V Notion d'application

7 mars 2016

1 Vocabulaire

• En toute rigueur, une *application* est un objet différent d'une *fonction*, mais la différence est hors programme. On emploiera donc les deux termes indifféremment.
• Une application d'un ensemble E dans un ensemble F est une relation qui, à tout élement de E associe un unique élément de F. Attention : on a forcément unicité de l'image et les ensembles de départ et d'arrivée sont une donnée de l'application.

Exemple 1.0.1.
Les applications qui à x associe x^2, partant respectivement de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}_+$, sont différentes : la seconde permet de définir la fonction $\sqrt{\cdot}$, pas la première. Dans les deux cas, on pourra considérer comme ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$. Une formule ne définit donc pas à elle seule une application.

Définition 1.0.2.
On appelle *fonction* (ou *application*) tout triplet $f = (E, F, \Gamma)$ où E est un ensemble appelé *ensemble de départ* ou *domaine de définition*, F est un ensemble appelé *ensemble d'arrivée*, et Γ est une partie de $E \times F$ appelée *graphe de f* telle que $\forall x \in E$, $\exists! y \in F$, $(x, y) \in \Gamma$. Si $(x, y) \in \Gamma$, on note plus simplement $y = f(x)$. On dit que x est alors **un** antécédent de y, et y **l'**image de x.

Remarque 1.0.3.
Il peut y avoir plusieurs antécédents d'un élément dans l'espace d'arrivée, mais une seule image d'un élément de l'espace de départ : cela se voit sur le graphe, que l'on représente comme suit.

• On note une application f allant d'un ensemble E dans un ensemble F de la manière suivante : $f : E \to F$.
• Si l'application est de plus définie par une formule, on écrit alors :

$$f : \begin{array}{rcl} E & \to & F, \\ x & \mapsto & \text{Formule dépendant de } x. \end{array}$$

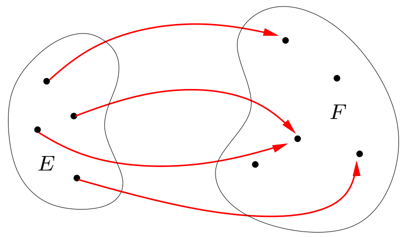

FIGURE 1 – Exemple d'application – on remarque qu'une image a deux antécédents.

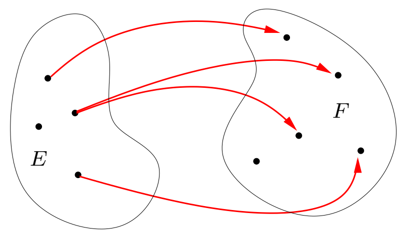

FIGURE 2 – Cette relation n'est pas une application.

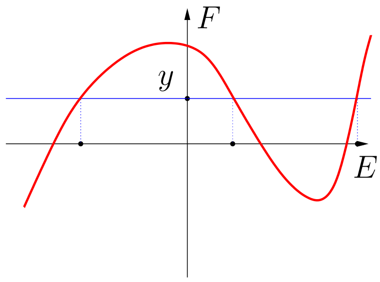

FIGURE 3 – y a ici trois antécédents représentés.

Remarque 1.0.4.
La notation

$$f : \begin{array}{rcl} E & \to & F, \\ x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

n'est pas informative.

Définition 1.0.5.
Soit E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On appelle *image* de f le sous-ensemble de F, noté $f(E)$ ou $\mathrm{Im}(f)$, égal à $\{f(x),\ x \in E\}$.

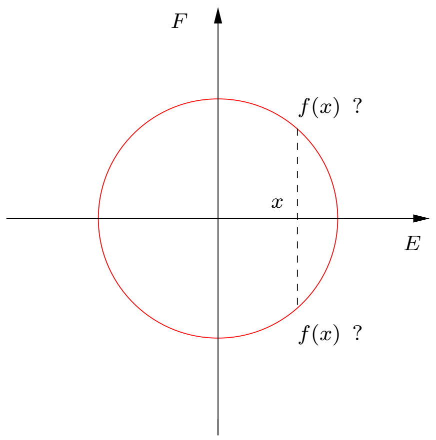

FIGURE 4 – Cette courbe ne représente pas une application.

