Feuille d'exercice n° 17 : **Analyse asymptotique**

Exercice 1 ( ) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Parmi les affirmations suivantes, dites lesquelles sont vraies (on les démontrera alors) et lesquelles sont fausses (on donnera un contre-exemple) :

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $v_n = O(u_n)$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $v_n = O(u_n)$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et $v_n = O(u_n)$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $v_n = o(u_n)$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
5. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $v_n \sim u_n$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
6. Si $v_n \sim u_n$, alors $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
7. Si $v_n \sim u_n$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
8. Si $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $v_n \sim u_n$.

Exercice 2 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles de limite $+\infty$ telles que $u_n = o(v_n)$. Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $+\infty$ telle que $u_n = o(w_n)$ et $w_n = o(v_n)$.

Exercice 3 Donner un exemple de suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n = O(v_n)$ mais qu'on n'ait ni $u_n = o(v_n)$, ni $v_n = O(u_n)$.

Exercice 4 ( ) — Encadrement et équivalents —
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites ne s'annulant pas. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et que $u_n \sim w_n$. Que peut-on dire de (v_n) ?

Exercice 5 ( ) Trouver un équivalent simple des suites suivantes :

1. $\ln\cos\dfrac{\pi}{n} + \tan\operatorname{sh}\dfrac{1}{n}$
2. $\ln\cos\dfrac{\pi}{n} + \mathrm{e}^{\tan(\pi/n^2)} - 1$
3. $3 + \mathrm{e}^{1/n} - \dfrac{6}{n}$
4. $\sqrt{1+\mathrm{e}^{-n}} - \cos\mathrm{e}^{-n}$
5. $\sqrt{n}\sin\dfrac{\pi}{n}$
6. $\ln(n+1) - \ln(n+2)$
7. $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+5} + \dfrac{4}{n^2}$
8. $(n+\ln n)\mathrm{e}^{-n+1}$
9. $\mathrm{e}^{\sin\frac{\pi}{n}} - \sin\left(\sin\dfrac{\pi}{2n}\right)$
10. $\ln\dfrac{1+\operatorname{ch}\frac{1}{n}}{2}$
11. $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-n}}} - \mathrm{e}$

Exercice 6 Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$

Exercice 7 ( ) Déterminer un équivalent de la suite définie par $u_n = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 8 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_{n+1} = \ln(n+u_n)$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ possède une limite et la déterminer.
2. a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\ln x \leqslant x$.
   b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $u_n \leqslant \ln(2n)$.
   c) Montrer que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.
   d) Montrer que : $u_n - \ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.

Exercice 9 (🚲)

1. Montrer que l'équation $\ln x + x = k$ admet une unique solution x_k, quel que soit $k \in \mathbb{N}$. On définit ainsi une suite réelle $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que l'on peut écrire : $x_k = ak + b\ln k + c\dfrac{\ln k}{k} + o\left(\dfrac{\ln k}{k}\right)$, où a, b et c sont des constantes que l'on déterminera.

Exercice 10 (✎) À quelle condition sur f et g a-t-on $\mathrm{e}^{\,f} \underset{a}{\sim} \mathrm{e}^{\,g}$?

Exercice 11 (✎🚲) Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On suppose que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$. et que ces fonctions admettent une limite commune notée $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

1. On suppose dans cette question que f et g sont à valeurs strictement positives.
   (a) Montrer que si $\ell \neq 1$, alors :
   $$\ln\left(f(x)\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln\left(g(x)\right)$$
   (b) Que pouvez-vous dire lorsque $\ell = 1$?
2. Parmi les équivalents suivants, lesquels sont systématiquement vrais ? (on pourra discuter selon les valeurs de ℓ).
   (a) $\arctan\left(f(x)\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \arctan\left(g(x)\right)$
   (b) $\sin\left(f(x)\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sin\left(g(x)\right)$

Exercice 12 (✎) Montrer que si $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$ avec $f_1 = o(g_1)$ alors $f + g \sim g_1$

Exercice 13 Étudier en $+\infty$ et $-\infty$ la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt{x^2+x+1}$.

