

Feuille d'exercice n° 07 : **Intégration pour les équations différentielles - fiche
d'entraînement - correction**

Exercice 1

1. $\int x^3 \sqrt{4+x^4} dx = \frac{(x^4+4)^{3/2}}{6}$
2. $\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln(\ln x)$
3. $\int \frac{(x+5) dx}{\sqrt{x+4}} = 2 \left(\frac{(x+4)^{3/2}}{3} + \sqrt{x+4} \right)$
4. $\int x e^{-x/10} dx = (-10x - 100) e^{-x/10}$
5. $\int x^2 e^{-x/10} dx = (-10x^2 - 200x - 2000) e^{-x/10}$
6. $\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9}$
7. $\int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1} \ln(x)}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$ si $n \neq -1$, $\frac{\ln^2 x}{2}$ si $n = -1$
8. $\int x^2 \sin x dx = 2x \sin x + (2-x^2) \cos x$
9. $\int x^3 e^{-x^2} dx = \frac{(-x^2-1)e^{-x^2}}{2}$
10. $\int x^3 \sqrt{1+x^2} dx = \frac{x^2(x^2+1)^{3/2}}{5} - \frac{2(x^2+1)^{3/2}}{15}$
11. $\int \operatorname{Arcsin}(x) dx = x \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2}$
12. $\int \operatorname{Arcsin}^2(x) dx = x \operatorname{Arcsin}^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \operatorname{Arcsin} x - 2x$
13. $\int \operatorname{Arctan}(x) dx = x \operatorname{Arctan} x - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$
14. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} dx = -\operatorname{Arcsin}(x/3) - \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$
15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\ln \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} + \frac{1}{|x|} \right)$ (poser $x = \cos u$ puis $t = \frac{1}{\cos u} + \tan u$) ou plus rapide
 $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\operatorname{Argch}(1/|x|)$ en posant : $1/|x| = \operatorname{ch} u$.

16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{a}{|x|} + \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{|x|} \right)$ (poser $x = a \tan u$ puis $t = \frac{1}{\sin u} + \cotan u$) ou plus rapide : $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{Argsh}(a/|x|)$ en posant $a/|x| = \operatorname{sh} u$.
17. $\int \sqrt{4+x^2} dx = 2 \operatorname{Argsh}(x/2) + \frac{x\sqrt{x^2+4}}{2}$
18. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{\ln(x+a)}{2a} - \frac{\ln(x-a)}{2a}$
19. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx = a \operatorname{Arcsin}(a/|x|) + \sqrt{x^2-a^2}$
20. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{\operatorname{Arctan}(x/a)}{2a^3} + \frac{x}{2a^2x^2+2a^4}$ (poser $x = a \tan u$).

Exercice 2

1. on pose $u = x^2$, et ensuite on fait une iipp : $\int x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int u f(u) du = \frac{1}{2} (u g(u) - \int g(u) du = \frac{1}{2} (x^2 g(x^2) - h(x^2))$
2. $\int x^{2n-1} f(x^n) dx = \frac{1}{n} (x^n g(x^n) - h(x^n))$ par analogie.

Exercice 3 Dans les primitives suivantes, trouver un entier n qui permette un calcul par changement de variable, et calculer la primitive :

1. avec $n = 3$, $\int x^n \sqrt{1-x^4} dx = -\frac{1}{6} (1-x^4)^{3/2}$.
2. avec $n = 3$: $\int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}} dx = -\frac{1}{2} \sqrt{1-x^4}$, et avec $n = 1$: $\int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}} dx = -\frac{1}{2} \operatorname{Arcsin}(x^2)$.
3. avec $n = 9$: $\int \frac{x^n}{1+x^{10}} dx = \frac{1}{10} \ln(1+x^{10})$, et avec $n = 4$, $\int \frac{x^n}{1+x^{10}} dx = \frac{1}{5} \operatorname{Arctan}(x^5)$.
4. avec $n = 7$, $\int \frac{x^6}{1+x^n} dx = \frac{1}{7} \ln(1+x^7)$, et avec $n = 14$, $\int \frac{x^6}{1+x^n} dx = \frac{1}{7} \operatorname{Arctan}(x^7)$.
5. avec $n = 1$, $\int x^n e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$.
6. avec $n = 4$, $\int x^n e^{2x^5} dx = \frac{1}{10} e^{2x^5}$.
7. avec $n = 6$, $\int x^5 \sqrt{1-x^n} dx = -\frac{1}{9} (1-x^6)^{3/2}$.
8. avec $n = 7$, $\int \frac{x^6}{\sqrt{1-x^n}} dx = -\frac{2}{7} \sqrt{1-x^7}$, et avec $n = 14$, $\int \frac{x^6}{\sqrt{1-x^n}} dx = \frac{1}{7} \operatorname{Arcsin}(x^7)$.
9. avec $n = 1$, $\int \frac{dx}{x^n \ln x} = \ln(\ln x)$.
10. avec $n = 1$, $\int \frac{dx}{x^n (\ln x)^7} = -\frac{1}{6 \ln^6 x}$
11. avec $n = 5$, $\int x^n \sin(x^6) dx = -\frac{1}{6} \cos(x^6)$.

12. avec $n = 3$, $\int \frac{\sin^n x \cos x}{\sqrt{3 + \sin^4 x}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{3 + \sin^4 x}.$

13. avec $n = 4$, $\int \frac{\sin^3 x \cos x}{\sqrt{3 + \sin^n x}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{3 + \sin^4 x}.$