Complexes et trigonométrie

Cornou Jean-Louis

16 juillet 2025

L'idée de nombres « imaginaires » est née comme outil de résolution d'équations algébriques du troisième degré. Ils n'apparaissaient alors que comme intermédiaires de calculs afin de rechercher des solutions réelles de telles équations. Leur utilisation géométrique arrive bien plus tardivement et leur utilisation en analyse s'illustrera plus tard dans les séries de Fourier grâce à l'exponentielle complexe.

1 Corps des nombres complexes

1.1 Nombres complexes

Théorème 1 (admis) *Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, contenant l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

- *Il est doté d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles des nombres réels.*
- $\exists x \in \mathbb{C}, x^2 = -1$. *On choisit l'un de ces éléments et on le note* i.
- $\forall z \in \mathbb{C}, \exists!(a,b) \in \mathbb{R}^2, z = a + \mathrm{i}b$.

Les éléments de cet ensemble sont appelés ***nombres complexes****. L'ensemble $\mathbb{C}$ est appelé* ***corps des nombres complexes****.*

☞ **Remarque**
Les « règles algébriques usuelles » s'appliquent.

- $(-\mathrm{i})^2 = (-1)^2\mathrm{i}^2 = 1 \times (-1) = -1$.
- $\forall z \in \mathbb{C}, 0 \times z = 0, 1 \times z = z$
- *La multiplication est distributive par rapport à l'addition.* $(2+3\mathrm{i})(-1-\mathrm{i}) = -2-3\mathrm{i}-2\mathrm{i}-3\mathrm{i}^2 = 1-5\mathrm{i}$.

$$\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, (z_1 + z_2)z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$$

- *L'addition et la multiplication sont associatives et commutatives.*

$$\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad \textit{et} \quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, (z_1 z_2)z_3 = z_1(z_2 z_3) \quad \textit{et} \quad z_1 z_2 = z_2 z_1$$

Définition 1 *Pour tout complexe z, il existe un unique couple (a,b) de réels tel que $z = a + ib$.*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists!(a,b) \in \mathbb{R}^2, z = a + \mathrm{i}b$$

Le réel a est appelé partie réelle de z, noté $\mathfrak{Re}(z)$ et le réel b est appelé partie imaginaire de z, noté $\mathfrak{Im}(z)$. L'écriture $z = a + ib$ est alors appelé forme algébrique de z.

Propriété 1 *Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Alors on a l'équivalence*

$$z = z' \iff \mathfrak{Re}(z) = \mathfrak{Re}(z') \wedge \mathfrak{Im}(z) = \mathfrak{Im}(z')$$

Démonstration. Le sens direct provient de la bonne définition de la partie réelle et de la partie imaginaire. Réciproquement, si les parties réelles et imaginaires sont égales, alors $z = \mathfrak{Re}(z) + \mathrm{i}\,\mathfrak{Im}(z) = \mathfrak{Re}(z') + \mathrm{i}\,\mathfrak{Im}(z') = z'$.

Définition 2 *On dit qu'un complexe z est un imaginaire pur lorsque $\mathfrak{Re}(z) = 0$, ce qui équivaut à $z = i\mathfrak{Im}(z)$.*

Propriété 2

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathfrak{Re}(\lambda z + z') = \lambda \mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Re}(z'), \mathfrak{Im}(\lambda z + z') = \lambda \mathfrak{Im}(z) + \mathfrak{Im}(z')$$

On dit que les applications « partie réelle » et « partie imaginaire » sont $\mathbb{R}$-linéaires.

Démonstration. Soit $(z,z') \in \mathbb{C}^2$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Les règles de calcul réel sont prolongées, ainsi

$$\lambda z + z' = \lambda(\mathfrak{Re}(z) + \mathrm{i}\mathfrak{Im}(z')) + \mathfrak{Re}(z') + \mathrm{i}\mathfrak{Im}(z') = (\lambda \mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Re}(z')) + \mathrm{i}(\lambda \mathfrak{Im}(z) + \mathfrak{Im}(z'))$$

On remarque alors que $\lambda \mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Re}(z')$ et $\lambda \mathfrak{Im}(z) + \mathfrak{Im}(z')$ sont réels, puisque $\lambda, \mathfrak{Re}(z), \mathfrak{Re}(z'), \mathfrak{Im}(z)\mathfrak{Im}(z')$ sont tous réels. Cela permet d'identifier

$$\mathfrak{Re}(\lambda z + z') = \lambda \mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Re}(z') \quad \text{et} \quad \mathfrak{Im}(\lambda z + z') = \lambda \mathfrak{Im}(z) + \mathfrak{Im}(z')$$

Propriété 3

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \mathfrak{Re}(iz) = -\mathfrak{Im}(z) \quad \wedge \quad \mathfrak{Im}(iz) = \mathfrak{Re}(z)$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$. Comme précédemment,

$$iz = i(\mathfrak{Re}(z) + i\mathfrak{Im}(z)) = i\mathfrak{Re}(z) + i^2\mathfrak{Im}(z) = -\mathfrak{Im}(z) + i\mathfrak{Re}(z)$$

On remarque que $-\mathfrak{Im}(z)$ et $\mathfrak{Re}(z)$ sont réels, ce qui permet d'identifier

$$\mathfrak{Re}(iz) = -\mathfrak{Im}(z) \quad \text{et} \quad \mathfrak{Im}(iz) = \mathfrak{Re}(z)$$

⚠ **Attention**
Ecrire $z = a + ib$ ne suffit pas à identifier $\mathfrak{Re}(z)$ avec a, ni $\mathfrak{Im}(z)$ avec b. Il faut vérifier que a et b sont réels.

On a l'habitude de représenter les complexes dans un plan. Les coordonnées sur un axe horizontal représentent les parties réelles des complexes concernés, tandis que les coordonnées sur un axe vertical représentent les parties imaginaires des complexes concernés. Pour tout point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ du plan réel, on appelle affixe de (a,b) le complexe $a+ib$. Réciproquement, à tout complexe z, on peut associer le point du plan P de coordonnées $(\mathfrak{Re}(z), \mathfrak{Im}(z))$. Cette correspondance nous permettra de faire de la géométrie dans $\mathbb{C}$. Certains auteurs mentionnent « le plan complexe », ce qui peut entraîner des confusions entre le plan réel $\mathbb{R}^2$ et le plan complexe $\mathbb{C}^2$.

1.2 Conjugaison

Définition 3 *Pour tout complexe z de partie réelle a et de partie imaginaire b, on note $\overline{z} = a - ib$. Ce complexe est appelé conjugué de z.*

Exemple 1 $\overline{-2+3\mathrm{i}} = -2-3\mathrm{i}$.

Géométriquement, si $\mathrm{P} = (a,b)$ est un point d'affixe $z = a+ib$. Alors le point $\mathrm{Q} = (a,-b)$ d'affixe $\overline{z}$ est l'image de P par la symétrie orthogonale de droite l'axe des abscisses.

