Lycée La Martinière Monplaisir — Année 2015/2016

MPSI - Mathématiques — Second Semestre

Feuille d'exercice n° 26 : **Séries numériques**

Exercice 1 On considère deux séries (u_n) et (v_n) à termes positifs.

1. Démontrer que si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors la série de terme général $\sqrt{u_n v_n}$ converge aussi.
2. On suppose maintenant que $v_n = \dfrac{1}{1+n^2 u_n}$.
   (a) Exprimer $\sqrt{u_n v_n}$ en fonction de v_n et de n.
   (b) En déduire que $\sum v_n$ et $\sum u_n$ ne peuvent pas converger toutes les deux.

Exercice 2 ( ) Comment choisir deux réels a et b tels que $\sum u_n$ converge, avec $u_n = \ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$? Dans le cas de convergence, donner la valeur de la somme.

Exercice 3 Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle décroissante de limite nulle.
On suppose que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $v_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right) - nu_n$ est bornée. On veut montrer que la série $\sum u_n$ converge.

1. Montrer que (v_n) est croissante, puis convergente. On note ℓ sa limite.
2. Exprimer $u_n - u_{n+1}$ en fonction de v_n et v_{n+1}.
3. En sommant l'égalité précédente de n à $+\infty$, montrer que $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}(\ell - v_n)$.
4. En déduire que $nu_n \to 0$, et enfin que la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 4 ( ) On étudie la suite (u_n) définie par : $u_0 \in]0,\pi/2[$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que (u_n) est une suite à termes positifs, et qu'elle est convergente.
2. Déterminer la limite de (u_n).
3. (a) Donner un DL à l'ordre 3 de u_{n+1} en fonction de u_n, quand n tend vers $+\infty$. En déduire un équivalent de u_n^3 en fonction de $(u_{n+1} - u_n)$.
   (b) Déterminer la nature de la série de terme général u_n^3.
4. Déterminer la nature de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
5. (a) Donner un équivalent de $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ en fonction de u_n, quand n tend vers $+\infty$.
   (b) En déduire la nature des séries de termes généraux u_n^2 et u_n.

Exercice 5 ( ) Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \frac{\text{ch } n}{\text{ch } 2n}$
2. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$
3. $u_n = \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
4. $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
5. $u_n = \frac{1}{n\cos^2 n}$
6. $u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

Exercice 6 (✎) Déterminer la nature des séries de terme général, avec $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\dfrac{2^n n}{n!}$
2. $\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)^{\ln n}$
3. $\left(\dfrac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}\right)^n$
4. $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln^2 k$

Indication pour 4 : grâce à un encadrement, trouver un équivalent de u_n.

Exercice 7 Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \begin{cases} 1/n \text{ si } n \text{ est un carré} \\ 1\big/n^2 \text{ sinon} \end{cases}$.

Exercice 8 Existence et calcul de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$$

Exercice 9 Existence et calcul de

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 10 Sachant $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$, calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!}$$

Exercice 11 Convergence puis calcul de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}$$

Exercice 12 (🚲) — Transformation d'Abel —
Soient (a_n) une suite positive décroissante de limite nulle et (S_n) une suite bornée.
a) Montrer que la série $\sum (a_n - a_{n+1})S_n$ est convergente.
b) En déduire que la série $\sum a_n(S_n - S_{n-1})$ est convergente.
c) Etablir que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, la série $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$ est convergente.

Exercice 13 Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{(\ln 2)^2 + \cdots + (\ln n)^2}$$

Exercice 14 (⛰) Pour $\alpha > 1$, on pose

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \text{ et } R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

Étudier, selon α, la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{R_n}{S_n}$.

Exercice 15 (🚲) Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, telle que $f(0) = 0$ et $|f'(0)| < 1$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $|u_0| < \alpha$, la série de terme général u_n converge absolument.