XII Limite d'une fonction

7 mars 2016

Dans tout ce chapitre, sauf mention expresse du contraire, I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$.

1 Préliminaires

Définition 1.0.1 (Rappel)**.**
Soit a un réel. Soit ε un réel *strictement* positif. On appelle *voisinage* de a toute partie de $\mathbb{R}$ contenant au moins une boule ouverte de centre a. L'ensemble des voisinages de a est noté $\mathscr{V}(a)$.

On appelle *voisinage* de $+\infty$ (resp. $-\infty$) dans $\mathbb{R}$ toute partie de $\mathbb{R}$ contenant au moins un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ (resp. $]-\infty, A]$) où $A \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.0.2.
Soit a un réel et V une partie de $\mathbb{R}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) V est un voisinage de a ;

(ii) V contient une boule fermée de centre a ;

(iii) V contient au moins un intervalle ouvert contenant a.

Démonstration.
— On a trivialement (i) $\Rightarrow$ (iii), toute boule ouverte de centre a étant un intervalle ouvert contenant a.
— Supposons (iii) et montrons (ii) : V contient au moins un intervalle ouvert contenant a, donc contient au moins un intervalle ouvert d'extrémités réelles m et M contenant a : on a $m < a < M$. Posons $r = \frac{1}{2}\min(M-a, a-m)$. On a $m < a-r < a < a+r < M$. Donc $[a-r, a+r] \subset]m, M[\subset V$. De plus $r > 0$, donc V contient une boule fermée de centre a.
— On a trivialement (ii) $\Rightarrow$ (i).

□

Définition 1.0.3.
On dit qu'une propriété est vraie *au voisinage* d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ s'il existe un intervalle ouvert contenant a sur lequel la propriété est vérifiée.

Exemple 1.0.4.
• $]-1, 1[\in \mathscr{V}(0)$, et $]-1000000, 0.0000001[$ aussi.
• $]-2, +\infty[\in \mathscr{V}(+\infty)$.
• $]-\infty, 52[\in \mathscr{V}(-\infty)$.

Exemple 1.0.5.
• La fonction sinus est strictement positive au voisinage de $\pi/2$.
• La fonction Arctan est supérieure à $\pi/4$ au voisinage de $+\infty$.

Remarque 1.0.6.
1. Une propriété est donc vraie au voisinage d'un point a si et seulement si l'ensemble des points où elle est vraie est un voisinage de a.
2. Dans certains cas, la propriété n'a pas de sens pour tous les réels, mais uniquement pour les éléments d'un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$. Par exemple, si on s'intéresse à la propriété «$\frac{1}{x^2} - 1 \geqslant 0$», celle-ci n'a de sens que sur $D = \mathbb{R}^*$. On dira alors que la propriété est vraie au voisinage de a si et seulement si l'ensemble des valeurs sur lequel elle est vraie est de la forme $V \cap D$ où V est un voisinage de a (on dit que $V \cap D$ est la *trace d'un voisinage de a dans D* ou *voisinage de a dans I* et par abus de langage, on abrège souvent en «voisinage de a»).
3. Dire qu'une propriété est vraie au voisinage de a est vague car on ne précise pas sur quel ensemble elle est vraie mais très pratique car on ne précise pas sur quel ensemble elle est vraie !
4. Quand on parle de plusieurs propriétés vraies «au voisinage d'un point a», il faut bien comprendre que tous ces voisinages ne sont pas nécessairement les mêmes. Par exemple, pour tout $\varepsilon > 0$, la propriété «$|x| \leqslant \varepsilon$» est vraie pour x au voisinage de 0 mais le voisinage dépend de ε (il s'agit de $[-\varepsilon, \varepsilon]$). On peut remarquer d'ailleurs que, bien que pour tout $\varepsilon > 0$, la propriété «$|x| \leqslant \varepsilon$» soit vraie pour x au voisinage de 0, il est faux d'affirmer que la propriété «pour tout $\varepsilon > 0$, $|x| \leqslant \varepsilon$» est vraie pour x au voisinage de 0 (elle n'est vraie qu'en 0 et $\{ 0 \}$ n'est pas un voisinage de 0).

Proposition 1.0.7.
Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Soit V un voisinage de a et W une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant $V \subset W$. Alors W est un voisinage de a.
2. Soit V et W deux voisinages de a. Alors $V \cap W$ est un voisinage de a.

En termes de propriétés, cela se traduit de la façon suivante :

1. Soit P et Q deux prédicats portant sur les réels, tel que P est vrai au voisinage de a et qu'on a $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) \Rightarrow Q(x)$. Alors Q est vrai au voisinage de a.
2. Soit P et Q deux prédicats portant sur les réels, chacun vrai au voisinage de a. Alors le prédicat $P \wedge Q$ est vrai au voisinage de a.

Démonstration.
On démontre le résultat dans le cas où $a \in \mathbb{R}$. Les cas $a = +\infty$ et $a = -\infty$ sont similaires.

1. V est un voisinage de a donc contient une boule ouverte $\mathscr{B}(a, \varepsilon)$ avec $\varepsilon > 0$. On a donc $\mathscr{B}(a, \varepsilon) \subset V \subset W$ donc W est un voisinage de a.
2. V et W contiennent respectivement des boules ouvertes $\mathscr{B}(a, \varepsilon)$ et $\mathscr{B}(a, \varepsilon')$ avec $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon' > 0$. Donc $V \cap W$ contient la boule $\mathscr{B}(a, \min(\varepsilon, \varepsilon'))$, donc est un voisinage de a.

