Devoir à la maison n° 19

À rendre le 9 mai

I. Parties aléatoires de $\{1,\dots,n\}$

On fixe un entier $n \geqslant 2$ et on note $E = \{1,\dots,n\}$. On considère n variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ indépendantes et identiquement distribuées selon la loi de Bernoulli symétrique :

$$P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

On note A l'ensemble des $j \in E$ tels que $X_j = 1$: $A = \{\, j \in E \mid X_j = 1 \,\}$. L'ensemble A est donc un sous-ensemble aléatoire de E.
Pour un ensemble fini X, on note $|X|$ son cardinal.

1) Combien de valeurs différentes A peut-il prendre ? Déterminer la loi de A.

2) Déterminer la loi de $|A|$.

3) Soit B une variable aléatoire de même loi que A et indépendante de A.
On pourra considérer que B est construite sur des variables de Bernoulli $X'_1,\dots,X'_n$ indépendantes entre elles et des $X_1,\dots,X_n$, identiquement distribuées selon la loi de Bernoulli symétrique *(question bonus : pourquoi ?)*.
Déterminer la loi de $|A \cap B|$ et en déduire son espérance, $\mathrm{E}(|A \cap B|)$.

4) Calculer la probabilité $P(A \subset B)$.

II. Parties aléatoires de $\{1,\dots,K\}$

Soit K et n deux entiers strictements positifs, $X_0, X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi uniforme sur l'ensemble $\{1,\dots,K\}$.

1) Soit $S \subset \{1,\dots,K\}$. Donner la valeur de $P(X_0 \in S)$ en fonction de $\operatorname{Card} S$.

2) Soit $z \in \{1,\dots,K\}$. Calculer $P(X_1 \neq z,\dots,X_n \neq z)$.

3) Déterminer $\mathrm{E}\left[\operatorname{Card}\{X_1,\dots,X_n\}\right]$.
Indice : on pourra calculer $P(X_0 \notin \{X_1,\dots,X_n\})$ de deux manières, en conditionnant selon X_0 ou $\{X_1,\dots,X_n\}$, pour en déduire une expression de $\mathrm{E}\left[\operatorname{Card}\{X_1,\dots,X_n\}\right]$.

4) Déterminer un équivalent de $\mathrm{E}\left[\operatorname{Card}\{X_1,\dots,X_n\}\right]$ lorsque :

- **a)** K est fixe et $n \to +\infty$;
- **b)** n est fixe et $K \to +\infty$;
- **c)** $n = K \to +\infty$.

— **FIN** —