# XXV Espaces préhilbertiens réels

7 mars 2016

Le corps de base est $\mathbb{R}$. $n$, $p$, $q$, $r$ et $s$ désignent des entiers naturels non nuls. $E$ désigne un espace vectoriel.

# 1 Produit scalaire, norme et distance

**Définition 1.0.1.**
On appelle *produit scalaire sur $E$* toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ bilinéaire symétrique et telle que pour tout $x \in E$, on ait d'une part $\varphi(x,x) \geqslant 0$ et d'autre part $\varphi(x,x) = 0$ si et seulement si $x = 0$. Un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire est dit *préhilbertien*. Si de plus il est de dimension finie, il est dit *euclidien*.

**Remarque 1.0.2.**
- Différentes notations sont utilisées couramment pour le produit scalaire de $x$ et $y$ : $(x|y)$, $\langle x \mid y \rangle$ , $(x,y)$, $\langle x, y \rangle$ , $x \cdot y$.
- Par bilinéarité, si $x$ ou $y = 0$, $\langle x \mid y \rangle = 0$.
- La symétrie et la linéarité par rapport à une variable suffisent à montrer la bilinéarité.
- Jusqu'à maintenant on définissait le produit scalaire à partir d'angles. En fait c'est l'inverse que l'on fait lorsque l'on théorise tout cela.

**Exemple 1.0.3.**
- Les produits scalaires usuels vus en début d'année sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont bien évidemment des produits scalaires.
- Il existe de nombreux produits scalaires sur $\mathbb{R}^2$ ; par exemple $((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \mapsto x_1x_2 - y_1x_2 + 2y_1y_2 - x_1y_2$.
- Il existe également sur $\mathbb{R}^n$ un produit scalaire canonique ; $(x_1,\dots,x_n).(y_1,\dots,y_n) = \sum_{k=1}^{n} x_iy_i$.
- Par extension, tout $\mathbb{R}$-ev de dimension $n$, étant isomorphe à $\mathbb{R}^n$, est muni d'un produit scalaire. Ainsi, sur $\mathbb{R}_n[X]$ le produit scalaire usuel est $\left(\sum_{k=0}^{n} a_kX^k\right).\left(\sum_{k=0}^{n} b_kX^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_kb_k\right)$.
- Soit $a$ et $b$ deux réels avec $a < b$. Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, l'application $(f,g) \mapsto \int_a^b fg$ est un produit scalaire (attention : cet espace est de dimension infinie, donc n'est pas euclidien, mais préhilbertien réel).

**Exercice 1.0.4.**
L'espérance munit-elle l'ensemble des variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé fini d'un produit scalaire (via $\langle X,Y \rangle = \mathrm{E}(XY)$) ?

Proposer une solution à ce « problème ».

**Définition 1.0.5** (Distance)**.**
Soit $E$ un ensemble (quelconque, pas nécessairement un espace vectoriel). On appelle *distance sur $E$* toute application $\mathrm{d} : E^2 \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les trois conditions suivantes :

(i) $\forall (x,y) \in E^2 \quad \mathrm{d}(x,y) = 0 \iff x = y$ ;

(ii) $\forall (x,y) \in E^2 \quad \mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x)$ (symétrie) ;

(iii) $\forall (x,y,z) \in E^3 \quad \mathrm{d}(x,z) \leqslant \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z)$ (inégalité triangulaire).

Un ensemble muni d'une distance est appelé *espace métrique*.

**Exemple 1.0.6.**
- La distance usuelle dans le plan est une distance.
- La distance de deux points sur un graphe connexe, comptée comme le nombre d'arêtes à parcourir sur ce graphe.

**Remarque 1.0.7.**
Soit $E$ un ensemble muni d'une distance $d$. Soit $(x,y,z) \in E^3$. Alors, on a

$$|\,\mathrm{d}(x,y) - \mathrm{d}(x,z)| \leqslant \mathrm{d}(y,z).$$

**Démonstration.**
On a $\mathrm{d}(x,z) \leqslant \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z)$, donc $\mathrm{d}(x,z) - \mathrm{d}(x,y) \leqslant \mathrm{d}(y,z)$. De même, $\mathrm{d}(x,y) \leqslant \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(z,y)$, donc $\mathrm{d}(x,y) - \mathrm{d}(x,z) \leqslant \mathrm{d}(y,z)$. Or $|\,\mathrm{d}(x,y) - \mathrm{d}(x,z)| = \max(\mathrm{d}(x,z) - \mathrm{d}(x,y), \mathrm{d}(x,y) - \mathrm{d}(x,z))$, d'où le résultat. $\square$

**Définition 1.0.8** (Norme)**.**
Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle norme sur $E$ toute application $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les trois conditions suivantes :

(i) $\forall x \in E \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$ ;

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in E \quad \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ (homogénéité) ;

(iii) $\forall (x,y) \in E \quad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

**Exemple 1.0.9.**
Sur $\mathbb{R}^n$, les applications $(x_1,\dots,x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n |x_k|$ et $(x_1,\dots,x_n) \mapsto \max_{k\in[\![1,n]\!]} |x_k|$ sont des normes.

**Remarque 1.0.10.**
Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme $\|.\|$. Alors pour tout $(x,y) \in E^2$, on a

$$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x-y\|\,.$$

**Démonstration.**
Soit $(x,y) \in E^2$. Remarquons qu'on a $\|x\| = \|x+y-y\| \leqslant \|x+y\| + \|y\|$ par l'inégalité triangulaire, d'où l'on déduit $\|x\| - \|y\| \leqslant \|x+y\|$. Symétriquement, on remarque qu'on a $\|y\| - \|x\| \leqslant \|x+y\|$. Or $|\|x\| - \|y\|| = \max(\|x\| - \|y\|, \|y\| - \|x\|)$. On en déduit le résultat. □

**Définition 1.0.11** (Distance associée à une norme)**.**
Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme $\|.\|$. On appelle *distance associée à la norme* $\|.\|$ l'application $(x,y) \mapsto \|x-y\|$.

**Proposition 1.0.12.**
Cette application est bien une distance.

**Démonstration.**
Soit $\mathrm{d}$ la distance associée à une norme $\|.\|$ sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$. On a clairement $\forall (x,y) \in E^2 \quad \mathrm{d}(x,y) \geqslant 0$, donc $\mathrm{d}$ est bien une application de $E^2$ dans $\mathbb{R}^+$. On vérifie aisément les trois conditions de la définition d'une distance :

(i) Soit $(x,y) \in E^2$. On a $\mathrm{d}(x,y) = \|x-y\|$. Or $\|x-y\| = 0 \iff x-y = 0$. Donc $\mathrm{d}(x,y) = 0 \iff x = y$.

(ii) Soit $(x,y) \in E^2$. On a $\mathrm{d}(y,x) = \|y-x\| = \|-(x-y)\| = |-1|\,\|x-y\| = \mathrm{d}(x,y)$.

(iii) Soit $(x,y,z) \in E^3$. On a $\mathrm{d}(x,z) = \|x-y+y-z\| \leqslant \|x-y\| + \|y-z\| = \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z)$.

□

**Définition 1.0.13** (Norme associée à un produit scalaire)**.**
Soit $(E, \langle\,|\,\rangle)$ un espace préhilbertien. On appelle *norme associée au produit scalaire* $\langle\,|\,\rangle$ l'application $x \mapsto \sqrt{\langle x\,|\,x\rangle}$.

**Remarque 1.0.14.**
1. Il est clair, par positivité du produit scalaire, que cette application est bien définie. La racine carrée étant à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, elle est de plus à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Il reste à voir si cette application est bien une norme.
2. La norme associée à un produit scalaire dépend évidemment du produit scalaire. Par exemple sur $\mathbb{R}^2$, les normes associées respectivement au produit scalaire usuel et au produit scalaire $((x,y),(x',y')) \mapsto \frac{1}{2}xx' + 2yy'$ sont différentes (regarder par exemple les valeurs pour les vecteurs $(1,0)$ et $(0,1)$).
3. On a directement que pour une famille $(x_1,\dots,x_n)$ de vecteurs,
$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\|^2 &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \langle x_i\,|\,x_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \langle x_i\,|\,x_j\rangle\,.\end{aligned}$$
Pour deux vecteurs, on retrouve $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2\langle x\,|\,y\rangle + \|y\|^2$.

Dans tout ce qui suit, sauf mention expresse du contraire, $(E, \langle\,|\,\rangle)$ désigne un espace vectoriel préhilbertien, et $\|.\|$ la norme associée à son produit scalaire.

**Proposition 1.0.15.**
Soit $(E, \langle\,|\,\rangle)$ un espace préhilbertien et $\|.\|$ la norme associée. On a

1. $\forall x \in E \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$ ;
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in E \qquad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

**Démonstration.** 1. Soit $x \in E$. On a $\|x\| = 0 \iff \langle x \mid x \rangle = 0$. $\langle \mid \rangle$ étant un produit scalaire, on a donc $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$. On a $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x \mid \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x \mid x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$.

