

## Devoir surveillé n° 09

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

Indiquez clairement en début de copie le choix de sujet effectué :

- sujet 1 (plus facile) : problème **I** et problème **II** ;
- sujet 2 (plus difficile) : problème **II**.

### I. Étude d'un endomorphisme.

On note  $E = \mathbb{R}_2[X]$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à deux. Pour tout  $P \in E$ , on note

$$f(P) = (X^2 + X - 2)P' - (2X - 1)P + P(1).$$

- 1)
  - a) Calculer  $f(1)$ ,  $f(X)$  et  $f(X^2)$ .
  - b) Montrer que  $f$  est un **endomorphisme** de  $E$ .
  - c) Comparer  $f(1) + f(X^2)$  et  $f(X)$ , puis préciser le rang de  $f$ . Que peut-on en déduire ?
- 2)
  - a) Déterminer une base du noyau  $\text{Ker}(f)$  et une base de l'image  $\text{Im}(f)$ .
  - b) Montrer que  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont des sous-espaces supplémentaires de  $E$ .
- 3) Soit la famille  $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$  où

$$P_0 = X^2 + X - 2, \quad P_1 = X^2 - 2X + 1 \quad \text{et} \quad P_2 = X^2 + 3X + 1.$$

- a) Montrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ .
- b) Calculer les images par  $f$  des vecteurs de  $\mathcal{B}$ , et exprimer le résultat en fonction des  $P_i$ .
- c) Soit  $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ , et  $Q = a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2$  un vecteur de  $E$ .  
Calculer  $f(Q)$  en fonction de  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$ .
- d) Soit  $Q = 2X^2 + X + 2$  : pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculer  $f^n(Q)$  et déterminer ses racines.
- e) L'endomorphisme  $f$  est-il nilpotent (c'est-à-dire existe-t-il un entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $f^n = 0$ ) ?

## II. Extrait et adapté du concours Ecricome 2012.

L'objectif du problème est d'étudier une suite de variables aléatoires  $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Les deux premières parties sont indépendantes et la troisième utilise certains résultats obtenus dans les deux premières parties. la partie **I** est consacrée à l'étude de deux endomorphismes sur  $\mathbb{R}_n[X]$ . La partie **II** consiste à calculer l'espérance et la variance de  $Z_k$  ainsi qu'à calculer la somme  $\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = r)$  sous réserve de convergence. La partie **III** fournira la loi de  $Z_k$  ainsi que l'étude de la convergence de la série  $\sum_{k \geq 0} P(Z_k = r)$ . La partie d'informatique propose de simuler les variables aléatoires étudiées précédemment.

### Partie I : Étude de deux endomorphismes.

Soit  $n$  un entier naturel. On note  $\mathbb{R}_n[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus  $n$ . On identifiera un polynôme à la fonction polynomiale qui lui est canoniquement associée. Pour tout entier  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , on désigne par  $e_k$  le polynôme de  $\mathbb{R}_n[X]$  défini par :

$$e_k = X^k .$$

Rappelons que  $(e_0, \dots, e_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Si  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , on définit les fonctions  $f(P)$  et  $g(P)$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(P)(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x P(t) dt \text{ et } f(P)(1) = P(1)$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(P)(x) = [(X-1)P]'(x) = (x-1)P'(x) + P(x) .$$

- 1) Prouver que  $g$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- 2) Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ . Calculer  $f(g(P))$  puis justifier que  $\text{Ker}(g) = \{0\}$ .
- 3) Démontrer que  $g$  est un isomorphisme, que  $g^{-1} = f$  et que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- 4) Écrire la matrice  $A$  de  $f$  dans la base  $(e_0, e_1, \dots, e_n)$  ainsi que la matrice  $B$  de  $g$  dans cette même base.

*On admet alors qu'il existe une base dans laquelle les matrices de  $f$  et de  $g$  sont diagonales.*

### Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires.

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose de  $n+1$  urnes notées  $U_0, U_1, \dots, U_n$  et on suppose que, pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , l'urne  $U_i$  contient  $i+1$  boules numérotées  $0, 1, \dots, i$ . On s'intéresse au jeu suivant.

- Au premier tirage, on pioche une boule dans l'urne  $U_n$ . Si la boule porte le numéro  $r$ , alors on repose la boule dans l'urne  $U_n$  puis le tirage suivant s'effectue dans l'urne  $U_r$ .
- Plus généralement, pour tout entier  $k$  non nul, si la boule  $s$  a été piochée au  $k^{\text{e}}$  tirage dans une certaine urne, on repose cette boule dans la même urne, puis on effectue le  $(k+1)^{\text{e}}$  tirage dans l'urne  $U_s$ .

Pour tout entier naturel  $k$ , on note :

- $Z_k$  est la variable aléatoire égale au numéro de la boule piochée au  $k^{\text{e}}$  tirage.

**On convient que  $Z_0 = n$ .**

- $F_k$  est le polynôme de  $\mathbb{R}_n[X]$  défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_k(x) = \sum_{r=0}^n P(Z_k = r)x^r .$$

- $E[Z_k]$  l'espérance de la variable  $Z_k$ .

