Une classe particulière de matrices carrées

Notations

- On fixe un entier naturel $n \geq 2$. On rappelle que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$, puis que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices colonnes à n lignes et 1 colonne à coefficients dans $\mathbb{R}$.
- Pour ne pas alourdir le texte, « la » matrice nulle est notée 0 quelles que soient ses dimensions.
- Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, tout entier $j \in [\![1,n]\!]$, $C_j(A)$ désigne la j-ième colonne de A.
- La matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ composée uniquement de coefficients 1 est notée J.
- Toute matrice carrée à une ligne et une colonne $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est identifiée à l'unique coefficient réel $A_{1,1}$ qu'elle comporte.
- Pour toute matrice carrée A, la somme de ses coefficients diagonaux est appelée trace de A, notée $\operatorname{Tr}(A)$.
- L'objet de ce problème est l'étude de l'ensemble suivant :

$$\overline{\mathcal{U}} = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \forall j \in [\![1,n]\!], \exists \lambda \in \mathbb{R}, C_j(A) = \lambda X\right\}$$

  Il s'agit de l'ensemble des matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les colonnnes sont proportionnelles à une colonne fixée.
- On pose enfin $\mathcal{U} = \overline{\mathcal{U}} \backslash \{0\}$ l'ensemble des matrices non nulles de $\overline{\mathcal{U}}$.

Partie I. Quelques propriétés sur la trace

1. Montrer que
$$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \operatorname{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \operatorname{Tr}(A) + \mu \operatorname{Tr}(B).$$
2. Montrer que
$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}), \operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA).$$
3. Montrer que
$$\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2, \operatorname{Tr}\left(XY^T\right) = X^T Y.$$
   On rappelle qu'une matrice carrée de taille 1 est identifiée à son unique coefficient.

Partie II. Généralités sur $\mathcal{U}$.

4. Montrer que $J \in \mathcal{U}$.
5. Déterminer deux matrices colonnes non nulles $(X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \backslash \{0\})^2$ telles que $J = XY^T$.
6. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Montrer que $E_{i,j} \in \mathcal{U}$.
7. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Déterminer deux matrices colonnes non nulles $(X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \backslash \{0\})^2$ telles que $E_{i,j} = XY^T$.
8. Montrer que $I_n \notin \mathcal{U}$.
9. Démontrer l'égalité d'ensembles
$$\overline{\mathcal{U}} = \left\{XY^T \,\middle|\, (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2\right\}.$$

10. Démontrer l'égalité d'ensembles
$$\mathcal{U} = \left\{ XY^T \,\middle|\, (X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\})^2 \right\}.$$
11. Soit $(X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\})^2$. On pose $H = XY^T$. Soit $(\widetilde{X},\widetilde{Y}) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\})^2$. Démontrer l'équivalence
$$H = \widetilde{X}\widetilde{Y}^T \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \left(\widetilde{X} = \lambda X \wedge \widetilde{Y} = \frac{1}{\lambda} Y\right)$$
12. Montrer que $\forall H \in \mathcal{U}, H^T \in \mathcal{U}$.
13. Montrer que
$$\forall A \in \overline{\mathcal{U}}, \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AB \in \overline{\mathcal{U}} \wedge BA \in \overline{\mathcal{U}}$$
14. En déduire que $\overline{\mathcal{U}}$ ne contient aucune matrice inversible.
15. Soit $H \in \overline{\mathcal{U}}$. Montrer que $H^2 = \mathrm{Tr}(H)H$.
16. Soit $H \in \overline{\mathcal{U}}$. Déduire de ce qui précède une expression de H^k pour tout entier naturel non nul k.

Partie III. Réduction des matrices de $\mathcal{U}$.

L'objectif de cette partie est de montrer que pour toute matrice $H \in \mathcal{U}$, on peut trouver une matrice inversible P telle que $P^{-1}HP = \mathrm{Tr}(H)E_{1,1}$ si $\mathrm{Tr}(H) \neq 0$ et $E_{1,2}$ si $\mathrm{Tr}(H) = 0$. On pose
$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$
Dans cette partie, la recherche de matrices inversibles peut s'effectuer à l'aide d'opérations élémentaires, sans expliciter les matrices inversibles sous-jacentes.

17. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(A)$.
18. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $P^{-1}AP$ est inversible si seulement si A est inversible.
19. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$. Montrer qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $X = QE_1$. *Indication : on pourra commencer par traiter le cas $X_1 \neq 0$ dans un premier temps.*
20. Soit $H \in \mathcal{U}$. Montrer qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que la matrice $Q^{-1}HQ$ est de la forme
$$\begin{pmatrix} \mathrm{Tr}(H) & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
Autrement dit, seule la première ligne de $Q^{-1}HQ$ est non nulle et son premier coefficient vaut $\mathrm{Tr}(H)$.
21. Soit $w \in \mathbb{R}^{n-1}$. Montrer que la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & w_1 & \dots & w_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$
est inversible et déterminer son inverse.
22. Soit $H \in \mathcal{U}$ tel que $\mathrm{Tr}(H) \neq 0$. Déduire de ce qui précède qu'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}HP = \mathrm{Tr}(H)E_{1,1}$.
23. Soit $H \in \mathcal{U}$ tel que $\mathrm{Tr}(H) = 0$. Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}HP = E_{1,2}$.

Partie IV. Applications à l'inversibilité

On fixe $H \in \overline{\mathcal{U}}$ dans cette partie.

24. Montrer que $I_n + H$ est inversible si et seulement si $\mathrm{Tr}(H) \neq -1$.
25. On suppose que $\mathrm{Tr}(H) \neq -1$. Montrer que

$$(I_n + H)^{-1} = I_n - \frac{1}{1 + \mathrm{Tr}(H)} H$$

26. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A + H$ est inversible si et seulement si $\mathrm{Tr}\left(A^{-1} H\right) \neq -1$.
27. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{Tr}(A^{-1} H) \neq -1$. Exprimer $(A + H)^{-1}$ à l'aide de A^{-1} et H.