Devoir à la maison n° 04

À rendre le 08 octobre

Dans ce problème, on s'autorisera à utiliser librement le résultat suivant :

Soit g une fonction continue sur un segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$. S'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in [a,b], |g(t)| \leqslant k$, alors $\left| \int_a^b g(t)\, dt \right| \leqslant k(b-a)$.

On munit le plan P d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, où l'unité est 5 cm. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\cos(x)$.

I) Étudions d'abord quelques propriétés élémentaires de la courbe f.

1) Étudier les variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et tracer la courbe représentative Γ de f sur cet intervalle. On précisera notamment les coefficients directeurs des tangentes aux points de la courbe d'abscisses $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = 0$, et $x = \frac{\pi}{2}$.

2) Trouver deux réels a et b tels que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F : x \mapsto (a\cos(x) + b\sin(x))\mathrm{e}^{-x}$$

soit une primitive de f.

3) Calculer l'aire délimitée par Γ, les droites d'équations $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$ ainsi que par l'axe des abscisses. On exprimera le résultat en cm^2.

II) On se propose maintenant d'étudier l'intersection de la courbe Γ avec la droite Δ d'équation $y = x$. On dit aussi que l'on recherche les *points fixes* de la fonction f.

1) Existe-t-il des points d'intersection de Γ et de Δ dont l'abscisse appartient à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$?

2) Soit φ la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $\varphi : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\cos(x) - x$.

a) Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Étudier les variations de φ.

c) En déduire qu'il existe un réel unique α dans $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\mathrm{e}^{-\alpha}\cos(\alpha) = \alpha$ ($i.e$, $f(\alpha) = \alpha$).

d) On pose $\beta = f(1) = \mathrm{e}^{-1}\cos(1)$. Prouver d'abord que $\beta < 1$ puis, en utilisant le sens de variation de f, montrer l'encadrement :

$$\beta < \alpha < 1.$$

3) On pose $k = |f'(\beta)|$. On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\beta \leqslant u_n \leqslant 1$.

b) En étudiant le signe de f'' sur l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, prouver que, pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$,

$$f'(0) < f'(x) < f'\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

c) En déduire que $k < 1$.

d) Prouver que, pour tout réel x dans $[\beta, 1]$, $|f'(x)| \leqslant k$.

e) Montrer que, pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant k|u_n - \alpha|$.

f) En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

— **FIN** —