Propriété 4

$$\forall z \in \mathbb{C}, \overline{(\overline{z})} = z$$

On dit que la conjugaison est une involution.

$$\forall z \in \mathbb{C}, z + \overline{z} = 2\mathfrak{Re}(z) \wedge z - \overline{z} = 2i\mathfrak{Im}(z)$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$. En notant $z = \mathfrak{Re}(z) + i\mathfrak{Im}(z)$, il vient $\mathfrak{Re}(\overline{z}) = \mathfrak{Re}(z)$ et $\mathfrak{Im}(\overline{z}) = -\mathfrak{Im}(z)$. Ainsi, $\mathfrak{Re}(\overline{\overline{z}}) = \mathfrak{Re}(z)$ et $\mathfrak{Im}(\overline{\overline{z}}) = -(-\mathfrak{Im}(z)) = \mathfrak{Im}(z)$. Cela suffit à prouver que $\overline{\overline{z}} = z$. D'autre part, $z + \overline{z} = \mathfrak{Re}(z) + i\mathfrak{Im}(z) + \mathfrak{Re}(z) - i\mathfrak{Im}(z) = 2\mathfrak{Re}(z)$. De plus, $z - \overline{z} = \mathfrak{Re}(z) + i\mathfrak{Im}(z) - \mathfrak{Re}(z) + i\mathfrak{Im}(z) = 2i\mathfrak{Im}(z)$.

Propriété 5

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

On dit que la conjugaison est additive.

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$$

On dit que la conjugaison est multiplicative.

Démonstration. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Le premier point découle de la $\mathbb{R}$-linéarité des parties réelle et imaginaire :

$$\overline{z_1 + z_2} = \mathfrak{Re}(z_1 + z_2) - i\,\mathfrak{Im}(z_1 + z_2) = \mathfrak{Re}(z_1) - i\,\mathfrak{Im}(z_1) + \mathfrak{Re}(z_2) - i\,\mathfrak{Im}(z_2) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

Afin d'alléger les écritures, on note $a_1 = \mathfrak{Re}(z_1), b_1 = \mathfrak{Im}(z_1), a_2 = \mathfrak{Re}(z_2), b_2 = \mathfrak{Im}(z_2)$. Cela entraîne

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Comme on a bien isolé les parties réelle et imaginaire de $z_1 z_2$, on en déduit que

$$\overline{z_1 z_2} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + a_2 b_1) = (a_1 a_2 - (-b_1)(-b_2)) - i(a_1(-b_2) + a_2(-b_1)) = (a_1 - i b_1)(a_2 - i b_2) = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$$

☞ **Remarque**
La preuve précédente nécessitait de bien mettre en évidence les parties réelle et imaginaire pour respecter la définition de la conjugaison. Toutefois, maintenant que cette propriété est démontrée, on peut à présent librement écrire l'implication $z = a + bc \Rightarrow \overline{z} = \overline{a} + \overline{b}\,\overline{c}$ sans hypothèses de réalité sur a, b ou c.

Propriété 6 *Pour tout complexe z, $z\overline{z}$ est un réel positif, égal à $\mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2$.*

Démonstration.

$$z\overline{z} = (\mathfrak{Re}(z) + i\,\mathfrak{Im}(z))(\mathfrak{Re}(z) - i\,\mathfrak{Im}(z)) = \mathrm{Re}(z)^2 - i^2\,\mathfrak{Im}(z)^2 = \mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2$$

Cette dernière expression montre que $z\overline{z}$ est un réel positif comme somme de deux carrés de réels.

⚠ **Attention**
Écrire $z \geq 0$ pour z complexe n'a aucun sens ! L'ensemble $\mathbb{C}$ ne possède pas de relation d'ordre qui prolonge celle des réels.

1.3 Module

Définition 4 *Pour tout complexe z, on définit le module de z, noté $|z|$ via $\sqrt{z\overline{z}}$.*

☞ **Remarque**
Cette notation est cohérente avec la notation de la valeur absolue pour les réels, puisque pour tout réel x, $|x| = \sqrt{x^2}$.

Interprétation géométrique : soit $\mathrm{P} = (a, b)$ un point du plan réel d'affixe $z = a + ib$. Alors $|z| = \mathrm{OP} = \sqrt{a^2 + b^2}$ est la distance de P au centre O du repère.

Propriété 7 *Soit z un complexe, alors $|\overline{z}| = |z|$.*

Démonstration. Comme la conjugaison est involutive, on a

$$|\overline{z}| = \sqrt{\overline{z}\,\overline{\overline{z}}} = \sqrt{\overline{z}z} = |z|$$

☞ **Remarque**
Cela est cohérent avec le fait que la symétrie orthogonale d'axe l'axe des abscisses est une isométrie : elle ne modifie pas les distances.

Propriété 8

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

Le module est multiplicatif.

Démonstration. Remarquons que la multiplicativité de la conjugaison entraîne

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)\overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1}\ \overline{z_2} = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2 = (|z_1||z_2|)^2$$

Comme $|z_1 z_2|$ et $|z_1||z_2|$ sont des réels positifs, cela implique

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

☞ **Remarque**

En particulier pour tout réel λ, pour tout complexe z, $|\lambda z| = |\lambda||z|$.

Propriété 9 *Soit z un complexe. Alors z est nul si et seulement si $|z|$ est nul. De plus, si z est non nul, alors il existe un unique complexe u vérifiant $uz = 1$. On le note désormais $1/z$, il vérifie*

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}, \quad \text{et} \quad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

Démonstration. Si z est nul, alors $\overline{z}$ également, ce qui entraîne $|z| = \sqrt{0} = 0$. Réciproquement, supposons que $|z|$ est nul. Cela entraîne notamment

$$\mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2 = 0$$

Si l'une de ces deux quantités est non nulle (par exemple $\mathfrak{Re}(z)$), alors $\mathfrak{Re}(z)^2 > 0$ et $\mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2 > \mathfrak{Im}(z)^2 \geq 0$, ce qui empêche la nullité de $|z|^2$. Ainsi, $\mathfrak{Re}(z)$ et $\mathfrak{Im}(z)$ sont tous deux nuls, donc $z = 0$.
Dans le cas z non nul, $z\overline{z} = [z|^2$ implique $z\frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1$, donc le complexe $u = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$ vérifie $uz = 1$. D'autre part, soit v un autre complexe tel que $vz = 1$. Alors $(u-v)z = 0$, donc $|u-v||z| = 0$. Or $|z| \neq 0$ puisque $z \neq 0$. D'après la règle du produit nul dans $\mathbb{R}$, $|u-v| = 0$, donc $u - v = 0$, i.e $u = v$. D'où l'unicité.
Le passage au module dans cette dernière égalité implique d'après les deux propriétés précédentes

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{1}{|z|^2}\right||\overline{z}| = \frac{1}{|z|^2}|z| = \frac{1}{|z|}$$

Exercice 1 *Démontrer que pour tout complexe non nul, z, $\mathfrak{Re}(1/z) = \mathfrak{Re}(z)/|z|^2$ et $\mathfrak{Im}(1/z) = -\mathfrak{Im}(z)/|z|^2$.*

On commence par écrire

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

On exploite ensuite la $\mathbb{R}$-linéarité des parties réelle et imaginaire, ce qui entraîne puisque $1/|z|^2$ est réel

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{|z|^2}\mathfrak{Re}\left(\overline{z}\right) \quad \text{et} \quad \mathfrak{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{|z|^2}\mathfrak{Im}\left(\overline{z}\right)$$

soit encore d'après la définition de la conjugaison,

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{|z|^2}\mathfrak{Re}\left(z\right) \quad \text{et} \quad \mathfrak{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{|z|^2}\mathfrak{Im}\left(z\right)$$

Exemple 2 *Soit u un complexe de module 1, alors $\overline{u} = 1/u$. Inutile de commencer des calculs du style $1/(a+ib) = (a-ib)/(a^2+b^2)$.*

Propriété 10 *Soit z_1, z_2 deux complexes. Alors $z_1 z_2 = 0$ si et seulement si $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$. On dit que $\mathbb{C}$ est intègre.*

Démonstration. On a la chance de pouvoir raisonner par équivalence ici.

$$z_1 z_2 = 0 \iff |z_1 z_2| = 0 \iff |z_1||z_2| = 0$$

Rappelons que l'on dispose de la règle du produit nul dans $\mathbb{R}$ à savoir que le produit de deux réels est nul si et seulement si l'un d'entre eux est nul. Ainsi,

$$z_1 z_2 = 0 \iff |z_1| = 0 \vee |z_2| = 0 \iff z_1 = 0 \vee z_2 = 0$$

Propriété 11 *Soit z un complexe. Alors*

$$|\mathfrak{Re}(z)| \leq |z|$$

Il y a égalité si et seulement si z est réel. On a également l'inégalité

$$|\mathfrak{Im}(z)| \leq |z|$$

Il y a égalité si et seulement si z est imaginaire pur.

