



C9 : MODÉLISATION DES PERFORMANCES STATIQUES DES SYSTÈMES

C9-2 - Résolution d'un problème de statique des solides

30 Mai 2023

Table des matières

I	Isolement d'un système dans un référentiel	2
1	Isolement	2
2	Actions mécaniques extérieures et intérieures	2
3	Référentiels	2
II	Énoncé du Principe Fondamental de la Statique	2
1	Équilibre	2
2	Principe Fondamental de la statique	3
3	Théorèmes généraux	3
a)	Théorème de la résultante statique	3
b)	Théorème du moment statique	3
c)	Théorème des actions réciproques	3
III	Méthodologie de résolution	4
1	Cas particuliers de résolutions simples	4
2	Méthodologie générale d'un problème de statique.	5
3	Résolution analytique	5
IV	Exemple de résolution d'un problème de statique	6
1	Présentation du problème	6
2	Résolution analytique	7

Compétences

- **Analyser**
 - Isoler un système et justifier l'isolement.
- **Modéliser**
 - Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.
- **Résoudre**
 - Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.
 - Déterminer les actions mécaniques en statique.
 - Mener une simulation numérique.
- **Communiquer**
 - Lire et décoder un document technique : Schéma Cinématique
 - Utiliser un vocabulaire technique, des symboles et des unités adéquats.

I. Isolement d'un système dans un référentiel

1 Isolement

La première étape de l'étude statique d'un système consiste à **isoler** un ensemble ou système. On aura la possibilité d'isoler un ou plusieurs solides à la fois. Un fois l'isolement effectué, on pourra alors discerner l'extérieur et l'intérieur d'un système (E) . On notera (\bar{E}) l'ensemble extérieur à (E) .

2 Actions mécaniques extérieures et intérieures



Définition 1 :

- Les **actions mécaniques extérieures** correspondent à celles exercées par un quelconque composant externe (\bar{E}) sur (E) .
- Les **actions mécaniques intérieures** correspondent à celles exercées par un quelconque composant de (E) sur un autre composant de (E) .

3 Référentiels

Avant d'appliquer le Principe Fondamental de la Statique, nous avons besoin de repérer l'ensemble (E) par rapport au temps et à l'espace. Pour cela, nous utilisons des référentiels. Un référentiel est l'association d'un repère spatial et d'une base de temps.



Définition 2 : Référentiel galiléen

Un **référentiel galiléen** est un couple repère $(R(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}))$ et base de temps (t) , par rapport auquel le **Principe Fondamental de la Statique s'applique**.



Remarque 1 :

Pour la plupart des mécanismes étudiés en laboratoire à notre échelle de temps et de distance, on pourra considérer que le référentiel lié à la terre est une bonne approximation de référentiel galiléen.

II. Énoncé du Principe Fondamental de la Statique

1 Équilibre



Définition 3 :

Considérons un ensemble matériel (E) . On dit que (E) est en équilibre si au cours du temps, chaque point de (E) conserve une position fixe par rapport à un repère R .

2 Principe Fondamental de la statique



Définition 4 :

Dans un référentiel R **galiléen**, si un ensemble matériel (E) est en équilibre par rapport à R , alors le torseur des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur (E) est nul :

$$(E) \text{ à l'équilibre} \Rightarrow \sum \left\{ \mathcal{T}_{(\bar{E} \rightarrow E)} \right\} = \left\{ \mathcal{T}_{(ext \rightarrow E)} \right\} = \{0\} \quad (1)$$

(où (\bar{E}) désigne l'extérieur de (E) .)

