Colle 4 filière PCSI Vendredi 17 octobre 2025

★★★

Planche 1

★★★

1. Définition de l'injectivité. Description des racines $n$-ièmes de l'unité. Énoncé et démonstration.
2. Déterminer l'ensemble des complexes $z$ tels que $1-\overline{z}=|z|$.
3. On pose $P=\{z|\mathrm{Im}(z)>0\}$ et $f:P\to\mathbb{C}, z\mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$. Déterminer l'image directe $f(P)$, démontrer que $f_{|P}^{|f(P)}$ est bijective et déterminer sa réciproque.

★★★

Planche 2

★★★

1. Définition d'une image réciproque. Caractérisation de la bijectivité à l'aide de composées. Énoncé et démonstration.
2. Soit $z\in\mathbb{U}_7$. En admettant $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=0$ si $z\neq 1$, calculer
$$\frac{z}{1+z^2}+\frac{z^2}{1+z^4}+\frac{z^3}{1+z^6}$$
3. On pose $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto x$ si $x\in\mathbb{Q}$ et $1-x$ si $x\notin\mathbb{Q}$. Montrer que $f$ est bijective et déterminer sa réciproque.

★★★

Planche 3

★★★

1. Énoncer le théorème de D'Alembert-Gauss. Images directe et réciproque d'une union et d'une intersection. Énoncé et démonstration.
2. Soit $f:E\to F$ une application, $A\subset E$ et $B\subset F$. montrer que
$$f(A\cap f^{-1}(B))=f(A)\cap B$$
3. Soit $u\in\mathbb{C}\backslash\{1\}$ et $z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence
$$\frac{z-u\overline{z}}{1-u}\iff |u|=1$$

★★★

Bonus

★★★

Montrer que l'image d'un cercle ou d'une droite par une homographie $z\mapsto(az+b)/(cz+d)$ est un cercle ou une droite (éventuellement privé d'un point).