Devoir surveillé n° 08 - Remarques

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 24 points, ramené sur 5 points.
- Problèmes : chaque question sur 4 points, sauf I du sujet I sur 8 points, total sur 120 points, ramené sur 15 points.

Statistiques descriptives.

	Calculs	Sujet 1	Sujet 2	Note finale
Note maximale	18	75	48	18
Note minimale	0	12	10	3
Moyenne	$\approx 9,48$	$\approx 39,67$	$\approx 25,70$	$\approx 10,17$
Écart-type	$\approx 4,42$	$\approx 17,69$	$\approx 10,10$	$\approx 3,66$

Remarques générales.

Lorsque deux de vos réponses se contredisent, ou lorsqu'un de vos résultat contredit l'énoncé, faites attention : vous avez probablement commis une erreur auparavant. À vous de retrouver cette erreur. Si vous traitez un problème à partir de réponses fausses (ex : dans l'exercice 2, si vous vous êtes trompé dans l'étude de $\operatorname{Ker} f$, ou dans l'exercice 3 si vous vous êtres trompés dans le cacul de φ'), cela invalide une bonne partie du problème et vous perdrez beaucoup de points.

Vous devez faire très attention à bien introduire vos variables et à noter correctement vos fonctions (par exemple : soit $x > -1$, alors $t \mapsto \dfrac{\cos t}{1 + x\cos t}$ [...]).
Les formulations « $f(x)$ est dérivable » ou « f est une somme de fonction dérivable » commencent à me taper très durement sur les nerfs.

Sujet 1 – Exercice 1.

Vous avez presque tous redonné les étapes de la démonstration, par contre les arguments sont presque toujours absents. En particulier, la continuité n'est pas souvent utilisée ! Il y avait deux arguments clé indispensables à préciser et à justifier : une fonction continue qui change de signe s'annule, et une fonction continue strictement positive (ou strictement négative) a une intégrale non nulle. Ces deux points ne vont pas de soi, le premier découle du TVI, il faut donc le démontrer. Le second n'est pas la croissance de l'intégrale, qui ne concerne que des inégalités larges.

Sujet 1 – Exercice 2.

1 On vous demande de montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, vous devez donc le détailler, sinon vous perdez les points de la question.

2 Lisez l'énoncé en entier : il y avait trois réponses à donner ici. De plus, la question **5** vous apprenez que $\dim \operatorname{Ker} f = 1$. Si vous aviez trouvé autre chose, il fallait vous poser des questions.

3a Certains ont redémontré ce résultat plusieurs fois (en **4)** et **5** par exemple, en démontrant que $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$). C'est une perte totale de temps et cela ne dispose pas bien le correcteur envers vous.

3b Utilisez **3a)** !

3c Il manque souvent un argument : la famille est-elle libre ? génératice ? Ou alors, utilisez les dimensions et le théorème du rang.

3d Pour $u \in \operatorname{Im} f$, résoudre en λ, μ $f(u) = \lambda v_1 + \mu v_2$ pour s'appercevoir que $f(u) \in \operatorname{Im} f$ (!!) est franchement décevant. La réponse est on ne peut plus directe !!

5 Beaucoup ont oublié que la question $v_3 \notin \operatorname{Vect}(v_1, v_2)$ a été traitée en **3a)**. De plus, vous n'avez pas le droit de choisir v_3 : c'est UN vecteur non nul de $\operatorname{Ker} f$, vous ne pouvez pas poser $v_3 = (1, -1, 1)$.

7 Le vecteur $av_1 + bv_2 + cv_3$ a pour coordonnées dans la base (v_1, v_2, v_3) le triplet (a, b, c). Cependant, $av_1 + bv_2 + cv_3 \neq (a, b, c)$. Si vous avez écrit cela, c'est que vous avez confondu les coordonnées dans la base canonique avec celles dans la base (v_1, v_2, v_3).

Sujet 1 – Exercice 3.

I-1 « φ est définie si $x > -1$ et $x \neq 0$ » n'a aucun sens : le membre de gauche ne dépend pas de x, le membre de droite si (et souvent x n'est même pas introduit).
De plus, on ne demandait pas un conditon nécessaire pour que φ soit définie, mais une CNS ! Donc dire « pour que $\varphi(x)$ soit défini il faut que x ... » ne suffit pas.

I-2 Que d'erreurs de calculs dans cette question ! C'est franchement anormal vu le degré de simplicité de φ. De pus, pensez à exprimer φ' sous la forme la plus factorisée possible, cela facilite l'étude de son signe.

I-4 Là aussi, calculer ces limites aurait dû vous paraître simplissime. L'étude en 0 a été souvent mal faite, alors qu'elle reposait simplement sur $\ln(1 + x) \sim x$. L'étude en $+\infty$ reposait sur des croissances comparées (au pluriel là aussi, car comparer une seule croissance (à qui ?) n'a aucun intérêt).

II-1 Mêmes remarques qu'en **I-1**. On ne demandait même qu'une CS pour que $\varphi(x)$ soit définie.
Sinon, de gros problèmes de quantifications. Pour x FIXÉ, c'est la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{1 + x \sin t}$ qui ne doit pas s'annuler et être continue sur $[0, \pi/2]$.

