Devoir à la maison n° 16

À rendre le 24 mars

1) Justifier la définition de l'application I de $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\},\ I(x) = \int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\mathrm{d}\theta.$$

2) Grâce à un ou plusieurs changements de variable, montrer que I est paire.

3) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, déterminer les racines de $X^2 - 2X\cos\theta + 1$.

4) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, décomposer le polynôme $X^4 - 2X^2\cos\theta + 1$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

5) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$. En faisant un ou plusieurs changements de variables, montrer que

$$\int_0^{2\pi} \ln(x^2 + 2x\cos(\theta/2) + 1)\mathrm{d}\theta = 2\int_\pi^{2\pi} \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\mathrm{d}\theta.$$

6) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$. Montrer que $I(x^2) = 2I(x)$, puis exprimer $I(x^{(2^n)})$ en fonction de $I(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7) Montrer que I est bornée sur $[-1/2, 1/2]$.

8) Déduire des résultats précédents la valeur de $I(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$.

9) Après avoir exprimé $I(1/x)$ en fonction de $I(x)$, déterminer la valeur de $I(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, $|x| > 1$.

10) Retrouver le résultat de la question 8 directement à l'aide des sommes de Riemann.

— FIN —