Feuille d'exercice n° 13 : **Continuité**

Exercice 1 Etudier la continuité des fonctions suivantes.

1) $f : x \mapsto x + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ **2)** $g : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$

Exercice 2 Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

1) $f : x \mapsto \sin(x)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ **2)** $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)$ **3)** $h : x \mapsto \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application croissante et continue. On définit, pour tout réel x, $F(x) = \sup\{\, y \in \mathbb{R} \mid f(y) \leqslant x \,\}$.

1) F est-elle toujours définie ?

2) On prend pour cette question $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$, et $f|_{\mathbb{R}_-} = 0$. Déterminer F.

3) On prend pour cette question $f : x \mapsto \begin{cases} x-1 & \text{si } x \leqslant -1 \\ -2 & \text{si } |x| < 1 \\ 2x-4 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

Déterminer F, étudier sa continuité, continuité à droite, à gauche.

Exercice 4 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ 1/x & \text{si } x \in \mathbb{Q}\backslash\{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

2) **a)** En revenant à la définition de continuité, montrer que f est continue en 1 et en -1.

b) Soient $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Donner, en la justifiant, la valeur des quantités suivantes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

i) $f\left(a + \dfrac{1}{n}\right)$ **ii)** $f\left(a + \dfrac{\sqrt{2}}{n}\right)$ **iii)** $f\left(b + \dfrac{1}{n}\right)$ **iv)** $f\left(\dfrac{\lfloor 10^n b \rfloor}{10^n}\right)$

c) Que dire de la continuité de f en $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$?

3) À quoi ressemblerait la courbe représentative de f, vue par un myope ?

Exercice 5 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in I, f(x)^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Exercice 6 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, soit f, g définies et continues sur $[a;b]$ telles que

$$\forall x \in [a;b],\ 0 < g(x) < f(x).$$

Montrer que

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in [a;b],\ (1+\lambda)g(x) < f(x).$$

Exercice 7 Trouver toutes les fonctions vérifiant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes.

1) La fonction f est continue en 0 et $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)\cos x$.

2) La fonction f est continue et $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x+1) = f(x)$

Exercice 8 Montrer qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue, périodique et non constante possède une plus petite période (strictement positive).

Exercice 9 Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ telle que, pour tout $x, x' \in [a,b]$ avec $x \neq x'$, on a :

$$|f(x) - f(x')| < |x - x'|.$$

1) Montrer que f est continue sur $[a,b]$.

2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[a,b]$.

Exercice 10

Soit P un polynôme de degré impair et à coefficients réels. Montrer que P possède une racine réelle.

Exercice 11 Soit $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$. Soit $f,\ g \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. On suppose que

$$\forall x \in [a,b],\ \exists x' \in [a,b],\ f(x) = g(x').$$

On veut montrer que

$$\exists c \in [a,b],\ f(c) = g(c).$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \neq g(x)$.

1) Montrer qu'alors $f - g$ est de signe constant et ne s'annule pas.

2) On supppose que $f - g > 0$.

  a) Montrer que f et g possèdent chacune un maximum sur $[a,b]$. On les notera M_f et M_g.

  b) Montrer que $M_g \geqslant M_f$ et conclure.

3) Retrouver le résultat si $f - g < 0$.

Exercice 12 Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$.

1) Montrer que la fonction $g : t \mapsto f\left(t + \dfrac{b-a}{2}\right) - f(t)$ s'annule en au moins un point de $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$.

2) Application : une personne parcourt 4 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

Exercice 13 **– TVI à l'infini –**

Soit $f\ :\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue, ayant une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$. Montrer que f prend toute valeur comprise entre $f(0)$ et ℓ (ℓ exclu).

Exercice 14 Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit f et g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $[a, b]$, telles que

$$\forall x \in [a, b],\ f \circ g(x) = g \circ f(x)\ .$$

On pose $E = \{\, x \in [a, b] \mid f(x) = x \,\}$.

1) Montrer que E a une borne inférieure et une borne supérieure. On notera $\alpha = \inf E$ et $\beta = \sup E$.

2) Montrer qu'il existe une suite (α_n) d'éléments de E telle que $\alpha_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha$. On montrerait de même qu'il existe une suite (β_n) d'éléments de E telle que $\beta_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \beta$.

3) Montrer que α et β sont dans E.

4) Montrer que $g(\alpha)$ et $g(\beta)$ sont dans E.

5) Établir que $\exists x_0 \in [a, b],\ f(x_0) = g(x_0)$ (on pourra considérer la fonction $h = g - f$).