Feuille d'exercice n° 08 : **Relations d'ordre et d'équivalence, et ensembles de nombres usuels**

Exercice 1 ( ) Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On définit sur $\mathcal{P}(E) \setminus \{\varnothing\}$ la relation $\mathcal{R}$ par $X\mathcal{R}Y$ ssi $(X = Y$ ou $\forall x \in X\ \forall y \in Y\ x \leqslant y)$. Vérifier que c'est une relation d'ordre.

Exercice 2 Un ensemble E muni d'une relation d'ordre $\preccurlyeq$ est dit *bien ordonné* pour $\preccurlyeq$ si toute partie non vide admet un plus petit élément pour $\preccurlyeq$.

1. Donner un exemple d'ensemble bien ordonné et un exemple d'ensemble qui ne l'est pas.
2. Montrer que bien ordonné implique totalement ordonné.
3. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 3 Soit E un ensemble et A une partie de E.
On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathscr{P}(E)$ par : $X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow X \cup A = Y \cup A$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Décrire la classe d'équivalence de $X \in \mathscr{P}(E)$

Exercice 4 ( ) Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire réflexive et transitive sur un ensemble E.
On définit une relation $\mathcal{S}$ par :

$$x\mathcal{S}y \Leftrightarrow x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x$$

Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence et que $\mathcal{R}$ permet de définir une relation d'ordre sur les classes d'équivalences de $\mathcal{S}$.

Exercice 5 Déterminer les bornes supérieures et inférieures des parties suivantes de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{\sqrt{\frac{n}{n+1}}\ /\ n \in \mathbb{N}\right\} \qquad B = \{x^2 + 2x + 3\ /\ x \in [-3; 2]\} \qquad C = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n\ /\ n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Exercice 6 ( ) Soit $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'entiers naturels. Montrer que $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *stationnaire*, i.e. que k_n finit par prendre toujours la même valeur à partir d'un certain rang.

Exercice 7 ( ) Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$.

1. Si $A \subset B$, montrer que $\sup A \leqslant \sup B$.
2. Montrer que $A \cup B$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, puis que :
$$\sup A \cup B = \max\{\sup A, \sup B\}.$$
3. Montrer que $A + B = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists (a, b) \in A \times B \mid x = a + b\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, puis que $\sup A + B = \sup A + \sup B$.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^\star$. Montrer que $\lambda A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A \mid x = \lambda a\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, puis que $\sup \lambda A = \lambda \sup A$.

Exercice 8 Soit X et Y deux ensembles non vides et $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ majorée. Montrer

$$\sup_{(x,y)\in X\times Y} f(x,y) = \sup_{x\in X} \sup_{y\in Y} f(x,y).$$

Exercice 9 Soient a et b deux réels. Montrer que :
a) $a \leqslant b \Rightarrow \lfloor a \rfloor \leqslant \lfloor b \rfloor$.
b) $\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leqslant \lfloor a+b \rfloor \leqslant \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 1$.

Exercice 10 On veut calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$.

1. Montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=i^2}^{(i+1)^2-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor \right) + n$.
2. Conclure.

Exercice 11

1. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}.$$
2. En déduire que si $p, q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor k.\frac{p}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$.