



C9 : Modélisation des performances statiques des systèmes

C9-1 : Modélisation des actions mécaniques

Émilien DURIF

Lycée La Martinière Monplaisir Lyon
Classe de MPSI
23 Mai 2023



Plan

- 1 Introduction
 - Définition
 - Classification
- 2 Modélisations locale et globale d'une action mécanique due à une force
 - Modélisation locale d'une action mécanique due à une force
 - Modélisation globale d'une action mécanique due à une force
- 3 Torseurs des actions mécaniques extérieures
 - Définition du torseur
 - Propriétés
- 4 Actions mécaniques de contact
 - Actions réparties
 - Frottements et lois de Coulomb
- 5 Actions mécaniques de distance
 - Modélisation de l'action mécanique de pesanteur
 - Méthodologie pour déterminer les caractéristiques de masse d'un solide.
- 6 Actions mécaniques dues aux liaisons sans frottement
 - Cas des liaisons usuelles en 3D
 - Cas particulier du 2D



May the Fourth





Plan

- 1 Introduction
 - Définition
 - Classification
- 2 Modélisations locale et globale d'une action mécanique due à une force
 - Modélisation locale d'une action mécanique due à une force
 - Modélisation globale d'une action mécanique due à une force
- 3 Torseurs des actions mécaniques extérieures
 - Définition du torseur
 - Propriétés
- 4 Actions mécaniques de contact
 - Actions réparties
 - Frottements et lois de Coulomb
- 5 Actions mécaniques de distance
 - Modélisation de l'action mécanique de pesanteur
 - Méthodologie pour déterminer les caractéristiques de masse d'un solide.
- 6 Actions mécaniques dues aux liaisons sans frottement
 - Cas des liaisons usuelles en 3D
 - Cas particulier du 2D

Action mécanique : introduction

Action mécanique

On appelle **action mécanique** toute cause *susceptible* de mettre en mouvement, de maintenir en équilibre ou de déformer un corps. (Le mot *susceptible* n'est pas choisi au hasard car une action mécanique ne créera pas nécessairement de mouvement.)





Plan

- 1 Introduction
 - Définition
 - Classification
- 2 Modélisations locale et globale d'une action mécanique due à une force
 - Modélisation locale d'une action mécanique due à une force
 - Modélisation globale d'une action mécanique due à une force
- 3 Torseurs des actions mécaniques extérieures
 - Définition du torseur
 - Propriétés
- 4 Actions mécaniques de contact
 - Actions réparties
 - Frottements et lois de Coulomb
- 5 Actions mécaniques de distance
 - Modélisation de l'action mécanique de pesanteur
 - Méthodologie pour déterminer les caractéristiques de masse d'un solide.
- 6 Actions mécaniques dues aux liaisons sans frottement
 - Cas des liaisons usuelles en 3D
 - Cas particulier du 2D



Action mécanique : introduction

Classification

On distingue :

- Les actions mécaniques **de contact**. Le modèle associé dépendra de la nature du contact (ponctuel, linéique ou surfacique).
- Les actions mécaniques exercées à **distance** (pesanteur, champ magnétique, champ électrique, etc.).



Action mécanique : introduction

Classification

On distingue :

- Les actions mécaniques **de contact**. Le modèle associé dépendra de la nature du contact (ponctuel, linéique ou surfacique).
- Les actions mécaniques exercées **à distance** (pesanteur, champ magnétique, champ électrique, etc.).

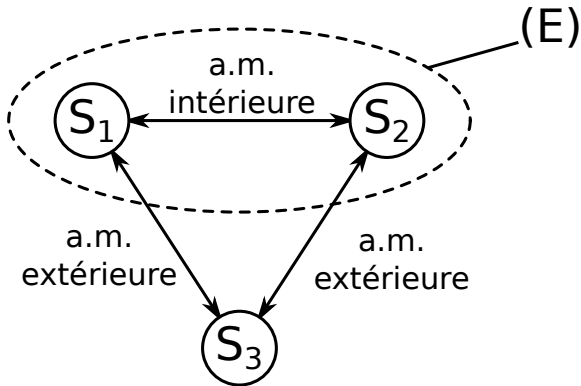


Action mécanique

Classification

On distinguera également :

- les actions mécaniques **intérieures** à un ensemble de solides.
- les actions mécaniques **extérieures** à un ensemble de solides.



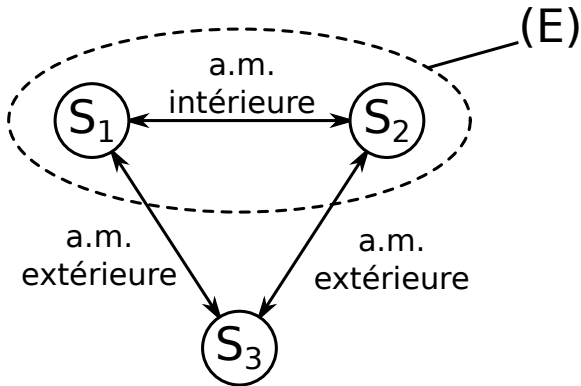


Action mécanique

Classification

On distinguera également :

- les actions mécaniques **intérieures** à un ensemble de solides.
- les actions mécaniques **extérieures** à un ensemble de solides.





Plan

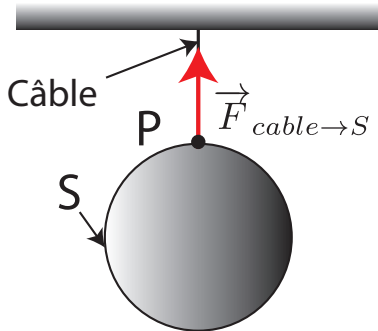
- 1 Introduction
 - Définition
 - Classification
- 2 **Modélisations locale et globale d'une action mécanique due à une force**
 - Modélisation locale d'une action mécanique due à une force
 - Modélisation globale d'une action mécanique due à une force
- 3 **Torseurs des actions mécaniques extérieures**
 - Définition du torseur
 - Propriétés
- 4 **Actions mécaniques de contact**
 - Actions réparties
 - Frottements et lois de Coulomb
- 5 **Actions mécaniques de distance**
 - Modélisation de l'action mécanique de pesanteur
 - Méthodologie pour déterminer les caractéristiques de masse d'un solide.
- 6 **Actions mécaniques dues aux liaisons sans frottement**
 - Cas des liaisons usuelles en 3D
 - Cas particulier du 2D



Action mécanique locale

Force et vecteur

- Une force est une action mécanique représentée par un vecteur.
- La notion de vecteur est insuffisante à elle seule pour représenter complètement d'autres actions mécaniques.

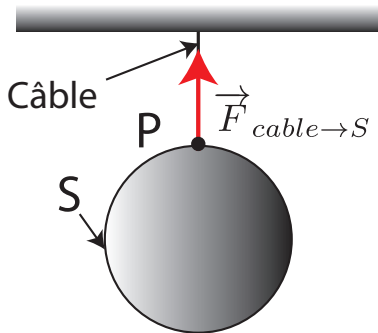




Action mécanique locale

Force et vecteur

- Une force est une action mécanique représentée par un vecteur.
- La notion de vecteur est insuffisante à elle seule pour représenter complètement d'autres actions mécaniques.





Action mécanique locale

Propriétés : Représentation d'une action mécanique

- D'un point de vue local (en un certain point de l'ensemble étudié), nous admettrons qu'une action mécanique est entièrement définie par les 4 caractéristiques suivantes :
 - sa direction,
 - son sens,
 - son intensité.
 - son point d'application
- On admet ainsi que l'on peut toujours modéliser localement une action mécanique par un **vecteur lié** (vecteur + point).
- On parle alors d'une force et de son point d'application : (\vec{F}, P) .
- La norme d'une force s'exprime en Newton (N).
- Pour une force \vec{F} de point d'application P , la droite passant par P et dirigée par \vec{F} est appelée la **droite d'action** de la force \vec{F} .



Action mécanique locale

Propriétés : Représentation d'une action mécanique

- D'un point de vue local (en un certain point de l'ensemble étudié), nous admettrons qu'une action mécanique est entièrement définie par les 4 caractéristiques suivantes :
 - sa direction,
 - son sens,
 - son intensité.
 - son point d'application
- On admet ainsi que l'on peut toujours modéliser localement une action mécanique par un **vecteur lié** (vecteur + point).
- On parle alors d'une force et de son point d'application : (\vec{F}, P) .
- La norme d'une force s'exprime en Newton (N).
- Pour une force \vec{F} de point d'application P , la droite passant par P et dirigée par \vec{F} est appelée la **droite d'action** de la force \vec{F} .



Action mécanique locale

Propriétés : Représentation d'une action mécanique

- D'un point de vue local (en un certain point de l'ensemble étudié), nous admettrons qu'une action mécanique est entièrement définie par les 4 caractéristiques suivantes :
 - sa direction,
 - son sens,
 - son intensité.
 - son point d'application
- On admet ainsi que l'on peut toujours modéliser localement une action mécanique par un **vecteur lié** (vecteur + point).
- On parle alors d'une force et de son point d'application : (\vec{F}, P) .
- La norme d'une force s'exprime en Newton (N).
- Pour une force \vec{F} de point d'application P , la droite passant par P et dirigée par \vec{F} est appelée la **droite d'action** de la force \vec{F} .



Action mécanique locale

Propriétés : Représentation d'une action mécanique

- D'un point de vue local (en un certain point de l'ensemble étudié), nous admettrons qu'une action mécanique est entièrement définie par les 4 caractéristiques suivantes :
 - sa direction,
 - son sens,
 - son intensité.
 - son point d'application
- On admet ainsi que l'on peut toujours modéliser localement une action mécanique par un **vecteur lié** (vecteur + point).
- On parle alors d'une force et de son point d'application : (\vec{F}, P) .
- La norme d'une force s'exprime en Newton (N).
- Pour une force \vec{F} de point d'application P , la droite passant par P et dirigée par \vec{F} est appelée la **droite d'action** de la force \vec{F} .



Action mécanique locale

Propriétés : Représentation d'une action mécanique

- D'un point de vue local (en un certain point de l'ensemble étudié), nous admettrons qu'une action mécanique est entièrement définie par les 4 caractéristiques suivantes :
 - sa direction,
 - son sens,
 - son intensité.
 - son point d'application
- On admet ainsi que l'on peut toujours modéliser localement une action mécanique par un **vecteur lié** (vecteur + point).
- On parle alors d'une force et de son point d'application : (\vec{F}, P) .
- La norme d'une force s'exprime en Newton (N).
- Pour une force \vec{F} de point d'application P , la droite passant par P et dirigée par \vec{F} est appelée la **droite d'action** de la force \vec{F} .



