Devoir surveillé n° 04 - Résumé

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 34 points, ramené sur 5 points.
- Problèmes : chaque question sur 4 points, total sur 108 points, ramené sur 15 points, +65%.

Statistiques descriptives.

	Calculs	Problèmes	Note finale
Note maximale	32	60	19
Note minimale	10	8	5
Moyenne	$\approx 21,98$	$\approx 35,5$	$\approx 10,70$
Écart-type	$\approx 5,13$	$\approx 13,00$	$\approx 3,75$
Médiane	$21,5$	33	$9,75$

Remarques générales.

Il est extrèmement irritant de trouver (encore!) des devoirs fragmentés. N'entrelacez pas des problèmes différents, mais traitez les questions d'un même problème à la suite, éventuellement sur des copies distinctes.
Un petit florilège : « x est pair donc $x = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ », « x est pair donc $x = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ » (certes un peu mieux), « x est pair donc on peut l'écrire $x = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ » (c'est une rédaction de normand ?). Certains s'amusent encore à introduire les variables n'importe comment, ce qui est rédhibitoire pour traiter correctement les questions plus subtiles où pour s'extirper d'une situation embrouillée. Tenez vous en à « il existe » et à « pour tout », cela vous rendra service.
Il y a encore trop de conclusions non énoncées ou non encadrées.

Calculs

L'étude de la borne inférieure de B a souvent été mal faite. Commencez par faire un petit dessin, tout s'éclaircira !

Exercice I.

1 N'oubliez pas que rien n'a été supposé sur la régularité de y et de z ! C'est à vous d'en parler.
Il est impossible de dire qu'une fonction vérifie une équation différentielle sans quantifier la variable : y vérifie $(\mathscr{E})$ ssi POUR TOUT $x \in \mathbb{R}_+^*$ ...

2 Vérifiez les solutions données.

Exercice II.

La question 1.a. était utilisée à plusieurs reprises dans la suite : pensez à l'utiliser au lieu de tout redémontrer à chaque fois.

1b $x \wedge y \wedge z = 1$ n'implique pas $x \wedge y = 1$!

2a Je lis : « $u \wedge v = 1$ donc $au + bv = 1$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$. Avec $a = u$ et $b = v$, on a $u^2 + v^2 = 1$, donc $u^2 \wedge v^2 = 1$ ». Je vous rappelle que le père Noël ne passe que le 24 décembre, si vous y croyez encore. Je vous rappelle aussi que vous avez le droit d'introduire correctement vos variables et que la locution « il existe » a un sens. Elle ne sert pas qu'à faire joli ni qu'à caresser la maniaquerie de votre professeur dans le sens du poil.
J'ai vu un nombre impressionnant de réponses fantaisistes pour cette question ... de cours. C'est décevant.

2c $n|2u^2$ n'implique pas que $n|2$ ou $n|u^2$. De plus, si vous utilisez le théorème de Gauss, il ne suffit pas de dire "d'après le théorème de Gauss", il faut vérifier les hypothèses et écrire clairement la conclusion. Surtout quand le théorème de Gauss ne sert en fait à rien ...

2f La condition $z \in \mathbb{N}$ est sytématiquement oubliée.

Exercice III.

Vous ne pouvez pas comprendre les questions de cet exercice (et encore moins y répondre) si vous n'introduisez pas correctement les variables en jeu, notamment n. Certaines réponses reposent sur le fait qu'une propriété donnée est vérifiée POUR TOUT n. Se contenter d'écrire cette propriété pour n, sans jamais quantifier ni introduire n est forcément faux, et est de toute façon incompréhensible si on ne connaît pas n.
Vous avez assez souvent "deviné quels étaient les résultats, et les avaient donnés, mais sans aucune démonstration. Cela permet parfois mais rarement de glâner un petit point pour flatter votre intuition, mais souvent c'est zéro.

1a La question n'a pas toujours été bien comprise. C'était : pourquoi cette borne inférieure existe ? C'est toujours la même réponse : on a ici un ensemble non vide, minoré, de nombres réels.

1c Il est incohérent de donner une réponse dépendant de n. Vous devez introduire attentionnément n est examiner scrupuleusement ce que vous avez montré : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{1, \ldots, n\} \subset A$.

1d Vous ne pouvez passer impunément de $S_n(A)/n \leqslant S_n(B)/n$ à $\sigma(A) \leqslant \sigma(B)$ sans explications ... surtout si le n se promène sans avoir été introduit.

2c Certains ont bien remarqué que, si n est pair, $S_n(A)/n = 1/2$ et, si n est impair, $S_n(A)/n = 1/2 + 1/n$. Puis, patatras : « si n est pair, $\sigma(A) = \inf \{1/2 | n \geqslant 1\}$ » ... C'est absurde ! $\sigma(A) = \{S_\heartsuit(A)/\heartsuit | \heartsuit \geqslant 1\}$ ne dépend pas de n ...