

Feuille d'exercice n° 18 : **Espaces vectoriels**

Exercice 1 (✎) Dire si les objets suivants sont des espaces vectoriels.

- 1) L'ensemble des fonctions réelles, définies sur \mathbb{R} et vérifiant $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
- 2) L'ensemble des fonctions impaires, définies sur \mathbb{R} .
- 3) L'ensemble des fonctions définies sur $[a, b]$, continues et vérifiant $f(a) = 7f(b) + \int_a^b t^3 f(t) dt$.
- 4) L'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^2 vérifiant $f'' + \omega^2 f = 0$.
- 5) L'ensemble des primitives de la fonction $x \mapsto xe^x$ sur \mathbb{R} .
- 6) L'ensemble des nombres complexes d'argument $\pi/4 + k\pi$, pour $k \in \mathbb{Z}$.
- 7) L'ensemble des points (x, y) de \mathbb{R}^2 , vérifiant $\sin(x + y) = 0$.
- 8) L'ensemble des vecteurs de \mathbb{R}^3 orthogonaux au vecteur $(-1, 3, -2)$.

Exercice 2 (✎) Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. On pose $F = E^2$. Pour tout couple $((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ d'éléments de F , on pose $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, et tout $(x, y) \in F$, on note $\lambda \cdot (x, y) = (ax - by, bx + ay)$, où $a = \operatorname{Re} \lambda$ et $b = \operatorname{Im} \lambda$.

Montrer que $(F, +, \cdot)$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel (appelé le complexifié du \mathbb{R} -espace vectoriel E).

Exercice 3 (🚲)

- 1) Soit les vecteurs $v_1 = (1 - i, i)$, $v_2 = (2, -1 + i)$ et $v_3 = (i + 1, i)$. Le vecteur v_1 est-il combinaison linéaire de v_2 et v_3 dans \mathbb{C}^2 , considéré comme \mathbb{C} -espace vectoriel ? comme \mathbb{R} -espace vectoriel ?
- 2) Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $x \mapsto \sin x$ est-elle combinaison linéaire des deux fonctions $x \mapsto \sin 2x$ et $x \mapsto \sin 3x$? Généraliser.

Exercice 4 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Montrer que $F \cup G = F + G \Leftrightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 5 (✎) Montrer que, dans $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{C})$, $F = \left\{ f \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{C}) \mid \int_{-1}^1 f(t) dt = 0 \right\}$ et $G = \{ f \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{C}) \mid f \text{ constante} \}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Exercice 6 (🚲) Soit $F = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) + f(1) = 0 \}$.


- 1) Montrer que F est un espace vectoriel.
- 2) Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 7 Soient F, G, F', G' des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E , tels que $F \cap G = F' \cap G'$.


Montrer que $(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F$.

Exercice 8 Soit A et B deux parties d'un espace vectoriel E . Comparer $\operatorname{Vect}(A \cap B)$ et $\operatorname{Vect} A \cap \operatorname{Vect} B$.

Exercice 9 Soit \mathcal{V} et \mathcal{W} deux sous-espaces affines **disjoints** d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E . On note V et W leurs directions respectives. Soit $a \in \mathcal{V}$ et $b \in \mathcal{W}$. On pose $U = V + W$, $\mathcal{V}' = a + U$ et $\mathcal{W}' = b + U$. Montrer que \mathcal{V}' et \mathcal{W}' sont deux sous-espaces affines disjoints, de même direction et contenant respectivement \mathcal{V} et \mathcal{W} .

Exercice 10 () Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires.


- 1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x^2$
- 2) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 4x - 3$
- 3) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x^2}$
- 4) $\varphi : \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(3/4)$
- 5) $\chi : \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto -\int_{1/2}^1 f(t) dt$
- 6) $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sin(3x + 5y)$
- 7) $\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$
- 8) $\rho : \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}), f \mapsto \left(x \mapsto e^{-x} \int_0^1 f(t) dt\right)$

Exercice 11 () Calculer le noyau et l'image de $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & + & 2y \\ -x & - & 4y & + & 2z \\ 2x & + & 5y & - & z \end{pmatrix}.$$

Exercice 12 Pour chaque propriété suivante, donner un exemple d'endomorphisme f de \mathbb{R}^2 la vérifiant.

- 1) $\text{Ker}(f)$ est inclus strictement dans $\text{Im}(f)$.
- 2) $\text{Im}(f)$ est inclus strictement dans $\text{Ker}(f)$.
- 3) $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.
- 4) $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont supplémentaires.

Exercice 13 () Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.


- 1) Montrer que $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$ et $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$.
- 2) Montrer que $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\} \iff \text{Ker } f^2 = \text{Ker } f$.
- 3) Montrer que $E = \text{Ker } f + \text{Im } f \iff \text{Im } f^2 = \text{Im } f$.

Exercice 14 ( )

- 1) Soit E, F et G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels, soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Établir l'équivalence

$$g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E, G)} \iff \text{Im } f \subset \text{Ker } g.$$

- 2) Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E , vérifiant $f^2 + f - 2\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
 - a) Montrer que $(f - \text{Id}_E) \circ (f + 2\text{Id}_E) = (f + 2\text{Id}_E) \circ (f - \text{Id}_E) = f^2 + f - 2\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
 - b) En déduire que $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$ et $\text{Im}(f + 2\text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$.
 - c) Montrer que $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$.

Exercice 15 () Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est un \mathbb{K} -espace vectoriel. On suppose que


$$\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda x.$$

Montrer que

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(x) = \lambda x.$$

Exercice 16 () Dans \mathbb{R}^4 , comparer (*i.e.* dire s'ils sont égaux ou si l'un est inclus dans l'autre) les sous-espaces F et G suivants :

$$\begin{aligned} F &= \text{Vect} \{(1, 0, 1, 1), (-1, -2, 3, -1), (-5, -3, 1, -5)\} ; \\ G &= \text{Vect} \{(-1, -1, 1, -1), (4, 1, 2, 4)\} . \end{aligned}$$

Exercice 17 () Dans \mathbb{R}^4 on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^4 ? Le cas échéant, en donner une famille génératrice.

Exercice 18 (✎🚲) Soit dans \mathbb{R}^3 les vecteurs $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (4, 1, 4)$ et $v_3 = (2, -1, 4)$.

- 1) Montrer que v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires. Faire de même avec v_1 et v_3 , puis avec v_2 et v_3 .
- 2) La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?

Exercice 19 Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^k$. Montrer que la famille $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 20 Quelle est la nature de l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$?

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -5x & + & 2y \\ -12x & + & 5y \\ -4x & + & 2y & - & z \end{pmatrix}$$

Déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 21 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, soit $p, q \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre les deux assertions suivantes :

- 1) $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$;
- 2) p et q sont deux projecteurs de même noyau.

Exercice 22 (✎) On pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$ et $G = \text{Vect}(1, 1, 0)$.

- 1) Montrer que F et G sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .
- 2) Déterminer une expression explicite de la projection de \mathbb{R}^3 sur F parallèlement à G .

Exercice 23 Soit p et q deux projecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Montrer que $p - q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = q$.