Démonstration. Remarquons que

$$|\mathfrak{Re}(z)|^2 = \mathfrak{Re}(z)^2 \leq \mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2 = |z|^2$$

Mais alors, comme la racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$,

$$|\mathfrak{Re}(z)| \leq |z|$$

Si z est réel, il y a clairement égalité. Réciproquement, si $|\mathfrak{Re}(z)| = |z|$, alors $\mathfrak{Im}(z)^2 = |z|^2 - |\mathfrak{Re}(z)|^2 = 0$, donc $\mathfrak{Im}(z) = 0$, donc z est réel. Le restant de la démonstration est laissé à titre d'exercice (refaire la même démarche ou alors appliquer ce qui précède à iz).

Théorème 2 (Inégalité triangulaire) *Soit z_1, z_2 deux complexes. Alors*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Il y a égalité si et seulement si il existe un réel positif r tel que $z_1 = rz_2$ ou $z_2 = rz_1$ (on dit que z_1 et z_2 sont positivement liés).

Démonstration.

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{z_1 + z_2} = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}\,\overline{\overline{z_2}} + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\mathfrak{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2$$

La propriété précédente implique que

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

On en déduit par croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}^+$ que

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

S'il y a égalité, alors d'après les calculs précédents,

$$\mathfrak{Re}(z_1\overline{z_2}) = |z_1\overline{z_2}|$$

D'après le cas d'égalité de la propriété précédente, on en déduit que $z_1\overline{z_2}$ est un réel et qu'il est positif. Notons-le a. Si z_2 est nul, on peut écrire $z_2 = rz_1$ avec $r = 0$ qui est bien un réel positif. Sinon, $z_1|z_2|^2 = az_2$, ce qui permet d'écrire, $z_1 = \frac{a}{|z_2|^2} z_2$. En choisissant, $r = a/|z_2|^2$, on dispose bien d'un réel positif tel que $z_1 = rz_2$. Réciproquement, s'il existe un réel positif r tel que $z_1 = rz_2$ (l'autre cas se traite de manière symétrique), alors la positivité de r entraîne

$$|z_1 + z_2| = |(r+1)z_2| = |r+1||z_2| = (r+1)|z_2| = |r||z_2| + |z_2| = |z_1| + |z_2|$$

et on a bien égalité.

Théorème 3 (Inégalité triangulaire inverse) *Soit z_1, z_2 deux complexes. Alors*

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$$

Démonstration. Appliquons l'inégalité triangulaire aux complexes z_1 et $z_2 - z_1$. Alors

$$|z_2| = |z_1 + z_2 - z_1| \leq |z_1| + |z_2 - z_1|$$

ce qui entraîne

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1|$$

On applique à présent l'inégalité triangulaire aux complexes z_2 et $z_1 - z_2$, ce qui implique

$$|z_1| = |z_2 + z_1 - z_2| \leq |z_2| + |z_1 - z_2|$$

Ainsi,

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_2 - z_1|$$

Par conséquent, quel que soit le signe du réel $|z_1| - |z_2|$, il est en valeur absolue, plus petit que $|z_2 - z_1|$, soit encore

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$$

Interprétation géométrique : Soit ABC un triangle du plan réel. Alors

$$|\mathrm{AC} - \mathrm{CB}| \leq \mathrm{AB} \leq \mathrm{AC} + \mathrm{CB}$$

2 Trigonométrie complexe

2.1 Exponentielle complexe

On rappelle que l'exponentielle réelle vérifie pour tous réels a et b,

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$$

Afin de généraliser cette propriété à un ensemble de nombres complexes, on propose la définition suivante

Définition 5 *Pour tout réel a, on note*

$$\exp(\mathrm{i}a) = \cos(a) + \mathrm{i}\sin(a)$$

Notation
On rencontre également la notation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}$. Elle est à utiliser avec parcimonie tant que les fonctions puissances non pas été définies.

Exemple 3 $\exp(i0) = 1, \exp(i\pi/2) = i, \exp(i\pi) = -1, \exp(-i\pi/2) = -i$

Théorème 4 *Pour tous réels a et b,*

$$\exp(\mathrm{i}a + \mathrm{i}b) = \exp(\mathrm{i}a)\exp(\mathrm{i}b)$$

Démonstration. D'après les formules d'addition du cosinus et du sinus

$$\begin{aligned}
\exp(ia)\exp(ib) &= (\cos(a) + i\sin(a))(\cos(b) + i\sin(b)) \\
&= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + i(\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)) \\
&= \cos(a+b) + i\sin(a+b) \\
&= \exp(i(a+b)) \\
&= \exp(ia+ib)
\end{aligned}$$

Propriété 12 *Pour tout réel t,*

$$\frac{1}{\exp(it)} = \exp(-it)$$

$$\overline{\exp(it)} = \exp(-it),$$

$$|\exp(it)| = 1.$$

$$\exp(it + i2\pi) = \exp(it)$$

Démonstration. Soit t un réel. Alors

$$\exp(it)\exp(-it) = \exp(it - it) = \exp(i0) = \cos(0) + i\sin(0) = 1$$

Ce produit égal à 1 montre que $\exp(it)$ est inversible, d'inverse $\exp(-it)$.

$$\overline{\exp(it)} = \overline{\cos(t) + i\sin(t)} = \cos(t) - i\sin(t) = \cos(-t) + i\sin(-t) = \exp(i(-t)) = \exp(-it)$$

$$|\exp(it)|^2 = \exp(it)\overline{\exp(it)} = \exp(it)\exp(-it) = \exp(it - it) = \exp(i0) = \cos(0) + i\sin(0) = 1$$

Comme le module d'un complexe est un réel positif, on en déduit que

$$|\exp(it)| = \sqrt{1} = 1.$$

$$\exp(it + i2\pi) = \exp(it)\exp(i2\pi) = \exp(it)(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)) = \exp(it)(1 + i0) = \exp(it)$$

Théorème 5 (admis) *Pour tout complexe z de module 1, il existe un réel t tel que $z = \exp(it)$.*

☞ **Remarque**
Il s'agit de la traduction en terme d'affixe complexe de la définition du cosinus et du sinus, dont la définition est purement géométrique à ce stade de vos connaissances. La surjectivité de l'exponentielle complexe est en réalité beaucoup plus délicate à démontrer.

