Informatique tronc commun – TP nº 11
Équations différentielles et pendule simple

Mercredi 2 mars 2016

1. **Lisez attentivement tout l'énoncé avant de commencer.**
2. Commencez la séance en créant un dossier au nom du TP dans le répertoire dédié à l'informatique de votre compte.
3. Vous ne rendrez pas de compte rendu : l'objectif est d'écrire *vous-même* le plus de programmes (fonctionnels !) possible. Il n'y aura pas de tests automatiques, l'obtention des bonnes courbes sera la garante du bon fonctionnement de votre programme.
4. Ayez toujours un crayon et un papier sous la main. Quand vous réfléchissez à une question, utilisez les !
5. Vous devez être autonome. Ainsi, avant de poser une question à l'enseignant, merci de commencer par :
   — relire l'énoncé du TP (beaucoup de réponses se trouvent dedans) ;
   — relire les passages du cours [1] relatifs à votre problème ;
   — effectuer une recherche dans l'aide disponible sur votre ordinateur (ou sur internet) concernant votre question.

   Il est alors raisonnable d'appeler votre enseignant pour lui demander des explications ou une confirmation !

Cette séance de TP est consacrée à l'implantation des méthodes numériques de résolution d'équations différentielles vues en cours.

1 Pour commencer

Avant toute chose, on prendra soin de recopier la fonction `euler_vectoriel(F,a,b,y0,pas)` donnée dans le chapitre 9 du cours.

1. Dans le cas fort improbable où vous ne vous en souviendriez pas.

2 Oscillations libres d'un pendule

On considère les oscillations libres d'un pendule. L'angle que fait ce pendule avec la verticale au temps t sera noté $\theta(t)$ et l'on étudie les oscillations du pendule entre 0 et 10 secondes. L'équation vérifiée par la fonction θ est alors

$$\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0, \tag{$\mathscr{P}$}$$

où

— α (proportionnel au coefficient de frottements) est exprimé en s^{-1} ;

— ω_0 (la pulsation propre) est exprimé en s^{-1} .

Si le coefficient de frottement est nul, l'équation devient

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0. \tag{$\mathscr{P}_{sf}$}$$

Enfin, on sait qu'au voisinage de 0 on a $\sin\theta = \theta + o(\theta^2)$. En supposant que les oscillations sont petites, on approche alors la dernière équation par

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0. \tag{$\mathscr{P}_{po}$}$$

Q1 Pour quelles variable Θ et fonctions F, F_{sf} et F_{po} les équations respectives $(\mathscr{P})$, $(\mathscr{P}_{sf})$ et $(\mathscr{P}_{po})$ sont-elles équivalentes aux équations suivantes ?

$$\dot{\Theta} = F(\Theta, t), \quad \dot{\Theta} = F_{sf}(\Theta, t), \quad \dot{\Theta} = F_{po}(\Theta, t).$$

2.1 Approximation des petites oscillations

On suppose les oscillations petites et sans frottements, on prendra donc les valeurs numériques suivantes : $h = 0s^{-1}$, $\omega_0 = \sqrt{2\pi}s^{-1}$. On étudiera les solutions sur un intervalle de temps de 10 secondes et l'on supposera que $\dot{\theta}(0) = 0s^{-1}$. Notamment, une méthode numérique effectuée avec n points correspondra à un pas de $\dfrac{10}{n}$ secondes.

Q2 Résoudre littéralement l'équation $(\mathscr{P}_{po})$.

Q3 Écrire une fonction `Fpo(Theta,t)` prenant en argument un vecteur `Theta` et un nombre `t` et renvoyant $F_{po}(\texttt{Theta}, \texttt{t})$.

Q4 Écrire une fonction `trace_po(th0,n,nom_de_fichier)` enregistrant dans `nom_de_fichier` le tracé de la solution exacte de $(\mathscr{P}_{po})$ ($\theta(0) = \texttt{th0}$, $\dot{\theta}(0) = 0s^{-1}$) ainsi que, sur le même graphe, celui de la solution obtenue par la méthode d'Euler avec `n` points.

Q5 Sur le modèle de la fonction `euler_vectoriel(F,a,b,y0,pas)`, écrire une fonction Python `rk4_vectoriel(F,a,b,y0,pas)` mettant en œuvre la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pour la fonction `F`, sur le segment $[a, b]$, avec un pas `pas` et la condition initiale `y0`. Cette fonction renverra un couple de tableaux.

Q6 Compléter la fonction `trace_po(th0,n,nom_de_fichier)` pour y superposer le tracé obtenu par la méthode de Runge-Kutta. Que remarque-t-on ?

2.2 Oscillations sans frottements

On suppose les oscillations sans frottements, mais pas forcément petites on prendra donc les valeurs numériques suivantes : $h = 0s^{-1}$, $\omega = \sqrt{2\pi}s^{-1}$. On étudiera les solutions sur un intervalle de temps de 10 secondes et l'on supposera que $\dot{\theta}(0) = 0s^{-1}$. Notamment, une méthode numérique effectuée avec n points correspondra à un pas de $\dfrac{10}{n}$ secondes.

