8. Montrer que si u converge, sa limite est nécessairement 0.
9. Soit $n \in \mathbb{N}$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur u_n a-t-on l'inégalité $u_{n+1} \leq u_n$?
10. On suppose dans cette question (et uniquement celle-ci) qu'il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0+1} \leq u_{n_0}$.

(a) Montrer qu'alors, $\forall n \geq n_0, u_{n+1} \leq u_n$.
(b) En déduire que u est convergente de limite nulle.

11. On suppose dans cette question (et uniquement celle-ci) que u n'est pas convergente (i.e divergente).
    (a) Montrer qu'alors u est croissante.
    (b) En déduire que u tend vers $+\infty$.

4 Étude paramétrique

On note dorénavant la suite u sous la forme $u(\alpha)$ pour signifier sa dépendance en le paramètre réel strictement positif α. On pose E l'ensemble des réels strictement positifs α tels que la suite $u(\alpha)$ est convergente, ainsi que F le complémentaire de E dans $\mathbb{R}_+^*$, i.e l'ensemble des réels strictement positifs α tels que la suite $u(\alpha)$ correspondante est divergente.

12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*, \alpha \mapsto u_n(\alpha)$ est continue, croissante et surjective.
13. En déduire que
$$\forall \alpha \in E,]0, \alpha[\subset E \quad \text{et} \quad \forall \beta \in F,]\beta, +\infty[\subset F.$$
14. Soit $\beta \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n(\beta) \geq n+2$, alors $\beta \in F$.

On introduit dorénavant le réel $\gamma = \sup E$.

15. Justifier la bonne définition du réel γ.
16. Montrer que $]0, \gamma[\subset E$ et $]\gamma, +\infty[\subset F$.
17. Soit $\alpha > 0$. Montrer la chaîne d'équivalences
$$\alpha \in E \iff \exists n \in \mathbb{N}, u_n(\alpha) < \frac{1}{2} \iff \exists n \in \mathbb{N}, u_n(\alpha) < 1$$
18. Soit $\alpha \in E$. Montrer qu'il existe un réel $\alpha' > \alpha$ tel que $\alpha' \in E$.
19. En déduire que $E =]0, \gamma[$ et $F = [\gamma, +\infty[$.

5 Détermination de γ

On pose $v = u(\gamma)$ et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n+2-v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

20. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n+1 < v_n \leq n+2$.
21. En déduire que $\dfrac{v_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
22. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \varepsilon_{n+1} \geq 2\varepsilon_n - \dfrac{1}{n+1}$.
23. En déduire que la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle.
24. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. En étudiant la suite $u(\alpha)/v$, montrer que
$$u_n(\alpha)\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{2^n}\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$
25. Montrer l'équivalence
$$\frac{\ln(u_n(\alpha))}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff \alpha = \gamma$$
26. Déterminer une expression du terme général de $\left(\dfrac{\ln(v_{n+1})}{2^{n+1}} - \dfrac{\ln(v_n)}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
27. En déduire que
$$\gamma = \prod_{k=1}^{+\infty} k^{2^{-k}}.$$