Lycée La Martinière Monplaisir — Année 2015/2016
MPSI - Mathématiques — Premier Semestre

Feuille d'exercice n° 09 : **Arithmétique**

Exercice 1 (✎) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1) $17|(7^{8n+1} + 10(-1)^n)$ 2) $11|(9^{5n+2} - 4)$ 3) $6|(10^{3n+2} - 4^{n+1})$.

Exercice 2 (🚲) Quel est le reste de la division euclidienne de $1234^{4321} + 4321^{1234}$ par 7 ?

Exercice 3 Trouver le reste de la division par 13 du nombre 100^{1000}.

Exercice 4 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) \text{ est divisible par } 24,$$

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \text{ est divisible par } 120.$$

Exercice 5 (✎) Déterminer le pgcd et les coefficients de l'égalité de Bézout des entiers a et b suivants :
a) $a = 33$ et $b = 24$; b) $a = 37$ et $b = 27$; c) $a = 270$ et $b = 105$.

Exercice 6 (🚲) Soient a, b et $c \in \mathbb{Z}$, $(a, b) \neq (0, 0)$. On souhaite résoudre l'équation $ax + by = c$, notée $\star$, d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

1. Montrer que $\star$ n'a pas de solution si c n'est pas un multiple de $a \wedge b$.
2. On suppose dans cette question que $a \wedge b$ divise c.
   a) En considérant un couple de coefficients de Bézout de (a, b), montrer que $\star$ possède une solution (x_0, y_0).
   b) En s'appuyant sur (x_0, y_0), résoudre complètement $\star$.
3. Résoudre les deux équations $2x + 5y = 13$ et $7x - 12y = 3$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

Exercice 7 Le pgcd de deux nombres est 12 ; les quotients successifs obtenus dans le calcul de ce pgcd par l'algorithme d'Euclide sont 8, 2 et 7. Trouver ces deux nombres.

Exercice 8 (🚲) Résoudre les équations suivantes d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{N}^2$:

$$1) \left\{ \begin{array}{rcl} x \wedge y & = & 3 \\ x + y & = & 21 \end{array} \right. \qquad 2) \left\{ \begin{array}{rcl} x \wedge y & = & 6 \\ x \vee y & = & 72 \end{array} \right. .$$

Exercice 9 (✎) Montrer que deux entiers non nuls consécutifs sont toujours premiers entre eux.

Exercice 10 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :

1. $(n^2+n) \wedge (2n+1) = 1$;
2. $(3n^2+2n) \wedge (n+1) = 1$.

Exercice 11 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant :

$$S : \begin{cases} x \equiv 4 \mod 6 \\ x \equiv 7 \mod 9 \end{cases}$$

On recherchera d'abord une solution particulière.

Exercice 12 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

1. $91x - 65y = 156$.
2. $135x - 54y = 63$.
3. $72x + 35y = 13$.

Exercice 13 Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $x^2 + 5y^2 = 3$.

Exercice 14 Déterminer n tel que $n^2 - 3n + 6 \equiv 0 \pmod 5$.

Exercice 15 Un coq coûte 5 pièces d'argent, une poule 3 pièces, et un lot de quatre poussins 1 pièce. Quelqu'un a acheté 100 volailles pour 100 pièces ; combien en a-t-il acheté de chaque sorte ?

Exercice 16 Soient a et n deux entiers supérieurs ou égaux à 2. Montrer que si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier. La réciproque est-elle vraie ? Pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 2, l'entier $2^p - 1$ est appelé le p-ème nombre de Mersenne, souvent noté M_p.

Exercice 17 Soit F l'application définie sur $\mathbb{N}$ par $n \to 2^{2^n} + 1$. $F(n)$ est appelé $n^{\text{ième}}$ nombre de Fermat.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F(n) = \prod_{k=0}^{n-1} F(k) + 2$.
2. Montrer que pour tout couple (m, n) de $\mathbb{N}^2$ tels que $m \neq n$ alors $F(m)$ et $F(n)$ sont premiers entre eux.
3. Montrer que tout entier naturel n qui n'est pas de la forme 2^m possède un diviseur impair autre que 1. En déduire que si le nombre $2^n + 1$ est premier alors c'est un nombre de Fermat.
4. Montrer que $F(5)$ est divisible par 641.

Exercice 18 Montrer que pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 2, alors $\dfrac{1}{4}(n^3 + (n+2)^3)$ est un entier, et qu'il n'est pas premier.

Exercice 19 Dans le système de numération de base 16 on pose $a = 4A3$ et $b = 10C4$.
Calculer $a + b$, $b - a$ et ab en base 16.