

Devoir à la maison n° 09

À rendre le 17 décembre

I. Une suite récurrente

On considère la suite u définie par récurrence par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n - 4}{u_n - 1}.$$

- 1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 2$.
- 2) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- 3) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite ℓ .
- 4) Redémontrons les résultats de la question 3. en utilisant une autre méthode.
 - a) Montrer que la suite de terme général $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$ est arithmétique et donner sa raison.
 - b) Calculer, en fonction de n , le terme général de la suite v_n , puis celui de u_n .
 - c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite ℓ .
- 5) Montrer que la suite de terme général $w_n = n(u_n - \ell)$ converge et donner sa limite.

II. Encore une autre suite récurrente

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n^2 + u_n.$$

- 1) Déterminer la nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et préciser, le cas échéant, sa limite.
- 2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose,

$$v_n = \frac{1}{2^n} \ln u_n.$$

- a) Prouver que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq v_{n+p+1} - v_{n+p} \leq \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right).$$

- b) En déduire que pour tous $n, k \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right).$$

- c) En déduire la convergence de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers un réel, que l'on choisit d'écrire comme un logarithme, *i.e.* $\ln \alpha$ avec $\alpha > 0$.
- 3) a) Déterminer un encadrement de $\ln \alpha - v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \leq \alpha^{2^n} \leq u_n + 1.$$

- c) En déduire la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\alpha^{2^n}}$.
- d) Comparer α et 1.
- 4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $\delta_n = \alpha^{2^n} - u_n$.
- a) Montrer que la suite $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\delta_n = \frac{1}{2} + \frac{\delta_{n+1} + \delta_n^2 - \delta_n}{2} \alpha^{-2^n}.$$

- b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta_n < 1$.
- c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lfloor \alpha^{2^n} \rfloor$.
- d) Montrer enfin que la suite $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

— **FIN** —