

## Devoir facultatif n° 01

Le but de ce problème est de présenter la méthode de Cardan pour la résolution des équations de degré 3.

Pour tout réel  $y$ , on notera  $\sqrt[3]{y}$  l'unique réel  $x$  tel que  $x^3 = y$ .

### A). Rappels sur les équations du second degré

Soit  $a$  et  $b$  deux complexes. On considère l'équation

$$z^2 + az + b = 0 \quad (1)$$

- 1) Démontrer que l'équation (1) admet exactement une ou deux solutions. On notera  $z_1$  et  $z_2$  les deux solutions (avec  $z_1 = z_2$  s'il n'y a qu'une solution).
- 2) Montrer  $z_1 + z_2 = -a$  et  $z_1 z_2 = b$ .
- 3) Montrer que pour tout couple de complexes  $(u, v)$ , on a

$$\{u, v\} = \{z_1, z_2\} \iff \begin{cases} uv = b \\ \text{et } u + v = -a \end{cases}$$

### B). Réduction à une équation sans terme de degré 2

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . On considère l'équation suivante d'inconnue  $z$  :

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0, \quad (2)$$

où  $a, b$  et  $c$  sont des complexes.

- 1) Montrer qu'en posant  $z' = z + \alpha$ , où  $\alpha$  est une valeur bien choisie, l'équation (2) est équivalente à l'équation de Cardan, d'inconnue  $z'$  :

$$z'^3 + pz' + q = 0, \quad (3)$$

où  $p$  et  $q$  sont des complexes dépendants de  $\alpha, a, b$  et  $c$ .

- 2) Résoudre l'équation (3) dans le cas  $p = 0$ .

### C). Étude de l'équation de Cardan

Soit  $z_0$  un complexe.

- 1) Montrer qu'il existe  $u$  et  $v$  vérifiant

$$\begin{cases} u + v = z_0 \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$$

On ne cherchera pas à calculer explicitement  $u$  et  $v$ .

- 2) Montrer alors que  $z_0$  est solution de (3) si et seulement si  $u^3$  et  $v^3$  sont les deux solutions de

$$Z^2 + qZ - \frac{p^3}{27} = 0. \quad (4)$$

## D). Cas réel

Dans cette partie, on considère l'équation (3) dans le cas où  $p$  et  $q$  sont *réels* et on cherche ses solutions *réelles*. Pour cela, on note  $\Delta$  le discriminant de (4) et on considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^3 + px + q. \end{aligned}$$

Les solutions réelles de (3) sont les valeurs pour lesquelles  $f$  s'annule.

- 1) Étudier les variations de  $f$  dans le cas où  $p < 0$ . Remarquer en particulier que  $f$  admet un minimum local en un point  $\alpha$  et un maximum local en un point  $\beta$ . On pose  $m = f(\alpha)$  et  $M = f(\beta)$ .
- 2) Montrer que  $mM = \Delta$ .
- 3) Étudier les variations de  $f$  dans le cas où  $p \geq 0$ .
- 4) Dédire des trois questions précédentes que, quelle que soit la valeur de  $p$ , (3) admet une unique racine réelle si et seulement si  $\Delta > 0$  ou  $p = q = 0$ .
- 5) Dans le cas où  $\Delta > 0$ , résoudre l'équation (3).
- 6) *Application* : déterminer les solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

*On ne prendra pas peur : l'expression des solutions est assez compliquée.*

- 7) Combien de solutions (3) a-t-elle de solutions dans le cas  $\Delta \leq 0$  ?

Le cas  $\Delta < 0$  a historiquement motivé l'introduction des complexes par Bombelli au XVI<sup>ème</sup> siècle, alors que les nombres négatifs ont prêté à controverse jusqu'au début du XIX<sup>ème</sup> siècle...

## E). Résolution dans le cas complexe

On reprend donc l'équation (3) dans le cas où les coefficients sont complexes et l'on cherche ses solutions dans  $\mathbb{C}$ . On a résolu le cas  $p = 0$  plus haut, on supposera donc  $p \neq 0$ . On considère donc l'équation (4). On notera  $U$  et  $V$  ses racines complexes.

- 1) Calculer  $UV$ . Montrer que  $U \neq 0$  et  $V \neq 0$ .
- 2) Montrer que l'équation  $u^3 = U$  admet trois solutions distinctes  $u_1, u_2, u_3$  et exprimer par exemple  $u_2, u_3$  en fonction de  $u_1$  et de  $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$ .
- 3) Soit  $v_1$  le complexe vérifiant  $u_1 v_1 = -\frac{p}{3}$ .  
Justifier son existence et montrer que  $v_1^3 = V$ .  
Donner toutes les autres solutions de l'équation  $v^3 = V$  en fonction de  $v_1$ .
- 4) On pose  $\begin{cases} z_1 = u_1 + v_1 \\ z_2 = u_1 j^2 + v_1 j \\ z_3 = u_1 j + v_1 j^2 \end{cases}$   
Montrer que  $z_1, z_2, z_3$  sont solutions de l'équation (3).
- 5) Montrer que réciproquement si  $z_0$  est une racine de (3) alors  $z_0$  est l'une des trois valeurs  $z_1, z_2$  ou  $z_3$ .

## F). Équation de Bombelli

En 1572, Bombelli s'intéresse à la résolution de l'équation

$$x^3 = 15x + 4 \quad (5)$$

Autrement dit, il s'agit de l'équation (3) dans le cas particulier  $p = -15$  et  $q = -4$ .

Il n'y a en fait pas besoin d'utiliser la méthode de Cardan pour la résoudre. Néanmoins, c'est un bon exemple pour comprendre pourquoi et comment le passage par les complexes peut-être utile pour résoudre sur  $\mathbb{R}$  certaines équations de degré 3.

- 1) Comment peut-on résoudre directement (5) sur  $\mathbb{R}$  ?
- 2) On applique maintenant la méthode de Cardan : on note  $U$  et  $V$  les racines de (4), en prenant  $U$  la racine de partie imaginaire positive. Calculer  $U$  et  $V$ .
- 3) On cherche maintenant à exprimer une racine cubique de  $U$  sous forme algébrique. Pour cela, on va chercher  $x$  et  $y$  entiers vérifiant

$$(x + iy)^3 = U \quad (6)$$

Soit donc  $x$  et  $y$  deux entiers relatifs vérifiant cette équation. Montrer qu'alors  $x$  vérifie une équation de degré 3 à coefficients entiers qu'on précisera. En déduire que  $x$  est pair. On posera alors  $k = x/2$ .

- 4) Donner une équation de degré 3 vérifiée par  $k$ . Remarquer que cette équation a une solution évidente, solution de l'équation de degré 3 sur  $x$  trouvée précédemment.
- 5) Montrer qu'on peut en tirer une solution de (6) et exprimer sous forme algébrique une racine cubique  $u$  de  $U$ .
- 6) Montrer qu'on retrouve ainsi les solutions de (5).

## G). Un exemple

On s'intéresse à l'équation  $x^3 - 7x + 6 = 0$ .

- 1) Montrer comment la résoudre directement.
- 2) Appliquer la méthode de Cardan et vérifier qu'on retrouve les mêmes racines.

— FIN —