

VIII Notion d'application

9 septembre 2023

1 Vocabulaire.

- En toute rigueur, une *application* est un objet différent d'une *fonction*, mais la différence est hors programme. On emploiera donc les deux termes indifféremment.
- Une application d'un ensemble E dans un ensemble F est une relation qui, à tout élément de E associe un unique élément de F . Attention : on a forcément unicité de l'image et les ensembles de départ et d'arrivée sont une donnée de l'application.

Exemple 1.0.1.

Les applications qui à x associe x^2 , partant respectivement de \mathbb{R} et de \mathbb{R}_+ , sont différentes : la seconde permet de définir la fonction $\sqrt{\cdot}$, pas la première. Dans les deux cas, on pourra considérer comme ensemble d'arrivée \mathbb{R} ou \mathbb{R}_+ . Une formule ne définit donc pas à elle seule une application.

Définition 1.0.2.

On appelle *fonction* (ou *application*) tout triplet $f = (E, F, \Gamma)$ où E est un ensemble appelé *ensemble de départ* ou *domaine de définition*, F est un ensemble appelé *ensemble d'arrivée*, et Γ est une partie de $E \times F$ appelée *graphe de f* telle que $\forall x \in E, \exists ! y \in F, (x, y) \in \Gamma$. Si $(x, y) \in \Gamma$, on note plus simplement $y = f(x)$. On dit que x est alors un antécédent de y , et y l'image de x .

Remarque 1.0.3.

Il peut y avoir plusieurs antécédents d'un élément dans l'espace d'arrivée, mais une seule image d'un élément de l'espace de départ : cela se voit sur le graphe, que l'on représente comme suit.

- On note une application f allant d'un ensemble E dans un ensemble F de la manière suivante : $f : E \rightarrow F$.
- Si l'application est de plus définie par une formule, on écrit alors :

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow F, \\ x &\mapsto \text{Formule dépendant de } x. \end{aligned}$$

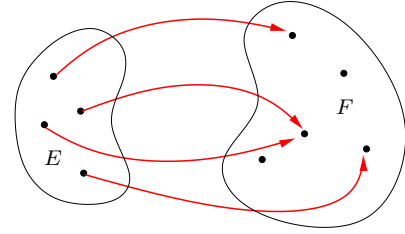


FIGURE 1 – Exemple d'application – on remarque qu'une image a deux antécédents.

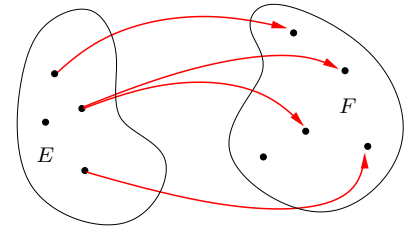


FIGURE 2 – Cette relation n'est pas une application.

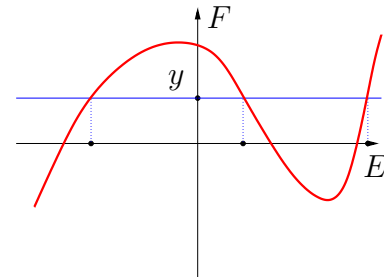


FIGURE 3 – y a ici trois antécédents représentés.

Remarque 1.0.4.

La notation

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow F, \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

n'est pas informative.

Remarque 1.0.5.

Si $f, g : E \rightarrow F$, alors $f = g$ équivaut à $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.

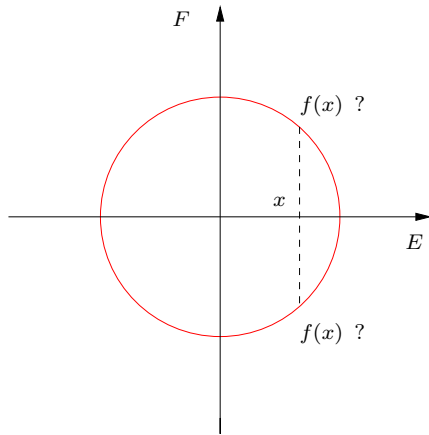


FIGURE 4 – Cette courbe ne représente pas une application.

