Devoir surveillé n°1

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

On cherche à déterminer tous les réels t tels que $\cos t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

1) Démontrer qu'il existe une unique solution dans l'intervalle $]0, \pi/4[$. Dans la suite, on notera cette solution t_0.

2) Calculer $\cos(2t_0)$, puis démontrer que $\cos(4t_0) = -\cos(t_0)$.

3) En déduire t_0.

4) Résoudre l'équation.

II. Un système complexe.

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et (S) le système d'équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(S) \quad \begin{cases} |z| + z = a + ib \\ |z| - z = c + id \end{cases}$$

On souhaite déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c et d pour que le système admette au moins une solution.

1) Dans cette question, on suppose que le système admet une solution z.

- **a)** Déterminer une expression simple de $|z|$ en fonction de a, b, c et d. Que peut-on en déduire ?
- **b)** Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de z en fonction de a, b et c uniquement.
- **c)** En déduire une deuxième expression de $|z|$, puis que $b^2 = ac$.
- **d)** Qu'avez-vous démontré dans cette question ?

2) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c et d pour que le système admette au moins une solution.

3) Donner toutes les solutions des systèmes suivants :

- **a)** $(S_1) \begin{cases} |z| + z = \frac{3}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2} \\ |z| - z = \frac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$
- **b)** $(S_2) \begin{cases} |z| + z = -1 - i \\ |z| - z = -1 + i \end{cases}$

III. Un système trigonométrique.

On suppose que a, b, c sont trois réels appartenant à $[-\pi, \pi]$ tels que :

$$\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = 0 \\ \sin a + \sin b + \sin c = 0 \end{cases}$$

On souhaite démontrer que :

$$\begin{cases} \cos(2a)+\cos(2b)+\cos(2c)=0 \\ \sin(2a)+\sin(2b)+\sin(2c)=0 \end{cases}$$

1) On pose $x=\mathrm{e}^{ia}, y=\mathrm{e}^{ib}$ et $z=\mathrm{e}^{ic}$. Montrer successivement que

$$x+y+z=0 \quad ; \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \quad ; \quad yz+zx+xy=0 \quad ; \quad x^2+y^2+z^2=0$$

Conclure.

2) **a)** Montrer que $\left|\mathrm{e}^{ia}+\mathrm{e}^{ib}\right|=1$.

b) En factorisant par $\mathrm{e}^{i\frac{a+b}{2}}$, montrer que $\left|\cos\left(\frac{b-a}{2}\right)\right|=\dfrac{1}{2}$. Quelles sont les valeurs possibles pour $\mathrm{e}^{i\frac{b-a}{2}}$?

c) On rappelle que l'on appelle j le complexe $j=\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$. Montrer que $\mathrm{e}^{ib}=j\mathrm{e}^{ia}$ ou $\mathrm{e}^{ib}=j^2\mathrm{e}^{ia}$.

d) Calculer j^3 et montrer que $1+j+j^2=0$.

e) Si $\mathrm{e}^{ib}=j\mathrm{e}^{ia}$, montrer que $\mathrm{e}^{ic}=j^2\mathrm{e}^{ia}$. Obtenir une expression similaire dans le cas où $\mathrm{e}^{ib}=j^2\mathrm{e}^{ia}$.

f) Retrouver

$$\begin{cases} \cos(2a)+\cos(2b)+\cos(2c)=0 \\ \sin(2a)+\sin(2b)+\sin(2c)=0 \end{cases}$$

3) Que peut-on dire de $\cos(3a)$, $\cos(3b)$, $\cos(3c)$, $\sin(3a)$, $\sin(3b)$ et $\sin(3c)$?

IV. Fonctions trigonométriques.

On considère la fonction définie sur $[-1,1[$ par :

$$f(x)=\operatorname{Arcsin}(x)-2\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

On se propose de donner une expression simple de f par deux méthodes différentes.

1) <u>Première méthode :</u> Étude de fonction.

a) Montrer que f est bien définie sur $[-1,1[$.

b) Déterminer sur quel intervalle f est dérivable.

c) Déterminer f'.

d) En déduire une expression simple de f.

2) <u>Deuxième méthode :</u> Avec des fonctions hyperboliques.

a) Soit $y\in\mathbb{R}$. Déterminer un réel z simple dépendant de y tel que :

$$\frac{1+\operatorname{th}y}{1-\operatorname{th}y}=\mathrm{e}^{z}.$$

b) Montrer que tout réel $x\in]-1,1[$ s'écrit sous la forme $x=\operatorname{th}y$, pour un certain réel y.

c) Montrer que, pour tout $y\in\mathbb{R}$,

$$\sin\left(2\operatorname{Arctan}\left(\mathrm{e}^{y}\right)-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\operatorname{Arcsin}(\operatorname{th}y)\right).$$

d) Que peut-on donc dire, pour tout $y\in\mathbb{R}$, des quantités $2\operatorname{Arctan}\left(\mathrm{e}^{y}\right)-\dfrac{\pi}{2}$ et $\operatorname{Arcsin}(\operatorname{th}y)$?

e) Retrouver à partir de cela le résultat obtenu dans la question **1)d)**.

— FIN —