XXIX Espaces euclidiens et préhilbertiens réels

30 août 2023

Le corps de base est $\mathbb{R}$. n, p, q, r et s désignent des entiers naturels non nuls. E désigne un espace vectoriel.

1 Produit scalaire, norme et distance.

Définition 1.0.1.
On appelle *produit scalaire sur E* toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ bilinéaire symétrique et telle que pour tout $x \in E$, on ait d'une part $\varphi(x,x) \geqslant 0$ et d'autre part $\varphi(x,x) = 0$ si et seulement si $x = 0$. Un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire est dit *préhilbertien*. Si de plus il est de dimension finie, il est dit *euclidien*.

Remarque 1.0.2.
— Différentes notations sont utilisées couramment pour le produit scalaire de x et y : $(x \mid y), \langle x \mid y\rangle, (x,y), \langle x,y\rangle, x \cdot y$.
— Par bilinéarité, si x ou $y = 0$, $\langle x \mid y\rangle = 0$.
— La symétrie et la linéarité par rapport à une variable suffisent à montrer la bilinéarité.
— Jusqu'à maintenant on définissait le produit scalaire à partir d'angles. En fait c'est l'inverse que l'on fait lorsque l'on théorise tout cela.

Exemple 1.0.3.
— Les produits scalaires usuels vus en début d'année sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont bien évidemment des produits scalaires.
— Il existe de nombreux produits scalaires sur $\mathbb{R}^2$; par exemple $((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \mapsto x_1x_2 - y_1x_2 + 2y_1y_2 - x_1y_2$.
— Il existe également sur $\mathbb{R}^n$ un produit scalaire canonique ; $(x_1,\dots,x_n).(y_1,\dots,y_n) = \sum_{k=1}^{n} x_iy_i$.
— Par extension, tout $\mathbb{R}$-ev de dimension n, étant isomorphe à $\mathbb{R}^n$, est muni d'un produit scalaire. Ainsi, sur $\mathbb{R}_n[X]$ le produit scalaire usuel est $\left(\sum_{k=0}^{n} a_kX^k\right).\left(\sum_{k=0}^{n} b_kX^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_kb_k\right)$.
— Soit a et b deux réels avec $a < b$. Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, l'application $(f,g) \mapsto \int_a^b fg$ est un produit scalaire (attention : cet espace est de dimension infinie, donc n'est pas euclidien, mais préhilbertien réel).

Exercice 1.0.4.
L'espérance munit-elle l'ensemble des variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé fini d'un produit scalaire (via $\langle X,Y\rangle = \mathrm{E}(XY)$) ?

Proposer une solution à ce « problème ».

Définition 1.0.5 (Distance)**.**
Soit E un ensemble (quelconque, pas nécessairement un espace vectoriel). On appelle *distance sur E* toute application $\mathrm{d} : E^2 \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les trois conditions suivantes :

(i) $\forall (x,y) \in E^2 \quad \mathrm{d}(x,y) = 0 \iff x = y$;
(ii) $\forall (x,y) \in E^2 \quad \mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x)$ (symétrie) ;
(iii) $\forall (x,y,z) \in E^3 \quad \mathrm{d}(x,z) \leqslant \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z)$ (inégalité triangulaire).

Un ensemble muni d'une distance est appelé *espace métrique*.

Remarque 1.0.6.
Il convient de ne pas oublier la positivité dans la définition d'une distance.

Exemple 1.0.7.
— La distance usuelle dans le plan est une distance.
— La distance de deux points sur un graphe connexe, comptée comme le nombre minimal d'arêtes à parcourir sur ce graphe pour relier ces deux points.

Remarque 1.0.8.
Soit E un ensemble muni d'une distance d. Soit $(x,y,z) \in E^3$. Alors, on a

$$|\mathrm{d}(x,y) - \mathrm{d}(x,z)| \leqslant \mathrm{d}(y,z).$$

Démonstration.
On a $\mathrm{d}(x,z) \leqslant \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z)$, donc $\mathrm{d}(x,z) - \mathrm{d}(x,y) \leqslant$

