Exercices - Suites numériques

1 Réels, borne supérieure, borne inférieure

1.1 (In)stabilité par opérations

1. Montrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.
2. Montrer que le produit d'un rationnel non nul par un irrationnel est un irrationnel.
3. La somme et le produit de deux irrationnels sont-ils nécessairement irrationnels ?

1.2 Un irrationnel

Montrer que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est irrationnel.

1.3 Liberté

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{Q}^3$. Montrer que

1. $a+b\sqrt{2}=0 \Rightarrow a=b=0$.
2. $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=0 \Rightarrow a=b=c=0$

1.4 De l'art de disjoindre

En examinant le réel $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, démontrer qu'il existe un couple (a,b) d'irrationnels tels que a^b est rationnel.

1.5

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. On suppose que $\sup A > 0$. Montrer que A contient un réel strictement positif. Est-ce encore vrai si l'on suppose plutôt $\sup A \geq 0$?

1.6

Soit $A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Déterminer sup(A) et inf(A).

1.7 Diamètre

Soit A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\sup_{(x,y)\in A^2} |x-y| = \sup(A) - \inf(A)$$

1.8 Point fixe d'une application croissante

Soit a, b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to [a,b]$ une application croissante. On souhaite démontrer que f admet un point fixe, i.e $\exists x \in [a,b], f(x) = x$.
On pose $E = \{x \in [a,b] \mid x \leq f(x)\}$, puis $c = \sup(E)$.

1. Montrer que c est bien défini et appartient à E.
2. Vérifier que E est stable par f, i.e $\forall x \in E, f(x) \in E$.
3. En déduire que $f(c) \leq c$.
4. Conclure.

2 Étude de suites

2.1 Quelques exemples explicites

Étudier les limites éventuelles, finies ou infinies, des suites numériques définies par leur terme général suivantes :

1. $n\left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor$.
2. $(\ln(n)+\sin(n))^2$.
3. $\frac{n^2}{\ln(e^n+1)}$
4. $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)$.
5. $\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}-\sqrt{n}$.
6. $\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^{1/n}$.

2.2

Soit u et v deux suites réelles convergentes. Montrer que les suites $(\min(u_n,v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\max(u_n,v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et préciser leurs limites.

2.3

Construire une suite réelle u convergente telle que $\lfloor u \rfloor$ soit divergente.

2.4 Critère logarithmique de Cauchy

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles strictement positives.

1. On suppose que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ. Montrer que $\left(u_n^{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ.
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. Déterminer les limites de
$$\sqrt[n]{\binom{2n}{n}},\quad \frac{n}{\sqrt[n]{n!}},\quad \frac{1}{n^2}\sqrt[n]{\frac{n!}{(3n)!}}$$
quand n tend vers $+\infty$.

2.5 Se ramener au cours

Soit α,β deux réels strictement positifs. On définit par récurrence double une suite u par $u_0=\alpha$, $u_1=\beta$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=\sqrt{u_{n+1}u_n}$.

1. Donner une expression explicite de u_n pour tout entier naturel n.
2. Étudier l'éventuelle convergence de u et donner sa limite en cas de convervence.

2.6 Réviser ses formules de trigonométrie

Soit $\theta\in\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que la suite $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

2.7 Système dynamique

On définit par récurrence une suite u via $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\cos(u_n)$. Montrer que cette suite est convergente.

2.8 Modes propres d'une chaîne de ressorts

Soit n un entier naturel non nul. On cherche à déterminer l'ensemble des réels $\lambda\in]0,4[$ tels qu'il existe un $n+2$-uplet réel non nul $(x_k)_{0\le k\le n+1}$ vérifiant

$$x_0=0,\quad x_{n+1}=0\quad \text{et}\quad \forall k\in[\![1,n]\!], x_{k-1}+(\lambda-2)x_k+x_{k+1}=0.$$

Dans ce qui suit, on fixe un tel λ.

1. Justifier qu'il existe un unique réel $\theta\in]0,\pi[$ tel que $\lambda=2(1-\cos(\theta))$.

2. Soit $(x_k)_{0\leq k\leq n+1}$ un $n+2$-uplet réel non nul qui vérifie les conditions ci-dessus. Montrer qu'alors

$$\exists (a,b)\in\mathbb{R}^2, \forall k\in[\![0,n+1]\!], x_k = a\cos(k\theta)+b\sin(k\theta)$$

3. Démontrer alors l'existence d'un entier j dans $[\![1,n]\!]$ tel que $\theta = \dfrac{j\pi}{n+1}$. Montrer alors

$$\forall k\in[\![0,n+1]\!], x_k = \sin\left(\frac{jk\pi}{n+1}\right)$$

4. Etablir que l'ensemble des solutions au problème posé est

$$\left\{4\sin^2\left(\frac{j\pi}{2(n+1)}\right) \mid j\in[\![1,n]\!]\right\}.$$

2.9 Extrait de Centrale M 1984

1. Soit $p\in]0,1[$. On définit par récurrence $p_0 = p$ et $\forall n\in\mathbb{N}, p_{n+1} = \sqrt{p_n}$. Étudier la stricte monotonie de cette suite, montrer qu'elle converge et préciser sa limite.

