DS n° 05 : Fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom : Note :

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

Limites de fonctions.

Calculer les limites de fonctions suivantes (écrire Pas de limite le cas échéant) :

$$\tan\left(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{} \quad (1)$$

$$\mathbf{1}_{\mathbb{R}^*}\left(x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{} \quad (2)$$

$$(1+x)^{1/x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} \boxed{} \quad (3)$$

Continuité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$. Donner la définition quantifiée de « f est continue à gauche en tout point de I ».

$$\boxed{} \quad (4)$$

Soit $\psi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{ccc} x+1 & \text{si} & x>0 \\ 0 & \text{si} & x=0 \\ x-1 & \text{si} & x<0 \end{array}\right. \end{array}\right.$ et $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}\right.$.

On peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = \boxed{}$. (5)

Si f est ainsi prolongée, $\psi \circ f$ est continue sur

$$\boxed{} \ . \quad (6)$$

Donner un exemple d'application $f : [0,1] \to [0,1]$ bijective, discontinue en tout point de $[0,1]$.

(7)

Algèbre

Soit $G = (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \star)$ le groupe défini par $(x,y) \star (x',y') = (xx', x'y + y')$, noté multiplicativement.

$1_G = \boxed{}$. (8) $(x,y)^{-1} = \boxed{}$. (9)

G est-il commutatif (répondre Oui ou Non) ? $\boxed{}$. (10)

Suites récurrentes.

Pour chacune de ces suites définies par récurrence, donner l'ensemble maximal auquel appartient le premier terme pour que la suite soit définie, puis discuter la convergence de la suite en fonction du premier terme (donner la limite si elle existe, et écrire Div en cas de divergence sans limite).

$u \;:\; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n),\;\; u_0 \in \boxed{}$; (11)

et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{}$. (12)

$v \;:\; \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n^4,\;\; v_0 \in \boxed{}$; (13)

et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{}$. (14)

$w \;:\; \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \sin(w_n),\;\; w_0 \in \boxed{}$; (15)

et $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{}$. (16)

— **FIN** —