Feuille d'exercice n° 02 : **Quelques fondamentaux**

Exercice 1 La proposition $\big(P \wedge Q \Longrightarrow (\neg P) \vee Q\big)$ est-elle vraie ?

Exercice 2 Soit la propriété suivante : $P(z)$: "$|z-1| \leq 3 \Longrightarrow |z-5| \geq 1$".

1. Quel est l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z)$ soit vraie ? A-t-on : $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z)$ vraie ?
2. Mêmes questions en remplaçant $|z-5| \geq 1$ par $|z-5| > 1$ et $|z-5| \geq 2$.

Exercice 3 Dans chacun des cas suivants, comprendre le sens des deux phrases proposées et déterminer leur valeur de vérité :

1. $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N}\ n \leqslant N$ et $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ n \leqslant N$.
2. $\forall y \in \mathbb{R}_+^*\ \exists x \in \mathbb{R}\ y = \mathrm{e}^x$ et $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ y = \mathrm{e}^x$.
3. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$.
   $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ y = f(x)$ et $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ y = f(x)$.

Exercice 4 (✎) Écrire la négation des assertions suivantes où P, Q, R, S sont des propositions.

1. $P \Rightarrow Q$,
2. P et non Q,
3. P et (Q et R),
4. P ou (Q et R),
5. (P et Q) $\Rightarrow$ ($R \Rightarrow S$).

Exercice 5 (✎) Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. Quelle est la négation des propositions suivantes ?

1. $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$.
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 1$ ou $f(x) \leqslant -1$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 0$.
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y \leqslant f(x) \leqslant 2x + y$.
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ (\exists y \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant y) \Rightarrow x \leqslant 0$.

Exercice 6 Soient les quatre assertions suivantes :

(a) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\quad x + y > 0$; (b) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\quad x + y > 0$;

(c) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\quad x + y > 0$; (d) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\quad y^2 > x$.

1. Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.

Exercice 7 Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$, $\Rightarrow$.

1. $\forall x \in \mathbb{R}\ \ x^2 = 4\ \ldots\ldots\ x = 2$;
2. $\forall z \in \mathbb{C}\ \ z = \overline{z}\ \ldots\ldots\ z \in \mathbb{R}$;
3. $\forall x \in \mathbb{R}\ \ x = \pi\ \ldots\ldots\ \mathrm{e}^{2ix} = 1$.

Exercice 8 (🚲) Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. Écrire au moyen de quantificateurs les propositions suivantes :

1. f est croissante.
2. f est périodique.
3. f s'annule au plus une fois.
4. f prend au moins une fois la valeur 1.

Exercice 9 Écrire avec des quantificateurs les assertions suivantes, où u désigne une suite réelle et f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. La suite u est majorée.
2. La suite u n'est pas majorée.
3. La fonction f n'est pas paire.
4. La fonction f n'est pas bornée.

Exercice 10 **En quoi le raisonnement suivant est-il faux ?**
Soit $\mathcal{P}(n)$: n crayons de couleurs sont tous de la même couleur.

— $\mathcal{P}(1)$ est vraie car un crayon de couleur est de la même couleur que lui-même.
— Supposons $\mathcal{P}(n)$. Soit $n+1$ crayons. On en retire 1. Les n crayons restants sont de la même couleur par hypothèse de récurrence.
Reposons ce crayon et retirons-en un autre ; les n nouveaux crayons sont à nouveau de la même couleur. Le premier crayon retiré était donc bien de la même couleur que les n autres. La proposition est donc vraie au rang $n+1$.
— On a donc démontré que tous les crayons en nombre infini dénombrable sont de la même couleur.

Exercice 11 Dans un match de rugby, une équipe peut marquer 3 points (pénalité ou drop), 5 points (essai non transformé) ou 7 points (essai transformé). Quel est l'ensemble des scores possibles ?

Exercice 12 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite (on admet qu'elle existe et que la relation suivante permet bien de la définir) vérifiant : $u_0 \leqslant 1$, $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leqslant 2^n$.