Devoir à la maison n° 01

À rendre le 09 septembre

Dans tout le problème, $(\mathscr{C})$ désigne la courbe d'équation $y = \ln x$ représentant la fonction logarithme népérien dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine O et d'unité graphique 4 cm.

Question préliminaire : Tracer avec soin mais sans étude de la fonction, la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x$.

Partie A

1) **a)** Déterminer une équation de la tangente (Δ) à $(\mathscr{C})$ au point I, point de l'axe (Ox) d'abscisse 1.

b) Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = x - 1 - \ln x.$$

c) En déduire la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à Δ.

2) **a)** Déduire de la question précédente la valeur minimale prise par $x - \ln x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

b) Soit $x \in]0, +\infty[$ et M et N les points de même abscisse x des courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$ respectivement.

Déterminer la plus petite valeur (exprimée en cm) prise par la distance MN lorsque x décrit l'intervalle $]0, +\infty[$.

Partie B

1) Soit $x \in]0, +\infty[$ et M le point d'abscisse x de la courbe $(\mathscr{C})$. Exprimer la distance OM de l'origine à M en fonction de x.

2) *Étude de la fonction auxiliaire u définie sur $]0, +\infty[$ par $u(x) = x^2 + \ln x$:*

a) Justifier les limites de u en 0 et en $+\infty$ ainsi que le sens de variations de u.

b) Montrer qu'il existe un réel α et un seul tel que $u(\alpha) = 0$.

Montrer que α est compris entre 0,5 et 1 puis donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

c) Déterminer le signe de $u(x)$ lorsque x parcourt $]0, +\infty[$.

3) *Étude de la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 + (\ln x)^2$:*

Calculer g' et vérifier que $g'(x) = \dfrac{2}{x}u(x)$.

En déduire le tableau de variations de g.

4) Déduire des questions précédentes la valeur exacte de la plus courte distance de l'origine aux points de la courbe $(\mathscr{C})$ et en donner une valeur approchée (exprimée en cm) en utilisant pour α la valeur centrale de l'encadrement trouvé à la question 2b.

5) A étant le point d'abscisse α de $(\mathscr{C})$, démontrer que la tangente à $(\mathscr{C})$ en A est perpendiculaire à la droite (OA).

Partie C - Étude d'une suite

1) Montrer que le réel α défini dans la partie **B** est solution de l'équation $h(x) = x$, où h est la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$h(x) = x - \frac{1}{4}\left(x^2 + \ln x\right).$$

2) **a)** Calculer h' et étudier son signe sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

b) Prouver que $h\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

c) Calculer h'' et étudier son signe sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

d) En déduire que, pour tout x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, on a

$$0 \leqslant h'(x) \leqslant 0,3.$$

3) On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = h\left(u_n\right).$$

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$, et que la suite (u_n) est décroissante.

b) Soit $a, b \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ tels que $a < b$. Grâce à une intégration, montrer que $h(b) - h(a) \leqslant 0.3(b-a)$.

c) Soit $a, b \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Montrer que $|h(b) - h(a)| \leqslant 0,3|b-a|$.

d) Montrer que l'on a pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0,3|u_n - \alpha|$ puis que $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}(0,3)^n$.

e) En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

f) Déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-5} près et indiquer la valeur de u_{n_0} donnée par la calculatrice (avec 5 décimales).

— FIN —