LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I.

ANNÉE 2022 - 2023

C3 : MODÉLISATION CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES COMPOSÉS DE CHAINES DE SOLIDES

TD 8 - Cinématique du solide (C3-4)

29 Novembre 2022

Compétences

- **Analyser**
  - Décrire le besoin et les exigences.
- **Modéliser**
  - Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.
  - Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides.
  - Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.

Exercice 1 : Mécanisme d'ouverture de porte en accordéon

Source : Emilien DURIF

1 Présentation et paramétrage

L'étude porte sur le dimensionnement d'un système de porte "accordéon" motorisée utilisé dans un bus. Le cahier des charges est résumé sur le diagramme d'exigence ci-dessous :

La figure 2 ci-dessous représente une porte "accordéon" motorisée.

- Le battant **1**
  - est articulé par rapport à la paroi du bus **0** en A;
  - son repère associé est : $R_1 = \left(A, \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{y}_1, \overrightarrow{z}_{0,1}\right)$;
  - son paramètre de mouvement est $\theta = \left(\overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{x}_1\right) = \left(\overrightarrow{y}_0, \overrightarrow{y}_1\right)$;
  - $\overrightarrow{BA} = a \cdot \overrightarrow{y}_1$
- Le battant **2**
  - est articulé par rapport à la chaine **3** en C et par rapport au battant **1** en B;
  - son repère associé est : $R_2 = \left(A, \overrightarrow{x}_2, \overrightarrow{y}_2, \overrightarrow{z}_{0,2}\right)$;
  - son paramètre de mouvement est $\beta = \left(\overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{x}_2\right) = \left(\overrightarrow{y}_0, \overrightarrow{y}_2\right)$;
  - $\overrightarrow{BC} = a \cdot \overrightarrow{y}_2$.
- La chaîne **3** qui est mise en mouvement par un moto-réducteur **4**. Le maillon C se déplace à vitesse notée $v(t)$.
- On considère la phase de fermeture de la porte, (à l'instant initial les points A et C sont confondus).

Q 1 : Représenter les figures planes de projection permettant de paramétrer le problème

Q 2 : Représenter sur la figure et la configuration ci-dessus les différents repères et les paramètres angulaires associés.

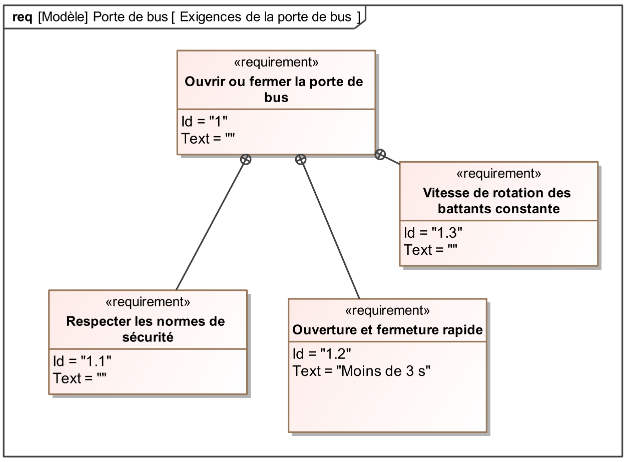


FIGURE 1 – Présentation de la problématique de l'étude.

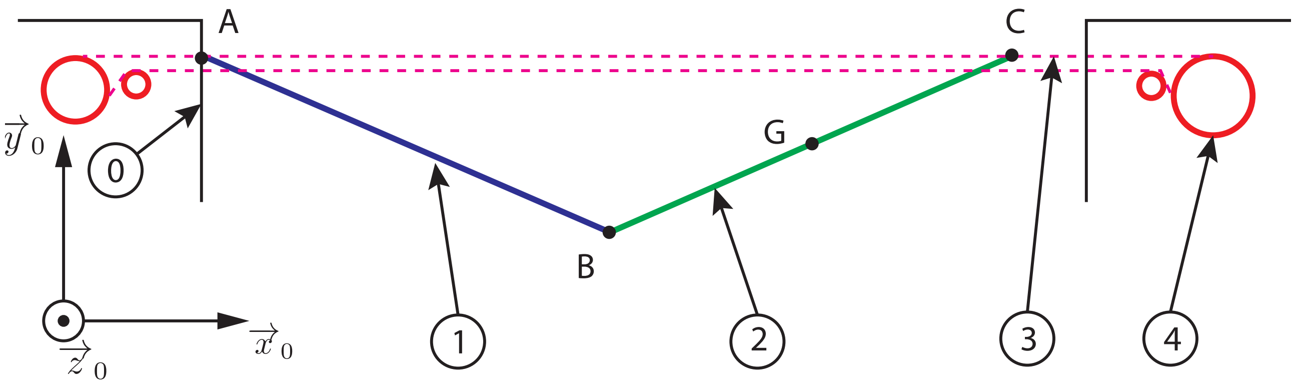


FIGURE 2 – Système d'ouverture de porte en accordéon

2 Résolution : détermination de la relation entrée-sortie du problème.

Q 3 : Quelle est la nature du mouvement du maillon de chaine 3 par rapport à la paroi du bus 0 ?

