Devoir à la maison n° 01

À rendre le 11 septembre

I. Exercice 1

On désire prouver que pour tout nombre complexe z de module 1 on a :

$$\sqrt{3} \leqslant |1+z| + \left|1-z+z^2\right| \leqslant \frac{13}{4}.$$

Dans tout l'exercice z désigne donc un nombre complexe de module 1.

1) On pose $t = |1+z|$, dans quel intervalle se trouve le réel t ?

2) Exprimer $\mathrm{Re}(z)$ à l'aide de t.

3) Montrer que

$$\left|1-z+z^2\right|^2 = 3 - 4\,\mathrm{Re}(z) + 2\,\mathrm{Re}\left(z^2\right).$$

4) Exprimer $\mathrm{Re}(z^2)$ en fonction de $\mathrm{Re}(z)$ (indication : utiliser l'écriture trigonométrique). En déduire que

$$|1+z| + \left|1-z+z^2\right| = t + \left|3-t^2\right|.$$

5) En déduire l'inégalité demandée. Trouver un complexe z qui réalise le minimum.

II. Exercice 2

Ce sont trois questions indépendantes. Dans chacune d'elles, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

1) Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque. On construit quatre points M, N, P, Q de façon que les triangles AMB, BNC, CPD et DQA soient rectangles isocèles directs (les angles droits étant en M, N, P, Q respectivement). Exprimer les affixes m, n, p, q des points M, N, P, Q en fonction des affixes a, b, c, d des points A, B, C, D. En déduire que les segments $[MP]$ et $[NQ]$ sont perpendiculaires et de même longueur. Faire un schéma.

2) Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan, d'affixes a, b, c, d. On suppose que

$$a + ib = c + id \qquad \text{et} \qquad a + c = b + d\,.$$

Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un carré (*penser aux propriétés des diagonales* $[AC]$ *et* $[BD]$). Étudier la réciproque.

3) Soient a, b, c trois nombres complexes distincts, affixes des sommets A, B, C d'un triangle. Soit z un nombre complexe. On pose

$$f(z) = \frac{z-a}{b-c}\ ; \quad g(z) = \frac{z-b}{c-a}\ ; \quad h(z) = \frac{z-c}{a-b}\,.$$

Montrer que, si deux des trois expressions ci-dessus est imaginaire pure, alors la troisième l'est aussi. Interprétation géométrique ?

— **FIN** —