□

Avec ce qui précède, il suffit maintenant de démontrer que $\|.\|$ vérifie l'inégalité triangulaire pour démontrer qu'il s'agit bien d'une norme. Pour cela, on démontre tout d'abord le théorème suivant.

**Théorème 1.0.16** (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.**
Soit $(E, \langle \mid \rangle)$ un espace préhilbertien et $\|.\|$ la norme associée. Alors pour tout $(x, y) \in E^2$, on a

$$|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| .$$

L'égalité a lieu si et seulement si $x$ et $y$ sont colinéaires.

**Démonstration.**
Soient $x, y \in E$. Pour $y = 0$ le résultat est évident. Sinon, on peut donner deux démonstrations

**Géométrique** Posons $u = \frac{1}{\|y\|} y$. On vérifie aisément $\|u\| = 1$. Posons alors $x' = \langle x \mid u \rangle u$ et $x'' = x - x'$ (faire un dessin). On a alors

$$\left\langle x' \,\middle|\, x'' \right\rangle = \left\langle x' \,\middle|\, x \right\rangle - \left\langle x' \,\middle|\, x' \right\rangle = \langle x \mid u \rangle^2 - \langle x \mid u \rangle^2 = 0.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \left\|x'\right\|^2 + 2\left\langle x' \,\middle|\, x'' \right\rangle + \left\|x''\right\|^2 \\ &= \left\|x'\right\|^2 + \left\|x''\right\|^2 \\ &\geqslant \left\|x'\right\|^2 . \end{aligned}$$

On en déduit $\|x\| . \|y\| \geqslant \|x'\| . \|y\|$. Or on a :

$$\begin{aligned} \left\|x'\right\| . \|y\| &= |\langle x \mid u \rangle| . \|y\| \\ &= |\langle x \mid y \rangle|. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

**Algébrique** pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $\|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t \langle x \mid y \rangle + t^2 \|y\|^2$. C'est un polynôme toujours positif, donc son discriminant est négatif ou nul. Égalité ssi discriminant $= 0$ ssi le polynôme a une racine ssi il existe $t$ tel que ... ssi $x$ et $y$ sont colinéaires.

**Une idée calculatoire astucieuse** Si $x = 0$ ou $y = 0$, le résultat est évident. Sinon, on remarque que $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$ et l'on écrit ($\pm$ signifie qu'on le fait pour $+$ puis pour $-$) :

$$0 \leqslant \left\| \frac{x}{\|x\|} \pm \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|^2 + \left\| \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \pm 2 \frac{\langle x \mid y \rangle}{\|x\| \, \|y\|}$$

ce qui donne

$$0 \leqslant 1 \pm \frac{\langle x \mid y \rangle}{\|x\| \, \|y\|}$$

et c'est fini !

□

**Proposition 1.0.17** (Inégalité triangulaire)**.**
Soit $(E, \langle \mid \rangle)$ un espace préhilbertien, $x, y \in E$. Alors,

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| .$$

De plus, on a l'égalité si et seulement si $x$ et $y$ sont colinéaires et de même sens.

**Démonstration.**
On a $\|x + y\|^2 = \langle x + y \mid x + y \rangle = \|x\|^2 + 2 \langle x \mid y \rangle + \|y\|^2$. Or $(\|x\| + \|y\|)^2 = \|x\|^2 + 2 \|x\| . \|y\| + \|y\|^2$ et $\langle x \mid y \rangle \leqslant \|x\| . \|y\|$, donc $\|x + y\|^2 \leqslant (\|x\| + \|y\|)^2$. $\|x + y\|$ et $\|x\| + \|y\|$ étant positifs, on en déduit le résultat.

L'égalité a lieu si et seulement si $\langle x \mid y \rangle = \|x\| . \|y\|$. Pour cela, il est nécessaire d'avoir $\langle x \mid y \rangle \geqslant 0$ (car le produit de deux normes est positif ou nul) et $x$ et $y$ colinéaires (cas d'égalité de Cauchy-Schwarz), donc il est nécessaire que $x$ et $y$ soient colinéaires — l'un s'écrit comme produit de l'autre par un scalaire — et de même sens — ce scalaire est positif ou nul. Cette condition est clairement suffisante. □

**Théorème 1.0.18.**
Soit $(E, \langle \mid \rangle)$ un espace préhilbertien, $x, y \in E$.

1. Identité du parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

2. Identité de polarisation :

$$\begin{aligned} \langle x \mid y \rangle &= \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2). \end{aligned}$$

**Remarque 1.0.19.**
Faire le dessin d'un parallélogramme, on utilise le théorème d'Al-Kashi deux fois (une par hypothénuse).

**Démonstration.**
Il suffit de développer les normes. □

**Remarque 1.0.20.**
Ces identités permettent de retrouver l'expression du produit scalaire quand on ne connaît que la norme.

**Exemple 1.0.21.**
Existe-t-il un produit scalaire donnant la norme $\|(x,y)\|^2 = (x+y)^2 + x^2$ ?

# 2 Orthogonalité

Soit $(E, \langle \mid \rangle)$ un ev préhilbertien et $\|\cdot\|$ la norme associée.

## 2.1 Premières définitions

**Définition 2.1.1.**
Soient $x, y \in E$. On dit que $x$ est *unitaire* (ou *normé*) si $\|x\| = 1$. On dit que $x$ et $y$ sont *orthogonaux* et l'on note $x \perp y$ si $\langle x \mid y \rangle = 0$.

**Exemple 2.1.2.**
• Tout vecteur est toujours orthogonal au vecteur nul.
• Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, $(1,3)$ et $(-6,2)$ sont orthogonaux.
• Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire $(x,y)\cdot(x',y') = 2xx' - xy' - x'y + 3yy'$, les vecteurs $(1,1)$ et $(2,-1)$ sont orthogonaux.

## 2.2 Familles orthogonales

**Définition 2.2.1.**
Une famille de vecteurs est dite *orthogonale* s'ils sont 2 à 2 orthogonaux. Si les vecteurs sont de plus unitaires, la famille est dite *orthonormale* (ou *orthonormée*).

**Exemple 2.2.2.**
Les $f_n : x \mapsto \cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, forment une famille orthogonale pour le produit scalaire usuel de $\mathscr{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$.

**Théorème 2.2.3** (Pythagore)**.**
Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille orthogonale de $n$ vecteurs. Alors $\left\| \sum_{k=1}^{n} v_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|v_k\|^2$.

**Démonstration.**
On développe le produit scalaire : $\| \sum_{k=1}^{n} v_k \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle v_i \mid v_j \rangle$. □

**Exemple 2.2.4.**
Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, on pose $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (-5,1,1)$ et $v_3 = (-1,-16,11)$. Vérifier que la famille $(v_1, v_2, v_3)$ est orthogonale et s'assurer que l'égalité donnée par le théorème de Pythagore est vérifiée.

**Théorème 2.2.5.**
Toute famille orthogonale ne comportant **aucun vecteur nul** est libre.

**Démonstration.**
Soients $\lambda_k$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k = 0$. Alors pour tout $i$, $\left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k \,\middle|\, v_i \right\rangle = 0$ or quand on développe la somme on a $\lambda_i \langle v_i \mid v_i \rangle$. □

**Remarque 2.2.6.**
Toute famille orthonormale est une famille orthogonale ne comportant aucun vecteur nul.

**Corollaire 2.2.7.**
Toute famille orthogonale ne comportant **aucun vecteur nul** et de cardinal $\dim E$ est une base de $E$.

**Exemple 2.2.8.**
$\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix}$ forment une famille orthogonale, et donc une base de $\mathbb{R}^3$.

**Théorème 2.2.9** (orthonormalisation de Gram–Schmidt)**.**
On suppose $E$ euclidien de dim $n$. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base de $E$. Alors il existe une base $(v_1, \dots, v_n)$ de $E$ telle que :

1. $(v_1, \dots, v_n)$ est orthonormale ;
2. $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\text{Vect}(u_1, \dots u_k) = \text{Vect}(v_1, \dots v_k)$.

Les $v_k$ sont uniques au signe près et on peut choisir : $v_k = \dfrac{u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k \mid v_i \rangle v_i}{\left\| u_k - \sum_{i=1}^{k-1} (u_k|v_i) v_i \right\|}$.

**Démonstration.**
Explication pour le choix de $v_1$.
• Analyse : on suppose la famille construite jusqu'au rang $k$. Construisons le $k+1^{\text{e}}$ vecteur.
Il faut choisir $v_{k+1}$ dans $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k, u_{k+1})$ : $v_{k+1} = \lambda_1 v_1 + \dots \lambda_k v_k + \mu u_{k+1}$. $\langle v_{k+1} \mid v_j \rangle = 0$ donne $\lambda_j + \mu \langle u_{k+1} \mid v_j \rangle = 0$, donc $v_{k+1} = \mu \left( -\sum_{i=1}^{k} \langle u_{k+1} \mid v_i \rangle v_i + u_{k+1} \right)$. Reste à choisir $\mu$ pour avoir $\|v_{k+1}\| = 1$ (2 choix possibles).
• Synthèse : on a vu unicité au signe près. On vérifie que les vecteurs trouvés conviennent bien. ☐

**Exemple 2.2.10.**
Orthonormaliser $(1, X, X^2)$ pour le produit scalaire de $\mathbb{R}_2[X]$, $\langle P \mid Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. On trouve $(P_1, P_2, P_3)$, où

$$\begin{aligned} P_1 &= 1, \\ P_2 &= \frac{X - 1/2}{1/(2\sqrt{3})} &&= \sqrt{3}(2X-1), \\ P_2 &= \frac{X^2 - X + 1/6}{\|\dots\|} &&= \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1). \end{aligned}$$

**Corollaire 2.2.11.**
Tout espace euclidien a une base orthonormale. Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

**Proposition 2.2.12** (Coordonnées dans une base orthonormale)**.**
$E$ euclidien, $(v_1, \dots, v_n)$ base orthonormale de $E$. Alors, pour tout $x \in E$, $x = \sum_{k=1}^{n} \langle x \mid v_k \rangle v_k$.