La traduction en terme de propriétés est immédiate, il suffit de noter V et W les ensembles de réels respectifs sur lesquels P et Q sont vrais. Alors :

1. P est vrai au voisinage de a donc V est un voisinage de a. On a $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) \Rightarrow Q(x)$ donc $V \subset W$. Donc W est un voisinage de a.
2. P et Q sont vrais au voisinage de a donc V et W sont des voisinages de a, donc $V \cap W$ est un voisinage de a, or c'est l'ensemble des réels sur lequel $P \wedge Q$ est vrai donc $P \wedge Q$ est vrai au voisinage de a.

□

Lemme 1.0.8 (Propriété de Hausdorff)**.**
Soit ℓ_1 et ℓ_2 deux éléments distincts de $\overline{\mathbb{R}}$. Alors il existe V_1 et V_2 des voisinages respectifs de ℓ_1 et ℓ_2, tels que V_1 et V_2 soient disjoints.

Démonstration.
Vue dans le chapitre sur les suites. □

Corollaire 1.0.9.
Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors l'intersection de tous les voisinages de a est vide si $a = +\infty$ ou $a = -\infty$ et est $\{ a \}$ sinon. Autrement dit, aucun réel n'appartient à tous les voisinages de a si $a = +\infty$ ou $a = -\infty$ et, si $a \in \mathbb{R}$, a est l'unique réel appartenant à tous les voisinages de a.

Démonstration.
Notons E l'intersection de tous les voisinages de a. On a $E \subset \mathbb{R}$.

1. On a $\{ a \} \subset E$ si $a \in \mathbb{R}$ puisque a appartient alors à chacun de ses voisinages.
2. On a $E \subset \{ a \}$ dans tous les cas. En effet, soit $x \in E$. Supposons par l'absurde $x \neq a$. Alors, d'après le lemme de Hausdorff, il existe $V_1 \in \mathscr{V}(x)$ et $V_2 \in \mathscr{V}(a)$ vérifiant $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. On a d'une part $x \in E \subset V_2$ et d'autre part, $x \in \mathbb{R}$ donc $x \in V_1$. Donc $x \in V_1 \cap V_2$. C'est absurde. Donc $x = a$.

   Donc $\{ a \} \supset E$.
3. On en déduit le résultat : si $a \in \mathbb{R}$, on a $E = \{ a \}$, si $a \notin \mathbb{R}$, on a $E \subset \{ a \}$ et $E \subset \mathbb{R}$ donc $E \subset \varnothing$.

□

On va s'intéresser dans la suite à la notion de limite de fonction. Étant donné une partie E de $\mathbb{R}$, une fonction f définie sur E et $a \in \overline{\mathbb{R}}$, sans même connaître f, il est intuitivement clair que la notion de limite de f n'a pas de sens dans certains cas. Par exemple si $E = \mathbb{R}^-$, se questionner sur la limite de f en $+\infty$ ou en 1 n'a aucun sens. La définition ci-dessous va nous permettre, étant donné E, de définir précisément en quels points chercher si f admet une limite a un sens. Cet ensemble de points est appelé l'adhérence de E.

Exercice 1.0.10.
Pour les ensembles E suivants, quelles sont les valeurs sur lesquelles chercher si f admet une limite a un sens ?

1. $\mathbb{R}$
2. $[0, +\infty[$
3. $]0, +\infty[$
4. $]\pi, 42[$
5. $]\pi, 42]$
6. $\mathbb{R}^*$
7. $]-\infty, -7] \cup]6, 42]$
8. $\{0\}$

Définition 1.0.11 (HP – sera vu en MP).
Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

1. On appelle *intérieur de* E et on note $\mathring{E}$ l'ensemble des $x \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que E soit un voisinage de x, c'est-à-dire l'ensemble des x appartenant à E tels que E contienne une boule ouverte centrée en x.
2. On appelle *adhérence de* E et on note $\overline{E}$ l'ensemble des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ dont aucun voisinage n'est disjoint de E.
3. On appelle *frontière de* E l'ensemble $\overline{E} \setminus \mathring{E}$

Exercice 1.0.12.
Vérifier que pour les exemples de l'exercice 1.0.10, cette définition donne bien la même chose.

En pratique, on pourra essentiellement se contenter de la définition suivante, en se rappelant que l'adhérence (resp. l'intérieur) de l'union d'un nombre fini d'intervalles disjoints est l'union de leurs adhérences (resp. leurs intérieurs).

Remarque 1.0.13.
E est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\overline{E} = \overline{\mathbb{R}}$.

Définition 1.0.14.
Soit I un intervalle de la forme (a, b), avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, tels que $a \leqslant b$, et où les symboles (et) peuvent prendre la valeurs [ou].

1. On appelle *intérieur* de I, noté $\mathsf{Int}(I)$ ou $\mathring{I}$, l'intervalle $]a, b[$, c'est-à-dire I privé de ses extrémités. C'est le plus grand intervalle ouvert contenu dans I.
2. On appelle *fermeture* ou *adhérence* de I, noté $\overline{I}$, l'intervalle $[a, b]$, c'est-à-dire I augmenté de ses extrémités. C'est le plus petit intervalle fermé de $\overline{\mathbb{R}}$ contenant I.

2 Définitions de la limite d'une fonction

Comme pour les suites, nous allons réunir par un même vocabulaire différentes notions de limites : on peut considérer la limite d'une fonction en un point réel, en $+\infty$ et en $-\infty$; on peut considérer une limite réelle ou infinie. On traite donc simultanément neuf cas différents par la notion topologique de *voisinage* : quel gain en efficacité et en élégance !

