

Feuille d'exercice n° 02 : **Fonctions usuelles**

Exercice 1 (✎) Factoriser les expressions suivantes, puis déterminer le tableau de signes de chacune.

1) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$

3) $\varphi(x) = x + 8 - \frac{16}{x-7}$

2) $g(x) = x \ln(x) - x - 2 \ln(x) + 2$

4) $\psi(x) = xe^x + 3e^x - 2x - 6$

Exercice 2 (✎) Dériver et dresser les tableaux de variations des fonctions suivantes.

1) $f : x \mapsto x^2 e^x$

3) $\varphi : x \mapsto \ln |x|$

2) $g : x \mapsto \frac{x}{\ln(x) - 1}$

4) $\psi : x \mapsto 3 \ln |x - 2| + 2 \ln |x + 3|$

Exercice 3 (✎)

- 1) Montrer que la somme de deux applications croissantes est croissante.
- 2) La somme de deux applications monotones est-elle nécessairement monotone ?
- 3) Le produit de deux applications croissantes est-il nécessairement une application croissante ?

Exercice 4 (✎) Déterminer le domaine de définition, de $g \circ f$ dans chaque cas.

1) $f : x \mapsto 1 + \frac{3}{x-5}$ et $g = \sqrt{\cdot}$.

3) $f : x \mapsto x + 3 \ln(x)$ et $g = \exp$.

2) $f = \cos$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x}$

4) $f = \sin$ et $g = \ln$.

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ est croissante tandis que $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 6 Résoudre dans \mathbb{R}^2 le système $\begin{cases} 2^{3x+2y} = 5 \\ 4^{2x} = 2^{2y+3} \end{cases}$.

Exercice 7 Résoudre l'équation $\ln \frac{x+3}{4} = \frac{1}{2}(\ln x + \ln 3)$.

Exercice 8 (✎🚲) Tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes.

1) $f : x \mapsto \sin(\text{Arcsin } x)$

2) $g : x \mapsto \text{Arcsin}(\sin x)$

Exercice 9 (✎) Simplifier les expressions suivantes.

- | | | | |
|--|---|---|------------------------------------|
| 1) $\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ | 3) $\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ | 5) $\operatorname{Arctan}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$ | 7) $\tan(\operatorname{Arcsin} x)$ |
| 2) $\operatorname{Arccos}\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)$ | 4) $\operatorname{Arccos}(\cos 4\pi)$ | 6) $\sin(\operatorname{Arccos} x)$ | 8) $\cos(\operatorname{Arctan} x)$ |

Exercice 10 (🚲) Démontrer les inégalités suivantes.

- Pour tout $a \in]0, 1[$, $\operatorname{Arcsin} a < \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$.
- Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\operatorname{Arctan} a > \frac{a}{1+a^2}$.

Exercice 11

- Soit $x \in [0, \pi/8[$. Exprimer $\tan(4x)$ en fonction de $\tan(x)$.
- En déduire la formule de Machin : $\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{239}$.

Remarque : John Machin a pu calculer 100 décimales de π à la main en 1706 grâce à cette relation.

Exercice 12

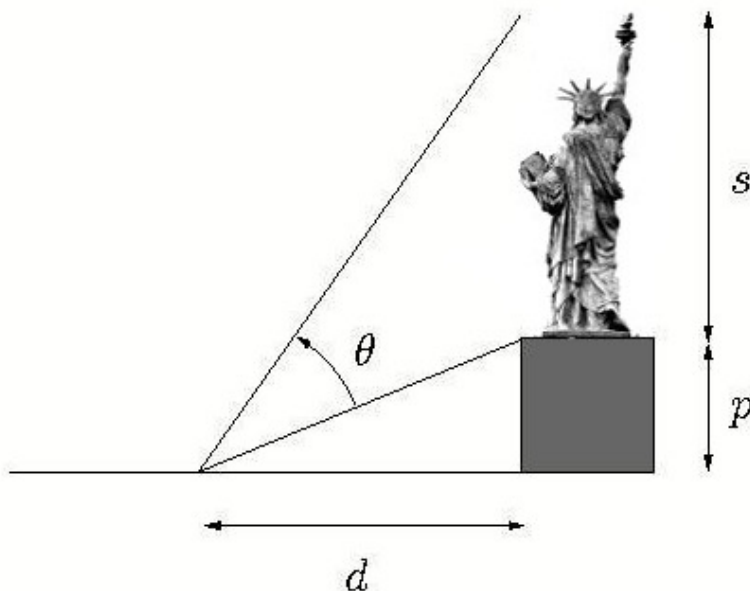


FIGURE 1 – La statue

Une statue de hauteur s est placée sur un piédestal de hauteur p . À quelle distance du pied de la statue un observateur (dont la taille est supposée négligeable) doit-il se placer pour la voir sous un angle maximal (*i.e.* pour avoir θ maximal, avec les notations de la figure 1) ?

Exercice 13 (🚲) Sur quelle partie de \mathbb{R} est définie l'équation $\operatorname{Arccos} x = \operatorname{Arcsin}(1-x)$? La résoudre.

Exercice 14 On définit les deux fonctions f et g par $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right)$ et $g : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)$.

- Déterminer leurs ensembles de définition.
- Calculer, lorsque cela est possible, leurs dérivées.
- Que peut-on en déduire concernant $f(x)$ et $g(x)$? Donner le maximum de précisions.
- Tracer les courbes représentatives de f et de g (sur un même schéma).

Exercice 15 () Calculer $\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{8}$.

Exercice 16 () Résoudre : $\operatorname{Arcsin} 2x = \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin} (x\sqrt{2})$.

Exercice 17 Soit la fonction $f : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\longrightarrow \mathbb{R}$.

$$x \longmapsto \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right)$$

Montrer que f est bien définie et que l'on a les relations suivantes, pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

1) $\operatorname{th} \left(\frac{f(x)}{2} \right) = \tan \left(\frac{x}{2} \right)$

3) $\operatorname{ch} (f(x)) = \frac{1}{\cos(x)}$

2) $\operatorname{th}(f(x)) = \sin(x)$

4) $\operatorname{sh} (f(x)) = \tan(x)$.

Exercice 18 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre l'équation $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = 0$.

