

# **XXVI Séries numériques**

17 juin 2016

Dans tout ce chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont des suites à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

## 1 Prolégomènes

### Définition 1.1.

À toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  on associe la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

- Cette suite  $(S_n)$  est appelée *série de terme général*  $u_n$ . On la note  $\sum u_n$  ou  $\sum_{n \geq 0} u_n$ . L'indice  $n$  est bien entendu muet.
- Lorsque la suite  $(u_n)$  n'est définie qu'à partir d'un certain rang  $n_0$ , la série de terme général  $u_n$  est définie par la suite  $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$ , pour tout  $n \geq n_0$ . Elle est notée  $\sum_{n \geq n_0} u_n$ .
- Le terme d'indice  $n$  de la suite  $(S_n)$  s'appelle la *somme partielle d'indice (ou d'ordre)  $n$* , ou  *$n^e$  somme partielle* de la série  $\sum u_n$ .
- On dit que la série  $\sum u_n$  *converge* si la suite  $(S_n)$  converge. Dans ce cas la limite de  $(S_n)$  est appelée *somme de la série*  $\sum u_n$  et notée  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ . Dans le cas contraire on dit que la série *diverge*.
- La *nature* d'une série est sa convergence ou sa divergence. Deux séries sont dites *de même nature* si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

### Remarque 1.2.

Une série n'est donc qu'une suite, et on peut donc lui appliquer tous les résultats connus sur les suites. Réciproquement, toute suite est une série (cf. 1.9).

### Remarque 1.3.

Si  $(u_n)$  est complexe, notons  $(a_n)$  sa partie réelle et  $(b_n)$  sa partie imaginaire. Alors, en vertu du cours sur les suites,  $\sum u_n$  converge si et seulement si  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  convergent, et dans le cas de convergence,  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ .

### Exemple 1.4 (Séries arithmétiques).

Les séries de la forme  $\sum na$ , avec  $a \in \mathbb{C}$ , ne sont convergentes que si  $a = 0$ .

Dans tous les cas la somme partielle  $S_n$  vaut  $a \frac{n(n+1)}{2}$ .

### Définition 1.5.

Soit  $\sum_{n \geq 0} u_n$  une série convergente, alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la série  $\sum_{k \geq n} u_k$  converge également. Sa somme  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$  est appelée *reste d'ordre (ou d'indice)  $n$*  de la série  $\sum u_n$ . De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k,$$

soit, en notant  $S_n$  la somme partielle d'ordre  $n$  et  $R_n$  le reste d'ordre  $n$ ,

$$S_n + R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

### Démonstration.

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $N \geq n$ . Alors,

$$\sum_{k=n+1}^N u_k = \sum_{k=0}^N u_k - \sum_{k=0}^n u_k = S_N - S_n.$$

Comme  $(S_N)$  converge vers  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ , alors  $\sum_{k \geq n+1} u_k$  converge et sa somme est donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n.$$

□

**Exemple 1.6** (Séries géométriques).

Les séries de la forme  $\sum z^n$ , avec  $z \in \mathbb{C}$ , sont convergentes si et seulement si  $|z| < 1$ . Dans tous les cas la somme partielle  $S_n$  vaut  $\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$  si  $z \neq 1$ , et  $n + 1$  si  $z = 1$ .

Si  $|z| < 1$ , alors la somme de la série est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}.$$

Le reste de la série est

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} z^k = \frac{z^{n+1}}{1 - z}.$$

**Remarque 1.7.**

Soit  $\sum u_n$  une série convergente, dont on note  $S_n$  et  $R_n$  les restes à l'ordre  $n$ .

Alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S_n + R_n$  et  $R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

En particulier, si  $|R_n| < \varepsilon$ , on peut dire que  $S_n$  est une approximation de  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  à  $\varepsilon$  près.

**Proposition 1.8.**

Deux séries dont les termes généraux sont égaux à partir d'un certain rang ont même nature.

**Démonstration.**

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites égales à partir du rang  $N$ .

On note  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$  et  $S'_n = \sum_{k=0}^n v_k$ .

Alors pour tout  $n \geq N$ ,  $S_n = S'_n + (S_N - S'_N)$ . □

**Proposition 1.9** (Lien suite-série).

L'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ u & \longmapsto & S = \left( \sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

est un automorphisme d'espaces vectoriels.

