Feuille d'exercice n° 19 : **Intégration**

Exercice 1 (✎) Montrer que la composée de deux fonctions uniformément continues est uniformément continue.

Exercice 2 (✎) Montrer que $x \mapsto \ln x$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 Montrer que $\sqrt{\cdot}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 4
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue telle que $f(n) \underset{\substack{n\to+\infty \\ n\in\mathbb{N}}}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que $f(x) \underset{\substack{x\to+\infty \\ x\in\mathbb{R}}}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 5
Soient $f, g \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, g positive ou nulle. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que : $\displaystyle\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g$.

Exercice 6 Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $a \in]0,1[$ telle que $f(a) = a$.

Exercice 7 Soit f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall k \in \{0, ..., n\}, \int_0^1 f(u)u^k\,\mathrm{d}u = 0.$$

Montrer que f admet au moins $n+1$ zéros distincts dans $]0,1[$.

Exercice 8
Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. Montrer que

$$\left(\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\right) \Leftrightarrow [(f \text{ est positive}) \text{ ou } (f \text{ est négative})].$$

Exercice 9 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue strictement croissante telle que $f(0) = 0,\ f(1) = 1$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f^n(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 10 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$, et f continue positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{t\in[a,b]} f(t)$$

Exercice 11 (✎)

Démontrer que pour n non nul, $1 \leqslant \sqrt{1+x^n} \leqslant \sqrt{1+\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$ sur $\left[1;1+\dfrac{1}{n}\right]$. Étudier alors la convergence de la suite $u_n = \displaystyle\int_1^{1+1/n} \sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 12 Déterminer les limites suivantes sans pour autant calculer les intégrales correspondantes :
a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{\cos(1/t)}{t}\,\mathrm{d}t$ b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{1/t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 13 Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{\,x} + \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)\right)\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^1 x(x+2-\mathrm{e}\,)\mathrm{e}^{\,x}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-2}{(2x-3)^2}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^4 x \sin^2 x\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3}{(1+x^4)^2}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$

Exercice 14 Quelques intégrales ou primitives à calculer :

1. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{e}^{\,\mathrm{Arcsin}x}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}\sqrt{x+3}}$
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$
8. $\displaystyle\int_1^x \sqrt{\frac{1-\sqrt{t}}{t}}\,\mathrm{d}t$
9. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x\,\mathrm{d}x$

Exercice 15 (✎) Déterminer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int t\ln t\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int t\arctan t\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int (t^2-t+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int (t-1)\sin t\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int (t+1)\mathrm{ch}t\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int t\sin^3 t\,\mathrm{d}t$

Exercice 16 Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

1. Après avoir majoré $\dfrac{x^n}{1+x^n}$ pour $x \in [0,1]$ par une fonction simple, montrer que la suite (I_n) converge vers 0.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x = 0$.
3. À l'aide d'une intégration par parties donner un équivalent de I_n.

Exercice 17 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Établir une relation liant I_n et I_{n+1}.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < I_n < \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$
4. Déterminer $\lim I_n$ puis un équivalent de I_n.

5. Soit (u_n) une suite réelle définie par $u_0 = a, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)u_n$.
   On suppose que $a \neq I_0$, montrer, en étudiant $D_n = |u_n - I_n|$, que $|u_n| \to +\infty$.

Exercice 18 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Justifier que les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes sont de classe $\mathscr{C}^1$ et exprimer leur dérivée :

a) $g(x) = \displaystyle\int_{2x}^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$ b) $g(x) = \displaystyle\int_0^x x\,f(t)\,\mathrm{d}t$ c) $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t+x)\,\mathrm{d}t$

Exercice 19 On définit une fonction F de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{|\sin(tx)|}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier proprement la définition de F.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa dérivée.
3. Nous étudions à présent le comportement asymptotique de F.
   a) Montrer que : $\forall x > 1,\ F(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor -1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{\pi\lfloor x\rfloor}^{\pi x} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$.
   b) On rappelle que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$. En déduire que : $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\pi}\ln x$.

Exercice 20 Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^x\,\mathrm{d}t$ où $x \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que f est décroissante.
2. Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $(x+1)f(x+1) = xf(x-1)$.
3. Soit $\varphi(x) = xf(x)f(x-1)$. Montrer que φ est périodique de période 1.
4. Calculer $\varphi(x)$ pour $x \in \mathbb{N}^*$
5. En déduire : $\forall x, \varphi(x) = \dfrac{\pi}{2}$ et $f(x) \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 21 a et b sont des réels strictement positifs avec $a < b$. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que si $f(0) = 0$ alors $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = 0$.
2. Montrer que dans le cas général : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

Exercice 22 En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ entre 0 et 1, déterminer la limite de la suite
$u_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Exercice 23 Déterminer les primitives suivantes : 1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{it+1}$ 2) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{t}\cos t\,\mathrm{d}t$ 3) $\displaystyle\int t\mathrm{e}^{t}\sin t\,\mathrm{d}t$.

Exercice 24 Soit $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $a = \mathrm{Re}(\lambda)$ et $b = \mathrm{Im}(\lambda)$. Établir $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{t-\lambda} = \ln|t-\lambda| + i.\arctan\left(\frac{t-a}{b}\right) + C^{te}$.

Exercice 25 Calculer la limite en $+\infty$ de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{8k^3+n^3}$$

Exercice 26 (✎) Calculer la limite en $+\infty$ de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$$

Exercice 27 Donner un équivalent simple en $+\infty$ de

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

Exercice 28 Calculer la limite en $+\infty$ de

$$\prod_{k=n+1}^{2n} k^{\frac{1}{k}}$$

Exercice 29 Calculer la limite en $+\infty$ de

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{p=1}^{n}(n+p)}$$

Exercice 30 Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^\alpha} \text{ (avec } \alpha \in \mathbb{R}).$$

(C'est la suite $\left(\sum_{n=1}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$).