**Démonstration.**
On écrit $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k$, puis $\langle x \mid v_k \rangle = \langle v_k \mid v_k \rangle = \lambda_k$ en développant. ☐

**Exemple 2.2.13.**
Trouver les coordonnées de $(1, -3)$ dans la base $\left( \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) \right)$ (pour le produit scalaire usuel).

**Proposition 2.2.14** (Expression du produit scalaire dans une base orthonormale)**.**
Soit $E$ euclidien, $(v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormale de $E$. $x$ et $y$ de coordonnées $(x_i)$ et $(y_i)$ dans la base $(v_1, \dots, v_n)$. Alors $\langle x \mid y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

**Remarque 2.2.15.**
Tous les produits scalaires ont la même expression «usuelle» *à condition de se placer dans une base orthonormale* ***pour ce produit scalaire.***

## 2.3 Sous-espaces vectoriels orthogonaux

**Définition 2.3.1.**
Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. On dit que $F$ et $G$ sont des sous-espaces orthogonaux et on écrit $F \perp G$ si

$$\forall x \in F \quad \forall y \in G \qquad x \perp y.$$

**Exemple 2.3.2.**
Dans $\mathbb{R}^3$ avec le produit scalaire usuel, $\mathrm{Vect}(1,-1,0) \perp \mathrm{Vect}((1,1,0),(0,0,1))$.

**Remarque 2.3.3.**
Si $F$ et $G$ sont orthogonaux, alors ils sont en somme directe. En effet, soit alors $x \in F \cap G$. On a alors $x \perp x$, donc $\langle x \mid x \rangle = 0$, donc $x = 0$. Donc $F \cap G \subset \{ 0 \}$, d'où on déduit le résultat.

**Théorème 2.3.4.**
Soient $F$ et $G$ deux sev de dimension finies de $E$. On note $(f_1, \dots, f_q)$ une famille génératrice de $F$ et $(g_1, \dots, g_p)$ une famille génératrice de $G$. Alors $F \perp G$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1,q]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$ on a $\langle f_i \mid g_j \rangle = 0$.

**Démonstration.**
($\Rightarrow$) par définition de $F \perp G$.
($\Leftarrow$) soient $f = \sum \lambda_i f_i$ et $g = \sum \mu_j g_j$. Alors $\langle f \mid g \rangle = \sum_i \sum_j \lambda_i \mu_j \langle f_i \mid g_j \rangle = 0$. □

**Définition 2.3.5.**
Soit $X$ une partie (quelconque) de $E$. On appelle *orthogonal* de $X$ et on noté $X^\perp$ (ou $X^o$) l'ensemble $\{ y \in E \mid \forall x \in X \;\; \langle x \mid y \rangle = 0 \}$.

**Proposition 2.3.6.**
Soit $X$ une partie de $E$. Alors
1. $X^\perp$ est un sev de $E$ ;
2. Pour toute partie $Y$ de $E$ telle que $X \subset Y$, on a $Y^\perp \subset X^\perp$ ;
3. $X \subset \left(X^\perp\right)^\perp$.

**Démonstration.**
1. On a $0 \in X^\perp$ car 0 est orthogonal à tout vecteur, donc à tout vecteur de $X$ ; de plus toute combinaison linéaire de vecteurs orthogonaux à tout vecteur de $X$ est orthogonale à tout vecteur de $X$.
Sinon, il suffit de voir que
$$X^\perp = \bigcap_{x \in X} \mathrm{Ker}\, \langle x \mid \cdot \rangle .$$
2. Tout élément de $Y^\perp$ est orthogonal à tout vecteur de $Y$, donc a fortiori à tout vecteur de $X$.
3. Soit $x$ un vecteur de $X$. Tout vecteur de $X^\perp$ est orthogonal à tout vecteur de $X$, donc en particulier à $x$. Donc $x$ est orthogonal à tout vecteur de $X^\perp$, donc appartient à $\left(X^\perp\right)^\perp$.

□

**Remarque 2.3.7.**
Il n'y a pas forcément égalité dans le dernier point. Par exemple, avec $X = \varnothing$, $(X^\perp)^\perp = \{0\}$.

**Théorème 2.3.8.**
Soit $F$ un sev de $E$. Alors $F^\perp$ est le plus grand sous-espace vectoriel orthogonal à $F$ (et $F$ et $F^\perp$ sont de plus en somme directe).

Si de plus $E$ est euclidien, alors $E = F \oplus F^\perp$ et $F^\perp$ est l'unique sous-espace vectoriel $G$ vérifiant $E = F \oplus G$ et $F \perp G$. C'est pourquoi on appelle $F^\perp$ ***le*** supplémentaire orthogonal de $F$ dans $E$.

De plus, dans le cas euclidien, on a $F = (F^\perp)^\perp$.

**Démonstration.**
On sait déjà que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel. $F$ et $F^\perp$ sont clairement orthogonaux (donc en somme directe) et de plus pour tout sous-espace vectoriel $G$ tel que $F$ et $G$ sont orthogonaux, tout élément $x$ de $G$ est orthogonal à tout élément de $F$, donc appartient à $F^\perp$, donc $G \subset F^\perp$.

Supposons de plus que $E$ est euclidien. Alors le sous-espace vectoriel $F$ est aussi un espace vectoriel euclidien, donc possède une base orthonormale $(f_1, \dots, f_q)$. Cette base est une famille orthonormale de $E$, qu'on peut compléter en une base orthonormale $(f_1, \dots, f_q, g_1, \dots, g_p)$ de $E$. Posons $G = \mathrm{Vect}(g_1, \dots, g_p)$. On a alors $\dim E = p + q = \dim F + \dim G$. De plus pour tout $i \in [\![1,q]\!]$ et tout $j \in [\![1,p]\!]$, on a $f_i \perp g_j$, donc $F \perp G$, donc $G \subset F^\perp$. Donc $\dim E \leqslant \dim F + \dim F^\perp$. Or $F$ et $F^\perp$ sont en somme directe, donc $\dim(F \oplus F^\perp) \leqslant \dim E$, donc $G = F^\perp$ et $E = F \oplus F^\perp$ (et de plus, $F^\perp = \mathrm{Vect}\,(g_1, \dots, g_p)$).

On en déduit, $\dim (F^\perp)^\perp = \dim E - \dim F^\perp = \dim F$. Or on sait qu'on a $F \subset (F^\perp)^\perp$, donc $F = (F^\perp)^\perp$. □

**Remarque 2.3.9** (Important)**.**
Le résultat ne se généralise pas à des espaces préhilbertiens $E$ qui ne sont pas de dimension finie. Dans ce cas (non-euclidien), on peut trouver des sous-espaces vectoriels $F$ tels que $F$ et $F^\perp$ ne soient pas supplémentaires et tels que $\left(F^\perp\right)^\perp \neq F$ (on peut même trouver $F$ tel que $F \neq E$ et $F^\perp = \{ 0 \}$). On verra ce résultat en exercice dans le cas de $\mathbb{R}[X]$.

**Remarque 2.3.10** (Culturelle)**.**
En revanche, pour toute partie $X$ d'un espace préhilbertien, on a toujours $\left(\left(X^\perp\right)^\perp\right)^\perp = X^\perp$ (une inclusion est la conséquence du fait que $\left(X^\perp\right)^\perp$ contient $X$ et qu'en conséquence leurs orthogonaux sont inclus dans l'autre sens ; l'autre inclusion vient du fait que le biorthogonal de $X^\perp$ contient $X^\perp$).

**Exemple 2.3.11.**
On pose, pour tout couple $(P, Q)$ d'éléments de $\mathbb{R}_2[X]$, $\langle P \,|\, Q\rangle = P'(1)Q'(1) + P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0)$. Vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire et trouver $\mathbb{R}_1[X]^\perp$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

**Exercice 2.3.12.**
On considère dans $\mathbb{R}[X]$ le sev $F = \mathrm{Vect}(1+X, 1+X^2, \ldots, 1+X^n, \ldots)$. On rappelle qu'un hyperplan est un sev admettant un supplémentaire de dimension 1.
On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k, \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k$.

1. Montrer que $F$ est un hyperplan de $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer $F^\perp$ pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}[X]$.
3. Quel résultat vrai en dimension finie est ici mis en défaut ?

