

Devoir surveillé n° 09 - Remarques

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 26 points, ramené sur 5 points.
- Problèmes : chaque question sur 4 points (pb. 1 sur 40 points, pb. 2 sur 96 points), ramené sur 15 points.

Statistiques descriptives.

	Calculs	Sujet 1	Sujet 2	Note finale
Note maximale	20	50	59	19,5
Note minimale	1	6	11	2
Moyenne	$\approx 10,71$	$\approx 26,94$	$\approx 30,04$	$\approx 10,24$
Écart-type	$\approx 5,76$	$\approx 13,66$	$\approx 11,72$	$\approx 3,79$

Remarques générales.

I - Étude d'un endomorphisme

1.c) Je lis trop souvent : « $\text{Im } f = \text{Vect}(f(1), f(X), f(X^2)) = \text{Vect}(f(1), f(X^2))$, qui est donc de dimension deux ». Mais pour cela il faut montrer que $(f(1), f(X^2))$ est libre.

3.a) « $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ » est truffé de fautes ! Déjà \mathcal{B} est une famille de vec-

teurs, pas une matrice. La première matrice de la citation précédente est en fait la matrice de la famille \mathcal{B} dans la base $(1, X, X^2)$, et elle ne se note sûrement pas \mathcal{B} mais $\text{Mat}_{\mathcal{C}} \mathcal{B}$. Ensuite, les deux dernières matrices ne sont évidemment pas égales : ce sont leurs rangs qui sont égaux !

Il fallait donc écrire $\text{rg } \mathcal{B} = \text{rg } \text{Mat}_{(1, X, X^2)} \mathcal{B} = \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ».

Attention également à l'ordre des vecteurs dans la base canonique : $(X^2, X, 1)$ est bien une

base de $\mathbb{R}_2[X]$, mais ce n'est pas la base canonique. Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ n'est pas le vecteur représentant $X^2 + X - 2$ dans la base canonique.

3.d) Attention : ce n'est plus le même polynôme Q que dans la question précédente.

II - Ecricome 2012

Partie I

- 2) Pour calculer $f(g(P))$, il suffisait de remarquer que la dérivée de $t \mapsto (t-1)P(t)$ était $t \mapsto g(P)(t)$. Le calcul se fait donc en une ligne.
 $f \circ g$ étant injective, g l'est aussi, il n'est pas nécessaire d'aller chercher plus compliqué!
- 2) et 3) Déjà, le cas $x = 1$ est beaucoup trop souvent oublié, ainsi que dans les questions suivantes. Ensuite, j'ai vu beaucoup d'affirmations abusives : « $f \circ g = \text{Id}$ donc g est bijective et $g^{-1} = f$ », par exemple, est faux car ici on sait juste que f est un inverse à gauche de g . Or l'unicité d'un inverse à gauche n'est pas connue, donc rien n'assure que $f = g^{-1}$. De plus, si on avait su que f était un endomorphisme, la citation précédente aurait été juste car g est un endomorphisme en dimension finie. Mais on ne le sait pas ! Et on va même utiliser que $f = g^{-1}$ pour le savoir ! Il fallait faire attention à l'enchaînement des résultats : $f \circ g = \text{Id}$, donc $f \circ g$ est injective, donc g l'est. Par conséquent, g est inversible. Alors $f = f \circ g \circ g^{-1} = \text{Id} \circ g^{-1} = g^{-1}$. Et pour finir, l'inverse d'une application linéaire est linéaire.
On ne pouvait non plus calculer $g \circ f$ avant de savoir que f était à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$, puisque l'ensemble de définition de g est justement $\mathbb{R}_n[X]$.
- 4) Attention aux décalages d'indices : la famille commençait à e_0 , mais les lignes et colonnes d'une matrice sont numérotées à partir de 1.

Partie II

- 5) et 6) Trois élèves seulement ont pensé que dans la formule $P(A \cap B) = P(A|B).P(B)$, il fallait avoir $P(B) \neq 0$. Il fallait vérifier cette condition dans les trois questions. D'ailleurs, la question 5.b) n'était là que pour vous faire penser à le vérifier dans la question 6). De toute évidence, c'était raté ... Et dans la question 5.a), la seule manière de le vérifier proprement était de raisonner par récurrence.
- 5) Ce n'est pas parce que ce sont des probabilités qu'il ne faut plus rien démontrer ! Il FALLAIT parler ici de probabilité uniforme, en expliquant que vous faisiez cette hypothèse de modélisation (qui n'est pas spécifiée dans l'énoncé).
- 6) Idem : il fallait parler de système complet d'événements, et justifier que la somme ne commençait qu'à r .
- 10.a) Il fallait citer la formule de transfert.
- 10.b) Lisez l'énoncé ! On ne demandait pas une relation concernant $F'_k(x)$ et $F''_k(x)$, mais $F'_k(1)$ et $F''_k(1)$.

Partie III

- 12) La famille est échelonnée, et c'est tout.
- 14) Citez le binôme de Newton !

Partie informatique

J'ai rencontré peu d'invariants, et encore moins de démonstrations ...