Il convient toujours de savoir adopter le point de vue pertinent en fonction de la situation :

— dans les cas où l'on sait si la limite étudiée est finie, vaut $+\infty$ ou $-\infty$, et au voisinage de quel point on la considère, on utilisera les définitions naïves des limites (remarque 2.1.2) ;

— dans les autres cas, il peut être judicieux de raisonner en termes de voisinages.

2.1 Limite en un point

Définition 2.1.1.
Soit $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f *admet* ℓ *pour limite en* a et on note $f \underset{a}{\to} \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ si

pour tout voisinage $V \in \mathscr{V}(\ell)$, il existe un voisinage $W \in \mathscr{V}(a)$ tel que
$$\forall x \in W \cap I \quad f(x) \in V.$$

Remarque 2.1.2.
Cette définition se récrit suivant les cas :

(i) Pour $a, \ell \in \mathbb{R}$, en
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in I \\ |x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

(ii) Pour $a = +\infty, \ell \in \mathbb{R}$, en
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \\ x \geqslant M \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

(iii) Pour $a = -\infty, \ell \in \mathbb{R}$, en
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \\ x \leqslant M \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

(iv) Pour $a \in \mathbb{R}, \ell = +\infty$, en

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in I \quad |x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \geqslant M$$

(v) Pour $a = +\infty, \ell = +\infty$, en

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists L \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad x \geqslant L \Rightarrow f(x) \geqslant M$$

(vi) Nous laissons au lecteur le soin de compléter dans les autres cas.

Remarque 2.1.3. 1. L'énumération précédente permet de voir l'intérêt de la notion de voisinage : synthétiser en un seul cas les neuf cas possibles !

2. Comme dans le cas des suites, on obtient des propositions équivalents en remplaçant les inégalités larges (ou certaines d'entre elles) par des inégalités strictes. En revanche, attention aux inégalités $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ qui doivent être conservées strictes.
3. On peut également remplacer les conditions $M \in \mathbb{R}$ par $M \in \mathbb{R}_+^*$ ou $M \in \mathbb{R}_-^*$ suivant les cas.
4. L'ordre des quantificateurs est évidemment essentiel.
5. Sur les suites, le «$\forall n \geqslant n_0$» devait être compris comme portant sur un n entier, de façon à ce que u_n ait un sens. C'est le «$\forall x \in I$» qui ici remplit ce rôle, de façon à ce que $f(x)$ soit bien défini. Attention à ne pas l'oublier !
6. Remarquez que la caractérisation de la convergence d'une suite à l'aide de «$\forall \varepsilon \exists n_0 \dots$» est très similaire à celle de l'existence d'une limite finie pour une fonction en $+\infty$, de même la caractérisation de la divergence vers $+\infty$ d'une suite est très similaire à celle du fait qu'une fonction tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
7. Cette similarité n'est pas un hasard : regardez ce que donne la définition de limite de fonction (utilisant les voisinages) pour une fonction définie sur $\mathbb{N}$. Que constatez-vous ?

Proposition 2.1.4 (Caractérisation de la limite d'une fonction)**.**
Soit $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f admet ℓ pour limite en a

(ii) Pour tout voisinage V de ℓ, il existe un voisinage W de a vérifiant $f(W \cap I) \subset V$

(iii) Pour tout voisinage V de ℓ, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a dans I.

(iv) Pour tout voisinage V de ℓ, il existe W, un voisinage de a dans I vérifiant $f(W) \subset V$.

Démonstration. — Supposons (i) et montrons (ii). Soit V un voisinage de ℓ. Alors il existe un voisinage W de a vérifiant $\forall x \in W \cap I \quad f(x) \in V$. On a alors $f(W \cap I) \subset V$.
On a donc (ii).

— Supposons (ii) et montrons (iii). Soit V un voisinage de ℓ. Alors il existe un voisinage W de a vérifiant $f(W \cap I) \subset V$. On a donc $\forall x \in W \cap I \quad f(x) \in V$, donc $\forall x \in W \cap I \quad x \in f^{-1}(V)$. Donc $W \cap I \subset f^{-1}(V)$. Or $f^{-1}(V) \subset I$, donc $\left(W \cup f^{-1}(V)\right) \cap I = f^{-1}(V)$. Or W est un voisinage de a donc $W \cup f^{-1}(V)$ est un voisinage a, donc $f^{-1}(V) = \left(W \cup f^{-1}(V)\right) \cap I$ est la trace d'un voisinage de a sur I.
Donc pour tout voisinage V de l, $f^{-1}(V)$ est la trace sur I d'un voisinage de a.

— Supposons (iii) et montrons (iv), c'est-à-dire : pour tout $V \in \mathscr{V}(a)$, il existe W, trace sur I d'un voisinage de a vérifiant $f(W) \subset V$. Soit $V \in \mathscr{V}(\ell)$. Posons $W = f^{-1}(V)$. Alors d'après (iii), W est la trace sur I d'un voisinage de a. De plus $f(W) \subset V$. Donc on a (iv).

— Supposons (iv) et montrons (i), c'est-à-dire

$$\forall V \in \mathscr{V}(\ell) \quad \exists W \in \mathscr{V}(a) \quad \forall x \in W \cap I \qquad f(x) \in V.$$

Soit $V \in \mathscr{V}(\ell)$. D'après (iv), il existe W, trace sur I d'un voisinage W' de a vérifiant $f(W) \subset V$. Donc pour tout $x \in W' \cap I$, on a $f(x) \in V$.
Donc on a (i).