Dans toute la suite, $(E, \langle\,|\,\rangle)$ est un espace vectoriel euclidien de dimension $n$.

## 2.4 Formes linéaires d'un espace euclidien

**Théorème 2.4.1** (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet)**.**
Soit $(E, \langle\,|\,\rangle)$ euclidien. Soit $f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$. Alors il existe un unique $v_f \in E$ vérifiant $\forall x \in E\ f(x) = \langle v_f \,|\, x\rangle$ ou encore $f = \langle v_f \,|\, .\rangle$.

**Remarque 2.4.2.**
Explication géométrique : $f$ est définie par son noyau (hyperplan $H$) et la valeur prise sur un vecteur qui n'est pas dans le noyau.
De même, $(\mathrm{Vect}\, v_f)^\perp$ est de dimension $n-1$, donc c'est un hyperplan. Si on choisit $v_f$ vecteur normal à $H$, alors $f$ et $\langle v_f \,|\, .\rangle$ ont le même noyau. La norme de $v_f$ est alors choisie de sorte qu'elle corresponde avec la valeur précédente de $f$ sur un vecteur qui n'est pas dans le noyau.

**Démonstration.**
On considère l'application $\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathscr{L}(E, \mathbb{R}) \\ v & \longmapsto & (x \mapsto \langle v \,|\, x\rangle) \end{cases}$.
Alors, $\varphi$ est linéaire. De plus, si $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$, alors pour tout $x \in E$, $\langle v_1 \,|\, x\rangle = \langle v_2 \,|\, x\rangle$, ie pour tout $x$, $\langle v_1 - v_2 \,|\, x\rangle = 0$, donc $v_1 - v_2 \in E^\perp$ Or $E^\perp = \{\,0\,\}$ car pour tout $x \in E^\perp$, $\langle x \,|\, x\rangle = 0$. Donc $v_1 = v_2$ et $\varphi$ est injective. Mais comme $\dim E = \dim \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$, alors $\varphi$ est un isomorphisme. D'où le résultat. ☐

**Exemple 2.4.3.**
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. $f$ est de la forme $f(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$, ie $\langle (a_1, \ldots, a_n) \,|\, (x_1, \ldots, x_n)\rangle$.

## 2.5 Écriture matricielle du produit scalaire

Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ base orthonormale de $E$, $x$ et $y$ des vecteurs de matrices (dans $e$) $X$ et $Y$. Alors $\langle x \,|\, y\rangle = {}^tX.Y$.
Dans le cadre d'application du théorème de Riesz-Fréchet, on a $f(x) = {}^tV_f.X$, et ainsi $\mathrm{Mat}_e(f) = {}^t\mathrm{Mat}_e(v_f)$. Les points de vue se rejoignent.

## 2.6 Symétries et projecteurs orthogonaux

**Définition 2.6.1.**
On appelle *projection orthogonale* (resp. *symétrie orthogonale*) toute projection (resp. symétrie) sur un (resp. par rapport à un) sev $F$ parallèlement à $F^\perp$.

**Proposition 2.6.2.**
Un projecteur $p$ est orthogonal si et seulement si $\mathrm{Im}\, p \perp \mathrm{Ker}\, p$. Une symétrie $s$ est orthogonale si et seulement si $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) \perp \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$.

**Démonstration.**
Direct. ☐

**Théorème 2.6.3** (expression d'un projecteur orthogonal dans une base orthonormée)**.**
Soit $F$ sev d'un ev euclidien $E$. Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une base orthonormale de $F$. Soit $x \in E$. Le projeté orthogonal de $x$ sur $F$ est $p(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x \mid f_i \rangle f_i$.

**Démonstration.**
On complète $(f_1, \dots, f_p)$ en une base orthonormale de $E$ notée $(f_1, \dots, f_n)$. Alors $(f_{p+1}, \dots, f_n)$ est une base de $F^\perp$ ($\perp$ + dimension). Donc $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid f_i \rangle f_i$, donc somme d'un élément de $F$ et d'un élément de $F^\perp$ : cet élément de $F$ est le projeté de $x$ sur $F$. ☐

**Exemple 2.6.4.**
Déterminer la projection orthogonale (et la symétrie orthogonale) de $(2, 1-1)$ sur $\mathrm{Vect}(-1, 2, 4)$, ainsi que sur son supplémentaire orthogonal, pour le produit scalaire $((x_1, y_1)|(x_2, y_2)) = 3x_1x_2 + 2y_1x_2 + 2x_1y_2 + y_1y_2$.

## 2.7 Distance à un sous ev

**Définition 2.7.1** (distance d'un point à une partie d'un espace euclidien)**.**
Soit $A$ une partie de $E$ et $x \in E$. On appelle distance de $x$ à $A$ et on note $\mathrm{d}(x, A)$ le réel $\inf_{a \in A} \mathrm{d}(x, a)$.

**Théorème 2.7.2.**
Soit $F$ un sev de $E$. Alors la distance de $x$ à $F$ est atteinte en un seul point, qui est la projection orthogonale de $x$. De plus : $\mathrm{d}(x, F)^2 = \|x\|^2 - \|p(x)\|^2$. En particulier $\mathrm{d}(x, F) = 0$ si et seulement si $x \in F$.

**Démonstration.**
Soit $f \in F$. $x - f = x - p(x) + p(x) - f$, décomposition dans $F^\perp \oplus F$. On applique Pythagore. ☐

**Exemple 2.7.3.**
Le minimum de la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (a, b) & \mapsto & \int_0^1 (-a - \end{array} \right.$
est atteint pour $a = -1/6$ et $b = 1$ et vaut $1/180$.

## 2.8 Hyperplans affines d'un espace euclidien

**Définition 2.8.1.**
On appelle hyperplan affine d'un espace vectoriel (non nécessairement euclidien) tout sous-espace affine de la forme $a + H$ où $a$ est un élément de l'espace vectoriel et $H$ est un hyperplan de cet espace.

**Définition 2.8.2.**
Soit $\mathscr{H}$ un hyperplan affine d'un espace euclidien $E$. Notons $H$ la direction de $\mathscr{H}$. On appelle vecteur normal à $\mathscr{H}$ tout vecteur normal à $H$. L'ensemble des vecteurs normaux à $\mathscr{H}$ est une droite vectorielle.

**Démonstration.**
L'espace étant euclidien, $H^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de $H$. $H$ étant un hyperplan, $H^\perp$ est une droite vectorielle. ☐

**Remarque 2.8.3.**
Étant donné un vecteur non-nul $\overrightarrow{n}$ de $E$, il existe un unique hyperplan vectoriel admettant $\overrightarrow{n}$ pour vecteur normal : $\{ \overrightarrow{n} \}^\perp$ (En effet, d'une part $\{ \overrightarrow{n} \}^\perp = (\mathrm{Vect}(\overrightarrow{n}))^\perp$) est un hyperplan et $\overrightarrow{n}$ est normal à cet hyperplan, d'autre part tout hyperplan normal à $\overrightarrow{n}$ est nécessairement inclus dans $\{ \overrightarrow{n} \}^\perp$ dont égal par égalité des dimensions.)

Étant donné de plus un point $A$ de $E$, il existe un unique hyperplan affine admettant $\overrightarrow{n}$ pour vecteur normal et passant par $A$ : $A + \{ \overrightarrow{n} \}^\perp$. (En effet, s'il existe sa direction est nécessairement $\{ \overrightarrow{n} \}^\perp$ donc il ne peut s'agit que de $A + \{ \overrightarrow{n} \}^\perp$ et il est clair que ce sous-espace affine répond à la question.)

**Définition 2.8.4.**
Soit $f : E \to \mathbb{R}$. Les sous-ensembles de $E$ de la forme
$$\{ x \in E \mid f(x) = k \},$$
pour $k \in \mathbb{R}$, sont appelés les lignes de niveau de l'application $f$.

**Proposition 2.8.5.**
Soit $A$ un point de $E$.

Un sous ensemble de $E$ est un hyperplan affine si et seulement si c'est une ligne de niveau d'une application de la forme

$$\begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \langle \overrightarrow{n} | \overrightarrow{AM} \rangle \end{array}$$

où $\overrightarrow{n}$ est un vecteur non nul.

Dans ce cas, $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à l'hyperplan.

