# VI Équations différentielles linéaires

27 août 2023

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

# 1. Résultats d'analyse

On utilise ici les notions d'analyse vues en terminale : continuité, dérivabilité, intégrales. Elles seront définies et travaillées ultérieurement.

## 1.1. Continuité et dérivabilité d'une fonction à valeurs complexes.

Si on ne le précise pas, $I$ est toujours un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$.

**Définition 1.1.1.**
On appelle *partie réelle de* $f$ la fonction

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Re}(f) : & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \mathrm{Re}(f(x)) \end{array}.$$

De même on appelle *partie imaginaire de* $f$ la fonction

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Im}(f) : & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \mathrm{Im}(f(x)) \end{array}.$$

On peut alors décomposer : $f = \mathrm{Re}(f) + i\,\mathrm{Im}(f)$.

**Remarque 1.1.2.**
Cette définition assure que, de manière générale,

$$\mathrm{Re}(f(x)) = \mathrm{Re}(f)(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f(x)) = \mathrm{Im}(f)(x).$$

**Exemple 1.1.3.**
Avec

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & (2+i)\mathrm{e}^{(1+i)x} \end{array},$$

on a

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Re}(f) : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \mathrm{e}^{x}(2\cos(x) - \sin(x)) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Im}(f) : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \mathrm{e}^{x}(\cos(x) + 2\sin(x)) \end{array}.$$

**Définition 1.1.4.**

1. On dit que $f$ est *continue* (resp. *dérivable*) en $a$ si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont. Dans le cas où $f$ est dérivable, on appelle dérivée de $f$ en $a$ notée $f'(a)$ le complexe

$$f'(a) = (\mathrm{Re}(f))'(a) + i(\mathrm{Im}(f))'(a).$$

2. On dit que $f$ est *continue* (resp. *dérivable*) sur un intervalle si elle l'est en tout point de cet intervalle.
3. On note (notations non officielles) $\mathscr{C}(I,\mathbb{K})$ et $\mathscr{D}(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions respectivement continues et dérivables de $I$ dans $\mathbb{K}$.

**Remarque 1.1.5.**
Le premier point de la définition précédente assure que, si $f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable, alors

$$(\mathrm{Re}\, f)' = \mathrm{Re}(f') \quad \text{et} \quad (\mathrm{Im}\, f)' = \mathrm{Im}(f').$$

Les propriétés usuelles de la dérivée sont vraies du point de vue complexe.

**Proposition 1.1.6.**
Soit $A \subset \mathbb{R}$, $f, g : I \to \mathbb{C}$.

1. Si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable et

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

2. La fonction $fg$ est dérivable et

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

3. Si $g$ ne s'annule pas, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

**Démonstration.**
À chaque fois, décomposer tous les objets selon leurs parties réelles et imaginaires, puis revenir aux définitions en utilisant les propriétés de la dérivation réelle. $\square$

Pour la composition, on se gardera de dériver deux fonctions à variable complexe (c'est bien plus compliqué que de dériver des fonctions à variable réelle). On dispose cependant du résultat suivant.

**Théorème 1.1.7.**
Soit $\varphi \in \mathscr{D}(I, \mathbb{K})$. L'application $x \mapsto \mathrm{e}^{\varphi(x)}$ est dérivable sur $I$ de dérivée l'application $x \mapsto \varphi'(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)}$.

**Démonstration.**
Soit $x \in I$, on a

$$\mathrm{e}^{\varphi(x)} = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi(x))}(\cos(\mathrm{Im}(\varphi(x)) + i\sin(\mathrm{Im}(\varphi(x))).$$

On a donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\varphi(x)}\right) &= \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi(x))}\cos(\mathrm{Im}(\varphi(x)),\\ \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\varphi(x)}\right) &= \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi(x))}\sin(\mathrm{Im}(\varphi(x)).\end{aligned}$$

Ces deux expressions sont bien dérivables, par opérations sur les fonctions dérivables, donc $\mathrm{e}^{\varphi}$ est bien dérivable.

De plus,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi)(x)}\right) = \mathrm{Re}(\varphi'(x)) \times \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi(x))}.$$

Il suffit ensuite de dériver les produits :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\varphi(x)}\right)\right) = \mathrm{Re}(\varphi'(x))&\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi(x))}\cos(\mathrm{Im}(\varphi(x))\\ &- \mathrm{Im}(\varphi'(x))\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi(x))}\sin(\mathrm{Im}(\varphi(x))).\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\varphi(x)}\right)\right) = \mathrm{Re}(\varphi'(x))&\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi(x))}\sin(\mathrm{Im}(\varphi(x))\\ &+ \mathrm{Im}(\varphi'(x))\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi(x))}\cos(\mathrm{Im}(\varphi(x))).\end{aligned}$$

Il suffit enfin de vérifier que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\varphi(x)}\right)\right) + i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\varphi(x)}\right)\right) = \varphi'(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)}.$$

□

**Exemple 1.1.8.**
Dériver la fonction de l'exemple 1.1.3.

**Définition 1.1.9** (Dérivées successives.)**.**
On définit par récurrence les dérivées successives d'une fonction $f : I \to \mathbb{C}$.

— $f^{(0)} = f$.
— Si $f$ est dérivable, $f^{(1)} = f'$.
— Pour tout entier naturel $n$, si $f^{(n)}$ est définie et est dérivable, alors on définit $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

**Remarque 1.1.10.**
On notera souvent $f''$ au lieu de $f^{(2)}$, un peu plus rarement $f'''$ au lieu de $f^{(3)}$.

Les physiciens utilisent souvent les notations $\dot{f}$, $\ddot{f}$ et $\dddot{f}$ pour indiquer des dérivées successives par rapport à la variable temps.

**Définition 1.1.11.**
1. On note $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continuement dérivables sur $I$, *i.e.* l'ensemble des fonctions dérivables, dont la dérivée est continue :
$$\mathscr{C}^1(I, \mathbb{K}) = \{\, f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{K}) \mid f' \in \mathscr{C}(I, K) \,\}.$$
2. Si $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{D}^n(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $n$ fois dérivables sur $I$ : ce sont les fonctions $f$ telles que $f^{(n)}$ est définie.
3. Si $n \in \mathbb{N}$, on note aussi $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $n$ fois continuement dérivables sur $I$, *i.e.* l'ensemble des fonctions $n$ fois dérivables, dont la dérivée $n^{\mathrm{e}}$ est continue :
$$\mathscr{C}^n(I, \mathbb{K}) = \left\{\, f \in \mathscr{D}^n(I, \mathbb{K}) \;\middle|\; f^{(n)} \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K}) \,\right\}.$$
4. On note $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions infiniment dérivables : c'est l'intersection
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{C}^n(I, \mathbb{K}).$$

On ne dérive ici que des fonctions d'une variable réelle.

**Remarque 1.1.12.**
Si $f$ est dans $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{K})$, on dit que $f$ est de *classe* $\mathscr{C}^n$ sur $I$.

## 1.2. Primitives.

Si on ne le précise pas, $I$ est toujours un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$.

**Définition 1.2.1.**
Soit $A \subset \mathbb{R}$, soit $f : A \to \mathbb{K}$ et $F : A \to \mathbb{K}$. On dit que $F$ est **UNE** *primitive* de $f$ si $F$ est dérivable sur $A$ et si $F' = f$.

**Théorème 1.2.2.**
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to \mathbb{K}$ dérivable. La fonction $f$ est constante si et seulement si

$$\forall x \in I, f'(x) = 0.$$

L'hypothèse fondamentale est ici que $I$ est un intervalle.

**Exercice 1.2.3.**
Proposer un contre-exemple au théorème précédent dans le cas où $I$ n'est pas un intervalle.

**Corollaire 1.2.4.**
Toutes les primitives d'une même fonction *sur un intervalle* diffèrent d'une constante, et quand cette constante parcourt $\mathbb{K}$, on obtient toutes les primitives.