□

Théorème 2.1.5.
Soit $a \in \overline{I}$. Si f admet une limite en a, alors cette dernière est unique. Elle est alors notée $\lim\limits_{a} f$ ou

$\lim\limits_{t \to a} f(t)$. On note aussi dans le cas où cette limite est notée ℓ, $f \underset{a}{\to} \ell$ ou $f(t) \xrightarrow[t \to a]{} \ell$.

Démonstration.
Par l'absurde, supposons que f admette en a deux limites distinctes ℓ_1 et ℓ_2.

Alors, d'après lemme de Hausdorff, il existe V_1 et V_2 deux voisinages respectifs de ℓ_1 et ℓ_2 disjoints.

Il existe donc des voisinages W_1 et W_2 de a vérifiant $f(W_i \cap I) \subset V$ pour $i = 1, 2$.

On a alors, pour $i = 1, 2$, $f(W_1 \cap W_2 \cap I) \subset f(W_i \cap I) \subset V_i$.

Donc $f(W_1 \cap W_2 \cap I) \subset V_1 \cap V_2 = \varnothing$.

Or $W_1 \cap W_2$ est un voisinage de a et $a \in \overline{I}$ donc $(W_1 \cap W_2) \cap I$ est non vide.

Donc $f(W_1 \cap W_2 \cap I)$ est à la fois non vide et inclus dans $\varnothing$, ce qui est absurde.

Donc si f admet une limite en a, alors celle-ci est unique. □

Proposition 2.1.6.
Si $a \in I$ et si f a une limite ℓ en a, alors $\ell = f(a)$.

Il s'agit bien d'être certain que a appartient à I (et pas seulement à $\overline{I}$!).

Démonstration.
Supposons qu'on a $a \in I$ et que f a une limite ℓ en a.

Montrons que $f(a)$ appartient à tout voisinage de ℓ. Soit V un voisinage de l. Il existe alors un voisinage W de a vérifiant $f(W \cap I) \subset V$. Or $a \in W$ et $a \in I$, donc $f(a) \in V$.

D'après le corollaire 1.0.9 sur l'intersection des voisinages d'un élément de $\overline{\mathbb{R}}$, ℓ est donc réel et $\ell = f(a)$. □

Remarque 2.1.7.
Pour tous a et ℓ réels, on montre facilement que les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $f \underset{a}{\to} \ell$

(ii) $f - \ell \underset{a}{\to} 0$

(iii) $|f - \ell| \underset{a}{\to} 0$

(iv) $f(a+h) \xrightarrow[h \to 0]{} \ell$

Exemple 2.1.8.
Pour s'entraîner à manipuler la définition (mais ce n'est pas la meilleure méthode dans la pratique), considérons la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 + x \end{array}$ Montrons $f(x) \xrightarrow[x \to 1]{} 2$.

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - 2 = (x-1)(x^2 + x + 2)$.

On peut trouver un voisinage de 1 pour x sur lequel $|x| \leqslant 2$ et donc $|x^2 + x + 2| \leqslant 8$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un voisinage de 1 pour x vérifiant $|x - 1| \leqslant \frac{\varepsilon}{8}$.

Il existe donc un voisinage V de 1 tel que pour tout $x \in V$, on a à la fois $|x^2 + x + 2| \leqslant 8$ et $|x - 1| \leqslant \frac{\varepsilon}{8}$. On a alors $|f(x) - 2| \leqslant \varepsilon$.

Donc on a bien

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists V \in \mathscr{V}(2) \quad \forall x \in V \quad |f(x) - 2| \leqslant \varepsilon$$

Donc $f(x) \xrightarrow[x \to 1]{} 2$.

Théorème 2.1.9.
Toute fonction possédant une limite ***finie*** en a est bornée au **voisinage** de a.

Démonstration.
Comme pour les suites. □

2.2 Limites à gauche et à droite en un point

Définition 2.2.1.
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

(i) Si f est définie au voisinage de a à gauche, c'est-à-dire si $I \cap]-\infty, a[\neq \varnothing$, on dit que *$f$ admet ℓ pour limite à gauche en a* si $f|_{I \cap]-\infty, a[}$ admet ℓ pour limite. On note alors $f(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} \ell$, $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x < a}]{} \ell$ ou encore $f \xrightarrow[a^-]{} \ell$.
Si elle existe, la limite à gauche est unique (puisque c'est une limite) et dans ce cas elle est notée $\lim\limits_{a^-} f$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$.

(ii) On définit de la même manière la notion de *limite à droite*.

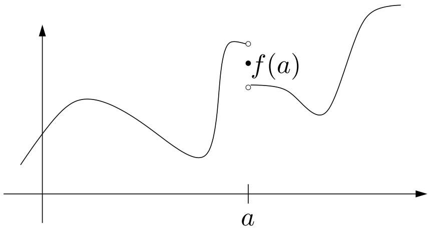

FIGURE 1 – Fonction f sans limite en a, ayant des limites à droite et à gauche en a différentes.

Dans la définition de limite à gauche, c'est la fonction $f|_{I\cap]-\infty,a[}$ qu'il faut considérer, et non la fonction $f|_{I\cap]-\infty,a]}$ (intervalle fermé en a). En effet, on veut que la fonction de la figure 1 ait une limite à gauche, ce qui n'est le cas qu'avec une restriction à un intervalle ouvert en a.

Remarque 2.2.2.
Comme pour les limites, l'existence d'une limite à gauche / droite s'écrit avec des ε. Par exemple, dans le cas où $a, \ell \in \mathbb{R}$, f admet ℓ pour limite à gauche en a si et seulement si on a

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\alpha > 0 \quad \forall x \in I \qquad a - \alpha \leqslant x < a \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On a le même genre de proposition pour les 5 autres cas (il y a au total 6 cas suivant qu'il s'agit d'une limite à gauche ou à droite d'une part et que la limite est réelle, égale à $+\infty$ ou $-\infty$ d'autre part).

