

## Problème : autour des fonctions de Lambert

### Partie I : fonctions de Lambert

1.  $f$  est dérivable comme produit de fonctions dérivables et  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$ . On en déduit que  $\forall x > -1, f'(x) > 0$ . Comme  $[-1, +\infty[$  est un intervalle,  $f$  est strictement croissante sur ce domaine donc  $f$  est injective. D'autre part, elle est continue,  $f(-1) = -e^{-1}$  et  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ . Donc  $f([-1, +\infty[) = [-e^{-1}, +\infty[$  d'après le théorème des valeurs intermédiaires. En conclusion,  $f$  induit une bijection de  $[-1, +\infty[$  dans  $[-e^{-1}, +\infty[$ .
2. D'après ce qui précède,  $\forall x > -1, f'(x) \neq 0$ , donc  $W$  est dérivable sur  $]f(-1), +\infty[ = ]-e^{-1}, +\infty[$ . Soit  $x > -e^{-1}$ . Alors,

$$W'(x) = \frac{1}{f'(W(x))} = \frac{1}{(W(x)+1)e^{W(x)}} = \frac{1}{f(W(x)) + e^{W(x)}} = \frac{1}{x + e^{W(x)}}$$

3. Comme  $0 \in [-1, +\infty[$  et  $f(0) = 0$ , on en déduit que  $W(0) = 0$ . D'après ce qui précède,  $W'(0) = \frac{1}{0 + e^0} = 1$ .
4. D'après la dérivabilité de  $W$  en 0, on a la limite

$$\frac{W(x)}{x} = \frac{W(x) - W(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} W'(0) = 1$$

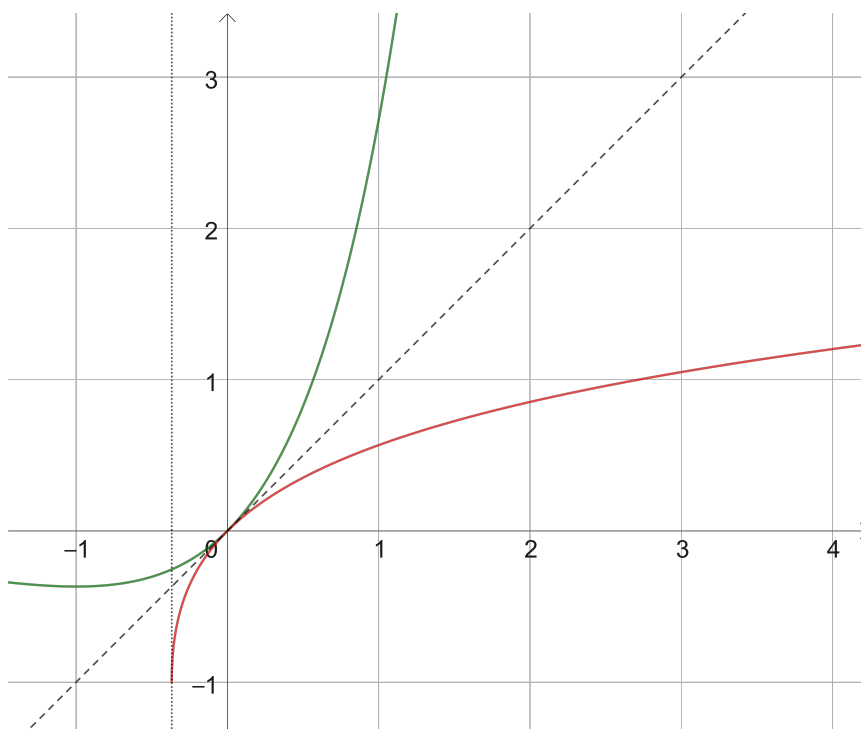
5. Comme  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ , on en déduit que  $W(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ . Mais alors les croissances comparées et la composition de limites donnent  $\ln(W(x))/W(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ . Soit  $x > 0$ , comme  $W(x)e^{W(x)} = x$ , on obtient toutes quantités positives,  $\ln(W(x)) + W(x) = \ln(x)$ , puis

