Devoir à la maison n° 11

À rendre le 14 janvier

1) Une première équation fonctionnelle :
Dans cette question on considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue et telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y). \qquad (L)$$

- **a)** Déterminer $f(0)$.
- **b)** Déterminer la parité de f.
- **c)** Soit x_0 un réel quelconque, mais fixé.
  Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(nx_0) = nf(x_0)$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{Z},\ f(nx_0) = nf(x_0)$.
- **d)** En déduire que $\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = rf(1)$.
- **e)** Montrer que f est linéaire, *i.e.* qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.

2) Une seconde équation fonctionnelle :
Dans cette question, on considère une fonction g définie sur $]0,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue et telle que :

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ g(xy) = g(x) + g(y). \qquad (K)$$

- **a)** On définit alors $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(e^x)$. Montrer que f vérifie la relation (L).
- **b)** En déduire g.

3) Étude de deux suites :
Soient $0 < a < b$ deux réels strictement positifs, on définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = a, \quad v_0 = b \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}.$$

- **a)** Établir l'inégalité suivante : $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2$, $\dfrac{2xy}{x+y} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$.
- **b)** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant v_n$.
  En déduire les monotonies des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- **c)** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{v_n - u_n}{2}$.
- **d)** Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, vers la même limite ℓ.
- **e)** On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_nv_n$.
  Justifier que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et en déduire que $\ell = \sqrt{ab}$.

4) Et encore une équation fonctionnelle :
Dans cette question on considère une fonction f définie sur $]0,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue et telle que :

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) = f(x) + f(y). \qquad (E)$$

a) Montrer que si f est solution de (E) alors la fonction $h = f - f(1)$ est solution de (E).
On suppose donc désormais que $f(1) = 0$.

b) Soient $0 < a < b$ deux réels strictement positifs, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies dans la question **3)** ; on définit la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le terme général $z_n = f(u_n) + f(v_n)$.
Montrer que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

c) En déduire que pour tous les réels strictement positifs $a < b$, $2f(\sqrt{ab}) = f(a) + f(b)$, puis que $\forall a \in]0, +\infty[$, $2f(\sqrt{a}) = f(a)$.

d) Montrer alors que les solutions continues de (E) sont les fonctions f telles que :

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x > 0, \quad f(x) = \alpha \ln x + \beta.$$

— **FIN** —