Sa réciproque est l'application  $\varphi^{-1} : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ , où pour tout  $S \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ,  $u = \varphi^{-1}(S)$  est la suite définie par

$$u_0 = S_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1}.$$

**Démonstration.**

La linéarité de  $\varphi$  est facile à vérifier. Il est également aisé de montrer que  $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \text{Id}$ . □

**Remarque 1.10.**

En posant  $S_{-1} = 0$ , on peut écrire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n S_k - S_{k-1}.$$

Toute série peut donc être vue comme une série télescopique.

**Proposition 1.11** (Séries télescopiques).

La suite  $(u_n)$  et la série  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  ont même nature.

Dans le cas de convergence,

$$u_n - u_0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} - u_n.$$

**Démonstration.**

Nous savons déjà que les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  ont même nature.

De plus la somme partielle d'indice  $n$  de la série  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  vaut  $u_{n+1} - u_0$  par sommation télescopique. Elle est donc égale au terme  $u_{n+1}$ , à une constante près, et a donc la même nature que la suite  $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ .

Dans le cas de convergence, il reste à passer à la limite dans la relation  $\sum_{n=0}^N (u_{n+1} - u_n) = u_{N+1} - u_0$ . □

**Exemple 1.12.**

La série  $\sum_{n>0} \frac{1}{n(n+1)}$  converge. En effet pour

tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ , et la suite

$\left(\frac{1}{n}\right)_{n>0}$  converge.

Nous pouvons même aller plus loin :

$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$  donc  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ .

On voit aussi que le reste d'ordre  $n$  vaut  $\frac{1}{n+1}$ .

**Exercice 1.13.**

En simplifiant  $\frac{(n+1)-n}{1+n(n+1)}$ , montrer que  $\sum \arctan \frac{1}{1+n+n^2}$  converge et calculer sa somme.

**Proposition 1.14** (Linéarité de la somme).

L'ensemble des suites dont la série est convergente, muni des lois  $+$  et  $\cdot$ , forme un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et l'application qui à une telle suite associe la somme de sa série est linéaire.

**Démonstration.**

Élémentaire, d'après les résultats sur les suites.  $\square$

Finissons par le résultat principal de cette première partie :

**Théorème 1.15** (Divergence grossière). (i) Si la série  $\sum u_n$  converge, alors  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

(ii) Si la suite  $(u_n)$  ne tend pas vers 0, on dit que la série  $\sum u_n$  *diverge grossièrement*.

**Démonstration.** (i) Supposons que la série  $\sum u_n$  converge. Puisque pour tout  $n > 0$ ,  $u_n = S_n - S_{n-1}$ , alors  $u_n$  est la différence des termes généraux de deux suites convergeant vers la même limite. La suite  $(u_n)$  tend donc vers 0.

(ii) C'est la contraposée du premier point.  $\square$

**Exemple 1.16.**

La série  $\sum \cos n$  diverge grossièrement. En effet, en supposant que  $\cos n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , la relation  $\cos(2n) = 2 \cos^2 n - 1$  donne une contradiction.



La réciproque du premier point du théorème 1.15 est fausse. On peut citer en exemple la série harmonique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ , qui sera revue plus tard.

Donnons également l'exemple de la suite  $u_n = \ln(n+2) - \ln(n+1) = \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$ . Évidemment,  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Mais  $\sum_{k=0}^n u_k = \ln(n+2)$ , par sommation télescopique. La série  $\sum u_n$  diverge donc.

**2 Séries à termes positifs**

Étudions maintenant le cas particulier où tous les termes d'une série sont des réels positifs ou nuls. La propriété fondamentale est dans ce cas la suivante.

**Proposition 2.1.**

Soit  $(u_n)$  une suite à valeurs positives et  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ . Alors la suite  $(S_n)$  est croissante.

**Démonstration.**

Tout simplement,  $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$ .  $\square$

**Remarque 2.2.**

Attention, une série peut ne pas être à termes positifs mais avoir toutes ses sommes partielles positives, comme la série  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ .

