Devoir à la maison n° 2

À rendre le 21 septembre

I. Un encadrement

On désire prouver que pour tout nombre complexe z de module 1 on a :

$$\sqrt{3} \leqslant |1+z| + \left|1-z+z^2\right| \leqslant \frac{13}{4}.$$

Dans tout l'exercice z désigne donc un nombre complexe de module 1.

1) On pose $t = |1+z|$, dans quel intervalle se trouve le réel t ?

2) Exprimer $\operatorname{Re}(z)$ à l'aide de t.

3) Montrer que

$$\left|1-z+z^2\right|^2 = 3 - 4\operatorname{Re}(z) + 2\operatorname{Re}\left(z^2\right).$$

4) Exprimer $\operatorname{Re}(z^2)$ en fonction de $\operatorname{Re}(z)$ (indication : utiliser l'écriture trigonométrique). En déduire que

$$|1+z| + \left|1-z+z^2\right| = t + \left|3-t^2\right|.$$

5) En déduire l'inégalité demandée. Trouver un complexe z qui réalise le minimum.

II. L'inégalité de Cauchy-Schwarz et une application

Pour deux nombres complexes z et z' écrits sous forme algébrique $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$, on définit le produit scalaire $\langle z, z'\rangle = xx' + yy'$.

1) Pour $z \in \mathbb{C}$, que vaut $\langle z, z\rangle$?

2) Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, exprimer $\langle z, z'\rangle$ en fonction de $z\overline{z'}$.

3) En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle z, z'\rangle| \leqslant |z||z'|.$$

Soient a et b deux complexes de même module non nul r, d'arguments α et β respectivement. On note A et B les points d'affixe a et b respectivement.

4) Interpréter géométriquement les conditions $ab = r^2$ puis $ab = -r^2$.

5) On suppose désormais que $ab \neq r^2$ et $ab \neq -r^2$.

- **a)** Montrer, sans les calculer, que les complexes $z_1 = \dfrac{a+b}{r^2+ab}$ et $z_2 = \dfrac{a-b}{r^2-ab}$ sont réels.
- **b)** Exprimer $z = rz_1$ en fonction des cosinus de $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ et $\dfrac{\alpha-\beta}{2}$. Qu'en est-il de $\zeta = rz_2$?
- **c)** Prouver l'inégalité $z_1^2 + z_2^2 \geqslant \dfrac{1}{r^2}$.
- **d)** Quels sont les cas d'égalité ?

— **FIN** —