Devoir surveillé n° 04

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

On étudie sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle (équation d'Euler)

$$x^2y'' + xy' - y = 2x\ln(x). \qquad (\mathscr{E})$$

1) Si $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, on pose $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto y(\mathrm{e}^t)$. Montrer que y est solution de $(\mathscr{E})$ si et seulement si z est solution de $(\mathscr{E}')$: $z'' - z = 2t\mathrm{e}^t$ sur $\mathbb{R}$.

2) Résoudre $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

II. Triplets pythagoriciens.

Le but de ce problème est l'étude dans $\mathbb{Z}^3$ de l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2. \qquad (\mathscr{F})$$

Les solutions de cette équations sont appelées *triplets pythagoriciens.*

Un triplet pythagoricien *primitif* est un triplet $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}$, tel que :

- (x, y, z) est solution de $(\mathscr{F})$;
- y est pair ;
- il n'existe pas d'entier naturel autre que 1 divisant x, y et z (ce qui s'écrit $x \wedge y \wedge z = 1$).

On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des triplets pythagoriciens primitifs.

On note $\mathscr{S}'$ l'ensemble des triplets de la forme $(u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$ tels que :

- $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$;
- $u \wedge v = 1$;
- $2|(u + v + 1)$.

Les questions des parties 1 et 2 sont très détaillées et doivent être bien comprises.

1) **a)** Soit $x \in \mathbb{Z}$. Montrer que si x est pair alors $4|x^2$, et que si x est impair alors $4|x^2 - 1$.

b) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ une solution de $(\mathscr{F})$. En utilisant la question précédente, montrer que x et y ne peuvent pas être tous les deux impairs. Montrer que si $(x, y, z) \in \mathscr{S}$, x est impair.

2) On veut montrer que $\mathscr{S}' \subset \mathscr{S}$.

a) Soit $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $u \wedge v = 1$. Montrer que $u^2 \wedge v^2 = 1$.

b) Soit $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, soit n un entier naturel divisant $u^2 - v^2$ et $u^2 + v^2$. Montrer qu'alors n divise $2u^2$ et $2v^2$.

c) Soit $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $u \wedge v = 1$. Déduire de ce qui précède que les seuls entiers naturels qui peuvent diviser $u^2 - v^2$ et $u^2 + v^2$ sont 1 et 2.

d) Soit $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $2|(u + v + 1)$. Montrer que u et v ne peuvent pas être tous deux impairs ou tous deux pairs.

e) En déduire, en utilisant la question **1a)**, que, si $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ vérifie $u \wedge v = 1$ et $2|(u + v + 1)$, $(u^2 - v^2) \wedge (u^2 + v^2) = 1$.

f) Montrer que $\mathscr{S}' \subset \mathscr{S}$.

3) On veut maintenant montrer l'inclusion inverse, *i.e.* $\mathscr{S} \subset \mathscr{S}'$. Soit $(x, y, z) \in \mathscr{S}$. On introduit $(x', y', z') = \left(\frac{z + x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z - x}{2}\right)$.

a) Montrer que x', y' et z' sont des entiers.

b) Vérifier que $y'^2 = x'z'$.

c) Montrer que $x' \wedge z' = 1$.

d) En déduire, en utilisant la question **3b)**, que x' et z' sont en fait des carrés, c'est-à-dire des nombres de la forme q^2, avec $q \in \mathbb{Z}$ (on pourra utiliser la décomposition en facteurs premiers de y').

e) Montrer que $(x, y, z) \in \mathscr{S}'$.

4) Donner l'ensemble des triplets pythagoriciens.

5) Dans le plan, quel est l'ensemble des points du cercle unité (de rayon 1, de centre l'origine) à coordonnées *rationnelles* ?

III. Densité de Schnirelmann.

Pour tout ensemble fini X, on note $\mathrm{Card}(X)$ son nombre d'éléments. Pour toute partie A de $\mathbb{N}$ et tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n(A) = \mathrm{Card}(A \cap \{1, 2, \cdots, n\})$$

et on appelle *densité de Schnirelmann* de A le réel

$$\sigma(A) = \inf \left\{ \frac{S_n(A)}{n} \;\middle|\; n \geqslant 1 \right\}.$$

Si A et B sont deux parties de $\mathbb{N}$, on pose

$$A + B = \{ a + b \mid a \in A \text{ et } b \in B \}.$$

1) **a)** Justifier la définition de $\sigma(A)$.

b) Que vaut $\sigma(A)$ si $1 \notin A$?

c) Sous quelle condition a-t-on $\sigma(A) = 1$?

d) Si $A \subset B$, comparer $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$.

2) Calculer $\sigma(A)$ pour les parties suivantes.

a) A est une partie finie de $\mathbb{N}$.

b) A est l'ensemble des entiers naturels impairs.

c) Si $k \geqslant 2$ est un entier fixé, A est l'ensemble des puissances k^{es} d'entiers : $A = \left\{m^k, m \in \mathbb{N}^*\right\}$.

3) Soit A et B deux parties de $\mathbb{N}$ contenant 0 et $n \geqslant 1$ un entier. En considérant

$$C = \{ n - b \mid b \in \{0, 1, \cdots, n\} \cap B \},$$

montrer que

$$S_n(A) + S_n(B) \geqslant n \Rightarrow n \in A + B$$

4) **a)** Montrer que si $\sigma(A) + \sigma(B) \geqslant 1$ alors $A + B = \mathbb{N}$.

b) Montrer que si $0 \in A$ et $\sigma(A) \geqslant \frac{1}{2}$ alors tout nombre entier est la somme de deux éléments de A.

— FIN —