Propriété 13 (Formules d'Euler) *Pour tout réel t,*

$$\cos(t) = \frac{1}{2}\left(\exp(it) + \exp(-it)\right)$$

$$\sin(t) = \frac{1}{2i}\left(\exp(it) - \exp(-it)\right)$$

Démonstration. Soit t un réel, alors

$$\cos(t) = \mathfrak{Re}(\exp(it)) = \frac{1}{2}\left(\exp(it) + \overline{\exp(it)}\right) = \frac{1}{2}\left(\exp(it) + \exp(-it)\right)$$

$$\sin(t) = \mathfrak{Im}(\exp(it)) = \frac{1}{2i}\left(\exp(it) - \overline{\exp(it)}\right) = \frac{1}{2i}\left(\exp(it) - \exp(-it)\right)$$

Quelques formules :

Propriété 14 (Technique de l'angle moitié) *Soit p et q deux réels, alors on a les factorisations*

$$e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$e^{ip} - e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} 2i\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

En particulier,

$$1 + e^{iq} = e^{i\frac{q}{2}} 2\cos\left(\frac{q}{2}\right)$$

$$1 - e^{iq} = -e^{i\frac{q}{2}} 2i\sin\left(\frac{q}{2}\right)$$

Démonstration. Soit p et q deux réels. Alors

$$e^{ip} + e^{iq} = e^{i(p+q)/2}\left(e^{ip}e^{-i(p+q)/2} + e^{iq}e^{-i(p+q)/2}\right) = e^{i(p+q)/2}\left(e^{i(p-q)/2} + e^{-i(p-q)/2}\right) = e^{i(p+q)/2} 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

L'autre formule se démontre de la même manière. On a également la possibilité d'appliquer la formule précédente aux réels p et $q+\pi$, ce qui entraîne

$$e^{ip} + e^{i(q+\pi)} = e^{i\frac{p+q+\pi}{2}} 2\cos\left(\frac{p-q}{2} - \pi/2\right) = e^{i\frac{p+q}{2}} e^{i\pi/2} 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

Comme $e^{i\pi} = -1$ et $e^{i\pi/2} = i$, on en déduit que

$$e^{ip} - e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} 2i\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Les deux dernières égalités correspondent au cas particulier $p = 0$.

Théorème 6 (Formule de Moivre) *Soit t un réel et n un entier relatif, alors*

$$(\cos(t) + i\sin(t))^n = \cos(nt) + i\sin(nt)$$

Démonstration. Commençons par le cas où n est un entier positif et démontrons-le par récurrence. Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$ l'assertion :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \left(e^{it}\right)^n = e^{int}$$

Initialisation à $n = 1$. Soit t un réel, alors

$$\left(e^{it}\right)^1 = e^{it} = \cos(t) + i\sin(t) = \cos(1\cdot t) + i\sin(1\cdot t)$$

Soit à présent un entier naturel n non nul tel que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée. Soit t un réel, alors d'après les règles sur les puissances et l'hypothèse de récurrence, on a

$$\left(e^{it}\right)^{n+1} = e^{it}\left(e^{it}\right)^n = e^{it}e^{int}$$

L'équation fonctionnelle satisfaite par l'exponentielle complexe entraîne alors

$$\left(e^{it}\right)^{n+1} = e^{i(t+nt)} = e^{i(n+1)t}$$

Ainsi, l'hérédité est prouvée et l'assertion $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n.
Pour le cas $n = 0$, il s'agit d'une convention d'écriture. Pour tout complexe z, $z^0 = 1$, tandis que $\cos(0) + i\sin(0) = 1$.
Soit à présent n un entier relatif négatif et t un réel. Rappelons que e^{it} est de module 1, donc non nul. Une puissance entière négative d'un tel complexe a donc un sens. Alors $\left(e^{it}\right)^{-n} = e^{in(-t)}$ a pour inverse e^{int}. Donc $\left(e^{it}\right)^n = e^{int}$.
Ainsi, on a démontré que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall t \in \mathbb{R}, \left(e^{it}\right)^n = e^{int}$$

Il suffit d'écrire ces complexes sous forme algébrique (parties réelle et imaginaire) pour obtenir le résultat souhaité.

⚠ **Attention**
L'écriture $e^{int} = \left(e^{it}\right)^n$ n'est valable que pour n entier relatif. $1^{1/\pi} = 1$, mais $e^{2i\pi/\pi} \neq 1$.

Propriété 15 (Formules de factorisation) *Pour tous réels p et q,*

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Démonstration. Pour démontrer ces égalités, il suffit de se remémorer les factorisations via l'angle moitié. La partie réelle de

$$e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

entraîne

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

Sa partie imaginaire implique quant à elle

$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

On procède de manière similaire pour les deux dernières égalité. La partie réelle de

$$e^{ip} - e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} 2i\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

fournit

$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

La partie imaginaire entraîne

$$\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

☞ **Remarque**
Il faut absolument retenir les formules de factorisations dans les cas particulier $p = 0$:

$$1 + \cos(q) = 2\cos^2(q/2), \quad 1 - \cos(q) = 2\sin^2(q/2)$$

2.2 ArgumentS d'un nombre complexe

Définition 6 *Pour tout complexe z non nul, les réels t vérifiant $z = |z|\exp(it)$ sont appelés les arguments de z (il en existe toujours, c'est admis). Les écritures du complexe z sous cette forme sont appelées formes trigonométriques de z ou formes expontielles de z, contrairement à l'écriture $z = \mathfrak{Re}(z) + i\mathfrak{Im}(z)$ qui est appelée forme algébrique de z.*

Exemple 4 *Un complexe non nul est réel si et seulement si il possède un argument nul ou égal à π. Un complexe non nul est imaginaire pur si et seulement si il possède un argument égal à $\pi/2$ ou $-\pi/2$.*

Notation
On rencontre parfois la notation $\arg(z)$ pour désigner un argument de z choisi dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$ dans plusieurs ouvrages (ou chez les physiciens). Celle-ci est à manier avec beaucoup de précaution! En particuler, on prêtera attention à ne les manipuler qu'avec des congruences et non des égalités pour éviter toute erreur. J'accepte l'écriture $\arg(z) \equiv \pi/3[2\pi]$ *par exemple.*

Théorème 7 *Soit z un complexe non nul et t un argument de z. Alors l'ensemble des arguments de z est*

$$\{t + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$$

Démonstration. Soit k un entier relatif, alors

$$\exp(it + i2k\pi) = \exp(it)\exp(i2k\pi) = \exp(it)\exp(2i\pi)^k = \exp(it)1^k = \exp(it)1 = \exp(it),$$

ce qui démontre que $t + 2k\pi$ est un argument de z. Réciproquement, soit t' un argument de z. Alors $|z|\exp(it) = |z|\exp(it')$, ce qui implique puisque $|z|$ est non nul que $\cos(t) + i\sin(t) = \cos(t') + i\sin(t')$. Alors $\cos(t) = \cos(t')$ et $\sin(t) = \sin(t')$, donc t et t' sont congrus modulo 2π, i.e il existe un entier relatif k tel que $t = t' + 2k\pi$.

Propriété 16 *Soit z_1, z_2 deux complexes non nuls. Alors*

$$\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)[2\pi]$$

De manière équivalente, pour tout argument t_1 de z_1, tout argument t_2 de z_2, $t_1 + t_2$ est un argument de $z_1 z_2$.

Démonstration. Tout d'abord, $z_1 z_2$ est un complexe non nul, puisque $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ est non nul comme produit de deux réels non nuls. Ainsi, parler d'arguments de $z_1 + z_2$ a un sens. De plus, l'équation fonctionnelle satisfaite par l'exponentielle complexe assure que

$$z_1 z_2 = |z_1|\exp(it_1)|z_2|\exp(it_2) = |z_1 z_2|\exp(i(t_1 + t_2))$$

Ainsi, $t_1 + t_2$ est un argument de $z_1 z_2$.

Propriété 17 *Soit z un complexe non nul,*

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)[2\pi]$$

i.e, pour tout argument t de z, $-t$ est un argument de $1/z$.

Démonstration.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}\frac{1}{\exp(it)} = \left|\frac{1}{z}\right|\exp(-it)$$

et $|1/z|$ est un réel positif.