$$\frac{\ln(W(x))}{W(x)} + 1 = \frac{\ln(x)}{W(x)}$$

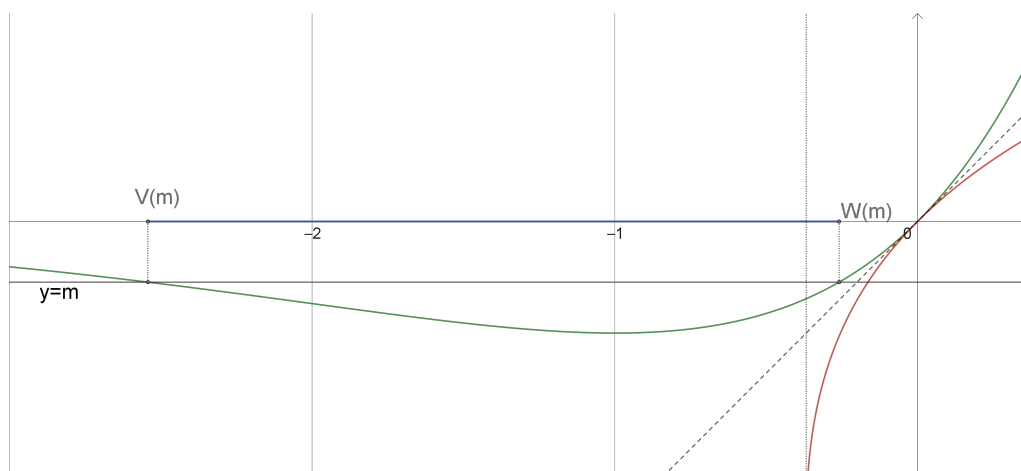
D'après les opérations sur les limites finies, on obtient  $\frac{\ln(x)}{W(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ , puis par inverse d'une

limite non nulle  $\frac{W(x)}{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1/1 = 1$ .

6. La figure suivante représente le graphe de  $f$  en vert, et celui de  $W$  en rouge.



7. Comme en question 1,  $\forall x < -1, f'(x) < 0$ , donc  $f$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $]-\infty, -1]$ . De plus,  $xe^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$  d'après les croissances comparées. Comme  $f$  est continue,  $f(]-\infty, -1]) = [-e^{-1}, 0[$  d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Ainsi,  $f$  induit une bijection de  $]-\infty, -1]$  dans  $[-e^{-1}, 0[$ .
8. D'après les études précédentes, on a 4 cas différents :
- $m < -e^{-1}$ , alors  $m \notin f(\mathbb{R})$ , donc il n'y a pas de solutions.
  - $m = -e^{-1}$ ,  $-1$  est l'unique réel  $x$  tel que  $xe^x = -e^{-1}$ .
  - $-e^{-1} < m < 0$ . Alors  $m$  possède deux antécédents par  $f$ , à savoir  $V(m)$  et  $W(m)$ .
  - $0 \leq m$ . Alors  $m$  possède un unique antécédent par  $f$ , à savoir  $W(m)$ .
9. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Les considérations précédentes donnent toujours quatre cas différents.
- $m < -e^{-1}$ , alors  $f(x) > m$ . L'inéquation ne possède pas de solutions.
  - $m = -e^{-1}$ , alors  $f(x) \leq -e^{-1} \iff x = -1$ .
  - $-e^{-1} < m < 0$ , alors  $f(x) \leq m \iff V(m) \leq x \leq W(m)$ .
  - $0 \leq m$ , alors  $f(x) \leq m \iff x \leq W(m)$ .



## Partie II - Approximation de $W$ par un polynôme

### II.A - Le théorème binomial d'Abel

10. Soit  $x \in \mathbb{R}$ , soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Si  $k = 1$ , alors

$$A_k(x) = x \quad \text{et} \quad A'_k(x) = 1 = A_0(x - a)$$

Sinon,

$$A'_k(x) = \frac{1}{k!} \left( (x - ka)^{k-1} + x(k-1)(x - ka)^{k-2} \right) = \frac{(x - ka)^{k-2}}{k!} (x - ka + xk - x)$$