Exemple 2.2.3.
On a $\lim\limits_{0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

Théorème 2.2.4.
Soit a un réel appartenant à I, à $\overline{I\cap]-\infty,a[}$ et à $\overline{I\cap]a,+\infty[}$. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors $f \underset{a}{\to} \ell$ si et seulement si on a simultanément

(i) $f \underset{a^-}{\longrightarrow} \ell$

(ii) $f \underset{a^+}{\longrightarrow} \ell$

(iii) $f(a) = \ell$.

Le point (iii) est indispensable, sinon la fonction de la figure 2 aurait une limite en a.

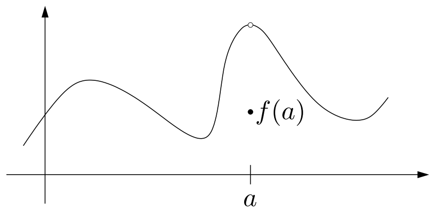

FIGURE 2 – Fonction f ayant des limites à gauche et à droite en a égales, mais pas de limite en a.

Démonstration. ($\Rightarrow$) Supposons d'abord $f \underset{a}{\to} \ell$. Nous avons déjà observé que $f(a) = \ell$ est nécessaire. Il est alors immédiat d'après les définitions que $f \underset{a^-}{\longrightarrow} \ell$ et $f \underset{a^+}{\longrightarrow} \ell$.

($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons qu'on ait les trois conditions (i), (ii) et (iii). On a $f(a) = \ell$, donc $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha^-, \alpha^+ \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant

$$\begin{cases} \forall x \in I \quad a - \alpha^- \leqslant x < a & \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \\ \forall x \in I \quad a < x \leqslant a + \alpha^+ & \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

Posons alors $\alpha = \min\{\alpha^-, \alpha^+\}$ et montrons $\forall x \in I \quad |x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Soit $x \in I$ tel que $|x - a| \leqslant \alpha$, c'est-à-dire $a - \alpha \leqslant x \leqslant a + \alpha$. Alors

1. si $a - \alpha \leqslant x < a$, on a en fait $a - \alpha^- \leqslant x < a$ et donc $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$;
2. si $x = a$, $f(x) = f(a) = \ell$ et donc $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$;
3. si $a < x \leqslant a + \alpha$, on a en fait $a < x \leqslant a + \alpha^+$ et donc $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Dans tous les cas on a bien $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.
On a donc $f \underset{a}{\to} \ell$.

□

Exemple 2.2.5.
Le théorème précédent permet de montrer que, l'application

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} e^x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 1 - x & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

tend vers 1 en 0.

Remarque 2.2.6.
On n'utilisera la caractérisation d'une limite par le théorème 2.2.4 que quand la fonction n'est pas définie de la même manière à gauche et à droite du point considéré. Sinon, cela n'a aucun intérêt et l'on travaillera directement avec la définition générale de limite, ou ses caractérisations.

3 Propriétés des limites de fonctions

3.1 Opérations sur les limites

Les résultats usuels valables pour les limites de suite restent valables :

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors

$$f \underset{a}{\to} \ell \iff f - \ell \underset{a}{\to} 0$$
$$f \underset{a}{\to} 0 \iff |f(x)| \xrightarrow[x \to a]{} 0$$
$$f \underset{a}{\to} \ell \iff |f(x) - \ell| \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

2. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Si f est bornée au voisinage de a et $g \underset{a}{\to} 0$, alors $f \times g \underset{a}{\to} 0$.

Exemple 3.1.1.
Le deuxième point permet de montrer $\dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{}$ 0.

Pour les opérations usuelles (somme, produit et inverse), les résultats valables pour les limites de suites sont toujours valables pour les fonctions, et les démonstrations sont tout à fait similaires. Nous ne les redémontrerons donc pas, mais vous devez savoir les faire sans problème.

Voyons le théorème sur la composition de deux fonctions ayant une limite :

Théorème 3.1.2.
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux applications vérifiant $f(I) \subset J$ et soit $a \in \overline{I}$, $b \in \overline{J}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $f \underset{a}{\to} b$ et $g \underset{b}{\to} \ell$, alors $g \circ f \underset{a}{\to} \ell$.

Remarque 3.1.3.
L'hypothèse $b \in \overline{J}$ est superflue : si $f : I \to J$ a une limite b en a, alors automatiquement, $b \in \overline{J}$.

Démonstration.
Soit $V \in \mathscr{V}(\ell)$. Montrons qu'il existe un voisinage W de a vérifiant $(g \circ f)(W \cap I) \subset V$.

On a $g \underset{b}{\to} \ell$, donc il existe un voisinage W' de b vérifiant $g(W' \cap J) \subset V$.

Or $f \underset{a}{\to} b$, donc il existe un voisinage W de a vérifiant $f(W \cap I) \subset W'$.

Or $f(I) \subset J$, donc $f(W \cap I) \subset J$, donc $f(W \cap I) \subset W' \cap J$.

Donc $(g \circ f)(W \cap I) \subset g(W' \cap J) \subset V$.

On a donc bien $g \circ f \underset{a}{\to} \ell$. □

Remarque 3.1.4.
On a vu (remarque 2.1.3) que la définition de la limite d'une suite n'est qu'un cas particulier de celle de fonction. Ce théorème de composition sur les fonctions a donc pour corollaire celui qu'on a énoncé au chapitre concernant les limites de suites sur la composition d'une fonction et d'une suite.