Définition 1.0.6.

Soit E, F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application. On appelle *image* de f le sous-ensemble de F , noté $f(E)$ ou $\text{Im}(f)$, égal à $\{f(x), x \in E\}$.

Remarque 1.0.7.

La notation $f(E)$ indique bien l'ensemble de départ, contrairement à la notation $\text{Im } f$. Cet ensemble peut aussi s'écrire $\{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}$.

Remarque 1.0.8.

Les ensembles de départ et d'arrivée peuvent être n'importe quoi, pas forcément de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Notation 1.0.9.

On note $\mathcal{F}(E, F)$, ou F^E , l'ensemble des applications de E dans F .

Remarque 1.0.10.

Comment se souvenir de cette dernière notation ? Penser que pour des ensembles finis, $\text{Card}(F^E) = \text{Card}(F)^{\text{Card}(E)}$.

En effet, il y a autant de manières de choisir une fonction $f : E \rightarrow F$ que de manières de choisir une image pour chaque élément de E . Or, il y a $\text{Card}(F)$ choix pour chaque élément de

F et $\text{Card}(E)$ éléments de E . Il y a donc bien $\text{Card}(F)^{\text{Card}(E)}$ manières de choisir une application $f : E \rightarrow F$.

Exemple 1.0.11.

L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Dans $\{1\}^{\mathbb{N}}$, il y a une seule suite !

Définition 1.0.12 (Familles).

Soit I un ensemble. On appelle *famille* d'éléments de E indexée par I toute application de I dans E . Les familles sont notées $(x_i)_{i \in I}$, et rarement, voire jamais, comme des applications.

L'ensemble des familles de E indexées par I est noté E^I .

Exemple 1.0.13.

$\mathbb{R}^{\{1,2\}}$: on peut l'identifier à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, que l'on note opportunément \mathbb{R}^2 .

Définition 1.0.14.

Soit E un ensemble et A une partie de E . On appelle *fonction indicatrice* de A la fonction notée $\mathbb{1}_A$ telle que pour tout $x \in A$, $\mathbb{1}_A(x) = 1$, et pour tout $x \in E \setminus A$, $\mathbb{1}_A(x) = 0$.

Exercice 1.0.15.

Soit A et B deux ensembles. Calculer $\mathbb{1}_{A \cap B}$, $\mathbb{1}_{\bar{A}}$ et $\mathbb{1}_{A \cup B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et de $\mathbb{1}_B$.

2 Restriction, prolongement

Définition 2.0.1.

Soit E, E', F, F' quatre ensembles, $f : E \rightarrow F$ et $f' : E' \rightarrow F'$ deux applications.

- (i) Pour toute partie G de E , la restriction de f à G est l'application

$$\begin{aligned} f|_G : G &\rightarrow F, \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

- (ii) On dit que f' est un prolongement de f si $E \subset E'$, $F \subset F'$ et $\forall x \in E$, $f(x) = f'(x)$.



Il y a toujours une infinité de prolongements possibles à une application.

- Une fonction est toujours le prolongement d'une de ses restrictions.

Exemple 2.0.2.

Tout réel strictement positif a deux antécédents par la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$; mais il n'a qu'un antécédent par la restriction de f à \mathbb{R}_+ .

3 Composition d'applications

Définition 3.0.1.

Soit E, F, G trois ensembles, $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. On définit alors la composée de f par g comme l'application

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\rightarrow G, \\ x &\mapsto g(f(x)). \end{aligned}$$

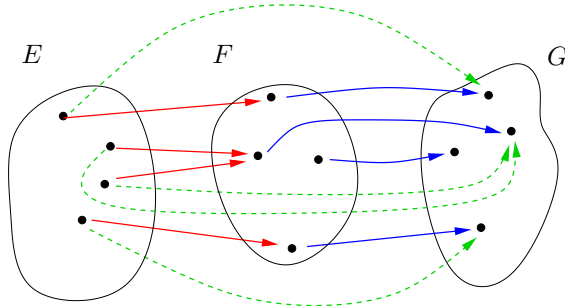


FIGURE 5 – Exemple de composée.



