Feuille d'exercice n° 24 : **Déterminants**

Exercice 1 On pose $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Écrire $\sigma\theta$ et σ^{-1} sous forme de produits de cycles de supports disjoints.

Exercice 2 Soit $s \in \mathcal{S}_{10}$, $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 6 & 4 & 2 & 1 & 7 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.
Décomposer s en produit de cycles à supports 2 à 2 disjoints, en produit de transpositions.
Donner la signature de s

Exercice 3 Écrire la permutation $(1,2)(2,4,6,5)(1,3,7)(2,5,4)(3,5,6,1)(2,5)(1,4,6)$ sous forme d'un produit de cycles de supports disjoints.

Exercice 4 Calculer la signature des permutations suivantes : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 6 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$, $(1,3,4)(2,4,3,1)(2,3)$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Exercice 5

1. Montrer que les transpositions $(1 \quad i)$ (pour $i \in [\![2, n]\!]$) engendrent le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.
2. Montrer que les transpositions $(i \quad i+1)$ (pour $i \in [\![1, n-1]\!]$) engendrent le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.
3. Montrer que les cycles de longueur 3 engendrent $\mathfrak{A}_n$.
4. Montrer que les cycles de la forme $(1\ i\ j)$ avec $i, j \in [\![2, n]\!]$, $i \neq j$, engendrent $\mathfrak{A}_n$.
5. Montrer que les cycles de la forme $(1\ 2\ j)$ avec $j \in [\![3, n]\!]$, engendrent $\mathfrak{A}_n$.

Exercice 6 Dans chacun des cas ci-dessous, dire si l'application φ de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, est multilinéaire.

1. $\varphi\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{smallmatrix}\right)\right) = x_1 + y_2 + z_3$
2. $\varphi\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{smallmatrix}\right)\right) = x_1y_3 + y_2z_1 + z_3x_2$
3. $\varphi\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{smallmatrix}\right)\right) = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2$
4. $\varphi\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{smallmatrix}\right)\right) = x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3 + z_1z_2z_3$
5. $\varphi\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{smallmatrix}\right)\right) = x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2 + x_3y_3z_3$
6. $\varphi\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{smallmatrix}\right)\right) = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)(z_1 + z_3)$
7. $\varphi\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{smallmatrix}\right)\right) = (x_1 + 2x_2)(z_1 + z_3)$

Exercice 7 Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ anti-symétrique. Calculer $\det(A)$. Ce résultat vaut-il encore pour $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 8 — Déterminant circulant —
Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{K})^3$. On note $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$, et on considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \qquad \text{et } V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$

Calculer le produit AV, puis $\det(V)$ et $\det(AV)$, et en déduire $\det(A)$.

Exercice 9 Pour quelles valeurs de k la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & k \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? *Idem* avec $B = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 2 & -1 & k \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 10 Calculer les déterminants : $\alpha = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\beta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, $\gamma = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 8 & 0 \end{vmatrix}$.

Exercice 11 Montrer que : $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ est divisible par $(x-1)^3$.

Exercice 12 On note a, b, c [...] des réels. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & x & y & z \\ b & x & y & z \\ c & x' & y' & z' \\ d & x' & y' & z' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & a & a^2 & b+c+d \\ a & b & b^2 & c+d+a \\ a & c & c^2 & d+a+b \\ a & d & d^2 & a+b+c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a+b+c & b & b & b \\ c & a+b+c & b & b \\ c & c & a+b+c & b \\ c & c & c & a+b+c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p & 1 & & 0 \\ 1 & p & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & p \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13 Calculer les déterminants suivants, d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & & 0 \\ x & 1+x^2 & x & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & x & 1+x^2 & x \\ 0 & & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

$$B_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1 & \dots & \dots & a_1 \\ a_2 & a_2+b_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_3 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ a_n & \dots & \dots & a_n & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

Exercice 14 Soit $a_1, \ldots, a_n$ sont n réels. Calculer les déterminants :

$$S_n = \begin{vmatrix} \sin(a_1 + a_1) & \sin(a_1 + a_2) & \ldots & \sin(a_1 + a_n) \\ \sin(a_2 + a_1) & & & \vdots \\ \vdots & & & \sin(a_{n-1} + a_n) \\ \sin(a_n + a_1) & \sin(a_n + a_2) & \ldots & \sin(a_n + a_n) \end{vmatrix}$$

$$C_n = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ \cos a_1 & \ldots & \ldots & \cos a_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \cos((n-1)a_1) & \ldots & \ldots & \cos((n-1)a_n) \end{vmatrix}$$

Exercice 15 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$. On définit la matrice A_p de $\mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{R})$ par :

$$A_{n,p} = \begin{pmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \ldots & \binom{n}{p} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{2} & \ldots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & \binom{n+p}{1} & \binom{n+p}{2} & \ldots & \binom{n+p}{p} \end{pmatrix}$$

Calculer $\det A_{n,p}$.

Exercice 16 (✎🚲)

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (notée $\mathscr{C}$) est $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
   a) On appelle valeur propre de f tout scalaire λ pour lequel $f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ n'est pas injective. Déterminer toutes les valeurs propres de f en calculant un déterminant. On notera λ_1, λ_2 et λ_3 ces valeurs propres, avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
   b) Si λ est une valeur propre de f, on appelle sous-espace propre de f associé à λ le noyau de $f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Déterminer les trois sous-espaces propres de f. On appellera E_i le sous-espace propre associé à λ_i, et on le notera $E_i = \mathrm{Vect}(v_i)$, pour un vecteur v_i à déterminer.
   c) Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$. De quelle forme est-elle ?