Exemple 3.1.5.
Ce théorème permet de montrer par exemple que $\ln\left(\tan x^2\right) \xrightarrow[x \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}]{} 0$.

Théorème 3.1.6 (Caractérisation séquentielle des limites)**.**
Soient $a \in \overline{I}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On a équivalence entre :

(i) $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$

(ii) pour toute suite (u_n) telle que $u_n \in I$ et $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$, on a $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.

Démonstration.
Traitons les cas a et ℓ finis (les autres cas se traitent de manière similaire).

(i)⇒(ii) C'est une conséquence immédiate du résultat de composition d'une application et d'une suite.

¬(i)⇒ ¬(ii) Supposons $f \underset{a}{\not\to} \ell$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ vérifiant

$$\forall \eta \in \mathbb{R}_+^* \exists x \in I \quad (x \in [a - \eta, a + \eta] \text{ et } |f(x) - \ell| > \varepsilon) \tag{1}$$

Soit alors $n \in \mathbb{N}$. Comme $\dfrac{1}{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$, d'après l'assertion (1), il existe $u_n \in I$ vérifiant

(a) $u_n \in [a - \frac{1}{n+1}, a + \frac{1}{n+1}]$

(b) et $|f(u_n) - \ell| > \varepsilon$.

On a donc construit une suite u d'éléments de I. Le point (a) nous assure qu'elle converge vers a, le second que $f(u_n)$ ne tend pas vers ℓ (une suite minorée par un réel strictement positif ne saurait tendre vers 0).

□

Exemple 3.1.7.
$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(1/x) \end{array}$ n'a pas de limite en 0.
Il suffit en effet de considérer la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{\pi/2 + n\pi}$ pour $n \in \mathbb{N}$ pour s'en convaincre.

3.2 Passage à la limite et relations d'ordre

Les théorèmes suivants sont analogues à des résultats déjà vu sur les suites.

Théorème 3.2.1.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et $(m, M, \ell) \in \mathbb{R}$.
Supposons $f \underset{a}{\to} \ell$ et $m < \ell < M$.
Alors, il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V \cap I$, on a $m < f(x) < M$.

Démonstration.
$]m, M[$ est un intervalle ouvert contenant ℓ, c'est donc un voisinage de ℓ. Donc il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V \cap I$, on a $f(x) \in]m, M[$. □

Remarque 3.2.2.
Le plus souvent, ce résultat s'applique sous la forme suivante :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ vérifiant $f \underset{a}{\to} \ell$. Alors

(i) Soit $M \in \mathbb{R}$ vérifiant $\ell < M$. Alors au voisinage de a, $f(x) < M$.

(ii) Soit $m \in \mathbb{R}$ vérifiant $m < \ell$. Alors au voisinage de a, $f(x) > m$.

Ce résultat est faux avec des inégalités larges : ainsi $x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et donc sa limite est négative. Mais dire que pour x au voisinage de 0 on a $x^2 \leqslant 0$ est *faux*.

Corollaire 3.2.3 (Passage à la limite dans une inégalité)**.**
Soit $a \in \overline{I}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ vérifiant $f \underset{a}{\to} \ell$. Soit $(m, M) \in \mathbb{R}^2$.

(i) Si M majore f au voisinage de a, alors $\ell \leqslant M$.

(ii) Si m minore f au voisinage de a, alors $m \leqslant \ell$.

Démonstration. (i) Supposons que M majore f sur l'intersection de I et d'un voisinage V_1 de a.

Par l'absurde, supposons $\ell > M$. D'après le théorème 3.2.1, il existe alors un voisinage V_2 de a tel que pour tout $x \in V_2 \cap I$, on a $f(x) > M$.

Pour tout $x \in V_1 \cap V_2 \cap I$, on a alors $f(x) > M$ et $f(x) \leqslant M$.

Or $V_1 \cap V_2 \cap I$ est non vide (puisque $V_1 \cap V_2$ est un voisinage de a et $a \in \overline{I}$), donc c'est absurde.

On a donc $\ell \leqslant M$.

(ii) On démontre de même le résultat, ou bien on constate qu'au voisinage de a, $-m$ majore $-f$ et on applique le résultat du (i) à $-f$, $-\ell$ et $-m$.

□

Corollaire 3.2.4 (Passage à la limite dans une inégalité, deuxième version)**.**
Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et $(\ell, \ell') \in \mathbb{R}^2$.
Supposons $f \underset{a}{\to} \ell$, $g \underset{a}{\to} \ell'$ et $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a. Alors $\ell \leqslant \ell'$.

Démonstration.
On a $(g - f)(x) \geqslant 0$ pour x au voisinage de a et $g - f \underset{a}{\to} \ell' - \ell$. Donc d'après le corollaire 3.2.3, on a $\ell' - \ell \geqslant 0$, donc $\ell \leqslant \ell'$. □

Les inégalités strictes ne sont pas conservées par passage à la limite. Par exemple, au voisinage de $+\infty$ on $\mathrm{e}^{-x} > 0$, mais on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et non $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} > 0$.

4 Théorèmes d'existence

4.1 Théorèmes des gendarmes et de minoration/majoration

Théorème 4.1.1.
Soient $f, m, M : I \to \mathbb{R}$ trois applications, $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

(i) Théorème des gendarmes (ou d'encadrement) : Supposons qu'on a $m \underset{a}{\to} \ell$ et $M \underset{a}{\to} \ell$ et qu'au voisinage de a on a $m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x)$. Alors f tend vers ℓ en a.

