Feuille d'exercice n° 06 : **Fonctions usuelles**

Exercice 1 ( )

1. Montrer que la composée de deux applications monotones de même sens (resp. de sens contraires) est croissante (resp. décroissante).
2. Montrer que la somme de deux applications croissantes est croissante.
3. La somme de deux applications monotones est-elle nécessairement monotone ?
4. Le produit de deux applications croissantes est-il nécessairement une application croissante ?

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ est croissante tandis que $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} 2^{3x+2y} & = & 5 \\ 4^{2x} & = & 2^{2y+3} \end{cases}$

Exercice 4 Résoudre : $\ln \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{1}{2}(\ln x + \ln 3)$.

Exercice 5 ( ) Tracer les courbes représentatives des fonctions

$$x \mapsto f(x) = \sin(\operatorname{Arcsin} x), \qquad x \mapsto g(x) = \operatorname{Arcsin}(\sin x).$$

Exercice 6 ( ) Simplifier les expressions suivantes :

$$\arccos\left(\cos \frac{2\pi}{3}\right) \; ; \qquad \arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) \; ; \qquad \arccos\left(\cos 4\pi\right) \; ; \qquad \arctan\left(\tan \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\tan\left(\arcsin x\right) \; ; \qquad \sin\left(\arccos x\right) \; ; \qquad \cos\left(\arctan x\right)$$

Exercice 7 ( ) Démontrer les inégalités suivantes :

$$\operatorname{Arcsin} a < \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \quad \text{si } 0 < a < 1;$$

$$\operatorname{Arctan} a > \frac{a}{1+a^2} \quad \text{si } a > 0.$$

Exercice 8 On donne deux entiers p et q vérifiant : $0 < p < q$.

1. Exprimer $\tan(4x)$ en fonction de $\tan(x)$, pour tout $x \in [0, \pi/8[$.
2. En déduire la formule de Machin : $\dfrac{\pi}{4} = 4 \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{5} - \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{239}$.

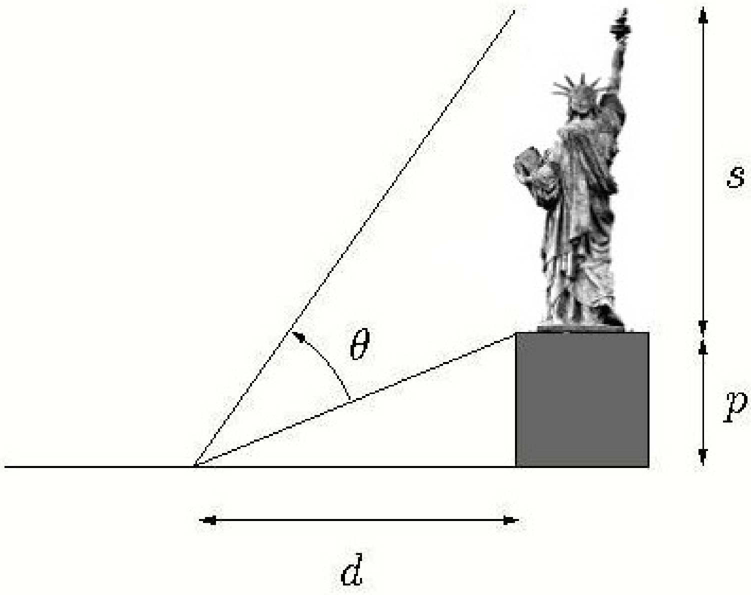

FIGURE 1 – La statue

Remarque : John Machin a pu calculer 100 décimales de π à la main en 1706 grâce à cette relation.

Exercice 9

Une statue de hauteur s est placée sur un piédestal de hauteur p. À quelle distance doit se placer un observateur (dont la taille est supposée négligeable) pour voir la statue sous un angle maximal (i.e. pour avoir θ maximal avec les notations de la figure **1**) ?

Exercice 10 Sur quelle partie de $\mathbb{R}$ est définie l'équation $\operatorname{Arccos} x = \operatorname{Arcsin}(1-x)$? La résoudre.

Exercice 11 On définit les deux fonctions f et g par $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right)$ et $g(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)$.

1. Déterminer leurs ensembles de définition.
2. Calculer, lorsque cela est possible, leurs dérivées.
3. Que peut-on en déduire concernant $f(x)$ et $g(x)$? Donner le maximum de précisions.
4. Tracer les courbes représentatives de f et de g (sur un même schéma).

Exercice 12 Calculer $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8}$.

Exercice 13 Résoudre : $\operatorname{Arcsin} 2x = \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}\left(x\sqrt{2}\right)$.

Exercice 14 Soit la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right) \end{array}$$

Montrer que la fonction f est bien définie et que pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on a les relations suivantes :

1. $\operatorname{th} \frac{f(x)}{2} = \tan \frac{x}{2}$
2. $\operatorname{th} f(x) = \sin x$
3. $\operatorname{ch} f(x) = \frac{1}{\cos x}$
4. $\operatorname{sh} f(x) = \tan x$.

Exercice 15 Calculer, pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ch}(a+kb), \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sh}(a+kb).$$

Exercice 16 Résoudre : $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = 0$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.