Autrement dit, $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si $F : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de $f : I \to \mathbb{K}$, l'ensemble de toutes les primitives de $f$ est

$$\{ F + \lambda \mid \lambda \in \mathbb{K} \}.$$

L'hypothèse fondamentale est ici que l'on se place sur un intervalle.

**Démonstration.**
Soit $F$ et $G$ deux primitives d'une même application sur un intervalle.

Alors, $F' = G'$, donc $(F - G)'$ est nulle sur cet intervalle, donc $F - G$ est constante sur cet intervalle. Donc toutes les primitives d'une même application diffèrent d'une constante.

Réciproquement, si $F$ est une primitive de $f$, il est aisé de voir que $F + \lambda$ est une primitive de $f$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$. □

**Exercice 1.2.5.**
Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction inverse, définie sur $\mathbb{R}^*$.

Il convient de connaître toutes les primitives du formulaire.

## 1.3. Intégration de fonctions complexes.

**Définition 1.3.1.**
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b \in I$ et $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{C})$. On appelle *intégrale de $f$ sur* $[a, b]$ le complexe

$$\int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)\,\mathrm{d}t + i \int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)\,\mathrm{d}t,$$

noté $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\int_a^b f$.

Pour pouvoir calculer $\int_a^b f$, $f$ doit être définie au moins sur $[a, b]$. C'est assuré si $f : I \to \mathbb{C}$, avec $I$ un intervalle et $a, b \in I$.

**Remarque 1.3.2.**
Cette définition assure que, si $f : I \to \mathbb{C}$ et si $a, b \in I$,

$$\mathrm{Re}\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(f)$$

et

$$\mathrm{Im}\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b \mathrm{Im}(f).$$

**Exemple 1.3.3.**
$\int_0^{2\pi} (1+i)\mathrm{e}^{\,ix}\,\mathrm{d}x = 0.$

**Proposition 1.3.4.**
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b \in I$, $f, g : I \to \mathbb{C}$ continues et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors,

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

**Démonstration.**
C'est connu quand $f, g, \lambda, \mu$ sont réels. Il suffit de décomposer selon les parties réelles et imaginaires, puis de calculer. Pour alléger le calcul, on pourra traiter séparément le cas de la somme de celui du produit par un complexe. $\square$

L'interprétation en terme d'aire ne veut rien dire pour une fonction à valeurs complexes. Cela dit, comme pour les fonctions réelles, on peut calculer des intégrales par primitivation, ce qui est exprimé dans le théorème suivant.

**Théorème 1.3.5** (Théorème fondamental du calcul intégral)**.**
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ et $a \in I$.

1. La fonction $\left\{\begin{array}{lcl} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$ est une primitive de $f$.
2. Soit $A \in \mathbb{K}$. La fonction
$$\begin{array}{rcl} F : I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & A + \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$
est la seule primitive de $f$ telle que $F(a) = A$.

**Corollaire 1.3.6.**
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$, $a, b \in I$ et $F$ une primitive de $f$ sur $I$. Alors,
$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

**Exemple 1.3.7.**
Refaire le calcul de l'exemple 1.3.3 en primitivant directement.

**Notation 1.3.8.**
On note $\displaystyle\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$ une primitive « générique » de la fonction $f$, c'est-à-dire faisant abstraction d'une quelconque constante d'intégration.

**Exemple 1.3.9.**
On pourra écrire
$$\int^x \cos(t)\,\mathrm{d}t = \sin(x).$$
On remarquera que le « = » n'a ici pas le rôle qu'on lui attribue habituellement : on aurait pu tout aussi bien écrire
$$\int^x \cos(t)\,\mathrm{d}t = \sin(x) + 42,$$
sans pour autant signifier que $42 = 0$. Pour plus de détails, on se référera au chapitre sur les relations d'équivalences.

**Exercice 1.3.10.**
Soient $a$ et $b$ deux réels. Calculer les primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et celles de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$.

## 1.4. Méthodes de calcul.

On donne ici les deux outils permettant de calculer l'immense majorité des intégrales que vous rencontrerez dans vos deux années de prépa. Ils sont à maîtriser parfaitement.

### a. Intégration par parties.

**Théorème 1.4.1.**
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $u, v \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$ et $a, b \in I$. Alors,
$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'.$$

**Démonstration.**
Puisque $u, v$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, $(uv)' = u'v + uv'$ est continue, donc par le théorème fondamental du calcul intégral :
$$[uv]_a^b = \int_a^b (uv)' = \int_a^b u'v + uv' = \int_a^b u'v + \int_a^b uv'.$$
$\square$

**Exemple 1.4.2** (Grands classiques)**.**
Toutes ces exemples se résolvent par intégration par parties.

- Trouver une primitive de ln.
- Trouver une primitive de Arctan.
- Trouver une primitive du produit d'un polynôme et d'une exponentielle.
- Trouver une primitive du produit d'une fonction trigonométrique et d'une exponentielle.
- Trouver une primitive du produit d'un polynôme et d'une fonction trigonométrique.

**Exercice 1.4.3.**
Déterminer des primitives des fonctions suivantes : $x \mapsto (x^2+1)\mathrm{e}^x$, $x \mapsto \cos(x)\mathrm{e}^{2x}$, $x \mapsto x^2 \cos x$.

### b. Changement de variables.

**Théorème 1.4.4.**
Soit $I, J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, $a, b \in I$, $\varphi \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{C}^0(J, \mathbb{R})$

On suppose que $\varphi(I) \subset J$. Alors,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi'(t) \cdot (f \circ \varphi)(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit que l'on a effectué le changement de variable « $x = \varphi(t)$ ».

**Remarque 1.4.5.**
Moyen mnémotechnique : on écrit « $x = \varphi(t)$ » (**au brouillon seulement** !). Alors $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, donc $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$. Reste le problème des bornes. Quand $t$ va de $a$ à $b$, $x = \varphi(t)$ va de $\varphi(a)$ à $\varphi(b)$. Et voilà ...

**Démonstration.**
$f$ est continue sur $I$, donc y admet une primitive $F$. Ainsi, $F$ est $\mathscr{C}^1$, comme $\varphi \in \mathscr{C}^1$. On voit que $F \circ \varphi$ est $\mathscr{C}^1$, et $(F \circ \varphi)' = \varphi' \cdot f \circ \varphi$ est continue.

On déduit alors le résultat du théorème fondamental (utilisé deux fois) :

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t &= [F]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}\\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))\\ &= [F \circ \varphi]_a^b\\ &= \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

□

**Remarque 1.4.6.**
Les seuls changements de variables que l'on se permettra de ne pas justifier sont ceux affines (on les signalera quand même !).

**Exemple 1.4.7.**
Calculons l'aire de l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (voir figure 1).

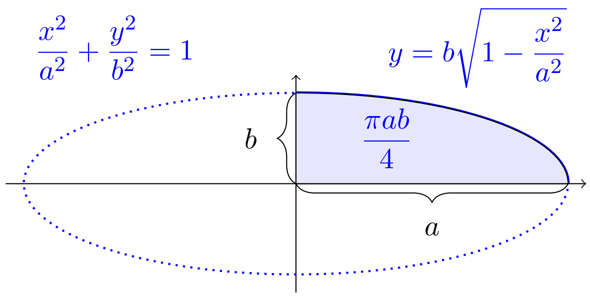


FIGURE 1 – Ellipse de demi-axes $a$ et $b$.

Le quart supérieur droit de cette ellipse peut être paramétré par $\left(x, b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}\right)$, $x$ allant de 0 à $a$. On calcule donc $I = \displaystyle\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x$.

On effectue le changement de variable $x = a\cos\theta$ :

- la fonction $f : [0, a] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$ est continue,
- la fonction $\varphi : [0, \pi/2], \theta \mapsto a\cos\theta$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et à valeurs dans $[0, a]$,
- on a $\varphi' : \theta \mapsto -a\sin\theta$,
- $\varphi(0) = a$ et $\varphi(\pi/2) = 0$.

