Devoir à la maison n° 05

À rendre le 05 novembre

Une construction de π et des fonctions circulaires (devoir initialement rédigé par C. Bertault)

Vous allez faire dans ce devoir comme si vous n'aviez jamais entendu parler du nombre π, des fonctions circulaires sinus, cosinus et tangente et de leurs réciproques arcsinus, arccosinus et arctangente. Notre objectif : construire proprement ces objets. Nous leur donnerons des noms évocateurs autres que ceux que vous connaissez : At pour Arctan, p pour π, t pour tan $\cdots$ Pourquoi cela ? Pour que vous ne soyez pas tentés d'utiliser malgré vous des propriétés que nous voulons justement ici prouver.

Vous pourrez utiliser le résultat suivant, qui sera vu plus tard dans l'année :

Théorème de la limite de la dérivée : *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que*

1) *f continue sur I*

2) *et f dérivable sur $I \setminus \{a\}$*

3) *et $f'(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.*

Alors f est dérivable en a, $f'(a) = \ell = \lim_{x\to a} f'(x)$ et f' est continue en a.

I - Construction du nombre π et de la fonction arctangente

On admet momentanément que toute fonction continue sur un intervalle y possède une primitive, ce qui sera démontré plus tard dans le chapitre sur l'intégration. On note alors At l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

1) **a)** Montrer que At est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Grâce à la fonction $x \mapsto At(x) + \dfrac{1}{x}$, montrer que At est majorée sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire l'existence et la finitude de $\lim\limits_{+\infty} At$.

On pose $p = 2 \times \lim\limits_{+\infty} At$.

2) Montrer que At est impaire.

3) Montrer que At est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\dfrac{p}{2}, \dfrac{p}{2}\right[$.

II - Construction de la fonction tangente

On note t la réciproque de At, fonction définie sur $\left]-\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right[$. On prolonge ensuite cette fonction t en une fonction p-périodique définie sur $\frac{p}{2}+p\mathbb{Z}$, toujours notée t.

1) Montrer que t est infiniment dérivable sur $\frac{p}{2}+p\mathbb{Z}$ et calculer t' en fonction de t.

2) Montrer que t est impaire.

3) Déterminer les variations et le signe de t sur $\frac{p}{2}+p\mathbb{Z}$, ainsi que ses limites aux bornes.

III - Construction des fonctions sinus et cosinus

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$s(x) = \begin{cases} \dfrac{2t\left(\frac{x}{2}\right)}{1+t^2\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si } x \not\equiv p[2p] \\ 0 & \text{si } x \equiv p[2p] \end{cases} \quad \text{et : } \quad c(x) = \begin{cases} \dfrac{1-t^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+t^2\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si } x \not\equiv p[2p] \\ -1 & \text{si } x \equiv p[2p] \end{cases}.$$

1) Montrer que s et c sont $2p$-périodiques.

2) Montrer que $s^2+c^2=1$ sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que s est impaire et que c est paire.

4) **a)** Montrer que s et c sont dérivables sur $\mathbb{R}\backslash(p+2p\mathbb{Z})$ et que sur ce domaine $s'=c$ et $c'=-s$.

b) Montrer que s et c sont continues sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire que s et c sont infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et que $s'=c$ et $c'=-s$.

5) Pour tout $u \in \mathbb{R}$, on note s_u la fonction $x \mapsto s(x+u)$ et c_u la fonction $t \mapsto c(x+u)$.

a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ fixés. Dériver la fonction $s_a c_{-b} - c_a s_{-b}$ et en déduire que $s(a+b) = s(a)c(b)+c(a)s(b)$.

b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ fixés. Démontrer que $c(a+b) = c(a)c(b) - s(a)s(b)$.

6) **a)** Montrer que $c\left(\frac{p}{2}\right) = c\left(\frac{3p}{2}\right) = 0$

b) Déterminer les variations et le signe de s et c sur $[0, 2p]$.

7) Se pencher sur la fonction $At \circ \dfrac{s}{c}$ et montrer que $t = \dfrac{s}{c}$.

Après tout ce travail, les fonctions arcsinus et arccosinus peuvent être construites comme cela a été fait au chapitre sur les fonctions usuelles.

— FIN —