

Feuille d'exercice n° 04 : **Théorie des ensembles**

Exercice 1 (✎) Donner la liste des éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1, 2\}))$.

Exercice 2 (✎) Soit $E = \{x, y, z\}$ un ensemble. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier les réponses.

a) $x \in E$; b) $\{x\} \in E$; c) $\{x\} \subset E$; d) $\emptyset \in E$; e) $\emptyset \subset E$; f) $\{\emptyset\} \subset E$.

Exercice 3 Un ensemble est dit décrit en compréhension lorsqu'il réunit les éléments d'un ensemble vérifiant une propriété. Un ensemble est dit décrit en extension lorsqu'on cite ses éléments. Par exemple, $\{n \in \mathbb{Z} / \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k\}$ et $\{2k/k \in \mathbb{Z}\}$ sont des descriptions respectivement en compréhension et en extension de l'ensemble des entiers pairs.

- a) Décrire en compréhension et en extension l'ensemble $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$.
- b) Décrire en compréhension et en extension l'ensemble $\{1, 10, 100, 1000, \dots\}$.
- c) Décrire en extension l'ensemble des nombres rationnels.
- d) Décrire en en compréhension l'ensemble $]0, 1]$. Pensez-vous qu'il soit possible de décrire cet ensemble en extension ?
- e) Décrire en compréhension et en extension l'ensemble des valeurs prises par une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- f) Décrire en compréhension l'ensemble des antécédents d'un réel y par une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Exercice 4 (✎) Montrer que si F et G sont des sous-ensembles de E :

$$(F \subset G \iff F \cup G = G), \quad (F \subset G \iff F \cap G = F) \quad \text{et} \quad (F \subset G \iff F^C \cup G = E).$$

En déduire que :

$$(F \subset G \iff F \cap G^C = \emptyset).$$

Exercice 5 (✎) Soit E un ensemble, A, B, C trois parties de E .

Montrer :

- $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.
- $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$.
- $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

Exercice 6 Soient E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ les équations suivantes :

1. $X \cup A = B$.
2. $X \cap A = B$.
3. $X \setminus A = B$.

Exercice 7 Soient E et F deux ensembles. Quelle relation y a-t'il

1. entre les ensembles $\mathcal{P}(E \cup F)$ et $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$?

2. entre les ensembles $\mathcal{P}(E \cap F)$ et $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$?
3. entre les ensembles $\mathcal{P}(E \times F)$ et $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$?

Exercice 8 (✎) Soient E, F, G trois ensembles. Montrer que $(E \times G) \cup (F \times G) = (E \cup F) \times G$.

