Feuille d'exercice n° 21 : **Espaces vectoriels de dimension finie**

Exercice 1 Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les familles de vecteurs suivantes.

1) $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (0,1,2,-1)$, $v_3 = (1,0,-2,3)$, $v_4 = (2,1,0,-1)$, $v_5 = (4,3,2,1)$.

2) $v_1 = (1,2,3,4)$, $v_2 = (0,1,2,-1)$, $v_3 = (3,4,5,16)$.

3) $v_1 = (1,2,3,4)$, $v_2 = (0,1,2,-1)$, $v_3 = (2,1,0,11)$, $v_4 = (3,4,5,14)$.

Ces vecteurs forment-ils :

1) Une famille libre ? Si c'est le cas, la compléter pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$. Si non donner des relations de dépendance entre eux et extraire de cette famille une base du sous-espace vectoriel engendré par celle-ci.

2) Une famille génératrice ? Si c'est le cas, en extraire au moins une base de l'espace. Si non, donner la dimension du sous-espace qu'ils engendrent.

Exercice 2

1) Montrer que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & (P(0), P') \end{array}$ est un isomorphisme.

2) En déduire que $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

Exercice 3 Définir par leurs équations cartésiennes dans la base canonique les sous-espaces vectoriels :

1) F engendré par : $\{(3,1,2);(2,1,3)\}$ dans $\mathbb{R}^3$;

2) G engendré par : $(1,2,3)$ dans $\mathbb{R}^3$;

3) H engendré par $\{(1,2,3,0);(4,-1,2,0);(2,1,-3,0)\}$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4 Soit (P_n) une suite de polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ \deg P_n = n$.

Remarque : on dit alors que la famille (P_n) est échelonnée en degré.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

2) La famille (P_n) est-elle une base de $\mathbb{K}[X]$?

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $a \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que la famille $((X-a)^i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$, est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Donner les coordonnées de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

Exercice 6 Dans $\mathbb{R}_3[X]$, soit $P = X^3 + 2X - 1$ et $Q = 2X - 1$. Déterminer une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ dont P et Q sont éléments.

Exercice 7 Soit $\mathbf{v}_1 = (1,0,0,-1), \mathbf{v}_2 = (2,1,0,1), \mathbf{v}_3 = (1,-1,1,-1), \mathbf{v}_4 = (7,2,0,-1)$ et $\mathbf{v}_5 = (-2,1,0,5)$.

1) Donner une base du sous-espace vectoriel (de $\mathbb{R}^4$) $F = \mathrm{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5)$.

2) Déterminer un supplémentaire G de F dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 8 (✎) Soient E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Soit f une application linéaire de E dans lui-même.

1) Montrer que, si $F \subset f(F)$ alors $f(F) = F$.

2) Montrer que, si f est injective et $f(F) \subset F$ alors $f(F) = F$.

Exercice 9 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes.

1) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ **2)** $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$ **3)** $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$

Exercice 10 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Ker}(g)$. Montrer que ces sommes sont directes.

Exercice 11 (🚲) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$.

1) Montrer que $\operatorname{rg}(u + v) \leqslant \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$.

2) En déduire que $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leqslant \operatorname{rg}(u + v)$.

Exercice 12 – Suite exacte d'applications linéaires –

Soient $E_0, E_1, ..., E_n$ $n+1$ espaces vectoriels sur un même corps commutatif $\mathbb{K}$, de dimensions respectives $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$. On suppose qu'il existe n applications linéaires $f_0, f_1, ..., f_{n-1}$ telles que :

$$\forall k \in \{0, ..., n-1\}, f_k \in \mathscr{L}(E_k, E_{k+1}).$$

et de plus :
- f_0 est injective ;
- $\forall j \in \{1, ..., n-1\}, \operatorname{Im} f_{j-1} = \operatorname{Ker}(f_j)$;
- f_{n-1} est surjective.

Montrer que

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \alpha_j = 0.$$

Exercice 13 Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $f : P \mapsto P + P' + P''$.

1) Montrer que f est injective. En déduire que f est bijective.

2) On appelle φ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $\varphi : P \mapsto P + P' + P''$. Montrer que φ est surjective puis bijective.

Exercice 14 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension égale à n. Montrer que

$$n \text{ est pair} \Leftrightarrow \exists f \in \mathscr{L}(E) \quad \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f.$$

Exercice 15 Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme u tel que $\operatorname{Ker}(u) = F$ et $\operatorname{Im}(u) = G$.

2) Construire un tel endomorphisme u avec $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \}$ dans $\mathbb{R}^3$ et $G = \{ \lambda(2, -1, -1) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$.

Exercice 16 () Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$, soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{rg}(f^n) = \mathrm{rg}(f^{n+1})$.

Exercice 17 Soit H_1 et H_2 deux hyperplans d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n.

1) Montrer que $\dim(H_1 \cap H_2) \geqslant n - 2$.

2) Généraliser ce résultat.

Exercice 18 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et F un sous-espace vectoriel de E distinct de E. Montrer que F est l'intersection d'un nombre fini d'hyperplans.

Indication : on pourra interpréter F comme noyau d'une certaine application linéaire.

Exercice 19 () Soient $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $H = \{ P \in \mathbb{K}_n[X] \mid P(\alpha) = 0 \}$. Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$ et en déterminer une base.

Exercice 20 () Montrer que les formes linéaires sur $\mathbb{K}^3$ $\varphi : (x, y, z) \mapsto x + 2y + 3z$ et $\psi : (x, y, z) \mapsto x - 2y + 3z$ sont linéairement indépendantes.