Devoir à la maison n° 22

À rendre le 9 juin

La deuxième partie de ce devoir (étude plus poussée) est facultative. La troisième partie peut se traiter uniquement avec les résultats de la première partie.

Soient $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X_k \in \mathbb{C}[X]$, avec $p = \deg P$ et $q = \deg Q$. On considère :

- $D = P \wedge Q$, $d = \deg D$, $P = DP_1$ et $Q = DQ_1$;
- $E = \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ et $F = \mathbb{C}_{p+q-1}[X]$;
- $\varphi \ : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ (A,B) & \mapsto & PA + QB \end{array} \right.$;
- $\mathrm{Res}(P,Q) = \left| \begin{array}{cccccccccc} a_0 & & & & b_0 & & & & & \\ a_1 & \ddots & & & b_1 & \ddots & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & & \ddots & a_0 & b_{q-1} & & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & a_1 & b_q & & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & & & \ddots & b_0 \\ a_p & & & \vdots & & & \ddots & & & b_1 \\ & \ddots & & \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & a_p & & & & & & b_q \end{array} \right|.$

Les q premières colonnes de $\mathrm{Res}(P,Q)$ représentent les coefficients de P, les q dernières ceux de Q. Les positions non remplies correspondent à des zéros, et on a donné ici l'écriture pour $p > q$.
$\mathrm{Res}(P,Q)$ est un déterminant $(p+q) \times (p+q)$ appelé *résultant* de P et Q.
Par exemple, si $P = 1 + 2X + 3X^2$ et $Q = 4 + 5X + 6X^2 + 7X^3$,

$$\mathrm{Res}(p,Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

Première partie : résultant et polynômes premiers entre eux.

1) **a)** Déterminer une relation entre $\mathrm{Res}(P,Q)$ et $\mathrm{Res}(Q,P)$.

b) Calculer $\mathrm{Res}(P,1)$.

c) Calculer $\mathrm{Res}(\lambda P,Q)$ et $\mathrm{Res}(P,\lambda Q)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

2) **a)** Montrer que φ est linéaire. Quelles sont les dimensions de E et de F ? Que peut on en déduire quant à φ ?

b) Montrer que φ est bijective si et seulement si $D = 1$.

3) On considère $\mathscr{B} = ((1,0),(X,0),\ldots,(X^{q-1},0),(0,1),(0,X),\ldots,(0,X^{p-1}))$ la base canonique de E et $\mathscr{B}' = (1,X,\ldots,X^{p+q-1})$ la base canonique de F.

a) Écrire la matrice M de φ dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.

b) Montrer que $\mathrm{Res}(P,Q) \neq 0 \Leftrightarrow D = 1$.

Deuxième partie : étude plus poussée.

4) Soit $a \in \mathbb{C}$.

a) Soit $f_a \ : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ R & \mapsto & R \circ (X+a) \end{array} \right.$. Calculer $\det f_a$.

b) Calculer de même $\det g_a$ avec $g_a \ : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ (A,B) & \mapsto & (A\circ(X+a), B\circ(X+a)) \end{array} \right.$.

c) En étudiant $f_{-a} \circ \varphi \circ g_a$, montrer que $\mathrm{Res}(P,Q) = \mathrm{Res}(P\circ(X-a), Q\circ(X-a))$.

5) **a)** Montrer que $\mathrm{Res}(XP,Q) = (-1)^q Q(0)\mathrm{Res}(P,Q)$.

b) Montrer que $\forall a \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Res}((X-a)P,Q) = (-1)^q Q(a)\mathrm{Res}(P,Q)$.

c) En déduire que $\mathrm{Res}(P,Q) = (-1)^{pq}(a_p)^q(b_q)^p \displaystyle\prod_{k=1}^{p}\prod_{\ell=1}^{q}(\alpha_k - \beta_\ell)$ où $\alpha_1,\ldots,\alpha_p$ sont les racines complexes de P et $\beta_1,\ldots,\beta_q$ celles de Q.

6) **a)** Déterminer $\mathrm{Ker}\,\varphi$.

b) Vérifier que $\dim(\mathrm{Ker}\,\varphi) = d$.

c) Montrer que $\mathrm{Im}\,\varphi = \{R \in \mathbb{C}[X] \text{ tq } \deg R \leqslant p+q-1 \text{ et } D \text{ divise } R\}$.

Troisième partie : applications.

7) **Racine multiple :** Soit $P = X^3 + aX + b$, avec $a, b \in \mathbb{C}$. Donner une CNS sur a et b pour que P admette une racine multiple.

8) **Nombre algébrique :** En utilisant les polynômes $P(X) = X^2 - 3$ et $Q_y(X) = (y-X)^2 - 7$, déterminer un polynôme à coefficients entiers de degré 4 ayant comme racine $\sqrt{3}+\sqrt{7}$. Quelles sont les autres racines de ce polynôme ?

— **FIN** —