Remarquons que le sinus est positif sur $[0, \pi/2]$, et si $\theta \in [0, \pi/2]$, $f(\varphi(\theta)) = |\sin\theta|$. On obtient :

$$\begin{aligned}
I &= -ab \int_{\pi/2}^{0} |\sin\theta| \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \\
&= -ab \int_{\pi/2}^{0} \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta \\
&= ab \int_{0}^{\pi/2} \frac{1-\cos(2\theta)}{2} \,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{4}\pi ab - \frac{ab}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{4}\pi ab.
\end{aligned}$$

L'aire de l'ellipse est donc $\pi ab$.

**Exemple 1.4.8.**
En posant $x = \sqrt{t}$, on a

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}} &= 2\int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt{t}^2} \times \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_{\sqrt{1}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \\
&= 2\left[\operatorname{Arctan}(x)\right]_{x=1}^{\sqrt{3}} \\
&= 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

**Proposition 1.4.9.**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue.

1. Si $f$ est paire et $a \in \mathbb{R}$ alors
$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. Si $f$ est impaire et $a \in \mathbb{R}$ alors
$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$
et
$$\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t.$$
3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $T > 0$, si $f$ est $T$-périodique, alors
$$\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Démonstration.**

1. On considère $\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ et on pose $x = -t$.
Ainsi,
$$\begin{aligned}
\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{-a} -f(-x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^{-a} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$
2. Comme le point précédent avec
$$\begin{aligned}
\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{-a} -f(-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{-a} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$
3. *On peut commencer à regarder à partir d'un dessin, dans le cas où $-T < a < 0$.*
On a :
$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$$
Or par changement de variable $x = t + T$, on obtient
$$\int_a^0 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a+T}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
On en déduit que
$$\begin{aligned}
\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{a+T}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$
*On peut remarquer que l'hypothèse $-T < a < 0$ qui a nourri notre intuition ne joue en fait aucun rôle : elle n'est utilisée nulle part dans la démonstration.*
Nous avons donc le résultat attendu.

□

## 1.5. Primitives de fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, et $f : x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$. Le programme demande de savoir calculer une primitive de $f$ à ce stade de l'année. Mais nous reverrons cela dans le chapitre sur les fractions

rationnelles.
Pour simplifier, quitte à diviser par $a$, on peut toujours se ramener au cas où $a = 1$. Ainsi on considère $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+bx+c}$. Posons $\Delta = b^2 - 4c$.
Il s'agit de distinguer trois cas :

**a.** $\Delta > 0$

Le polynôme $X^2 + bX + c$ a donc deux racines réelles distinctes $\alpha$ et $\beta$, et $f(x) = \dfrac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}$. Il s'agit alors de remarquer que $f(x) = \dfrac{1}{\alpha-\beta}\left(\dfrac{1}{x-\alpha} - \dfrac{1}{x-\beta}\right)$. Et donc directement, une primitive de $f$ est $x \mapsto \dfrac{1}{\alpha-\beta}\ln\left|\dfrac{x-\alpha}{x-\beta}\right|$.

**b.** $\Delta = 0$

Le polynôme $X^2 + bX + c$ a donc une racine double réelle $\alpha$ et $\beta$, et $f(x) = \dfrac{1}{(x-\alpha)^2}$. Encore plus directement, une primitive de $f$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{x-\alpha}$.

**c.** $\Delta < 0$

C'est le cas le plus compliqué. Ici, $b^2 - 4c < 0$. On écrit alors $f(x) = \dfrac{1}{x^2+bx+c} = \dfrac{1}{(x+b/2)^2 + \frac{1}{4}(4c-b^2)}$.
On pose alors $\delta = \sqrt{\frac{1}{4}(4c-b^2)}$, qui existe bien car $\Delta < 0$. Donc $f(x) = \dfrac{1}{(x+b/2)^2+\delta^2}$, dont une primitive est $x \mapsto \dfrac{1}{\delta}\arctan\left(\dfrac{x+b/2}{\delta}\right)$.

**Remarque 1.5.1.**
Ces formules ne sont en aucun cas à apprendre par cœur, mais il convient de savoir mener ces calculs sur des exemples concrets.

## 2. Généralités sur les équations différentielles linéaires.

### 2.1. Cadre.

— On s'intéressera à des équations différentielles dont les solutions sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
— On considérera $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
— On s'intéressera uniquement à des équations différentielles *linéaires*.

**Définition 2.1.1** (Équation différentielle linéaire)**.**
Soit $n$ un entier naturel non nul, et $a_0, \dots, a_{n-1}$ et $b$ des applications continues de $I$ dans $\mathbb{K}$, alors
— On appelle *équation différentielle linéaire d'ordre $n$* l'équation de variable $y$

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t). \quad (\mathscr{E})$$

— Une *solution* de cette équation est une application $f : I \to \mathbb{K}$ $n$ fois dérivable sur $I$ vérifiant : pour tout $t \in I$,

$$f^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)f^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)f'(t) + a_0(t)f(t) = b(t).$$

— L'équation $(\mathscr{E})$ est dite *homogène* si $b$ est la fonction nulle ($b = 0_{\mathbb{K}^I}$).
— *L'équation homogène associée à* $(\mathscr{E})$ est

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0. \quad (\mathscr{H})$$

**Remarque 2.1.2.**
Nous ne nous intéresserons pas dans le reste de ce chapitre au cas plus général d'une équation

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \quad (\mathscr{E})$$

où on a également affecté $y^{(n)}$ d'un coefficient $a_n(t)$.

En effet :

- Si $a_n$ ne s'annule pas, il suffit de diviser cette équation par $a_n(t)$ pour se ramener au cas étudié ici.
- Si $a_n$ s'annule, il est difficile de donner des résultats généraux. En pratique, si on rencontre une telle équation où $a_n$ s'annule, on cherchera en général les solutions sur les intervalles où $a_n$ ne s'annule pas et on regardera au cas par cas comment recoller les solutions aux points où $a_n$ s'annule.

**Définition 2.1.3** (Problème de Cauchy)**.**
Soit

- $t_0 \in I$
- $y_0, \dots, y_{n-1}$ des éléments de $\mathbb{K}$

La recherche des solutions $f$ de $(\mathscr{E})$ vérifiant les *conditions initiales* suivantes :

$$\begin{aligned} & f(t_0) = y_0 \\ \text{et } & f'(t_0) = y_1 \\ & \dots \\ \text{et } & f^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{aligned}$$

est appelé *problème de Cauchy linéaire d'ordre n*

**Exemple 2.1.4.**
En physique les déplacement d'un mobile sont régis par l'équation de la dynamique reliant la dérivée seconde de la position et les forces qui s'appliquent au mobile, qui dépendent en général de sa position et ou de sa vitesse. Il s'agit donc d'une équation différentielle d'ordre 2. [1] Il est raisonnable de penser que le problème de Cauchy a alors une unique solution : une position initiale et une vitesse initiale étant données, une seule trajectoire est possible.

## 2.2. Structure de l'ensemble des solutions.

1. En général linéaire dans les problèmes de prépa mais dans la vraie vie c'est parfois plus compliqué.

**Théorème 2.2.1** (Structure des solutions)**.**
Soit

- $n \in \mathbb{N}$
- $(\mathscr{E})$ une équation différentielle linéaire d'ordre $n$, d'ensemble de solutions $S_{\mathscr{E}}$
- $(\mathscr{H})$ l'équation homogène associée, d'ensemble de solutions $S_{\mathscr{H}}$

Alors

1. $S_{\mathscr{E}} \subset \mathscr{C}^n(I, \mathbb{K})$
2. $0_I \in S_{\mathscr{H}}$ et $S_{\mathscr{H}}$ est stable par combinaisons linéaires.
3. Pour tout $y_0 \in S_{\mathscr{E}}$ fixé, on a
$$S_{\mathscr{E}} = \{\, y_0 + y \mid y \in S_{\mathscr{H}} \,\}.$$
4. En particulier, $S_{\mathscr{E}}$ est l'ensemble vide ou un singleton ou un ensemble infini.

