DS n° 10 : Fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom : Note :

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

I. Algèbre linéaire.

Calculer les rangs des matrices suivantes.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{} \quad (1) \qquad \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 7 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{} \quad (2)$$

Déterminer l'ensemble des paramètres $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 1 & \lambda & -2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

$$\boxed{} \quad (3)$$

II. Permutations

Soit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 9 & 2 & 1 & 11 & 4 & 12 & 10 & 6 & 3 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Écrire σ comme produit de cycles à supports disjoints et déterminer sa signature.

$$\sigma = \boxed{} \quad (4) \qquad \varepsilon(\sigma) = \boxed{} \quad (5)$$

III. Déterminants

Calculer les déterminants suivants.

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -5 \\ 2 & -7 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{} \quad (6) \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{} \quad (7)$$

Exprimer en fonction de n le déterminant suivant, d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{} \tag{8}$$

IV. Espaces euclidiens

On considère sur $\mathbb{R}_1[X]$ le produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_2^3 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t + P(1)Q(1) + P(1)Q(-1) + P(-1)Q(1) + P(-1)Q(-1).$$

Donner une base obtenue à partir de $(1, X)$ par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

$$\boxed{} \tag{9}$$

Dans $\mathbb{R}^3$, muni de sa structure euclidienne usuelle, donner un vecteur normal (non nul) au plan d'équation cartésienne $x + 5y + z = 1$.

$$\boxed{} \tag{10}$$

Donner une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par $A(1; -3; 0)$ et orthogonal à la droite d'équation cartésienne

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ -x & + & y & - & z & = & 7 \end{array}\right.$$

$$\mathscr{P} : \boxed{} \tag{11}$$

V. Divers

Donner l'ensemble des racines septièmes de $-1 + i$.

$$\boxed{} \tag{12}$$

Donner l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle $y' + 2ty = \sin(t)\mathrm{e}^{-t^2+t}$.

$$\boxed{} \tag{13}$$

Calculer l'intégrale suivante.

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t} + \sqrt[3]{t}} = \boxed{} \tag{14}$$

— FIN —