On se donne deux réels strictement positifs a et b tels que $a > b$. On considère alors la partie

$$\mathcal{E} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \frac{\mathfrak{Re}(z)^2}{a^2} + \frac{\mathfrak{Im}(z)^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

On pose de plus $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. On admet le résultat suivant :

$$\forall z \in \mathbb{C}, [z \in \mathcal{E} \iff |z - c| + |z + c| = 2a]$$

1. Soit z un complexe distinct de c et $-c$. Sans chercher à les déterminer, justifier qu'il existe exactement deux complexes z' qui vérifient $z'^2 + z^2 = c^2$.

   On fixe un complexe z dans $\mathcal{E}$ et un tel complexe z' dans ce qui suit jusqu'à la question 8 incluse.
2. Montrer que $|z'|^2 = |z - c||z + c|$.
3. Montrer que :

$$\begin{aligned} |z-c|^2 + |z+c|^2 &= 2\left(|z|^2 + |c|^2\right) \\ (|z-c| + |z+c|)^2 &= 2\left(|z|^2 + |z'|^2 + |c|^2\right) \\ |z-c| + |z+c| &= |z'-c| + |z'+c|. \end{aligned}$$

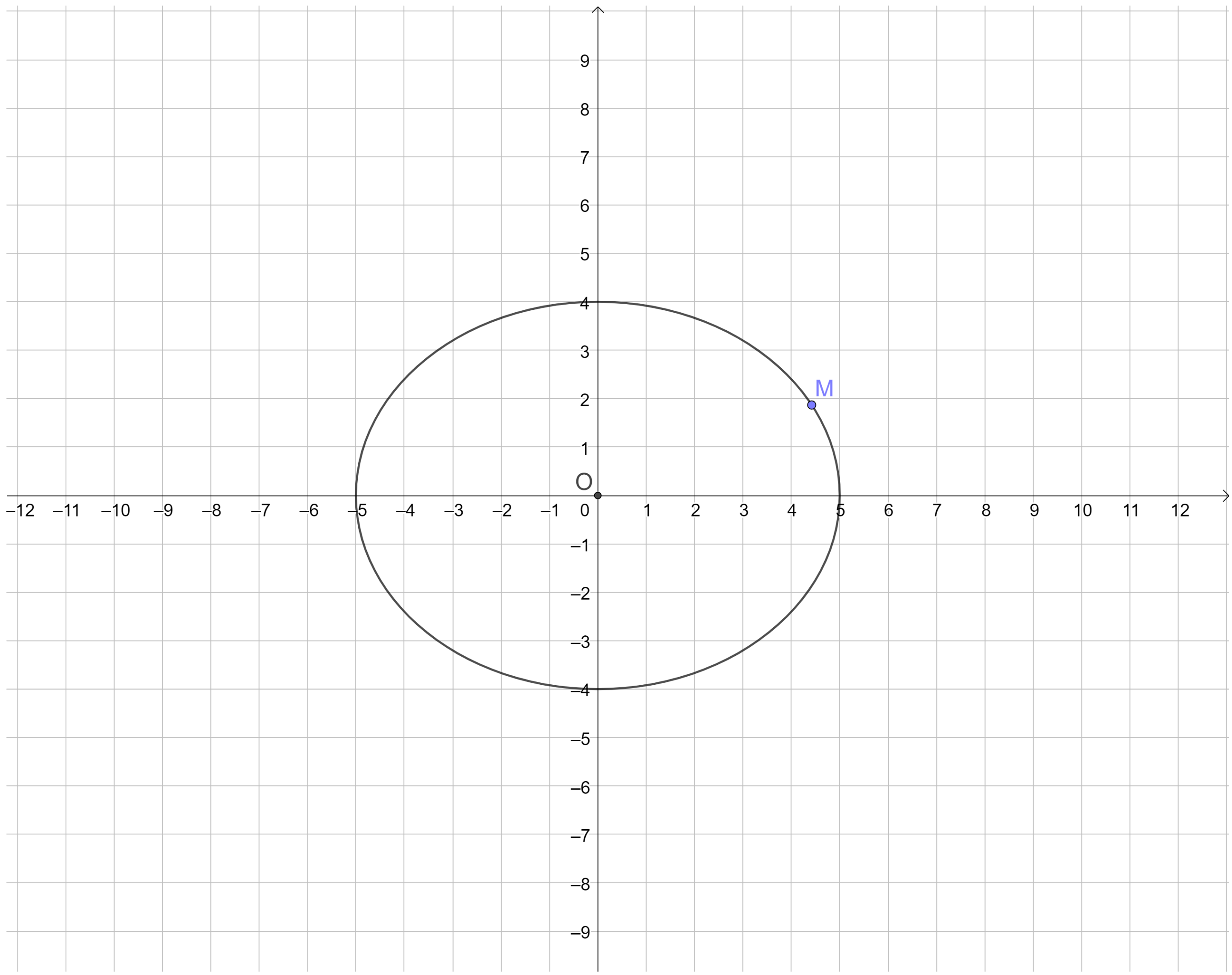
   En déduire que z' appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$.
4. On définit deux complexes n et n' via $n = z + iz'$ et $n' = z - iz'$. Montrer que $nn' = c^2$ et $|z-c|+|z+c| = |n| + |n'|$.
5. On pose $x = \mathfrak{Re}(z), y = \mathfrak{Im}(z), x' = \mathfrak{Re}(z'), y' = \mathfrak{Im}(z')$. Démontrer les relations :

$$\begin{aligned} xy + x'y' &= 0 \\ x^2 + x'^2 &= a^2 \\ y^2 + y'^2 &= b^2. \end{aligned}$$

6. Montrer qu'alors, quitte à intervertir n et n', on a $|n| = a + b$ et $|n'| = a - b$.
7. On note M le point du plan d'affixe complexe z, M' celui d'affixe complexe z', F celui d'affixe complexe c, F' celui d'affixe complexe $-c$, puis O celui d'affixe complexe 0. En raisonnant sur les arguments, montrer que la bissectrice intérieure des demi-droites $[MF)$ et $[MF')$ est perpendiculaire à la droite (OM').
8. Compléter la figure en page suivante pour laquelle $a = 5$ et $b = 4$. L'ellipse tracée représente l'ensemble $\mathcal{E}$ et M un point d'affixe z.
9. On admet que $f : \mathcal{E} \to \mathbb{C}, z \mapsto n$ et $g : \mathcal{E} \to \mathbb{C}, z \mapsto n'$ sont des applications. Démontrer que

$$f(\mathcal{E}) \cup g(\mathcal{E}) = \{s \in \mathbb{C} \mid |s| = a + b\} \cup \{s \in \mathbb{C} \mid |s| = a - b\}$$

   On prêtera attention à démontrer proprement deux inclusions. Représenter cet ensemble sur la figure en page suivante.


M
O