$\mathrm{d}(y,z)$. De même, $\mathrm{d}(x,y) \leqslant \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(z,y)$, donc $\mathrm{d}(x,y) - \mathrm{d}(x,z) \leqslant \mathrm{d}(y,z)$. Or $|\mathrm{d}(x,y) - \mathrm{d}(x,z)| = \max(\mathrm{d}(x,z) - \mathrm{d}(x,y), \mathrm{d}(x,y) - \mathrm{d}(x,z))$, d'où le résultat. □

Définition 1.0.9 (Norme)**.**
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle norme sur E toute application $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les trois conditions suivantes :

(i) $\forall x \in E \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$;

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in E \quad \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ (homogénéité) ;

(iii) $\forall (x,y) \in E \quad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Remarque 1.0.10.
Il convient de ne pas oublier la positivité dans la définition d'une norme.

Exemple 1.0.11.
Sur $\mathbb{R}^n$ et pour $p \in [1, +\infty[$, les applications

$$\|\cdot\|_p \ :\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$$

et

$$\|\cdot\|_\infty \ :\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \max_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k|$$

sont des normes.

Remarque 1.0.12.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme $\|.\|$. Alors pour tout $(x,y) \in E^2$, on a

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\| .$$

Démonstration.
Soit $(x,y) \in E^2$. Remarquons qu'on a $\|x\| = \|x+y-y\| \leqslant \|x+y\| + \|y\|$ par l'inégalité triangulaire, d'où l'on déduit $\|x\| - \|y\| \leqslant \|x+y\|$. Symétriquement, on remarque qu'on a $\|y\| - \|x\| \leqslant \|x+y\|$. Or $\big|\|x\| - \|y\|\big| = \max(\|x\| - \|y\|, \|y\| - \|x\|)$. On en déduit le résultat. □

Définition 1.0.13 (Distance associée à une norme)**.**
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme $\|.\|$. On appelle *distance associée à la norme* $\|.\|$ l'application $(x,y) \mapsto \|x-y\|$.

Proposition 1.0.14.
Cette application est bien une distance.

Exemple 1.0.15.
La distance associée à $\|\cdot\|_1$ est parfois appelée *distance de Manhattan*. Dans Manhattan, les rues forment un damier « orthogonal », on ne peut donc que se déplacer parallèlement à ces axes. La distance parcourue entre deux points n'est donc pas la distance « euclidienne » usuelle ...

Exercice 1.0.16.
Pour une norme $\|\cdot\|$, on appelle boule centrée en $a \in E$ et de rayon $r \geqslant 0$ l'ensemble

$$B(a,r) = \{\, x \in E \mid \|a - x\| \leqslant r \,\} .$$

Tracer les boules centrée en 0 et de rayon 1 pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

Démonstration.
Soit d la distance associée à une norme $\|.\|$ sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On a clairement $\forall (x,y) \in E^2 \quad \mathrm{d}(x,y) \geqslant 0$, donc d est bien une application de E^2 dans $\mathbb{R}^+$. On vérifie aisément les trois conditions de la définition d'une distance :

(i) Soit $(x,y) \in E^2$. On a $\mathrm{d}(x,y) = \|x-y\|$. Or $\|x-y\| = 0 \iff x - y = 0$. Donc $\mathrm{d}(x,y) = 0 \iff x = y$.

(ii) Soit $(x,y) \in E^2$. On a $\mathrm{d}(y,x) = \|y-x\| = \|-(x-y)\| = |-1|\,\|x-y\| = \mathrm{d}(x,y)$.

(iii) Soit $(x,y,z) \in E^3$. On a $\mathrm{d}(x,z) = \|x-y+y-z\| \leqslant \|x-y\| + \|y-z\| = \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z)$.

□

Définition 1.0.17 (Norme associée à un produit scalaire)**.**
Soit $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. On appelle *norme associée au produit scalaire* $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ l'application $x \mapsto \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$.

Remarque 1.0.18.
1. Il est clair, par positivité du produit scalaire, que cette application est bien définie. La racine carrée étant à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, elle est de plus à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Il reste à voir si cette application est bien une norme.

2. La norme associée à un produit scalaire dépend évidemment du produit scalaire. Par exemple sur $\mathbb{R}^2$, les normes associées respectivement au produit scalaire usuel et au produit scalaire $((x,y),(x',y')) \mapsto \frac{1}{2}xx' + 2yy'$ sont différentes (regarder par exemple les valeurs pour les vecteurs $(1,0)$ et $(0,1)$).
3. On a directement que pour une famille $(x_1,\dots,x_n)$ de vecteurs,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\|^2 &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \langle x_i \mid x_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \langle x_i \mid x_j\rangle .\end{aligned}$$

   Pour deux vecteurs, on retrouve $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2$.