Action mécanique locale

Propriétés : Représentation d'une action mécanique

- D'un point de vue local (en un certain point de l'ensemble étudié), nous admettrons qu'une action mécanique est entièrement définie par les 4 caractéristiques suivantes :
 - sa direction,
 - son sens,
 - son intensité.
 - son point d'application
- On admet ainsi que l'on peut toujours modéliser localement une action mécanique par un **vecteur lié** (vecteur + point).
- On parle alors d'une force et de son point d'application : (\vec{F}, P) .
- La norme d'une force s'exprime en Newton (N).
- Pour une force \vec{F} de point d'application P , la droite passant par P et dirigée par \vec{F} est appelée la **droite d'action** de la force \vec{F} .



Action mécanique locale

Propriétés : Représentation d'une action mécanique

- D'un point de vue local (en un certain point de l'ensemble étudié), nous admettrons qu'une action mécanique est entièrement définie par les 4 caractéristiques suivantes :
 - sa direction,
 - son sens,
 - son intensité.
 - son point d'application
- On admet ainsi que l'on peut toujours modéliser localement une action mécanique par un **vecteur lié** (vecteur + point).
- On parle alors d'une force et de son point d'application : (\vec{F}, P) .
- La norme d'une force s'exprime en Newton (N).
- Pour une force \vec{F} de point d'application P , la droite passant par P et dirigée par \vec{F} est appelée la **droite d'action** de la force \vec{F} .



Action mécanique locale

Propriétés : Représentation d'une action mécanique

- D'un point de vue local (en un certain point de l'ensemble étudié), nous admettrons qu'une action mécanique est entièrement définie par les 4 caractéristiques suivantes :
 - sa direction,
 - son sens,
 - son intensité.
 - son point d'application
- On admet ainsi que l'on peut toujours modéliser localement une action mécanique par un **vecteur lié** (vecteur + point).
- On parle alors d'une force et de son point d'application : (\vec{F}, P) .
- La norme d'une force s'exprime en Newton (N).
- Pour une force \vec{F} de point d'application P , la droite passant par P et dirigée par \vec{F} est appelée la **droite d'action** de la force \vec{F} .



Action mécanique locale

Propriétés : Représentation d'une action mécanique

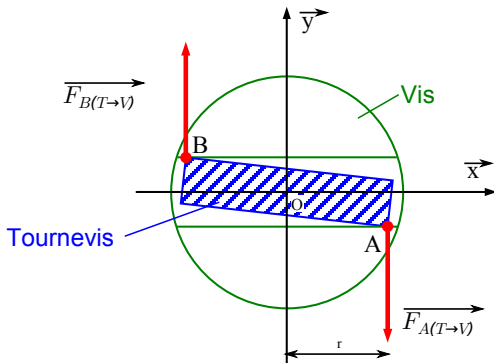
- D'un point de vue local (en un certain point de l'ensemble étudié), nous admettrons qu'une action mécanique est entièrement définie par les 4 caractéristiques suivantes :
 - sa direction,
 - son sens,
 - son intensité.
 - son point d'application
- On admet ainsi que l'on peut toujours modéliser localement une action mécanique par un **vecteur lié** (vecteur + point).
- On parle alors d'une force et de son point d'application : (\vec{F}, P) .
- La norme d'une force s'exprime en Newton (N).
- Pour une force \vec{F} de point d'application P , la droite passant par P et dirigée par \vec{F} est appelée la **droite d'action** de la force \vec{F} .



Action mécanique locale

Soit un tournevis plat (T), exerçant une action mécanique sur la tête d'une vis (V) (modélisation simplifiée).

- Au point A , l'action exercée par le tournevis sur la vis peut se modéliser par la force : $\overrightarrow{F_{A(T \rightarrow V)}} = F_A \vec{y}$ (avec $F_A < 0$)
- Au point B , l'action exercée par le tournevis sur la vis peut se modéliser par la force : $\overrightarrow{F_{B(T \rightarrow V)}} = F_B \vec{y}$ (avec $F_B > 0$)

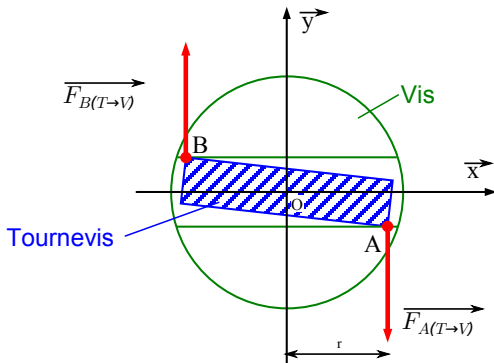




Action mécanique locale

Soit un tournevis plat (T), exerçant une action mécanique sur la tête d'une vis (V) (modélisation simplifiée).

- Au point A , l'action exercée par le tournevis sur la vis peut se modéliser par la force : $\overrightarrow{F_{A(T \rightarrow V)}} = F_A \vec{y}$ (avec $F_A < 0$)
- Au point B , l'action exercée par le tournevis sur la vis peut se modéliser par la force : $\overrightarrow{F_{B(T \rightarrow V)}} = F_B \vec{y}$ (avec $F_B > 0$)





Plan

- 1 Introduction
 - Définition
 - Classification
- 2 **Modélisations locale et globale d'une action mécanique due à une force**
 - Modélisation locale d'une action mécanique due à une force
 - Modélisation globale d'une action mécanique due à une force
- 3 **Torseurs des actions mécaniques extérieures**
 - Définition du torseur
 - Propriétés
- 4 **Actions mécaniques de contact**
 - Actions réparties
 - Frottements et lois de Coulomb
- 5 **Actions mécaniques de distance**
 - Modélisation de l'action mécanique de pesanteur
 - Méthodologie pour déterminer les caractéristiques de masse d'un solide.
- 6 **Actions mécaniques dues aux liaisons sans frottement**
 - Cas des liaisons usuelles en 3D
 - Cas particulier du 2D



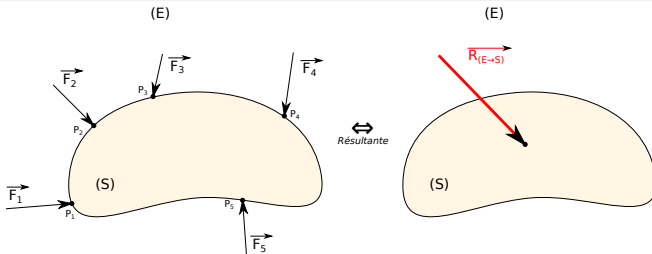
Action mécanique globale : résultante

Résultante des actions mécaniques

Soit un corps S subissant de la part d'un ensemble (E) une action mécanique modélisée localement par " n " forces $\overrightarrow{F_{i(E \rightarrow S)}}$ de points d'application P_i . On définit alors le vecteur suivant :

$$\overrightarrow{R_{(E \rightarrow S)}} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{F_{i(E \rightarrow S)}}, \quad (1)$$

appelé **résultante des actions mécaniques exercées par (E) sur (S)** .



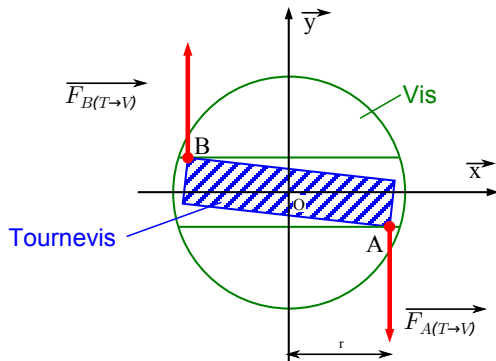


Action mécanique globale : force

Pour le tournevis :



$$\overrightarrow{R}_{(T \rightarrow V)} = \overrightarrow{F}_{A(T \rightarrow V)} + \overrightarrow{F}_{B(T \rightarrow V)}$$



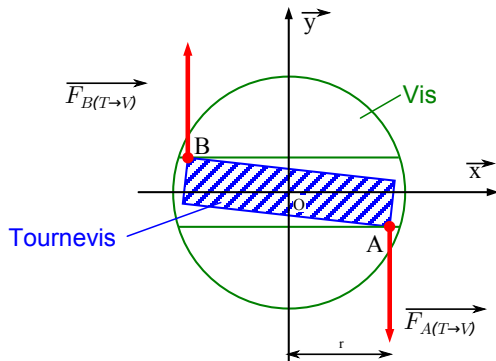


Action mécanique globale : force

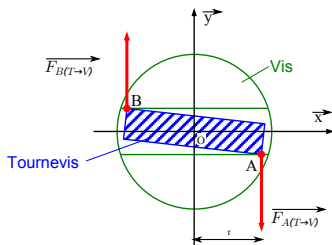
Pour le tournevis :



$$\overrightarrow{R}_{(T \rightarrow V)} = \overrightarrow{F}_{A(T \rightarrow V)} + \overrightarrow{F}_{B(T \rightarrow V)}.$$



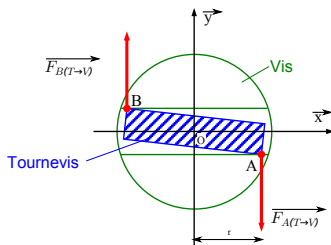
Action mécanique globale



Remarque

- Le problème précédent étant symétrique, on peut écrire $\vec{F}_{A(T \rightarrow V)} = -\vec{F}_{B(T \rightarrow V)}$
- Ce qui donne : $\vec{R}_{(T \rightarrow V)} = \vec{0}$.
- Or la vis subit pourtant bien une action mécanique globale de la part du tournevis ! (Le tournevis la fait tourner.)
- La seule donnée de la résultante des actions mécaniques n'est donc pas suffisante pour modéliser cette action.

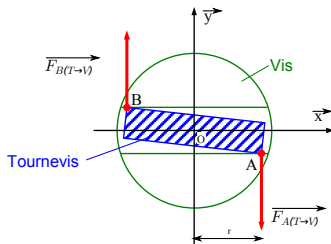
Action mécanique globale



Remarque

- Le problème précédent étant symétrique, on peut écrire $\vec{F}_{A(T \rightarrow V)} = -\vec{F}_{B(T \rightarrow V)}$.
- Ce qui donne : $\vec{R}_{(T \rightarrow V)} = \vec{0}$.
- Or la vis subit pourtant bien une action mécanique **globale** de la part du tournevis ! (Le tournevis la fait tourner.)
- La seule donnée de la résultante des actions mécaniques n'est donc **pas suffisante** pour modéliser cette action.

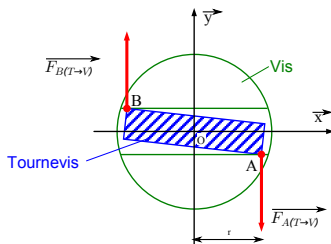
Action mécanique globale



Remarque

- Le problème précédent étant symétrique, on peut écrire $\vec{F}_{A(T \rightarrow V)} = -\vec{F}_{B(T \rightarrow V)}$.
- Ce qui donne : $\vec{R}_{(T \rightarrow V)} = \vec{0}$.
- Or la vis subit pourtant bien une action mécanique **globale** de la part du tournevis ! (Le tournevis la fait tourner.)
- La seule donnée de la résultante des actions mécaniques n'est donc **pas suffisante** pour modéliser cette action.