Propriété 18 *Soit z_1 et z_2 deux complexes non nuls.*

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)[2\pi]$$

i.e, pour tout argument t_1 de z_1, pour tout argument t_2 de z_2, $t_1 - t_2$ est un argument de z_1/z_2.

Démonstration. On a
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|e^{it_1}}{|z_2|e^{it_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(t_1-t_2)}$$
et $|z_1|/|z_2|$ est un réel positif.

Propriété 19 *Soit z un complexe non nul et a un réel strictement positif. Alors*

— $\arg(az) \equiv \arg(z)[2\pi]$

— $\arg(-az) \equiv \pi + \arg(z)[2\pi]$.

— $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$.

Démonstration. Le complexe az s'écrit $a|z|ze^{it}$ avec $a|z|$ un réel positif. Donc t est un argument de az. Le complexe $-az$ s'écrit $ae^{i\pi}|z|e^{it} = a|z|e^{i(t+\pi)}$ avec $a|z|$ un réel positif. Donc $t+\pi$ est un argument de $-az$. Le complexe $\overline{z}$ vérifie
$$\overline{z} = \overline{|z|e^{it}} = |z|\overline{e^{it}} = |z|e^{-it}$$
avec $|z|$ un réel positif.

⚠ Attention
Ecrire un complexe sous la forme $z = ae^{it}$ avec a et t réels ne suffit pas à établir que t est un argument de z. Il faut vérifier la non nullité et le signe de a.

Propriété 20 *Soit a, b, deux réels. Alors il existe un réel positif* A *et un réel φ tel que*
$$\forall t \in \mathbb{R}, a\cos(t) + b\sin(t) = \mathrm{A}\cos(t-\varphi)$$

Démonstration. Dans le cas où a et b sont tous deux nuls, il suffit de choisir $\mathrm{A} = 0$ et $\varphi = 0$. Sinon, on note $z = a+ib$. Ce complexe est non nul, on peut donc le mettre sous forme trigonométrique $z = |z|e^{iu}$ avec $|z| > 0$ et $u \in \mathbb{R}$. Soit $t \in \mathbb{R}$. D'une part,
$$e^{it}\overline{z} = |z|e^{i(t-u)}$$
D'autre part,
$$e^{it}\overline{z} = (\cos(t) + i\sin(t))(a - ib) = a\cos(t) + b\sin(t) + i(a\sin(t) - b\cos(t))$$
La partie réelle de complexe donne alors l'égalité
$$|z|\cos(t-u) = a\cos(t) + b\sin(t)$$
On choisit alors $\mathrm{A} = |z|$ et $\varphi = u$.

☞ Remarque
On peut mémoriser avec les précautions d'usage sur les arguments
$$\forall t \in \mathbb{R}, a\cos(t) + b\sin(t) = |a+ib|\cos(t - \arg(a+ib))$$

Comment déterminer un argument d'un complexe non nul à partir de son écriture algébrique ? La réponse passe entre autres par la fonction arctangente, la réciproque de la fonction tangente restreinte à l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$. La fonction arctangente sera étudiée dans le chapitre sur les fonctions usuelles.

3 Équations dans $\mathbb{C}$

3.1 Équations polynomiales

Théorème 8 (D'Alembert-Gauss) *Pour tout polynôme* P *à coefficients complexes non constant, il existe un complexe a tel que* $\mathrm{P}(a) = 0$.

Démonstration. Admis.

Propriété 21 *Soit Δ un complexe, alors il existe un complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta$. De plus, tout racine carrée complexe de Δ vaut δ ou $-\delta$.*

Démonstration. Notons $\Delta = a+ib$ l'écriture de Δ à l'aide de ses parties réelles et imaginaires. Supposons qu'un tel complexe δ existe et notons-le $\delta = \alpha+i\beta$ avec $\alpha = \mathfrak{Re}(\delta)$ et $\beta = \mathfrak{Im}(\delta)$. En particulier, $|\delta|^2 = |\Delta|$, donc $\alpha^2+\beta^2 = \sqrt{a^2+b^2}$. D'autre part, $\mathfrak{Re}(\delta^2) = \alpha^2-\beta^2 = a$. On en déduit que

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right) \quad \text{et} \quad \beta^2 = \frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)$$

Par conséquent,

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)} \quad \text{et} \quad \beta = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}$$

Cependant, $\mathfrak{Im}(\delta^2) = 2\alpha\beta = b$. Si b est nul, on est ramené aux racines carrées réelles, i.e si a est positif, $\alpha = \pm\sqrt{a}, \beta = 0$ et si a est négatif, $\alpha = 0, \beta = \sqrt{-a}$. S'il n'est pas nul, alors $b/|b|$ fournit son signe. On n'a alors que deux possibilités pour (α,β).

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}$$

ou

$$\alpha = -\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}$$

Phase de synthèse laissée en exercice.

⚠ **Attention**
Contrairement au cas réel, on ne peut pas choisir l'une de ces deux racines carrées complexes selon son signe. Par conséquent, dans le cas complexe, on ne dira jamais « la » racine carrée complexe de Δ, mais ***une*** *racine carrée complexe de Δ.*

Propriété 22 *Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré 2, i.e sous la forme $\mathrm{P} = a\mathrm{X}^2+b\mathrm{X}+c$ avec a un complexe non nul, b et c deux complexes. Alors en notant $\Delta = b^2-4ac$ et δ une racine carrée complexe de Δ, les racines de P sont exactement les*

$$\frac{-b+\delta}{2a} \quad \textit{et} \quad \frac{-b-\delta}{2a}$$

Démonstration. Soit z un complexe alors, comme a est non nul, on a l'équivalence

$$\mathrm{P}(z) = 0 \iff a^2z^2+baz+ca = 0 \iff \left(az+\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}+ca = 0 \iff \left(az+\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{\Delta}{4} \iff (2az+b)^2 = \Delta$$

D'après la propriété précédente, on a alors l'équivalence

$$\mathrm{P}(z) = 0 \iff (2az+b) = \delta \vee (2az+b) = -\delta \iff z = \frac{-b+\delta}{2a} \vee z = \frac{-b-\delta}{2a}$$

Exemple 5 *En particulier, lorsque a est un réel non nul, b et c des réels. Alors Δ est réel. S'il est positif ou nul, on retrouve les résultats classiques de lycée. S'il est négatif, alors les racines carrées de Δ sont $i\sqrt{-\Delta}$ et $-i\sqrt{-\Delta}$. Par conséquent, les racines de P sont*

$$\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \textit{et} \quad \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

et elles ont la particularité d'être conjuguées.

Propriété 23 (Relations coefficients-racines) *Avec les mêmes notations que précédemment, les racines z_1 et z_2 de P vérifient*

$$z_1+z_2 = -\frac{b}{a} \quad \textit{et} \quad z_1z_2 = \frac{c}{a}$$

Démonstration. La somme est directe avec l'expression précédemment trouvée. Le produit vérifie

$$z_1z_2 = \frac{1}{4a^2}(-b+\delta)(-b-\delta) = \frac{1}{4a^2}(b^2-\delta^2) = \frac{1}{4a^2}(b^2-\Delta) = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Il existe une autre démonstration à l'aide de la factorisation des polynômes, nous la verrons plus tard dans l'année.

✎ **Méthode**
Si l'une des deux racines est évidente à la lecture du polynôme, il suffit d'exploiter les relations coefficients-racines pour déterminer l'autre racine.

Théorème 9 *Soit n un entier naturel non nul. Alors*

$$\{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\} = \{\exp(i2\pi k/n) | k \in [\![0, n-1]\!]\}$$

Les n éléments de cet ensemble sont appelés les racines n-ièmes de l'unité.

