Feuille d'exercice n° 03 : **Sommes et calculs**

Exercice 1 (🚲) Donner une expression simplifiée des quantités suivantes :
1) $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} i.j$; 2) $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} i+j$; 3) $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} i-j$; 4) $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} \inf(i,j)$.
Même question en remplaçant $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n}$ par $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n}$ et $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n}$.

Exercice 2 En considérant $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$, calculer les sommes $\displaystyle\sum_{k\in[\![0,\mathbb{E}(\frac{n}{2})]\!]} \binom{n}{2k}$ et $\displaystyle\sum_{k\in[\![0,\mathbb{E}(\frac{n-1}{2})]\!]} \binom{n}{2k+1}$, où $\mathbb{E}(n)$ est la partie entière de n. Ces sommes sont aussi notées $\displaystyle\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \binom{n}{2k}$ et $\displaystyle\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n} \binom{n}{2k+1}$.

Exercice 3 Soient $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n \in \mathbb{C}$. Quelles sont les expressions toujours égales entre elles ?

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^n a_k b_k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^n a_{n+1-k}b_{n+1-k}$, $\displaystyle\frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^n (a_k+b_k)^2 - \sum_{k=1}^n (a_k-b_k)^2\right)$
2. $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k\right)$, $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)\left(\sum_{p=1}^n b_p\right)$, $\displaystyle\sum_{k=1}^n\sum_{p=1}^n (a_k b_p)$, $\displaystyle\sum_{k=1}^n\left(a_k\sum_{p=1}^n b_p\right)$, $\displaystyle\sum_{k=1}^n a_k b_k$

Exercice 4 Montrer que pour toute famille $(z_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{C}^n$, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^n z_k\right)^2 = \sum_{k=1}^n z_k^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} z_i z_j.$$

Quel résultat bien connu cette formule généralise-t-elle ?

Exercice 5 Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^n k.k! = (n+1)!-1$.

Exercice 6 (✎)

1. Soit $k\in\mathbb{N}$. Écrire $(1+k)^4-k^4$ sous la forme d'un polynôme de degré 3 en k.
2. En s'inspirant de la démonstration du cours donnant la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^n k^2$ calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^n k^3$ (on donnera cette valeur sous la forme la plus factorisée possible).

Exercice 7 (🚲) Écrire avec des factorielles :

1. $\displaystyle\prod_{k=n}^m k$.
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^p n-p+k$ pour $(n,p)\in\mathbb{N}^2,\ p\leq n$.

3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{p} \frac{n-p+k}{k}$ pour $n \geq 2,\ 1 \leq p \leq n-1$.

4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k}$.

Exercice 8

1. Soit z un nombre complexe différent de 1, calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} z^k$.
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k i^{k-1} = \dfrac{i - n i^n - (n+1) i^{(n+1)}}{2}$
3. En déduire les sommes
   $S_1 = 1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + (-1)^p(2p+1)$ et $S_2 = 2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + (-1)^{(p+1)} 2p$.

Exercice 9 En utilisant la fonction $x \mapsto (1+x)^n$, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

Exercice 10 Soit n un entier naturel non nul, notons $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n.$$

Exercice 11 Effectuer le produit des matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

Exercice 12 Soit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $A^n(\theta)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 13 On considère la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer M^2, M^3, M^4, M^5.

Exercice 14 Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A^2 - (a_{1,1} + a_{2,2})A + (a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1})I = 0$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible.

Exercice 15 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$, où I_3 est la matrice identité 3×3. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 16 Trouver les matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. De même avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Exercice 17 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$.

1. Calculer B^2, B^3 en déduire la valeur de B^n pour tout entier naturel n.
2. Développer $(B + I_3)^n$ par la formule du binôme et simplifier.
3. En déduire A^n pour tout entier naturel n.
4. La relation précédente est-elle aussi valable pour les entiers n négatifs ?

Exercice 18 Résoudre les systèmes suivants

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ x & + & 4y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & b \\ x & + & 2y & + & z & = & c \end{array}\right.$$

Exercice 19 Mettre sous forme matricielle et résoudre les systèmes suivants.

1. $\left\{\begin{array}{rcl} 2x + y + z & = & 3 \\ 3x - y - 2z & = & 0 \\ x + y - z & = & -2 \\ x + 2y + z & = & 1 \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{rcl} x + y + z + t & = & 1 \\ x - y + 2z - 3t & = & 2 \\ 2x + 4z + 4t & = & 3 \\ 2x + 2y + 3z + 8t & = & 2 \\ 5x + 3y + 9z + 19t & = & 6 \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{rcl} 2x + y + z + t & = & 1 \\ x + 2y + 3z + 4t & = & 2 \\ 3x - y - 3z + 2t & = & 5 \\ 5y + 9z - t & = & -6 \end{array}\right.$
4. $\left\{\begin{array}{rcl} x - y + z + t & = & 5 \\ 2x + 3y + 4z + 5t & = & 8 \\ 3x + y - z + t & = & 7 \end{array}\right.$
5. $\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 0 \\ 2x + 3y - z & = & 0 \\ 3x + y + 2z & = & 0 \end{array}\right.$

Exercice 20 Soit a un nombre réel. On étudie le système linéaire suivant :

$$\mathcal{S}_a : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 3y & - & 2z & = & 5 \\ 2x & - & y & + & az & = & 1 \end{array} \right.$$

1. En fonction des valeurs du paramètre a, déterminer si le système $\mathcal{S}_a$ peut :
   (i) n'admettre aucune solution ;
   (ii) admettre exactement une solution ;
   (iii) admettre une infinité de solutions.
2. Résoudre le système $\mathcal{S}_a$ lorsque celui-ci admet une (des) solution(s).

Exercice 21 Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels λ, a, b, c, d le système :

$$(S) \left\{ \begin{array}{lcl} (1+\lambda)x + y + z + t & = & a \\ x + (1+\lambda)y + z + t & = & b \\ x + y + (1+\lambda)z + t & = & c \\ x + y + z + (1+\lambda)t & = & d \end{array} \right.$$