Dans tout ce qui suit, sauf mention expresse du contraire, $(E, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ désigne un espace vectoriel préhilbertien, et $\|.\|$ la norme associée à son produit scalaire.

Proposition 1.0.19.
Soit $(E, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ un espace préhilbertien et $\|.\|$ la norme associée. On a
1. $\forall x \in E \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$;
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in E \qquad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

Démonstration.
1. Soit $x \in E$. On a $\|x\| = 0 \iff \langle x \mid x\rangle = 0$. $\langle\cdot \mid \cdot\rangle$ étant un produit scalaire, on a donc $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$. On a $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x \mid \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2\langle x \mid x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x \mid x\rangle}$.

□

Avec ce qui précède, il suffit maintenant de démontrer que $\|.\|$ vérifie l'inégalité triangulaire pour démontrer qu'il s'agit bien d'une norme. Pour cela, on démontre tout d'abord le théorème suivant.

Théorème 1.0.20 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.**
Soit $(E, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ un espace préhilbertien et $\|.\|$ la norme associée. Alors pour tout $(x,y) \in E^2$, on a

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| .$$

L'égalité a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration.
Soient $x, y \in E$. Pour $y = 0$ le résultat est évident. Sinon, on peut donner deux démonstrations

Géométrique Posons $u = \frac{1}{\|y\|}y$. On vérifie aisément $\|u\| = 1$. Posons alors $x' = \langle x \mid u\rangle u$ et $x'' = x - x'$ (faire un dessin). On a alors

$$\langle x' \mid x''\rangle = \langle x' \mid x\rangle - \langle x' \mid x'\rangle = \langle x \mid u\rangle^2 - \langle x \mid u\rangle^2 = 0.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \|x'\|^2 + 2\langle x' \mid x''\rangle + \|x''\|^2 \\ &= \|x'\|^2 + \|x''\|^2 \\ &\geqslant \|x'\|^2 .\end{aligned}$$

On en déduit $\|x\| . \|y\| \geqslant \|x'\| . \|y\|$. Or on a :

$$\begin{aligned}\|x'\| . \|y\| &= |\langle x \mid u\rangle| . \|y\| \\ &= |\langle x \mid y\rangle|.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Algébrique pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $\|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t\langle x \mid y\rangle + t^2\|y\|^2$. C'est un polynôme toujours positif, donc son discriminant est négatif ou nul.
Il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si ce discriminant est nul, donc si et seulement si ce polynôme a une racine réelle, donc si et seulement si il existe t tel que [à vous de l'écrire], donc si et seulement si x et y sont colinéaires.

Une idée calculatoire astucieuse Si $x = 0$ ou $y = 0$, le résultat est évident. Sinon, on remarque que $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$ et l'on écrit ($\pm$ signifie qu'on le fait pour $+$ puis pour $-$) :

$$0 \leqslant \left\|\frac{x}{\|x\|} \pm \frac{y}{\|y\|}\right\|^2 = \left\|\frac{x}{\|x\|}\right\|^2 + \left\|\frac{y}{\|y\|}\right\|^2 \pm 2\frac{\langle x \mid y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}$$

ce qui donne

$$0 \leqslant 1 \pm \frac{\langle x \mid y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}$$

et c'est fini !

□

Proposition 1.0.21 (Inégalité triangulaire)**.**
Soit $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, $x, y \in E$. Alors,

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| .$$

De plus, on a l'égalité si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens.

Démonstration.
On a $\|x+y\|^2 = \langle x+y \mid x+y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x \mid y \rangle + \|y\|^2$. Or $(\|x\| + \|y\|)^2 = \|x\|^2 + 2\|x\| . \|y\| + \|y\|^2$ et $\langle x \mid y \rangle \leqslant \|x\| . \|y\|$, donc $\|x+y\|^2 \leqslant (\|x\| + \|y\|)^2$. $\|x+y\|$ et $\|x\| + \|y\|$ étant positifs, on en déduit le résultat.