Démonstration. Soit z un complexe tel que $z^n = 1$. Alors $|z|^n = 1$, donc $|z| = 1$. Il existe alors un réel t tel que $z = \exp(it)$, mais alors $\exp(int) = 1$, donc nt est congru à 0 modulo 2π, i.e il existe un entier relatif k tel que $nt = 2\pi k$. Comme n est non nul, on en déduit que $t = 2\pi k/n$ et que $z = \exp(i2\pi k/n)$. Par 2π-périodicité, on a alors $z = \exp(2i\pi(k/n - k'))$ pour tout entier relatif k'. On choisit alors k' le quotient dans la division euclidienne de k par n, ce qui donne l'égalité $k = nk' + r$ avec r dans $[\![0, n-1]\!]$, donc $\frac{k}{n} - k' = \frac{r}{n}$. Avec ce choix, $z = \exp(2i\pi r/n)$ avec $r \in [\![0, n-1]\!]$. Réciproquement, pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$,

$$\exp(i2\pi k/n)^n = \exp(2i\pi k) = \exp(0) = 1$$

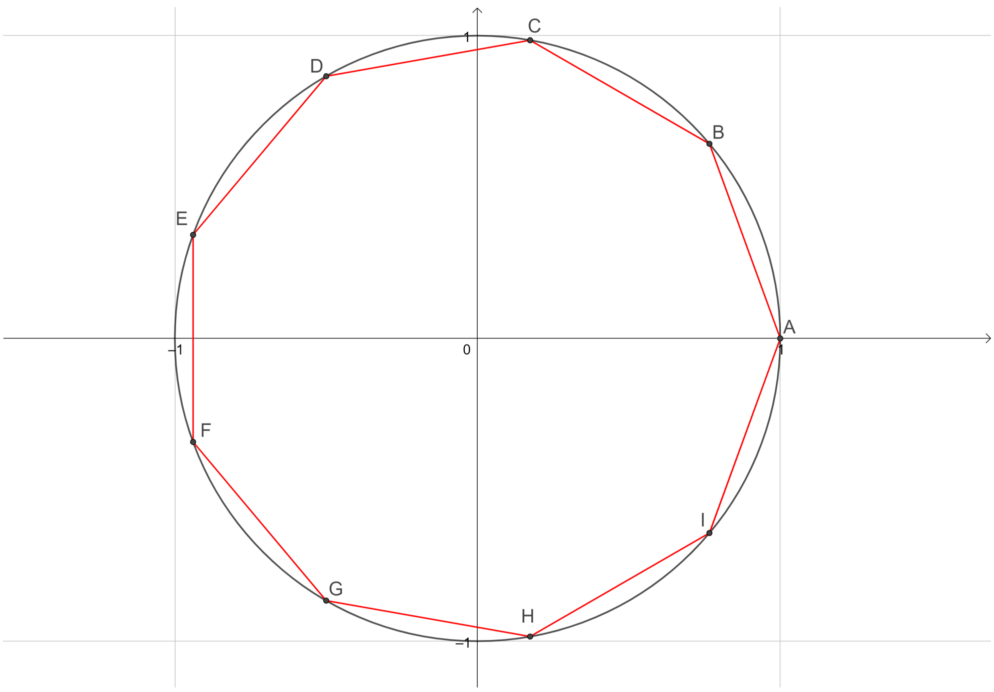
Enfin, il reste à prouver que nous disposons bien de n éléments distincts. Pour cela, on remarque que pour tous entiers k, k' dans $[\![0, n-1]\!]$, l'égalité $\exp(i2k\pi/n) = \exp(2ik'\pi/n)$ implique d'après la description des arguments de complexes non nuls que $2k\pi/n \equiv 2k'\pi/n[2\pi]$ donc qu'il existe un entier relatif k'' tel que $k - k' = k''n$. Toutefois, $-n < -n+1 \leq k - k' \leq n-1 < n$, donc $k'' = 0$ et $k = k'$. Par conséquent, $\{\exp(i2\pi k/n) | k \in [\![0, n-1]\!]\}$ possède bien n éléments distincts.

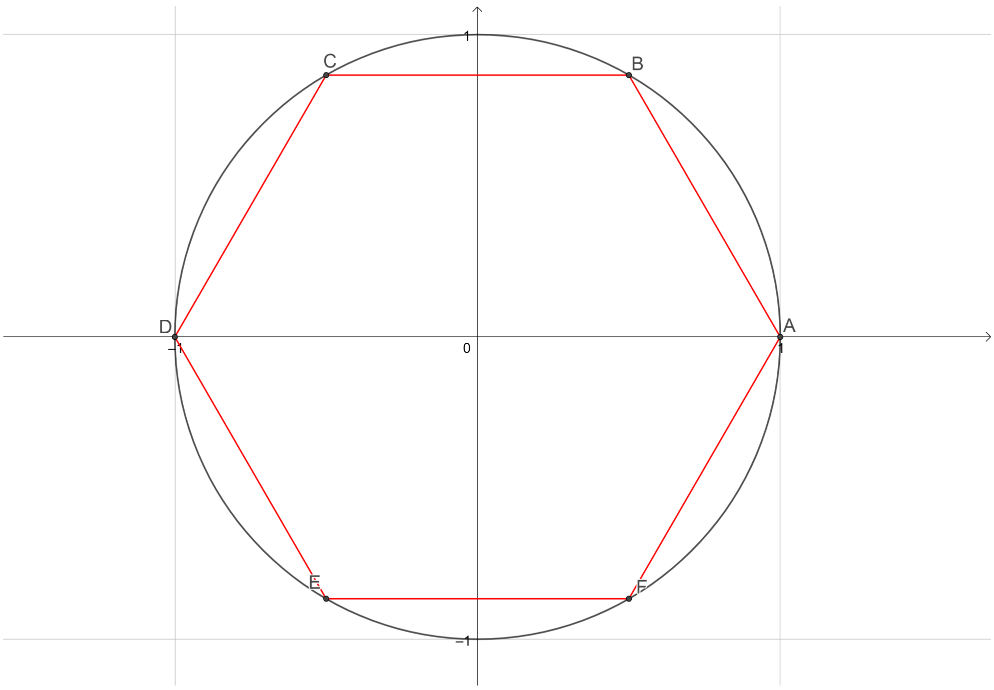
Notation
Pour tout entier naturel non nul, l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$. L'ensemble des complexes de module 1 est noté $\mathbb{U}$.

Exemple 6 *Pour $n = 4$,*

$$\mathbb{U}_4 = \left\{e^{i0}, e^{i\pi/4}, e^{i\pi/2}, e^{i3\pi/2}\right\} = \{1, i, -1, -i\}$$

Les figures suivantes donnent un exemple de représentation géométrique des racines n-ièmes de l'unité à l'aide du plan $\mathbb{R}^2$. La première figure correspond au cas $n = 9$ et la seconde au cas $n = 6$.