Remarque 1.0.6.
La notation $f(E)$ indique bien l'ensemble de départ, contrairement à la notation $\operatorname{Im} f$. Cet ensemble peut aussi s'écrire $\{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x)\}$.

Remarque 1.0.7.
Les ensembles de départ et d'arrivée peuvent être n'importe quoi, pas forcément de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

• On note $\mathscr{F}(E, F)$, ou F^E, l'ensemble des applications de E dans F. Comment s'en souvenir ? Penser que $\operatorname{Card} F^E = \operatorname{Card} F^{\operatorname{Card} E}$.

Exemple 1.0.8.
L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. $\{1\}^{\mathbb{N}}$: une seule suite possible.

Définition 1.0.9 (Familles)**.**
Soit I un ensemble. On appelle *famille* d'éléments de E indexée par I toute application de I dans E. Les familles sont notées $(x_i)_{i \in I}$, et rarement, voire jamais, comme des applications.
L'ensemble des familles de E indexées par I est noté E^I.

Exemple 1.0.10.
$\mathbb{R}^{\{1,2\}}$: on peut l'identifier à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, que l'on note opportunément $\mathbb{R}^2$.

Définition 1.0.11.
Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle *fonction indicatrice de A* la fonction notée $\mathbb{1}_A$ telle que pour tout $x \in A$, $\mathbb{1}_A(x) = 1$, et pour tout $x \in E \backslash A$, $\mathbb{1}_A(x) = 0$.

Exercice 1.0.12.
Soit A et B deux ensembles. Calculer $\mathbb{1}_{A \cap B}$ et $\mathbb{1}_{A \cup B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et de $\mathbb{1}_B$.

2 Restriction, prolongement

Définition 2.0.1.
Soit E, E', F, F' quatre ensembles, $f : E \to F$ et $f' : E' \to F'$ deux applications.

(i) Pour toute partie G de E, la restriction de f à G est l'application

$$f_{|G} : \begin{array}{rcl} G & \to & F, \\ x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

(ii) On dit que f' est un prolongement de f si $E \subset E'$, $F \subset F'$ et $\forall x \in E,\ f(x) = f'(x)$.

Il y a toujours une infinité de prolongements possibles à une application.
• Une fonction est toujours le prolongement d'une de ses restrictions.

Exemple 2.0.2.
Tout réel strictement positif a deux antécédents par la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$; mais il n'a qu'un antécédent par la restriction de f à $\mathbb{R}_+$.

3 Composition d'applications

Définition 3.0.1.
Soit E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On définit alors la *composée* de f par g comme l'application

$$g \circ f : \begin{array}{rcl} E & \to & G, \\ x & \mapsto & g(f(x)). \end{array}$$

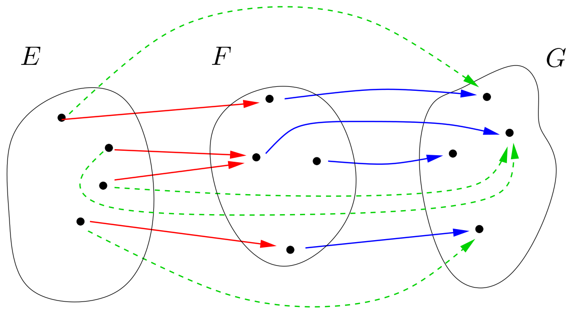

FIGURE 5 – Exemple de composée.

On ne peut pas toujours composer deux applications. Par exemple : les fonctions $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$ et $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.
• Ce n'est pas une opération commutative. Par exemple : $\exists x \in \mathbb{R}_+,\ \ln(x^2) \neq (\ln x)^2$.

Définition 3.0.2.
Soit E un ensemble, on définit dessus l'application *identité sur* E comme $\mathrm{Id}_E : E \to E,\ x \mapsto x$.