**Proposition 2.3.**

Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

**Démonstration.**

La suite des sommes partielles est croissante. Elle est donc convergente si et seulement si elle est majorée, comme conséquence directe du théorème de la limite monotone.  $\square$

**Proposition 2.4.**

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n \leq v_n$ .

(i) Si  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  également et

$$0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

(ii) Si  $\sum u_n$  diverge, alors  $\sum v_n$  également.

**Démonstration.**

Il suffit de remarquer que si  $(S_n)$  est la suite des sommes partielles de  $\sum u_n$  et  $(S'_n)$  celle de  $\sum v_n$ , alors  $0 \leq S_n \leq S'_n$ .

- (i)  $(S'_n)$  converge, donc est majorée, donc  $(S_n)$  est également majorée, et comme elle est croissante, elle converge également. Il reste alors à passer à la limite dans la relation  $0 \leq S_n \leq S'_n$ .
- (ii) c'est le théorème de minoration. □

**Remarque 2.5.**

Si la relation  $0 \leq u_n \leq v_n$  n'est vérifiée qu'à partir d'un certain rang, le résultat du théorème 2.4 est valable, à ceci près que dans le point (i) on ne peut pas conclure que  $0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ , mais

$$\text{seulement } 0 \leq \sum_{n=N}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=N}^{+\infty} v_n.$$

**Exemple 2.6.**

$\sum \frac{1}{(n+1)^2}$  converge et

$$1 < \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < 2.$$

En effet, pour tout  $n > 0$ ,  $0 < \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$ , donc  $0 < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < 1$  car  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ . Puisque pour  $n = 0$ ,  $\frac{1}{(n+1)^2} = 1$ , il vient le résultat.

**Corollaire 2.7.**

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles positives,  $(v_n)$  ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

- (i) Si  $u_n = O(v_n)$ , alors la convergence de  $\sum v_n$  entraîne celle de  $\sum u_n$ .
- (ii) Si  $u_n = o(v_n)$ , alors la convergence de  $\sum v_n$  entraîne celle de  $\sum u_n$ .
- (iii) Si  $u_n \sim v_n$  (donc  $(u_n)$  ne s'annule pas à partir d'un certain rang), alors  $\sum v_n$  et  $\sum u_n$  sont de même nature.

**Démonstration.** (i)  $\frac{u_n}{v_n}$  est bornée par un certain réel  $M > 0$ , donc à partir d'un certain rang,  $0 \leq u_n \leq Mv_n$  car  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont positives. On conclut donc avec 2.4.

- (ii) si  $u_n = o(v_n)$ , alors en particulier  $u_n = O(v_n)$ .
- (iii) si  $u_n \sim v_n$ , alors  $u_n = O(v_n)$  et  $v_n = O(u_n)$ . □

**Exemple 2.8.**

Puisque  $\sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \sim \frac{1}{2^n}$ , d'après le résultat sur les séries géométriques,  $\sum \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$  converge.

Pour pouvoir utiliser le dernier corollaire, nous avons besoin de « séries étalon », dont la nature est bien connue, et auxquelles on compare les séries à étudier. Les quelques exemples déjà étudiés font partie de ces séries de référence standard, mais la famille de séries la plus utilisée est celle des *séries de Riemann*, dont font partie la série harmonique et la série  $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ .

**Théorème 2.9.**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

**Démonstration.**

Si  $\alpha = 1$ , remarquons que  $\frac{1}{n} \sim \ln(n+1) - \ln n$ . Donc  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  est de même nature que  $\sum_{n \geq 1} (\ln(n+1) - \ln n)$ , qui elle-même est de même nature que la suite  $(\ln n)$  d'après 1.11, d'où la divergence.

Si  $\alpha \neq 1$ ,  $\frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1} \left( \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \right)$  (effectuer un développement asymptotique de  $\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$  ou appliquer l'inégalité des accroissements finis à  $x \mapsto x^{1-\alpha}$ ). La série de terme général  $\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$  est de même nature que la suite  $\left( \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right)$ , d'où le résultat.

