Devoir surveillé n° 03

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Soit E un ensemble et A, B deux parties fixées de E. Soit $\varphi : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B). \end{cases}$

1) Qu'est-ce que $\varphi(\varnothing)$? $\varphi(E \setminus (A \cup B))$?

2) À quelle condition sur A et B, φ est-elle injective ?

3) Est-ce que le couple $(\varnothing, B)$ possède un antécédent par φ ?

4) À quelle condition sur A et B, φ est-elle surjective ?

II. Étude de deux fonctions.

1) Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par

$$\forall x \in [0, \pi] \qquad f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{5 - 4\cos x}} .$$

a) Calculer la dérivée de f. Vérifier que $f'(x)$ est du signe de $\cos(x) - \frac{1}{2}$.

b) En déduire les variations de f sur $[0, \pi]$ et tracer sa courbe représentative.

2) Soit g la fonction définie sur $[0, \pi]$ par

$$\forall x \in [0, \pi] \qquad g(x) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{4 - 5\cos x}{5 - 4\cos x}\right) .$$

a) Vérifier que g est bien définie en tout point de $[0, \pi]$.

b) Pour $x \in [0, \pi]$, simplifier les expressions $\cos\Big(g(x)\Big)$ et $\sin\Big(g(x)\Big)$.

c) Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0, \pi[$ (*pour cela, on pourra dériver la relation donnant* $\cos\Big(g(x)\Big)$ *obtenue à la question précédente*).

d) Vérifier que $\forall x \in [0, \pi] \quad g\Big(g(x)\Big) = x$.
Qu'en déduit-on concernant la courbe (Γ) représentant g ?

e) Construire la courbe (Γ).

3) Soit x un réel appartenant à l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right[$.

a) Montrer qu'il existe un unique $z \in \left]\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]$ tel que $f(z) = f(x)$.

b) Montrer que $z = g(x)$.

III. Résolution d'une équation différentielle.

Dans ce problème, on s'intéresse à l'équation différentielle $(\mathscr{E})$:

$$x(x-4)y' + (x-2)y = -2. \qquad (\mathscr{E})$$

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On appelle *solution de* $(\mathscr{E})$ *sur l'intervalle* I toute fonction $y : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I telle que

$$\forall x \in I,\ x(x-4)y'(x) + (x-2)y(x) = -2.$$

On pourra utiliser librement les limites suivantes :

$$\frac{\operatorname{Arcsin} x - x\sqrt{1-x^2}}{x^3} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad \frac{\ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x})}{\sqrt{x}} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1\ .$$

De plus, on rappelle que si f est une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant un point $a \in \mathbb{R}$, elle est *continue* en a si elle admet une limite en a, auquel cas $\lim\limits_{a} f = f(a)$, et que la *dérivée* de f en a est définie par $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, si cette limite existe et est finie.

Partie A – Étude de deux primitives

1) Pour tout $x \in]0, 4[$, on pose $A(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(4-t)}}$. À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t}$, calculer $A(x)$ pour tout $x \in]0, 4[$.

2) Pour tout $x \in]-\infty, 0[$, on pose $B(x) = \displaystyle\int_{-2}^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t-4)}}$. À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{-t} + \sqrt{4-t}$, calculer $B(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0[$.

Partie B – Résolution de $(\mathscr{E})$

3) On note $(\mathscr{H})$ l'équation homogène associée à $(\mathscr{E})$.

a) Résoudre $(\mathscr{H})$ sur l'intervalle $]-\infty, 0[$.

b) Résoudre $(\mathscr{H})$ sur l'intervalle $]0, 4[$.

c) Résoudre $(\mathscr{H})$ sur l'intervalle $]4, +\infty[$.

d) Montrer que la fonction constante, égale à 0, est la seule solution de $(\mathscr{H})$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

4) On étudie ici $(\mathscr{E})$ sur $]0, 4[$.

a) Résoudre $(\mathscr{E})$ sur l'intervalle $]0, 4[$.

b) Montrer que $(\mathscr{E})$ possède une unique solution sur l'intervalle $]0, 4[$ possédant une limite finie à droite en 0.
On note f cette solution. Donner l'expression de $f(x)$ ainsi que $\lim\limits_{0^+} f$ (on pourra commencer par montrer que $\dfrac{\operatorname{Arcsin} t}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} 1$).

5) On étudie ici $(\mathscr{E})$ sur $]-\infty, 0[$.

a) Résoudre $(\mathscr{E})$ sur l'intervalle $]-\infty, 0[$.

b) Montrer que $(\mathscr{E})$ possède une unique solution sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ possédant une limite finie à gauche en 0.
On note g cette solution. Donner l'expression de $g(x)$ ainsi que $\lim\limits_{0^-} g$.

6) On étudie ici $(\mathscr{E})$ sur $]-\infty, 4[$.

a) Montrer qu'il existe une unique fonction h définie sur $]-\infty, 4[$ qui vérifie les trois points suivants :
(1) la restriction de h à $]0, 4[$ est solution de $(\mathscr{E})$ sur $]0, 4[$,
(2) la restriction de h à $]-\infty, 0[$ est solution de $(\mathscr{E})$ sur $]-\infty, 0[$,
(3) h est continue en 0.

b) Pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]0, 4[$, on pose $T(x) = \dfrac{h(x) - h(0)}{x - 0}$. Montrer l'existence et donner la valeur de la limite ℓ de T en 0^+.
On admettra que T tend aussi vers ℓ en 0^-.

c) En déduire que $(\mathscr{E})$ possède une unique solution sur l'intervalle $]-\infty, 4[$. Préciser la valeur de cette fonction en 0, ainsi que la valeur de sa dérivée en 0.

7) L'équation $(\mathscr{E})$ possède-t-elle une solution définie sur $\mathbb{R}$?

— **FIN** —