Devoir à la maison n° 03

À rendre le 01 octobre

I. Méthode des moindres carrés.

On s'intéresse à un phénomène physique dans lequel on mesure des couples de réels, dont les deux membres sont reliés théoriquement par une relation affine et on désire trouver les coefficients de cette relation affine (pente et valeur à l'origine). Étant donné n un entier supérieur ou égal à trois et des résultats expérimentaux (x_1, y_1), $\dots$, (x_n, y_n), il est facile de trouver a et b vérifiant $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $y_i = ax_i + b$ si les points de coordonnées $(x_i, y_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont alignés. Malheureusement, c'est rarement le cas en pratique. On va donc se donner un critère objectif pour savoir quelle droite passe «au plus près» des points de coordonnées $(x_i, y_i)_{i \in 1,n}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier au moins égal à 2. On se donne une famille de n réels $x_1, \dots, x_n$ (non tous égaux) et une famille de n réels $y_1, \dots, y_n$. On note $\bar{x}$ la moyenne de $x_1, \dots, x_n$ et $\bar{y}$ celle de $y_1, \dots, y_n$.
Soit a et b des réels fixés. On appelle k-ième résidu, pour $k \in [\![1, n]\!]$ l'écart entre y_k et l'ordonnée au point d'abscisse x_k de la droite d'équation $y = ax + b$: On appelle $E(a, b)$ la somme des carrés des résidus :

$$E(a, b) = \sum_{k=1}^{n} (y_k - (ax_k + b))^2$$

Le but du problème est de trouver a et b minimisant $E(a, b)$.

1) Question préliminaire : soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = at^2 + bt + c$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a > 0$. Montrer que φ admet un minimum en un point t_m, et exprimer t_m en fonction de a et b.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ une famille de n réels de somme nulle. Soit $\mu \in \mathbb{R}$. Montrer qu'on a

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + \mu)^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$$

(on a clairement l'égalité dans le cas $\mu = 0$).

3) En déduire que pour tout a et tout b, on a $E(a, b) \geqslant E(a, \bar{y} - a\bar{x})$

4) On note

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & E(t, \bar{y} - t\bar{x}) \end{array}$$

Montrer que f admet un minimum en une valeur qu'on précisera.

5) Conclure : étant données une famille de réels non tous égaux $(x_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ et une famille de réels $(y_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$, quelles valeurs de a et b suffit-il de choisir pour minimiser la somme des carrés des résidus ? (cette méthode est appelée méthode des moindres carrés, elle est originellement dûe à Gauss dans le cadre d'un problème d'astronomie).

II. Un système de suites récurrentes linéaire.

Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles, vérifiant la relation de récurrence linéaire suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcll} x_{n+1} & = & -9x_n & -18y_n \\ y_{n+1} & = & 6x_n & +12y_n \end{array} \right.$$

avec $x_0 = -137$ et $y_0 = 18$. On se propose dans ce problème de trouver les termes généraux de ces deux suites.

1) Montrer qu'il existe une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que la relation de récurrence linéaire ci-dessus soit équivalente à la relation $U_{n+1} = AU_n$, où $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

2) Trouver par récurrence une expression de U_n en fonction de A et de U_0.

3) On pose $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Cette matrice est-elle inversible ? Si oui donner son inverse.

4) Que vaut $P^{-1}AP$? Dans la suite, on notera $D = P^{-1}AP$.

5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

6) Exprimer D^n en fonction de n.

7) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

8) Donner les termes généraux x_n et y_n.

— **FIN** —