Q7 Écrire une fonction `Fsf(Theta,t)` prenant en argument un vecteur `Theta` et un nombre `t` et renvoyant $F_{sf}(\texttt{Theta}, \texttt{t})$.

On veut maintenant vérifier numériquent l'approximation des petites oscillations. On connait déjà la solution exacte de $(\mathscr{P}_{po})$, il ne nous reste plus qu'à obtenir une approximation de la solution de $(\mathscr{P}_{sf})$.

Q8 Écrire maintenant une fonction `approx_po(th0,n,nom_de_fichier)` enregistrant dans `nom_de_fichier` le tracé de la solution exacte de $(\mathscr{P}_{po})$ $(\theta(0) = \texttt{th0}, \dot{\theta}(0) = 0s)$ ainsi que, sur le même graphe, celui de la solution de $(\mathscr{P}_{sf})$ obtenue par la méthode de Runge-Kutta avec `n` points. Que remarque-t-on ?

On cherche maintenant à estimer la *pseudo-période* de ces oscillations. On appelle *pic* d'un tableau une élément de ce tableau strictement plus grand que ses deux voisins. On considérera que le premier et le dernier élément d'un tableau ne sont pas des pics de ce tableau. On appelle alors *période* d'un tableau la moyenne des distances entre deux pics consécutifs.

Q9 Écrire une fonction `periode(L)` renvoyant la période du tableau `L`.

On prendra comme estimation de la pseudo-période du pendule simple la période du tableau des valeurs successives de θ obtenues par la méthode de Runge-Kutta.

Q10 Écrire une fonction `pseudo_periode(n)` prenant en argument un entier `n` et renvoyant le tableau des estimations de la pseudo-période du pendule, pour les conditions initiales $\dot{\theta}(0) = 0s^{-1}$ et $\theta(0) = \dfrac{k\pi}{2n}$, pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$.

On réfléchira à l'intervalle de temps utilisé ainsi qu'à la discrétisation utilisée dans la méthode de Runge-Kutta.

Q11 Écrire une fonction `trace_pseudo_periode(n,nom_de_fichier)` prenant en argument un entier `n` et enregistrant dans `nom_de_fichier` le tracé des points obtenus à la question précédente. On placera en abscisse les $\theta(0) = \dfrac{k\pi}{2n}$ et en ordonnée les pseudo-périodes estimées.

3 Oscillations forcées d'un pendule avec frottements

On suppose les oscillations forcées, avec frottements. La variable θ suit alors l'équation différentielle suivante.

$$\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = \cos(\omega t). \qquad (\mathscr{P}_f)$$

On prendra les valeurs numériques suivantes : $\alpha = 0,5s^{-1}$, $\omega_0 = \sqrt{2\pi}s^{-1}$ et $\omega = 1s^{-1}$. On étudiera les solutions sur un intervalle de temps de 10 secondes. Notamment, une méthode numérique effectuée avec n points correspondra à un pas de $\dfrac{10}{n}$ secondes.

Q12 Pour quelles variable Θ et fonction F_f l'équation $(\mathscr{P}_f)$ est-elle équivalente à l'équation suivante ?

$$\dot{\Theta} = F_f(\Theta, t).$$

Q13 Écrire une fonction `Ff(Theta,t)` prenant en argument un vecteur `Theta` et un nombre `t` et renvoyant $F_f(\texttt{Theta}, \texttt{t})$.

Q14 Écrire une fonction `euler_f(th0,thp0,n)` prenant en argument trois nombres `th0`, `thp0` et `h` et renvoyant les listes `les_t` et `les_y` obtenues en appliquant la méthode d'Euler avec `n` points à l'équation $(\mathscr{P}_f)$, avec les conditions initiales $\theta(0) = \texttt{th0}$ et $\dot{\theta}(0) = \texttt{thp0}$.

On produira des graphes convenables (graphe de θ et portraits de phase) pour les conditions initiales suivantes :

— $\theta(0) = \dfrac{\pi}{3}$ et $\dot{\theta}(0) = 0s^{-1}$;

— $\theta(0) = \dfrac{\pi}{3}$ et $\dot{\theta}(0) = 3\pi s^{-1}$.

Q15 Écrire une fonction `odeint_f(th0,thp0,n)` prenant en argument deux nombres `th0` et `thp0` ainsi qu'un entier `n` et renvoyant les listes `les_t` et `les_y` obtenues en appliquant la fonction `odeint` avec `n` points à l'équation $(\mathscr{P}_f)$, avec les conditions initiales $\theta(0) = \texttt{th0}$ et $\dot{\theta}(0) = \texttt{thp0}$.

On produira des graphes convenables (graphe de θ et portraits de phase) pour les mêmes conditions initiales qu'avant.