(ii) Théorème de minoration : Supposons qu'on a $m \underset{a}{\to} +\infty$ et qu' au voisinage de a, on a $m(x) \leqslant f(x)$. Alors f admet une limite en a et cette limite vaut $+\infty$.

(iii) Théorème de majoration : Supposons qu'on a $M \underset{a}{\to} -\infty$ et qu'au voisinage de a, on a $f(x) \leqslant M(x)$. Alors f admet une limite en a et cette limite vaut $-\infty$.

Démonstration. (i) Soit $X \in \mathscr{V}(a)$ un voisinage de a tel que pour tout $x \in X \cap I$, on a $m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x)$. Soit $\varepsilon > 0$. m et M tendant vers ℓ en a, il existe des voisinages V_1 et V_2 vérifiant respectivement $m(V_1 \cap I) \subset [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ et $M(V_2 \cap I) \subset [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$.
Posons $W = V_1 \cap V_2 \cap X$. W est un voisinage de a inclus dans V_1 et V_2.
Pour tout $x \in W \cap I$, on a alors $m(x) \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$, $M(x) \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ et $m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x)$, donc $f(x) \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$.
On a donc montré

$$\forall \varepsilon > 0 \exists W \in \mathscr{V}(a) \forall x \in W \cap I \quad f(x) \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$$

On a donc bien $f \underset{a}{\to} \ell$.

(ii) Soit $X \in \mathscr{V}(a)$ un voisinage de a tel que pour tout $x \in X$, $m(x) \leqslant f(x)$. Soit $L > 0$. Alors, comme $m \underset{a}{\to} +\infty$, il existe $V \in \mathscr{V}(a)$ vérifiant $\forall V \cap I \quad L \leqslant m(x)$.
On a alors
Posons $W = V \cap X$. W est un voisinage de a, et on a $\forall x \in W \cap I \quad L \leqslant m(x) \leqslant f(x)$.
On a donc montré

$$\forall L > 0 \exists W \in \mathscr{V}(a) \forall x \in W \cap I \quad f(x) \geqslant L$$

(iii) Il suffit d'adapter la démonstration du point (ii), ou bien d'appliquer le point (ii) à $-f$.

□

Corollaire 4.1.2.
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux applications et $a \in \overline{I}$. Si au voisinage de a on a $|f| \leqslant g$ et si $g \underset{a}{\to} 0$, alors $\lim\limits_{a} f$ existe et vaut 0.

Démonstration.
Il suffit de remarquer qu'au voisinage de a, on a $-g \leqslant f \leqslant g$. □

4.2 Théorème de la limite monotone

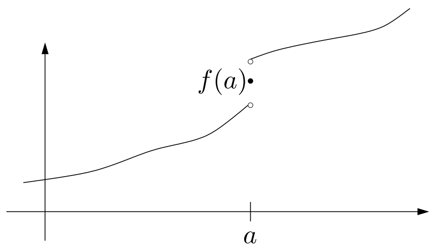

FIGURE 3 – Illustration de limite monotone : à retenir !

Théorème 4.2.1.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application croissante. On note α et β les bornes inférieures et supérieures de I dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors :

(i) f possède une limite à gauche (resp. à droite) en tout point a de $]\alpha, \beta]$ (resp. $[\alpha, \beta[$) et l'on a, pour chaque a où ces limites ont un sens,

$$f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x < a}]{} \sup_{I \cap]-\infty, a[} f$$

ainsi que

$$f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x > a}]{} \inf_{I \cap]a, +\infty[} f \ .$$

(ii) Soient $a, b \in \mathring{I}$ tels que $a < b$. Alors,

$$\lim_{a^-} f \leqslant f(a) \leqslant \lim_{a^+} f \leqslant \lim_{b^-} f \leqslant f(b) \leqslant \lim_{b^+} f.$$

(iii) Dans $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{\alpha^+} f$ existe. Si f est minorée, cette limite est finie, sinon elle vaut $-\infty$.

(iv) Dans $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{\beta^-} f$ existe. Si f est majorée, cette limite est finie, sinon elle vaut $+\infty$.

Si f est décroissante, on a bien sûr des résultats analogues.

Démonstration. (i) On ne montre le résultat que pour la limite à gauche.

Soit $a \in]\alpha, \beta]$. On pose $V = f(I\cap] - \infty, a[) = \{ f(x) \mid x < a \}$. L'ensemble V est non vide puisque $I\cap] - \infty, a[$ est non vide. Posons $\ell = \sup_{\substack{x\in I\\ x<a}} f(x)$. On a $\ell = +\infty$ ou $\ell \in \mathbb{R}$. Distinguons ces deux cas :

a) $\ell = +\infty$. Alors soit M un réel fixé, il existe $y \in I\cap] - \infty, a[$ tel que $f(y) \geqslant M$.

Alors, puisque f est croissante, pour tout $x \in]y, a[\cap I$, on a $f(x) \geqslant M$. Or $]y, a[=]y, a+1[\cap]-\infty, a[$ (on dit que $]y, a[$ est un voisinage à gauche de a), donc $]y, a[\cap I$ s'écrit sous la forme $V \cap (I\cap] - \infty, a[)$, donc f prend ses valeurs dans $[M, +\infty[$ sur ce voisinage à gauche de a.

On a donc bien $f \xrightarrow[a-]{} +\infty$.

b) $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, soit $\varepsilon > 0$. Il existe $y \in I\cap]-\infty, a[$ tel que $f(y) \geqslant \ell - \varepsilon$.

Alors, pour tout $x \in]y, a[\cap I$, on a $f(x) \geqslant \ell - \varepsilon$, f étant croissante, et $f(x) \leqslant \ell$ par définition de ℓ.