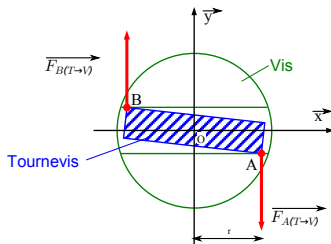
Action mécanique globale



Remarque

- Le problème précédent étant symétrique, on peut écrire $\vec{F}_{A(T \rightarrow V)} = -\vec{F}_{B(T \rightarrow V)}$.
- Ce qui donne : $\vec{R}_{(T \rightarrow V)} = \vec{0}$.
- Or la vis subit pourtant bien une action mécanique **globale** de la part du tournevis ! (Le tournevis la fait tourner.)
- La seule donnée de la résultante des actions mécaniques n'est donc **pas suffisante** pour modéliser cette action.

Action mécanique globale



Remarque

- Le problème précédent étant symétrique, on peut écrire $\overrightarrow{F_{A(T \rightarrow V)}} = -\overrightarrow{F_{B(T \rightarrow V)}}$.
- Ce qui donne : $\overrightarrow{R_{(T \rightarrow V)}} = \overrightarrow{0}$.
- Or la vis subit pourtant bien une action mécanique **globale** de la part du tournevis ! (Le tournevis la fait tourner.)
- La seule donnée de la résultante des actions mécaniques n'est donc **pas suffisante** pour modéliser cette action.



Action mécanique globale : moment

Moment d'une force (seule)

On appelle **moment en A de la force \vec{F}_i de point d'application P_i** , le vecteur

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_A(P_i, \vec{F}_i)} = \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{F}_i} \quad (2)$$

(A est un point quelconque de l'espace).

Astuce

- Le moment d'une force \vec{F} , exprimé au point A correspond à une "force de rotation" créé par \vec{F} autour du point A.
- La direction de ce vecteur correspond à l'axe autour duquel cette "force de rotation" s'applique.
- Le sens de ce vecteur est tel que cette "force de rotation" tourne dans le sens direct quand le vecteur pointe vers nous.



Action mécanique globale : moment

Moment d'une force (seule)

On appelle **moment en A de la force \vec{F}_i de point d'application P_i** , le vecteur

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_A(P_i, \vec{F}_i)} = \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{F}_i} \quad (2)$$

(A est un point quelconque de l'espace).

Astuce

- Le moment d'une force \vec{F} , exprimé au point A correspond à une "force de rotation" créé par \vec{F} autour du point A.
- La direction de ce vecteur correspond à l'axe autour duquel cette "force de rotation" s'applique.
- Le sens de ce vecteur est tel que cette "force de rotation" tourne dans le sens direct quand le vecteur pointe vers nous.



Action mécanique globale : moment

Moment d'une force (seule)

On appelle **moment en A de la force \vec{F}_i de point d'application P_i** , le vecteur

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_A(P_i, \vec{F}_i)} = \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{F}_i} \quad (2)$$

(A est un point quelconque de l'espace).

Astuce

- Le moment d'une force \vec{F} , exprimé au point A correspond à une “force de rotation” créé par \vec{F} autour du point A.
- La direction de ce vecteur correspond à l'axe autour duquel cette “force de rotation” s'applique.
- Le sens de ce vecteur est tel que cette “force de rotation” tourne dans le sens direct quand le vecteur pointe vers nous.



Action mécanique globale : moment

Moment d'une force (seule)

On appelle **moment en A de la force \vec{F}_i de point d'application P_i** , le vecteur

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_A(P_i, \vec{F}_i)} = \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{F}_i} \quad (2)$$

(A est un point quelconque de l'espace).

Astuce

- Le moment d'une force \vec{F} , exprimé au point A correspond à une “force de rotation” créé par \vec{F} autour du point A.
- La direction de ce vecteur correspond à l'axe autour duquel cette “force de rotation” s'applique.
- Le sens de ce vecteur est tel que cette “force de rotation” tourne dans le sens direct quand le vecteur pointe vers nous.



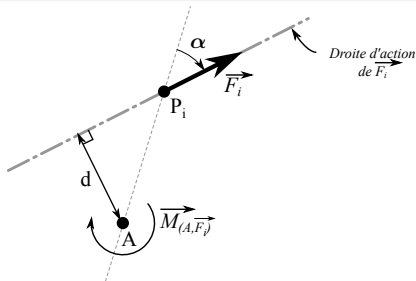
Action mécanique globale : moment

Propriétés

Soit (Δ_i) la droite d'application de la force \vec{F}_i appliquée au point P_i . On note d la distance (orthogonale) entre (Δ_i) et A et $\alpha = \left(\overrightarrow{AP_i}, \vec{F}_i \right)$. Alors :

$$\left\| \overrightarrow{\mathcal{M}_A(P_i, \vec{F}_i)} \right\| = d \left\| \vec{F}_i \right\| \quad (3)$$

La distance d est appelée **bras de levier**.



Action mécanique globale : moment

Moment résultant des actions mécaniques

Soit un corps S subissant de la part d'un ensemble (E) une action mécanique modélisée localement par " n " forces $\overrightarrow{F_{i(E \rightarrow S)}}$, de points d'application P_i . On appelle **moment résultant en A de la résultante $\overrightarrow{F_i}$** , le vecteur

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{A(E \rightarrow S)}} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{\mathcal{M}_A(P_i, \overrightarrow{F_i})} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AP_i} \wedge \overrightarrow{F_i}; \quad (4)$$

(A est un point quelconque de l'espace).



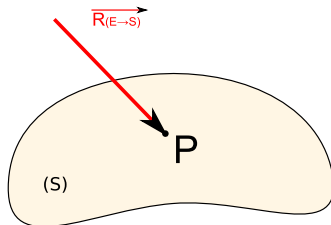
Action mécanique globale : moment

Remarque

Pour trouver le point d'application de l'effort résultant, il suffit de trouver le point P pour lequel $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{P(E \rightarrow S)} = \vec{0}$. Ainsi P , vérifie :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{P(E \rightarrow S)} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{PP_i} \wedge \vec{F}_i = \vec{0} \quad (5)$$

(E)





Plan

- 1 Introduction
 - Définition
 - Classification
- 2 Modélisations locale et globale d'une action mécanique due à une force
 - Modélisation locale d'une action mécanique due à une force
 - Modélisation globale d'une action mécanique due à une force
- 3 **Torseurs des actions mécaniques extérieures**
 - Définition du torseur
 - Propriétés
- 4 Actions mécaniques de contact
 - Actions réparties
 - Frottements et lois de Coulomb
- 5 Actions mécaniques de distance
 - Modélisation de l'action mécanique de pesanteur
 - Méthodologie pour déterminer les caractéristiques de masse d'un solide.
- 6 Actions mécaniques dues aux liaisons sans frottement
 - Cas des liaisons usuelles en 3D
 - Cas particulier du 2D



Torseurs des actions mécaniques extérieures

Torseur des actions mécaniques extérieures

Toute action mécanique peut être modélisée globalement par un torseur :

$$\left\{ \mathcal{T}_{(E \rightarrow S)} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{(E \rightarrow S)}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A(E \rightarrow S)}} \end{array} \right\} \quad (6)$$

C'est le torseur, réduit en A , des actions mécaniques exercées par (E) sur (S) .



Plan

- 1 Introduction
 - Définition
 - Classification
- 2 Modélisations locale et globale d'une action mécanique due à une force
 - Modélisation locale d'une action mécanique due à une force
 - Modélisation globale d'une action mécanique due à une force
- 3 **Torseurs des actions mécaniques extérieures**
 - Définition du torseur
 - Propriétés
- 4 Actions mécaniques de contact
 - Actions réparties
 - Frottements et lois de Coulomb
- 5 Actions mécaniques de distance
 - Modélisation de l'action mécanique de pesanteur
 - Méthodologie pour déterminer les caractéristiques de masse d'un solide.
- 6 Actions mécaniques dues aux liaisons sans frottement
 - Cas des liaisons usuelles en 3D
 - Cas particulier du 2D

Torseurs des actions mécaniques extérieures : propriétés

Formule de changement de point

$$\left\{ \mathcal{T}_{(E \rightarrow S)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{(E \rightarrow S)}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A(E \rightarrow S)}} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{(E \rightarrow S)}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{B(E \rightarrow S)}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{A(E \rightarrow S)}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_{(E \rightarrow S)}} \end{array} \right\}. \quad (7)$$

Torseurs des actions mécaniques extérieures : propriétés

Comoment de torseurs

Soit deux toseurs $\mathcal{T}^1(E \rightarrow S)$ et $\mathcal{T}^2(E \rightarrow S)$, tels que :

$$\mathcal{T}^1(E \rightarrow S) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}^1(E \rightarrow S) \\ \vec{M}_A^1(E \rightarrow S) \end{array} \right\} \text{ et } \mathcal{T}^2(E \rightarrow S) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}^2(E \rightarrow S) \\ \vec{M}_A^2(E \rightarrow S) \end{array} \right\}$$

Alors le comoment $\mathcal{T}^1(E \rightarrow S) \otimes \mathcal{T}^2(E \rightarrow S)$ s'obtient par :

$$\mathcal{T}^1(E \rightarrow S) \otimes \mathcal{T}^2(E \rightarrow S) = \vec{R}^1(E \rightarrow S) \cdot \vec{M}_A^2(E \rightarrow S) + \vec{R}^2(E \rightarrow S) \cdot \vec{M}_A^1(E \rightarrow S). \quad (8)$$

Automoment

L'**automoment** est le comoment d'un torseur par lui même et est donc le produit scalaire de sa résultante par son moment. Il est **constant**. On l'appelle "**invariant scalaire du torseur**".

$$\vec{R}(E \rightarrow S) \cdot \vec{M}_A(E \rightarrow S) = \vec{R}(E \rightarrow S) \cdot \vec{M}_B(E \rightarrow S). \quad (9)$$

Quelque soit A et B.



Torseurs des actions mécaniques extérieures : propriétés

Torseur couple

Le torseur d'action mécanique d'un ensemble matériel (E) sur un corps (S) est **un couple** s'il est de la forme :

$$\{\mathcal{T}_{(E \rightarrow S)}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A(E \rightarrow S)}} \end{array} \right\}. \quad (10)$$

avec,

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{A(E \rightarrow S)}} \neq \vec{0}.$$

Remarque

Ce torseur est **invariant**.



