Le but de ce problème est d'étudier l'ensemble F des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |f(x+y)| = |f(x)f(y)|$$

On introduit pour cette étude l'ensemble F^+ des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)f(y)$$

ainsi que l'ensemble F^- des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = -f(x)f(y)$$

1 Généralités

1. Déterminer toutes les fonctions constantes de F.
2. Donner un exemple de fonction de F non continue.
3. Donner un exemple de fonction de F continue et non constante.
4. Déterminer l'ensemble $\{f(0) | f \in F\}$ des valeurs prises par $f(0)$ quand f décrit F.
5. Montrer que la seule fonction de F qui s'annule est la fonction identiquement nulle.
6. Déterminer toutes les fonctions impaires de F.
7. Déterminer toutes les fonctions paires de F.
8. Montrer que toute fonction de F^+ est soit identiquement nulle, soit strictement positive.
9. A-t-on $F^+ \cup F^- \subset F$? $F \subset F^+ \cup F^-$? $F^+ \cup F^- = F$?
10. Construire une bijection de F^+ dans F^-.

2 Fonctions continues de F

On note F_c l'ensemble des fonctions continues dans F.

1. Soif $f \in F_c$. Montrer que f est soit identiquement nulle, soit strictement positive, soit strictement négative.
   On pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.
2. Soit $f \in F_c$ telle que $f > 0$.
   (a) Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, f(nx) = (f(x))^n$$
   (b) Exprimer $f(1/n)$ en fonction de n et $f(1)$ pour tout entier relatif non nul n.
   (c) Exprimer $f(r)$ en fonction de r et $f(1)$ pour tout rationnel r.

   On admet les résultats suivants
   - *Pour tout réel x, il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de limite x.*
   - *Pour toute fonction continue f, pour toute suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de limite x, la suite $(f(r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $f(x)$.*
   - *La limite d'une suite convergente est unique.*

   (d) Exprimer $f(x)$ en fonction de x et $f(1)$ pour tout réel x.
3. Déterminer F_c.

3 Fonctions dérivables de F

On note F_d l'ensemble des fonctions dérivables dans F.

1. Déterminer F_d en utilisant les résultats de la partie précédente.
2. Déterminer F_d sans utiliser les résultats de la partie précédente.