


Feuille d'exercice n° 13 : **Groupes, anneaux, corps**


**Exercice 1** () Soient  $G_1$  et  $G_2$  deux groupes, dont les lois sont notées multiplicativement. On considère l'ensemble produit  $G_1 \times G_2$  sur lequel on considère la loi interne  $\otimes$  suivante :

$$\forall ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in (G_1 \times G_2)^2 \quad (x_1, x_2) \otimes (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2).$$

Montrer que  $(G_1 \times G_2, \otimes)$  est un groupe. Quel est son neutre ?

**Exercice 2** () – **Un peu de sudoku** –

- 1) Soit  $(G, *)$  un groupe,  $a \in G$ . Que peut-on dire de  $\varphi_a : \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & G \\ x & \mapsto & a * x \end{array}$  ?
- 2) Montrer qu'il existe une seule table possible pour un groupe d'ordre 3 (c'est-à-dire à trois éléments).
- 3) Est-ce vrai pour 4 ?

**Exercice 3** () Soit  $(G, \times)$  un groupe,  $H$  et  $K$  deux sous-groupes de  $G$ ,  $(H_i)_{i \in I}$  une famille de sous-groupes de  $G$ .

- 1) Montrer que  $\bigcap_{i \in I} H_i$  est un sous-groupe de  $G$ .
- 2) Montrer que  $H \cup K$  est un sous-groupe de  $G$  si et seulement si  $H \subset K$  ou  $K \subset H$ .

**Exercice 4** () Montrer que les sous-groupes de  $\mathbb{Z}$  sont exactement tous les  $n\mathbb{Z}$ , avec  $n \in \mathbb{N}$ .



**Exercice 5** Quel est le plus petit sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  contenant 1 ? Contenant 2 ? Même question avec  $(\mathbb{R}^*, \times)$ .

**Exercice 6** On considère  $A$  et  $B$  deux sous-groupes de  $(G, *)$  et l'on note :

$$A * B = \{ x \in G \mid \exists (a, b) \in A \times B, x = a * b \} = \{ a * b \mid (a, b) \in A \times B \}.$$


Montrer que  $A * B$  est un sous-groupe de  $(G, *)$  si et seulement si  $A * B = B * A$ .

*Indication* : pour le sens direct, on commencera par montrer  $B * A \subset A * B$ .

**Exercice 7** ( ) Soit  $G$  un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  non réduit à  $\{0\}$ . On pose  $\alpha = \inf(\mathbb{R}_+^* \cap G)$

- 1) Montrer que si  $\alpha > 0$ , alors  $G = \alpha\mathbb{Z} = \{k\alpha \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .
- 2) Montrer que si  $\alpha = 0$ , alors  $G$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire que pour tout réel  $x$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $g \in G$  vérifiant  $|x - g| \leq \varepsilon$ .

**Exercice 8** Décrire tous les endomorphismes de groupes de  $(\mathbb{Z}, +)$ . Déterminer ceux qui sont injectifs et ceux qui sont surjectifs.

**Exercice 9** () Soit  $G$  un groupe noté multiplicativement.

Pour  $a \in G$ , on note  $\tau_a$  l'application de  $G$  vers  $G$  définie par  $\tau_a : x \mapsto axa^{-1}$ .

- 1) Soit  $a \in G$ , montrer que  $\tau_a$  est un endomorphisme du groupe  $(G, \times)$ .
- 2) Vérifier que  $\forall a, b \in G, \tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$
- 3) Soit  $a \in G$ , montrer que  $\tau_a$  est bijective et déterminer son application réciproque.
- 4) En déduire que  $\mathcal{T} = \{\tau_a \mid a \in G\}$  muni du produit de composition est un groupe.

**Exercice 10** Soit  $(A, +, \times)$  un anneau. On dit que  $x \in A$  est *nilpotent* s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $x^n = 0$ .

- 1) Montrer que si  $x$  est nilpotent alors  $1 - x$  est inversible.
- 2) Montrer que si  $x$  et  $y$  sont nilpotents et commutent, alors  $xy$  et  $x + y$  sont nilpotents.
- 3) Un corps admet-il des éléments nilpotents non nuls ?

**Exercice 11** Soit  $(A, +, \times)$  un anneau commutatif. Soit  $a$  un élément de  $A$ . On appelle racine carrée de  $a$  dans  $A$ , tout élément  $x$  de  $A$  tel que  $x^2 = a$ .

- 1) Montrer que si  $A$  est intègre, alors tout élément de  $A$  admet au maximum 2 racines carrées.
- 2) Prenons maintenant  $(A, +, \times) = (\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \times)$ . Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1$ . Montrer que  $f$  admet une infinité de racines carrées.

**Exercice 12** Soit  $(A, +, \times)$  un anneau, soit  $a \in A$ . On appelle *commutant de  $a$*  la partie

$$C(a) = \{ x \in A \mid ax = xa \}.$$

On appelle *centre de  $A$*  la partie

$$Z = \{ x \in A \mid \forall a \in A, ax = xa \}.$$

Montrer que  $C(a)$  et  $Z$  sont deux sous-anneaux de  $A$ .

**Exercice 13** Soit  $(A, +, \times)$  un anneau non nul, on considère

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{Z} & \longrightarrow & A \\ n & \longmapsto & n \cdot 1 = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ fois}} \end{cases}.$$

- 1) Montrer que  $\varphi$  est le seul morphisme d'anneaux de  $\mathbb{Z}$  dans  $A$ .
- 2) Dans le cas où  $\varphi$  n'est pas injectif, montrer qu'il existe  $c \in \mathbb{N}^*$  unique tel que  $\text{Ker}(\varphi) = c\mathbb{Z}$ .

On se place dorénavant dans ce dernier cas,  $c$  est appelé *caractéristique* de l'anneau  $A$ , et  $A$  est supposé intègre et commutatif.

- 3) Montrer que  $c$  est un nombre premier.
- 4) Montrer que  $x \mapsto x^c$  est un endomorphisme de l'anneau  $A$ .