Exercice 14 (✎)

1. Limite en 0 de $\dfrac{\sin\left(x\ln(1+x^2)\right)}{x\tan x}$
2. Limite en 0 de $\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\tan(6x)}$
3. Limite en 0 de $(\ln(\mathrm{e}+x))^{\frac{1}{x}}$
4. Limite en $+\infty$ de $(\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}}$
5. Limite en $+\infty$ de $\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}$
6. Équivalent en $+\infty$ de $\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}$
7. Limite en 0 de $\dfrac{\tan(ax)-\sin(ax)}{\tan(bx)-\sin(bx)}$
8. Limite en $\dfrac{\pi}{4}$ de $\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\tan(x+\frac{\pi}{4})$
9. Limite en $\dfrac{\pi}{4}$ de $\dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{(4\,x-\pi)\tan(x)}$

10. Équivalent en 0 de $\dfrac{\tan(x - x\cos(x))}{\sin(x)+\cos(x)-1}$

11. Équivalent en $\dfrac{\pi}{4}$ de
$\left(\tan(2\,x) + \tan(x+\frac{\pi}{4})\right)\left(\cos(x+\frac{\pi}{4})\right)^2$

12. Limite en 0 de $x^{\frac{1}{1+2\,\ln(x)}}$

13. Limite en $\dfrac{1}{2}$ de $(2\,x^2 - 3\,x + 1)\tan(\pi\,x)$

14. Limite en 0 de $\dfrac{(\sin(x))^{\sin(x)}-1}{(\tan(x))^{\tan(x)}-1}$

15. Équivalent en $+\infty$ de $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sin(\frac{1}{x})}\ln(\frac{x}{x+1})$

Exercice 15 (✎) Déterminer l'existence et la valeur des limites suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{\ln x}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\ln(\cos x)}+\frac{2}{x^2}\sin^2 x\right)$

3. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\sin^2 x)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$

4. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin^2 x)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$

5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x}\tan\left(\frac{2\pi x}{4x+3}\right)$

6. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\ln x\tan(\ln(1+x))$

7. $\displaystyle\lim_{x\to \mathrm{e}}(\ln x)^{\tan\frac{\pi x}{2\mathrm{e}}}$

Exercice 16

1. $\sqrt{x}$ admet-elle un développement limité d'ordre $n \geqslant 1$ en 0 ?
2. À quels ordres $x^{\frac{13}{3}}$ admet-elle un développement limité en 0 ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. $|x|^n$ admet-elle un développement limité d'ordre n en 0 ?

Exercice 17 (✎) Donner le développement limité en 0 des fonctions :

1. $x \mapsto \ln(\cos(x))$ (à l'ordre 6).
2. $x \mapsto \tan(x)$ (à l'ordre 5).
3. $x \mapsto \sin(\tan(x))$ (à l'ordre 5).
4. $x \mapsto (\ln(1+x))^2$ (à l'ordre 4).
5. $x \mapsto \exp(\sin(x))$ (à l'ordre 3).
6. $x \mapsto \sin^6(x)$ (à l'ordre 9.)

Exercice 18 (✎)

Former le développement asymptotique en $+\infty$ de l'expression considérée à la précision demandée :

1. $\sqrt{x+1}$ à la précision $\dfrac{1}{x^{3/2}}$;
2. $x\ln(x+1)-(x+1)\ln x$ à la précision $\dfrac{1}{x^2}$;
3. $\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x$ à la précision $\dfrac{1}{x^2}$;
4. $\operatorname{Arctan} x$ à la précision $\dfrac{1}{x^3}$.

Exercice 19 (✎)

Faire un développement limité ou asymptotique en a à l'ordre n de :

1. $\dfrac{\arctan x - x}{\sin x - x}$ $\quad n=2 \quad a=0.$
2. $\ln\sin x$ $\quad n=3 \quad a=\frac{\pi}{4}.$
3. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ $\quad n=3 \quad a=0.$
4. $x(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2})$ $\quad n=2 \quad a=+\infty.$

Exercice 20

1. Démontrer que $\tan x$ et $\tan' x$ admettent un développement limité en 0 à tout ordre. Expliquer comment obtenir le développement limité de $\tan' x$ à partir de celui de $\tan x$.
2. En exploitant la relation $\tan' x = 1 + \tan^2 x$, donner le développement limité de $\tan x$ en 0 à l'ordre 7.