On peut aussi remarquer que si  $\alpha \leq 0$ , la divergence est grossière, et si  $0 < \alpha < 1$ , la série diverge car  $\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n}$ . □

Le résultat classique suivant est une application directe de 2.7 et 2.9 :

**Corollaire 2.10** (Règle  $n^\alpha u_n$ ).

Soient  $(u_n)$  une suite réelle positive et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- (i) S'il existe  $\alpha > 1$  telle que  $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , alors  $\sum u_n$  converge.
- (ii) S'il existe  $\alpha \leq 1$  telle que  $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ , alors  $\sum u_n$  diverge.
- (iii) Si la suite  $(n^\alpha u_n)$  converge vers une limite non nulle, la série  $\sum u_n$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

**Démonstration.** (i) si  $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  alors  $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ , et  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge.  
(ii) si  $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  alors  $\frac{1}{n^\alpha} = o(u_n)$ , et  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  diverge.  
(iii) si la suite  $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$  avec  $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\sum u_n$  et  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  ont même nature. □

**Exemple 2.11** (Séries de Bertrand).

Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . On considère la série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^\beta n^\alpha}.$$

- Si  $\alpha > 1$  : il existe  $\gamma \in ]1, \alpha[$  et  $n^\gamma \frac{1}{(\ln n)^\beta n^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  par croissances comparées, car  $\alpha - \gamma > 0$ . Ainsi la série converge.
- Si  $\alpha < 1$  : il existe  $\gamma \in ]\alpha, 1[$  et  $n^\gamma \frac{1}{(\ln n)^\beta n^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  par croissances comparées, car  $\alpha - \gamma < 0$ . Ainsi la série diverge.
- Si  $\alpha = 1$  : si  $\beta \leq 0$ , le terme général est plus grand que  $\frac{1}{n}$ , donc la série diverge. Nous traiterons le cas  $\beta > 0$  en 3.3.

### 3 Comparaison série-intégrale

**Proposition 3.1.**

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continue par morceaux et décroissante.

Alors la série  $\sum f(n)$  converge si et seulement si

la suite  $\left(\int_0^n f(t) dt\right)$  est convergente.

De plus la suite définie par  $u_n = \sum_{k=0}^n f(k) - \int_0^n f(t) dt$  converge.

**Démonstration.**

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Par décroissance de  $f$ , on a :

$$\forall t \in [k, k+1], \quad 0 \leq f(k+1) \leq f(t) \leq f(k).$$

Puis, par intégration de cet encadrement sur  $[k, k+1]$  :

$$0 \leq f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \quad (1)$$

et par sommation, pour  $n \geq 1$  :

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \leq \int_0^n f(t) dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

ou encore

$$0 \leq \sum_{k=0}^n f(k) - f(0) \leq \int_0^n f(t) dt \leq \sum_{k=0}^n f(k) - f(n). \quad (2)$$

Les suites  $\sum_{k=0}^n f(k)$  et  $\int_0^n f(t) dt$  ont donc la même nature.

De plus, il vient  $0 \leq f(n) \leq \sum_{k=0}^n f(k) - \int_0^n f(t) dt$ , soit  $0 \leq u_n$ . Ainsi  $(u_n)$  est minorée. Enfin, on a

$$u_{n+1} - u_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t) dt \leq 0.$$

La suite  $(u_n)$  est donc décroissante et minorée et converge donc. □

**Remarque 3.2.**

L'encadrement 1 est à rapprocher de la méthode des rectangles, vue dans le chapitre sur l'intégration.

**Exemple 3.3.**

Achevons l'étude des séries de Bertrand commencée en 2.11.

Si  $\beta > 0$ , considérons l'application  $f : t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^\beta}$ . Elle est continue et décroissante sur  $[2, +\infty[$ .

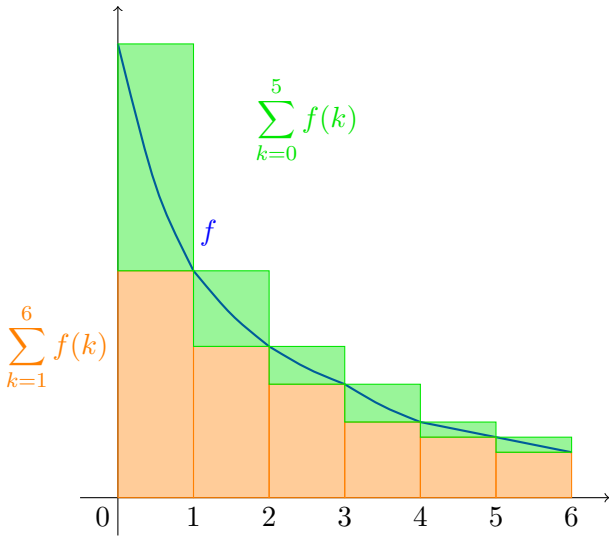


FIGURE 1 – Exemple de comparaison série-intégrale pour une fonction  $f$  décroissante, positive.

