Feuille d'exercice n° 22 : **Intégration**

Exercice 1 ( ) Montrer que la composée de deux fonctions uniformément continues est uniformément continue.

Exercice 2 ( ) Montrer que $x \mapsto \ln x$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 Montrer que $\sqrt{\cdot}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 4 ( ) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue telle que $f(n) \underset{\substack{n\to+\infty \\ n\in\mathbb{N}}}{\longrightarrow} +\infty$.

Montrer que $f(x) \underset{\substack{x\to+\infty \\ x\in\mathbb{R}}}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 5 Soit $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$. Soit $f, g \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, avec g positive ou nulle.

Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que : $\displaystyle\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g$.

Exercice 6 Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

Montrer qu'il existe $a \in]0,1[$ telle que $f(a) = a$.

Exercice 7 Soit f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall k \in \{0,...,n\}$, $\displaystyle\int_0^1 f(u)u^k\,\mathrm{d}u = 0$.

Montrer que f admet au moins $n+1$ zéros distincts dans $]0,1[$.

Exercice 8 Soit $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. Montrer que

$$\left(\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\right) \Leftrightarrow [(f \text{ est positive}) \text{ ou } (f \text{ est négative})].$$

Exercice 9 ( )

1) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{1+x^n} \leqslant \sqrt{1+\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$ sur $\left[1; 1+\dfrac{1}{n}\right]$.

2) Étudier la convergence de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_1^{1+1/n} \sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 10 ( ) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue strictement croissante telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Étudier la limite de la suite de terme général $\displaystyle\int_0^1 f^n(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 11 ( ) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ (avec $a < b$), soit f continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer

$$\left(\int_a^b f^n(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup\{\, f(t) \mid t \in [a,b] \,\}$$

Indication : commencer par traiter le cas où f est constante.

Exercice 12 Déterminer les limites des expression suivantes lorsque $x \to +\infty$, sans pour autant calculer les intégrales correspondantes.

1) $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\cos(1/t)}{t}\,\mathrm{d}t$ **2)** $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ **3)** $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{1/t}}{t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 13 Calculer les intégrales suivantes.

1) $\displaystyle\int_0^1 (\mathrm{e}^x + \frac{x^2}{2} - \ln(1+x))\,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int_0^1 x(x+2-\mathrm{e})\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-2}{(2x-3)^2}\,\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^4 x \sin^2 x\,\mathrm{d}x$

5) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3}{(1+x^4)^2}\,\mathrm{d}x$

6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$

Exercice 14 Calculer les intégrales et primitives suivantes.

1) $\displaystyle\int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{e}^{\,\mathrm{Arcsin}\,t}\,\mathrm{d}t$

2) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$

3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$

4) $\displaystyle\int^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t+1}\sqrt{t+3}}$

5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$

6) $\displaystyle\int_1^5 \frac{\sqrt{t-1}}{t}\,\mathrm{d}t$

7) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t^2}}$

8) $\displaystyle\int_1^t \sqrt{\frac{1-\sqrt{t}}{t}}\,\mathrm{d}t$

9) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2 \sin t\,\mathrm{d}t$

Exercice 15 (✎) Déterminer les primitives suivantes.

1) $\displaystyle\int^x t\ln t\,\mathrm{d}t$

2) $\displaystyle\int^x t\,\mathrm{Arctan}\,t\,\mathrm{d}t$

3) $\displaystyle\int^x (t^2-t+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

4) $\displaystyle\int^x (t-1)\sin t\,\mathrm{d}t$

5) $\displaystyle\int^x (t+1)\mathrm{ch}t\,\mathrm{d}t$

6) $\displaystyle\int^x t\sin^3 t\,\mathrm{d}t$

Exercice 16 On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

1) Après avoir majoré $\dfrac{x^n}{1+x^n}$ pour $x \in [0,1]$ par une fonction simple, montrer que la suite (I_n) converge vers 0.

2) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3) À l'aide d'une intégration par parties, donner un équivalent de I_n.

Exercice 17 Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.

1) Calculer I_0 et I_1.

2) Établir une relation liant I_n et I_{n+1}.

3) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < I_n < \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$

4) Déterminer la limite puis un équivalent de I_n.

5) Soit $a \in \mathbb{R}$, soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)u_n$.
On suppose que $a \neq I_0$, montrer, en étudiant $D_n = |u_n - I_n|$, que $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 18 (✎🚲) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Justifier que les fonctions suivantes sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer leurs dérivées.

1) $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{2x}^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$ **2)** $\chi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x x\,f(t)\,\mathrm{d}t$ **3)** $\psi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t+x)\,\mathrm{d}t$

Exercice 19 (⛰) On définit la fonction F de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F(x) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{|\sin(tx)|}{t}\,\mathrm{d}t$.

1) Justifier proprement la définition de F.

2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa dérivée.

3) Nous étudions à présent le comportement asymptotique de F.

a) Montrer que $\forall x > 1,\ F(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor - 1}\left(\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t\right) + \int_{\pi\lfloor x\rfloor}^{\pi x} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$.

b) On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$. En déduire que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\pi}\ln x$.

Exercice 20 (⛰) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^x\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que f est décroissante.

2) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $(x+1)f(x+1) = xf(x-1)$.

3) Soit $\varphi(x) = xf(x)f(x-1)$. Montrer que φ est périodique de période 1.

4) Calculer $\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{N}^*$

5) En déduire que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$, puis que $\forall x \in [1, +\infty[,\ \varphi(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 21 Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, avec $a < b$. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$.

1) Montrer que si $f(0) = 0$ alors $\displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.

2) Montrer que, dans le cas général, $\displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0^+]{} f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

Exercice 22 (✎🚲) En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Exercice 23 (✎) Déterminer les primitives suivantes.

1) $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{it+1}$ **2)** $\displaystyle\int^x \mathrm{e}^t\cos t\,\mathrm{d}t$ **3)** $\displaystyle\int^x t\mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t$

Exercice 24 Soit $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, notons $a = \mathrm{Re}(\lambda)$ et $b = \mathrm{Im}(\lambda)$. Établir

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t-\lambda} = \ln|x-\lambda| + i\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x-a}{b}\right).$$

Exercice 25 (✎) Calculer la limite de la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{8k^3+n^3}.$$

Exercice 26 (✎) Calculer la limite de la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}.$$

Exercice 27 Donner un équivalent de la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Exercice 28 Calculer la limite puis un équivalent de la suite de terme général

$$P_n = \prod_{k=n+1}^{2n} k^{\frac{1}{k}}.$$

Exercice 29 Calculer la limite de la suite de terme général

$$P_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{p=1}^{n} (n+p)}.$$

Exercice 30 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n^\alpha}.$$

Rappel : c'est la suite $\left(\sum_{n=1}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$.