



FIGURE 1 – Cercle trigonométrique

Soit  $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$  un repère orthonormé direct de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $M$  un point du cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  et de rayon 1. On construit les points  $H$  et  $K$ , projections orthogonales respectives de  $M$  sur les droites  $(OA)$  et  $(OB)$ , et le point  $L$ , intersection, si elle existe, de la droite  $(OM)$  et de la perpendiculaire à  $(OA)$  passant par  $A$ . On oriente la droite  $(OA)$  (resp.  $(OB)$ ,  $(OL)$ ) par le vecteur  $\overrightarrow{OA}$  (resp.  $\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OL}$ ). Si  $\alpha$  désigne une mesure de l'angle de vecteurs  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ , on sait que :

$$\cos(\alpha) = \overline{OH} \quad , \quad \sin(\alpha) = \overline{OK}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \overline{AL}$$

La tangente de  $\alpha$  est définie si et seulement si  $L$  existe, c'est-à-dire si et seulement si le point  $M$  n'est pas sur la droite  $(OB)$ .

### Angles remarquables

$\alpha$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\pi$
$\cos(\alpha)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1
$\sin(\alpha)$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\tan(\alpha)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	0

### Propriétés élémentaires

Les fonctions sin et cos sont  $2\pi$ -périodiques sur  $\mathbb{R}$ . La fonction tan est  $\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . Pour tout réel  $\alpha$  on a :

- $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
- $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin(\alpha)$
- $\cos(\pi/2 + \alpha) = -\sin(\alpha)$
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
- $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos(\alpha)$
- $\sin(\pi/2 + \alpha) = \cos(\alpha)$
- $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$
- $\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$

### Équations trigonométriques

Soient  $x$  et  $y$  deux réels. Alors :

$$\begin{aligned} \cos(x) = \cos(y) & \text{ si et seulement si } x = y \quad [2\pi] \quad \text{ou} \quad x = -y \quad [2\pi] \\ \sin(x) = \sin(y) & \text{ si et seulement si } x = y \quad [2\pi] \quad \text{ou} \quad x = \pi - y \quad [2\pi] \end{aligned}$$

Soient  $x$  et  $y$  deux réels non congrus à  $\pi/2$  modulo  $\pi$ . Alors :

$$\tan(x) = \tan(y) \quad \text{si et seulement si} \quad x = y \quad [\pi]$$

## Formulaire trigonométrique

Soient  $x$  et  $y$  deux réels. Lorsque les réels considérés sont dans les domaines de définition des fonctions mises en jeu, les formules suivantes sont valides :

- $\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$
- $\cos(x - y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y)$
- $\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \tan(y)}$
- $\cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- $\cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- $\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$
- $\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$
- $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x) = \frac{2 \tan(x)}{1 + \tan^2(x)}$
- $\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$
- $\sin(x - y) = \sin(x) \cos(y) - \cos(x) \sin(y)$
- $\tan(x - y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x) \tan(y)}$
- $\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- $\sin(x) - \sin(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- $\sin(x) \sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$
- $\tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2 \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \sin^2(x) = \frac{1 - \tan^2(x)}{1 + \tan^2(x)}$

## Équations paramétriques du cercle unité

On reprend les notations de l'introduction. Un paramétrage du cercle  $\mathcal{C}$  en coordonnées cartésiennes dans le repère  $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$  est :

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi[$$

Un paramétrage de  $\mathcal{C}$  privé du point  $D$  de coordonnées  $(-1, 0)$ , en coordonnées cartésiennes dans le repère  $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ , est :

$$\begin{cases} x = \frac{2t}{1 + t^2} \\ y = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

On trouve ce dernier paramétrage appelé paramétrage rationnel de  $\mathcal{C} \setminus \{D\}$ , en utilisant les formules trigonométriques exprimant le sinus et le cosinus du réel  $x$  en fonction de la tangente du réel  $x/2$  (lorsqu'elle existe).