3 Théorèmes généraux

a) Théorème de la résultante statique



Théorème 1 : de la résultante statique

Pour tout ensemble matériel (E) en équilibre par rapport à un référentiel galiléen :

$$\sum \overrightarrow{R_{(\bar{E} \rightarrow E)}} = \overrightarrow{R_{(ext \rightarrow E)}} = \vec{0} \quad (2)$$

b) Théorème du moment statique



Théorème 2 : du moment statique

Pour tout ensemble matériel (E) en équilibre par rapport à un référentiel galiléen :

$$\sum \overrightarrow{\mathcal{M}_{A(\bar{E} \rightarrow E)}} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_{A(ext \rightarrow E)}} = \vec{0} \quad \forall A \quad (3)$$

c) Théorème des actions réciproques



Théorème 3 : des actions réciproques

Soient (E_1) et (E_2) deux sous-ensembles matériels de (E) , en équilibre par rapport à un repère galiléen, et exerçant une action mécanique l'un sur l'autre. Alors :

$$\left\{ \mathcal{T}_{(E_1 \rightarrow E_2)} \right\} = - \left\{ \mathcal{T}_{(E_2 \rightarrow E_1)} \right\} \quad (4)$$



Attention :

La réciproque du principe fondamental de la statique et des théorèmes généraux ne s'appliquent pas, comme le montre l'exemple suivant.

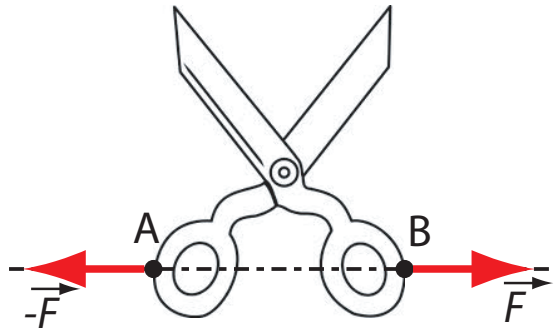


Exemple 1 : Paire de ciseaux

Soit l'ensemble (E) composé d'une paire de ciseaux soumis à deux forces \vec{F} et $-\vec{F}$. La somme des 2 actions mécaniques s'annule car :

1. $\vec{R}_{(ext \rightarrow E)} = \vec{F} - \vec{F} = \vec{0}$,
2. $\vec{M}_{A(e \rightarrow E)} = \vec{AA} \wedge (-\vec{F}) + \vec{AB} \wedge \vec{F} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$.

Or dans cette configuration les ciseaux s'ouvrent. Cet exemple montre bien que si le P.F.S est vérifié, le système n'est pas forcément en équilibre.



III. Méthodologie de résolution

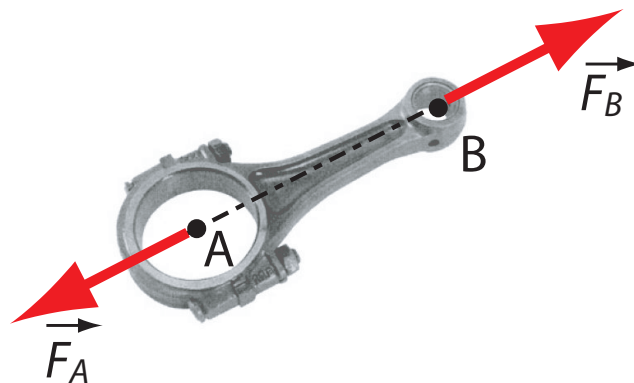
1 Cas particuliers de résolutions simples



Propriété 1 : Solide soumis à deux glisseurs

Soit un solide (E) soumis à deux glisseurs, alors la résultante des deux efforts associés à ces deux actions mécaniques sont directement opposées. C'est à dire **opposées** et **dirigées** par la droites (AB) : droite joignant les deux points d'applications d'effort.

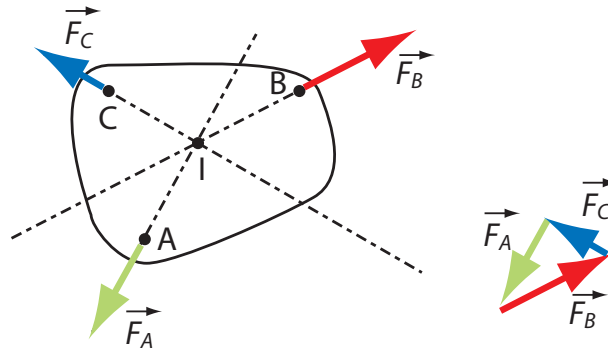
Sur la figure ci-dessous : $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$



Propriété 2 : Solide soumis à trois glisseurs

Soit un solide (E) soumis à trois glisseurs, alors les efforts associés aux trois actions mécaniques ont leurs :

- trois directions concourantes;
- vecteurs associés formant le triangle des efforts.