On ne peut pas toujours composer deux applications. Par exemple : les fonctions $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$ et $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.

- Ce n'est pas une opération commutative. Par exemple : $\exists x \in \mathbb{R}_+, \ln(x^2) \neq (\ln x)^2$.

Définition 3.0.2.

Soit E un ensemble, on définit dessus l'application identité sur E comme $\text{Id}_E : E \rightarrow E, x \mapsto x$.

Proposition 3.0.3.

Soit E un ensemble, alors (E^E, \circ) est un monoïde de neutre Id_E .

Démonstration.

Soit $x \in E$, f, g et h trois applications de E dans E . On a alors $h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = h \circ (g \circ f)(x)$ et $h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g) \circ f(x)$, d'où l'associativité.

On a aussi pour tout $x \in E$, $(\text{Id}_E \circ f)(x) = \text{Id}_E(f(x)) = f(x)$ et $(f \circ \text{Id}_E)(x) = f(\text{Id}_E(x)) = f(x)$, ce qui montre que $f \circ \text{Id}_E = \text{Id}_E \circ f = f$. \square

Remarque 3.0.4.

Nous avons vu (et nous reverrons en TD) que certaines fonctions (dans ce cas, $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$) ne sont pas inversibles (au sens de la structure (E^E, \circ)).

4 Injectivité, surjectivité, bijectivité

On comprend vite, en considérant quelques exemples, quelles sont les propriétés qui peuvent empêcher une fonction $f : E \rightarrow E$ d'être inversible pour \circ .

- Si deux éléments de E ont même image par f , on ne pourra pas « revenir en arrière » et construire g vérifiant $g \circ f = \text{Id}_E$.
- Si un élément de E n'a pas d'antécédent par f , on ne pourra pas construire g vérifiant $f \circ g = \text{Id}_E$.

4.1 Injectivité

Définition 4.1.1.

Soit E, F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que f est *injective* (ou est une *injection*) si $\forall (x, y) \in E^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Remarque 4.1.2.

On utilise également la contraposée de cette proposition : $\forall (x, y) \in E^2, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Remarque 4.1.3.

La donnée de l'ensemble de départ est primordiale. Exemple : l'application $[-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto$

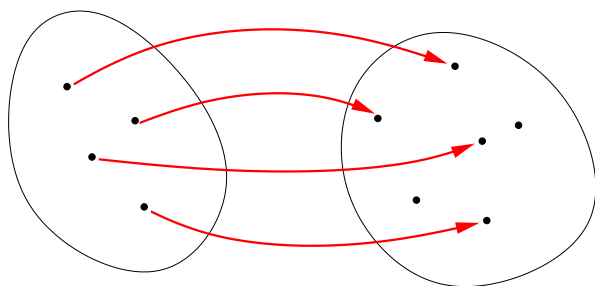


FIGURE 6 – Exemple d'application injective.

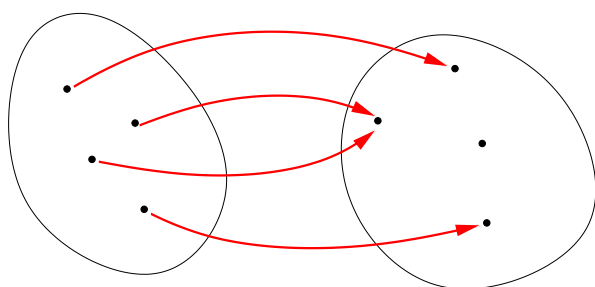
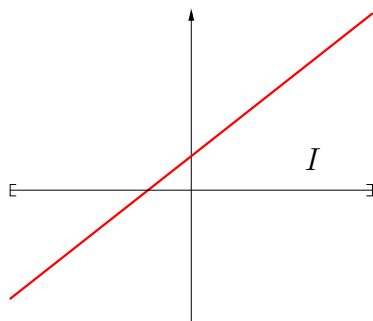


FIGURE 7 – Exemple d'application non injective : une image a deux antécédents ou plus.