Exercice 21

1. Donner le développement limité de $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ en 0 à l'ordre 4.
2. Sur le même modèle, donner un développement limité de $x \mapsto \displaystyle\int_x^{\frac{1}{x}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ en 1 à l'ordre 3.

Exercice 22 (✎) Calculer les développements asymptotiques suivants :

$$\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2} \quad \text{en } +\infty \text{ à 2 termes} \qquad \ln\left(\sqrt{1+x}\right) \quad \text{en } +\infty \text{ à 2 termes}$$

Exercice 23 (✎) Déterminer les DL suivants à l'ordre 4 :

1. en 0 : a) $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+x}}$ b) $\dfrac{\sqrt{1+x}}{\cos x}$ c) $\dfrac{\ln(1+x)}{\cos x}$ d) $\dfrac{1+\cos x}{2+\sin x}$ e) $\dfrac{\sin(x/2)}{\mathrm{e}^{2x}}$ f) $\dfrac{\ln(1+x)}{2-\cos x}$
2. en a : a) $\dfrac{\sin(2x-\pi/4)}{\cos x}$ et $a = \pi/4$ b) $\dfrac{\cos(x-1)}{\ln(1+x)}$ et $a = 1$ (ordre 2) c) $\dfrac{\mathrm{e}^{x-1}}{\ln x}$ et $a = 1$.

Exercice 24 Calculer les limites des expressions suivantes lorsqu'elles existent :

1. $(\tan x)^{\tan 2x}$ en $\dfrac{\pi}{4}$
2. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}$ en 0
3. $\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$ en 0
4. $\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}$ en 1
5. $\dfrac{1}{\sin^4 x}\left(\sin\dfrac{x}{1-x} - \dfrac{\sin x}{1-\sin x}\right)$ en 0
6. $\dfrac{(1+x)^{\frac{\ln x}{x}} - x}{x(x^x-1)}$ en 0

Exercice 25 (✎) Soit $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[- \{0\}$.
Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et étudier la dérivabilité du prolongement de f.

Exercice 26 (✎) Soient u, v, f définies par :

$$u(x) = (x^3 - 2x^2 + 1)^{\frac{1}{3}},\ v(x) = \sqrt{x^2+x+1},\ f(x) = u(x) - v(x).$$

1. Donner l'équation d'une droite asymptote au graphe de f en $-\infty$ et positionner f par rapport à cette asymptote.
2. Même étude en $+\infty$.

Exercice 27 (✎) Soit g la fonction $x \mapsto \dfrac{\arctan x}{(\sin x)^3} - \dfrac{1}{x^2}$.

1. Donner le domaine de définition de g.
2. Montrer qu'elle se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable.
3. Déterminer la tangente en 0 au graphe de cette fonction et la position de ce graphe par rapport à celle-ci.

Exercice 28 (✎) Étudier la position du graphe de l'application $x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$ par rapport à sa tangente en 0 et 1.

Exercice 29 Étudier les branches infinies des fonctions :

1. $f(x) = x^2 \arctan(\frac{1}{1+x^2})$.
2. $g(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{3x+1}}$.

Exercice 30 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $a \in \mathbb{R}$.
Déterminer $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$.

Exercice 31 Soient a et b deux réels distincts et $F(X) = \dfrac{1}{(X-a)^n(X-b)^n}$. En utilisant la formule de Taylor en a pour $f(X) = (X-a)^n F(X)$, décomposer F sur $\mathbb{R}$.

Exercice 32 Donner les natures des séries de terme général (u_n) (*i.e.*, la suite $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n\right)_{N \in \mathbb{N}}$), avec :

1. $u_n = \operatorname{th} \dfrac{1}{n} + \ln \dfrac{n^2 - n}{n^2 + 1}$
2. $u_n = \dfrac{n^n}{n!\mathrm{e}^n}$
3. $u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$