**Démonstration.**
Sous les hypothèses de l'énoncé :

1. Toute solution $f$ est nécessairement $n$ fois dérivable et pour tout $t \in I$,
$$\begin{aligned} f^{(n)}(t) = b(t) - a_{n-1}(t) f^{(n-1)}(t) - \dots \\ - a_1(t) f'(t) - a_0(t) f(t). \end{aligned}$$
Or $b$, $a_{n-1}$, $f^{(n-1)}$, …, $a_0$, $f$ sont des applications continues. Donc $f^{(n)}$ est continue, donc $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{K})$.
2. L'application nulle est une solution triviale de $S_{\mathscr{H}}$, donc $S_{\mathscr{H}}$ est non vide.
Pour toute application $f$ $n$ fois dérivable et tout $t \in I$, notons $\psi_f(t)$ le scalaire
$$\begin{aligned} f^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) f^{(n-1)}(t) + \dots \\ + a_1(t) f'(t) + a_0(t) f(t). \end{aligned}$$
On a alors $f \in S_{\mathscr{H}} \iff \forall t \in I \quad \psi_f(t) = 0$ (ou, de façon plus concise : $f \in S_{\mathscr{H}} \iff \psi_f = 0_{\mathbb{K}^I}$).
Soit alors $f$ et $g$ deux applications $n$ fois dérivables de $I$ dans $\mathbb{K}$ et $\lambda$ et $\mu$ deux éléments de $\mathbb{K}$. Alors $\lambda f + \mu g$ est évidemment $n$ fois dérivable. Et pour tout $t \in I$, on a $\psi_{\lambda f + \mu g}(t) = \lambda \psi_f(t) + \mu \psi_g(t)$ (autrement dit $\psi_{\lambda f + \mu g} = \lambda \psi_f + \mu \psi_g$).
En particulier, si $f$ et $g$ sont solutions de l'équation homogène, on a $\psi_f = 0$ et $\psi_g = 0$, donc $\psi_{\lambda f + \mu g} = 0$ donc $\lambda f + \mu g \in S_{\mathscr{H}}$.
3. Soit $y_0 \in S_{\mathscr{E}}$ fixé. On a donc, pour tout $t \in I$, $\psi_{y_0}(t) = b(t)$

Soit alors $f : I \to \mathbb{K}$ une application $n$ fois dérivable. On a

$$\begin{aligned} f \in S_{\mathscr{E}} &\iff \psi_f = b \\ &\iff \psi_f = \psi_{y_0} \\ &\iff \psi_{f-y_0} = 0 \\ &\iff f - y_0 \in S_{\mathscr{H}} \end{aligned}$$

Donc pour tout $f \in S_{\mathscr{E}}$, $f$ s'écrit sous la forme $y_0 + y$ où $y \in S_{\mathscr{H}}$. Donc $S_{\mathscr{E}} \subset \{ y_0 + y \mid y \in S_{\mathscr{H}} \}$.

Réciproquement, pour tout $y \in S_{cH}$, l'application $f$ définie par $f = y_0 + y$ est $n$ fois dérivable et $f - y_0 \in S_{\mathscr{H}}$, donc $f \in S_{\mathscr{E}}$. Donc $\{ y_0 + y \mid y \in S_{\mathscr{H}} \} \subset S_{\mathscr{E}}$.

On a donc bien $S_{\mathscr{E}} = \{ y_0 + y \mid y \in S_{\mathscr{H}} \}$.

4. On sait que $S_{\mathscr{H}}$ n'est pas vide puisqu'il contient au moins l'application nulle. Supposons qu'il contienne au moins une autre application $f$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda f$ appartient également à $S_{\mathscr{H}}$. Donc ou bien $S_{\mathscr{H}}$ est réduit à un élément, ou bien il est infini.

   D'après le point précédent, si $S_{\mathscr{E}}$ possède au moins un élément $y_0$, on a $S_{\mathscr{E}} = \{ y_0 + y \mid y \in S_{\mathscr{H}} \}$. Donc $y \mapsto y_0 + y$ est une bijection de $S_{\mathscr{H}}$ sur $S_{\mathscr{E}}$, donc $S_{\mathscr{E}}$ est ou bien réduit à un élément $(y_0)$ ou bien est infini.

   Donc ou bien $S_{\mathscr{E}}$ est vide, ou il est réduit à un élément, ou il est infini.

□

**Remarque 2.2.2.**
Nous retrouvons ici le même type de structure de l'ensemble des solutions que dans le cas des systèmes linéaires. Ce n'est pas une coïncidence : un même type de structure algébrique se cache derrière (les espaces vectoriels et affines) !

**Exemple 2.2.3.**
Il a été vu en terminale (et nous redémontrerons bientôt) qu'il existe une seule fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solution de $y' - y = 0$ et vérifiant $y(0) = 1$.

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation $y' - y = 0$ est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\mathrm{e}^x \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Exercice 2.2.4.**
Déterminer toutes les solutions du problème de Cauchy $y' - y = 0$ et $y(0) = 42$.

**Théorème 2.2.5** (Principe de superposition)**.**
Soit $n$ un entier, $a_0,\dots,a_{n-1}$, $b_1$, $b_2$ des applications continues de $I$ dans $\mathbb{K}$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Notons $a_n$ la fonction constante égale à 1. On considère les équations

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = b_1, \qquad (\mathscr{E}_1)$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = b_2, \qquad (\mathscr{E}_2)$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2. \qquad (\mathscr{E})$$

Alors pour toute solution $y_1$ de $\mathscr{E}_1$ et toute solution $y_2$ de $\mathscr{E}_2$, $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est une solution de $\mathscr{E}$.

**Démonstration.**
On reprend les notations de la démonstration de la proposition 2.2.1. Soit $y_1$ et $y_2$ des solutions respectives de $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$. On a $\psi_{y_1} = b_1$ et $\psi_{y_2} = b_2$. Or $\psi_{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2} = \lambda_1 \psi_{y_1} + \lambda_2 \psi_{y_2}$. Donc $\psi_{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2} = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$. □

**Théorème 2.2.6** (Solutions du problème de Cauchy linéaire)**.**
Soit $n$ un entier naturel et $\mathscr{E}$ une équation différentielle linéaire d'ordre $n$. Alors, pour tout choix des conditions initiales, le problème de Cauchy linéaire d'ordre $n$ admet une unique solution.

**Remarque 2.2.7.**
Ce théorème est hors-programme dans le cas général. Sa démonstration dans le cas général requiert en effet des outils d'analyse que nous n'avons pas encore à notre disposition.

En revanche, dans les cas $n = 1$ et $n = 2$, le résultat est au programme et sera démontré.

**Remarque 2.2.8.**
Le théorème précédent implique que par chaque point de $I \times \mathbb{R}$, il passe une et une seule courbe solution. Les courbes solutions partitionnent donc $I \times \mathbb{R}$. Un exemple est donné dans la figure 2.

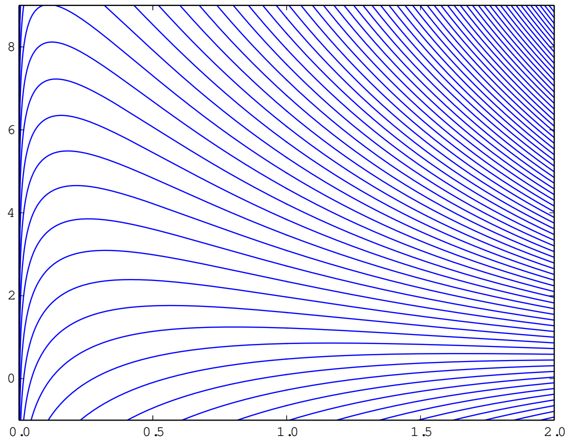


FIGURE 2 – Courbes solutions de l'équation $y' + y = \dfrac{1}{x}$, représentées sur $]0,2] \times [-1,9]$.