L'égalité a lieu si et seulement si $\langle x \mid y \rangle = \|x\| . \|y\|$. Pour cela, il est nécessaire d'avoir $\langle x \mid y \rangle \geqslant 0$ (car le produit de deux normes est positif ou nul) et x et y colinéaires (cas d'égalité de Cauchy-Schwarz), donc il est nécessaire que x et y soient colinéaires — l'un s'écrit comme produit de l'autre par un scalaire — et de même sens — ce scalaire est positif ou nul. Cette condition est clairement suffisante. □

Théorème 1.0.22.
Soit $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, $x, y \in E$.

1. Identité du parallélogramme :
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$
2. Identité de polarisation :
$$\begin{aligned} \langle x \mid y \rangle &= \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2). \end{aligned}$$

Remarque 1.0.23.
Faire le dessin d'un parallélogramme, on utilise le théorème d'Al-Kashi deux fois (une par hypothénuse).

Démonstration.
Il suffit de développer les normes. □

Remarque 1.0.24.
Ces identités permettent de retrouver l'expression du produit scalaire quand on ne connaît que la norme.

Exemple 1.0.25.
Existe-t-il un produit scalaire donnant la norme $\|(x,y)\|^2 = (x+y)^2 + x^2$?

2 Orthogonalité.

Soit $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un ev préhilbertien et $\| \cdot \|$ la norme associée.

2.1 Premières définitions.

Définition 2.1.1.
Soient $x, y \in E$. On dit que x est *unitaire* (ou *normé*) si $\|x\| = 1$. On dit que x et y sont *orthogonaux* et l'on note $x \perp y$ si $\langle x \mid y \rangle = 0$.

Remarque 2.1.2.
Si $x \neq 0_E$, il y a exactement deux vecteurs unitaires colinéaires à x.

Exemple 2.1.3.
• Tout vecteur est toujours orthogonal au vecteur nul.
• Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, $(1,3)$ et $(-6,2)$ sont orthogonaux.
• Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire $(x,y) \cdot (x',y') = 2xx' - xy' - x'y + 3yy'$, les vecteurs $(1,1)$ et $(2,-1)$ sont orthogonaux.

2.2 Familles orthogonales.

Définition 2.2.1.
Une famille de vecteurs est dite *orthogonale* s'ils sont 2 à 2 orthogonaux. Si les vecteurs sont de plus unitaires, la famille est dite *orthonormale* (ou *orthonormée*).

Exemple 2.2.2.
Les $f_n : x \mapsto \cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, forment une famille orthogonale pour le produit scalaire usuel de $\mathscr{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$.

Théorème 2.2.3 (Pythagore)**.**
Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille orthogonale de n vecteurs. Alors $\left\|\sum_{k=1}^{n} v_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|v_k\|^2$.

Démonstration.
On développe le produit scalaire : $\|\sum_{k=1}^{n} v_k\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle v_i \mid v_j\rangle$. □

Exemple 2.2.4.
Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, on pose $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (-5,1,1)$ et $v_3 = (-1,-16,11)$. Vérifier que la famille (v_1, v_2, v_3) est orthogonale et s'assurer que l'égalité donnée par le théorème de Pythagore est vérifiée.

Théorème 2.2.5.
Toute famille orthogonale ne comportant **aucun vecteur nul** est libre.

Démonstration.
Soient λ_k tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k = 0$. Alors pour tout i, $\left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k \mid v_i \right\rangle = 0$ or quand on développe la somme on a $\lambda_i \langle v_i \mid v_i\rangle$. □

Remarque 2.2.6.
Toute famille orthonormale est une famille orthogonale ne comportant aucun vecteur nul.

Corollaire 2.2.7.
Toute famille orthogonale ne comportant **aucun vecteur nul** et de cardinal $\dim E$ est une base de E.

Exemple 2.2.8.
$\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix}$ forment une famille orthogonale, et donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 2.2.9 (orthonormalisation de Gram–Schmidt)**.**
On suppose E euclidien de dim n. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base de E. Alors il existe une base $(v_1, \dots, v_n)$ de E telle que :

1. $(v_1, \dots, v_n)$ est orthonormale ;
2. pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathrm{Vect}(u_1, \dots u_k) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots v_k).$$

Les v_k sont uniques au signe près et on peut choisir : $v_k = \dfrac{u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k \mid v_i\rangle v_i}{\left\| u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k \mid v_i\rangle v_i \right\|}$.