Proposition 3.0.3.
Soit E un ensemble, alors $(E^E, \circ)$ est un monoïde de neutre Id_E.

Démonstration.
Soit $x \in E$, f, g et h trois applications de E dans E. On a alors $h(g(f(x)) = h((g \circ f)(x)) = h \circ (g \circ f)(x)$ et $h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g) \circ f(x)$, d'où l'associativité.

On a aussi pour tout $x \in E$, $(\mathrm{Id}_E \circ f)(x) = \mathrm{Id}_E(f(x)) = f(x)$ et $(f \circ \mathrm{Id}_E)(x) = f(\mathrm{Id}_E(x)) = f(x)$, ce qui montre que $f \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ f = f$. □

Remarque 3.0.4.
Nous avons vu dans le premier chapitre (et nous reverrons en TD) que certaines fonctions (dans ce cas, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$) ne sont pas inversibles (au sens de la structure $(E^E, \circ)$).

4 Injectivité, surjectivité, bijectivité

On comprend vite, en considérant quelques exemples, quels sont les propriétés qui peuvent empêcher une fonction $f : E \to E$ d'être inversible pour $\circ$.

— Si deux éléments de E ont même image par f, on ne pourra pas « revenir en arrière » et construire g vérifiant $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.
— Si un élément de E n'a pas d'antécédent par f, on ne pourra pas construire g vérifiant $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.

4.1 Injectivité

Définition 4.1.1.
Soit E, F deux ensembles, $f : E \to F$ une application. On dit que f est *injective* (ou est une *injection*) si $\forall (x, y) \in E^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Remarque 4.1.2.
On utilise également la contraposée de cette proposition : $\forall (x, y) \in E^2,\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

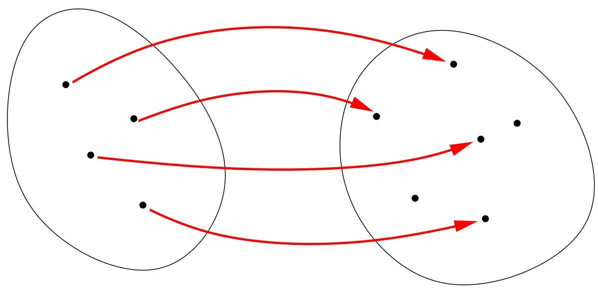

FIGURE 6 – Exemple d'application injective.

Remarque 4.1.3.
La donnée de l'ensemble de départ est primordiale. Exemple : l'application $[-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$ est injective alors que $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$ ne l'est pas (*le montrer et tracer les courbes représentatives de ces deux applications*). On peut aussi se demander ce qu'il adviendrait de la figure

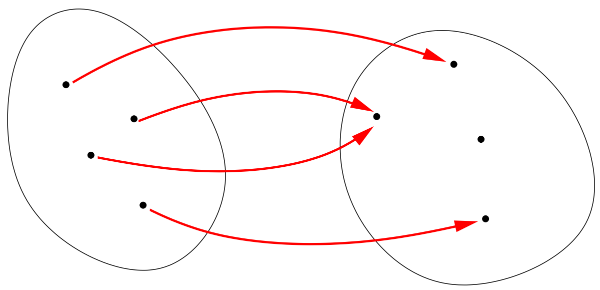

FIGURE 7 – Exemple d'application non injective : une image a deux antécédents ou plus.

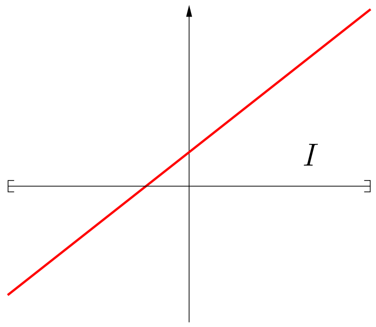

FIGURE 8 – Graphe d'application injective sur un segment I.

