


Feuille d'exercice n° 05 : **Notion d'application**

Exercice 1 () Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

$$x \mapsto x + 1 \qquad y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ y - 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$$

- 1) Préciser l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité éventuelle de f et g .
- 2) Préciser $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto x + 1 - \frac{1}{x - 1}$$

- 1) f est-elle injective ? surjective ?
- 2) Déterminer une partie E telle que $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ soit bijective et expliciter la réciproque.

$$x \mapsto x + 1 - \frac{1}{x - 1}$$

Exercice 3 Soit E un ensemble.

- 1) Montrer que pour toutes parties A et B de E , on a


$$\mathbb{1}_{(A \cap B)} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B, \quad (1)$$

$$\mathbb{1}_{(A^c)} = 1 - \mathbb{1}_A, \quad (2)$$



$$\mathbb{1}_{(A \cup B)} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B. \quad (3)$$

- 2) Montrer que l'application $\mathbb{1} : \mathcal{P}(E) \rightarrow \{0, 1\}^E$ est bijective.

$$A \mapsto \mathbb{1}_A$$

Exercice 4 () Soit E, F, G trois ensembles, $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$. Établir les implications suivantes.

- | | |
|--|---|
| 1) $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective | 3) $g \circ f$ injective et f surjective $\Rightarrow g$ injective |
| 2) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective | 4) $g \circ f$ surjective et g injective $\Rightarrow f$ surjective |

Exercice 5 ( ) Soient E, E', F, F' quatre ensembles, $u : E' \rightarrow E$, $v : F \rightarrow F'$ deux applications. On définit l'application $\varphi : F^E \rightarrow F'^{E'}$.

$$f \mapsto v \circ f \circ u$$

- 1) Vérifier que φ est bien définie.
- 2) Montrer que si v est injective et u surjective alors φ est injective.
- 3) Montrer que si v est surjective et u injective alors φ est surjective.

Exercice 6 Soit E un ensemble et A, B deux parties fixées de E . Soit $\varphi : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{cases}$.

- 1) Qu'est-ce que $\varphi(\emptyset)$? $\varphi(E \setminus (A \cup B))$?
- 2) À quelle condition sur A et B , φ est-elle injective ?
- 3) Est-ce que le couple (\emptyset, B) possède un antécédent par φ ?
- 4) À quelle condition sur A et B , φ est-elle surjective ?

Exercice 7 (📌) – **Factorisation d'une application** –

- 1) Soit $f : F \rightarrow E$ et $g : G \rightarrow E$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h : G \rightarrow F$ telle que $g = f \circ h$ si et seulement si $g(G) \subset f(F)$.
À quelle condition h est-elle unique ?
- 2) Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : E \rightarrow G$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h : F \rightarrow G$ telle que $g = h \circ f$ si et seulement si $\forall x, y \in E, (f(x) = f(y) \Rightarrow g(x) = g(y))$.
À quelle condition h est-elle unique ?

Exercice 8 (📌) – **Parties saturées pour la relation d'équivalence associée à f** –

Soit $f : E \rightarrow F$ une application, et $\mathcal{S} = \{ X \subset E \mid f^{-1}(f(X)) = X \}$.

- 1) Pour $A \subset E$, montrer que $f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{S}$.
- 2) Montrer que \mathcal{S} est stable par intersection et réunion.
- 3) Soient $X \in \mathcal{S}$ et $A \subset E$ tels que $X \cap A = \emptyset$. Montrer que $X \cap f^{-1}(f(A)) = \emptyset$.
- 4) Soient X et $Y \in \mathcal{S}$. Montrer que \overline{X} et $Y \setminus X$ appartiennent à \mathcal{S} .
- 5) Montrer que l'application $\begin{matrix} \mathcal{S} & \rightarrow & \mathcal{P}(f(E)) \\ A & \mapsto & f(A) \end{matrix}$ est une bijection.


Exercice 9 (🚲) Démontrer le théorème de Cantor : « Soit E un ensemble, il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$ ».

Indication : avec φ une application de E dans $\mathcal{P}(E)$, on pourra s'intéresser à la partie


$$A = \{x \in E \mid x \notin \varphi(x)\}.$$

Exercice 10 (📌 🚲) Soit E, I deux ensemble, $f : E \rightarrow I$ une application surjective. On pose, pour tout $i \in I$, $A_i = f^{-1}(\{i\})$.

Montrer que les A_i sont non vides, deux à deux disjoints, de réunion égale à E . (On dit que les A_i forment une *partition* de E .)

Exercice 11 () Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.

- 1) a) Montrer que, pour toute partie A de E , $A \subset f^{-1}(f(A))$.
 b) Montrer que f est injective si et seulement si, pour toute partie A de E , $f^{-1}(f(A)) = A$.
- 2) a) Montrer que, pour toute partie B de F , $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
 b) Montrer que f est surjective si et seulement si, pour toute partie B de F , $f(f^{-1}(B)) = B$.

Exercice 12 () Soient E, F deux ensembles, soit $f : E \rightarrow F$. Montrer que f est injective si et seulement si :

$$\forall A, A' \in \mathcal{P}(E), f(A \cap A') = f(A) \cap f(A').$$