- 5) a) À l'aide de la formule des probabilités composées, calculer, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $P(Z_1 = n, \dots, Z_k = n)$ .

- b) En déduire que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $P(Z_k = r) > 0$ .

- 6) À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall r \in \{0, 1, \dots, n\}, P(Z_{k+1} = r) = \sum_{i=r}^n \frac{P(Z_k = i)}{i+1} .$$

- 7) Établir les deux formules suivantes, valables pour tous entiers  $k \in \mathbb{N}$  et  $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ .

$$\begin{cases} (\mathcal{R}_1) : (n+1)P(Z_{k+1} = n) = P(Z_k = n) \\ (\mathcal{R}_2) : (r+1)P(Z_{k+1} = r) - (r+1)P(Z_{k+1} = r+1) = P(Z_k = r) \end{cases}$$

- 8) On admet dans cette question que la série  $\sum_{k \geq 0} P(Z_k = r)$ , i.e. la suite  $\left( \sum_{k=0}^K P(Z_k = r) \right)_{K \in \mathbb{N}}$ , converge pour tout  $r \in \{1, \dots, n\}$  et on pose  $S_r$  sa limite.

- a) En sommant les relations  $(\mathcal{R}_1)$ , donner la valeur de  $S_n$ .

- b) En sommant les relations  $(\mathcal{R}_2)$ , donner la valeur de  $S_{n-1}$  et montrer que la suite  $(rS_r)_{1 \leq r \leq n-1}$  est constante.

- 9) Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Démontrer la relation

$$(\mathcal{S}) : \forall x \in \mathbb{R}, (x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = F_k(x) .$$

- 10) a) Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Établir que  $F'_k(1) = E[Z_k]$  et  $F''_k(1) = E[Z_k(Z_k - 1)]$ .

- b) En dérivant une fois puis deux fois la relation  $(\mathcal{S})$ , donner la relation de récurrence vérifiée par la suite  $(F'_k(1))_{k \in \mathbb{N}}$  ainsi que la relation de récurrence vérifiée par la suite  $(F''_k(1))_{k \in \mathbb{N}}$ .

- c) Donner la valeur de  $F'_k(1)$  et de  $F''_k(1)$  en fonction de  $k$  et de  $n$ . Expliciter alors la variance  $V(Z_k)$  de  $Z_k$  en fonction de  $k$  et de  $n$ .

### Partie III : Loi de chacune de ces variables aléatoires.

On reprend toutes les notations des parties I et II et on pourra admettre tous les résultats établis dans ces deux parties. Rappelons également qu'à la question II.4 la relation  $(\mathcal{S})$  est démontrée, ce qui revient à écrire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, g(F_{k+1}) = F_k .$$

Pour finir, pour tout entier  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , on désigne par  $u_k$  le polynôme de  $\mathbb{R}_n[X]$  défini par :

$$u_k = (X-1)^k .$$

11) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{r=0}^n P(Z_k = r) e_r = F_k = f^k(e_n) .$$

12) Prouver que  $(u_0, u_1, \dots, u_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

13) Calculer  $f(u_r)$  pour  $r \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Retrouver ainsi qu'il existe une base dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale.

14) Justifier que :

$$e_n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} u_r$$

et que :

$$\forall r \in \{0, 1, \dots, n\}, u_r = \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} e_j .$$

15) Démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, f^k(e_n) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \frac{1}{(r+1)^k} u_r .$$

16) Soit  $k \in \mathbb{N}$  et  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ . À l'aide des questions précédentes, établir que :

$$P(Z_k = j) = \sum_{r=j}^n (-1)^{r-j} \binom{n}{r} \binom{r}{j} \frac{1}{(r+1)^k} .$$

17) Application.

a) Soit  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Déterminer un réel  $M_{n,j}$  tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, |P(Z_k = j)| \leq \frac{M_{n,j}}{(j+1)^k}$$

puis justifier que la série  $\sum_{k \geq 0} P(Z_k = j)$ , i.e. la suite  $\left( \sum_{k=0}^K P(Z_k = j) \right)_{K \in \mathbb{N}}$ , converge lorsque  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

b) La série  $\sum_{k \geq 0} P(Z_k = 0)$ , i.e. la suite  $\left( \sum_{k=0}^K P(Z_k = 0) \right)_{K \in \mathbb{N}}$ , est-elle convergente ?

## Partie d'informatique : simulation des variables aléatoires.

Pour chaque question, on écrira une fonction respectant la syntaxe du langage **Python**.

On rappelle que la fonction **randrange(a,b)** de la bibliothèque **random** permet d'obtenir une réalisation d'une variable aléatoire de loi uniforme sur  $\llbracket a, b \rrbracket$ , les appels successifs de cette fonction pouvant être considérés comme donnant des réalisations mutuellement indépendantes de cette loi.

18) Écrire une fonction **Z(k,n)** prenant en argument un entier naturel **k** et un entier naturel **n** et donnant en sortie une réalisation de  $Z_k$ .

19) Écrire une fonction **zero\_Z(n)** prenant en argument un entier naturel **n** et donnant en sortie le premier rang  $n_0$  dans la suite  $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tel que  $Z_{n_0} = 0$ .

— FIN —