Torseurs des actions mécaniques extérieures : propriétés

Torseur couple

Le torseur d'action mécanique d'un ensemble matériel (E) sur un corps (S) est **un couple** s'il est de la forme :

$$\{\mathcal{T}_{(E \rightarrow S)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A(E \rightarrow S)}} \end{array} \right\}. \quad (10)$$

avec,

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{A(E \rightarrow S)}} \neq \vec{0}.$$

Remarque

Ce torseur est **invariant**.



Torseurs des actions mécaniques extérieures : propriétés

Torseur à résultante ou glisseur

Le torseur d'action mécanique d'un ensemble matériel (E) sur un corps (S) est un torseur à résultante **s'il existe au moins un point A** pour lequel il est de la forme :

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{(E \rightarrow S)}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{(E \rightarrow S)}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}} \quad (11)$$

avec,

$$\overrightarrow{R_{(E \rightarrow S)}} \neq \vec{0}.$$

et A un point de l'axe central du torseur. On appelle également ce torseur **un glisseur**.

Remarque

- Si la résultante et le moment sont orthogonaux le torseur est un glisseur.
- Si l'automoment d'un torseur est nul alors c'est un glisseur.



Torseurs des actions mécaniques extérieures : propriétés

Torseur à résultante ou glisseur

Le torseur d'action mécanique d'un ensemble matériel (E) sur un corps (S) est un torseur à résultante **s'il existe au moins un point A** pour lequel il est de la forme :

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{(E \rightarrow S)}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{(E \rightarrow S)}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}} \quad (11)$$

avec,

$$\overrightarrow{R_{(E \rightarrow S)}} \neq \vec{0}.$$

et A un point de l'axe central du torseur. On appelle également ce torseur **un glisseur**.

Remarque

- Si la **résultante** et le **moment** sont **orthogonaux** le torseur est un **glisseur**.
- Si l'**automoment** d'un torseur est **nul** alors c'est un **glisseur**.



Torseurs des actions mécaniques extérieures : propriétés

Torseur à résultante ou glisseur

Le torseur d'action mécanique d'un ensemble matériel (E) sur un corps (S) est un torseur à résultante **s'il existe au moins un point A** pour lequel il est de la forme :

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{(E \rightarrow S)}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{(E \rightarrow S)}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}} \quad (11)$$

avec,

$$\overrightarrow{R_{(E \rightarrow S)}} \neq \vec{0}.$$

et A un point de l'axe central du torseur. On appelle également ce torseur **un glisseur**.

Remarque

- Si la **résultante** et le **moment** sont **orthogonaux** le torseur est un **glisseur**.
- Si l'**automoment** d'un torseur est **nul** alors c'est un **glisseur**.



Torseurs des actions mécaniques extérieures : propriétés

Equiprojectivité

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{A(E \rightarrow S)}} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{B(E \rightarrow S)}} \cdot \overrightarrow{AB}. \quad (12)$$



Torseurs des actions mécaniques extérieures : propriétés

Axe central

- Un **point central** d'un torseur est un point où le moment résultant a même direction que la résultante générale.
- L'**axe central** d'un torseur est la droite constituée par l'ensemble des points centraux. Il a même direction que la résultante du torseur. L'axe central n'existe que si la résultante du torseur n'est pas nulle.
- La position de la projection du point A sur l'axe central (que l'on notera H) est obtenu par la relation suivante :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{\mathcal{M}}_{A(E \rightarrow S)}}{\overrightarrow{R}^2} \quad (13)$$



Torseurs des actions mécaniques extérieures : propriétés

Axe central

- Un **point central** d'un torseur est un point où le moment résultant a même direction que la résultante générale.
- L'**axe central** d'un torseur est la droite constituée par l'ensemble des points centraux. Il a même direction que la résultante du torseur. L'axe central n'existe que si la résultante du torseur n'est pas nulle.
- La position de la projection du point A sur l'axe central (que l'on notera H) est obtenu par la relation suivante :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{\mathcal{M}}_{A(E \rightarrow S)}}{\overrightarrow{R}^2} \quad (13)$$



Torseurs des actions mécaniques extérieures : propriétés

Axe central

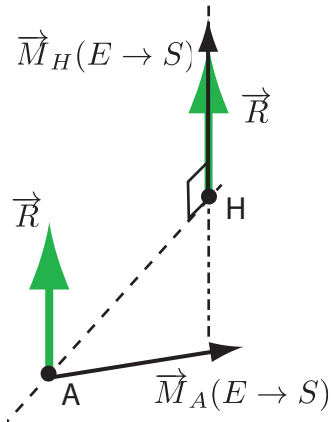
- Un **point central** d'un torseur est un point où le moment résultant a même direction que la résultante générale.
- L'**axe central** d'un torseur est la droite constituée par l'ensemble des points centraux. Il a même direction que la résultante du torseur. L'axe central n'existe que si la résultante du torseur n'est pas nulle.
- La position de la projection du point A sur l'axe central (que l'on notera H) est obtenu par la relation suivante :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{\mathcal{M}}_{A(E \rightarrow S)}}{\overrightarrow{R}^2} \quad (13)$$



Torseurs des actions mécaniques extérieures : propriétés

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{\mathcal{M}}_{A(E \rightarrow S)}}{\overrightarrow{R}^2}$$





Plan

- 1 Introduction
 - Définition
 - Classification
- 2 Modélisations locale et globale d'une action mécanique due à une force
 - Modélisation locale d'une action mécanique due à une force
 - Modélisation globale d'une action mécanique due à une force
- 3 Torseurs des actions mécaniques extérieures
 - Définition du torseur
 - Propriétés
- 4 Actions mécaniques de contact
 - Actions réparties
 - Frottements et lois de Coulomb
- 5 Actions mécaniques de distance
 - Modélisation de l'action mécanique de pesanteur
 - Méthodologie pour déterminer les caractéristiques de masse d'un solide.
- 6 Actions mécaniques dues aux liaisons sans frottement
 - Cas des liaisons usuelles en 3D
 - Cas particulier du 2D

Actions mécaniques de contact : actions réparties

- La notions “d'action mécanique ponctuelle” n'existe pas dans le réel.
- Elles sont en réalité réparties sur une surface, ou sur un volume.
- Les contacts entre solides sont en réalité surfaciques ou linéiques.
- Mais on peut représenter localement en chaque point de la surface une action mécanique locale appliquée à un élément de surface infiniment petit.

Actions mécaniques de contact : actions réparties

- La notions “d'action mécanique ponctuelle” n'existe pas dans le réel.
- Elles sont en réalité réparties sur une surface, ou sur un volume.
- Les contacts entre solides sont en réalité surfaciques ou linéiques.
- Mais on peut représenter localement en chaque point de la surface une action mécanique locale appliquée à un élément de surface infiniment petit.



Actions mécaniques de contact : actions réparties

- La notions “d'action mécanique ponctuelle” n'existe pas dans le réel.
- Elles sont en réalité réparties sur une surface, ou sur un volume.
- Les contacts entre solides sont en réalité surfaciques ou linéiques.
- Mais on peut représenter localement en chaque point de la surface une action mécanique locale appliquée à un élément de surface infiniment petit.



Actions mécaniques de contact : actions réparties

- La notions “d'action mécanique ponctuelle” n'existe pas dans le réel.
- Elles sont en réalité réparties sur une surface, ou sur un volume.
- Les contacts entre solides sont en réalité surfaciques ou linéiques.
- Mais on peut représenter localement en chaque point de la surface une action mécanique locale appliquée à un élément de surface infiniment petit.

Diagram illustrating the decomposition of contact forces between two solids S_1 and S_2 .

The main part shows two overlapping surfaces, S_1 (bottom) and S_2 (top), with a contact area S . A red vector $\vec{R}(S_1 \rightarrow S_2)$ represents the total contact force, which is decomposed into a normal component $\vec{N}(S_1 \rightarrow S_2)$ (green) and a tangential component $\vec{T}(S_1 \rightarrow S_2)$ (green). The angle between the surfaces is labeled π .

A dashed line labeled "Zoom" leads to a magnified view of the contact area S . This view shows the surface S as a collection of small elements ds , each with a normal vector $\vec{n}_p(S_1 \rightarrow S_2)$ (green) and a tangential vector $\vec{t}_p(S_1 \rightarrow S_2)$ (green). The total force vector $\vec{f}_p(S_1 \rightarrow S_2)$ is shown as the resultant of these local forces.

Surface S de contact entre les deux solides

Surface élémentaire ds , infiniment petite, centrée sur P .



Actions mécaniques de contact : actions réparties

Densité surfacique d'effort et torseur d'action mécanique répartie

- L'action mécanique élémentaire de S_1 sur S_2 se caractérise en chaque point P de la surface de contact S par un vecteur :

$$\overrightarrow{f_{P(S_1 \rightarrow S_2)}} \quad (14)$$

appelé "*densité surfacique d'effort*" au point P de S_1 sur S_2 .

- $\overrightarrow{f_{P(S_1 \rightarrow S_2)}}$ est homogène à une force par unité de surface (homogène à une pression).
- Pour rappel :
 - Pour rappel, une pression s'exprime en Pa ($= N \cdot m^{-2}$).
 - On utilisera aussi le MPa ($= N \cdot mm^{-2}$).
 - On rappelle aussi que $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$.

Actions mécaniques de contact : actions réparties

Densité surfacique d'effort et torseur d'action mécanique répartie

- L'action mécanique élémentaire de S_1 sur S_2 se caractérise en chaque point P de la surface de contact S par un vecteur :

$$\overrightarrow{f_{P(S_1 \rightarrow S_2)}} \quad (14)$$

appelé "*densité surfacique d'effort*" au point P de S_1 sur S_2 .

- $\overrightarrow{f_{P(S_1 \rightarrow S_2)}}$ est homogène à une force par unité de surface (homogène à une pression).
- Pour rappel :
 - Pour rappel, une pression s'exprime en Pa ($= N \cdot m^{-2}$).
 - On utilisera aussi le MPa ($= N \cdot mm^{-2}$).
 - On rappelle aussi que 1 bar $= 10^5$ Pa.



Actions mécaniques de contact : actions réparties

Densité surfacique d'effort et torseur d'action mécanique répartie

- L'action mécanique élémentaire de S_1 sur S_2 se caractérise en chaque point P de la surface de contact S par un vecteur :

$$\overrightarrow{f_{P(S_1 \rightarrow S_2)}} \quad (14)$$

appelé "*densité surfacique d'effort*" au point P de S_1 sur S_2 .

- $\overrightarrow{f_{P(S_1 \rightarrow S_2)}}$ est homogène à une force par unité de surface (homogène à une pression).
- Pour rappel :
 - Pour rappel, une pression s'exprime en $Pa (= N \cdot m^{-2})$.
 - On utilisera aussi le $MPa (= N \cdot mm^{-2})$.
 - On rappelle aussi que $1bar = 10^5 Pa$.