Q 4 : Caractériser ce mouvement par son torseur cinématique en fonction de v : $\left\{\mathscr{V}_{(3/0)}\right\}$ au point C puis au point B.

Q 5 : Quelle est la nature du mouvement du battant 1 par rapport à la paroi du bus 0 ?

Q 6 : Donner l'expression du torseur cinématique $\left\{\mathscr{V}_{(1/0)}\right\}$ au point A.

Q 7 : Déduire le torseur cinématique $\left\{\mathscr{V}_{(1/0)}\right\}$ au point B.

Q 8 : Calculer $\overrightarrow{V}(B \in 1/0)$ par la mécanique du point (dérivation vectorielle).

Q 9 : Déterminer le torseur cinématique $\left\{\mathscr{V}_{(2/1)}\right\}$ au point B en fonction de $\dot{\beta}$ et $\dot{\theta}$.

Q 10 : Déterminer le torseur cinématique $\left\{\mathscr{V}_{(2/3)}\right\}$ au point C puis au point B en fonction de a et $\dot{\beta}$.

Q 11 : Traduire la relation de Chasles au Point B : $\left\{\mathscr{V}_{(1/0)}\right\} = \left\{\mathscr{V}_{(1/2)}\right\} + \left\{\mathscr{V}_{(2/3)}\right\} + \left\{\mathscr{V}_{(3/0)}\right\}$.

Q 12 : En projetant la relation en vitesse issue de la question précédente en déduire deux équations scalaires.

Q 13 : A l'aide des conditions initiales lorsque la porte est ouverte ($\beta = \theta = 0$) et en intégrant par rapport au temps une des deux équations précédentes, en déduire une relation entre β et θ $\forall t$ et l'expression de $v(t)$ en fonc-

tion de θ.

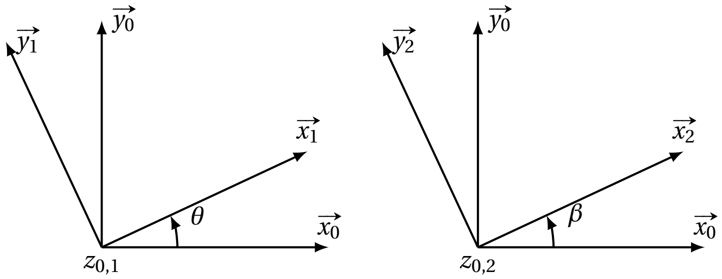
Q 14 : Déterminer numériquement l'expression de $v(t)$ pour respecter le cahier des charges (On prendra $a = 1m$).

Corrigé

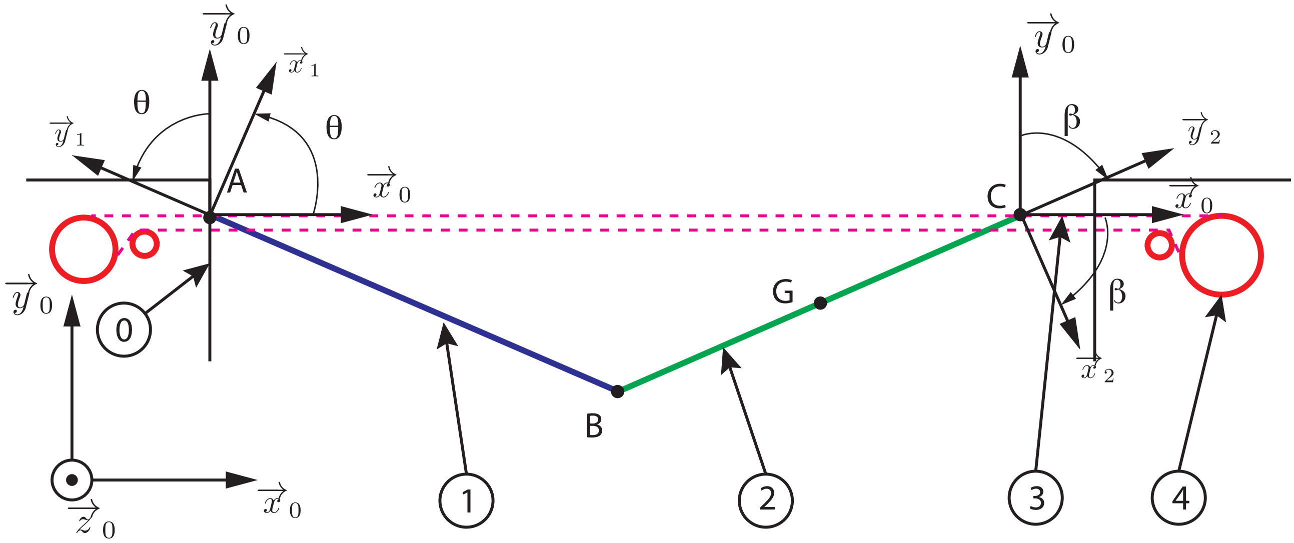
Exercice 1 : Mécanisme d'ouverture de porte en accordéon

