Partie 0 : Résultat fondamental

1. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Alors la suite $(\omega_n^k)_{0\leq k\leq n-1}$ est géométrique de raison ω_n et $\omega_n \neq 1$. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^k = \frac{1-\omega_n^n}{1-\omega_n} = \frac{1-1}{1-\omega_n} = 0$$

Partie I : Exemples

2. Dans le cas $n=2$, $\omega_2 = -1$, donc $G_2 = (-1)^{0^2} + (-1)^{1^2} = 1 + (-1) = 0$. Si $n=3$, $\omega_3 = j$ et $G_3 = j^0 + j^1 + j^4 = 1 + j + j = 1 + 2j = \sqrt{3}i$. Enfin, si $n=4$, $\omega_4 = i$ et $G_4 = i^0 + i^1 + i^4 + i^9 = 1 + i + 1 + i = 2(1+i)$.
3. (a) D'après le résultat fondamental sur les sommes des racines 5-ièmes de l'unité,

$$1 + \omega_5 + \omega_5^2 + \omega_5^3 + \omega_5^4 = 0.$$

La partie réelle de cette égalité fournit alors

$$1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 0.$$

Or $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{-2\pi}{5} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{-4\pi}{5} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)$ d'après la parité et la 2π-périodicité du cosinus. Ainsi,

$$1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0.$$

(b) D'après la formule de duplication du cosinus, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1$. Ainsi,

$$1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 2 = 0.$$

Ainsi, le trinôme $P = 4X^2 + 2X - 1$ possède $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ comme racine.

(c) Ce trinôme a pour discriminant $2^2 + 16 = 20 > 0$, donc pour racines $\frac{1}{8}(-2 \pm \sqrt{20}) = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Or $0 < 2\pi/5 < \pi/2$, donc $\cos(2\pi/5) > 0$, ce qui entraîne

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

D'autre part, $\sin(2\pi/5) > 0$ car $2\pi/5 \in [0, \pi]$, donc

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = \sqrt{1 - \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{16}} = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

(d) On a $G_5 = \omega_5^0 + \omega_5^1 + \omega_5^4 + \omega_5^9 + \omega_5^{16} = 1 + \omega_5 + \omega_5^4 + \omega_5^4 + \omega_5$. Or $\omega_5^4 = \overline{\omega_5}$ puisque c'est son inverse et qu'on travaille dans $\mathbb{U}$. Ainsi,

$$G_5 = 1 + 2(\omega_4 + \overline{\omega_4}) = 1 + 4\mathfrak{Re}(\omega_4) = 1 + 4\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{5}$$

4. (a) On a $G_7 = 1+\omega_7+\omega_7^4+\omega_7^9+\omega_7^{16}+\omega_7^{25}+\omega_7^{36}$. Quelques divisions euclidiennes par 7 fournissent $\omega_7^9=\omega_7^2$, $\omega_7^{16}=\omega_7^2$, $\omega_7^{25}=\omega_7^4$ et $\omega_7^{36}=\omega_7$. Ainsi, $G_7 = 1+2\omega_7+2\omega_7^2+2\omega_7^4$.

Comme $\overline{\omega_7}=\omega_7^6$, $\overline{\omega_7^2}=\omega_7^5$ et $\overline{\omega_7^4}=\omega_7^3$, on en déduit que

$$\overline{G_7} = 1+2\omega_7^6+2\omega_7^5+2\omega_7^3$$

puis que

$$G_7+\overline{G_7} = 2+2\omega_7+2\omega_7^2+2\omega_7^3+2\omega_7^4+2\omega_7^5+2\omega_7^6 = 0$$

d'après le résultat fondamental sur les racines 7-ièmes de l'unité.

(b) On développe précautionneusement

$$\begin{aligned}
G_7\overline{G_7} &= \left(1+2\omega_7+2\omega_7^2+2\omega_7^4\right)\left(1+2\omega_7^3+2\omega_7^5+2\omega_7^6\right)\\
&= 1+2\omega_7^6+2\omega_7^5+2\omega_7^3+2\omega_7+4\omega_7^4+4\omega_7^6+4\omega_7^7\\
&\quad +2\omega_7^2+4\omega_7^5+4\omega_7^7+4\omega_7^8+2\omega_7^4+4\omega_7^7+4\omega_7^9+4\omega_7^{10}\\
&= 1+2\omega_7^6+2\omega_7^5+2\omega_7^3+2\omega_7+4\omega_7^4+4\omega_7^6+4\\
&\quad +2\omega_7^2+4\omega_7^5+4+4\omega_7+2\omega_7^4+4+4\omega_7^2+4\omega_7^3\\
&= 13+6\omega_7+6\omega_7^2+6\omega_7^3+6\omega_7^4+6\omega_7^5+6\omega_7^6\\
&= 7
\end{aligned}$$

toujours d'après la somme des racines 7-ièmes de l'unité.

