



C6-1 - Analyse temporelle des systèmes asservis du 1er ordre

14 Mars 2023

Table des matières

I Définitions	2
1 Système du premier ordre	2
2 Exemple du cours	3
II Caractérisations de la réponse d'un système du premier ordre	4
1 Réponse à un échelon	4
a) Équation de la réponse	4
b) Comportement asymptotique	4
c) Propriétés	5
2 Réponse à une rampe :	6
a) Équation de la réponse	6
b) Comportement asymptotique	6
c) Propriétés	7
3 Réponse à une impulsion :	7
a) Équation de la réponse	7
b) Comportement asymptotique :	7

Compétences

- **Analyser**
 - Identifier la structure d'un système asservi.
 - Interpréter et vérifier la cohérence des résultats obtenus expérimentalement, analytiquement ou numériquement.
- **Modéliser**
 - Établir un modèle de connaissance par des fonctions de transfert.
 - Modéliser le signal d'entrée.
 - Établir un modèle de comportement à partir d'une réponse temporelle ou fréquentielle.
 - Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.
- **Communiquer**
 - Utiliser un vocabulaire technique, des symboles et des unités adéquats.

I. Définitions

1 Système du premier ordre



Définition 1 : Système du premier ordre

On appelle **système du premier ordre** tout système linéaire, continu et invariant régi par une équation différentielle du premier degré de la forme :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t). \quad (1)$$



Remarque 1 :

Pour la suite du cours, on considérera que les **conditions initiales de s(t) sont toujours nulles** :

- pour une équation différentielle du premier ordre : $s(t=0) = 0$;
- pour une équation différentielle du deuxième ordre : $s'(t=0) = 0$



Propriété 1 :

La fonction de transfert de ces systèmes peut s'écrire sous la **forme canonique suivante** :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \quad (2)$$

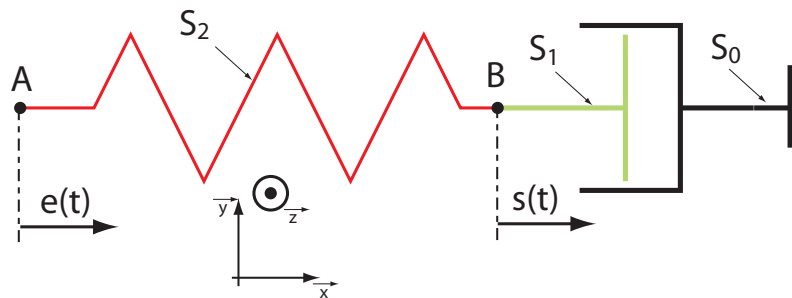
où :

- τ : **constante de temps** (en s) ;
- K : **gain statique** (unité selon l'application).

2 Exemple du cours



Exemple 1 : Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c



On déplace l'extrémité A d'une longueur $e(t)$. Le point B répond à ce déplacement en se déplaçant d'une longueur $s(t)$. En isolant le solide S_1 de masse (m), on obtient le bilan des actions mécaniques extérieures suivant \vec{x} :

- Le ressort S_2 de raideur k exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant \vec{x} ,

$$F_r = -k(s(t) - e(t)).$$

- L'amortisseur S_0 de coefficient de viscosité c exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant \vec{x} ,

$$F_c = -c \cdot \frac{ds(t)}{dt}.$$

- On néglige le poids du solide S_1 .

En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique suivant la direction \vec{x} , on obtient :

$$F_r + F_c = m \frac{d^2 s(t)}{dt^2}.$$

En négligeant la masse m (ce qui revient à négliger l'inertie), on obtient alors,

$$\boxed{c \frac{ds(t)}{dt} + ks(t) = ke(t).} \quad (3)$$

Cette équation différentielle de degré 1 caractérise **un système du premier ordre**. On considère que les conditions initiales sont nulles ($s(t=0) = 0$).



Exemple 2 : Détermination dans le domaine de Laplace de la fonction de transfert associée

II. Caractérisations de la réponse d'un système du premier ordre

1 Réponse à un échelon

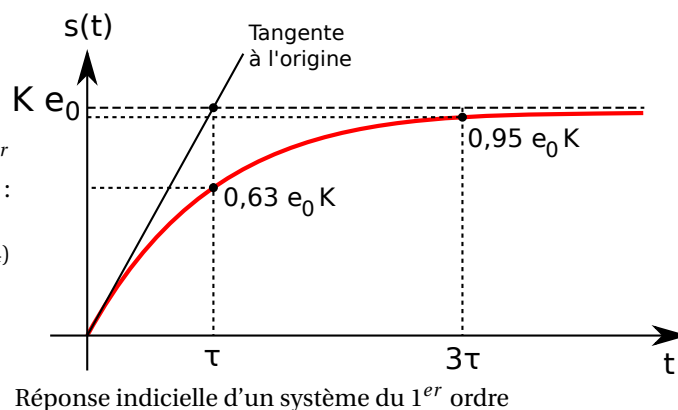
a) Équation de la réponse



Théorème 1 :