# 3. Équations linéaires du premier ordre.

## 3.1. Résolution de l'équation homogène.

**Théorème 3.1.1.**
Soit $A$ une primitive de $a$ sur $I$. Soit $a \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})$. Alors, l'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + ay = 0$ est

$$S_{\mathscr{H}} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & K\mathrm{e}^{-A(t)} \end{array} \,\middle|\, K \in \mathbb{K} \right\}.$$

Si de plus une condition initiale est fixée, alors la solution est unique. En particulier si $y$ s'annule en un point, elle est identiquement nulle.

**Démonstration.**
Toute fonction de la forme $t \mapsto K\mathrm{e}^{-A(t)}$ est une solution (c'est évident, il n'y a qu'à dériver).

Réciproquement, soit $y$ une solution. On pose $z(t) = y(t)\mathrm{e}^{A(t)}$ pour $t \in I$. $z$ est dérivable sur $I$ et pour tout $t$, $z'(t) = y'(t)\mathrm{e}^{A(t)} + y(t)A'(t)\mathrm{e}^{A(t)} = (y'(t) + a(t)y(t))\mathrm{e}^{A(t)} = 0$, donc $z$ est une constante $K$.

Une condition initiale $y(t_0) = y_0$ étant donnée, elle est vérifiée si et seulement si $K\mathrm{e}^{-A(t_0)} = y_0$, c'est-à-dire si et seulement si $K = y_0\mathrm{e}^{A(t_0)}$. Il y a alors une et une seule solution : $t \mapsto y_0\mathrm{e}^{A(t_0)-A(t)}$. □

**Remarque 3.1.2.**
On dit que l'ensemble des solutions a une structure de droite vectorielle, de vecteur directeur $t \mapsto \mathrm{e}^{-A(t)}$.

**Remarque 3.1.3.**
Dans le cas où $a$ est une constante, l'ensemble des solutions est donc tout simplement $S_{\mathscr{H}} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & K\mathrm{e}^{-at} \end{array} \,\middle|\, K \in \mathbb{K} \right\}$.

**Exercice 3.1.4.**
Déterminer les intervalles de résolution puis résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' + y = 0$
2. $y' + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = 0$ avec $y(1/2) = 1$.

**Corollaire 3.1.5.**
Une solution qui s'annule en un point ne peut être que la fonction nulle.

**Démonstration.**
En effet elle est solution d'un problème de Cauchy de la forme $y(t_0) = 0$. Or il existe une unique solution à ce problème et la fonction nulle est manifestement solution. □

## 3.2. Résolution d'une équation avec second membre.

**Remarque 3.2.1.**
On a déjà vu que si l'on connaissait une solution $\tilde{y}$ de l'équation avec second membre, alors on pouvait construire toutes les solutions de l'équation avec second membre à partir de l'ensemble des solutions de l'équation homogène.

Dans le cas d'une équation d'ordre un, on dit que l'ensemble des solutions a une structure de droite affine, car l'ensemble des solutions est l'ensemble des $\tilde{y} + y$ pour $y$ parcourant une droite vectorielle.

**Théorème 3.2.2.**
Soit $a$ et $b$ deux applications continues de $I$ dans $\mathbb{C}$, et $A$ une primitive de $a$.

Alors le problème de Cauchy $y' + ay = b$ et $y(t_0) = y_0$ admet une unique solution :

$$\begin{cases} I & \rightarrow & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{A(t_0)-A(t)} y_0 + \mathrm{e}^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{A(u)} b(u) \, \mathrm{d}u \end{cases}$$

**Remarque 3.2.3.**
L'unicité est aisée à démontrer : si on dispose de deux solutions de ce problème, leur différence est une solution de l'équation homogène du problème s'annulant en $t_0$, c'est donc l'application nulle.

On peut également assez directement montrer que l'application donnée est solution par calcul.

Nous donnons cependant ci-dessous une autre démonstration qui a l'avantage de permettre de retrouver la formule. Cette méthode est à connaître et s'appelle la *méthode de la variation de la constante.*

**Lemme 3.2.4.**
Soit $h : I \to \mathbb{C}$ ne s'annulant pas. Alors, pour tout $y : I \to \mathbb{C}$, il existe une unique fonction $C : I \to \mathbb{C}$ telle que $y = Ch$.

De plus, si $h$ est dérivable, alors $y$ est dérivable si et seulement si $C$ l'est.

**Démonstration.**
C'est élémentaire : $y = Ch$ si et seulement si $C = \dfrac{y}{h}$.

On obtient la dérivabilité de $C$ ou de $y$ par opérations usuelles sur les fonctions dérivables. □

**Démonstration** (Théorème 3.2.2).
Notons $\mathscr{E}$ l'équation $y' + ay = b$, $(\mathscr{H})$ l'équation homogène associée, $S_{\mathscr{E}}$ et $S_{\mathscr{H}}$ les ensembles de solutions respectifs de ces deux équations et $S$ l'ensemble des solutions du problème de Cauchy $y' + ay = b$ et $y(t_0) = y_0$.

On sait que $y_{\mathscr{H}} : t \mapsto \mathrm{e}^{-A(t)}$ est une solution de $\mathscr{H}$ qui ne s'annule jamais.

D'après le lemme 3.2.4, toute fonction $y : I \to \mathbb{K}$ dérivable est de la forme $Cy_{\mathscr{H}}$, avec $C : I \to \mathbb{K}$ dérivable..

Soit donc une fonction $C : I \to \mathbb{K}$ est une application dérivable, posons $y = Cy_{\mathscr{H}}$. La fonction $y$ est dérivable comme produit de fonctions dérivables.

Soit alors $t \in I$. On a

$$\begin{aligned} y' + ay &= C' y_{\mathscr{H}} + C y'_{\mathscr{H}} + aC y_{\mathscr{H}} \\ &= C' y_{\mathscr{H}} + C\big(y'_{\mathscr{H}} + a y_{\mathscr{H}}\big). \end{aligned}$$

Or $y_{\mathscr{H}}$ est solution de $(\mathscr{H})$, donc $y'_{\mathscr{H}} + ay_{\mathscr{H}} = 0$. Donc $y$ est solution de $\mathscr{E}$ si et seulement si $C' y_{\mathscr{H}} = b$, c'est-à-dire si et seulement si $C'$ est l'application $t \mapsto \mathrm{e}^{A(t)} b(t)$, c'est-à-dire si et seulement si $C$ est une primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{A(t)} b(t)$, *i.e.* si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$C : t \mapsto \lambda + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{A(u)} b(u) \, \mathrm{d}u.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et

$$y : t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-A(t)} + \mathrm{e}^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{A(u)} b(u) \, \mathrm{d}u.$$

*Remarque :* On vient donc de prendre une solution quelconque de $(\mathscr{H})$.

Alors, $y$ est solution du problème de Cauchy ($y' + ay = b$ et $y(t_0) = y_0$) si et seulement si $y(t_0) = y_0$, donc si et seulement si $\lambda = y_0 \mathrm{e}^{A(t_0)}$, c'est-à-dire si et seulement si $y$ est l'application

$$t \mapsto \mathrm{e}^{A(t_0)-A(t)} y_0 + \mathrm{e}^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{A(u)} b(u) \, \mathrm{d}u.$$

□

## 3.3. Résolution pratique.

### a. Schéma de résolution (à connaître !).

On effectuera *toujours* les actions suivantes, dans l'ordre.

1. Déterminer $I$.
2. Résoudre $(E_H)$.
3. Trouver une solution dite particulière (solution évidente, second membre d'une forme particulière ou méthode de variation de la constante).
4. S'occuper éventuellement des conditions initiales.
5. Donner la solution, ou l'ensemble des solutions.