**Démonstration.**
Soit $\mathscr{H}$ un hyperplan affine de $E$. $\mathscr{H}$ s'écrit $B + H$ où $B \in \mathscr{H}$ et $H$ est un hyperplan vectoriel. $H$ est donc le noyau d'une forme linéaire non-nulle $\varphi$. Or $E$ est un espace euclidien, donc d'après le théorème de Riesz, $\varphi$ s'écrit sous la forme $x \mapsto \langle x | \overrightarrow{n} \rangle$ pour un certain $\overrightarrow{n} \in E$, avec $\overrightarrow{n}$ non-nul (sinon $\varphi$ serait nulle). Donc on a pour tout $M \in E$ :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{H} &\iff M - B \in H \\ &\iff \overrightarrow{BM} \in H \\ &\iff \varphi(\overrightarrow{BM}) = 0 \\ &\iff \varphi(\overrightarrow{AB}) + \varphi(\overrightarrow{BM}) = \varphi(\overrightarrow{AB}) \\ &\iff \varphi(\overrightarrow{AM}) = \varphi(\overrightarrow{AB}) \\ &\iff \langle \overrightarrow{n} | \overrightarrow{AM} \rangle = \varphi(\overrightarrow{AB}). \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{H} = \left\{ M \in E \;\middle|\; \langle \overrightarrow{n} | \overrightarrow{AB} \rangle = \varphi(\overrightarrow{AB}) \right\}$. L'hyperplan affine $\mathscr{H}$ est donc bien une ligne de niveau de l'application

$$\begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \langle \overrightarrow{n} | \overrightarrow{AM} \rangle \end{array}$$

où $\overrightarrow{n}$ est un vecteur non nul.

Réciproquement, soit $k$ un réel et $\overrightarrow{n}$ un vecteur non-nul. Notons $\mathscr{H} = \left\{ M \in E \;\middle|\; \langle \overrightarrow{n} | \overrightarrow{AM} \rangle = k \right\}$. Montrons que $\mathscr{H}$ est un hyperplan affine.

Notons $\varphi : x \mapsto \langle x | \overrightarrow{n} \rangle$. Alors $\varphi$ est une forme linéaire non-nulle de noyau un hyperplan vectoriel $H$. De plus, $\operatorname{Im} \varphi$ n'est pas réduite à $\{ 0 \}$, donc est de dimension au moins 1 donc est égale à $\mathbb{R}$. Donc $\varphi$ est surjective. Soit $x$ un antécédent de $k$ par $\varphi$. Posons $B = A + x$. Alors $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \varphi(x) = k$, donc $B \in \mathscr{H}$.

Soit alors $M \in E$. On a :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{H} &\iff \langle \overrightarrow{n} | \overrightarrow{AM} \rangle = k \\ &\iff \varphi(\overrightarrow{AM}) - \varphi(\overrightarrow{AB}) = 0 \\ &\iff \varphi(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}) = 0 \\ &\iff \varphi(\overrightarrow{BM}) = 0 \\ &\iff \overrightarrow{BM} \in H \\ &\iff M \in B + H. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{H} = B + H$.

De plus pour tout $x \in H$, $\langle x | \overrightarrow{n} \rangle = \varphi(x) = 0$ donc $\overrightarrow{n}$ est normal à $H$, donc à $\mathscr{H}$. □

**Corollaire 2.8.6.**
Choisissons une base orthonormale de $E$.

Soit alors $\mathscr{H}$ un hyperplan affine. Alors pour tout vecteur $\overrightarrow{n}$ normal à $\mathscr{H}$, de coordonnées $(a_1, \ldots, a_n)$, $\mathscr{H}$ admet une équation de la forme

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = k$$

où $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées du point considéré dans la base et $k$ un réel fixé.

Réciproquement, pour tout $n$-uplet $(a_1, \ldots, a_n)$ de réels non tous nuls et tout réel $k$ l'équation

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = k$$

est celle d'un hyperplan affine admettant pour vecteur normal le vecteur de coordonnées $(a_1, \ldots, a_n)$.

**Démonstration.**
C'est une simple traduction de la proposition, en prenant pour $A$ le vecteur nul. □

**Remarque 2.8.7.**
Regarder ce que cela donne pour $n = 2$ et $n = 3$.

**Proposition 2.8.8.**
Soit $\mathscr{H}$ un hyperplan affine, $A$ un point de $\mathscr{H}$ et $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à $\mathscr{H}$ **unitaire**.

Alors, pour tout point $M$, on a

$$\mathrm{d}(M, \mathscr{H}) = \left| \langle \overrightarrow{AM} | \overrightarrow{n} \rangle \right|$$

**Démonstration.**
Notons $p$ la projection orthogonale sur $\mathscr{H}$. Alors la distance de $M$ à $\mathscr{H}$ n'est autre que la distance de $\overrightarrow{AM}$ à $H$. En effet :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(M,\mathscr{H}) &= \inf_{B\in\mathscr{H}} \mathrm{d}(M,B) \\ &= \inf_{B\in\mathscr{H}} \left\|\overrightarrow{BM}\right\| \\ &= \inf_{B\in\mathscr{H}} \|M-B\| \\ &= \inf_{x\in H} \|M-(A+x)\| \\ &= \inf_{x\in H} \left\|\overrightarrow{AM}-x\right\| \\ &= \mathrm{d}(\overrightarrow{AM},H). \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{d}(M,\mathscr{H})$ vaut $\left\|\overrightarrow{AM}-p(\overrightarrow{AM})\right\|$. Or $\overrightarrow{AM}-p(\overrightarrow{AM})$ est orthogonal à $H$ et $H^\perp$ n'est autre que $\mathrm{Vect}\,\overrightarrow{n}$. Donc $\overrightarrow{AM}-p(\overrightarrow{AM})$ s'écrit sous la forme $\lambda\overrightarrow{n}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(M,\mathscr{H}) &= \|\lambda\overrightarrow{n}\| \\ &= |\lambda|\,\|\overrightarrow{n}\| \\ &= |\lambda|, \end{aligned}$$

car $\overrightarrow{n}$ est unitaire.

De plus,

$$\begin{aligned} \langle\overrightarrow{AM}|\overrightarrow{n}\rangle &= \langle\overrightarrow{AM}-p(\overrightarrow{AM})|\overrightarrow{n}\rangle + \langle p(\overrightarrow{AM}))\rangle \\ &= \lambda\,\langle\overrightarrow{n}|\overrightarrow{n}\rangle + 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\mathrm{d}(M,\mathscr{H}) = \left|\langle\overrightarrow{AM}|\overrightarrow{n}\rangle\right|.$$

□

**Corollaire 2.8.9.**
Donnons-nous une base orthonormale de $E$.

Soit $\mathscr{H}$ un hyperplan affine d'équation

$$a_1x_1+\ldots+a_nx_n=k$$

dans cette base, où $a_1,\ldots,a_n$ sont des scalaires non tous nuls et $k$ un scalaire.

Alors pour tout point $M$ de $E$, de coordonnées $(x_1,\ldots,x_n)$, on a

$$\mathrm{d}(M,\mathscr{H}) = \frac{|a_1x_1+\ldots+a_nx_n-k|}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}}.$$

**Démonstration.**
Notons $\overrightarrow{u}$ le vecteur de coordonnées $a_1$, ..., $a_n$ et $A(y_1,\ldots,y_n)$ un point de $\mathscr{H}$. On sait que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur non-nul normal à $\mathscr{H}$. Posons alors $\overrightarrow{n}=\frac{1}{\|\overrightarrow{u}\|}\overrightarrow{u}$.

Soit $M$ un point de $E$, de coordonnées $(x_1,\ldots,x_n)$, D'après la proposition, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(M,\mathscr{H}) &= \left|\langle\overrightarrow{AM}|\overrightarrow{n}\rangle\right| \\ &= \frac{1}{\|\overrightarrow{u}\|}\left|\langle\overrightarrow{AM}|\overrightarrow{u}\rangle\right| \\ &= \frac{1}{\|\overrightarrow{u}\|}\left|\langle\overrightarrow{OM}|\overrightarrow{u}\rangle - \langle\overrightarrow{OA}|\overrightarrow{u}\rangle\right|. \end{aligned}$$

Or $\langle\overrightarrow{OA}|\overrightarrow{u}\rangle = k$ car $A\in\mathscr{H}$, donc

$$\mathrm{d}(M,\mathscr{H}) = \frac{|a_1x_1+\ldots+a_nx_n-k|}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}}.$$

□

**Remarque 2.8.10.**
Voir ce que cela donne en dimension 2 et en dimension 3.

**Définition 2.8.11.**
Soit $H$ un hyperplan de $E$. Tout choix d'une orientation de $E$ et d'un vecteur $u$ normal à $H$ et non-nul induit une orientation sur $H$ de la façon suivante :

On dira qu'une base $(e_1,\ldots,e_{n-1})$ de $H$ est directe (resp. indirecte) si et seulement si $(e_1,\ldots,e_{n-1},u)$ l'est aussi.

**Remarque 2.8.12.**
Regarder ce que cela donne en dimension 3.

Cette définition paraît simple mais il y a tout de même deux points à justifier. Tout d'abord le fait que pour toute base $(e_1,\ldots,e_{n-1})$ de $H$, $(e_1,\ldots,e_{n-1},u)$ est une base de $H$. Cela résulte du fait que $H$ et $\mathrm{Vect}(u)$ sont supplémentaires.

Ensuite, il convient de remarquer que définir une orientation pour l'espace vectoriel $H$, n'est pas juste partionner en deux l'ensemble des bases mais de le partitionner de façon que toutes les bases appelées directes (resp. indirectes) soient de même orientation.