Si  $\beta = 1$ , une primitive de  $f$  est  $F : t \mapsto \ln(\ln t)$  et  $\int_2^n f(t) dt = F(n) - F(2)$ . Or  $F(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  donc la série diverge.

Par comparaison, la série diverge également si  $0 \leq \beta < 1$ .

Si  $\beta > 1$ , une primitive de  $f$  est  $F : t \mapsto \frac{(\ln t)^{1-\beta}}{1-\beta}$  et  $\int_2^n f(t) dt = F(n) - F(2)$ . Or  $F(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  car  $1 - \beta < 0$ , donc la série converge.

#### Exercice 3.4.

Redémontrer le résultat 2.9 en utilisant 3.1.

#### Exemple 3.5.

On pose  $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ . On sait alors que la suite de terme général  $u_n = \sum_{k=0}^n f(k) - \int_0^n f(t) dt = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$  converge, vers une limite notée  $\gamma$  et nommée *constante d'Euler*.

#### Exemple 3.6.

L'encadrement (2) permet d'avoir une estima-

tion du reste d'une série convergente de la forme  $\sum f(n)$  avec  $f$  décroissante.

Par exemple, soit  $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ . Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{N} &= \int_{n+1}^N \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{n+1}^N \frac{1}{n^2} \leq \int_n^{N-1} \frac{dt}{t^2} \\ &\leq \frac{1}{n} - \frac{1}{N-1} \end{aligned}$$

et en passant à la limite quand  $N \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ ,

$$\frac{1}{n+1} \leq \sum_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}.$$

Si l'on veut une approximation de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  à  $10^{-3}$  près, il suffit donc de choisir  $n = 1000$  et de calculer  $\sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n^2}$ .

#### Exercice 3.7.

On peut obtenir une approximation de cette somme en calculant seulement la somme d'une trentaine de termes. Comment ?

## 4 Séries absolument convergentes

Revenons à des séries à termes quelconques dans  $\mathbb{K}$ . Nous allons étudier une convergence plus restreinte que la convergence définie en 1.1 : la *convergence absolue*.

#### Définition 4.1.

On dit que la série  $\sum u_n$  est *absolument convergente* si la série à termes positifs  $\sum |u_n|$  converge.

#### Proposition 4.2.

Toute série absolument convergente est convergente.

#### Démonstration.

Commençons par établir le résultat pour des suites à valeurs réelles. Pour cela, définissons pour une suite  $(u_n)$  les

deux suites  $(u_n^-)$  et  $(u_n^+)$  définies par :  $u_n^+ = \max(u_n, 0)$  et  $u_n^- = \max(-u_n, 0)$ . Nous avons alors :

$$\begin{aligned} u_n^+ &= \begin{cases} 0 & \text{si } u_n < 0 \\ |u_n| & \text{si } u_n \geq 0 \end{cases} \\ u_n^- &= \begin{cases} 0 & \text{si } u_n > 0 \\ |u_n| & \text{si } u_n \leq 0 \end{cases} \\ 0 &\leq u_n^+ \leq |u_n| & (3) \\ 0 &\leq u_n^- \leq |u_n| & (4) \\ u_n &= u_n^+ - u_n^- & (5) \end{aligned}$$

$$|u_n| = u_n^+ + u_n^-.$$

De (3) et (4) on tire que  $\sum u_n^+$  et  $\sum u_n^-$  sont convergentes car  $\sum |u_n|$  est convergente.

De (5) on tire que  $\sum u_n$  est convergente.

