


Feuille d'exercice n° 12 : **Limite d'une fonction**

Exercice 1 () Déterminer les limites suivantes, en justifiant vos calculs.

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{x^2 \ln x}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \ln(x + \sqrt{x})$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x \ln x}$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(3x+1)}{2x}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{\ln(x+1)}$
7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x+1} \ln\left(\frac{x^3+4}{1-x^2}\right)$
8. $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^2 - 1) \ln(7x^3 + 4x^2 + 3)$
9. $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)^2 \ln(x^3 - 8)$
10. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x^x - 1)}{\ln(x+1)}$
11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - x \ln(x+2))$
12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2 - x}$
13. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\ln x}$
14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x$
15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3+5}{x^2+2}\right)^{\frac{x+1}{x^2+1}}$
16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x+1}}$
17. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(1+x))^{\frac{1}{\ln x}}$
18. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{(x^{x-1})}}{x^{(x^x)}}$

$$19. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^x}{x^{x+1}}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{\ln(x^2+1)}}{1+e^{x-3}}$$

Exercice 2 Étudier la limite en 0 des applications (avec $a, b \in \mathbb{R}_+^*$) $x \mapsto \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor$ et $x \mapsto \frac{a}{x} \left\lfloor \frac{x}{b} \right\rfloor$.

Exercice 3 (✎) Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} croissante, telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = +\infty$, où (u_n) est la suite de terme général n . Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 4 Montrer, en revenant à la définition de la limite, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sin x}{(x+1)^2} = 1$.

Exercice 5 (✎) Déterminer la limite en $+\infty$ de $x \mapsto x^\alpha \ln \left(1 + \frac{1}{x^\beta} \right)$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 6 (✎) Montrer que toute fonction périodique et non constante n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 7 Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que f a une limite finie en $+\infty$, g est périodique et $f + g$ est croissante. Montrer que g est constante.