Soit donc $\mathscr{B}_H = (e_1,\ldots,e_{n-1})$ et $\mathscr{B}'_H = (e'_1,\ldots,e'_{n-1})$ deux bases de $H$. Montrons qu'elles ont la même orientation si et seulement si $\mathscr{B}_E =$

$(e_1, \dots, e_{n-1}, u)$ et $\mathscr{B}'_E = (e'_1, \dots, e'_{n-1}, u)$ ont la même orientation.

Notons $M$ la matrice de passage de $\mathscr{B}_H$ à $\mathscr{B}'_H$. Elle est de déterminant positif si et seulement si les deux sont de même orientation.

La matrice $M'$ de passage de $\mathscr{B}_E$ à $\mathscr{B}'_E$ s'écrit alors par blocs :

$$M' = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc, en développant par rapport à la dernière ligne ou à la dernière colonne : $\det M' = \det M$. On en déduit que $\mathscr{B}_H$ et $\mathscr{B}'_H$ ont la même orientation si et seulement si $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}'_E$ aussi.

# 3 Automorphismes orthogonaux

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien ***orienté***, de dimension $n$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

## 3.1 Définitions générales

**Définition 3.1.1.**
On appelle *endomorphisme orthogonal* toute application $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que pour tous $x, y \in E$, $\langle f(x) \mid f(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle$. On dit qu'un tel endomorphisme *préserve le produit scalaire.*

On a le théorème fondamental suivant :

**Théorème 3.1.2.** (i) Un endomorphisme $f$ est orthogonal si et seulement s'il préserve les normes, *i.e.* pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$. Un endomorphisme orthogonal est donc une isométrie.

(ii) Toute isométrie vectorielle est une bijection. Un endomorphisme orthogonal est donc un automorphisme.

**Démonstration.** (i) $(\Rightarrow)$ : évident puisque $\|f(x)\|^2 = \langle f(x) \mid f(x) \rangle = \langle x \mid x \rangle = \|x\|^2$.
$(\Leftarrow)$ : on utilise l'identité de polarisation : $\langle f(x) \mid f(y) \rangle = \frac{1}{2}(\|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2)$ $= \frac{1}{2}(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2) = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \langle x \mid y \rangle$.

(ii) Déjà fait.

**Exercice 3.1.3.**
Dans la démonstration précédente, utilise t-on la linéarité de $f$ ? Et si c'est le cas, où ?

□

**Proposition 3.1.4.**
Tout endomorphisme orthogonal change une base orthonormale en une base orthonormale.

**Démonstration.**
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une b.o.n. Ceci est équivalent à : $\forall i, j$, $\langle e_i \mid e_j \rangle = \delta_{ij}$, où $\delta$ désgine le symbole de Kronecker.
Donc $\forall i, j$, $\langle f(e_i) \mid f(e_j) \rangle = \langle e_i \mid e_j \rangle = \delta_{ij}$, et donc $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est également une b.o.n. □

**Proposition 3.1.5.**
Toute application (sans la supposer linéaire) de $E$ dans $E$ qui préserve le produit scalaire est nécessairement linéaire.

**Démonstration.**
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de $E$. Pour montrer que $f$ est linéaire, il suffit de montrer que pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $f(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(e_k)$. On pose $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$. Mais on a déjà vu que les coordonnées de $x$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ sont $\langle x \mid e_1 \rangle, \dots, \langle x \mid e_n \rangle$ donc pour tout $k$, $\lambda_k = \langle x \mid e_k \rangle$.
Mais $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est aussi une base orthonormale de $E$ car $f$ est orthogonale. On a alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{n} \langle f(x) \mid f(e_k) \rangle f(e_k) \\ &\qquad \text{car } (f(e_1), \dots, f(e_n)) \text{ est une base orthonormale} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle x \mid e_k \rangle f(e_k) \\ &\qquad \text{car } f \text{ préserve le produit scalaire} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(e_k) \end{aligned}$$

et donc la linéarité de $f$ est bien prouvée. □

**Remarque 3.1.6.**
Il y a en revanche des applications non linéaires qui préservent la norme sans préserver le produit scalaire. Par exemple, sur $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire $(x, y) \mapsto xy$, la norme associée au produit scalaire est la valeur absolue et l'application qui à tout rationnel associe lui-même et à tout irrationnel associe son opposé préserve la norme. En revanche, elle ne préserve pas le produit scalaire (regarder par exemple l'effet sur 1 et $\sqrt{2}$, ou raisonner par l'absurde en utilisant la remarque précédente).

**Exemple 3.1.7.**
Une symétrie orthogonale est un endomorphisme orthogonal. Ce n'est pas le cas des projecteurs orthogonaux.

Voyons maintenant les propriétés des endomorphismes orthogonaux :

**Proposition 3.1.8.** (i) on note $\mathscr{O}(E)$, appelé *groupe orthogonal*, l'ensemble des endomorphismes orthogonaux. $\mathscr{O}(E)$ est un sous-groupe de $\mathscr{GL}(E)$.

(ii) Un endomorphisme est orthogonal si et seulement s'il change une base orthonormale en une base orthonormale (auquel cas, il change toute base orthonormale en une base orthonormale).

(iii) Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormale de $E$, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $M = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Alors $f \in \mathscr{O}(E)$ si et seulement si $M\,{}^tM = {}^tMM = I_n$.

Soit $f \in \mathscr{O}(E)$.

(iv) $\det f = \pm 1$.

(v) L'ensemble des endomorphismes orthogonaux de déterminant 1 forment un sous-groupe de $\mathscr{O}(E)$ noté $\mathscr{SO}(E)$ ou $\mathscr{O}^+(E)$, et appelé le *groupe spécial orthogonal*. Les éléments de $\mathscr{SO}(E)$ sont dits *positifs* — on dit aussi que ce sont des *rotations* — ceux de $\mathscr{O}(E)\backslash\mathscr{SO}(E)$ sont dits *négatifs*, et l'ensemble $\mathscr{O}(E)\backslash\mathscr{SO}(E)$ est noté $\mathscr{O}^-(E)$.

(vi) Si $F$ est un sev de $E$ stable par $f$, $F^\perp$ est aussi stable par $f$.

(vii) $f$ est positif si et seulement s'il change une base orthonormale directe en une base orthonormale directe.

**Démonstration.** (i) On a déjà vu que tout endomorphisme orthogonal est une bijection, donc $\mathscr{O}(E)$ est une partie de $\mathscr{GL}(E)$. De plus $\text{Id}_E \in \mathscr{O}(E)$, donc cette partie est non vide.
En outre, si $f, g \in \mathscr{O}(E)$ on a pour tout $(x, y) \in E^2$ : $\langle (f \circ g)(x) \mid (f \circ g)(y) \rangle = \langle g(x) \mid g(y) \rangle$ car $f$ est orthogonale, et puisque $g$ l'est aussi on a $\langle g(x) \mid g(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle$. Par conséquent, $f \circ g \in \mathscr{O}(E)$. Donc $\mathscr{O}(E)$ est stable par composition.
Enfin, soit $f \in \mathscr{O}(E)$. On a $f$ bijective et pour tout $(x, y) \in E^2$, on a : $\langle x \mid y \rangle = \left\langle f(f^{-1}(x)) \,\middle|\, f(f^{-1}(y)) \right\rangle = \left\langle f^{-1}(x) \,\middle|\, f^{-1}(y) \right\rangle$. Donc $f^{-1}$ préserve le produit scalaire. $\mathscr{O}(E)$ est donc stable par passage à l'inverse.

(ii) On a déjà démontré le sens direct de cette proposition. Démontrons l'autre sens :
Soit $f$ un endomorphisme changeant une b.o.n. en une b.o.n. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une b.o.n. Pour montrer que $f$ est orthogonal, on va montrer que $f$ préserve la norme. Soit $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. Puisque $(e_1, \ldots, e_n)$ est une b.o.n, alors $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$. Mais $f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k)$ et $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une b.o.n, donc $\|f(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \|x\|^2$.

(iii) Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ les vecteurs de $\mathscr{B}$ et $C_1, \ldots, C_n$ les vecteurs colonnes de $M$. On a donc, pour tout $j$ : $C_i = (m_{ij})_{i \in [\![1,n]\!]}$. Le coefficient $a_{i,j}$ de la matrice ${}^tMM$ a pour expression $\sum_{k=1}^{n} m_{ki} m_{kj}$, et on remarque qu'il s'agit exactement du produit scalaire $\langle f(e_1) \mid f(e_j) \rangle$.
Notons $\mathscr{B}'$ la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$. ${}^tMM = I_n$ si et seulement si pour tout $(i, j)$, $a_{i,j} = \delta_{i,j}$, c'est-à-dire si et seulement si pour tout $(i, j)$, $\langle f(e_i) \mid f(e_j) \rangle = \delta_{i,j}$, c'est-à-dire si et seulement si $\mathscr{B}'$ est une base orthonormale.
Or $\mathscr{B}'$ est l'image d'une base orthonormale par l'endomorphisme $f$. Donc d'après le point ii il s'agit d'une base orthonormale si et seulement si $f$ est orthogonal. On en déduit $f \in \mathscr{O}(E) \iff {}^tMM = I_n$.

