

Feuille d'exercice n° 07 : **Théorie des ensembles**

**Exercice 1** (✎) Donner la liste des éléments de  $\mathcal{P}[\mathcal{P}(\{1, 2\})]$ .

**Exercice 2** (✎) Soit  $E = \{x, y, z\}$  un ensemble. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier les réponses.

- |                  |                      |                              |   |
|------------------|----------------------|------------------------------|---|
| 1) $x \in E$     | 3) $\{x\} \subset E$ | 5) $\emptyset \subset E$     | 7) $\{x, y\} \subset E$                 |
| 2) $\{x\} \in E$ | 4) $\emptyset \in E$ | 6) $\{\emptyset\} \subset E$ | 8) $\{y, z\} \subset E \setminus \{x\}$ |

**Exercice 3** Un ensemble est dit « décrit en compréhension » lorsqu'il réunit les éléments d'un ensemble vérifiant une propriété. Un ensemble est dit « décrit en extension » lorsqu'on cite ses éléments.

Par exemple,  $\{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k\}$  et  $\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$  sont des descriptions respectivement en compréhension et en extension de l'ensemble des entiers pairs.

- 1) Décrire en compréhension et en extension l'ensemble  $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$ .
- 2) Décrire en compréhension et en extension l'ensemble  $\{1, 10, 100, 1000, \dots\}$ .
- 3) Décrire en extension l'ensemble des nombres rationnels.
- 4) Décrire en compréhension l'ensemble  $]0, 1]$ . Pensez-vous qu'il soit possible de décrire cet ensemble en extension ?
- 5) Décrire en compréhension et en extension l'ensemble des valeurs prises par une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ .
- 6) Décrire en compréhension l'ensemble des antécédents d'un complexe  $y$  par une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ .

**Exercice 4** (✎🚲) Montrer que si  $F$  et  $G$  sont des sous-ensembles de  $E$  :

$$(F \subset G \iff F \cup G = G), \quad (F \subset G \iff F \cap G = F) \quad \text{et} \quad (F \subset G \iff F^C \cup G = E).$$

En déduire que :

$$(F \subset G \iff F \cap G^C = \emptyset).$$

**Exercice 5** (✎) Soit  $E$  un ensemble,  $A, B, C$  trois parties de  $E$ . Montrer les propriétés suivantes.

- 1)  $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$
- 2)  $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$
- 3)  $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

**Exercice 6** Soient  $E$  un ensemble et  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ . Résoudre dans  $\mathcal{P}(E)$  les équations suivantes.

- |                   |                   |                        |
|-------------------|-------------------|------------------------|
| 1) $X \cup A = B$ | 2) $X \cap A = B$ | 3) $X \setminus A = B$ |
|-------------------|-------------------|------------------------|

**Exercice 7** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. Quelle relation y a-t'il

- 1) entre les ensembles  $\mathcal{P}(E \cup F)$  et  $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$  ?
- 2) entre les ensembles  $\mathcal{P}(E \cap F)$  et  $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$  ?
- 3) entre les ensembles  $\mathcal{P}(E \times F)$  et  $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$  ?

**Exercice 8** (✎) Soient  $E, F, G$  trois ensembles. Montrer que  $(E \times G) \cup (F \times G) = (E \cup F) \times G$ .

