Devoir à la maison n° 12

À rendre le 28 janvier

I. Polynômes de Tchebychev

On définit la suite de polynômes de Tchebychev, notée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$, par :

$$P_0 = 1, \qquad P_1 = X, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n.$$

On dit qu'un polynôme P est pair si $P(-X) = P$, impair si $P(-X) = -P$.

1) **a)** Calculer le degré et le coefficient dominant de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n est de même parité que n.

c) Calculer $P_n(1)$, $P_n(-1)$ et $P_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Soit $x \in \mathbb{R}$, quelle relation de récurrence vérifie la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$? En déduire la valeur de $P_n(x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) **a)** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ P_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant la relation : $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ P_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$.

c) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, toutes les racines de P_n.

d) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, toutes les racines de P_n'.

3) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n \wedge P_{n+1} = 1$.

4) Écrire une fonction `Tchebychev(n)` prenant en argument un entier naturel `n` et renvoyant la liste des coefficients de $P_{\mathtt{n}}$.
Ainsi, `Tchebychev(2)` renverra `[2,0,-1]`, car $P_2 = 2X^2 - 1$.

II. Théorème de Darboux

À la fin du XIX$^{\text{e}}$ siècle, les mathématiciens ont démontré que toute fonction continue vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. Beaucoup conjecturent que la réciproque est vraie. Cependant, en 1875, Gaston Darboux, dans son *Mémoire sur les fonctions discontinues* montre que cela est faux. Il introduit notamment la fonction φ, définie par $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(y) = y^2 \sin\dfrac{1}{y}$ pour $y \neq 0$.

1) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Étudier la continuité de φ'.

3) Montrer que φ' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$, pour tout m compris entre $\varphi'(a)$ et $\varphi'(b)$, il existe $c \in [a, b]$ vérifiant $\varphi'(c) = m$.

4) Le cas de φ' est-il isolé ou se généralise-t-il au cas de toutes les dérivées ? Pour étudier la question, considérons $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application quelconque dérivable.

  a) Montrer que si $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$, alors f ne peut admettre de minimum en a ni en b.

  b) En déduire que, dans ce cas, f' s'annule en un point c appartenant à $]a, b[$.

  c) En supposant seulement $f'(a) < f'(b)$, montrer que pour tout $m \in]f'(a), f'(b)[$, il existe $c \in]a, b[$ vérifiant $f'(c) = m$.

  d) Montrer le théorème de Darboux : pour tout m compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$, il existe $c \in [a, b]$ vérifiant $f'(c) = m$ (sans supposer $f'(a) < f'(b)$).

Note : Darboux exhibe alors une fonction qui est une dérivée mais n'est continue en aucun rationnel. Il s'agit donc d'une application discontinue en une infinité dense de points mais vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires ! Depuis, les applications vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires sont appelées fonctions de Darboux. Un résultat étonnant sur ces fonctions est que toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme somme de deux fonctions de Darboux.

— **FIN** —