1 Corrigé : mécanisme d'ouverture de porte en accordéon

Q 1 : Représenter les figures planes de projection permettant de paramétrer le problème



Q 2 : Représenter sur la figure et la configuration ci-dessus les différents repères et les paramètres angulaires associés.



Q 3 : Quelle est la nature du mouvement du maillon de chaine 3 par rapport à la paroi du bus 0 ?

L'orientation de la chaine 3 sur sa partie horizontale par rapport à 0 reste toujours la même, donc $\overrightarrow{\Omega}(3/0) = \overrightarrow{0}$ ainsi 3/0 est un mouvement de translation. De plus ici la translation est rectiligne dirigée par $\vec{x}_0$.

Q 4 : Caractériser ce mouvement par son torseur cinématique en fonction de v : $\left\{\mathscr{V}_{(3/0)}\right\}$ au point C puis au point B.

$$\left\{\mathscr{V}_{(3/0)}\right\} = \underset{C}{\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{(3/0)}} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V}(C \in 3/0) = v\,\overrightarrow{x_0} \end{array} \right\}} = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ v(t)\,\overrightarrow{x_0} \end{array} \right\}}$$

Q 5 : Quelle est la nature du mouvement du battant 1 par rapport à la paroi du bus 0 ?

Le battant 1 est articulé en A, son mouvement par rapport à 0 est un mouvement de rotation d'axe $\left(A, \vec{z}_{0,1}\right)$

Q 6 : Donner l'expression du torseur cinématique $\left\{\mathscr{V}_{(1/0)}\right\}$ au point A.

$$\left\{\mathscr{V}_{(1/0)}\right\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{(1/0)}} = \dot{\theta}\,\vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V}(A \in 1/0) = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}}$$

Q 7 : Déduire le torseur cinématique $\left\{\mathscr{V}_{(1/0)}\right\}$ au point B.

$$\left\{\mathscr{V}_{(1/0)}\right\} = {}_B\left\{\begin{array}{c} \dot{\theta}\overrightarrow{z}_0 \\ \overrightarrow{V}(B\in 1/0) = \overrightarrow{V}(A\in 1/0) + \overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{\Omega_{(1/0)}} = a\overrightarrow{y}_1\wedge\dot{\theta}\overrightarrow{z}_{0,1}\end{array}\right\} = {}_B\left\{\begin{array}{c}\dot{\theta}\overrightarrow{z}_0 \\ a\dot{\theta}\overrightarrow{x}_1\end{array}\right\}$$

Q 8 : Calculer $\overrightarrow{V}(B\in 1/0)$ par la mécanique du point (dérivation vectorielle).

$$\overrightarrow{V}(B\in 1/0) = \overrightarrow{V}(B/0)$$

Car $B\in 1$.
Or,

$$\overrightarrow{V}(B/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d-a\overrightarrow{y}_1}{dt}\right|_{R_0} = -a\left[\left.\frac{d\overrightarrow{y}_1}{dt}\right|_{R_1} + \overrightarrow{\Omega}(1/0)\wedge\overrightarrow{y}_1\right]$$

$$\overrightarrow{V}(B/0) = -a\left[\dot{\theta}\overrightarrow{z}_{0,1}\wedge\overrightarrow{y}_1\right] = a\dot{\theta}\overrightarrow{x}_1$$

Q 9 : Déterminer le torseur cinématique $\left\{\mathscr{V}_{(2/1)}\right\}$ au point B en fonction de $\dot{\beta}$ et $\dot{\theta}$.

$$\left\{\mathscr{V}_{(2/1)}\right\} = {}_B\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{(2/1)}} = \overrightarrow{\Omega_{(2/0)}} - \overrightarrow{\Omega_{(1/0)}} \\ \overrightarrow{V}(B\in 2/1) = \overrightarrow{0}\end{array}\right\} = {}_B\left\{\begin{array}{c}\left(\dot{\beta}-\dot{\theta}\right)\cdot\overrightarrow{z}_0 \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}$$

Q 10 : Déterminer le torseur cinématique $\left\{\mathscr{V}_{(2/3)}\right\}$ au point C puis au point B en fonction de a et $\dot{\beta}$.

