## Feuille d'exercice n° 01 : Trigonométrie et nombres imaginaires

Exercice 1 ( $^{\circ}$ ) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1) 
$$\sin x = \frac{1}{2}$$

3) 
$$\cos x = -1$$

**5)** 
$$\cos(4x) = -1$$

**2)** 
$$\tan x = \sqrt{3}$$

**4)** 
$$\sin(3x) = 1$$

**6)** 
$$\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{4}$$

Exercice 2 ( ) Résoudre les équations suivantes :

1) 
$$\tan(2x) = 1$$

4) 
$$\sin(x + 3\pi/4) = \cos(x/4)$$

**2)** 
$$\sin x + \cos x = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

**5)** 
$$\cos(x + \pi/6)\cos(x - \pi/6) = \frac{1}{2}$$

3) 
$$\cos(5x) = \cos(2\pi/3 - x)$$

**6)** 
$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$$

**Exercice 3** ( Résoudre l'équation  $\sin(3x)\cos^3(x) + \sin^3(x)\cos(3x) = \frac{3}{4}$ .

**Exercice 4** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

1) 
$$\tan x \geqslant 1$$

3) 
$$2\sin^2 x \le 1$$

$$2) \cos\left(\frac{x}{3}\right) \leqslant \sin\left(\frac{x}{3}\right)$$

4) 
$$\cos^2 x \geqslant \cos(2x)$$

**Exercice 5** ( $\circlearrowleft$ ) Pour quelles valeurs de m l'équation  $\sqrt{3}\cos x - \sin x = m$  admet-elle des solutions? Les déterminer lorsque  $m = \sqrt{2}$ .

**Exercice 6** On cherche à déterminer tous les réels t tels que  $\cos t = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ .

- 1) Démontrer qu'il existe une unique solution dans l'intervalle  $]0, \pi/4[$ . Dans la suite, on notera cette solution  $t_0$ .
- 2) Calculer  $\cos(2t_0)$ , puis démontrer que  $\cos(4t_0) = -\cos(t_0)$ .
- 3) En déduire  $t_0$ .
- 4) Résoudre l'équation.

**Exercice 7** Soit  $x, y \in ]0, \pi/2[$  tels que  $\tan x = \frac{1}{7}$  et  $\tan y = 2$ .

- 1) En utilisant tan(x+2y), calculer x+2y.
- 2) Calculer  $\cos(2y)$ .

**Exercice 8** Résoudre  $\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{6 + \sqrt{3}}{8}$ .

Exercice 9 ( ) Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

1) 
$$\frac{1+2i}{3-4i}$$

2) 
$$\frac{1}{(1+2i)^2}$$

3) 
$$\frac{(1+i)^3}{(1-i)^2}$$

4) 
$$\frac{1+i}{3-i} + \frac{1-i}{3+i}$$

5) 
$$\frac{1}{1+\frac{2}{i}}$$

**6)** 
$$(1 + (1 + (1 + 2i)^2)^{-1})$$

**Exercice 10** Montrer que pour tout  $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ , il existe  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$  tel que

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = m^2 + n^2.$$

Exercice 11 ( ) Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

1) 
$$(\sqrt{3}-i)^{11}$$

**2)** 
$$(-1+i)^{17}$$

**3)** 
$$\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{-42}$$

**Exercice 12** Soit  $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ ,  $z = \frac{1 + \cos \theta + i \sin \theta}{1 - \cos \theta - i \sin \theta}$ . Calculer Re z, Im z, |z|, arg z.

**Exercice 13** Soient  $z_1$  et  $z_2$  deux complexes de module 1, tels que  $1+z_1z_2\neq 0$ . Montrer que

$$\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 14** Soit  $a \in [0; 2\pi[$  et n un entier naturel. Déterminer le module et l'argument de  $: (1+ie^{ia})^n$ .