Étendons maintenant ce résultat au cas d'une suite  $(u_n)$  à valeurs complexes absolument convergente. Pour tout  $n$ , on a  $0 \leq |\operatorname{Re} u_n| \leq |u_n|$ , or la série  $\sum |u_n|$  converge, donc la série  $\sum |\operatorname{Re} u_n|$  est convergente, donc  $\sum \operatorname{Re} u_n$  est absolument convergente, donc convergente d'après le premier point. De même  $\sum \operatorname{Im} u_n$  converge. Donc  $\sum u_n$  converge.  $\square$



La réciproque est fautive. Soit par exemple la suite de terme général  $u_n = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = v_n - v_{n+1}$ , avec  $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$ . La série  $\sum u_n$  est donc de même nature que la suite  $(v_n)$ , elle converge donc.

Mais  $|u_n| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \sim \frac{2}{n}$ , donc  $\sum u_n$  n'est pas absolument convergente. On dit qu'une telle suite, convergente mais pas absolument, est *semi-convergente*. L'étude de telles suites est souvent délicate !

### Corollaire 4.3.

Soit  $(u_n)$  une suite complexe et  $(v_n)$  une suite à termes positifs telles que  $|u_n| = O(v_n)$ . Alors si  $\sum v_n$  converge,  $\sum u_n$  également.

### Démonstration.

Par comparaison de séries à termes positifs,  $\sum u_n$  converge absolument, donc converge.  $\square$

### Remarque 4.4.

Une série à termes de signe constant converge absolument si et seulement si elle converge.

### Proposition 4.5.

L'ensemble des séries absolument convergentes est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des séries convergentes.

### Démonstration.

Élémentaire par l'inégalité triangulaire.  $\square$

### Proposition 4.6.

Soit  $\sum u_n$  une série absolument convergente. Alors

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

### Démonstration.

Soit  $N \in \mathbb{N}$ , alors, par l'inégalité triangulaire,

$$\left| \sum_{n=0}^N u_n \right| \leq \sum_{n=0}^N |u_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

On conclut par passage à la limite en  $N$ .  $\square$

## 5 Représentation décimale des réels

Notons  $\mathbb{D}$  l'ensemble des *décimaux*, c'est-à-dire l'ensemble

$$\begin{aligned} &\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}, 10^n x \in \mathbb{Z} \} \\ &= \left\{ \frac{k}{10^n} \mid k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}. \end{aligned}$$

Rappelons le résultat suivant, démontré dans le chapitre sur les réels : si  $x \in \mathbb{R}$ , on pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$  appelé *approximation décimale par défaut de  $x$  à  $10^{-n}$  près*. La suite  $(r_n)$  est alors une suite de décimaux inférieurs à  $x$ , et elle a  $x$  pour limite.

Nous pouvons alors donner le théorème suivant :



**Théorème 5.1.**

Pour tout  $y \in [0, 1[$  :

- Si  $y \notin \mathbb{D}$ , il existe une unique suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  d'éléments de  $\llbracket 0, 9 \rrbracket$  telle que  $y = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n 10^{-n}$ .
- Si  $y \in \mathbb{D}$ , il y a existence de deux telles suites : l'une finissant par une infinité de 0, l'autre par une infinité de 9. Ainsi,  $0,1 = 1.10^{-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} 0.10^{-n} = 0.10^{-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} 9.10^{-n}$ .

Dans tous les cas, il existe une unique suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  d'éléments de  $\llbracket 0, 9 \rrbracket$  telle que  $y = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n 10^{-n}$ , et tel que pour tout  $n_0 \in \mathbb{N}$ , il existe  $n \geq n_0$  tel que  $a_n \neq 9$  : la série  $\sum_{n \geq 1} y_n 10^{-n}$  est alors appelée le *développement décimal propre* de  $y$ .

**Démonstration.**

Prouvons l'existence. Considérons la suite de terme général  $r_n = \frac{\lfloor 10^n y \rfloor}{10^n}$  (approximation décimale par défaut de  $y$ ), et posons  $y_0 = \lfloor y \rfloor = 0$ , et pour tout  $n \geq 1$  :  $y_n = 10^n(r_n - r_{n-1}) = \lfloor 10^n y \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} y \rfloor$ . Les  $y_n$  sont donc bien des entiers de  $\llbracket 0, 9 \rrbracket$ .

De plus, :  $\sum_{n=1}^N y_n 10^{-n} = \sum_{n=1}^N (r_n - r_{n-1}) = r_N - r_0 = r_N$ .

