Feuille d'exercice n° 19 : **Espaces vectoriels**

Exercice 1 ( ) Dire si les objets suivants sont des espaces vectoriels.

1) L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et vérifiant $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

2) L'ensemble des fonctions réelles impaires, définies sur $\mathbb{R}$.

3) L'ensemble des fonctions f définies sur $[a, b]$, continues et vérifiant $f(a) = 7f(b) + \displaystyle\int_a^b t^3 f(t)\,\mathrm{d}t$.

4) L'ensemble des fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant $f'' + \omega^2 f = 0$.

5) L'ensemble des primitives de la fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^{x}$ sur $\mathbb{R}$.

6) L'ensemble des nombres complexes d'argument $\pi/4 + k\pi$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

7) L'ensemble des points (x, y) de $\mathbb{R}^2$, vérifiant $\sin(x + y) = 0$.

8) L'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux au vecteur $(-1, 3, -2)$.

Exercice 2 ( ) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On pose $F = E^2$. Pour tout couple $((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ d'éléments de F, on pose $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, et tout $(x, y) \in F$, on note $\lambda \cdot (x, y) = (ax - by, bx + ay)$, où $a = \operatorname{Re}\lambda$ et $b = \operatorname{Im}\lambda$.

Montrer que $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (appelé le complexifié du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E).

Exercice 3 ( )

1) Soit les vecteurs $v_1 = (1 - i, i)$, $v_2 = (2, -1 + i)$ et $v_3 = (1 + i, i)$. Le vecteur v_1 est-il combinaison linéaire de v_2 et v_3 dans $\mathbb{C}^2$, considéré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel ? comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

2) Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $x \mapsto \sin(3x)$ est-elle combinaison linéaire des deux fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \sin(2x)$? Généraliser.

Exercice 4 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que $F \cup G = F + G \Leftrightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 5 ( ) Soit

$$F = \left\{ f \in \mathscr{C}([-1, 1], \mathbb{C}) \mid \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$$

$$\text{et } G = \{ f \in \mathscr{C}([-1, 1], \mathbb{C}) \mid \ f \text{ constante} \}.$$

Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{C}([-1, 1], \mathbb{C})$.

Exercice 6 (✎) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère F d'équation $x - 2y + z + t = 0$, G d'équation $2x - y + 3t = 0$ et

$$H = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

F et G sont-ils des sous-espaces vectoriels supplémentaires ? Même question pour F et H, puis pour G et H.

Exercice 7 (🚲) Soit $F = \{\, f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) + f(1) = 0 \,\}$.

1) Montrer que F est un espace vectoriel.

2) Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 8 Soient F, G, F', G' des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, tels que $F \cap G = F' \cap G'$.

Montrer que $(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F$.

Exercice 9 Soit $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ deux sous-espaces affines **disjoints** d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On note V et W leurs directions respectives. Soit $a \in \mathscr{V}$ et $b \in \mathscr{W}$. On pose $U = V + W$, $\mathscr{V}' = a + U$ et $\mathscr{W}' = b + U$. Montrer que $\mathscr{V}'$ et $\mathscr{W}'$ sont deux sous-espaces affines disjoints, de même direction et contenant respectivement $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$.