On en déduit qu'au voisinage à gauche de a, f prend ses valeurs dans $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$.

f admet donc pour limite ℓ en a à gauche.

(ii) Remarquons tout d'abord que, f étant croissante $\{ f(x) \mid x \in I\cap] - \infty, a[\}$ est majoré par $f(a)$, donc d'après le point (i), on a $\lim_{a^-} f \leqslant f(a)$.

De la même façon, on a $f(a) \leqslant \lim_{a^+} f$, $\lim_{b^-} f \leqslant f(b)$ et $f(b) \leqslant \lim_{b^+} f$.

Par ailleurs, $\lim_{b-} f$ majore $f(]a, b[)$ et $\lim_{a+}$ minore ce même ensemble, qui est non vide. Donc $\lim_{a^+} f \leqslant \lim_{b^-} f$.

On a donc le résultat.

(iii) (iii) (resp. (iv)) sont des conséquences immédiates de (i), l'existence d'un minorant (resp. majorant) étant équivalente au fait que la borne inférieure (resp. supérieure) soit finie.

Pour le cas d'une fonction décroissante, il suffit d'appliquer le résultat sur les fonctions croissantes à $-f$. ☐

5 Cas des fonctions à valeurs complexes

Dans cette partie, on considère une application complexe $f : I \to \mathbb{C}$.

Notons tout de suite que les notions de fonction complexe majorée, minorée ou monotone n'ont **aucun sens**, car il n'y a pas de relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{C}$. Cependant, on peut définir la notion de fonction complexe bornée.

Définition 5.0.1.
On dit que f est *bornée* s'il existe $K \in \mathbb{R}^*$ tel que pour tout $x \in I$ on ait $|f(x)| \leqslant K$.

Remarque 5.0.2.
f est bornée si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont bornées.

Définition 5.0.3.
Soit $a \in \mathbb{C}$. On appelle *voisinage* de a tout ensemble contenant un disque ouvert de centre a (i.e. contenant un ensemble de la forme $\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < R \}$, où $R \in \mathbb{R}_+^*$). On note $\mathscr{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.

Remarque 5.0.4.
La notion bidimensionnelle de voisinage complexe généralise assez bien la notion unidimensionnelle de voisinage réel, néanmoins d'autres définitions seraient possibles comme le montre la caractérisation suivante.

Proposition 5.0.5.
Soit a un complexe et V une partie de $\mathbb{C}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) V est un voisinage de a ;

(ii) V contient un disque fermé de centre a ;

(iii) V contient au moins un ensemble de la forme

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{rl} & \operatorname{Re}(z) \in [\operatorname{Re}(a) - R, \operatorname{Re}(a) + R] \\ \text{et} & \operatorname{Im}(z) \in [\operatorname{Im}(a) - R, \operatorname{Im}(a) + R] \end{array} \right\}$$

avec $R \in \mathbb{R}_+^*$.

(iv) V contient au moins un ensemble de la forme

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{rl} & \operatorname{Re}(z) \in]\operatorname{Re}(a) - R, \operatorname{Re}(a) + R[\\ \text{et} & \operatorname{Im}(z) \in]\operatorname{Im}(a) - R, \operatorname{Im}(a) + R[\end{array} \right\}$$

avec $R \in \mathbb{R}_+^*$.

(v) V contient au moins le produit cartésien $I \times J$ de deux intervalles ouverts vérifiant $a \in I \times J$.

Définition 5.0.6.
Soient $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que f *admet ℓ pour limite en a* si

$$\forall V \in \mathscr{V}(\ell) \quad \exists W \in \mathscr{V}(a) \quad \forall x \in I \cap W \quad f(x) \in V$$

C'est équivalent à dire que $|f(x) - \ell| \xrightarrow[x \to a]{} 0$, ce qui nous ramène au cas d'une limite d'une fonction à valeurs réelles.

Théorème 5.0.7.
Soient $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $f \underset{a}{\to} \ell$;

(ii) $\operatorname{Re}(f) \underset{a}{\to} \operatorname{Re}(\ell)$ et $\operatorname{Im}(f) \underset{a}{\to} \operatorname{Im}(\ell)$.

Démonstration.
Cette démonstration s'effectue comme celle du théorème équivalent concernant les suites complexes. $\square$

Exemple 5.0.8.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{ix}}{1 + x^2} = 0$$

Théorème 5.0.9.
Si f a une limite en un point de $\overline{I}$, cette limite est unique.

Démonstration.
Deux démonstrations sont possibles : ou bien on utilise le théorème 5.0.7, ou bien on démontre le lemme de Hausdorff pour les voisinages dans $\mathbb{C}$ et on recopie la démonstration pour les fonctions de I dans $\mathbb{R}$ (il suffit alors essentiellement de changer des $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$). $\square$

Certains autres résultats établis pour les fonctions réelles sont toujours valables pour les fonctions complexes :

1. toute fonction à valeurs complexes ayant une limite en un point est bornée au voisinage de ce point,

2. les limites à gauche et à droite en un point peuvent être également définies,

3. la caractérisation séquentielle de la limite est maintenue,

4. la corollaire 4.1.2 du théorème des gendarmes se généralise aux fonctions f à valeurs complexes, ce qui permet également de montrer que le produit d'une fonction bornée au voisinage d'un point a par une fonction de limite nulle en a est une fonction de limite nulle en a.

5. les opérations sur les limites ne faisant pas intervenir de limite infinie demeurent.

Les grands théorèmes ne se généralisent pas, de nouveau à cause du manque de relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{C}$.