Démonstration.
Explication pour le choix de v_1.
• Analyse : on suppose la famille construite jusqu'au rang k. Construisons le $k+1^{\text{e}}$ vecteur.
Il faut choisir v_{k+1} dans $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_k, u_{k+1})$: $v_{k+1} = \lambda_1 v_1 + \dots \lambda_k v_k + \mu u_{k+1}$. $\langle v_{k+1} \mid v_j\rangle = 0$ donne $\lambda_j + \mu \langle u_{k+1} \mid v_j\rangle = 0$, donc $v_{k+1} = \mu\left(-\sum_{i=1}^{k} \langle u_{k+1} \mid v_i\rangle v_i + u_{k+1}\right)$. Reste à choisir μ pour avoir $\|v_{k+1}\| = 1$ (2 choix possibles).
• Synthèse : on a vu unicité au signe près. On vérifie que les vecteurs trouvés conviennent bien. □

Exemple 2.2.10.
Orthonormaliser $(1, X, X^2)$ pour le produit scalaire de $\mathbb{R}_2[X]$, $\langle P \mid Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. On trouve (P_1, P_2, P_3), où

$$\begin{aligned} P_1 &= 1, \\ P_2 &= \frac{X - 1/2}{1/(2\sqrt{3})} &&= \sqrt{3}(2X-1), \\ P_2 &= \frac{X^2 - X + 1/6}{\|\dots\|} &&= \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1). \end{aligned}$$

Corollaire 2.2.11.
Tout espace euclidien a une base orthonormale. Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

Démonstration.
Pour l'existence, il suffit d'orthonormaliser une base quelconque.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille orthonormale de E. On peut la compléter en base de E : $(e_1, \dots, e_p, e'_{p+1}, \dots, e'_n)$.

On orthonormalise ensuite cette base : pour les p premiers vecteurs, on a à chaque fois le choix entre e_i et $-e_i$, on choisit bien entendu e_i.

On obtient donc une base orthonormée de E dont les p premiers vecteurs sont $e_1, \dots, e_p$. □

Proposition 2.2.12 (Coordonnées dans une base orthonormale)**.**
Soit E euclidien, $(v_1, \dots, v_n)$ base orthonormale de E. Alors, pour tout $x \in E$, $x = \sum_{k=1}^{n} \langle x \mid v_k \rangle v_k$.

Démonstration.
Soit $x \in E$, soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k$. Si $1 \leqslant k \leqslant n$, on a par bilinéarité du produit scalaire

$$\begin{aligned} \langle x \mid v_k \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle v_k \mid v_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{i,k} \\ &= \lambda_k. \end{aligned}$$

□

Exemple 2.2.13.
Trouver les coordonnées de $(1, -3)$ dans la base $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\right)$ (pour le produit scalaire usuel).

Exercice 2.2.14.
Exprimer la formule de la proposition 2.2.12 dans le cas où $(v_1, \dots, v_n)$ base orthogonale de E.

Proposition 2.2.15 (Expression du produit scalaire dans une base orthonormale)**.**
Soit E euclidien, $(v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormale de E. x et y de coordonnées (x_i) et (y_i) dans la base $(v_1, \dots, v_n)$. Alors $\langle x \mid y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

Corollaire 2.2.16.
Avec les mêmes notations,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Remarque 2.2.17.
Tous les produits scalaires ont la même expression «usuelle» *à condition de se placer dans une base orthonormale* ***pour ce produit scalaire.***

Remarque 2.2.18.
Ces formules d'adaptent encore dans le cas de bases orthogonales.

2.3 Sous-espaces vectoriels orthogonaux.

Définition 2.3.1.
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont des sous-espaces orthogonaux et on écrit $F \perp G$ si

$$\forall x \in F \quad \forall y \in G \qquad x \perp y.$$

Exemple 2.3.2.
Dans $\mathbb{R}^3$ avec le produit scalaire usuel, $\text{Vect}(1,-1,0) \perp \text{Vect}((1,1,0),(0,0,1))$.

