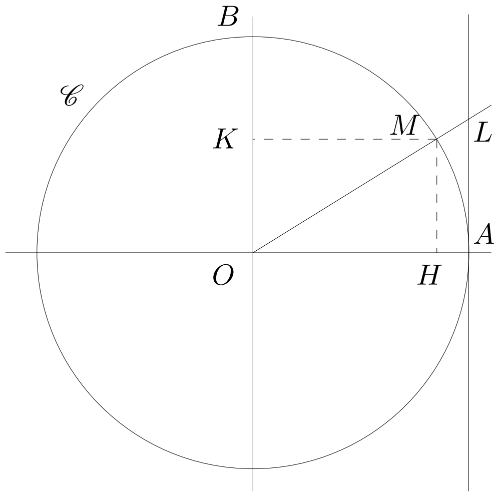

Figure 1 – Cercle trigonométrique

Soit $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ un repère orthonormé direct de $\mathbb{R}^2$. Soit M un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1. On construit les points H et K, projections orthogonales respectives de M sur les droites (OA) et (OB), et le point L, intersection, si elle existe, de la droite (OM) et de la perpendiculaire à (OA) passant par A. On oriente la droite (OA) (resp. (OB), (OL)) par le vecteur $\overrightarrow{OA}$ (resp. $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OL}$). Si α désigne une mesure de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$, on sait que :

$$\cos(\alpha) = \overline{OH} \quad , \qquad \sin(\alpha) = \overline{OK}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \overline{AL}$$

La tangente de α est définie si et seulement si L existe, c'est-à-dire si et seulement si le point M n'est pas sur la droite (OB).

Angles remarquables

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\cos(\alpha)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\sin(\alpha)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\tan(\alpha)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	☠	0

Propriétés élémentaires

Les fonctions sin et cos sont 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$. La fonction tan est π-périodique sur $\mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Pour tout réel α on a :

- $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
- $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin(\alpha)$
- $\cos(\pi/2 + \alpha) = -\sin(\alpha)$
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$

- $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
- $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos(\alpha)$
- $\sin(\pi/2 + \alpha) = \cos(\alpha)$
- $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$
- $\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$

Équations trigonométriques

Soient x et y deux réels. Alors :

- $\cos(x) = \cos(y)$ ssi $(x = y \ [2\pi]$ ou $x = -y \ [2\pi])$
- $\sin(x) = \sin(y)$ ssi $(x = y \ [2\pi]$ ou $x = \pi - y \ [2\pi])$

Soient x et y deux réels non congrus à $\pi/2$ modulo π. Alors :

- $\tan(x) = \tan(y) \quad \text{si et seulement si} \quad x = y \ \ [\pi]$

Formulaire trigonométrique

Soient x et y deux réels. Lorsque les réels considérés sont dans les domaines de définiton des fonctions mises en jeu, les formules suivantes sont valides :

- $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
- $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$
- $\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$
- $\tan(x+y) = \dfrac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$
- $\tan(x-y) = \dfrac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$
- $\cos(x)+\cos(y) = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
- $\sin(x)+\sin(y) = 2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
- $\cos(x)-\cos(y) = -2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
- $\sin(x)-\sin(y) = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
- $\cos(x)\cos(y) = \dfrac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y))$
- $\sin(x)\sin(y) = \dfrac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$
- $\sin(x)\cos(y) = \dfrac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y))$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = \dfrac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$
- $\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$

- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) = \dfrac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$

Équations paramétriques du cercle unité

On reprend les notations de l'introduction. Un paramétrage du cercle $\mathscr{C}$ en coordonnées cartésiennes dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est :

$$\begin{cases} x=\cos(t) \\ y=\sin(t) \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi[$$

Un paramétrage de $\mathscr{C}$ privé du point D de coordonnées $(-1,0)$, en coordonnées cartésiennes dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, est :

$$\begin{cases} x=\dfrac{2t}{1+t^2} \\ y=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

On trouve ce dernier paramétrage appelé paramétrage rationnel de $\mathscr{C}\backslash\{D\}$, en utilisant les formules trigonométriques exprimant le sinus et le cosinus du réel x en fonction de la tangente du réel $x/2$ (lorsqu'elle existe).