Actions mécaniques de contact : actions réparties

Densité surfacique d'effort et torseur d'action mécanique répartie

- L'action mécanique élémentaire de S_1 sur S_2 se caractérise en chaque point P de la surface de contact S par un vecteur :

$$\boxed{\overrightarrow{f_{P(S_1 \rightarrow S_2)}}} \quad (14)$$

appelé "*densité surfacique d'effort*" au point P de S_1 sur S_2 .

- $\overrightarrow{f_{P(S_1 \rightarrow S_2)}}$ est homogène à une force par unité de surface (homogène à une pression).
- Pour rappel :
 - Pour rappel, une pression s'exprime en $Pa (= N \cdot m^{-2})$.
 - On utilisera aussi le $MPa (= N \cdot mm^{-2})$.
 - On rappelle aussi que $1bar = 10^5 Pa$.



Actions mécaniques de contact : actions réparties

Densité surfacique d'effort et torseur d'action mécanique répartie

- L'action mécanique élémentaire de S_1 sur S_2 se caractérise en chaque point P de la surface de contact S par un vecteur :

$$\overrightarrow{f_{P(S_1 \rightarrow S_2)}} \quad (14)$$

appelé "*densité surfacique d'effort*" au point P de S_1 sur S_2 .

- $\overrightarrow{f_{P(S_1 \rightarrow S_2)}}$ est homogène à une force par unité de surface (homogène à une pression).
- Pour rappel :
 - Pour rappel, une pression s'exprime en $Pa (= N \cdot m^{-2})$.
 - On utilisera aussi le $MPa (= N \cdot mm^{-2})$.
 - On rappelle aussi que $1bar = 10^5 Pa$.



Actions mécaniques de contact : actions réparties

Densité surfacique d'effort et torseur d'action mécanique répartie

On définit alors complètement l'action mécanique de contact de S_1 sur S_2 par le torseur suivant :

$$\left\{ \mathcal{T}_{(S_1 \rightarrow S_2)} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \int_{P \in S} \overrightarrow{f_{P(S_1 \rightarrow S_2)}} ds \\ \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{f_{P(S_1 \rightarrow S_2)}} ds \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{(S_1 \rightarrow S_2)}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A(S_1 \rightarrow S_2)}} \end{array} \right\} \quad (15)$$

appelé torseur d'action mécanique de contact de S_1 sur S_2 .



Actions mécaniques de contact : actions réparties

Décomposition de la densité surfacique d'efforts

- Soit (π) le plan tangent commun à S_1 et à S_2 en P , de normal \vec{n} . On décompose alors :

$$\overrightarrow{f_{P(S_1 \rightarrow S_2)}} = \underbrace{\overrightarrow{n_{P(S_1 \rightarrow S_2)}}}_{\perp \pi} + \underbrace{\overrightarrow{t_{P(S_1 \rightarrow S_2)}}}_{// \pi} \quad (16)$$

- $\overrightarrow{n_{P(S_1 \rightarrow S_2)}}$ est appelé **densité surfacique normale** ou **pression** au point P , des forces de contact de S_1 sur S_2 .

$$\overrightarrow{n_{P(S_1 \rightarrow S_2)}} = \left(\overrightarrow{f_{P(S_1 \rightarrow S_2)}} \cdot \vec{n} \right) \cdot \vec{n} \quad (17)$$

- $\overrightarrow{t_{P(S_1 \rightarrow S_2)}}$ est appelé **densité surfacique tangentielle** au point P , des forces de contact de S_1 sur S_2 .

$$\overrightarrow{t_{P(S_1 \rightarrow S_2)}} = \overrightarrow{f_{P(S_1 \rightarrow S_2)}} - \overrightarrow{n_{P(S_1 \rightarrow S_2)}} \quad (18)$$

Actions mécaniques de contact : actions réparties

Décomposition de la densité surfacique d'efforts

- Soit (π) le plan tangent commun à S_1 et à S_2 en P , de normal \vec{n} . On décompose alors :

$$\overrightarrow{f_{p(S_1 \rightarrow S_2)}} = \underbrace{\overrightarrow{n_{p(S_1 \rightarrow S_2)}}}_{\perp \pi} + \underbrace{\overrightarrow{t_{p(S_1 \rightarrow S_2)}}}_{// \pi}. \quad (16)$$

- $\overrightarrow{n_{P(S_1 \rightarrow S_2)}}$ est appelé **densité surfacique normale** ou **pression** au point P , des forces de contact de S_1 sur S_2 .

$$\overrightarrow{n_{p(s_1 \rightarrow s_2)}} = \left(\overrightarrow{f_{p(s_1 \rightarrow s_2)}} \cdot \vec{n} \right) \cdot \vec{n}. \quad (17)$$

Lorsque ce sera possible (i.e. toute la surface (S) de contact est un plan π), on pourra aussi décomposer la résultante du torseur d'action mécanique de contact comme suit :

- $\overrightarrow{N_{S_1 \rightarrow S_2}}$ est l'effort résultant normal,
- $\overrightarrow{T_{S_1 \rightarrow S_2}}$ est l'effort résultant tangentiel.



Actions mécaniques de contact : actions réparties

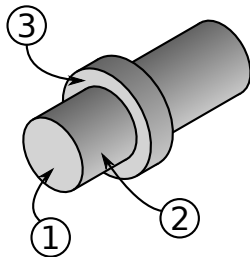
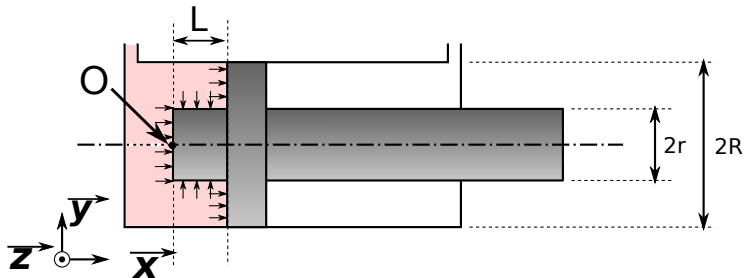
Pression d'un fluide au repos

Lorsqu'un solide S est plongé dans un fluide au repos F , celui-ci exerce une action mécanique répartie, purement normale (pas tangentielle), d'intensité la valeur de la pression de ce fluide :

$$\overrightarrow{f_{p(F \rightarrow S)}} = \overrightarrow{n_{p(F \rightarrow S)}} \quad (20)$$



Actions mécaniques de contact : actions réparties





Actions mécaniques de contact : actions réparties

- On cherche à déterminer le torseur de l'action du fluide sur la tige du vérin T :

$$\{\mathcal{T}_{(F \rightarrow T)}\} = \{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 1)}\} + \{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 2)}\} + \{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 3)}\}$$

-

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R_{(F \rightarrow 1)}} &= \int_{P \in (1)} p \overrightarrow{x} dS = p \overrightarrow{x} \int_{P \in (1)} dS \\ &= p S \overrightarrow{x} \end{aligned}$$

-

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O(F \rightarrow 1)}} = \int_{P \in (1)} \overrightarrow{OP} \wedge p \overrightarrow{x} dS = \int_{P \in (1)} \rho \overrightarrow{e_r} \wedge p \overrightarrow{x} dS$$

-

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{M}_{O(F \rightarrow 1)}} &= -p \int_{P \in (1)} \rho \overrightarrow{e_\theta} dS \\ &= p \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=r} \rho \overrightarrow{e_\theta} \rho d\rho d\theta = p \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \overrightarrow{e_\theta} d\theta \int_{\rho=0}^{\rho=r} \rho^2 d\rho = \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

- $\{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 2)}\}$: (à faire à la maison)
- $\{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 3)}\}$: (à faire à la maison)



Actions mécaniques de contact : actions réparties

- On cherche à déterminer le torseur de l'action du fluide sur la tige du vérin T :

$$\{\mathcal{T}_{(F \rightarrow T)}\} = \{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 1)}\} + \{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 2)}\} + \{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 3)}\}$$

-

$$\begin{aligned}\overrightarrow{R_{(F \rightarrow 1)}} &= \int_{P \in (1)} p \overrightarrow{x} dS = p \overrightarrow{x} \int_{P \in (1)} dS \\ &= p S \overrightarrow{x}\end{aligned}$$

-

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O(F \rightarrow 1)}} = \int_{P \in (1)} \overrightarrow{OP} \wedge p \overrightarrow{x} dS = \int_{P \in (1)} \rho \overrightarrow{e_r} \wedge p \overrightarrow{x} dS$$

-

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathcal{M}_{O(F \rightarrow 1)}} &= -p \int_{P \in (1)} \rho \overrightarrow{e_\theta} dS \\ &= p \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=r} \rho \overrightarrow{e_\theta} \rho d\rho d\theta = p \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \overrightarrow{e_\theta} d\theta \int_{\rho=0}^{\rho=r} \rho^2 d\rho = \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

- $\{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 2)}\}$: (à faire à la maison)
- $\{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 3)}\}$: (à faire à la maison)



Actions mécaniques de contact : actions réparties

- On cherche à déterminer le torseur de l'action du fluide sur la tige du vérin T :

$$\{\mathcal{T}_{(F \rightarrow T)}\} = \{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 1)}\} + \{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 2)}\} + \{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 3)}\}$$

-

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R_{(F \rightarrow 1)}} &= \int_{P \in (1)} p \overrightarrow{x} dS = p \overrightarrow{x} \int_{P \in (1)} dS \\ &= p S \overrightarrow{x} \end{aligned}$$

-

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O(F \rightarrow 1)}} = \int_{P \in (1)} \overrightarrow{OP} \wedge p \overrightarrow{x} dS = \int_{P \in (1)} \rho \overrightarrow{e_r} \wedge p \overrightarrow{x} dS$$

-

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{M}_{O(F \rightarrow 1)}} &= -p \int_{P \in (1)} \rho \overrightarrow{e_\theta} dS \\ &= p \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=r} \rho \overrightarrow{e_\theta} \rho d\rho d\theta = p \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \overrightarrow{e_\theta} d\theta \int_{\rho=0}^{\rho=r} \rho^2 d\rho = \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

- $\{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 2)}\}$: (à faire à la maison)
- $\{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 3)}\}$: (à faire à la maison)



Actions mécaniques de contact : actions réparties

- On cherche à déterminer le torseur de l'action du fluide sur la tige du vérin T :

$$\{\mathcal{T}_{(F \rightarrow T)}\} = \{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 1)}\} + \{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 2)}\} + \{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 3)}\}$$

-

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R_{(F \rightarrow 1)}} &= \int_{P \in (1)} p \vec{x} dS = p \vec{x} \int_{P \in (1)} dS \\ &= p S \vec{x} \end{aligned}$$

-

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O(F \rightarrow 1)}} = \int_{P \in (1)} \overrightarrow{OP} \wedge p \vec{x} dS = \int_{P \in (1)} \rho \vec{e}_r \wedge p \vec{x} dS$$