On reconnaît alors

$$A'_k(x) = \frac{(x - a - (k-1)a)^{k-1-1}}{(k-1)!} (x - a) = A_{k-1}(x - a)$$

11. Comme  $A_k$  est polynomiale de degré  $k$ , toute dérivée d'ordre supérieur ou égal à  $k+1$  de  $A_k$  est la fonction nulle. Comme c'est le cas de  $j$ ,  $A_k^{(j)} = 0$ . En particulier,  $A_k^{(j)}(ja) = 0$ .
12. Pour tout  $j$  dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , on pose  $\mathcal{P}_j \llcorner \forall k \in \llbracket j, n \rrbracket, A_k^{(j)}(ja) = A_{k-j}(0) \llcorner$ . On procède par récurrence. Initialisation : pour  $j = 0$ , soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Alors  $A_k^{(0)}(0a) = A_k(0) = A_{k-0}(0)$ , donc  $\mathcal{P}(0)$  est vrai. Hérédité. Soit  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Supposons  $\mathcal{P}(j)$ , démontrons  $\mathcal{P}(j+1)$ . Soit  $k \in \llbracket j+1, n \rrbracket$ . Soit  $x = (j+1)a$ . D'après la question 10.

$$A_k^{(j+1)}(x) = (A'_k)^{(j)}(x) = (A_{k-1})^{(j)}(x - a) = A_{k-1}^{(j)}(ja)$$

Comme  $k-1 \in \llbracket j, n \rrbracket$ , on peut appliquer  $\mathcal{P}(j)$ , ce qui donne  $A_{k-1}^{(j)}(ja) = A_{k-1-j}(0) = A_{k-(j+1)}(0)$ . Conclusion,

$$A_k^{(j+1)}((j+1)a) = A_{k-(j+1)}(0)$$

ce qui prouve  $\mathcal{P}(j+1)$ . On conclut par le principe de récurrence.

13. Soit  $(j, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ . On distingue trois cas. Si  $j > k$ ,  $A_k^{(j)}(ja) = 0$  d'après la question 11. Si  $j = k$ , on applique la question 12, ce qui donne  $A_k^{(k)}(ka) = A_{k-k}(0) = A_0(0) = 1$ . Enfin, si  $j < k$ , la même question 12 fournit  $A_k^{(j)}(ja) = A_{k-j}(0)$ . Or  $k-j \geq 1$ , donc  $A_{k-j}(0) = 0$ .

En conclusion,  $A_k^{(j)}(ja) = 0$  si  $j$  diffère de  $k$ , et 1 sinon.

14. Soit  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On dérive  $j$  fois l'égalité de fonctions infiniment dérivables précédente, puis on évalue en  $ja$ , ce qui donne par linéarité

$$P^{(j)}(ja) = \sum_{k=0}^n \alpha_k A_k^{(j)}(ja)$$

D'après ce qui précède, dans cette somme tous les termes pour  $k$  différent de  $j$  s'annulent. Il ne reste alors que

$$P^{(j)}(ja) = \alpha_j A_j^{(j)}(ja) = \alpha_j$$

15. On pose pour tout  $k$  dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\mathcal{H}_k : \llbracket \forall x \in \mathbb{R}, Q^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} (x+y)^{n-k} \rrbracket$  et on procède par récurrence. Initialisation :  $k = 0$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Alors  $Q^{(0)}(x) = Q(x) = (x+y)^n$  tandis que  $\frac{n!}{(n-0)!} (x+y)^{n-0} = (x+y)^n$ . Ainsi,  $\mathcal{H}_0$  est vrai. Hérédité. Soit  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , supposons  $\mathcal{H}_k$  et démontrons  $\mathcal{H}_{k+1}$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ , comme  $Q^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} (x+y)^{n-k}$ , on peut de nouveau dériver, ce qui donne

$$Q^{(k+1)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} (n-k) (x+y)^{n-k-1} = \frac{n!}{(n-k-1)!} (x+y)^{n-k-1} = \frac{n!}{(n-(k+1))!} (x+y)^{n-(k+1)}.$$

Ainsi,  $\mathcal{H}_{k+1}$  est vrai, ce qui conclut par récurrence.