Puisque  $(r_n)$  a pour limite  $y$ , alors  $y = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n 10^{-n}$ .

Si la suite  $(y_n)$  ne converge pas vers 9, il s'agit bien du développement propre.

Sinon, la suite est stationnaire. Il existe un rang  $n_0$  qui est le maximum de l'ensemble  $\{n \in \mathbb{N}, y_n \neq 9\}$ . Le développement propre est alors obtenu en changeant  $y_{n_0}$  en  $y_{n_0} + 1$ , et en changeant tous les termes suivants en 0.

Nous avons toujours  $y = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n 10^{-n}$  car  $\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} 9.10^{-n} = 9.10^{-n_0-1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 10^{-n_0}$ .

Prouvons enfin l'unicité du développement propre. Supposons que  $y$  admette deux développements propres distincts :

$$y = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n 10^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n 10^{-n}. \text{ Notons } N \text{ le plus petit indice tel que } y_N \neq z_N, \text{ et } N' \text{ le plus petit indice strictement supérieur à } N \text{ tel que } y_{N'} \neq 9. \text{ Pour fixer les idées, supposons que } y_N < z_N.$$

Alors :

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=1}^{N-1} y_n 10^{-n} + y_N 10^{-N} + \sum_{n=N+1}^{N'-1} y_n 10^{-n} \\ &\quad + y_{N'} 10^{-N'} + \sum_{n=N'+1}^{+\infty} y_n 10^{-n} \\ &< \sum_{n=1}^{N-1} y_n 10^{-n} + y_N 10^{-N} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} 9.10^{-n} \\ &< \sum_{n=1}^{N-1} z_n 10^{-n} + y_N 10^{-N} + 10^{-N} \\ &< \sum_{n=1}^{N-1} z_n 10^{-n} + (y_N + 1) 10^{-N} \\ &< \sum_{n=1}^{N-1} z_n 10^{-n} + z_N 10^{-N} \\ &< y \end{aligned}$$

ce qui est bien sûr absurde.  $\square$

**6 Compléments**

Voici deux critères de convergence qui peuvent être utiles.

**Proposition 6.1** (Test de comparaison logarithmique).

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites à termes réels strictement positifs telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ .

Alors :

- si  $\sum v_n$  converge, il en est de même de  $\sum u_n$  ;
- si  $\sum u_n$  diverge, il en est de même de  $\sum v_n$ .

**Démonstration.**

Nous avons pour tout  $n$ ,  $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$ , et donc par récurrence :  $\frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_0}{v_0}$ . En posant  $\mu = \frac{u_0}{v_0}$ , il vient donc :  $u_n \leq \mu v_n$ . Le résultat découle alors directement de 2.4.  $\square$

**Proposition 6.2** (Règle de d'Alembert).

Soit  $(u_n)$  une suite à termes réels strictement positifs.

- (i) S'il existe  $q \in ]0, 1[$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$ , alors la série  $\sum u_n$  est convergente.
- (ii) S'il existe  $q \in [1, +\infty[$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq q$ , alors la série  $\sum u_n$  est divergente.
- (iii) en particulier, si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$  :
- si  $\ell \in [0, 1[$ , la série  $\sum u_n$  est convergente ;
  - si  $\ell > 1$ , la série  $\sum u_n$  est divergente ;
  - si  $\ell = 1$ , on ne peut rien dire, sauf dans le cas  $u_n \leq u_{n+1}$  à partir d'un certain rang, où il y a divergence grossière.

**Démonstration.** (i) Posons  $v_n = q^n$ . Alors  $\sum v_n$  converge, et pour tout  $n$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ . Le critère de comparaison logarithmique 6.1 permet alors de conclure.

(ii) Même démonstration (ou même divergence grossière).

(iii) Découle des deux points précédents.  $\square$

**Exemple 6.3.**

- Soient  $x \in \mathbb{R}^*$  et  $u_n = \frac{x^n}{n!}$ . Alors  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $\sum u_n$  converge, et de plus on en tire que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .
- Soient  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $u_n = n^\alpha$ . Alors  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ , et pourtant, suivant la valeur de  $\alpha$ ,  $\sum u_n$  peut aussi bien diverger que converger.