Fonctions de Bessel

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note (E_n) l'équation différentielle suivante :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et on s'intéresse à ses solutions sur $\mathbb{R}$.

   (a) On note J_n la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(nt - x\sin(t))dt$$

   Pour quelles valeurs de x cette intégrale est-elle définie ? En particulier, est-elle définie en 0 et quelle y serait sa valeur éventuelle ?

   (b) On fixe t et on note $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(nt - x\sin(t))$. Montrer que f_t est deux fois dérivable et exprimer pour tout réel x, $f_t'(x)$ et $f_t''(x)$.

   (c) On admet que J_n est deux fois dérivable, et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, J_n'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\sin(nt - x\sin(t))dt$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, J_n''(x) = \frac{-1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2(t)\cos(nt - x\sin(t))dt$$

   Effectuer une intégration par parties dans la forme de J_n' pour refaire apparaître un terme $\cos(nt - x\sin t)$ dans l'intégrale. Aboutir à l'expression suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad J_n'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (n\cos t - x\cos^2 t)\cos(nt - x\sin t)dt$$

   (d) En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = -\frac{n}{\pi}\int_0^{\pi} (n - x\cos t)\cos(nt - x\sin t)dt$$

   (e) Calculer l'intégrale de la question précédente en trouvant une primitive judicieuse et en déduire que J_n satisfait l'équation différentielle (E_n).

2. (a) Passage par les complexes : Démontrer qu'on a l'égalité

$$\forall x \in \mathbb{R}, J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(nt - x\sin t)}dt$$

   (b) On admet que J_n est indéfiniment dérivable et que

$$\forall j \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, J_n^{(j)}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (i\sin t)^j e^{-i(nt - x\sin t)}dt$$

   En déduire une expression intégrale de la valeur de $J_n^{(n)}(0)$. Calculer cette intégrale à l'aide d'une formule d'Euler et en développant à l'aide du binôme. Aboutir à l'expression $J_n^{(n)}(0) = 2^{-n}$.

(c) Montrer que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |J_n^{(j)}(x)| \leq 1$$

3. Dans cette question, on se restreint au cas $n = 0$. On admet qu'il existe une fonction φ indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2\varphi''(x) + x\varphi'(x) + x^2\varphi(x) = -2xJ_0'(x)$$

On définit alors la fonction Y_0 sur $\mathbb{R}^{+*}$ (Attention au domaine de définition !) par

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad Y_0(x) = J_0(x)\ln x + \varphi(x)$$

(a) Montrer que $\lim_{x \to 0^+} Y_0(x) = -\infty$.

(b) Montrer que Y_0 est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad x^2 Y_0''(x) + xY_0'(x) + x^2 Y_0(x) = 0$$

(c) On note $W = J_0'Y_0 - Y_0'J_0$ défini sur $\mathbb{R}^{+*}$. Calculer alors $x^2W'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$ et montrer qu'en particulier

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, xW'(x) + W(x) = 0.$$

(d) En déduire que la fonction $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto xW(x)$ est constante.

(e) Démontrer que $\lim_{x \to 0^+} xW(x) = \lim_{x \to 0^+} (-J_0^2(x)) = -1$. En déduire l'expression de $W(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$.