

Feuille d'exercice n° 08 : **Relations d'ordre et d'équivalence, et ensembles de nombres usuels**

**Exercice 1** Soit  $E$  un ensemble et  $A$  une partie de  $E$ . On définit la relation  $\mathcal{R}$  sur  $\mathcal{P}(E)$  par :  $X\mathcal{R}Y$  si  $X \cup A = Y \cup A$ .

- 1) Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.
- 2) Décrire la classe d'équivalence de  $X \in \mathcal{P}(E)$

**Exercice 2** (📖) Soit  $\mathcal{R}$  une relation binaire réflexive et transitive sur un ensemble  $E$ . On définit la relation  $\mathcal{S}$  sur  $E$  par :  $x\mathcal{S}y$  si  $(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x)$ .

Montrer que  $\mathcal{S}$  est une relation d'équivalence et que  $\mathcal{R}$  permet de définir une relation d'ordre sur les classes d'équivalences de  $\mathcal{S}$ .

**Exercice 3** (🔗) Soit  $(E, \leq)$  un ensemble ordonné. On définit sur  $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$  la relation  $\mathcal{R}$  par :  $X\mathcal{R}Y$  si  $(X = Y \text{ ou } \forall x \in X \forall y \in Y \ x \leq y)$ . Vérifier que c'est une relation d'ordre.

**Exercice 4** Un ensemble  $E$  muni d'une relation d'ordre  $\preceq$  est dit *bien ordonné* pour  $\preceq$  si toute partie non vide admet un plus petit élément pour  $\preceq$ .

- 1) Donner un exemple d'ensemble bien ordonné et un exemple d'ensemble qui ne l'est pas.
- 2) Montrer que bien ordonné implique totalement ordonné.
- 3) La réciproque est-elle vraie ?

**Exercice 5**

- 1) On définit une relation  $\leq^0$  sur  $\mathbb{R}^2$  en posant, pour tout  $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$  :

$$(x, y) \leq^0 (x', y') \quad \text{si} \quad x \leq x' \text{ et } y \leq y'.$$

- a) Montrer que  $\leq^0$  est une relation d'ordre sur  $\mathbb{R}^2$ .
  - b) Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Représenter graphiquement l'ensemble des majorants et l'ensemble des minorants de  $(x, y)$  pour  $\leq^0$ .
  - c) Montrer que cet ordre n'est pas total.
- 2) On définit une relation  $\leq^*$  sur  $\mathbb{R}^2$  en posant, pour tout  $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$  :

$$(x, y) \leq^* (x', y') \quad \text{si} \quad x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y').$$

- a) Montrer que  $\leq^*$  est une relation d'ordre sur  $\mathbb{R}^2$ . Cet ordre s'appelle l'ordre *lexicographique*.
- b) Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Représenter graphiquement l'ensemble des majorants et l'ensemble des minorants de  $(x, y)$  pour  $\leq^*$ .
- c) Montrer que cet ordre est total.
- d) L'ordre lexicographique (sur  $\mathbb{R}^2$ ) possède-t-il la propriété de la borne supérieure ?

*Indication* : on pourra considérer  $\mathcal{A} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ .

**Exercice 6** Déterminer les bornes supérieures et inférieures des parties suivantes de  $\mathbb{R}$ .

$$A = \left\{ \sqrt{\frac{n}{n+1}} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad B = \left\{ x^2 + 2x + 3 \mid x \in [-3; 2] \right\} \quad C = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

**Exercice 7** (🚲) Soit  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante d'entiers naturels. Montrer que  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est *stationnaire*, i.e. que  $k_n$  prend toujours la même valeur à partir d'un certain rang.

**Exercice 8** (🚲) Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides et majorées de  $\mathbb{R}$ , soit  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ . On définit

$$A + B = \{ x \in \mathbb{R} \mid \exists (a, b) \in A \times B, x = a + b \} = \{ a + b \mid (a, b) \in A \times B \}$$

$$\text{et} \quad \lambda A = \{ x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A, x = \lambda a \} = \{ \lambda a \mid a \in A \}.$$

- 1) Si  $A \subset B$ , montrer que  $\sup A \leq \sup B$ .
- 2) Montrer que  $A \cup B$  possède une borne supérieure. Que vaut  $\sup(A \cup B)$  ?
- 3) Montrer que  $A + B$  possède une borne supérieure. Que vaut  $\sup(A + B)$  ?
- 4) Montrer que  $\lambda A$  possède une borne supérieure. Que vaut  $\sup(\lambda A)$  ? Et si  $\lambda < 0$  ?

**Exercice 9** (🚲🏔️) Soit  $X$  et  $Y$  deux ensembles non vides et  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  majorée. Montrer

$$\sup_{(x,y) \in X \times Y} f(x, y) = \sup_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y).$$

**Exercice 10** (🚲) Soient  $a$  et  $b$  deux réels. Montrer que :

- 1)  $a \leq b \Rightarrow \lfloor a \rfloor \leq \lfloor b \rfloor$  ;
- 2)  $\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leq \lfloor a + b \rfloor \leq \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 1$ .

**Exercice 11** On veut calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la somme  $S_n = \sum_{k=1}^{n^2} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$ .

- 1) Montrer que  $S_n = \sum_{i=1}^{n-1} \left( \sum_{k=i^2}^{(i+1)^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor \right) + n$ .
- 2) Conclure.

**Exercice 12**

- 1) Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$ .
- 2) En déduire que, si  $p, q \in \mathbb{N}^*$  sont premiers entre eux, on a  $\sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor k \times \frac{p}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$ .