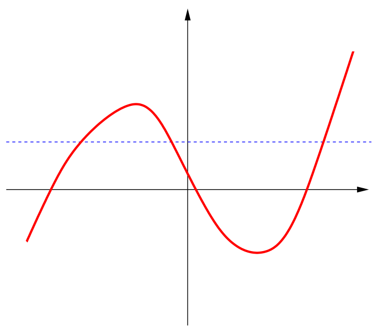

FIGURE 9 – Graphe d'application non injective : une image a deux antécédents ou plus.

8 si l'on ne précise pas que l'espace de départ est le segment I ici représenté.

Remarque 4.1.4.
Une application $f : E \to F$ est injective si et seulement si, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet au plus une solution dans E.

Remarque 4.1.5.
Une restriction d'une fonction injective est toujours injective.

Exercice 4.1.6.
Montrer qu'une fonction réelle strictement croissante est injective.

Théorème 4.1.7 (Composée d'injections.)**.**
Soit E, F et G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications injectives. Alors $g \circ f$ est injective.

Démonstration.
Soit $(x, y)) \in E^2$, supposons que $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. Alors, par injectivité de g puis de f, $f(x) = f(y)$ puis $x = y$. □

4.2 Surjectivité

Définition 4.2.1.
Soit E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application. On dit que f est *surjective* (ou est/réalise une *surjection*) si $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.

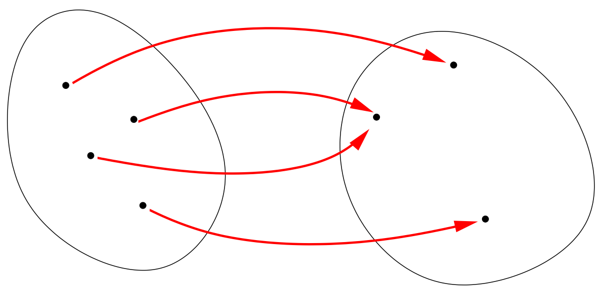

FIGURE 10 – Exemple d'application surjective.

• La donnée de l'espace de départ *et* de l'espace d'arrivée est, là encore, primordiale.

Exemple 4.2.2.
La fonction définie par $x \mapsto \sin x$ est surjective de $[0, 2\pi]$ sur $[-1, 1]$, mais pas de $[0, 2\pi]$ sur $\mathbb{R}$ ni

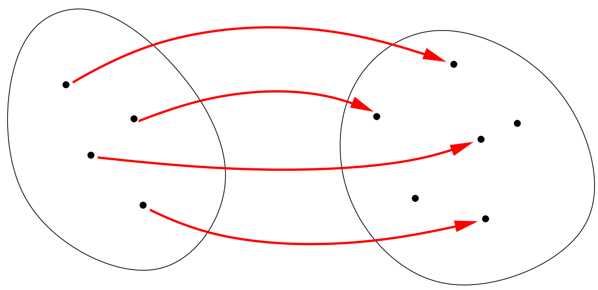

FIGURE 11 – Exemple d'application non surjective.

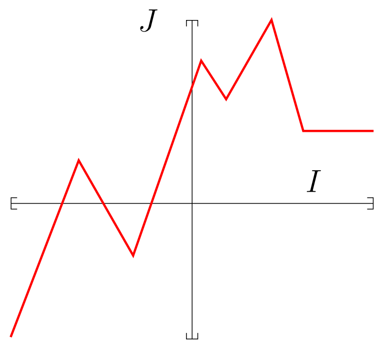

FIGURE 12 – Graphe d'une application surjective d'un segment I dans un segment J.

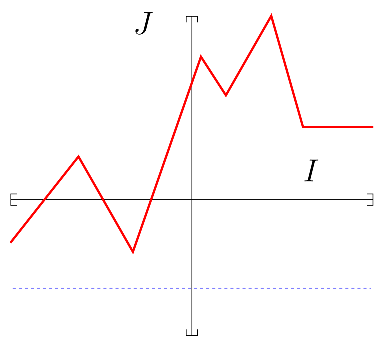

FIGURE 13 – Graphe d'une application non surjective d'un segment I dans un segment J.

de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Revenir aussi sur les figures 12 et 13.