2 Méthodologie générale d'un problème de statique.

On considérera dans cette partie des ensembles (E) correspondant à des systèmes mécaniques composés de plusieurs solides (N_S solides) liés entre eux par des liaisons mécaniques. L'objectif d'une résolution statique est pour la plupart du temps de calculer les actions mécaniques au niveau des liaisons dans le but de les dimensionner et/ou de vérifier leur tenue vis-à-vis d'une sollicitation extérieure.

La démarche pour résoudre un problème de statique doit être rigoureusement respectée pour éviter toute erreur d'interprétation physique.

1. Isolement d'un système (E) dans un référentiel galiléen.
2. Construction du graphe de structure du système considéré (Graphe de liaison + Actions mécaniques extérieures à E).
3. Ordonnancement des isolements : on commencera par isoler les solides soumis à 2 actions mécaniques de type glisseur, puis les solides soumis à 3, etc...
4. Bilan des Actions mécaniques Extérieures pour chaque isolement.



Remarque 2 :

Parfois il peut s'avérer intéressant d'isoler des groupements de solides.

3 Résolution analytique

- La résolution analytique consiste à déterminer les expressions littérales des torseurs au niveau des liaisons mécaniques d'un système.
- Pour chaque isolement, on exprime les torseurs des actions mécaniques extérieures en un même point judicieusement choisi.
- L'écriture du P.E.S donne 6 équations pour un problème 3D et 3 équations pour un problème plan.
- Le regroupement de toutes les équations aboutit à un système linéaire d'équations de dimension :
 - $3 \cdot N_S$ pour un problème plan;
 - $6 \cdot N_S$ pour un problème tridimensionnel.
- On s'attachera bien à vérifier l'homogénéité des expressions littérales ainsi que leur cohérence lorsque cela sera possible.

IV. Exemple de résolution d'un problème de statique

1 Présentation du problème



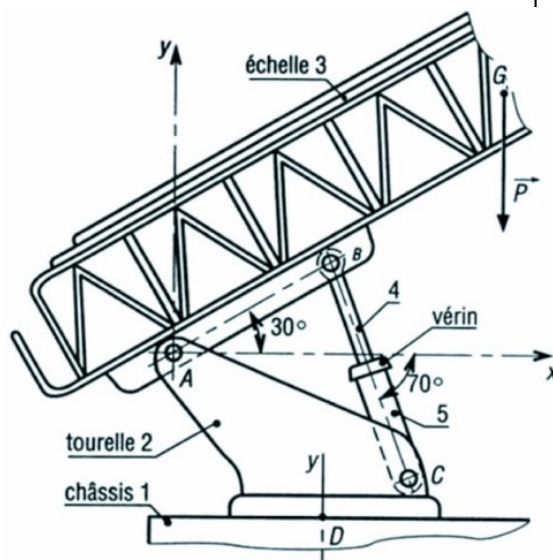
Exemple 2 : Modélisation d'une échelle de pompier

On souhaite dimensionner l'actionneur d'une échelle de pompier : vérin hydraulique. L'inclinaison dans le plan (A, \vec{x}, \vec{y}) (figure suivante) est actionnée par un vérin hydraulique de section utile S_v . Nous nous proposons de déterminer la loi d'entrée-sortie "en effort" de ce système.

- Entrée : ;
- Sortie : ;

Les actions mécanique dues à la pesanteur sont à négliger devant les autres actions mécaniques.

Dans cet exemple on se propose de résoudre le problème de statique dans la configuration présentée ci-dessous. On repère la position d'un point I par ses coordonnées (x_I, y_I) respectives dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) par rapport au point A. (ie pour B, x_B et y_B).



2 Résolution analytique



Réponses aux différentes questions

Détermination de la loi d'entrée sortie en effort (p en fonction de P)

**Réponses aux différentes questions**