Propriété 24 *Soit a un complexe non nul, t un argument de a et n un entier naturel non nul. Alors*

$$\{z \in \mathbb{C} | z^n = a\} = \{|a|^{1/n} e^{it/n} u | u \in \mathbb{U}_n\} = \{|a|^{1/n} \exp(i(t+2\pi k)/n) | k \in [\![0, n-1]\!]\}$$

Démonstration. Remarquons $a = (|a|^{1/n} e^{it/n})^n$. Notons s le complexe non nul $|a|^{1/n} e^{it/n}$. Soit z un complexe. Alors on a l'équivalence

$$z^n = a \iff z^n = s^n \iff (z/s)^n = 1 \iff z/s \in \mathbb{U}_n \iff \exists u \in \mathbb{U}_n, z = su$$

3.2 Exponentielle complexe - extension

On cherche toujours à prolonger l'équation fonctionnelle satisfaite par l'exponentielle. On propose la définition suivante

Définition 7 *Pour tout complexe z, on définit l'exponentielle de z via*

$$\exp(z) = e^z = \exp(\mathfrak{Re}(z)) \exp(\mathrm{i}\,\mathfrak{Im}(z))$$

Théorème 10

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$$

Démonstration. On note $a_i = \mathfrak{Re}(z_i)$ et $b_i = \mathfrak{Im}(z_i)$ pour tout i dans $\{1, 2\}$. Alors, la $\mathbb{R}$ linéarité des parties réelle et imaginaire implique $\exp(z_1 + z_2) = \exp(a_1 + a_2)\exp(i(b_1 + b_2))$. On utilise les propriétés de l'exponentielle réelle et de $t \mapsto \exp(it)$ précédemment démontrée. On a alors

$$\exp(z_1+z_2) = \exp(a_1)\exp(a_2)\exp(ib_1)\exp(ib_2) = \exp(a_1)\exp(ib_1)\exp(a_2)\exp(ib_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$$

☞ **Remarque**
A présent, il n'est plus nécessaire d'isoler parties réelle et imaginaire lors de la manipulation de l'exponentielle d'une somme de complexes.

Propriété 25 *Pour tout complexe z un complexe, on a les*

$$|\exp(z)| = \exp(\mathfrak{Re}(z))$$

$$\arg(\exp(z)) \equiv \mathfrak{Im}(z)[2\pi]$$

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$$

Démonstration. La première égalité provient de la multiplicativité du module, la positivité de l'exponentielle réelle, et le fait que $\forall t \in \mathbb{R}, |\exp(it)| = 1$. Cette première égalité acquise, on en déduit que $\exp(z)$ est un complexe non nul, donc qu'on peut parler des ses arguments. Comme $\exp \mathfrak{Re}(z) > 0$ et $\mathfrak{Im}(z)$ est réel, la définition de l'exponentielle complexe est une forme trigonométrique, donc $\mathfrak{Im}(z)$ est un argument de $\exp(z)$. Enfin, on en déduit que $-\mathfrak{Im}(z)$ est un argument de $\overline{\exp(z)}$. De plus, $\mathfrak{Re}(\overline{z}) = \mathfrak{Re}(z)$, donc

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\mathfrak{Re}(z))\exp(-i\,\mathfrak{Im}(z)) = \exp(\mathfrak{Re}(\overline{z}))\exp(i\,\mathfrak{Im}(\overline{z})) = \exp(\overline{z})$$

Propriété 26 *Soit a un complexe non nul que l'on écrit sous forme trigonométrique $|a|e^{it}$ avec t un argument de a. Alors*

$$\{z \in \mathbb{C} | \exp(z) = a\} = \{\ln|a| + i(t + 2k\pi) | k \in \mathbb{Z}\}$$

Démonstration. Soit z un complexe tel que $\exp(z) = a$. Alors le module de cette égalité implique $\exp(\mathfrak{Re}(z)) = |a|$. Donc $\mathfrak{Re}(z) = \ln(|a|)$. De plus, d'après la description des arguments d'un complexe non nul, on a $\mathfrak{Im}(z) \equiv t[2\pi]$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathfrak{Im}(z) = t + 2k\pi$. Ainsi, $z = \ln(|a|) + i(t + 2k\pi)$. Réciproquement, pour tout entier relatif k,

$$\exp(\ln(|a|) + i(t + 2k\pi)) = \exp(\ln(|a|)\exp(it)\exp(2ik\pi) = |a|\exp(it) = a$$

Exercice 2 *Soit z un complexe et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto |\exp(-zt)|$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur z pour que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.*

4 Géométrie dans $\mathbb{C}$

4.1 Transformations du plan

Fixons un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan $\mathbb{R}^2$. Rappelons qu'à tout complexe z, on peut associer le point $P(z)$ du plan $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(\mathfrak{Re}(z), \mathfrak{Im}(z))$. Réciproquement, à tout point $P = (a, b)$ du plan $\mathbb{R}^2$, on associe le complexe $z(P) = a + ib$ son affixe complexe. De même, à tout vecteur du plan $\vec{MN}$, on associe son affixe complexe qui n'est autre que $z(M) - z(N)$ avec les notations précédentes. Afin d'alléger les écritures dans cette partie du cours, on confond un complexe z et le point du plan d'affixe z.

Propriété 27 *Soit a, b, c des complexes tels que $b \neq a$ et $c \neq a$. Alors en notant* A, B, C *les points du plan correspondants, on a*

$$\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = \frac{AC}{AB}$$

Si l'on note t un argument de $(c-a)/(b-a)$, alors $t \equiv (\vec{AB}, \vec{AC})[2\pi]$.

Démonstration. $|c - a| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = AC$. De même pour $|b - a| = AB$. La multiplicativité du module fournit la première égalité. D'après la définition de l'exponentielle d'un imaginaire pur, les arguments de $c - a$ sont congrus à l'angle entre $\vec{0P}$ avec $P = (0, 1)$ et $\vec{AC}$. Les arguments de l'inverse et $\exp(it + is)$ fournissent la seconde égalité.

Propriété 28 *Trois points du plan distincts deux à deux* A, B, C *d'affixes complexes a, b, c sont alignés si et seulement si les arguments de $(c-a)/(b-a)$ sont congrus à 0 modulo π si et seulement si $(c-a)/(b-a) \in \mathbb{R}$.*
Soit A, B, C *trois points du plan distincts deux à deux d'affixes complexes a, b, c. Alors les droites* (AB) *et* (AC) *sont orthogonales si et seulement si les arguments des $(c-a)/(b-a)$ sont congrus à $\pi/2$ modulo π si et seulement si $(c-a)/(b-a) \in i\mathbb{R}$.*

Démonstration. Il s'agit de la traduction de l'alignement en termes d'angles congrus à 0 modulo π, et d'orthogonalité en termes d'angles congrus à $\pi/2$ modulo π.

☞ Remarque
On peut également traduire ces conditions nécessaires et suffisantes en termes de conjugaison. En effet, pour tout complexe z, z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$, et z et imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$. Ainsi, A, B *et* C *sont alignés si et seulement si $(c-a)/(b-a) = (\overline{c} - \overline{a})/(\overline{b} - \overline{a})$. Les droites* (AB) *et* (AC) *sont orthogonales si et seulement si $(c-a)/(b-a) = -(\overline{c} - \overline{a})/(\overline{b} - \overline{a})$*

Définition 8 *Soit a un complexe non nul et b un complexe. L'application*

$$\mathrm{S}_{a,b} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto az + b$$

est appelée similitude directe.