**Remarque 3.3.1.**
On ne vous demande jamais que de trouver *une* solution particulière : faites le plus simplement possible ! Si vous ne voyez pas de solution évidente, la méthode de la variation de la constante

est assez efficace et vous permet de retrouver la formule générale (une erreur est vite arrivée !). Il est permis de chercher une solution particulière au brouillon puis de l'exhiber sur sa copie, en justifiant qu'elle vérifie bien les conditions imposées.

**Exemple 3.3.2.**
On résout l'équation $y' + y = \mathrm{e}^{2x}$ sur $\mathbb{R}$. Ses solutions sont les $x \mapsto \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2x} + K\mathrm{e}^{-x}$, avec $K \in \mathbb{K}$.

**Exercice 3.3.3.**
Résoudre le problème de Cauchy :

$$y' - \frac{y}{x} = x\ln(x),\ y(1) = 2.$$

# 4. Équations différentielles du second ordre à coefficients constants.

## 4.1. Définitions.

Une équation différentielle linéaire du second ordre est une équation de la forme $y'' + \alpha y' + \beta y = d$ où $\alpha$, $\beta$ et $d$ sont des applications continues, d'inconnue $y : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable sur $I$.

Dans la suite de ce chapitre, on ne s'intéressera qu'au cas où $\alpha$ et $\beta$ sont des constantes. Plus généralement, on s'intéressera aux équations de la forme $ay'' + by' + cy = d$, où $a$, $b$, $c$ sont des constantes de $\mathbb{K}$ avec $a \neq 0$ et $d \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$, d'inconnue $y : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable sur $I$. $d$ est appelé le *second membre* de cette équation. On dit qu'elle est homogène si son second membre est nul. On appelle *équation homogène* associée à $ay'' + by' + cy = d$ l'équation $ay'' + by' + cy = 0$.

## 4.2. Résolution d'une équation homogène.

On considère ici l'équation homogène définie sur $\mathbb{R}$

$$ay'' + by' + cy = 0. \qquad (\mathscr{H})$$

**Lemme 4.2.1.**
Soit $r \in \mathbb{K}$, la fonction $y_r : t \mapsto \mathrm{e}^{rt}$ est solution de $(\mathscr{H})$ si et seulement si $ar^2 + br + c = 0$.

**Démonstration.**
$y_r$ est dérivable et $y_r' = ry_r$. Donc $y_r$ est deux fois dérivable et $y_r'' = r^2 y_r$. On a donc $ay_r'' + by_r' + cy_r = (ar^2 + br + c)y_r$. On conclut en remarquant que $y_r$ ne s'annule jamais. ☐

**Définition 4.2.2** (Équation et polynôme caractéristique)**.**
L'équation caractéristique de $(\mathscr{H})$ est l'équation

$$ar^2 + br + c = 0. \qquad \text{(EC)}$$

Le polynôme caractéristique de $(\mathscr{H})$ est

$$aX^2 + bX + c.$$

**Théorème 4.2.3** (Solutions complexes de $(\mathscr{H})$)**.**
Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$, avec $a \neq 0$.

1. Si (EC) a deux solutions complexes distinctes $r_1, r_2$, alors les solutions complexes de $(\mathscr{H})$ sont les applications de la forme
$$\begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda\mathrm{e}^{r_1 t} + \mu\mathrm{e}^{r_2 t} \end{cases}$$
pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.
2. Si (EC) a une unique solution complexe $r$, alors les solutions complexes de $(\mathscr{H})$ sont les applications de la forme
$$\begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (\lambda t + \mu)\mathrm{e}^{rt} \end{cases}$$
pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

**Démonstration.**
Soit $r$ une solution complexe de (EC), on sait d'après le lemme 4.2.1 que $y_r : t \mapsto \mathrm{e}^{rt}$ est une solution de $(\mathscr{H})$. De plus, $y_r$ ne s'annule jamais.

On peut donc mettre en œuvre la méthode de la variation de la constante. En effet, pour toute fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fois dérivable, il existe $K : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fois dérivable telle que $y = Ky_r$ (poser $K = y/y_r$).

Soit donc $K : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fois dérivable, posons $y = Ky_r$. La fonction $y$ est deux fois dérivable, par produit. On a alors, comme $y_r' = ry_r$.

$$y' = K'y_r + Ky_r' = (K' + rK)y_r.$$

Le même type de calcul donne

$$y'' = (K'' + 2rK' + r^2K)y_r.$$

On a alors

$$ay''+by'+cy = \left[aK'' + (2ar+b)K' + (ar^2+br+c)K\right] y_r.$$

Ainsi, comme $r$ est solution de (EC), on a $ar^2+br+c=0$, donc

$$ay''+by'+cy = (aK'' + (2ar+b)K')y_r.$$

Comme $y_r$ ne s'annule jamais, $ay''+by'+cy=0$ si et seulement si

$$aK'' + (2ar+b)K' = 0.$$

Remarquons que $2ar+b=0$ si et seulement si $r = -\dfrac{b}{2a}$, *i.e.* si et seulement si (EC) possède une unique solution complexe : $r$.

• Si (EC) possède une unique solution complexe, alors $y$ est solution de $(\mathscr{H})$ si et seulement si $K''=0$. En primitivant deux fois, on obtient directement que c'est équivalent à « $K$ est une fonction affine », d'où le résultat dans ce cas là.

• Supposons maintenant que (EC) possède deux solutions complexes distinctes, notons $r'$ la seconde solution. On peut tout de suite remarquer que $r+r' = -\dfrac{b}{a}$. Remarquons aussi que l'équation $aK''+(2ar+b)K'=0$ équivaut à l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 portant sur $K'$ :

$$(K')' + \left(2r + \frac{b}{a}\right)K' = 0.$$

Ainsi, $y$ est solution de $(\mathscr{H})$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que

$$K' : t \mapsto \alpha \exp\left[-\left(2r+\frac{b}{a}\right)t\right].$$

En primitivant ceci, $y$ est solution de $(\mathscr{H})$ si et seulement s'il existe $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tel que

$$K : t \mapsto \beta \exp\left[-\left(2r+\frac{b}{a}\right)t\right] + \gamma.$$

Ainsi, $y$ est solution de $(\mathscr{H})$ si et seulement s'il existe $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tel que

$$y : t \mapsto \left(\beta \exp\left[-\left(2r+\frac{b}{a}\right)t\right] + \gamma\right) \times \mathrm{e}^{rt}.$$

Après simplification, $y$ est solution de $(\mathscr{H})$ si et seulement s'il existe $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tel que

$$y : t \mapsto \beta \mathrm{e}^{r't} + \gamma \mathrm{e}^{rt}.$$

□

**Exemple 4.2.4.**
L'ensemble des solutions complexes de $y''+y=0$ est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \lambda \mathrm{e}^{ix} + \mu \mathrm{e}^{-ix} \end{array} \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{C} \right\}.$$

Par les formules d'Euler, c'est aussi

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \lambda \sin(x) + \mu \cos(x) \end{array} \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{C} \right\}.$$

**Théorème 4.2.5** (Solutions réelles de $(\mathscr{H})$)**.**
Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 0$.

1. Si (EC) a deux solutions réelles distinctes $r_1, r_2$, alors les solutions réelles de $(\mathscr{H})$ sont les applications de la forme
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda \mathrm{e}^{r_1 t} + \mu \mathrm{e}^{r_2 t} \end{array} \right.$$
pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
2. Si (EC) a une unique solution réelle $r$, alors les solutions réelles de $(\mathscr{H})$ sont les applications de la forme
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (\lambda t + \mu)\mathrm{e}^{rt} \end{array} \right.$$
pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
3. Si (EC) a deux solutions complexes conjuguées distinctes, que l'on note $\alpha \pm i\omega$ avec $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$, alors les solutions réelles de $(\mathscr{H})$ sont les applications de la forme
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda \cos(\omega t)\mathrm{e}^{\alpha t} + \mu \sin(\omega t)\mathrm{e}^{\alpha t} \end{array} \right.$$
pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Ce sont aussi exactement les applications de la forme
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & A\cos(\omega t + \varphi)\mathrm{e}^{\alpha t} \end{array} \right.$$
pour $A \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi \in ]-\pi, \pi]$.