16. Soit  $y \in \mathbb{R}$ . La fonction  $Q : x \mapsto (x+y)^n$  est polynomiale de degré  $n$ . On peut donc lui appliquer le résultat de la question 14, ce qui donne

$$Q = \sum_{k=0}^n Q^{(k)}(ka) A_k$$

Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . D'après la question 15,  $Q^{(k)}(ka) = \frac{n!}{(n-k)!} (ka+y)^{n-k}$ . On obtient ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x+y)^n = y^n + \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)!} (ka+y)^{n-k} \frac{1}{k!} x(x-ka)^{k-1} = y^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x(x-ka)^{k-1} (y+ka)^{n-k}$$

17. Soit  $y \in \mathbb{R}$ . L'égalité précédente est une égalité de fonctions dérivables de la variable  $x$ , ce qui donne par dérivation

$$\forall x \in \mathbb{R}, n(x+y)^{n-1} = 0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (y+ka)^{n-k} \left( (x-ka)^{k-1} + (k-1)x(x-ka)^{k-2} \right)$$

En particulier, pour  $x = 0$ , on obtient

$$ny^{n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (y+ka)^{n-k} (-ka)^{k-1}$$

En isolant le terme  $k = n$ , on obtient

$$ny^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (y+ka)^{n-k} (-ka)^{k-1} + \binom{n}{n} (y+na)^0 (-na)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (y+ka)^{n-k} (-ka)^{k-1} + (-na)^{n-1}$$

18. Tout le travail précédent est valide pour tous réels  $y$  et  $a$ . En particulier, l'égalité précédente est vraie pour  $y = -n$  et  $a = 1$ , ce qui donne

$$n(-n)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (-n+k)^{n-k} (-k)^{k-1} + (-n)^{n-1}$$

ou encore

$$(n-1)(-n)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (n-k)^{n-k} (-k)^{k-1}$$

## II.B - Développement en série entière

19. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-n-1)^n}{(n+1)!} \frac{n!}{(-n)^{n-1}} = \frac{(-n-1)(1+1/n)^{n-1}}{n+1} = -\frac{1}{1+1/n} \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

D'après la dérivabilité du logarithme en 1, on obtient  $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln'(1) = 1/1 = 1$ . D'après la continuité de l'exponentielle en 1,  $\exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^1 = e$ . Conclusion,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -e$$

20. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Alors  $1 + P_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n$  et  $x P'_N(x) = \sum_{n=1}^N n a_n x^n = \sum_{n=0}^N n a_n x^n$ . Le produit de ces sommes fournit

$$(1 + P_N(x)) x P'_N(x) = \left( \sum_{k=0}^N a_k x^k \right) \left( \sum_{j=0}^N j a_j x^j \right) = \sum_{0 \leq k, j \leq N} a_k j a_j x^{k+j}$$

Dans cette dernière somme, les seuls termes fournissant  $x^N$  sont ceux d'indices  $(k, j)$  vérifiant  $k + j = N$ , i.e les indices  $(k, N - k)$  pour  $k$  allant de 0 à  $N$ . On obtient ainsi un terme de la forme  $\sum_{k=0}^N a_k (N - k) a_{N-k} x^N$ . D'après l'unicité des coefficients polynomiaux de  $Q_N$ , on en déduit que

$$c_N = \sum_{k=0}^N a_k a_{N-k} (N - k)$$

21. En isolant les termes extrêmes, la somme de droite dans le résultat précédent vaut

$$a_0 a_N N + a_N 0 a_0 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(-k)^{k-1}}{k!} \frac{(k-N)^{N-k-1}}{(N-k)!} (N-k) = N a_N + \frac{1}{N!} \sum_{k=1}^{N-1} \binom{N}{k} (-1)^{N-k-1} (-k)^{k-1} (N-k)^{N-k}$$

D'après le résultat de la question 18, on obtient

$$c_N = N a_N - \frac{(N-1)(-N)^{N-1}}{N!} = N a_N - (N-1) a_N = a_N$$

22. D'une part,  $\forall N \in \mathbb{N}^*$ ,  $P_N(0) = 0$ . Par conséquent,  $P_N(0) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $S(0) = 0$ . D'autre part,  $\forall N \in \mathbb{N}^*$ ,  $P'_N(0) = a_1 = (-1)^0/1! = 1$ . Par conséquent,  $P'_N(0) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1$ , donc  $S'(0) = 1$ .

