# Feuille d'exercice n° 01 : **Nombres complexes**

**Exercice 1** Écrire sous forme algébrique : $\dfrac{1+2i}{3-4i}$ $\dfrac{1}{(1+2i)^2}$ $\dfrac{(1+i)^3}{(1-i)^2}$ $\dfrac{1+i}{3-i}+\dfrac{1-i}{3+i}$ $\dfrac{1}{1+\frac{2}{i}}$ $(1+(1+(1+2i)^2)^{-1})$.

**Exercice 2** Soit $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, $z=\dfrac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta}$.
Calculer $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$.

**Exercice 3** Résoudre pour $z\in\mathbb{C}$, $2\arg(z+i)=\arg(z)+\arg(i)\ (2\pi)$.

**Exercice 4** Soient $z_1$ et $z_2$ deux complexes de module 1, tels que $1+z_1z_2\neq 0$. Montrer que $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\in\mathbb{R}$.

**Exercice 5** Soit $a\in[0;2\pi[$ et $n$ un entier naturel. Déterminer le module et l'argument de : $(1+ie^{ia})^n$.

**Exercice 6** Soit $\omega=\exp\left(\dfrac{2i\pi}{7}\right)$. Calculer $A=\omega+\omega^2+\omega^4$ et $B=\omega^3+\omega^5+\omega^6$.
(on pourra d'abord calculer $AB$ et $A+B$.).

**Exercice 7** Déterminer les racines 4$^{\text{ièmes}}$ dans $\mathbb{C}$ de $-119+120i$

**Exercice 8** Soit $(n,z)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{C}$ tel que $z^n=(z+1)^n=1$. Montrer que $n$ est multiple de 6 et que $z^3=1$.

**Exercice 9** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $x$ : $(1+x)^{2n}=(1-x)^{2n}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$. Calculer alors le produit des racines.

**Exercice 10** Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2.

1. Écrire $-i$ et $1+i$ sous forme trigonométrique.
2. Calculer les racines $n^{\text{ièmes}}$ de $-i$ et de $1+i$.
3. Résoudre $z^2-z+1-i=0$.
4. En déduire les racines de $z^{2n}-z^n+1-i=0$.

**Exercice 11** Résoudre dans $\mathbb{C}$ , $\overline{z}=z^3$.

**Exercice 12** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z$ : $z^4+2\lambda^2z^2(1+\cos\theta)\cos\theta+\lambda^4(1+\cos\theta)^2=0$ $(\lambda\in\mathbb{C},\theta\in[0,\pi])$. Pour $n\in\mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=1}^{4} z_k^n$ où les $z_k$ sont les racines de cette équation.

**Exercice 13** Résoudre le système d'inconnue $(x,y)\in\mathbb{C}^2$ : $\left\{\begin{array}{lcl} x^3 & = & 3x+7y \\ y^3 & = & 7x+3y \end{array}\right.$ (on résoudra un système où les inconnues sont $x+y$ et $xy$)

**Exercice 14 (✎)** Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants : $(\sqrt{3}-i)^{11}$ et $(-1+i)^{17}$

**Exercice 15 (🚲)** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a$, $b \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a+kb)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(a+kb)$.

**Exercice 16**

1. Calculer les racines carrées de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
2. Calculer les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

**Exercice 17**

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.
2. En déduire que $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$ est racine du polynôme $16X^4 - 20X^2 + 5$.
3. En déduire la valeur de $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$.
4. Montrer que $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

**Exercice 18 (✎)** Calculer $\cos 5\theta$, $\cos 8\theta$, $\sin 6\theta$, $\sin 9\theta$, en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

**Exercice 19 (✎)** Linéariser :

1. $\cos^2 x . \sin^3 x$.
2. $\cos^6 x + \sin^6 x$.

**Exercice 20** Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z$ tels que :

1. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 1$,
2. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

**Exercice 21** Quel est l'ensemble des complexes $z$ tels que $\dfrac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pur ?

**Exercice 22** Déterminer les points d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que :

1. $1$, $z$ et $z^2$ soient les affixes de trois points alignés ;
2. $z$ et $\dfrac{1}{z}$ soient les affixes de deux vecteurs orthogonaux ;
3. $1$, $z$ et $z+i$ soient les affixes des sommets d'un triangle dont le centre du cercle circonscrit est l'origine $O$ du repère ;
4. $z$, $\dfrac{1}{z}$ et $z-1$ soient les affixes de trois points situés sur un même cercle de centre $O$

**Exercice 23** Soient $A$, $B$ et $C$ trois points d'affixes respectifs $a$, $b$ et $c$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $ABC$ est un triangle équilatéral ;
2. $j$ ou $j^2$ est racine du polynôme $aX^2 + bX + c$ ;
3. $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ ;

4. $(b-a)^2+(c-b)^2+(a-c)^2=0$.

**Exercice 24** Soient $A$, $B$, $A'$ et $B'$ quatre points tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Montrer qu'il existe une et une seule similitude directe qui transforme $A$ en $A'$ et $B$ en $B'$.

**Exercice 25 (✎)**

1. Caractériser géométriquement l'application $\left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & (2+2i)z-(7+4i) \end{array}\right.$
2. Soient $r$ la rotation de centre le point d'affixe 1 et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$, et $s$ la symétrie centrale de centre le point d'affixe $i+3$. Caractériser géométriquement l'application $s \circ r$.
3. Soit $r$ la rotation de centre le point d'affixe $1+i$ et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{4}$. Déterminer l'expression complexe de $r$.