Le mouvement 2/3 est un mouvement de rotation de d'axe $\left(C, \overrightarrow{z}_0\right)$ donc,

$$\left\{\mathscr{V}_{(2/3)}\right\} = {}_C\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{(2/3)}} = \overrightarrow{\Omega_{(2/0)}} - \overrightarrow{\Omega_{(3/0)}} \\ \overrightarrow{V}(C\in 2/3) = \overrightarrow{0}\end{array}\right\} = {}_C\left\{\begin{array}{c}\dot{\beta}\cdot\overrightarrow{z}_0 \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}$$

En utilisant la formule de Varignon on en déduit $\left\{\mathscr{V}_{(2/3)}\right\}$ au point B :

$$\left\{\mathscr{V}_{(2/3)}\right\} = {}_B\left\{\begin{array}{c}\dot{\beta}\cdot\overrightarrow{z}_0 \\ \overrightarrow{BC}\wedge\dot{\beta}\overrightarrow{z}_0 = a\cdot\overrightarrow{y}_2\wedge\dot{\beta}\overrightarrow{z}_{0,2}\end{array}\right\} = {}_B\left\{\begin{array}{c}\dot{\beta}\cdot\overrightarrow{z}_0 \\ a\cdot\dot{\beta}\cdot\overrightarrow{x}_2\end{array}\right\}$$

Q 11 : Traduire la relation de Chasles au Point B : $\left\{\mathscr{V}_{(1/0)}\right\} = \left\{\mathscr{V}_{(1/2)}\right\} + \left\{\mathscr{V}_{(2/3)}\right\} + \left\{\mathscr{V}_{(3/0)}\right\}$.

$$\left\{\mathscr{V}_{(1/0)}\right\} = \left\{\mathscr{V}_{(1/2)}\right\} + \left\{\mathscr{V}_{(2/3)}\right\} + \left\{\mathscr{V}_{(3/0)}\right\}$$

$$\Leftrightarrow$$

$${}_B\left\{\begin{array}{c}\dot{\theta}\overrightarrow{z}_0 \\ a\dot{\theta}\overrightarrow{x}_1\end{array}\right\} = {}_B\left\{\begin{array}{c}-\left(\dot{\beta}-\dot{\theta}\right)\cdot\overrightarrow{z}_0 \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\} + {}_B\left\{\begin{array}{c}\dot{\beta}\cdot\overrightarrow{z}_0 \\ a\cdot\dot{\beta}\cdot\overrightarrow{x}_2\end{array}\right\} + {}_B\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0} \\ v(t)\,\overrightarrow{x_0}\end{array}\right\}$$

Q 12 : En projetant la relation en vitesse issue de la question précédente en déduire deux équation scalaire.

$$\left\{\begin{array}{l} a\left(\dot{\theta}\cos\theta - \dot{\beta}\cos\beta\right) = v(t) \\ \\ a\left(\dot{\theta}\sin\theta - \dot{\beta}\sin\beta\right) = 0\end{array}\right.$$

Q 13 : A l'aide des conditions initiales lorsque la porte est ouverte ($\beta = \theta = 0$) et en intégrant par rapport au temps une des deux équations précédentes, en déduire une relation entre β et θ $\forall t$ et l'expression de $v(t)$ en fonction de θ.

On primitivant la deuxième équation en fonction du temps, on introduit une constante λ :

$$\cos\theta - \cos\beta = \lambda$$

Or dans les conditions initiales, $\beta = \theta = 0 \rightarrow \cos\theta - \cos\beta = 0$
Ainsi $\lambda = 0$ et

$$\boxed{\theta = \pm\beta}$$

On vérifie successivement les deux hypothèses :

- $\theta = \beta$:
  Dans la première équation $v(t) = 0 \;\forall\, t$ ce qui est absurde. Donc la deuxième hypothèse est la bonne
- $\theta = -\beta$ **:**

$$\boxed{v(t) = 2 \cdot a \cdot \dot{\theta} \cos\theta \;\; et \;\; \theta = -\beta}$$

Q 14 : Déterminer numériquement l'expression de $v(t)$ pour respecter le cahier des charges (On prendra $a = 1m$).

Il faut $\dot{\theta} = cte$ donc $\theta = \omega \cdot t$ avec ω une constante.
La distance d'ouverture de la porte noté $x_c(t)$ au cours du temps peut s'exprimer :

$$x_c(t) = \int_{t=0}^{t} v(t) \cdot dt = 2 \cdot a \, [\sin\theta]_{t=0}^{t} = 2 \cdot a \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

L'ouverture correspond à $x_c = 2 \cdot a$ et donc $\sin(\omega \cdot t) = 1$, d'où,

$$t = \frac{\pi}{2\omega}$$

On veut $t = 3s$, ainsi, $\omega = \frac{\pi}{6}$.
On trouve donc :

$$\boxed{v(t) = \frac{\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)}$$