(c) Le travail précédent montre que G_7 est imaginaire pur et de module $\sqrt{7}$, donc égal à $i\sqrt{7}$ ou $-i\sqrt{7}$. Il reste donc à déterminer le signe de $\mathfrak{Im}(G_7)$. On a vu que $G_7 = 1+2\omega_7+2\omega_7^2+2\omega_7^4$, donc

$$\frac{1}{2}\mathfrak{Im}(G_7) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{7}\right).$$

De plus, $\pi/7$ et $2\pi/7$ sont dans $[0,\pi/2]$ où le sinus est croissant donc $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\geq 0$. D'autre part, $4\pi/7\in[0,\pi]$ où le sinus est positif. Conclusion, $\mathfrak{Im}(G_7)\geq 0$ et $G_7 = i\sqrt{7}$.

5. (a) On remarque que $\omega_{11}^{10} = 1/\omega_{11} = \overline{\omega_{11}}$ puisque $\omega_{11}^{11}=1$ et $|\omega_{11}|=1$. Ainsi,

$$\omega_{11}-\omega_{11}^{10} = \omega_{11}-\overline{\omega_{11}} = 2i\,\mathfrak{Im}(\omega_{11}) = 2i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)$$

(b) D'après les formules d'Euler,

$$i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) = i\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{11}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{11}\right)} = \frac{e^{i3\pi/11}-e^{-i3\pi/11}}{e^{i3\pi/11}+e^{-i3\pi/11}}$$

En forçant la factorisation de $e^{-i3\pi/11}$ haut et bas, on obtient

$$i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) = \frac{e^{i6\pi/11}-1}{e^{i6\pi/11}+1} = \frac{\omega_{11}^3-1}{\omega_{11}^3+1}$$

(c) Posons $\zeta = -\omega_{11}^3$ pour alléger les notations. Alors $\zeta^{12} = \omega_{11}^{36} = \omega_{11}^3 = -\zeta$, ce qui permet d'écrire via une somme de suite géométrique de raison $\zeta\neq 1$

$$i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) = \frac{\zeta^{12}-1}{-\zeta+1} = -\frac{1-\zeta^{12}}{1-\zeta} = -\sum_{k=0}^{11}\zeta^k$$

On explicite tous les termes de cette somme, ce qui donne

$$\begin{aligned} i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) &= -1+\omega_{11}^3-\omega_{11}^6+\omega_{11}^9-\omega_{11}^{12}+\omega_{11}^{15}-\omega_{11}^{18}+\omega_{11}^{21}-\omega_{11}^{24}+\omega_{11}^{27}-\omega_{11}^{30}+\omega_{11}^{33} \\ &= -\omega_{11}-\omega_{11}^2+\omega_{11}^3+\omega_{11}^4+\omega_{11}^5-\omega_{11}^6-\omega_{11}^7-\omega_{11}^8+\omega_{11}^9+\omega_{11}^{10} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$4i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)+i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)=\omega_{11}-\omega_{11}^2+\omega_{11}^3+\omega_{11}^4+\omega_{11}^5-\omega_{11}^6-\omega_{11}^7-\omega_{11}^8+\omega_{11}^9-\omega_{11}^{10}$$

D'autre part, après regroupement des puissances,

$$\begin{aligned} G_{11} &= 1+2\left(\omega_{11}+\omega_{11}^3+\omega_{11}^4+\omega_{11}^5+\omega_{11}^9\right) \\ &= 1+2\left(\omega_{11}+\omega_{11}^3+\omega_{11}^4+\omega_{11}^5+\omega_{11}^9\right)-\sum_{k=0}^{10}\omega_{11}^k \\ &= \omega_{11}-\omega_{11}^2+\omega_{11}^3+\omega_{11}^4+\omega_{11}^5-\omega_{11}^6-\omega_{11}^7-\omega_{11}^8+\omega_{11}^9-\omega_{11}^{10} \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien l'égalité

$$G_{11}=4i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)+i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)$$