II-23 Et comme d'habitude, trop d'élèves divisent par x sans se soucier de savoir si x est nul ou non. Les changements de variable non affines doivent être justifiés.

II-4 Vous ne pouvez dire directement que f est lipschitzienne donc continue, car vous n'avez pas montré que f est lipschitzienne sur $]-1, +\infty[$.

Sujet 2 – Exercice 1.

La lettre n est déjà définie dans l'énoncé pour désigner $\dim E$: ne la réutilisez pas, on n'y comprend plus rien.

1b Mais pourquoi invoquer une usine à gaz (le théorème du rang en l'occurence) pour démontrer que $\dim \operatorname{Ker} f \leqslant \dim E$? ?

1c Je vous rappelle qu'une suite à valeur dans $\mathbb{N}$ ne prend qu'une valeur, donc c'est une suite constante. Si votre suite n'est pas constante, vous êtes priés de mettre « valeur » au pluriel. Je sais, le français, le pluriel, c'est encore plus subtil que les maths ...
Le fait qu'une suite convergente d'entiers soit stationnaire est hors-programme : c'est à vous de le démontrer. Les ordres bons ou bien fondés, sont encore plus hors-programme. De plus, dire qu'une suite est « stationnaire à partir d'un certain rang » prouve que vous n'avez pas bien compris la définition de stationnaire : là encore, le français est subtil, on a inventé le mot « stationnaire » pour éviter de répéter « à partir d'un certain rang », sinon le mot « constante » fait très bien l'affaire.
N'oubliez pas de montrer qu'il existe un *plus petit* tel k, après avoir montré qu'il en existait un. N'oubliez pas non plus que p devait être non nul.

1e Avec $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0_E$, on a bien $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i) = 0_E$ et, pour tout i, $f(x_i) \neq 0_E$.
Cela n'implique pas directement que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$. Si vous dites que cela d'obtient par récurrence, vous avez raison, mais il faut rédiger cette récurrence. Et parfois je « récurre pour i » au tableau, mais c'est pour rire : on ne récurre guère que des éviers, et ce n'est guère fréquent en maths.

1g Attention, sauf si vous l'aviez explicitement montré auparavant, vous avez juste $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+1}$ et non $\forall i \geqslant p$, $\operatorname{Ker} f^{i+1} = \operatorname{Ker} f^i$. Si vous aviez montré cette propriété, la question devenait très facile.
De plus, $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+1}$ n'a rien à voir avec $f^p = f^{p+1}$.

2a La question **1h** est ici inutile ! Ce n'est pas parce que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ que l'indice de f est 1. N'oubliez pas ici aussi que cet indice est non nul, et ne dites pas de but en blanc $p = 1$ car, qui est p ? Les notations de la question 1 n'ont aucune raison de perdurer.

2b Il ne sert à rien de montrer que f_a est injective et surjective : en dimension finie, c'est la même chose.

3a Ici $\operatorname{Im} f^k$ peut très bien valoir $+\infty$, donc étudier la suite des $(\dim \operatorname{Im} f^k)$, dire qu'elle est décroissante, utliser un principe de descente infinie etc est totalement inadéquat.

3b Je vous rappelle la règle du jeu : pour répondre à ces questions, si la réponse est « oui », il faut le démontrer, si la réponse est « non », il faut donner un exemple concret, tout le reste est du pipeautage.

3c Une intersection (même infinie) de sev est un sev, c'est dans le cours, il n'est pa nécessaire de le redémontrer. Par contre, le fait qu'une réunion de sev soit un sev est en général faux. Pour une réunion de deux sev, si l'un est inclus dans l'autre, c'est facilement un sev et nous l'avons vu en cours, mais pour une réunion INFINIE de sev, même inclus les uns dans les autres, ce n'est pas connu et cette fois il faut le démontrer.

3d Il faut utiliser la question 1, mais elle ne suffit pas.

Sujet 2 – Exercice 2.

Une fonction est deux fois dérivable, mais deux fonctions sont une fois dérivables.

A1 Question globalement catastrophique.
Dire qu'une fonction est dérivable comme intégrale d'une fonction continue n'a pas de sens. L'intégrale d'une fonction est un nombre. C'est une primitive d'une fonction continue qui est directement dérivable.

De plus, ici la fonction $x \mapsto \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$ n'est pas de la forme $x \mapsto \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. Vous ne pouviez donc pas dire directement qu'elle était dérivable. La variable x intervient sous l'intégrale ! Il fallait la sortir de là.
Les outils utilisés dans cette question réapparaissent à plusieurs reprises dans ce devoir, et bien souvent on a droit à une belle chakchouka dans les variables : faites bien la distinction entre x et t.

A2 La plupart de vos réponses commencent par : si $g'' = 0$, alors f est solution de $f'' - f = 0$. MAIS QUI EST f ? ? ? ? Il est irritant de voir que ces erreurs de débutants surviennent toujours : il faut d'abord introduire f solution de (2) (phase d'analyse), puis introduire à nouveau f, cette fois comme une fonction de la forme trouvée à la fin de l'analyse (phase de synthèse).
Le raisonnement par analyse-synthèse pose toujours des problèmes, dans sa conception et surtout dans sa rédaction.

B1 Il s'agit en premier lieu de préciser que A est à valeurs dans E.
Il aurait été élégant de voir que A est linéaire et d'étudier son noyau.