23. Soit  $x, y$  deux réels dans  $] -e^{-1}, 0]$  tels que  $x \leq y$ . Soit  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . Alors  $-x \geq -y \geq 0$ . Or  $t \mapsto t^n$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , donc  $(-x)^n \geq (-y)^n$ . Comme  $n^{n-1}/n! \geq 0$ , on en déduit  $n^{n-1}(-x)^n/n! \geq n^{n-1}(-y)^n/n!$ , puis  $(-n)^{n-1}x^n/n! \leq (-n)^{n-1}y^n/n!$ . Après sommation pour  $n$  allant de 1 à  $N$ , on en déduit  $P_N(x) \leq P_N(y)$ . Enfin, en passant à la limite quand  $N$  tend vers  $+\infty$ , on obtient  $S(x) \leq S(y)$ , ce qui prouve la croissance de  $S$  sur cet intervalle.

24. Soit  $x \in ]-e^{-1}, 0[$ . Comme  $S(0) = 0$ , et  $S$  est strictement croissante sur  $] - e^{-1}, 0[$ ,  $S$  est de signe négatif sur  $] - e^{-1}, 0[$ . Or  $(1 + S(x))xS'(x) = S(x)$ ,  $x < 0$  et  $S'(x) > 0$ , donc  $1 + S(x) > 0$ , donc  $S(x) > -1$ .
25. Soit  $x \in ]-e^{-1}, e^{-1}[$ , comme  $S$  et  $\exp$  sont dérivables,  $h$  l'est. D'après l'équation différentielle satisfaite par  $S$ ,

$$xh'(x) = xS'(x)e^{S(x)} + S(x)S'(x)e^{S(x)} = xS'(x)(1 + S(x))e^{S(x)} = S(x)e^{S(x)} = h(x)$$

26. Sur l'intervalle  $]0, e^{-1}[$ , l'équation différentielle  $xy' - y = 0$  équivaut à  $y' = \frac{1}{x}y$ . Comme  $x \mapsto \ln(x)$  est une primitive de  $x \mapsto 1/x$  sur cet intervalle, les solutions sont de la forme  $x \mapsto Ce^{\ln(x)} = Cx$ ,  $C \in \mathbb{R}$ . On procède de même sur l'intervalle  $] - e^{-1}, 0[$  sur lequel on choisit  $x \mapsto \ln(-x)$  est une primitive de  $x \mapsto 1/x$ . Les solutions sur cet intervalle sont donc de la forme  $x \mapsto De^{\ln(-x)} = -Dx$ ,  $D \in \mathbb{R}$ .

Soit à présent  $f$  une solution de  $xy' - y = 0$  sur l'intervalle  $] - e^{-1}, e^{-1}[$ . C'est en particulier une solution sur les deux intervalles précédents. On dispose donc de réels  $C$  et  $D$  tels que  $\forall x \in ]-e^{-1}, 0[$ ,  $f(x) = -Dx$  et  $\forall x \in ]0, e^{-1}[$ ,  $f(x) = Cx$ . Or  $f$  est dérivable en 0, ce qui impose  $D = -C$ . D'autre part,  $f(0) = 0f'(0) = 0$ . Conclusion, on dispose d'un réel  $C$  tel que  $\forall x \in ]-e^{-1}, e^{-1}[$ ,  $f(x) = Cx$ . La réciproque est une vérification sans difficulté.

27. Le travail précédent indique qu'il existe un réel  $C$  tel que

$$\forall x \in ]-e^{-1}, e^{-1}[ , h(x) = Cx$$

Soit  $x \in ]-e^{-1}, e^{-1}[ \setminus \{0\}$ , alors d'après la continuité de  $S$  et  $S'$  en 0,

$$\frac{h(x)}{x} = e^{S(x)} \frac{S(x)}{x} = e^{S(x)}(1 + S(x))S'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} e^0(1 + 0)1 = 1$$

Autrement dit,  $C = 1$ . Ainsi,  $f(S(x)) = x$ .

Si  $x \geq 0$ , cela implique  $S(x) = W(x)$  d'après la question 8. On considère le cas  $e^{-1} < x < 0$  à présent. Il y a deux solutions à savoir  $V(x)$  et  $W(x)$  d'après la question 8. Or  $V(x) \leq -1$  et  $S(x) > -1$  d'après la question 24. Donc  $S(x) = W(x)$ .