Remarque 2.3.3.
Si F et G sont orthogonaux, alors ils sont en somme directe. En effet, soit alors $x \in F \cap G$. On a alors $x \perp x$, donc $\langle x \mid x \rangle = 0$, donc $x = 0$. Donc $F \cap G \subset \{ 0 \}$, d'où on déduit le résultat.

Théorème 2.3.4.
Soient F et G deux sev de dimension finies de E. On note $(f_1, \dots, f_q)$ une famille génératrice de F et $(g_1, \dots, g_p)$ une famille génératrice de G. Alors $F \perp G$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1, q]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$ on a $\langle f_i \mid g_j \rangle = 0$.

Démonstration.
($\Rightarrow$) par définition de $F \perp G$.
($\Leftarrow$) soient $f = \sum \lambda_i f_i$ et $g = \sum \mu_j g_j$. Alors $\langle f \mid g \rangle = \sum_i \sum_j \lambda_i \mu_j \langle f_i \mid g_j \rangle = 0$. □

Définition 2.3.5.
Soit X une partie (quelconque) de E. On appelle *orthogonal* de X et on noté $X^\perp$ (ou X^o) l'ensemble $\{ y \in E \mid \forall x \in X \ \ \langle x \mid y \rangle = 0 \}$.

Proposition 2.3.6.
Soit X une partie de E. Alors

1. $X^\perp$ est un sev de E ;
2. Pour toute partie Y de E telle que $X \subset Y$, on a $Y^\perp \subset X^\perp$;
3. $X \subset \left(X^\perp\right)^\perp$.

Démonstration.

1. On a $0 \in X^\perp$ car 0 est orthogonal à tout vecteur, donc à tout vecteur de X ; de plus toute combinaison linéaire de vecteurs orthogonaux à tout vecteur de X est orthogonale à tout vecteur de X.
   Sinon, il suffit de voir que
   $$X^\perp = \bigcap_{x \in X} \operatorname{Ker} \langle x \mid \cdot \rangle .$$
2. Tout élément de $Y^\perp$ est orthogonal à tout vecteur de Y, donc a fortiori à tout vecteur de X.
3. Soit x un vecteur de X. Tout vecteur de $X^\perp$ est orthogonal à tout vecteur de X, donc en particulier à x. Donc x est orthogonal à tout vecteur de $X^\perp$, donc appartient à $\left(X^\perp\right)^\perp$.

□

Remarque 2.3.7.
Il n'y a pas forcément égalité dans le dernier point. Par exemple, avec $X = \varnothing$, $(X^\perp)^\perp = \{0\}$.

Théorème 2.3.8.
Soit F un sev de E. Alors $F^\perp$ est le plus grand sous-espace vectoriel orthogonal à F (et F et $F^\perp$ sont de plus en somme directe).

Si de plus F est de dimension finie, alors $E = F \oplus F^\perp$ et $F^\perp$ est l'unique sous-espace vectoriel G vérifiant $E = F \oplus G$ et $F \perp G$. C'est pourquoi on appelle $F^\perp$ ***le*** supplémentaire orthogonal de F dans E.

Enfin, si F est de dimension finie, alors $F = (F^\perp)^\perp$.

Démonstration.
On sait déjà que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel. F et $F^\perp$ sont clairement orthogonaux (donc en somme directe) et de plus pour tout sous-espace vectoriel G tel que F et G sont orthogonaux, tout élément x de G est orthogonal à tout élément de F, donc appartient à $F^\perp$, donc $G \subset F^\perp$.

Supposons de plus que le sous-espace vectoriel F est de dimension finie. Alors F est aussi un espace vectoriel euclidien, donc possède une base orthonormale $(f_1, \dots, f_q)$.

Soit $x \in E$. Posons $y = \sum_{i=1}^{q} \langle x \mid f_i \rangle f_i$ et $z = x - y$, alors $x = y + z$ et $y \in F$. Par ailleurs, si $1 \leqslant k \leqslant q$, par bilinéarité du produit scalaire

$$\begin{aligned}
\langle z \mid f_k \rangle &= \langle x \mid f_k \rangle - \langle y \mid f_k \rangle \\
&= \langle x \mid f_k \rangle - \sum_{i=1}^{q} \langle x \mid f_i \rangle \delta_{i,k} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $z \in F^\perp$. Cela assure que $E = F \oplus F^\perp$.