FIGURE 8 – Graphe d'application injective sur un segment I .

$\sin(x)$ est injective alors que $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$ ne l'est pas (*le montrer et tracer les courbes représentatives de ces deux applications*). On peut aussi se demander ce qu'il adviendrait de la figure 8 si l'on ne précise pas que l'espace de départ est le segment I ici représenté.

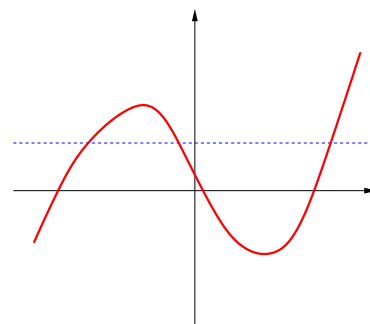


FIGURE 9 – Graphe d'application non injective : une image a deux antécédents ou plus.

Remarque 4.1.4.

Une application $f : E \rightarrow F$ est injective si et seulement si, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet au plus une solution dans E .

Remarque 4.1.5.

Une restriction d'une fonction injective est toujours injective.

Remarque 4.1.6.

On a montré dans le premier chapitre que toute fonction réelle strictement monotone est injective.

Théorème 4.1.7 (Composée d'injections.).

Soit E, F et G trois ensembles, $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications injectives. Alors $g \circ f$ est injective.

Démonstration.

Soit $(x, y) \in E^2$, supposons que $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. Alors, par injectivité de g puis de f , $f(x) = f(y)$ puis $x = y$. \square

Exercice 4.1.8.

Soit E, F deux ensembles, soit $f : E \rightarrow F$. Montrer que f est injective si et seulement s'il existe $g : F \rightarrow E$ vérifiant $g \circ f = \text{Id}_E$.

4.2 Surjectivité

Définition 4.2.1.

Soit E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que f est *surjective* (ou est/réalise une *surjection*) si $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.

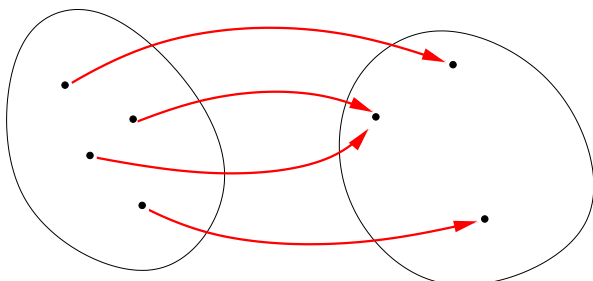


FIGURE 10 – Exemple d'application surjective.

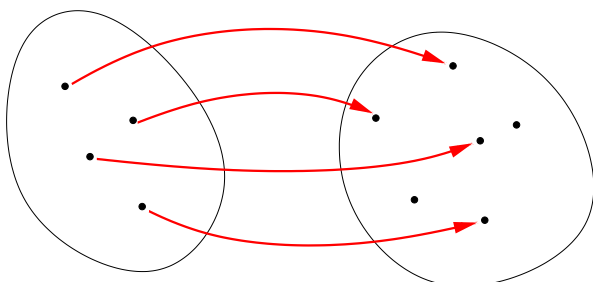
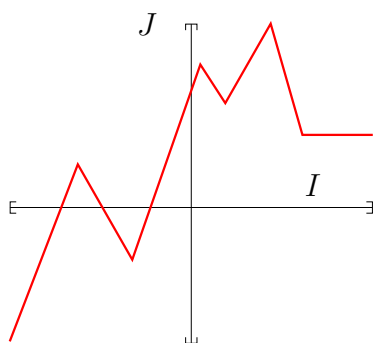
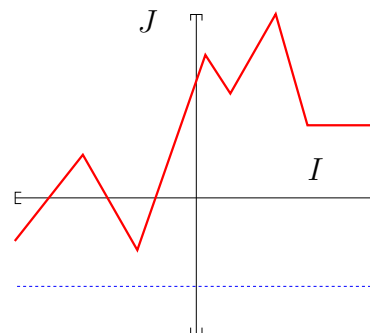