Propriété 29

- — *Dans le cas $a = 1$, $\mathrm{S}_{1,b}$ est une translation de vecteur $\vec{\mathrm{OB}}$ avec B le point du plan d'affixe b. Elle possède un point fixe si et seulement si $b = 0$, auquel cas c'est l'identité de $\mathbb{C}$.*
- — *Dans le cas $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $\mathrm{S}_{a,b}$ est une homothétie de centre d'affixe $b/(1-a)$ et de rapport a.*
- — *Dans le cas $a \in \mathbb{U}\backslash\{1\}$, il s'agit d'une rotation de centre d'affixe $b/(1-a)$ et d'angle congru à tous les arguments de a modulo 2π.*

Démonstration. Soit z un complexe. Alors $z = \mathrm{S}_{a,b}(z) \iff z = az + b \iff (1-a)z = b$. Par conséquent, si $a = 1$, $\mathrm{S}_{a,b}(z) - z = b$. Si b est non nul, l'application $\mathrm{S}_{a,b}$ n'a pas de point fixe. Si $b = 0$, c'est l'application identité de $\mathbb{C}$. Dans le cas a différent de 1, z est point fixe si et seulement si $z = b/(1-a)$. Notons ω ce complexe, le point correspondant est le centre Ω de $\mathrm{S}_{a,b}$. Mais alors pour tout complexe z distinct de ω,

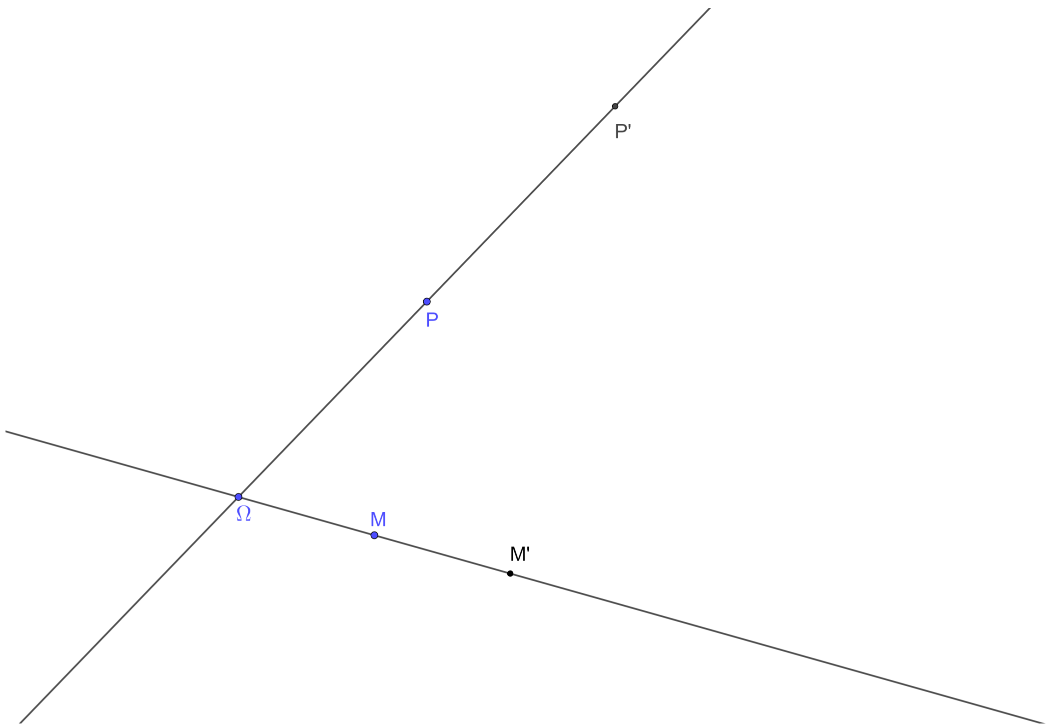
$$\mathrm{S}_{a,b}(z) - c = az + b - ac - b = a(z - c)$$

ce qui se comprend via la première propriété de cette partie ainsi. Pour tout point M d'affixe z, en notant M' le point du plan d'affixe $\mathrm{S}_{a,b}(z)$, puis θ un argument de a, on a

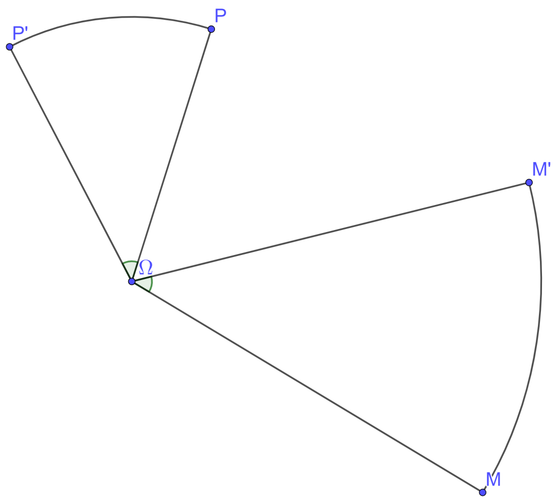
$$\Omega\mathrm{M}' = |a|\Omega\mathrm{M} \quad \text{et} \quad (\vec{\Omega\mathrm{M}}, \vec{\Omega\mathrm{M}'}) \equiv \theta[2\pi]$$

En particulier, si a est un réel différent de 1, $(\vec{\Omega\mathrm{M}}, \vec{\Omega\mathrm{M}'}) \equiv 0[\pi]$, ce qui signifie que Ω, M et M' sont alignés.
Dans le cas a de module 1 distinct de 1, on obtient $\Omega\mathrm{M}' = \Omega\mathrm{M}$ et $(\vec{\Omega\mathrm{M}}, \vec{\Omega\mathrm{M}'}) \equiv \theta[2\pi]$.

Dans la figure suivante, on représente trois points $\Omega, \mathrm{M}, \mathrm{P}$ du plan, ainsi que les images M' et P' des points M et P par l'homothétie de centre Ω et de rapport 2. Notez bien l'alignement des triplets $(\Omega, \mathrm{M}, \mathrm{M}')$ et $(\Omega, \mathrm{P}, \mathrm{P}')$. On peut par exemple retrouver le coefficient b de la similitude directe sous-jacente via l'affixe de ω et l'égalité complexe $\omega = b/(1-a)$ qui vaut $-b$ dans le cas $a = 2$ de cette figure.



La figure suivante reprend le même type de notations avec la rotation de centre Ω, d'angle de rotation congru à $\pi/4$ modulo 2π.



Exercice 3 *Montrer qu'une similitude directe envoie un cercle sur un cercle et une droite sur une droite.*

Définition 9 *Soit a un complexe non nul et b un complexe. L'application*

$$\mathrm{I}_{a,b} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto a\overline{z} + b$$

est appelée similitude indirecte.

☞ **Remarque**
On dit que cette transformation est indirecte car elle change les angles en leurs opposés. Par exemple, on a vu que pour tout complexe non nul z, $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$.

Propriété 30 *Pour tout réel b, l'application $\mathrm{I}_{1,2ib}$ est la réflexion orthogonale par rapport à la droite $\mathfrak{Im}(z) = b$.*

Démonstration. Soit z un complexe. Alors $\mathrm{I}_{1,b}(z) = z \iff \overline{z} + 2ib = z \iff b = \mathfrak{Im}(z)$. Les points fixes de $\mathrm{I}_{1,2ib}$ sont donc la droite horizontale $y = b$ dans le plan $\mathbb{R}^2$. Alors pour tout complexe z, $\mathrm{I}_{1,2ib}(z) - ib = \overline{z} + ib = \overline{z - ib}$. En notant M le point du plan d'affixe z, P son projeté orthogonal sur l'axe $y = b$, et M′ le point du plan d'affixe $\mathrm{I}_{1,2ib}(z)$, on a $\mathrm{P} = \mathrm{R}e(z) + ib$, de sorte que $\vec{\mathrm{PM}} = \mathfrak{Re}(z) + ib - z = i(b - \mathfrak{Im}(z))$ et $\vec{\mathrm{PM}'} = \mathfrak{Re}(z) + ib - \overline{z} - 2ib = -i(b - \mathfrak{Im}(z))$. Ainsi, $\vec{\mathrm{PM}} = -\vec{\mathrm{PM}'}$ et M′ est le symétrique orthogonal de M par rapport à la droite d'équation $y = b$.