Feuille d'exercice n° 16 : **Fractions rationnelles**

Exercice 1 Donner une CNS sur $f \in \mathbb{C}(X)$ pour qu'il existe $g \in \mathbb{C}(X)$ tel que

$$f = g'.$$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{X^n - 1}$ est :

$$\frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega}{X - \omega}$$

Exercice 3 (✍) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et $p \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. On pose pour $k \in \{0, 1, \dots n-1\}$, $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Mettre sous forme irréductible $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k^p}{X - \omega_k}$.

Exercice 4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme scindé à racines simples notées $x_1, \dots, x_n$.

1. Former la décomposition en éléments simples de P''/P.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0$.

Exercice 5 (✎) Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

1. $\dfrac{X^3 - 3X^2 + X - 4}{X - 1}$
2. $\dfrac{X}{X^2 - 4}$
3. $\dfrac{(3 - 2i)X - 5 + 3i}{X^2 + iX + 2}$
4. $\dfrac{X}{(X + i)^2}$
5. $\dfrac{X^5 + X + 1}{X^4 - 1}$
6. $\dfrac{X^5 + X^4 + 1}{(X - 1)^3 (X + 1)^2}$
7. $\dfrac{X^5 + X + 1}{X^6 - 1}$
8. $\dfrac{X}{(X^2 + 1)(X^2 + 4)}$
9. $\dfrac{X^7 + 3}{(X^2 + X + 2)^3}$

Exercice 6 (✎) Calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes :

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2}$
2. $\displaystyle\int \frac{x}{x^4 + 16}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3 - 7x + 6}$
4. $\displaystyle\int \frac{4x^2}{x^4 - 1}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{x^3 + 2x + 1}{x^3 - 3x + 2}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \frac{-2x^2 + 6x + 7}{x^4 + 5x^2 + 4}\,\mathrm{d}x$

Exercice 7 (✍)

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que :

$$X^n + \frac{1}{X^n} = P_n\left(X + \frac{1}{X}\right)$$

   que l'on factorisera dans $\mathbb{C}[X]$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Décomposer $1/P_n$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

Exercice 8 (🚲) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n.

1. Décomposer P'/P en éléments simples.
2. En déduire que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P c'est-à-dire que toute racine de P' s'écrit comme barycentre à poids positifs des racines de P.

   Rappel : le barycentre des points $z_1, \ldots, z_m$ *affectés des poids* $p_1, \ldots, p_m$, *si* $\sum_{i=1}^{m} p_i \neq 0$, *est le point*

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{m} p_i} \sum_{i=1}^{m} p_i z_i.$$