FIGURE 11 – Exemple d'application non surjective.

FIGURE 12 – Graphe d'une application surjective d'un segment I dans un segment J .FIGURE 13 – Graphe d'une application non surjective d'un segment I dans un segment J .

- La donnée de l'espace de départ *et* de l'espace d'arrivée est, là encore, primordiale.

Exemple 4.2.2.

La fonction définie par $x \mapsto \sin x$ est surjective de $[0, 2\pi]$ sur $[-1, 1]$, mais pas de $[0, 2\pi]$ sur \mathbb{R} ni de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Revenir aussi sur les figures 12 et 13.

Exercice 4.2.3.

Dans chaque cas, dire si cette application est surjective ou non : $(\mathbb{R}^* \text{ ou } \mathbb{R}_+^*) \rightarrow (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{R}^*)$, $x \mapsto \frac{1}{x}$

Remarque 4.2.4.

Une fonction est toujours surjective sur son image (formellement : la *corestriction* d'une application à son image est toujours surjective).



Une fonction non surjective n'est pas nécessairement injective, et vice-versa.

Remarque 4.2.5.

Une application $f : E \rightarrow F$ est surjective si et seulement si, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution dans E .

Exercice 4.2.6.

Étudier la surjectivité de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{i\} & \rightarrow & \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ z & \mapsto & \frac{z+i}{z-i} \end{array}$$

Théorème 4.2.7 (Composée de surjections.).

Soit E, F et G trois ensembles, $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications surjectives. Alors $g \circ f$ est surjective.

Démonstration.

Soit $z \in G$, g est surjective : il existe $y \in F$ vérifiant $z = g(y)$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ vérifiant $y = f(x)$ et on a donc $z = g \circ f(x)$. \square

Exercice 4.2.8.

Soit E, F deux ensembles, soit $f : E \rightarrow F$. Montrer que f est surjective si et seulement s'il existe $g : F \rightarrow E$ vérifiant $f \circ g = \text{Id}_F$.

4.3 Bijectivité**Définition 4.3.1.**

Une application *bijjective* (ou qui réalise une *bijection*) est une application injective et surjective.

Soit E et F deux ensembles. Une application $f : E \rightarrow F$ est donc bijective si et seulement si $\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$.

Exemple 4.3.2.

Application identité, fonctions affines de la forme $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$, avec $a \neq 0$, les similitudes ...

Théorème 4.3.3 (Fonction réciproque).

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

1. f est bijective si et seulement s'il existe $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$.
2. Dans ce cas, g est unique et notée f^{-1} , appelée *fonction réciproque de f* , et on a, pour tout $(x, y) \in E \times F$, $f(x) = y$ si et seulement si $x = f^{-1}(y)$.
3. f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Démonstration. 1. Si f bijective, on construit g . Soit $y \in F$. On note $g(y)$ l'unique antécédent de y par f : donc g est une fonction bien définie (tout point a une et une seule image). On vérifie bien que $f \circ g = \text{Id}_F$ et que $g \circ f = \text{Id}_E$.
Si g existe, on montre que f est injective et que f est surjective.

2. Unicité : on utilise l'injectivité de f .

Équivalence : facile par double implication.

