

Feuille d'exercice n° 21 : **Espaces vectoriels de dimension finie**

**Exercice 1** (✎) Dans  $\mathbb{R}^4$ , on considère les familles de vecteurs suivantes  
 $v_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $v_2 = (0, 1, 2, -1)$ ,  $v_3 = (1, 0, -2, 3)$ ,  $v_4 = (2, 1, 0, -1)$ ,  $v_5 = (4, 3, 2, 1)$ .  
 $v_1 = (1, 2, 3, 4)$ ,  $v_2 = (0, 1, 2, -1)$ ,  $v_3 = (3, 4, 5, 16)$ .  
 $v_1 = (1, 2, 3, 4)$ ,  $v_2 = (0, 1, 2, -1)$ ,  $v_3 = (2, 1, 0, 11)$ ,  $v_4 = (3, 4, 5, 14)$ .

Ces vecteurs forment-ils :

1. Une famille libre ? Si oui, la compléter pour obtenir une base de  $\mathbb{R}^4$ . Si non donner des relations de dépendance entre eux et extraire de cette famille au moins une famille libre.
2. Une famille génératrice ? Si oui, en extraire au moins une base de l'espace. Si non, donner la dimension du sous-espace qu'ils engendrent.

**Exercice 2** (✎)

1. Montrer que l'application  $\varphi : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X]$  est un isomorphisme.  
$$P \mapsto (P(0), P')$$
2. En déduire que  $\mathbb{K}[X]$  n'est pas de dimension finie.

**Exercice 3** (✎) Définir par leurs équations cartésiennes dans la base canonique les sous-espaces vectoriels :

1.  $F$  engendré par :  $\{(3, 1, 2); (2, 1, 3)\}$  dans  $\mathbb{R}^3$
2.  $G$  engendré par :  $(1, 2, 3)$  dans  $\mathbb{R}^3$
3.  $H$  engendré par  $\{(1, 2, 3, 0); (4, -1, 2, 0); (2, 1, -3, 0)\}$  dans  $\mathbb{R}^4$

**Exercice 4** (🚲) Soit  $(P_n)$  une suite de polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , vérifiant  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\deg P_n = n$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(P_0, \dots, P_n)$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .
2. La famille  $(P_n)$  est-elle une base de  $\mathbb{K}[X]$  ?

**Exercice 5** (✎)

Montrer que la famille  $((X - a)^i)_{0 \leq i \leq n}$  avec  $a$  fixé, est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .  
Donner les composantes de  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  dans cette base.

**Exercice 6** (✎)

Dans  $\mathbb{R}_3[X]$ , soit  $P$  le polynôme  $P = X^3 + 2X - 1$  et soit  $Q$  le polynôme  $Q = 2X - 1$ . Déterminer une base  $B$  de  $\mathbb{R}_3[X]$  dont  $P$  et  $Q$  sont éléments.

**Exercice 7** (✎) Soient  $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, -1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (2, 1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (1, -1, 1, -1)$ ,  $\mathbf{v}_4 = (7, 2, 0, -1)$  et  $\mathbf{v}_5 = (-2, 1, 0, 5)$ . Donner une base du sous-espace vectoriel  $F = \text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5)$ . Déterminer un supplémentaire  $G$  de  $F$  dans  $\mathbb{R}^4$ .


**Exercice 8** (✎) Soient  $E$  un espace vectoriel et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie. Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans lui-même.

1. Montrer que, si  $F \subset f(F)$  alors  $f(F) = F$ .
2. Montrer que, si  $f$  est injective et  $f(F) \subset F$  alors  $f(F) = F$ .

**Exercice 9** Soit  $E$  de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer l'équivalence des trois propriétés :

- (i)  $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$ .
- (ii)  $\text{Im } f = \text{Im } f^2$ .
- (iii)  $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$ .

**Exercice 10** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie, et  $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$  avec  $E = \text{Im } f + \text{Im } g = \text{Ker}(f) + \text{Ker}(g)$ . Montrer que ces sommes sont directes.

**Exercice 11** () Soient  $E$  et  $F$  de dimensions finies et  $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ .

1. Montrer que  $\text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$ .
2. En déduire que  $|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u + v)$ .

**Exercice 12** Soient  $E_0, E_1, \dots, E_n$   $n + 1$  espaces vectoriels sur un même corps commutatif  $\mathbb{K}$ , de dimensions respectives  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ . On suppose qu'il existe  $n$  applications linéaires  $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$  telles que :

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, f_k \in \mathcal{L}(E_k, E_{k+1}).$$

et de plus :

- $f_0$  est injective ;
- $\forall j \in \{1, \dots, n-1\}, \text{Im } f_{j-1} = \text{Ker}(f_j)$ ;
- $f_{n-1}$  est surjective.

Montrer que

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \alpha_j = 0.$$

**Exercice 13** Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}_n[X]$  dans  $\mathbb{R}_n[X]$  définie par  $f(P) = P + P' + P''$ .


1. Montrer que  $f$  est injective. En déduire que  $f$  est bijective.
2. On appelle  $\varphi$  l'application de  $\mathbb{R}[X]$  dans  $\mathbb{R}[X]$  définie par  $\varphi(P) = P + P' + P''$ . Montrer que  $\varphi$  est surjective puis bijective.

**Exercice 14** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Montrer que

$$n \text{ est pair} \Leftrightarrow \exists f \in \mathcal{L}(E) \quad \text{Im } f = \text{Ker } f$$

**Exercice 15** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces de  $E$  de dimension finie. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme  $u$  tel que  $\text{Ker}(u) = F$  et  $\text{Im}(u) = G$ .

Soit  $F = \{x + y + z = 0\}$  dans  $\mathbb{R}^3$  et  $G = \{\lambda(2, -1, -1)/\lambda \in \mathbb{R}\}$ . Construire un tel endomorphisme  $u$ .

**Exercice 16** () Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer  $\text{rg}(f^n) = \text{rg}(f^{n+1})$

**Exercice 17** Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux hyperplans de  $E$ , espace vectoriel de dimension  $n$ . Montrer que :

$$\dim(H_1 \cap H_2) \geq n - 2.$$

Généraliser.

**Exercice 18** Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  distinct de  $E$ . Montrer que  $F$  est l'intersection d'un nombre fini d'hyperplans. (*indication* : on pourra interpréter  $F$  comme noyau d'une certaine application linéaire.)

**Exercice 19** (✎) Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$  et  $H = \{P \in \mathbb{K}_n[X] \mid P(\alpha) = 0\}$ . Montrer que  $H$  est un hyperplan de  $\mathbb{K}_n[X]$  et en déterminer une base.

**Exercice 20** (✎) Montrer que les formes linéaires  $(x, y, z) \rightarrow x + 2y + 3z$  et  $(x, y, z) \rightarrow x - 2y + 3z$  sont linéairement indépendantes.