On considère une fonction f de classe C^1 sur $]0,1[$ telle que

$$\forall x\in]0,1[, \quad f'(x) = f\left(x^2\right)$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $M_n = \sup\limits_{x\in[p_n,p_{n+1}]} |f(x)|$. On admet que cette quantité est un réel bien défini.

2. Á l'aide d'outils d'intégration, montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, M_n \leq M_{n-1}(1+p_{n+1}-p_n)$$

3. À l'aide d'une inégalité de concavité du logarithme, en déduire que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
4. En déduire que f est bornée sur $[p,1[$.

2.10 Une suite implicite

Soit $f:[1,+\infty[, x\mapsto \dfrac{x\ln(x)}{x+1}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, il existe un unique réel strictement positif, noté a_n tel que $f(a_n) = n$.
2. Démontrer ensuite que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \ln(a_n e^{-n}) = \frac{n}{a_n}$$

3. En déduire la convergence et la limite de la suite $(a_n e^{-n})_{n\geq 1}$.

2.11 Encore une suite implicite

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto nx^{n+1}-(n+1)x^n-\frac{1}{2}$$

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique réel positif, noté x_n tel que $f_n(x_n) = 0$.

On souhaite à présent démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie est convergente de limite 1.

2. Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, x_n^n(x_n-1) = \frac{x_n^n}{n}+\frac{1}{2n}$$

3. Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, f_{n+1}(x_n) > 0$$

4. En déduire la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et que sa limite, notée ℓ vérifie $\ell\geq 1$.
5. Justifier que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, x_n-1 = \frac{1}{n}+\frac{1}{2nx_n^n}$$

6. En déduire que $\ell = 1$.

2.12 La base

Déterminer le terme général des suites définies par

1. $s_0 = 1$, $s_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, s_{n+1} = 2s_{n+1} + 3s_n$.
2. $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 3n + 3$.
3. $F_0 = 1, F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
4. $v_0 = 1$, $v_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = v_n + 3v_{n-1}$.
5. $w_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = 2w_n + n$ (on pourra s'aider d'une suite arithmétique vérifiant la même relation de récurrence).

On précisera à chaque fois les suites à valeurs réelles et les suites à valeurs complexes.

2.13 S'écarter de 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in [0,1[$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle.

2.14 Extraction

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle non majorée. Montrer que cette suite admet une sous-suite qui tend vers $+\infty$.

2.15 Moyenne arithmético-géométrique

Soit a_0, b_0 deux réels strictement positifs. On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ via

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

2.16

Soit u, v deux suites réelles à valeurs dans $[0,1]$. On suppose que uv est convergente de limite 1. Que dire de u et v ?

2.17 Irrationnalité de e

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{nn!}$.

1. Montrer que les suites u et v sont adjacentes.
2. Montrer que leur limite commune est irrationnelle

2.18 Moyenne de Cesaro

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On définit une suite $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$$

Cette suite est appelée moyenne de Cesaro de u.

1. On suppose que u est convergente de limite nulle. Montrer que v est convergente de limite nulle.
2. Montrer que si u est convergente, alors v aussi et $\lim u = \lim v$.
3. Montrer que la réciproque est fausse.
4. On suppose que u tend vers $+\infty$, montrer que v tend vers $+\infty$.

2.19

Soit u une suite convergente à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que u est stationnaire.

2.20 Lemme des pics (ou du soleil levant)

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée. On pose

$$\mathrm{E} = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \forall p > n, u_n \leq u_p \right\}$$

1. On suppose que E est infini.
   (a) Construire une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
   (b) Montrer que cette suite extraite est convergente.
2. On suppose que E est fini. On pose $\mathrm{N} = \max(\mathrm{E}) + 1$ si E est non vide et $\mathrm{N} = 0$ sinon.
   (a) Montrer que N est un majorant de E et que $\forall n \geq \mathrm{N}, n \notin \mathrm{E}$
   (b) Montrer que
   $$\mathbb{N} \backslash \mathrm{E} = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \exists p > n, u_n \leq u_p \right\}$$
   (c) Construire par récurrence une extractrice ψ telle que $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (d) Montrer que cette suite extraite est convergente.

2.21

Soit u une suite réelle croissante.

1. Montrer que si u admet une sous-suite convergente, alors u est convergente.
2. Montrer que si u admet une sous-suite majorée, alors u est convergente.