Devoir à la maison n° 07

À rendre le 26 novembre

I. Polygone régulier inscrit dans un cercle

Soit $A_0, \dots, A_{n-1}$ les n sommets d'un polygone régulier inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$. Soit M un point de $\mathscr{C}$. Montrer que la quantité $MA_0^2 + \dots + MA_{n-1}^2$ ne dépend pas de M.

II. Injectivité, surjectivité et composition

Soit E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application et G un troisième ensemble, ayant au moins deux éléments. On construit deux nouvelles applications :

$$f_* : \left\{ \begin{array}{ccc} E^G & \to & F^G \\ \varphi & \mapsto & f \circ \varphi \end{array} \right. \text{ et } f^* : \left\{ \begin{array}{ccc} G^F & \to & G^E \\ \varphi & \mapsto & \varphi \circ f \end{array} \right. .$$

Montrer l'équivalence suivante :

$$f \text{ est injective} \iff f_* \text{ est injective} \iff f^* \text{ est surjective.}$$

III. Étude d'une application

Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}}\right)$.

1) Préciser l'ensemble de définition de f.

2) Préciser l'ensemble de dérivabilité de f et calculer f'.

3) En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ en fonction de $\operatorname{Arctan}(x)$.

IV. Étude d'équations différentielles linéaires, avec recollement

1) On cherche à déterminer les solutions $y \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de l'équation $x^2y' + xy = 1$.

- **a)** Déterminer les solutions de cette équation qui sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}_+^\star$ (resp. $\mathbb{R}_-^\star$).
- **b)** Conclure.

2) Même question avec l'équation $x^3y' = 2y$.

V. Équation différentielle non linéaire

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$xy' + y = \frac{1}{x^2y^2}$$

on pourra poser $u(x) = xy(x)$.

VI. Un théorème de point fixe

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application croissante. On veut montrer que f possède un point fixe, *i.e.* qu'il existe $t \in [0,1]$ tel que $f(t) = t$.

1) On note $T = \{x \in [0,1] \mid f(x) \leqslant x\}$.

- **a)** Montrer que T possède une borne inférieure, notée t.
- **b)** Montrer que $f(T) \subset T$.
- **c)** Montrer que $f(t)$ minore T.
- **d)** Déduire de tout ceci que $f(t) = t$.

2) Ce résultat est-il toujours vrai :

- **a)** pour $f :]0,1] \to]0,1]$ croissante ?
- **b)** pour $f : [0,1[\to [0,1[$ croissante ?

— **FIN** —