3. On utilise le point (i) pour la bijectivité et le point (ii) pour l'unicité. \square



Ne JAMAIS parler de f^{-1} avant d'avoir montré qu'elle existe.



Dans le cas d'une fonction réelle, il ne faut pas confondre f^{-1} et $1/f$. Ex : $f = 1$ ($1/f$ existe, pas f^{-1}), $f : x \mapsto x$ (f^{-1} existe, pas $1/f$).

• Le graphe de la réciproque d'une fonction est le symétrique par rapport à la première bissectrice du plan du graphe de cette fonction. En effet, si on note Γ le graphe de f et Γ' celui de sa réciproque, on a par définition, pour tous x et y , $(x, y) \in \Gamma$ si et seulement si $(y, x) \in \Gamma'$.

Exemple 4.3.4.

$x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto e^x$, \tan et \arctan (sur leurs espaces de départ et d'arrivée usuels).

Remarque 4.3.5.

Une application $f : E \rightarrow F$ est bijective si et seulement si, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet exactement une solution dans E .

• En pratique, pour montrer que f est bijective, on peut au choix :

1. montrer que f est injective et surjective ;
2. montrer que f a une réciproque en raisonnant par équivalence : $y = f(x)$ ssi $x = f^{-1}(y)$, où f^{-1} est alors à donner (on résout donc $y = f(x)$) ;
3. donner f^{-1} et vérifier que $f \circ f^{-1} = \text{Id}$ et $f^{-1} \circ f = \text{Id}$.

Exemple 4.3.6.

Reprendre l'exercice 4.2.6 et déterminer l'inverse de cette application.

Remarque 4.3.7.

Une injection réalise toujours une bijection sur son image.

Remarque 4.3.8.

Si E est un ensemble et $f : E \rightarrow E$ une application

bijective, alors f est un élément inversible dans le monoïde (E^E, \circ) , d'inverse (au sens algébrique) sa réciproque : f^{-1} .

Théorème 4.3.9 (Composée de bijections.).

Soit E, F et G trois ensembles, $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux bijections. Alors $g \circ f$ est une bijection et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration.

Utilise les résultats analogues sur injectivité et surjectivité. Ou encore : on donne l'inverse (formule à connaître !) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$, et surtout ne pas inverser les membres ! \square

Exercice 4.3.10.

Trouver deux applications f et g toutes les deux non bijectives, telles que $g \circ f$ est bijective.

4.4 Un peu de vocabulaire anglais ...

- Application : *mapping* ou *map*.
- Injection : *injection* ou *one-to-one mapping*.
- Surjection : *surjection* ou *onto mapping*.
- « non injection » : *many-to-one mapping*.
- Bijection : *bijection* ou *one-to-one correspondence*.

5 Image directe, tiré en arrière.

5.1 Image directe

Définition 5.1.1.

Soit E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application et A une partie de E . On appelle *image directe* de A par f l'ensemble des images des éléments de A (voir figure 14), *i.e.* la partie de F :

$$\begin{aligned} f(A) &= \{ f(x) \mid x \in A \} \\ &= \{ y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x) \}. \end{aligned}$$

Remarque 5.1.2.

La seconde forme de $f(A)$ est la plus pratique à utiliser et est à retenir en priorité.

Remarque 5.1.3.

La notation $f(E)$ utilisée pour l'image de f est bien cohérente.

Remarque 5.1.4.

On a toujours $f(A) \subset \text{Im}(f)$.

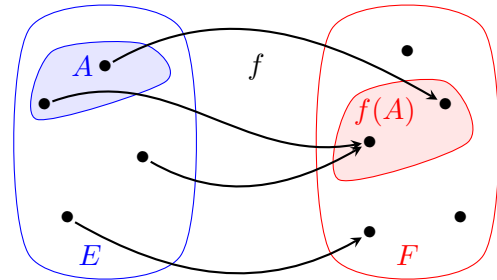


FIGURE 14 – Image directe d'une partie A par une application f .

