Devoir à la maison n° 15

À rendre le 10 mars

On considère l'application f ainsi que les deux ensembles F et G suivants :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{K}^3 & \to & \mathbb{K}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (2x+y+z, -x-z, x+y+2z)\,, \end{array}$$

$$F = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3, \quad x+y+z=0\Big\}\,,$$

$$G = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3, \quad x=y=z\Big\}\,.$$

1) Étude de f :

a) Justifier que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^3)$.

b) Calculer $\mathrm{Ker}(f)$ et justifier que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}^3$. En déduire que $f \in \mathscr{GL}(\mathbb{K}^3)$ et expliciter f^{-1}.

c) Calculer f^2. En déduire que $f^2 = 3f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^3}$.

2) Projecteurs associés à f : On pose $p = f - \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^3}$ et $q = 2\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^3} - f$.

a) Vérifier que p et q sont des projecteurs de $\mathbb{K}^3$ puis que $\begin{cases} p+q = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^3}, \\ 2p+q = f, \\ p\circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}^3)}. \end{cases}$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^n = 2^n p + q$.

c) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{K}^3$, expliciter $f^n(x,y,z)$ en fonction de x, y, z et n.

d) Calculer $f \circ (2^{-1}p + q)$ et $(2^{-1}p+q)\circ f$.

e) En déduire que $f \in \mathscr{GL}(\mathbb{K}^3)$ et que $f^{-1} = 2^{-1}p + q$. Retrouver ainsi le résultat de la question 1.b.

3) Étude de F et G :

a) Justifier que F et G sont des $\mathbb{K}$-sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^3$ et exhiber une base de chaque de ces espaces.

b) Montrer que $\mathbb{K}^3 = F \oplus G$.

c) Expliciter le projecteur $p_{F//G}$ de $\mathbb{K}^3$ sur F parallèlement à G ainsi que le projecteur $p_{G//F}$ de $\mathbb{K}^3$ sur G parallèlement à F.

4) Application à l'étude de trois suites :
On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$(u_0, v_0, w_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= u_n\sqrt{v_n w_n}, \\ v_{n+1} &= \dfrac{1}{\sqrt{u_n w_n}}, \\ w_{n+1} &= w_n\sqrt{u_n v_n}. \end{cases}$$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0, \quad v_n > 0, \quad w_n > 0.$
On considère alors les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termes généraux $a_n = \ln(u_n)$, $b_n = \ln(v_n)$ et $c_n = \ln(w_n)$.
Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + \dfrac{b_n + c_n}{2}, \\ b_{n+1} = -\dfrac{a_n + c_n}{2}, \\ c_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} + c_n. \end{cases}$$

b) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}) = \dfrac{1}{2} f(a_n, b_n, c_n).$

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (a_n, b_n, c_n) = \dfrac{1}{2^n} f^n(a_0, b_0, c_0).$

d) A l'aide de la question 2c, exprimer a_n, b_n, c_n en fonction de a_0, b_0, c_0 et n.
Justifier la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et expliciter leurs limites respectives.

— FIN —