(iv) Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormale de $E$, on note $M = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Alors $\det f = \det M$. Or $\det M = \det{}^t M$, et donc $1 = \det I_n = \det({}^tMM) =$

$\det {}^tM.\det M = (\det M)^2 = (\det f)^2$. Donc $\det f = \pm 1$.

(v) L'application det est un morphisme de $\mathscr{O}(E)$ dans $(\{-1, 1\}, \times)$ puisque pour tous endomorphismes $f$ et $g$, $\det(f \circ g) = \det f.\det g$. Or $\mathscr{SO}(E)$ est son noyau, donc il s'agit d'un sous-groupe de $\mathscr{O}(E)$.

(vi) On suppose $F$ stable par $f$. Montrons d'abord que $f(F) = F$, et non pas seulement $f(F) \subset F$. Puisque $f(F) \subset F$, alors $f|_F$ est un endomorphisme de $F$. Mais puisque $f$ est injective, $f|_F$ l'est aussi est ainsi $f|_F$ est une bijection de $F$ dans lui-même, d'où le résultat.

Soit $x \in F^\perp$. Il s'agit de montrer que $f(x) \in F^\perp$, *i.e.* pour tout $y \in F$, $\langle f(x) \mid y\rangle = 0$. Fixons $y \in F$. Puisque $f(F) = F$, alors il existe $z \in F$ tel que $y = f(z)$. Ainsi $\langle f(x) \mid y\rangle = (\langle f(x) \mid f(z)\rangle = \langle x \mid z\rangle$ car $f$ est orthogonal. Mais $x \in F^\perp$ et $z \in F$, donc $\langle x \mid z\rangle = 0$ et ainsi $\langle f(x) \mid y\rangle = 0$. Par conséquent $f(x) \in F^\perp$.

(vii) Soit $\mathscr{B}$ une b.o.n.d. $f$ étant orthogonal, $f(\mathscr{B})$ est une base orthonormale. Or $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$ et $\det f = \pm 1$ et $\det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B})) = \det f.\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B}$, donc $f(\mathscr{B})$ est directe si et seulement si $\det f = 1$, c'est-à-dire si et seulement si $f \in \mathscr{SO}(E)$.

□

## 3.2 Matrices orthogonales

**Définition 3.2.1.**
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que $M$ est **orthogonale** si ${}^tM.M = M.{}^tM = I_n$, *i.e.* $M$ est inversible d'inverse ${}^tM$.

**Remarque 3.2.2.**
Il suffit de montrer que ${}^tM.M = I_n$ ou $M.{}^tM = I_n$. Exemple : $M = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

**Théorème 3.2.3.**
Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de $E$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors $f$ est orthogonal si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est orthogonale.

**Démonstration.**
Déjà vu en iii □

**Proposition 3.2.4.**
Soit $M$ une matrice orthogonale.

(i) ${}^tM$ est orthogonale.

(ii) L'ensemble des matrices orthogonales forment un sous-groupe de $(\mathscr{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ appelé *groupe orthogonal de degré $n$* et noté $\mathscr{O}(n)$.

(iii) La famille des colonnes de $M$ forme une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

(iv) La famille des lignes de $M$ forme une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

(v) $\det M = \pm 1$.

(vi) L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1 est un sous-groupe de $\mathscr{O}(n)$ noté $\mathscr{SO}(n)$ ou $\mathscr{O}^+(n)$, et appelé le *groupe spécial orthogonal de degré $n$*. Les matrices de $\mathscr{SO}(n)$ sont dites *positives*, celles de $\mathscr{O}(n)\backslash\mathscr{SO}(n)$ sont dites *négatives*, et l'ensemble $\mathscr{O}(n)\backslash\mathscr{SO}(n)$ est noté $\mathscr{O}^-(n)$.

(vii) Si $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de $E$, $f \in \mathscr{SO}(E)$ si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{SO}(n)$.

**Démonstration.**
On ne fait que redire ce qui a été vu avant. □

**Théorème 3.2.5.**
Le déterminant d'une famille de vecteurs ne dépend pas de la b.o.n. directe choisie, c'est-à-dire : soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{B}$ deux bases orthonormales directes de $E$, et $\mathscr{F}$ une famille de $n$ vecteurs de $E$. Alors $\det_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}) = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$.

**Démonstration.**
On a $\det_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}) = \det \mathscr{M}_{\mathscr{C}}(\mathscr{F})$, et $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \det \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$. Si on note $P = \mathscr{M}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$, alors $P$ est la matrice de l'endomorphisme transformant $\mathscr{B}$ en $\mathscr{C}$, qui est orthogonal direct puisque $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont des b.o.n.d., donc $P \in \mathscr{SO}(n)$, donc $\det P = 1$. Or $P$ est également la matrice de passage de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{B}$, donc $\mathscr{M}_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}) = P\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$. Or $\det P = 1$, on a donc le résultat voulu. □

**Remarque 3.2.6.**
De la même manière on montrerait que si $\mathscr{B}$ est

une b.o.n.d. et $\mathscr{C}$ est une b.o.n. indirecte, alors $\det_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}) = -\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$.

## 3.3 Produit mixte

Soit $(E, \langle | \rangle)$ un espace vectoriel euclidien orienté de dimension $n$.

**Définition 3.3.1.**
Soit $x_1$, ..., $x_n$ $n$ vecteurs de $E$. On appelle *produit mixte* de ces vecteurs et on note $[x_1, \dots, x_n]$ le déterminant de cette famille de vecteurs pris dans une base orthonormale directe $\mathscr{B}$ :

$$[x_1, \dots, x_n] = \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

**Remarque 3.3.2.**
Pour justifier cette définition, il est essentiel de remarquer :

1. d'une part qu'il existe au moins toujours une base orthonormale directe (il suffit de prendre n'importe quelle base othonormale et, si elle n'est pas directe, de changer l'un de ses vecteurs en son opposé) ;
2. d'autre part que la valeur de $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$ est la même dans toutes les bases orthonormales directes.

**Remarque 3.3.3.** 1. Le produit mixte de $x_1$, ..., $x_n$ s'interprète géométriquement comme le volume orienté d'un parallélépipède donc un sommet est l'origine et dont les arêtes partant de l'origine sont $[OM_1]$, ..., $[OM_n]$, où $\overrightarrow{OM_i} = x_i$ pour $i = 1, \dots, n$.

2. (hors-programme) Étant donné $n-1$ vecteurs $x_1, \dots, x_{n-1}$, l'application $\varphi : y \mapsto [x_1, \dots, x_n, y]$ est une forme linéaire. D'après le théorème de Riesz, il existe un unique vecteur $x$ tel que pour tout $y$, $\varphi(y) = \langle x \,|\, y \rangle$. Ce vecteur est appelé produit vectoriel de $x_1$,..., $x_{n-1}$ et est noté $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_{n-1}$. On a donc, par définition du produit vectoriel, pour tout $y$ : $[x_1, \dots, x_{n-1}, y] = < x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} | y >$. On peut remarquer que $x_1 \wedge \ldots x_{n-1}$ est orthogonal à $x_i$ pour $i = 1, \dots, n-1$, que le produit vectoriel est une application $(n-1)$ linéaire alternée et enfin que pour $n = 3$ on retrouve la définition connue du produit vectoriel de deux vecteurs dans l'espace.

**Proposition 3.3.4.**
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors pour tout $n$-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de $E$, on a

$$[f(x_1), \dots, f(x_n)] = \det f \times [x_1, \dots, x_n].$$

On savait déjà qu'une application linéaire $f$ transforme un parallélépipède en un parallélépipède. Ce résultat nous dit de plus que $f$ multiplie les volumes orientés par $\det f$, donc les volumes par $|\det f|$.

**Démonstration.**
Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale directe de $E$. Alors

$$\begin{aligned}[f(x_1), \dots, f(x_n)] &= \det_{\mathscr{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) \\ &= \det f \times \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) \\ &= \det f \times [x_1, \dots, x_n].\end{aligned}$$

□

## 3.4 Automorphismes orthogonaux du plan

Dans cette partie, $E$ est un ev euclidien **orienté** de dimension 2.

**Théorème 3.4.1.** 1. Soit $M \in \mathscr{SO}(2)$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$M = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

De plus l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) & \to & (\mathscr{SO}(2), \times) \\ \theta & \mapsto & R(\theta) \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupe surjectif, de noyau $2\pi\mathbb{Z}$. En particulier $\mathscr{SO}(2)$ est un groupe abélien.

2. Si $M \in \mathscr{O}(2) \backslash \mathscr{SO}(2)$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.
3. L'application
$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathbb{U} & \to & \mathscr{SO}(2) \\ & z & \mapsto & \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z) & \mathrm{Re}(iz) \\ \mathrm{Im}(z) & \mathrm{Im}(iz) \end{pmatrix} \end{array}$$
est un isomorphisme de groupes ($\mathbb{U}$ est l'ensemble des complexes de module 1).