-

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{M}_{O(F \rightarrow 1)}} &= -p \int_{P \in (1)} \rho \vec{e}_\theta dS \\ &= p \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=r} \rho \vec{e}_\theta \rho d\rho d\theta = p \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \vec{e}_\theta d\theta \int_{\rho=0}^{\rho=r} \rho^2 dr = \vec{0} \end{aligned}$$

- $\{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 2)}\}$: (à faire à la maison)
- $\{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 3)}\}$: (à faire à la maison)



Actions mécaniques de contact : actions réparties

- On cherche à déterminer le torseur de l'action du fluide sur la tige du vérin T :

$$\{\mathcal{T}_{(F \rightarrow T)}\} = \{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 1)}\} + \{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 2)}\} + \{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 3)}\}$$

-

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R_{(F \rightarrow 1)}} &= \int_{P \in (1)} p \vec{x} dS = p \vec{x} \int_{P \in (1)} dS \\ &= p S \vec{x} \end{aligned}$$

-

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O(F \rightarrow 1)}} = \int_{P \in (1)} \overrightarrow{OP} \wedge p \vec{x} dS = \int_{P \in (1)} \rho \vec{e}_r \wedge p \vec{x} dS$$

-

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{M}_{O(F \rightarrow 1)}} &= -p \int_{P \in (1)} \rho \vec{e}_\theta dS \\ &= p \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=r} \rho \vec{e}_\theta \rho d\rho d\theta = p \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \vec{e}_\theta d\theta \int_{\rho=0}^{\rho=r} \rho^2 dr = \vec{0} \end{aligned}$$

- $\{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 2)}\}$: (à faire à la maison)
- $\{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 3)}\}$: (à faire à la maison)



Actions mécaniques de contact : actions réparties

- On cherche à déterminer le torseur de l'action du fluide sur la tige du vérin T :

$$\{\mathcal{T}_{(F \rightarrow T)}\} = \{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 1)}\} + \{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 2)}\} + \{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 3)}\}$$

-

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R_{(F \rightarrow 1)}} &= \int_{P \in (1)} p \overrightarrow{x} dS = p \overrightarrow{x} \int_{P \in (1)} dS \\ &= p S \overrightarrow{x} \end{aligned}$$

-

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O(F \rightarrow 1)}} = \int_{P \in (1)} \overrightarrow{OP} \wedge p \overrightarrow{x} dS = \int_{P \in (1)} \rho \overrightarrow{e_r} \wedge p \overrightarrow{x} dS$$

-

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{M}_{O(F \rightarrow 1)}} &= -p \int_{P \in (1)} \rho \overrightarrow{e_\theta} dS \\ &= p \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=r} \rho \overrightarrow{e_\theta} \rho d\rho d\theta = p \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \overrightarrow{e_\theta} d\theta \int_{\rho=0}^{\rho=r} \rho^2 dr = \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

- $\{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 2)}\}$: (à faire à la maison)
- $\{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 3)}\}$: (à faire à la maison)



Actions mécaniques de contact : actions réparties

Théorème de Pascal

Pour un fluide homogène et statique F , la pression effective en un point M , immergé à une profondeur h vaut :

$$p_{(M)} = \mu g h + p_{atm}. \quad (21)$$

avec $p_{(M)}$ = pression au point M (en Pa), p_{atm} = pression atmosphérique (en Pa), μ = masse volumique du fluide (en $Kg \cdot m^{-3}$) et h = profondeur (en m).

Théorème d'Archimède

Dans le cas d'un fluide F au repos, ou dans le cas d'un fluide parfait (sans viscosité), tout corps S plongé dans ce fluide reçoit, de la part de celui-ci, une action mécanique représentable par un glisseur :

$$\{\mathcal{T}_{(F \rightarrow S)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{P} = \frac{m_f}{0} g \vec{z} \end{array} \right\} \quad (22)$$

où G est le barycentre de la partie immergée, m_f = masse du fluide déplacé (en Kg), g est l'accélération de pesanteur (en $m \cdot s^{-2}$) et \vec{z} est le vecteur unitaire vertical ascendant.



Actions mécaniques de contact : actions réparties

Théorème de Pascal

Pour un fluide homogène et statique F , la pression effective en un point M , immergé à une profondeur h vaut :

$$p_{(M)} = \mu g h + p_{atm}. \quad (21)$$

avec $p_{(M)}$ = pression au point M (en Pa), p_{atm} = pression atmosphérique (en Pa), μ = masse volumique du fluide (en $Kg \cdot m^{-3}$) et h = profondeur (en m).

Théorème d'Archimède

Dans le cas d'un fluide F au repos, ou dans le cas d'un fluide parfait (sans viscosité), tout corps S plongé dans ce fluide reçoit, de la part de celui-ci, une action mécanique représentable par un glisseur :

$$\left\{ \mathcal{T}_{(F \rightarrow S)} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{P} = \frac{m_f}{0} g \vec{z} \end{array} \right\} \quad (22)$$

où G est le barycentre de la partie immergée, m_f = masse du fluide déplacé (en Kg), g est l'accélération de pesanteur (en $m \cdot s^{-2}$) et \vec{z} est le vecteur unitaire vertical ascendant.



Actions mécaniques de contact : actions réparties

Contacts linéiques - Actions linéiques

Le principe de modélisation est le même :

- On parle de densité linéique d'effort $\overrightarrow{f_{P(S_1 \rightarrow S_2)}}$ appliquée à un élément de ligne dL , en tout point P d'une ligne L .
- On définit de même l'action mécanique de contact de S_1 sur S_2 par le torseur suivant :

$$\{\mathcal{T}_{(S_1 \rightarrow S_2)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \int_{P \in L} \overrightarrow{f_{P(S_1 \rightarrow S_2)}} dL \\ \int_{P \in L} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{f_{P(S_1 \rightarrow S_2)}} dL \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{(S_1 \rightarrow S_2)}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A(S_1 \rightarrow S_2)}} \end{array} \right\} \quad (23)$$

- On décompose de la même façon $\overrightarrow{f_{P(S_1 \rightarrow S_2)}}$ en une composante normale et une composante tangentielle (de même pour $\overrightarrow{R_{(S_1 \rightarrow S_2)}}$) lorsque c'est possible).



Actions mécaniques de contact : actions réparties

Contacts linéiques - Actions linéiques

Le principe de modélisation est le même :

- On parle de densité linéique d'effort $\overrightarrow{f_{p(s_1 \rightarrow s_2)}}$ appliquée à un élément de ligne dl , en tout point P d'une ligne L .
- On définit de même l'action mécanique de contact de S_1 sur S_2 par le torseur suivant :

$$\left\{ \mathcal{T}_{(S_1 \rightarrow S_2)} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \int_{P \in L} \overrightarrow{f_{p(s_1 \rightarrow s_2)}} dL \\ \int_{P \in L} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{f_{p(s_1 \rightarrow s_2)}} dL \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{(S_1 \rightarrow S_2)}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A(S_1 \rightarrow S_2)}} \end{array} \right\} \quad (23)$$

- On décompose de la même façon $\overrightarrow{f_{p(s_1 \rightarrow s_2)}}$ en une composante normale et une composante tangentielle (de même pour $\overrightarrow{R_{(S_1 \rightarrow S_2)}}$) lorsque c'est possible).



Actions mécaniques de contact : actions réparties

Contacts linéiques - Actions linéiques

Le principe de modélisation est le même :

- On parle de densité linéique d'effort $\overrightarrow{f_{p(s_1 \rightarrow s_2)}}$ appliquée à un élément de ligne dl , en tout point P d'une ligne L .
- On définit de même l'action mécanique de contact de S_1 sur S_2 par le torseur suivant :

$$\left\{ \mathcal{T}_{(S_1 \rightarrow S_2)} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \int_{P \in L} \overrightarrow{f_{p(s_1 \rightarrow s_2)}} dL \\ \int_{P \in L} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{f_{p(s_1 \rightarrow s_2)}} dL \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{(S_1 \rightarrow S_2)}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A(S_1 \rightarrow S_2)}} \end{array} \right\} \quad (23)$$

- On décompose de la même façon $\overrightarrow{f_{p(s_1 \rightarrow s_2)}}$ en une composante normale et une composante tangentielle (de même pour $\overrightarrow{R_{(S_1 \rightarrow S_2)}}$) lorsque c'est possible).



Plan

- 1 Introduction
 - Définition
 - Classification
- 2 Modélisations locale et globale d'une action mécanique due à une force
 - Modélisation locale d'une action mécanique due à une force
 - Modélisation globale d'une action mécanique due à une force
- 3 Torseurs des actions mécaniques extérieures
 - Définition du torseur
 - Propriétés
- 4 Actions mécaniques de contact
 - Actions réparties
 - Frottements et lois de Coulomb
- 5 Actions mécaniques de distance
 - Modélisation de l'action mécanique de pesanteur
 - Méthodologie pour déterminer les caractéristiques de masse d'un solide.
- 6 Actions mécaniques dues aux liaisons sans frottement
 - Cas des liaisons usuelles en 3D
 - Cas particulier du 2D



Actions mécaniques de contact : frottements et lois de Coulomb

Le frottement :

- **résistance au mouvement** relative de ces deux solides.
- action mécanique tangentielle d'un solide sur l'autre ayant tendance à s'opposer au mouvement désiré.
- XVIII^{ème} siècle : **Charles de Coulomb** : lois et modèles issues de l'expérience et n'ont pas de fondement théorique,



Actions mécaniques de contact : frottements et lois de Coulomb

Le frottement :

- **résistance au mouvement** relative de ces deux solides.
- **action mécanique tangentielle d'un solide sur l'autre ayant tendance à s'opposer au mouvement désiré.**
- *XVIII^{ème} siècle : Charles de Coulomb : lois et modèles issues de l'expérience et n'ont pas de fondement théorique,*



Actions mécaniques de contact : frottements et lois de Coulomb

Le frottement :

- **résistance au mouvement** relative de ces deux solides.
- **action mécanique tangentielle d'un solide sur l'autre ayant tendance à s'opposer au mouvement désiré.**
- **XVIII^{ème} siècle : Charles de Coulomb** : lois et modèles issues de l'expérience et n'ont pas de fondement théorique,

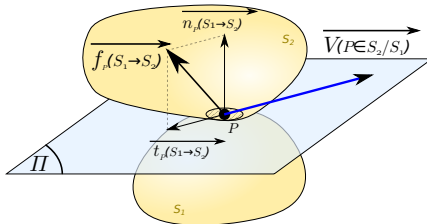
Actions mécaniques de contact : frottements et lois de Coulomb

Présentation du problème

Soit deux solides (ou ensembles) S_1 et S_2 , en contact. Soit P un point appartenant à la zone de contact, tel que l'action répartie au point P est :

$$\overrightarrow{f_p(S_1 \rightarrow S_2)} = \overrightarrow{n_p(S_1 \rightarrow S_2)} + \overrightarrow{t_p(S_1 \rightarrow S_2)} \quad (24)$$

où $\overrightarrow{n_p(S_1 \rightarrow S_2)}$ et $\overrightarrow{t_p(S_1 \rightarrow S_2)}$ sont respectivement les pressions normales et tangentielles.





