Devoir surveillé n° 08
Version 1
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $a \in]0,1[$ telle que $f(a) = a$.

II. Étude d'un endomorphisme.

On note $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x & + & y & - & z \\ x & + & 2y & + & z \\ -x & + & y & + & 2z \end{pmatrix} \end{array}.$$

1) Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ et déterminer les vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$.

2) Déterminer une base et la dimension du noyau de f. L'application f est-elle injective ?

3) a) Résoudre l'équation $f(x,y,z) = (1,-1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

b) En déduire que $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}^3$.

c) Soit $v_1 = f(e_1)$ et $v_2 = f(e_2)$. Montrer que (v_1, v_2) est une base de $\operatorname{Im} f$.

d) Vérifier que $\operatorname{Im} f$ est stable par f.

4) Montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

5) Soit v_3 un vecteur non nul de $\operatorname{Ker} f$. Montrer que (v_3) est une base de $\operatorname{Ker} f$ et que $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

6) Écrire $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$ en fonction de v_1, v_2 et v_3.

On appelle p la projection sur $F = \operatorname{Im} f$ parallèlement à $G = \operatorname{Ker} f$.

7) Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (a,b,c) dans la base $\mathscr{B}$.

a) Écrire les coordonnées de $p(u)$ dans la base $\mathscr{B}$.

b) Écrire les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathscr{B}$.

8) En déduire que f est la composée de p et d'une homothétie h dont on déterminera le rapport. Montrer que $f = p \circ h = h \circ p$.

9) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = h^n \circ p = p \circ h^n$.

III. Étude d'une fonction définie par une intégrale.

— **Première partie** —
Soit la fonction φ définie par : $\varphi(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de φ.

2) Montrer que φ est dérivable sur son ensemble de définition et déterminer sa dérivée.

3) Etudier le signe de $\varphi'(x)$.

4) Déterminer les limites de φ aux bornes de son ensemble de définition.

5) Montrer que φ peut être prolongée par continuité en 0 en une fonction que l'on notera également φ. Montrer que cette fonction ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.

6) Déterminer le tableau de variation de φ et tracer sa courbe représentative.

— **Deuxième partie** —
Soit f une fonction définie continue et **positive** sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Soit la fonction g définie par : $g(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{f(t)}{1 + x\sin t}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que g est définie sur $]-1, +\infty[$.

2) On suppose dans cette question que : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ f(t) = \cos t$. Calculer $g(x)$.

3) On suppose dans cette question que : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ f(t) = \sin(2t)$. Calculer $g(x)$.

4) Soit a un réel supérieur strictement à -1. Montrer que l'on peut trouver un réel K tel que : $\forall\,(x, y) \in \left]a, +\infty\right[^2,\ |g(x) - g(y)| \leq K\,|x - y|$. En déduire que la fonction g est continue sur $]-1, +\infty[$.

5) Montrer, sans utiliser la dérivabilité, que g est décroissante sur $]-1, +\infty[$.

6) Montrer que la fonction f est majorée sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

7) Soit M un majorant de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $b \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. En écrivant que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} = \int_0^b + \int_b^{\frac{\pi}{2}}$, montrer que :

$$\forall\ x > 0,\ g(x) \leq Mb + \frac{M\pi}{2(1 + x\sin b)}.$$

8) En déduire la limite de la fonction g en $+\infty$.

9) Montrer que g admet une limite L finie ou infinie en -1. On illustrera chacun des deux cas avec un exemple.

— **FIN** —