**Lemme 4.2.6.**
Soit $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$, avec $\omega \neq 0$. Les deux ensembles de fonctions exposés au point 3. du théorème 4.2.5 sont égaux.

**Démonstration.**
Soit $A \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi \in ]-\pi, \pi]$, soit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & A\cos(\omega t + \varphi)\mathrm{e}^{\alpha t} \end{array} \right. .$$

Par les formules d'addition, si $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = A\cos(\varphi)\cos(\omega t)\mathrm{e}^{\alpha t} - A\sin(\varphi)\sin(\omega t)\mathrm{e}^{\alpha t},$$

donc $f$ est bien de la première forme.

Réciproquement, soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si $\lambda = \mu = 0$, il suffit de prendre $A = 0$ et $\varphi$ quelconque. Sinon, posons $A = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$ et $\varphi \in ]-\pi, \pi]$ tel que $\cos\varphi = \dfrac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}$ et $\sin\varphi = -\dfrac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}$. Alors,

$$\begin{aligned} &\lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t) \\ =&\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}\cos(\omega t) + \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}\sin(\omega t)\right) \\ =&A(\cos(\omega t)\cos(\varphi) - \sin(\omega t)\sin(\varphi)) \\ =&A\cos(\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

□

**Démonstration** (Théorème 4.2.5)**.**
• Les cas où (EC) admet une ou deux solutions réelles se traitent exactement comme le cas complexe.
• Supposons donc que (EC) admette deux solutions complexes conjuguées distinctes $\alpha \pm i\omega$. On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solution de $(\mathscr{H})$. Alors $y$ est solution complexe de $(\mathscr{H})$, donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que

$$y : t \mapsto \lambda\mathrm{e}^{(\alpha + i\omega)t} + \mu\mathrm{e}^{(\alpha - i\omega)t}$$

Or $y(0) = \lambda + \mu$ est réel donc $\lambda + \mu \in \mathbb{R}$, donc $\mathrm{Im}(\lambda) = -\mathrm{Im}(\mu)$.

De même $y(\pi/(2\omega)) \in \mathbb{R}$, donc

$$y\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = i(\lambda - \mu)\exp\left(\frac{\alpha\pi}{2\omega}\right) \in \mathbb{R},$$

donc $\mathrm{Re}(\lambda) = \mathrm{Re}(\mu)$.

Ainsi, $\mu = \overline{\lambda}$.

Soit $\rho \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi \in ]-\pi, \pi]$ tels que $\lambda = \rho\mathrm{e}^{i\varphi}$. Si $t \in \mathbb{R}$, alors

$$y(t) = 2\rho\cos(\omega t + \varphi)\mathrm{e}^{\alpha t}.$$

Ainsi, $y$ est de la forme demandée.

Synthèse : Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et

$$y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda\cos(\omega t)\mathrm{e}^{\alpha t} + \mu\sin(\omega t)\mathrm{e}^{\alpha t} \end{array} \right.$$

D'après le théorème de structure des solutions homogène (2.2.1 – une combinaison linéaire de solutions homogènes est solution homogène), il suffit de montrer que

$$s_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \cos(\omega t)\mathrm{e}^{\alpha t} \end{array} \right.$$

et

$$s_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sin(\omega t)\mathrm{e}^{\alpha t} \end{array} \right.$$

sont solution de $(\mathscr{H})$. Or, si $t \in \mathbb{R}$, par les formules d'Euler,

$$s_1(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{(\alpha + i\omega)t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{(\alpha - i\omega)t}.$$

D'après le théorème 4.2.3, $t \mapsto \mathrm{e}^{(\alpha + i\omega)t}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{(\alpha - i\omega)t}$ sont solutions de $(\mathscr{H})$, donc $s_1$ aussi. On effectue le même raisonnement pour $s_2$. □

**Remarque 4.2.7.**
Dans tous les cas, les solutions sont les combinaisons linéaires de deux solutions linéairement indépendantes. On dit que cet ensemble a une structure de plan vectoriel.

**Exemple 4.2.8.**
1. Les solutions complexes de $y'' + y' + 2y = 0$ sont les fonctions de la forme

$$\begin{aligned} t \mapsto &\lambda\mathrm{e}^{\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}t} + \mu\mathrm{e}^{\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}t} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\left(\lambda\mathrm{e}^{\frac{-i\sqrt{7}}{2}t} + \mu\mathrm{e}^{\frac{i\sqrt{7}}{2}t}\right) \end{aligned}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

2. La solution du problème de Cauchy $y'' + 2y' + y = 0$, avec $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$ est la fonction $t \mapsto t\mathrm{e}^{1-t}$.

**Théorème 4.2.9.**
Le problème de Cauchy $ay'' + by' + cy = 0$ et $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y'_0$, admet une unique solution.

**Démonstration.**
(*hors programme*) Nous traitons ici le cas où on cherche une solution à valeurs complexes et où le polynôme caractéristique a deux racines distinctes $r_1$ et $r_2$. Alors les solutions de l'équation différentielle considérées sont les applications $y$ de la forme $t \mapsto \lambda\mathrm{e}^{r_1 t} + \mu\mathrm{e}^{r_2 t}$ où $\lambda$ et $\mu$

sont deux complexes. On a $y(t_0) = \lambda e^{r_1 t_0} + \mu e^{r_2 t_0}$ et $y'(t_0) = \lambda r_1 e^{r_1 0} + \mu r_2 e^{r_2 t_0}$.

Pour montrer que le problème de Cauchy admet une unique solution, il suffit de montrer que le système

$$\begin{cases} \lambda e^{r_1 t_0} + \mu e^{r_2 t_0} = y_0 \\ \lambda r_1 e^{r_1 t_0} + \mu r_2 e^{r_2 t_0} = y_0' \end{cases}$$

d'inconnues $\lambda$ et $\mu$ admet une unique solution.

On peut s'en assurer par le calcul, ou on peut simplement remarquer que pour que ce système admette une unique solution, il suffit que l'équation

$$\lambda \begin{pmatrix} e^{r_1 t_0} \\ r_1 e^{r_1 t_0} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} e^{r_2 t_0} \\ r_2 e^{r_2 t_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$$

admette une unique solution.

Pour cela, il suffit de montrer que les vecteurs $\begin{pmatrix} e^{r_1 t_0} \\ r_1 e^{r_1 t_0} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} e^{r_2 t_0} \\ r_2 e^{r_2 t_0} \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$. Il suffit de vérifier qu'ils sont linéairement indépendants, ce qui est le cas puisque leur déterminant vaut $e^{r_1 t_0} r_2 e^{r_2 t_0} - r_1 e^{r_1 t_0} e^{r_2 t_0}$, qui est égal à $(r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2) t_0}$, qui est non nul puisque $r_1 \neq r_2$. □

## 4.3. Résolution d'une équation avec second membre.

**Théorème 4.3.1.**
Si l'on connaît une solution $\tilde{y}$ de l'équation avec second membre alors on en connaît toutes les solutions : l'ensemble $S$ des solutions de l'équation avec second membre est $S = \{ y_H + \tilde{y} \mid y_H \in S_H \}$.

**Remarque 4.3.2.**
On a déjà vu que si l'on connaissait une solution de l'équation $\tilde{y}$ avec second membre, alors on pouvait construire toutes les solutions de l'équation avec second membre à partir de l'ensemble des solutions de l'équation homogène.

Dans le cas d'une équation d'ordre deux à coefficients constants, on dit que l'ensemble des solutions a une structure de plan affine, car l'ensemble des solutions est l'ensemble des $\tilde{y} + y$ pour $y$ parcourant un plan vectoriel.

