Devoir surveillé n° 07

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

N'attaquez l'exercice **III** qu'après avoir traité les autres : il est difficile !

I. Vu en TD.

Soit $F = \left\{ f \in \mathscr{C}([-1,1], \mathbb{C}) \mid \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ et $G = \{ f \in \mathscr{C}([-1,1], \mathbb{C}) \mid \ f \text{ constante} \}$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{C}([-1,1], \mathbb{C})$.

II. Étude d'un endomorphisme.

On note $E = \mathscr{C}^0(]-1,+\infty[)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $I =]-1,+\infty[$. Étant donné un élément f de E, on désigne par $T(f)$ l'application de I vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in I,\ T(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1+t}\mathrm{d}t.$$

Partie 1 — Quelques exemples.

1) Déterminer l'application $T(f)$ lorsque f est l'application f_1 constante égale à $a \in \mathbb{R}$.

2) Déterminer l'application $T(f)$ lorsque f est l'application $f_2 : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R}. \\ t & \mapsto & \ln(t+1) \end{array}$

3) **a)** Déterminer l'application $T(f)$ lorsque f est l'application $f_3 : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R}. \\ t & \mapsto & \dfrac{t}{(t+2)^2} \end{array}$

b) Rappeler sans démonstration les développements limités à l'ordre 2 en 0 de $h \mapsto \ln(1+h)$ et $h \mapsto \dfrac{1}{1+h}$.

c) Donner un développement asymptotique à la précision $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ de $T(f_3)(x)$ au voisinage de $+\infty$.

4) Déterminer l'application $T(f)$ lorsque f est l'application $f_4 : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R}. \\ t & \mapsto & \dfrac{t^2}{(t^2+1)^2} \end{array}$

puis, pour tout $x > -1$, établir une relation entre $J_1(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ et $J_2(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t$.

5) Pour tout entier n non nul, on définit l'élément g_n de E par $g_n : t \mapsto t^n$. Fixons $x \in I$. Trouver une relation entre $T(g_{n+1})(x)$ et $T(g_n)(x)$ et en déduire l'expression de $T(g_n)(x)$ à l'aide d'une somme que l'on ne cherchera pas à calculer.

Partie 2 — Propriétés algébriques élémentaires de T.

6) a) Vérifier que T définit un endormorphisme de E.
   b) Déterminer le noyau de T.
   c) Déterminer l'image de T.

Partie 3 — Étude d'un exemple.

Cette partie est consacrée à l'étude de la fonction $T(f)$ lorsque $f : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R}. \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{-t} \end{array}$

Ainsi, pour tout $x \in I$, $T(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t+1}\,\mathrm{d}t$. On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.

7) Déterminer le sens des variations de la fonction $T(f)$.

8) Trouver le développement limité de $T(f)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0. Utiliser ce calcul pour en déduire l'allure locale de la courbe représentative de $T(f)$ au voisinage de 0.

9) Montrer que la fonction $T(f)$ admet une limite finie ℓ lorsque $x \to +\infty$. On ne cherchera pas à calculer cette limite.

10) Déterminer la limite de $T(f)$ lorsque $x \longrightarrow -1^+$.

11) Donner l'allure de la représentation graphique de $T(f)$ en faisant apparaître sur le dessin des résultats des questions précédentes.

Partie 4 — Comportement à l'infini.

On considère un élément $f \in E$ et on suppose que f admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque $t \to +\infty$. Nous allons étudier le comportement de la fonction $T(f)$ en $+\infty$.

12) On suppose dans cette question que $\ell = 0$.
   a) Montrer que la fonction f est bornée sur l'intervalle $J = [0, +\infty[$. On notera $M = \sup\limits_{t \in [0,+\infty[} |f(t)|$.
   b) Pour $x \geqslant 1$, on pose $\alpha(x) = \sup\{|f(t)|,\ \ln(x) \leqslant t \leqslant x\}$. Montrer que $\alpha(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
   c) Montrer que pour tout $x \geqslant 1$:
$$|T(f)(x)| \leqslant M \int_0^{\ln x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t} + \alpha(x) \int_{\ln(x)}^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t}.$$
   d) En déduire que $T(f)(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\ln x)$

13) On suppose dans cette question que $\ell \in \mathbb{R}^*$.
Trouver un équivalent simple de $T(f)(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

14) On suppose dans cette question que $\ell = +\infty$.
Montrer que $T(f)(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

15) On considère dans cette question l'élément $f : t \mapsto \mathrm{e}^t$ et donc, pour tout $x \in I$:
$$T(f)(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{t+1}\,\mathrm{d}t.$$
On ne cherchera pas à calculer cette intégrale. On note, pour $n \geqslant 2$:
$$F_n(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{(t+1)^n}\,\mathrm{d}t.$$

a) En écrivant pour $n \geqslant 2$ et $x \geqslant 0$ que $F_n(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\mathrm{e}^t}{(t+1)^n}\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{(t+1)^n}\,\mathrm{d}t$, montrer que :

$$F_n(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^{n-2}}\right)$$

b) En intégrant $F_n(x)$ par parties, montrer que $F_n(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^{n-1}}\right)$.

c) Trouver trois constantes a, b, c réelles telles qu'au voisinage de $+\infty$:

$$T(f)(x) \underset{x\to+\infty}{=} a\frac{\mathrm{e}^x}{x} + b\frac{\mathrm{e}^x}{x^2} + c\frac{\mathrm{e}^x}{x^3} + o\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^3}\right).$$

III. Fonctions à variation bornée.

Une application $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite à *variation bornée* sur $[a, b]$ s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour toute subdivision σ de $[a, b]$ (*i.e.* une famille $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ avec $a = x_0 < x_1 < \dots x_{n-1} < x_n = b$), on a

$$V_\sigma(f) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant M.$$

On note alors

$$V(a, b) = \sup \{ V_\sigma(f) \mid \sigma \text{ est une subdivision de } [a, b] \}.$$

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ à variation bornée sur $[a, b]$.

1) Soit $x \leqslant x'$ dans $[a, b]$, montrer que $f|_{[x,x']}$ est à variation bornée sur $[x, x']$.

2) Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto V(a, x)$. Montrer que g est croissante.

3) Montrer que toute fonction à variation bornée est la différence de deux fonctions croissantes. *Indice : on pourra s'intéresser à $g - f$.*

4) Montrer que toute fonction à variation bornée admet des limites à gauche et à droite en tout point de $]a, b[$.

5) Une application continue sur $[a, b]$ est-elle toujours à variation bornée ?

— **FIN** —