Démontrons l'unicité : soit G un sev de E vérifiant $E = F \oplus G$ et $F \perp G$. Alors $G \subset F^\perp$.

Par ailleurs, soit $x \in F^\perp$. Il existe $(f, g) \in F \times G$ tel que $x = f + g$, et comme $x \in F^\perp$, $\langle x \mid f \rangle = 0$. Or $\langle x \mid f \rangle = \langle f \mid f \rangle + \langle g \mid f \rangle = \langle f \mid f \rangle$, donc $f = 0$ et $x \in G$.

On en déduit que $G = F^\perp$.

Enfin, F est un sev de E vérifiant $E = F^\perp \oplus F$ et $F^\perp \perp F$. Comme l'unicité ne fait pas intervenir l'hypothèse sur la dimension finie, on peut en déduire que $F = \left(F^\perp\right)^\perp$. □

Remarque 2.3.9 (Important)**.**
Le résultat ne se généralise pas à des sev F qui ne sont pas de dimension finie. Dans ce cas, on peut trouver des sous-espaces vectoriels F tels que F et $F^\perp$ ne soient pas supplémentaires et tels que $\left(F^\perp\right)^\perp \neq F$ (on peut même trouver F tel que $F \neq E$ et $F^\perp = \{ 0 \}$). On verra ce résultat en exercice dans le cas de $\mathbb{R}[X]$.

Exemple 2.3.10.
On pose, pour tout couple (P, Q) d'éléments de

$\mathbb{R}_2[X]$, $\langle P \mid Q\rangle = P'(1)Q'(1) + P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0)$. Vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire et trouver $\mathbb{R}_1[X]^\perp$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 2.3.11.
On considère dans $\mathbb{R}[X]$ le sev $F = \text{Vect}(1+X, 1+X^2, \dots, 1+X^n, \dots)$. On rappelle qu'un hyperplan est un sev admettant un supplémentaire de dimension 1.
On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k, \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k.$$

1. Montrer que F est un hyperplan de $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer $F^\perp$ pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}[X]$.
3. Quel résultat vrai en dimension finie est ici mis en défaut ?

2.4 Formes linéaires et hyperplans d'un espace euclidien.

Dans toute cette partie, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ désigne un espace euclidien de dimension n.

Définition 2.4.1.
Soit H un hyperplan d'un espace euclidien, alors $H^\perp$ est une droite vectorielle appelée *droite normale à H*.

Tout vecteur v vérifiant $H^\perp = \text{Vect}(v)$ est appelé *vecteur normal à H*.

Proposition 2.4.2.
Soit H un hyperplan d'un espace euclidien E, soit $v \in E$. Alors v est un vecteur normal à H si et seulement si $v \neq 0_E$ et $v \in H^\perp$.

Démonstration.
Immédiat. □

Remarque 2.4.3 (Écriture matricielle du produit scalaire)**.**
Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ base orthonormale de E, x et y des vecteurs de matrices (dans e) X et Y. Alors $\langle x \mid y\rangle = {}^tX.Y$.

2.5 Symétries et projecteurs orthogonaux.

Définition 2.5.1.
Soit F sev de dimension finie d'un espace préhilbertien E. On appelle *projection orthogonale* (resp. *symétrie orthogonale*) toute projection (resp. symétrie) sur (resp. par rapport à un) F parallèlement à $F^\perp$.

Proposition 2.5.2.
Un projecteur p est orthogonal si et seulement si $\operatorname{Im} p \perp \operatorname{Ker} p$. Une symétrie s est orthogonale si et seulement si $\operatorname{Ker}(s - \text{Id}) \perp \operatorname{Ker}(s + \text{Id})$.

Démonstration.
Direct. □

Théorème 2.5.3 (expression d'un projecteur orthogonal dans une base orthonormée)**.**
Soit F sev de dimension finie d'un espace préhilbertien E. Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une base orthonormale de F. Soit $x \in E$. Le projeté orthogonal de x sur F est $p(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x \mid f_i\rangle f_i$.

Démonstration.
Démontré dans 2.3.8 □

Exemple 2.5.4.
Déterminer la projection orthogonale (et la symétrie orthogonale) de $(2, 1)$ sur $\text{Vect}(-1, 2)$, ainsi que sur son supplémentaire orthogonal, pour le produit scalaire

$$((x_1, y_1) \mid (x_2, y_2)) = 5x_1x_2 + 2y_1x_2 + 2x_1y_2 + y_1y_2.$$

Remarque 2.5.5.
On peut ré-écrire le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt comme suit.