Actions mécaniques de contact : frottements et lois de Coulomb

Lois de Coulomb

- Les lois de Coulomb permettent de caractériser les vecteurs $\overrightarrow{t_p(S_1 \rightarrow S_2)}$ et $\overrightarrow{n_p(S_1 \rightarrow S_2)}$.

- Leur norme est donnée par :

Adhérence $\overrightarrow{V}(P \in S_2/S_1) = \overrightarrow{0}$:

$$\left\| \overrightarrow{t_p(S_1 \rightarrow S_2)} \right\| \leq f^* \left\| \overrightarrow{n_p(S_1 \rightarrow S_2)} \right\|$$

(25)

Glissement $\overrightarrow{V}(P \in S_2/S_1) \neq \overrightarrow{0}$:

$$\left\| \overrightarrow{t_p(S_1 \rightarrow S_2)} \right\| = f \left\| \overrightarrow{n_p(S_1 \rightarrow S_2)} \right\|.$$

(26)

- f et f^* sont respectivement appelés **coefficient de frottement** et **d'adhérence** entre S_1 et S_2 .

Actions mécaniques de contact : frottements et lois de Coulomb

Lois de Coulomb

- La **direction** de $\overrightarrow{n_p(S_1 \rightarrow S_2)}$ est celle de la normale au plan tangent au contact.
- La **direction** de $\overrightarrow{t_p(S_1 \rightarrow S_2)}$ est comprise dans le plan tangent au contact et telle que :

$$\overrightarrow{t_p(S_1 \rightarrow S_2)} \wedge \overrightarrow{V}(P \in S_2/S_1) = \overrightarrow{0} \quad (27)$$

- Pour exploiter les conditions sur les normes il est parfois utile de déterminer le sens de $\overrightarrow{t_p(S_1 \rightarrow S_2)}$: **L'action tangentielle de S_1 sur S_2 s'oppose au mouvement (éventuel) de S_2/S_1 :**

$$\overrightarrow{t_p(S_1 \rightarrow S_2)} \cdot \vec{V}(P \in S_2/S_1) < 0. \quad (28)$$



Actions mécaniques de contact : frottements et lois de Coulomb

Remarque

- En réalité, le coefficient d'adhérence est légèrement supérieur au coefficient de frottement : $f^* > f$. Mais dans la pratique de la modélisation, on considèrera généralement $f^* = f$.
- Le modèle ci-dessus concerne les frottements dits "*frottements secs*", par opposition aux "*frottements visqueux*" faisant intervenir la vitesse de déplacement.
- f dépend du couple de matériaux en contact, mais aussi de la lubrification, de la température, de l'état de surface...

Couples matériaux	acier/acier	acier/coussinet	fonte/ garniture de freins
f	0,1 à 0,2	0,03 à 0,2	0,4

Couples matériaux	pneus/route sèche	contact sans frottement
f	0,6 à 0,7	0

Interprétations graphiques - cône de frottement et adhérence

- d'axe normal au contact,
- de sommet P ,
- de demi-angle au sommet Φ tel que $\tan(\Phi) = f$ (**angle de frottement ou d'adhérence**). La proportionnalité entre $\|\overrightarrow{t_p(S_1 \rightarrow S_2)}\|$ et $\|\overrightarrow{n_p(S_1 \rightarrow S_2)}\|$ implique que $\overrightarrow{f_p(S_1 \rightarrow S_2)}$ se situe :
- **sur le cône de frottement** dans le cas du frottement
- **à l'intérieur du cône de frottement** dans le cas de l'adhérence.

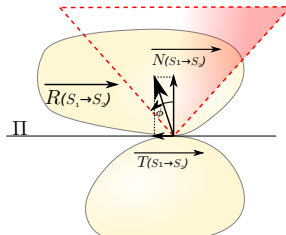
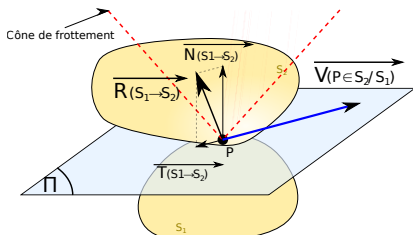


Actions de contact réparties : frottements et lois de Coulomb

Interprétations graphiques - cône de frottement et adhérence

Soit le cône de frottement ou d'adhérence :

- d'axe normal au contact,
- de sommet P ,
- de demi-angle au sommet Φ tel que $\tan(\Phi) = f$ (**angle de frottement ou d'adhérence**). La proportionnalité entre $\|\overrightarrow{t_p(S_1 \rightarrow S_2)}\|$ et $\|\overrightarrow{n_p(S_1 \rightarrow S_2)}\|$ implique que $\overrightarrow{f_p(S_1 \rightarrow S_2)}$ se situe :
- **sur le cône de frottement** dans le cas du frottement
- **à l'intérieur du cône de frottement** dans le cas de l'adhérence.





Plan

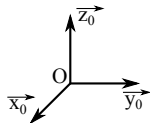
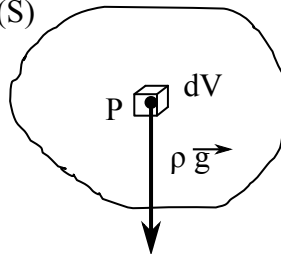
- 1 Introduction
 - Définition
 - Classification
- 2 Modélisations locale et globale d'une action mécanique due à une force
 - Modélisation locale d'une action mécanique due à une force
 - Modélisation globale d'une action mécanique due à une force
- 3 Torseurs des actions mécaniques extérieures
 - Définition du torseur
 - Propriétés
- 4 Actions mécaniques de contact
 - Actions réparties
 - Frottements et lois de Coulomb
- 5 Actions mécaniques de distance
 - Modélisation de l'action mécanique de pesanteur
 - Méthodologie pour déterminer les caractéristiques de masse d'un solide.
- 6 Actions mécaniques dues aux liaisons sans frottement
 - Cas des liaisons usuelles en 3D
 - Cas particulier du 2D



Actions mécaniques à distance

- $\vec{g} = -g \vec{v}_z0$: Accélération de la pesanteur : avec $g = 9.81 m \cdot s^{-2}$.
- ρ : masse volumique du matériau de S (en $Kg \cdot m^{-3}$).
- $\rho \vec{g}$: Densité volumique d'effort (en $N \cdot m^{-3}$).

(S)



Actions mécaniques à distance

Soit $\{\mathcal{T}_{(Terre \rightarrow S)}\}$ le torseur d'action mécanique à distance exercé par le champ de pesanteur sur S .

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}_{(Terre \rightarrow S)}\} &= \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{(Terre \rightarrow S)}} \\ \mathcal{M}_{A(Terre \rightarrow S)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \int_{P \in V} \rho \overrightarrow{g} dV \\ \int_{P \in V} \overrightarrow{AP} \wedge (\rho \overrightarrow{g}) dV \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \int_{P \in V} \overrightarrow{g} dm \\ \int_{P \in V} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{g} dm \end{array} \right\} \end{aligned}$$



Actions mécaniques à distance

Géométrie de masse

- Masse du solide :

$$M = \int_{P \in V} dm \quad (29)$$

- Centre de gravité G : c'est le barycentre des points du solide pondéré de la masse volumique :

$$M \vec{AG} = \int_{P \in V} \vec{AP} dm \quad (30)$$



Actions mécaniques à distance

Géométrie de masse

- Masse du solide :

$$M = \int_{P \in V} dm \quad (29)$$

- Centre de gravité G : c'est le barycentre des points du solide pondéré de la masse volumique :

$$M \vec{AG} = \int_{P \in V} \vec{AP} dm \quad (30)$$



Actions mécaniques à distance

Géométrie de masse

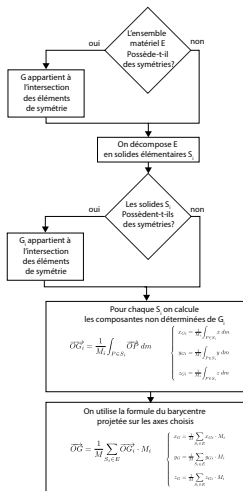
- Expression de l'action mécanique au centre de gravité

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{(Terre \rightarrow S)}\} = {}_G \left\{ \begin{array}{c} -M_g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}} \quad (31)$$



Plan

- 1 Introduction
 - Définition
 - Classification
- 2 Modélisations locale et globale d'une action mécanique due à une force
 - Modélisation locale d'une action mécanique due à une force
 - Modélisation globale d'une action mécanique due à une force
- 3 Torseurs des actions mécaniques extérieures
 - Définition du torseur
 - Propriétés
- 4 Actions mécaniques de contact
 - Actions réparties
 - Frottements et lois de Coulomb
- 5 Actions mécaniques de distance
 - Modélisation de l'action mécanique de pesanteur
 - Méthodologie pour déterminer les caractéristiques de masse d'un solide.
- 6 Actions mécaniques dues aux liaisons sans frottement
 - Cas des liaisons usuelles en 3D
 - Cas particulier du 2D





Plan

- 1 Introduction
 - Définition
 - Classification
- 2 Modélisations locale et globale d'une action mécanique due à une force
 - Modélisation locale d'une action mécanique due à une force
 - Modélisation globale d'une action mécanique due à une force
- 3 Torseurs des actions mécaniques extérieures
 - Définition du torseur
 - Propriétés
- 4 Actions mécaniques de contact
 - Actions réparties
 - Frottements et lois de Coulomb
- 5 Actions mécaniques de distance
 - Modélisation de l'action mécanique de pesanteur
 - Méthodologie pour déterminer les caractéristiques de masse d'un solide.
- 6 Actions mécaniques dues aux liaisons sans frottement
 - Cas des liaisons usuelles en 3D
 - Cas particulier du 2D

Actions mécaniques dues aux liaisons sans frottement

- On considère les liaisons réalisées par **contact direct** entre deux pièces, **sans frottement** et **sans jeu** (liaisons parfaites).
- Le torseur d'action de contact est aussi appelé torseur statique, torseur d'inter-efforts ou torseur transmissible.
- On se donne un repère $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ centré sur chaque liaison.
- Dans le cas des liaisons entre une pièce S_1 et S_2 , les composantes du torseur seront souvent exprimées avec les notations de torseur-colonne suivantes :

$$\{\mathcal{T}_{(1 \rightarrow 2)}\}_P = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

- X_{12}, Y_{12} et Z_{12} sont les projections de la résultante dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$,
- L_{12}, M_{12} et N_{12} sont les projections du moment en P dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.