### Partie III - Approximation de $W$ par itération

28. Si  $x = 0$ ,  $\Phi$  est la fonction nulle est l'inégalité est triviale. On se place dans le cas  $x \in ]0, e]$  dans ce qui suit.

Comme  $W(x)e^{W(x)} = x$ , on en déduit  $W(x) = xe^{-W(x)}$  puisque l'exponentielle ne s'annule jamais. Ainsi,

$$\Phi(W(x)) = x \exp(-x \exp(-W(x))) = x \exp(-W(x)) = W(x)$$

29.  $\Phi$  est un produit et composée de fonctions infiniment dérivables donc infiniment dérivable, donc de classe  $C^2$ . Soit  $t \in \mathbb{R}$ .

$$\Phi'(t) = x(xe^{-t}) \exp(-xe^{-t}) = x^2 \exp(-t - xe^{-t})$$

Étudions  $g : t \mapsto -t - xe^{-t}$  pour obtenir une majoration de  $\Phi'$ . C'est une fonction dérivable et

$$g'(t) = -1 + xe^{-t}$$

Par conséquent, comme  $x > 0$ ,  $g'(t) > 0 \iff e^{-t} > 1/x \iff -t > \ln(1/x) \iff t < \ln(x)$ . On en déduit que  $g$  est strictement croissante sur l'intervalle  $] - \infty, \ln(x)]$  et strictement décroissante sur l'intervalle  $[\ln(x), +\infty[$ . Donc  $g$  atteint un maximum en  $\ln(x)$  qui vaut

$$g(\ln(x)) = -\ln(x) - x \exp(-\ln(x)) = -\ln(x) - 1$$

Mais alors, par croissance de l'exponentielle,

$$\Phi(t) = x^2 \exp(g(t)) \leq x^2 \exp(g(\ln(x))) = x^2 \exp(-\ln(x) - 1) = \frac{x^2}{xe} = \frac{x}{e}$$

D'autre part,  $x^2 \geq 0$  et  $\exp \geq 0$ , donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq \Phi'(t) \leq \frac{x}{e}$$

30. Comme  $\Phi'$  est continue de primitive  $\Phi$  sur le segment d'extrémités  $w_n$  et  $W(x)$ , le théorème fondamental du calcul intégral assure que

$$\Phi(w_n) - \Phi(W(x)) = \int_{w_n}^{W(x)} \Phi'(t) dt$$

On utilise alors l'inégalité triangulaire en faisant attention à l'ordre des bornes

$$|w_{n+1} - W(x)| = |\Phi(w_n) - \Phi(W(x))| \leq \left| \int_{w_n}^{W(x)} |\Phi'(t)| dt \right|$$

Or la croissance de l'intégrale donne

$$\left| \int_{w_n}^{W(x)} |\Phi'(t)| dt \right| \leq \left| \int_{w_n}^{W(x)} \frac{x}{e} dt \right| = \frac{x}{e} |W(x) - w_n|$$

Conclusion,

$$|w_{n+1} - W(x)| \leq \frac{x}{e} |w_n - W(x)|$$

31. Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , on pose  $\mathcal{P}(n)$  : «  $|w_n - W(x)| \leq \left(\frac{x}{e}\right)^n |1 - W(x)|$  » et on procède par récurrence.

Initialisation : pour  $n = 0$ , alors  $w_0 - W(x) = 1 - W(x)$  et  $(x/e)^0 = 1$ , donc il y a égalité et inégalité a fortiori. Donc  $\mathcal{P}(1)$  est vraie. Hérédité. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $\mathcal{P}(n)$  et montrons  $\mathcal{P}(n+1)$ . D'après la question précédente et  $\mathcal{P}(n)$ ,

$$|w_{n+1} - W(x)| \leq \frac{x}{e} |w_n - W(x)| \leq \frac{x}{e} \left(\frac{x}{e}\right)^n |1 - W(x)| = \left(\frac{x}{e}\right)^{n+1} |1 - W(x)|$$

Ainsi  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie et le principe de récurrence permet de conclure.

Mais alors  $|x/e| < 1$  donc  $(x/e)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et  $\left(\frac{x}{e}\right)^n |1 - W(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Le théorème d'encadrement donne alors  $|w_n - W(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , i.e  $w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} W(x)$ .