Avec $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, en notant p_k le projeté de e_{k+1} sur F_k, on procède comme suit.

- On renormalise e_1 pour obtenir v_1.
- Pour chaque $1 \leqslant k \leqslant p - 1$, on remarque que $e_{k+1} - p_k \in F_k^\perp$. On renormalise donc $e_k - p_k$ pour obtenir v_{k+1}.

2.6 Distance à un sous ev.

Définition 2.6.1 (distance d'un point à une partie d'un espace préhilbertien)**.**
Soit A une partie non vide de E et $x \in E$. On appelle distance de x à A et on note $\mathrm{d}(x, A)$ le réel $\inf_{a \in A} \mathrm{d}(x, a)$.

Théorème 2.6.2.
Soit F un sev de dimension finie de E. Alors la distance de x à F est atteinte en un seul point, qui est la projection orthogonale de x. De plus : $\mathrm{d}(x, F)^2 = \|x - p(x)\|^2$. En particulier $\mathrm{d}(x, F) = 0$ si et seulement si $x \in F$.

Démonstration.
Soit $f \in F$. On a la décomposition dans $F^\perp \oplus F$: $x - f = x - p(x) + p(x) - f$. On conclut en appliquant le théorème de Pythagore. □

Exemple 2.6.3.
Le minimum de la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (a, b) & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 (-a - bx + x^2)^2 \, \mathrm{d}x \end{array} \right.$$

est atteint pour $a = -1/6$ et $b = 1$ et vaut $1/180$.

2.7 Distance et projection sur un hyperplan

Dans toute cette partie, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ désigne un espace euclidien, H un hyperplan de E et u un vecteur normal à E.

Notamment, $H = \mathrm{Vect}(u)^\perp$.

Proposition 2.7.1 (voir figure 1)**.**
Soit $x \in E$, le projeté orthogonal de x sur H est

$$p(x) = x - \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u.$$

La distance de x à H est

$$d(x, H) = \frac{|\langle x, u \rangle|}{\|u\|}.$$

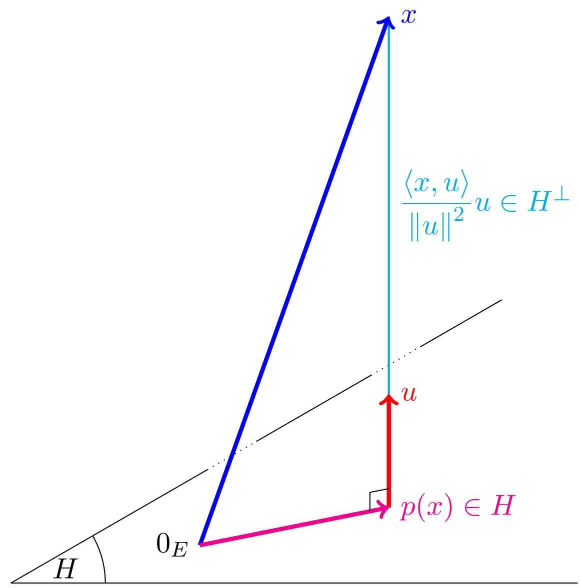

FIGURE 1 – Projection orthogonale sur un hyperplan H.

Démonstration.
Il suffit d'observer que

$$x = x - \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u + \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u$$

et que

$$\langle x - \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u, u \rangle = \langle x, u \rangle - \langle x, u \rangle = 0,$$

donc que

$$x - \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u \in H.$$

On peut aussi observer que $\frac{u}{\|u\|}$ est une b.o.n. de $H^\perp$, et donc que $\frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u$ est le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Vect}(u)$. Ainsi, $x - \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u$ est le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Vect}(u)^\perp$. □

Corollaire 2.7.2.
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une b.o.n. de E, dans laquelle on écrit

$$u = u_1 e_1 + \cdots + u_n e_n,$$
$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.$$

Alors, la distance de x à H est

$$\frac{|x_1u_1 + \cdots + x_nu_n|}{\sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}}.$$

Démonstration.
Immédiat. □