DS n° 09 : Fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom : Note :

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

I. Divers

À l'ordre 3 et en 0, $\dfrac{x-\sin x}{1-\cos x} =$ (1)

Soit $P = x^{12} + x^{11} - 30\,x^{10} + 70\,x^9 - 19\,x^8 - 77\,x^7 + 52\,x^6 + 20\,x^5 - 55\,x^4 + 56\,x^3 - 8\,x^2 - 32\,x + 16$. Alors la multiplicité de 2 en tant que racine de P vaut

(2)

II. Dénombrement et probabilités

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors :

$\operatorname{Card}\{(X,Y) \in \mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(E), X \cup Y = E\} =$ (3)

Une urne contient des boules blanches et noires en proportion p et q (avec $p+q=1$). On opère à des tirages successifs avec remise. La probabilité que la première boule blanche tirée apparaisse lors du n-ième tirage vaut :

(4)

La probabilité que la k-ième boule blanche tirée apparaisse lors du n-ième tirage vaut :

(5)

Une urne contient n boules noires et b blanches. Un joueur tire k boules dans cette urne successivement avec remise. S'il tire une boule blanche, il gagne g points, et sinon il en perd 1. Pour que le jeu soit d'espérance nulle, il faut poser

$$g = \boxed{} \tag{6}$$

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(X = k) = a \binom{n}{k}$. Alors :

$$a = \boxed{} \tag{7}$$

$$E(X) = \boxed{} \tag{8}$$

$$V(X) = \boxed{} \tag{9}$$

III. Algèbre linéaire

On considère l'application linéaire $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x + y - z \\ 3y - 2z \\ -x + 3y + z \end{pmatrix} \end{array} \right.$. On note $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\mathscr{B}_1$ la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ et $\mathscr{B}_2$ la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. On note $P_{\mathscr{B}_2}^{\mathscr{C}}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}_2$ dans $\mathscr{C}$ et $P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}_1}$ la matrice de passage de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{B}_1$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \boxed{} \tag{10}$$

$$P_{\mathscr{B}_2}^{\mathscr{C}} = \boxed{} \tag{11}$$

$$P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}_1} = \boxed{} \tag{12}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2}(u) = \boxed{} \tag{13}$$

— FIN —