La réponse d'un système du 1^{er} ordre à un échelon est de la forme :

$$s(t) = K \cdot e_0 (1 - e^{-t/\tau}) \cdot u(t). \quad (4)$$



b) Comportement asymptotique

On cherche à déterminer le comportement asymptotique (valeur et dérivée) de la réponse $s(t)$ au voisinage de 0 et $+\infty$. Pour cela, on peut utiliser les théorèmes des valeurs limites :

Au voisinage de $+\infty$:

Au voisinage de 0 :

c) Propriétés

Propriété 2 :

- La réponse indicielle à un système du 1^{er} ordre possède :
 - une **asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$** d'ordonnée à l'origine $K \cdot e_0$,
 - une **tangente à l'origine de coefficient directeur $\frac{K \cdot e_0}{\tau}$** .
- La **rapidité** d'une réponse à un échelon pour un premier ordre est quantifiée par le **temps de réponse à 5%** (noté t_r) :

$$t_r \approx 3 \tau. \quad (5)$$

- La **Précision** de la réponse à un échelon peut être indiquée par l'**erreur statique**, noté ε_s . Elle s'obtient en recherchant l'écart au voisinage de $+\infty$:

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e(t) - s(t)) \quad (6)$$

- L'erreur statique ε_s d'un système du 1^{er} ordre de **gain unitaire** soumis à un échelon est nulle :

$$\varepsilon_s = 0. \quad (7)$$



Démonstration 1 : *Rapidité*

Calculons le temps de réponse à 5% pour un premier ordre



Démonstration 2 : Précision

Pour illustrer cela, prenons un gain $K = 1$. D'après le raisonnement suivant :



Attention : Précision

Pour estimer la précision, il convient d'abord de vérifier que $e(t)$ et $s(t)$ soient **homogènes** pour être comparables! Cela prend en compte aussi bien la nature des entrées-sorties, mais également l'amplification de la sortie par rapport à l'entrée. On prendra donc soit un gain unitaire ($K = 1$), soit l'équation 6 légèrement modifiée :

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} (K e(t) - s(t)) \quad (8)$$

2 Réponse à une rampe :

a) Équation de la réponse

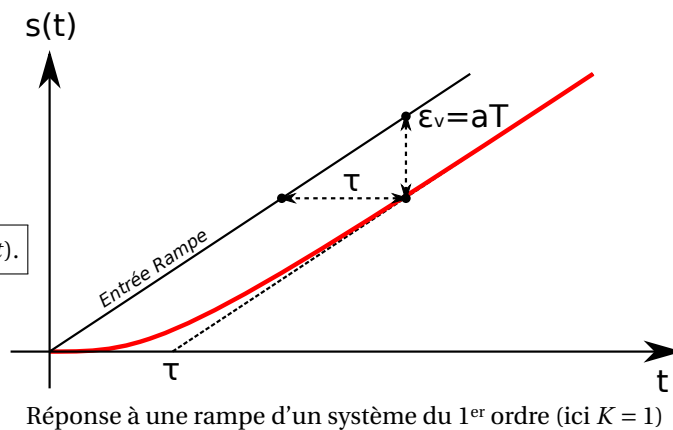


Théorème 2 :

La réponse d'un système du 1^{er} ordre soumis à une rampe est de la forme :

$$s(t) = K a \left(t + \tau \left(e^{-t/\tau} - 1 \right) \right) u(t).$$

(9)



b) Comportement asymptotique

On cherche à déterminer le comportement asymptotique (valeur et dérivée) de la réponse $s(t)$ au voisinage de 0 et $+\infty$. Pour cela, on utilise les théorèmes des valeurs limites.

Au voisinage de $+\infty$:

Au voisinage de 0 :

c) Propriétés

Propriété 3 :

- La réponse d'un système du 1^{er} ordre à une rampe possède :
 - une **tangente horizontale au voisinage de 0**,
 - une **asymptote oblique, de coefficient directeur $K a$** car une asymptote oblique d'équation $y(t) = a(t - \tau)$ au voisinage de $+\infty$.

- **Précision** : Pour $K = 1$, on trouve :

$$\varepsilon_v = a \tau. \quad (10)$$

- **Rapidité** : La rapidité d'une réponse à une rampe d'un système du 1^{er} ordre peut se caractériser par un **retard de traînage r_t** :

$$r_t = \tau. \quad (11)$$

3 Réponse à une impulsion :

a) Équation de la réponse

Théorème 3 :

La réponse temporelle d'un système du 1^{er} ordre à une impulsion a pour équation :

$$s(t) = \frac{K}{\tau} e^{-t/\tau}. \quad (12)$$

b) Comportement asymptotique :

On cherche à déterminer le comportement asymptotique (valeur et dérivée) de la réponse $s(t)$ au voisinage de 0 et $+\infty$. Pour cela, on utilise les théorèmes des valeurs limites.

Au voisinage de $+\infty$:

Au voisinage de 0 :



Propriété 4 :

La réponse d'un système du 1^{er} ordre sollicité par un Dirac possède :

- une **asymptote horizontale** d'équation $s(t) = 0$ au voisinage de $+\infty$,
- une **tangente d'équation** $s(t) = -\frac{K}{\tau^2}t + \frac{K}{\tau}$ au voisinage de 0.