**Démonstration.** 1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{O}(2)$. Alors les vecteurs colonnes de $M$ forment une bon, dc : $\begin{cases} ab & +cd & = & 0 \\ a^2 & +c^2 & = & 1 \\ b^2 & +d^2 & = & 1 \end{cases}$. Donc il existe $\theta, \rho \in \mathbb{R}$ tels que $a = \cos\theta, c = \sin\theta, b = \cos\rho, d = \sin\rho$. Alors $\cos\theta\cos\rho + \sin\theta\sin\rho = 0$ ie $\cos(\theta - \rho) = 0$ ie $\theta = \rho + \frac{\pi}{2}[\pi]$. Donc : $\begin{cases} \cos\theta & = & \sin\rho \\ \sin\theta & = & -\cos\rho \end{cases}$ ou $\begin{cases} \cos\theta & = & -\sin\rho \\ \sin\theta & = & \cos\rho \end{cases}$. Le premier cas n'est possible que si $M \in \mathscr{SO}(2)$, le second que si $M \in \mathscr{O}(2) \backslash \mathscr{SO}(2)$.

Pour finir 1., on a, pour tous $\theta, \rho \in \mathbb{R}$, $\varphi(\theta + \rho) = R(\theta + \rho) = R(\theta) \times R(\rho)$ après un calcul faisant intervenir la formule de trigonométrie $\cos(\theta + \rho) = \cos\theta\cos\rho - \sin\theta\sin\rho$. L'application $\varphi$ est donc bien un morphisme de groupes. Sa surjectivité est évidente d'après la première partie de cette démonstration. Son noyau est l'ensemble des réels $\theta$ tels que $\cos\theta = 1$ et $\sin\theta = 0$ : c'est donc bien $2\pi\mathbb{Z}$. Et enfin, on a évidemment $R(\theta) \times R(\rho) = \varphi(\theta+\rho) = \varphi(\rho+\theta) = R(\rho) \times R(\theta)$, donc $\mathscr{SO}(2)$ est abélien.

2. Même démonstration.
3. Il s'agit de montrer qu'il s'agit bien d'une application à valeurs dans $\mathscr{SO}(2)$, ce qui est assez facile dès qu'on remarque que tout complexe $z$ s'écrit sous la forme $\mathrm{e}^{i\theta}$ et que $\mathrm{Re}(z) = \cos\theta$, $\mathrm{Im}(z) = \sin\theta$, $\mathrm{Re}(iz) = -\sin\theta$, $\mathrm{Im}(iz) = \cos\theta$. Par un calcul direct (en utilisant le fait que $|z| = 1$) ou d'après le point précédent, on montre qu'il s'agit d'un morphisme de groupes. Enfin, ce morphisme est injectif car si $z \in \mathrm{Ker}\,\psi$, on a nécessairement $\mathrm{Re}(z) = 1$ et $\mathrm{Im}(z) = 0$, donc $z = 1$. Il est surjectif car toute $M \in \mathscr{SO}(2)$ s'écrit sous la forme $R(\theta)$, qui a pour antécédent $\mathrm{e}^{i\theta}$.

$\square$

**Théorème 3.4.2.**
Soit $f$ une isométrie vectorielle directe de $E$ (*i.e.* un automorphisme orthogonal positif). Alors :

(i) Il existe un unique $\theta$ (modulo $2\pi$) tel que la matrice de $f$ dans n'importe quelle b.o.n. **directe** soit $R(\theta)$.
On dit alors que $f$ est la *rotation vectorielle d'angle* $\theta$ et que $\theta$ est une *mesure* de l'angle de $f$.

(ii) Si $f$ n'est pas l'identité, l'ensemble des points fixes de $f$ (*i.e.* $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$) est réduit à $\{0\}$.

**Démonstration.** (i) Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux b.o.n. directes de $E$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{SO}(2)$, donc d'après le théorème 3.4.1, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = R(\theta)$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P.R(\theta).P^{-1}$, où $P$ est la matrice de passage $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})$. Mais comme $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux b.o.n. directes, $P \in \mathscr{SO}(2)$, et donc il existe $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $P = R(\rho)$. On a ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = R(\rho).R(\theta).R(-\rho) = R(\rho+\theta-\rho) = R(\theta)$.
Il faut démontrer l'unicité de $\theta$ : mais pour tout $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, on a $R(\theta_1) = R(\theta_2)$ ssi $R(\theta_1 - \theta_2) = \mathrm{Id}$ ssi $(\theta_1 - \theta_2) \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ ssi $(\theta_1 - \theta_2) \in 2\pi\mathbb{Z}$ ssi $\theta_1 = \theta_2$ $[2\pi]$.

(ii) Si $f = \mathrm{Id}$, on a immédiatement $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = E$.
Sinon, on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f - \mathrm{Id}) = R(\theta) - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice a pour déterminant $(\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta = 2(1 - \cos\theta)$. Or $f \neq \mathrm{Id}$, donc $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, *i.e.* $\cos\theta \neq 1$. Le déterminant précédent est donc non nul, c'est-à-dire que $(f - \mathrm{Id})$ est un automorphisme, donc son noyau est réduit à $\{0\}$.

$\square$

**Remarque 3.4.3.**
Géométriquement, une rotation vectorielle d'angle non nul modulo $2\pi$ n'a qu'un point fixe : son centre.

**Remarque 3.4.4.**
On parle de « rotation d'angle de mesure $\theta$ » dans le point (i) du théorème 3.4.2 sans avoir jamais défini auparavant les mots « angle » et « mesure ».

Bien que toute construction rigoureuse de la notion d'angle orienté soit hors programme, on peut cependant résumer la définition d'un angle orienté de la manière suivante : pour tous vecteurs non nuls $u$ et $v$ de $\mathbb{R}^2$, avec $u' = \|u\|^{-1} u$

et $v' = \|v\|^{-1} v$, il existe une unique rotation $r$ telle que $r(u') = v'$, et c'est cette rotation que l'on peut appeler *angle orienté* de $(u, v)$. Tout réel $\theta$ pour lequel $r$ admet $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour matrice dans une base orthonormale directe est alors appelé **UNE** *mesure* de l'angle $(u, v)$ et est généralement notée elle aussi $(u, v)$. La notation usuelle $(u, v) = \theta\ [2\pi]$ se trouve ainsi justifiée.

Attention, il est indispensable que la base utilisée pour déterminer $\theta$ via la matrice de $r$ soit **DIRECTE**, sinon une mesure de l'angle obtenue est en fait l'opposée d'une mesure de l'angle $(u, v)$, modulo $2\pi$.

**Théorème 3.4.5** (Détermination d'une mesure de l'angle d'une rotation)**.**
Soient $f$ une rotation vectorielle de $E$, $\theta$ une mesure de son angle et $u$ un vecteur **unitaire**. Soit $\mathscr{C}$ une b.o.n. directe de $E$. Alors $\cos\theta = \langle u \mid f(u) \rangle$ et $\sin\theta = \det_{\mathscr{C}}(u, f(u))$.

**Démonstration.**
Soit $v$ un vecteur tel que $(u, v)$ soit une b.o.n.d. $\mathscr{B}$ de $E$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = R(\theta)$. Donc $f(u) = \cos\theta u + \sin\theta v$, d'où $\langle u \mid f(u) \rangle = \cos\theta$, et $\det_{\mathscr{C}}(u, f(u)) = \det_{\mathscr{B}}(u, f(u)) = \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{vmatrix} = \sin\theta$. ☐

**Remarque 3.4.6.**
Si $u$ n'est pas unitaire, $\det(u, f(u)) = \|u\|^2 \sin\theta$ et $\langle u \mid f(u) \rangle = \|u\|^2 \cos\theta$.

**Remarque 3.4.7.**
On remarque que dans une b.o.n.d., la trace d'une rotation est $2\cos\theta$. La trace ne dépendant pas de la base choisie, si l'on connaît la matrice $M$ d'une rotation dans une base quelconque, alors une mesure $\theta$ de son angle vérifie $2\cos\theta = \mathrm{tr}\, M$.

**Théorème 3.4.8.**
Une application orthogonale négative (*i.e.* qui n'est pas une rotation) est une *réflexion*, c'est-à-dire une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

**Remarque 3.4.9.**
En dimension quelconque, une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

**Démonstration.**
Soit $f \in \mathscr{O}^-(E)$. Soit $\mathscr{B}$ une b.o.n.d. de $E$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = A(\theta)$. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$. On introduit le vecteur $u = \cos\frac{\theta}{2} e_1 + \sin\frac{\theta}{2} e_2$. On le complète en une b.o.n.d. avec $v = -\sin\frac{\theta}{2} e_1 + \cos\frac{\theta}{2} e_2$. On calcule $f(u) = A(\theta).\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = u$ et $f(v) = A(\theta).\begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = -v$. Par conséquent $\mathrm{Mat}_{(u,v)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, qui est bien la matrice d'une réflexion. ☐

**Théorème 3.4.10.**
Tout automorphisme de $E$ est un produit de réflexions.

**Démonstration.**
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Or dans ce produit de matrices, la première matrice est celle d'une réflexion d'après le théorème précédent, et la seconde également. ☐

Ce produit de matrices et le théorème 3.4.8 donnent la décomposition géométrique d'une rotation (attention : ce produit ne commute pas !).