- Cela se lit aisément sur un graphe.

Exercice 5.1.5.

Soit $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, déterminer $c([2, 4])$ et $c([-1, 3])$.

Exercice 5.1.6.

Soit E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application, A et B deux parties de E .

- Si $A \subset B$, est-ce que $f(A) \subset f(B)$?
- Comparer $f(A \cup B)$ et $f(A) \cup f(B)$, puis $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$.

Proposition 5.1.7.

Soit E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application. Alors f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

5.2 Tiré en arrière

Définition 5.2.1.

Soit E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application et B une partie de F . On appelle *tiré en arrière* de B par f l'ensemble des antécédents

des éléments de B (voir figure 15), *i.e.* la partie de E :

$$f^{\leftarrow}(B) = \{ x \in E \mid f(x) \in B \}.$$

Remarque 5.2.2.

Le vocabulaire officiel est plutôt « *image réciproque* de B par f » et la notation officielle est : $f^{-1}(B)$.

D'expérience, cette terminologie et cette notation sont une source de confusions désastreuses. Ne l'utilisez qu'une fois cette notion solidement acquise.

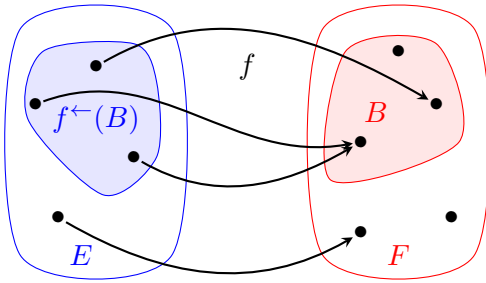


FIGURE 15 – Tiré en arrière d'une partie B par une application f .

- On lit aussi le tiré en arrière d'une partie sur le graphe d'une fonction.



Ne pas confondre avec la réciproque d'une fonction, qui n'existe pas si f n'est pas bijective.

- Notamment, les notations $f^{\leftarrow}(\{x\})$ et $f^{-1}(x)$ ne font formellement pas référence au même type d'objet.

Exercice 5.2.3.

Soit $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, déterminer $c^{\leftarrow}([1, 4])$ et $c^{\leftarrow}([-3, 1])$.

$$x \mapsto x^2$$

Théorème 5.2.4.

Soit E et F deux ensembles. Si $f : E \rightarrow F$ est

une application bijective et si $B \subset F$, alors on a $f^{\leftarrow}(B) = f^{-1}(B)$, où la deuxième écriture désigne l'image directe par f^{-1} .

Démonstration.

Soit $x \in E$, alors

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B) &\Leftrightarrow \exists y \in B, x = f^{-1}(y) \\ &\Leftrightarrow \exists y \in B, f(x) = y \\ &\Leftrightarrow f(x) \in B \\ &\Leftrightarrow x \in f^{\leftarrow}(B) \end{aligned}$$

□

Exercice 5.2.5.

Soit E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application, A et B deux parties de F .

- Si $A \subset B$, est-ce que $f^{\leftarrow}(A) \subset f^{\leftarrow}(B)$?
- Comparer $f^{\leftarrow}(A \cup B)$ et $f^{\leftarrow}(A) \cup f^{\leftarrow}(B)$, puis $f^{\leftarrow}(A \cap B)$ et $f^{\leftarrow}(A) \cap f^{\leftarrow}(B)$.

Proposition 5.2.6.

Soit E, F deux ensembles non vides, soit $f : E \rightarrow F$.

Alors, $\{ f^{\leftarrow}(\{y\}) \mid y \in F \}$ est un recouvrement disjoint de E , tandis que $\{ f^{\leftarrow}(\{y\}) \mid y \in \text{Im}(f) \}$ est une partition de E .

De même, si $(F_i)_{i \in I}$ est une partition de $\text{Im}(f)$, alors $\{ f^{\leftarrow}(F_i) \mid i \in I \}$ est une partition de E .