Exercice 4.2.3.
Dans chaque cas, dire si cette application est surjective ou non : $(\mathbb{R}^* \text{ ou } \mathbb{R}_+^*) \to (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{R}^*)$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Remarque 4.2.4.
Une fonction est toujours surjective sur son image (formellement : la *corestriction* d'une application à son image est toujours surjective).

⚠ Une fonction non surjective n'est pas nécessairement injective, et vice-versa.

Remarque 4.2.5.
Une application $f : E \to F$ est surjective si et seulement si, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution dans E.

Exercice 4.2.6.
Montrer la surjectivité de $z \mapsto \dfrac{z+i}{z-i}$, définie sur $\mathbb{C} \backslash \{i\}$.

Théorème 4.2.7 (Composée de surjections.)**.**
Soit E, F et G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications surjectives. Alors $g \circ f$ est surjective.

Démonstration.
Soit $z \in G$, g est surjective : il existe $y \in F$ vérifiant $z = g(y)$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ vérifiant $y = f(x)$ et on a donc $z = g \circ f(x)$. □

4.3 Bijectivité

Définition 4.3.1.
Une application *bijective* (ou qui réalise une *bijection*) est une application injective et surjective.

Soit E et F deux ensembles. Une application $f : E \to F$ est donc bijective si et seulement si $\forall y \in F, \ \exists! \ x \in E, \ y = f(x)$.

Exemple 4.3.2.
Application identité, fonctions affines de la forme $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$, avec $a \neq 0$, les similitudes ...

Théorème 4.3.3 (Fonction réciproque)**.**
Soit $f : E \to F$ une application.

(i) f est bijective si et seulement s'il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
(ii) Dans ce cas, g est unique et notée f^{-1}, appelée *fonction réciproque de* f, et on a, pour tout $(x, y) \in E \times F$, $f(x) = y$ ssi $x = f^{-1}(y)$.
(iii) f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Démonstration. (i) Si f bijective, on construit g. Soit $y \in F$. On note $g(y)$ l'unique antécédent de y par f : donc g est une fonction bien définie (tout point a une et une seule image). On vérifie bien que $f \circ g = \mathrm{I}_F$ et que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.
Si g existe, on montre que f est injective et que f est surjective.
(ii) Unicité : on utilise l'injectivité de f.
Équivalence : facile par double implication.
(iii) On utilise le point (i) pour la bijectivité et le point (ii) pour l'unicité.
□

Ne JAMAIS parler de f^{-1} avant d'avoir montré qu'elle existe.

Ne pas confondre f^{-1} et $1/f$: ex : $f = 1$ ($1/f$ existe, pas f^{-1}), $f(x) = x$ (c'est l'inverse).
• Le graphe de la réciproque d'une fonction est le symétrique par rapport à la première bissectrice du plan du graphe de cette fonction. En effet, si on note Γ le graphe de f et Γ' celui de sa réciproque, on a par définition, pour tous x et y, $(x, y) \in \Gamma$ si et seulement si $(y, x) \in \Gamma'$.

Exemple 4.3.4.
$x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x$, tan et arctan (sur leurs espaces de départ et d'arrivée usuels).

Remarque 4.3.5.
Une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement si, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet exactement une solution dans E.

• En pratique, pour montrer que f est bijective, on peut au choix :

1. montrer que f est injective et surjective ;
2. montrer que f a une réciproque en raisonnant par équivalence : $y = f(x)$ ssi $x = f^{-1}(y)$, où f^{-1} est alors à donner (on résout donc $y = f(x)$) ;
3. donner f^{-1} et vérifier que $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$ **et** $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$.

Exemple 4.3.6.
Reprendre l'exercice 4.2.6 et déterminer l'inverse de cette application.

Remarque 4.3.7.
Une injection réalise toujours une bijection sur son image.

Remarque 4.3.8.
Si E est un ensemble et $f : E \to E$ une application bijective, alors f est un élément inversible dans le monoïde $(E^E, \circ)$, d'inverse (au sens algébrique) sa réciproque : f^{-1}.