## 4.4. Seconds membres particuliers

Nous avons déjà vu comment trouver une solution particulière à une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
Cependant, quand le second membre est d'une certaine forme et que l'équation est *à coefficients constants*, il existe une autre méthode. Notons que cette seconde méthode n'est pas plus rapide ni plus efficace que la méthode de variation de la constante. Elle a par contre le mérite de pouvoir être utilisée pour des équations d'ordre 2 présentant les mêmes caractéristiques : coefficients constants et second membre de ces mêmes formes particulières.

On considère une équation $(\mathscr{E})$ de la forme $y' + ay = c$ ou $y'' + ay' + by = c$, où $a, b \in \mathbb{K}$. Nous supposons que l'une des conditions suivantes est remplie :

1. il existe un polynôme $P$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ tel que $c = P$ ;
2. il existe $A, \alpha \in \mathbb{K}$ tels que $c(x) = A e^{\alpha x}$ ;
3. il existe $A, \omega \in \mathbb{R}$ tels que $c(x) = A\cos(\omega x)$ ;
4. il existe $A, \omega \in \mathbb{R}$ tels que $c(x) = A\sin(\omega x)$.

Ces quatre cas sont ceux au programme, mais la méthode que nous allons développer peut également s'adapter lorsque dans les conditions précédentes la constante $A$ est remplacée par un polynôme, et lorsque les sin et cos circulaires sont remplacés par des ch et sh hyperboliques.

Dans les quatre conditions au programme, il est possible de montrer qu'il existe à chaque fois une solution particulière d'une forme assez simple :

1. il existe un polynôme $Q$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ solution de $(\mathscr{E})$ ;
2. il existe un polynôme $Q$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ tel que $x \mapsto Q(x) e^{\alpha x}$ est solution de $(\mathscr{E})$ ;
3. il existe un polynôme $Q$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ tel que $x \mapsto Q(x) e^{i\omega x}$ est solution de $y' + ay = A e^{i\omega x}$ ou $y'' + ay' + by = A e^{i\omega x}$. On peut alors montrer, grâce au principe de superposition notamment, que $x \mapsto \operatorname{Re}\left(Q(x) e^{i\omega x}\right)$ est solution de $(\mathscr{E})$. Ainsi en développant, on remarque qu'il existe deux polynômes réels $R$ et $S$ tels que $c(x) = R(x)\cos(\omega x) + S(x)\sin(\omega x)$ ;

4. suivant le même principe que dans le cas précédent, il existe un polynôme $Q$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ tel que $x \mapsto \operatorname{Im}\left(Q(x)\mathrm{e}^{i\omega x}\right)$ est solution de $(\mathscr{E})$, et donc en développant, on remarque qu'il existe deux polynômes réels $R$ et $S$ tels que $c(x) = R(x)\cos(\omega x) + S(x)\sin(\omega x)$.

Le degré du poynôme $Q$ se devine en injectant dans $(\mathscr{E})$ une fonction de la forme voulue. On détermine ensuite les coefficients du polynôme. Voyons cela sur les exemples suivants :

**Exemple 4.4.1.**
Soit $(\mathscr{E})$ : $y' + y = 1 + 2x$, définie sur $\mathbb{R}$. Soit $Q$ un polynôme. Alors $Q$ est solution de $(\mathscr{E})$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q'(x) + Q(x) = 1 + 2x$. En particulier, pour que $Q$ soit solution, il faut que $Q' + Q$ soit de degré 1 : cela n'est possible que si $Q$ est de degré 1, car si $Q$ n'est pas nul, $\deg Q' < \deg Q$. Posons alors $Q = d + eX$. Alors :

$$\begin{aligned} & Q \text{ est solution de } (\mathscr{E}) \\ \Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbb{R},\ e + (d + ex) = 1 + 2x \\ \Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbb{R},\ (e + d) + ex = 1 + 2x \\ \Leftrightarrow\quad & [e + d = 1] \text{ et } [e = 2] \\ \Leftrightarrow\quad & e = 2 \text{ et } d = -1 \end{aligned}$$

Ainsi $x \mapsto -1 + 2x$ est une solution particulière de $(\mathscr{E})$.

**Exemple 4.4.2.**
Soit $(\mathscr{E})$ : $y'' - 2y' + y = 2\mathrm{e}^{x}$, définie sur $\mathbb{R}$. Soit $Q$ un polynôme et soit $y$ : $x \mapsto Q(x)\mathrm{e}^{x}$. Ainsi $y'$ : $x \mapsto (Q'(x) + Q(x))\mathrm{e}^{x}$ et $y''$ : $x \mapsto (Q''(x) + 2Q'(x) + Q(x))\mathrm{e}^{x}$. Alors :

$$\begin{aligned} & y \text{ est solution de } (\mathscr{E}) \\ \Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbb{R},\ (Q''(x) + 2Q'(x) + Q(x))\mathrm{e}^{x} \\ & -2(Q'(x) + Q(x))\mathrm{e}^{x} + Q(x)\mathrm{e}^{x} = 2\mathrm{e}^{x} \\ \Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbb{R},\ Q''(x)\mathrm{e}^{x} = 2\mathrm{e}^{x} \\ \Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbb{R},\ Q''(x) = 2 \end{aligned}$$

Un polynôme $Q$ vérifiant cette relation est par exemple $Q = X^2$. Ainsi, $x \mapsto x^2\mathrm{e}^{x}$ est une solution particulière de $(\mathscr{E})$.

Par curiosité, démontrons le troisième point en utilisant le second, dans le cas d'une équation du premier ordre (la méthode serait la même pour le second ordre) :

**Démonstration.**
Soit $(\mathscr{E})$ : $y' + ay = B\cos(\omega x)$, où $a, B, \omega \in \mathbb{R}$. Considérons $(\mathscr{E}')$ : $y' + ay = B\mathrm{e}^{i\omega x}$. Il existe alors un polynôme complexe $Q$ tel que $y_0$ : $x \mapsto Q(x)\mathrm{e}^{i\omega x}$ est solution de $(\mathscr{E}')$. Ainsi $y_0' + ay_0 = B\mathrm{e}^{i\omega x}$. En passant au conjugué, on observe, puisque $a, B, \omega$ sont réels, que $\bar{y_0}' + a\bar{y_0} = B\mathrm{e}^{-i\omega x}$. Par principe de superposition, $\frac{1}{2}(y_0 + \bar{y_0})$ est solution de $y' + ay = \frac{1}{2}B\left(\mathrm{e}^{i\omega x} + \mathrm{e}^{-i\omega x}\right)$. Une solution de $(\mathscr{E})$ est donc bien $\operatorname{Re}(y_0)$. $\square$

Finissons par un ultime exemple :

**Exemple 4.4.3.**
Soit $(\mathscr{E})$ : $y'' + y = 2\cos(x)$. Résolvons tout d'abord l'équation $(\mathscr{E}')$ : $y'' + y = 2\mathrm{e}^{ix}$. Soit $Q$ un polynôme et $y_0$ : $x \mapsto Q(x)\mathrm{e}^{ix}$. Alors $y_0'$ : $(Q'(x) + iQ(x))\mathrm{e}^{ix}$ et $y_0''$ : $x \mapsto (Q''(x) + 2iQ'(x) - Q(x))\mathrm{e}^{ix}$. Donc $y_0$ est solution de $(\mathscr{E}')$ ssi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q''(x) + 2iQ'(x) = 2$. On cherche donc $Q$ de degré 1, donc de la forme $Q(x) = d + ex$. Alors $Q''(x) + 2iQ'(x) = 2ie$, donc $Q$ vérifie $Q''(x) + 2iQ'(x) = 2$ ssi $e = -i$. Ainsi une solution particulière de $(\mathscr{E}')$ est $y_0$ : $x \mapsto -ix\mathrm{e}^{ix}$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Re}(y_0)(x) = \operatorname{Re}\left(-ix(\cos(x) + i\sin(x))\right) = x\sin(x)$. Finalement, une solution particulière de $(\mathscr{E})$ est $x \mapsto x\sin(x)$.