Feuille d'exercice n° 11 : **Groupes, anneaux, corps**

Exercice 1 (✎) — **Un peu de sudoku** —Montrer qu'il existe une seule table possible pour un groupe d'ordre 3 (c'est-à-dire à trois éléments). Est-ce vrai pour 4 ?

Exercice 2 (✎) Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G.

1. Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe de G.
2. Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 3 (✎) Soient G_1 et G_2 deux groupes, dont la loi est notée multiplicativement. On considère l'ensemble produit $G_1 \times G_2$ sur lequel on considère la loi interne $\otimes$ suivante :

$$\forall((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in (G_1 \times G_2)^2 \quad (x_1, x_2) \otimes (y_1, y_2) = (x_1y_1, x_2y_2)$$

Montrer que $(G_1 \times G_2, \otimes)$ est un groupe. Quel est son neutre ?

Exercice 4 (🚲) Montrer que les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont exactement tous les $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 Quel est le plus petit sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ (resp. de $(\mathbb{R}^*, \times)$) contenant 1 ? Contenant 2 ?

Exercice 6 On considère A et B deux sous-groupes de $(G, *)$ et on note :

$$A * B = \{x \in G / \exists a \in A, \exists b \in B \text{ tq } x = a * b\}$$

Montrer que $A * B$ est un sous-groupe de $(G, *)$ si et seulement si : $A * B = B * A$ (pour le sens direct, on commencera par montrer $B * A \subset A * B$).

Exercice 7 (🚲) Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{ 0 \}$. On pose $\alpha = \inf(\mathbb{R}_+^* \cap G)$

1. Montrer que si $\alpha > 0$, alors $G = \alpha\mathbb{Z}$ (où $\alpha\mathbb{Z}$ désigne $\{ k\alpha \mid k \in \mathbb{Z} \}$).
2. Montrer que si $\alpha = 0$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que pour tout réel x et tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in G$ vérifiant $|x - y| \leqslant \varepsilon$.

Exercice 8 Décrire tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$. Déterminer ceux qui sont injectifs et ceux qui sont surjectifs.

Exercice 9 Soit G un groupe noté multiplicativement.
Pour $a \in G$, on note τ_a l'application de G vers G définie par $\tau_a(x) = axa^{-1}$.

1. Montrer que τ_a est un endomorphisme du groupe $(G, \times)$.
2. Vérifier que $\forall a, b \in G$, $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$
3. Montrer que τ_a est bijective et déterminer son application réciproque.
4. En déduire que $\mathcal{T} = \{\tau_a \mid a \in G\}$ muni du produit de composition est un groupe.

Exercice 10 Soit A un anneau de Boole (c'est-à-dire que $\forall x \in A,\ x^2 = x$)

1. Calculer $(x+x)^2$ et en déduire : $\forall x \in A,\ x+x=0$.
2. Calculer $(x+y)^2$ et en déduire que A est commutatif.

Exercice 11 Soit $(A,+,\times)$ un anneau. On dit que $x \in A$ est *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$.

1. Deux identités universelles : soient x et $y \in A$ tels que $\underline{xy = yx}$, et soit $n \in \mathbb{N}$.
   a) Montrer la formule du binôme de Newton : $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.
   b) Montrer que : $x^n - y^n = (x-y) \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$.
2. a) Montrer que si x est nilpotent alors $1-x$ est inversible.
   b) Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors xy et $x+y$ sont nilpotents.
3. Un corps admet-il des éléments nilpotents non-nuls ?

Exercice 12 Soit $(A,+,\times)$ un anneau commutatif. Soit a un élément de A. On appelle racine carrée de a dans A, tout élément x de A tel que $x^2 = a$.

1. Montrer que si A est intègre, alors tout élément de A admet au maximum 2 racines carrées.
2. Prenons maintenant $(A,+,\times) = (\mathcal{F}(\mathbb{R}),+,\times)$. Soit $f : x \to 1$. Montrer que f admet une infinité de racines carrées.