Partie II : Module

6. Premier cas : n divise ℓ, alors pour tout k dans $[[0,n-1]]$, $k\ell$ est multiple de n, donc $e_n(l\ell)=1$, ce qui donne $\sum_{k=0}^{n-1}e_n(k\ell)=\sum_{k=0}^{n-1}1=n$. Deuxième cas : n ne divise pas ℓ, alors $e_n(\ell)\neq 1$ et on peut utiliser une somme de suite géométrique

$$\sum_{k=0}^{n-1}e_n(k\ell)=\sum_{k=0}^{n-1}e_n(\ell)^k=\frac{1-e_n(\ell)^n}{1-e_n(\ell)}=\frac{1-e_n(n\ell)}{1-e_n(\ell)}=0$$

7. (a) D'après le conjugué d'une exponentielle, on a

$$\begin{aligned} |G_n|^2 &= G_n\overline{G_n}=\sum_{k=0}^{n-1}e_n(k^2)\overline{\sum_{\ell=0}^{n-1}e_n(\ell^2)}=\sum_{k=0}^{n-1}e_n(k^2)\sum_{\ell=0}^{n-1}e_n(-\ell^2) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1}e_n(k^2)e_n(-\ell^2)=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1}e_n(k^2-\ell^2) \end{aligned}$$

   (b) On montre que deux termes consécutifs sont égaux, ce qui suffit à assurer la constance de cette suite. Soit $d\in\mathbb{Z}$.

$$\sum_{k=d+1}^{d+n}e_n(2km+k^2)-\sum_{k=d}^{d+n-1}e_n(2km+k^2)=e_n(2(d+n)m+(d+n)^2)-e_n(2dm+d^2)$$

   Or $2(d+n)m+(d+n)^2-(2dm+d^2)=2dm+2nm+d^2+2dn+n^2-2dm-d^2=n(2m+2d+n)$ est un multiple de n, donc $e_n(2(d+n)m+(d+n)^2)-e_n(2dm+d^2)=0$.

(c) On sait que $|G_n|^2 = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} e_n(k^2-\ell^2) = \sum_{\ell=0} n-1 \sum_{k=0}^{n-1} e_n(k^2-\ell^2)$. On fixe ℓ et on effectue le changement de variable $d = k-\ell$ dans $\sum_{k=0}^{n-1} e_n(k^2-\ell^2)$, ce qui donne

$$\sum_{k=0}^{n-1} e_n(k^2-\ell^2) = \sum_{d=-\ell}^{n-1-\ell} e_n((d+\ell)^2-\ell^2) = \sum_{d=-\ell}^{n-1-\ell} e_n(d^2+2d\ell)$$

Cette dernière quantité ne dépend pas des bornes de sommation d'après la question précédente, donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} e_n(k^2-\ell^2) = \sum_{d=0}^{n-1} e_n(2d\ell+d^2)$$

Conclusion,

$$|G_n|^2 = \sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{d=0}^{n-1} e_n(2d\ell+d^2)$$

Ceci équivaut au résultat attendu en changeant le symbole muet d en k.

(d) Supposons n impair, alors

$$|G_n|^2 = \sum_{d=0}^{n-1} e_n(d^2)\sum_{\ell=0}^{n-1} e_n(2d\ell)$$

Fixons $d \in [\![0, n-1]\!]$. D'après la question 6, $\sum_{\ell=0}^{n-1} e_n(2d\ell)$ est nul sauf si n divise $2d$, i.e sauf si n divise d puisque n est impair, i.e sauf si $d = 0$. Il ne reste alors qu'un seul terme dans la somme, celui pour $d = 0$, on obtient alors

$$|G_n|^2 = e_n(0^2)\sum_{\ell=0}^{n-1} e_n(2\times 0\times\ell) = n$$

Conclusion, $|G_n| = \sqrt{n}$.

Remarque 1. *En combinant avec 5.c), on a démontré que* $4\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)+\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) = \sqrt{11}$.

(e) On utilise la même méthode que précédemment, les seuls termes a priori non nuls sont ceux pour lequels n divise $2d$, ie. $d \in \{0, n/2\}$. Si $n/2$ est pair, on a deux termes restants,

$$|G_n|^2 = e_n(0^2)n + e_n((n/2)^2)n = n\left(1+\exp\left(i2\pi\frac{n}{4}\right)\right) = n(1+i^n) = 2n$$

Ainsi, $|G_n| = \sqrt{2n}$.

(f) La même méthode fournit cette fois $|G_n|^2 = n(1+i^n) = 0$.