Devoir surveillé n° 02 - Remarques de correction

Barème.

- Feuille de calculs : chaque question sur 2 points, total sur 24 points, ramené sur 5 points.
- Problèmes : chaque question sur 4 points, total sur 100 points, ramené sur 15 points.

Statistiques descriptives.

	Calculs	Problèmes	Note finale
Note maximale	22	54	$19,5$
Note minimale	2	19	$6,6$
Moyenne	$\approx 7,0$	$\approx 33,4$	$\approx 9,7$
Écart-type	$\approx 3,8$	$\approx 8,8$	$\approx 2,9$
Médiane	$6,5$	31	$8,5$

Remarques générales.

Justifiez précisément toutes vos affirmations. Vous devez examiner tous vos « donc » : aucun ne doit cacher le moindre petit raisonnement non évident !

En ce qui concerne l'orthographe, il est très pénible de voire des fautes d'accord dans des copies d'élèves de votre âge : “trois ensemble”, “un quaternion réelle ou pure”, “un couple d'objet” ...

Exercice I

- Écrire « Soit $(x, y) \in (E \times G) \cup (F \times G)$ » est légèrement maladroit, sans être incorrect. En effet, vous ne traduisez pas l'union, qui a ici priorité sur le produit cartésien.
- “A ou B et C ou D” ne veut rien dire : il faut impérativement parenthéser.

Exercice II

1 : Cette question n'a pas toujours été bien comprise : il fallait surtout montrer l'unicité des coefficients $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.
Commencer par écrire $q = aI + bJ + cK + dL = a'I + b'J + c'K + d'L$ en supposant $a \neq a'$ ET $b \neq b'$, $c \neq c'$, $d \neq d'$ pour faire une démonstration par l'absurde était voué à l'échec : la négation de cette supposition n'est pas $a = a'$ ET $b = b'$ ...
Cela vous permettait d'utiliser ensuite un de vos (gros) mots favori : « identifier » : en effet une identification n'est possible que dans le cas où il y a une unicité d'écriture. Par exemple, si un polynôme s'écrit $\sum a_k X^k$ et $\sum b_k X^k$, alors on peut identifier ces deux écritures et alors les a_k sont égaux aux b_k, car un polynôme s'écrit d'une unique manière comme somme de

monômes. Mais si un réel s'écrit $a+b$ ou $c+d$, il est impossible d'ientifier ces deux écritures car un réel peut s'écrire de plusieurs manières comme somme de deux réels : $4 = 2 + 2 = 1 + 3$. Donc dans cette question, utiliser une identification était parfaitement impossible, mais a souvent été fait.

Mais après avoir traité correctement cette question, il est parfaitement licite d'identifier deux écritures d'un même quaternion ... ce qui a trè speu été fait, mais été utile pour la qu. 2.

2ab : N'oubliez pas d'utiliser le résultat de la question **1**, cela allège un peu la rédaction. Il revient au même de dire « q est réel si $\beta = \gamma = \delta = 0$ » ou de dire « Si $\beta = \gamma = \delta = 0$, alors q est réel ». Pour ne pas l'avoir compris, beaucoup ont pensé démontrer une implication alors qu'ils démontraient la réciproque.

3d : Pour cette question, utilisez les résultats obtenus dans les trois questions précédentes !

Ce n'est pas parce que le produit sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ n'est pas commutatif que celui sur $\mathbb{H}$ ne l'est pas. Et comme $\mathbb{H}$ est strictement plus petit que $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, l'ensemble des quaternions commutant avec tous les autres contient les matrices commutant avec toutes les autres (ce sont les homothéties, qui sont exactement les quaternions réels), mais a priori il contient d'autres éléments. Ce n'est finalement pas le cas, mais il fallait s'en assurer.

Certains ont introduit $q = aI + bJ + cK + dL$ et $q' = \alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L$ et on observé que qq' et $q'q$ n'ont pas la « même expression » en fonction des coefficients. Cela ne prouve pas que $qq' \neq q'q$! On ne vous demande notamment pas de montrer que $\forall q, q' \in \mathbb{H},\ qq' \neq q'q$ (c'est faux) mais $\exists q, q' \in \mathbb{H},\ qq' \neq q'q$. Il faut et il suffit d'exhiber un exemple concret, ce qui était donné par les questions précédentes.

4a : Attention, avec le quaternions $\forall q, r \in \mathbb{H},\ \overline{qr} = \bar{q} \times \bar{r}$ est ... faux !

5a : Sans supposer $q \neq 0$, on voit beaucoup trop souvent $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \neq 0$.

5b : Attention, $qr\overline{qr} \neq qr\bar{q}\bar{r}$ et $qr\bar{q}\bar{r} \neq q\bar{q}r\bar{r}$. Les questions précédentent auraient dû vous mettre en garde ! Il fallait utiliser la question 4.a., et encore, elle ne suffisait pas à conclure.

5c : Erreur dans l'énoncé : la question aurait dû porter sur des entiers, non des réels.

6a : On demande DES solutions, pas LES solutions : attention à la formulation de votre réponse.

6b : Trop de non-sens du style $\sqrt{\text{matrice}}$ ou de "$x^2 = 1$ donc $x = 1$" sans penser au signe de x.

Exercice III

1b : Le n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ doit être introduit dans l'hypothèse de récurrence (de manière quantifiée). En effet, cela dépend ... de n ! On pouvait contourner ce problème en introduisant auparavant une suite <u>infinie</u> de réels strictement positifs $(x_i)_{i \geqslant 1}$.

2a : La condition $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \neq 0$ était assez facilement trouvable. Il fallait aussi la simplifier (en $\exists k \in [\![1, n]\!],\ a_k \neq 0$).

De plus, le degré de S ne peut en aucun cas dépendre de la variable (ici λ).

Et il ne fallait oublier des questions en route : $S \geqslant 0$ faisait partie de cette question, pas de la suivante, et il en a été tenu compte dans le barême.