Actions mécaniques dues aux liaisons sans frottement

- On considère les liaisons réalisées par **contact direct** entre deux pièces, **sans frottement** et **sans jeu** (liaisons parfaites).
- Le torseur d'action de contact est aussi appelé torseur statique, torseur d'inter-efforts ou torseur transmissible.
- On se donne un repère $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ centré sur chaque liaison.
- Dans le cas des liaisons entre une pièce S_1 et S_2 , les composantes du torseur seront souvent exprimées avec les notations de torseur-colonne suivantes :

$$\{\mathcal{T}_{(1 \rightarrow 2)}\}_P = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

- X_{12}, Y_{12} et Z_{12} sont les projections de la résultante dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$,
- L_{12}, M_{12} et N_{12} sont les projections du moment en P dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.



Actions mécaniques dues aux liaisons sans frottement

- On considère les liaisons réalisées par **contact direct** entre deux pièces, **sans frottement** et **sans jeu** (liaisons parfaites).
- Le torseur d'action de contact est aussi appelé torseur statique, torseur d'inter-efforts ou torseur transmissible.
- On se donne un repère $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ centré sur chaque liaison.
- Dans le cas des liaisons entre une pièce S_1 et S_2 , les composantes du torseur seront souvent exprimées avec les notations de torseur-colonne suivantes :

$$\{\mathcal{T}_{(1 \rightarrow 2)}\}_P = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

- X_{12}, Y_{12} et Z_{12} sont les projections de la résultante dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$,
- L_{12}, M_{12} et N_{12} sont les projections du moment en P dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.



Actions mécaniques dues aux liaisons sans frottement

- On considère les liaisons réalisées par **contact direct** entre deux pièces, **sans frottement** et **sans jeu** (liaisons parfaites).
- Le torseur d'action de contact est aussi appelé torseur statique, torseur d'inter-efforts ou torseur transmissible.
- On se donne un repère $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ centré sur chaque liaison.
- Dans le cas des liaisons entre une pièce S_1 et S_2 , les composantes du torseur seront souvent exprimées avec les notations de torseur-colonne suivantes :

$$\left\{ \mathcal{T}_{(1 \rightarrow 2)} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{cc} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

- X_{12}, Y_{12} et Z_{12} sont les projections de la résultante dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$,
- L_{12}, M_{12} et N_{12} sont les projections du moment en P dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.



Liaisons sans frottement

On se donne un repère $R_0 = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ centré sur chaque liaison.

Nom	Paramétrage	Torseur statique
Liaisons pivot d'axe $(\Delta) = (O, \vec{x})$ $\forall M \in (O, \vec{x})$		
Liaisons glissière de direction \vec{x} $\forall M$		
Liaisons hélicoïdale d'axe $(\Delta) = (O, \vec{x})$ et de pas p $\forall M \in (O, \vec{x})$		



Liaisons sans frottement

On se donne un repère $R_0 = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ centré sur chaque liaison.

Nom	Paramétrage	Torseur statique
Liaisons pivot d'axe $(\Delta) = (O, \vec{x})$ $\forall M \in (O, \vec{x})$		$\{\mathcal{T}_{(1 \rightarrow 2)}\} =$ $_M \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, -, -)}$
Liaisons glissière de direction \vec{x} $\forall M$		$\{\mathcal{T}_{(1 \rightarrow 2)}\} =$ $_M \begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, -, -)}$
Liaisons hélicoïdale d'axe $(\Delta) = (O, \vec{x})$ et de pas p $\forall M \in (O, \vec{x})$		$\{\mathcal{T}_{(1 \rightarrow 0)}\} =$ $_O \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, -, -)}$ <p>avec $L_{12} = -\frac{p}{2\pi} X_{12}$</p>



Liaisons sans frottement

On se donne un repère $R_0 = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ centré sur chaque liaison.

Nom	Paramétrage	Torseur statique
Liaison pivot glissant d'axe $(\Delta) = (O, \vec{x})$ $\forall M \in (O, \vec{x})$		
Liaison sphérique de centre O		
Liaison plane de normale \vec{x} $\forall M$		



Liaisons sans frottement

On se donne un repère $R_0 = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ centré sur chaque liaison.

Nom	Paramétrage	Torseur statique
Liaison pivot glissant d'axe $(\Delta) = (O, \vec{x})$ $\forall M \in (O, \vec{x})$		$\{ \mathcal{T}_{(1 \rightarrow 2)} \} =$ $_M \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, -, -)}$
Liaison sphérique de centre O		$\{ \mathcal{T}_{(1 \rightarrow 2)} \} =$ $_O \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(-, -, -)}$
Liaison plane de normale \vec{x} $\forall M$		$\{ \mathcal{T}_{(1 \rightarrow 2)} \} =$ $_M \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & M_{12} \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, -, -)}$



Liaisons sans frottement

On se donne un repère $R_0 = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ centré sur chaque liaison.

Nom	Paramétrage	Torseur statique
Liaison sphérique à doigt de centre O , d'axes \vec{y} et \vec{z}		
Liaison sphère-cylindre ou linéaire annulaire d'axe (O, \vec{x}) O centre de la sphère		
Liaison cylindre-plan ou linéaire rectiligne d'axe (O, \vec{x}) et de normale \vec{y}		



Liaisons sans frottement

On se donne un repère $R_0 = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ centré sur chaque liaison.

Nom	Paramétrage	Torseur statique
Liaison sphérique à doigt de centre O , d'axes \vec{y} et \vec{z}		$\{ \mathcal{T}_{(1 \rightarrow 2)} \} =$ $_O \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
Liaison sphère-cylindre ou linéaire annulaire d'axe (O, \vec{x}) O centre de la sphère		$\{ \mathcal{T}_{(1 \rightarrow 2)} \} =$ $_O \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, -, -)}$
Liaison cylindre-plan ou linéaire rectiligne d'axe (O, \vec{x}) et de normale \vec{y}		$\{ \mathcal{T}_{(1 \rightarrow 2)} \} =$ $_M \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$



Liaisons sans frottement

On se donne un repère $R_0 = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ centré sur chaque liaison.

Nom	Paramétrage	Torseur statique
Liaison sphère-plan ou ponctuelle de normale (O, \vec{x}) $\forall M \in (O, \vec{x})$		
Liaison encastrement $\forall M$		



Liaisons sans frottement

On se donne un repère $R_0 = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ centré sur chaque liaison.

Nom Liaison	Paramétrage	Torseur statique
sphère-plan ou ponctuelle de normale (O, \vec{x}) $\forall M \in (O, \vec{x})$		$\{\mathcal{T}_{(1 \rightarrow 2)}\} =$ $_M \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, -, -)}$
Liaison encastrement $\forall M$		$\{\mathcal{T}_{(1 \rightarrow 2)}\} =$ $_M \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, -, -)}$



Plan

- 1 Introduction
 - Définition
 - Classification
- 2 Modélisations locale et globale d'une action mécanique due à une force
 - Modélisation locale d'une action mécanique due à une force
 - Modélisation globale d'une action mécanique due à une force
- 3 Torseurs des actions mécaniques extérieures
 - Définition du torseur
 - Propriétés
- 4 Actions mécaniques de contact
 - Actions réparties
 - Frottements et lois de Coulomb
- 5 Actions mécaniques de distance
 - Modélisation de l'action mécanique de pesanteur
 - Méthodologie pour déterminer les caractéristiques de masse d'un solide.
- 6 Actions mécaniques dues aux liaisons sans frottement
 - Cas des liaisons usuelles en 3D
 - Cas particulier du 2D

Liaisons sans frottement : cas du 2D

Problème plan

- **Problème plan :**

- les résultantes n'ont pas de composante suivant la normale à ce plan,
- les moments sont dirigés suivant cette normale.

- Exemple de problème plan de normale \vec{z} et pour une liaison pivot d'axe (O, \vec{z}) :

Son torseur $\left\{ \begin{array}{cc} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{array} \right\}_{(-,-,\vec{z})}$ s'écrit : $\left\{ \begin{array}{cc} X & * \\ Y & * \\ * & 0 \end{array} \right\}_{(-,-,\vec{z})}$

- soit un glisseur dont le support, situé dans le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) , passe par O.



Liaisons sans frottement : cas du 2D

Problème plan

- **Problème plan :**

- les résultantes n'ont pas de composante suivant la normale à ce plan,
- les moments sont dirigés suivant cette normale.

- Exemple de problème plan de normale \vec{z} et pour une liaison pivot d'axe (O, \vec{z}) :

Son torseur $\left\{ \begin{array}{cc} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{array} \right\}_{(-,-,\vec{z})}$ s'écrit : $\left\{ \begin{array}{cc} X & * \\ Y & * \\ * & 0 \end{array} \right\}_{(-,-,\vec{z})}$

- soit un glisseur dont le support, situé dans le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) , passe par O.



Liaisons sans frottement : cas du 2D

Problème plan

- **Problème plan :**

- les résultantes n'ont pas de composante suivant la normale à ce plan,
- les moments sont dirigés suivant cette normale.

- Exemple de problème plan de normale \vec{z} et pour une liaison pivot d'axe (O, \vec{z}) :

Son torseur $\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{(-,-,\vec{z})}$ s'écrit : $\begin{Bmatrix} X & * \\ Y & * \\ * & 0 \end{Bmatrix}_{(-,-,\vec{z})}$

- soit un glisseur dont le support, situé dans le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) , passe par O.



Liaisons sans frottement : cas du 2D

Problème plan

- **Problème plan :**

- les résultantes n'ont pas de composante suivant la normale à ce plan,
- les moments sont dirigés suivant cette normale.

- Exemple de problème plan de normale \vec{z} et pour une liaison pivot d'axe (O, \vec{z}) :

Son torseur $\left\{ \begin{array}{cc} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{array} \right\}_{(-,-,\vec{z})}$ s'écrit : $\left\{ \begin{array}{cc} X & * \\ Y & * \\ * & 0 \end{array} \right\}_{(-,-,\vec{z})}$

- soit un glisseur dont le support, situé dans le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) , passe par O.



Liaisons sans frottement : cas du 2D

Problème plan

- **Problème plan :**

- les résultantes n'ont pas de composante suivant la normale à ce plan,
- les moments sont dirigés suivant cette normale.

- Exemple de problème plan de normale \vec{z} et pour une liaison pivot d'axe (O, \vec{z}) :

Son torseur $\left\{ \begin{array}{cc} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{array} \right\}_{(-,-,\vec{z})}$ s'écrit : $\left\{ \begin{array}{cc} X & * \\ Y & * \\ * & 0 \end{array} \right\}_{(-,-,\vec{z})}$

- soit un glisseur dont le support, situé dans le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) , passe par O.