Théorème 4.3.9 (Composée de bijections.)**.**
Soit E, F et G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux bijections. Alors $g \circ f$ est une bijection et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration.
Utilise les résultats analogues sur injectivité et surjectivité.
Ou encore : on donne l'inverse (formule à connaître !) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$, et surtout ne pas inverser les membres ! □

4.4 Un peu de vocabulaire anglais ...

• Application : *mapping* ou *map* .
• Injection : *injection* ou *one-to-one mapping* .
• Surjection : *surjection* ou *onto mapping* .
• « non injection » : *many-to-one mapping* .
• Bijection : *bijection* ou *one-to-one correspondance* .

5 Image directe, image reciproque

5.1 Image directe

Définition 5.1.1.
Soit E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application et A une partie de E. On appelle image directe de A par f l'ensemble $f(A = \{f(x),\ x \in A\}$.

Remarque 5.1.2.
On a encore $f(A) = \{y \in F |\ \exists\ x \in A, y = f(x)\}$.

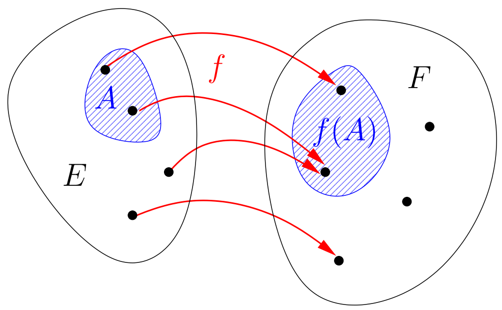

FIGURE 14 – Image directe d'une partie A par une application f.

• Cela se lit aisément sur un graphe.

Exercice 5.1.3.
Soit E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application, A et B deux parties de E. Comparer $f(A \cup B)$ et $f(A) \cup f(B)$, puis $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$.

5.2 Image réciproque

Définition 5.2.1.
Soit E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application et B une partie de F. On appelle image réciproque de B par f la partie de E $\{x \in E |\ f(x) \in B\}$, que l'on note $f^{-1}(B)$.

• On lit aussi l'image réciproque d'une partie sur le graphe d'une fonction..

Ne pas confondre avec la réciproque d'une fonction, qui n'existe pas si f non bijective.

• Notamment, les notations $f^{-1}(\{x\})$ et $f^{-1}(x)$ ne font formellement pas référence au même type d'objet.

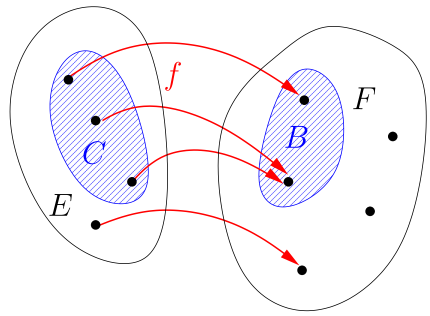

FIGURE 15 – Image réciproque $C = f^{-1}(B)$ d'une partie B par une application f.

Théorème 5.2.2.
Soit E et F deux ensembles. Si $f : E \to F$ est une application bijective et si $B \subset F$, alors on a $f^{-1}(B) = f^{-1}(B)$ pour les deux significations : image réciproque par f et image directe par f^{-1}.

Démonstration.
Soit $x \in E$, alors

$$\begin{aligned}
x \in \underset{\text{image directe par } f^{-1}}{f^{-1}(B)} &\Leftrightarrow \exists y \in B,\ x = f^{-1}(y) \\
&\Leftrightarrow \exists y \in B,\ f(x) = y \\
&\Leftrightarrow f(x) \in B \\
&\Leftrightarrow x \in \underset{\text{image réciproque par } f}{f^{-1}(B)}
\end{aligned}$$

□

Exercice 5.2.3.
Soit E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application, A et B deux parties de F. Comparer $f^{-1}(A \cup B)$ et $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, puis $f^{-1}(A \cap B)$ et $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.