DS n° 08 : Fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom : Note :

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle $y' + 2xy = 2x$ vérifiant $f(0) = 0$. Alors :

$$f(7) = \boxed{} . \qquad (1)$$

I. Développements limités

Donner un DL à l'ordre 4 en 0 de l'expression suivante :

$$\exp(\sin(x) + \cos(2x)) = \boxed{} . \qquad (2)$$

Donner un développement asymptotique à l'ordre $1/x^2$ en $+\infty$ de l'expression suivante.

$$\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} \exp\left(\frac{x}{x-1}\right) = \boxed{} \qquad (3)$$

II. Intégration

On considère la fonction $g : x \to \int_{2x}^{x^2} \ln(xt)\,\mathrm{d}t$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g'(x) = \boxed{} . \qquad (4)$$

Calculer les intégrales suivantes.

$$\int_1^2 x^2 \ln x \,\mathrm{d}x = \boxed{} \qquad (5)$$

$$\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}} = \boxed{} \qquad (6)$$

Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\sin(t)(1+3\cos t)}$ sur $]0, \pi/2]$ est :

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin(t)(1+3\cos t)} = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} . \tag{7}$$

Indiquer la limite des suites de termes généraux suivants.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{8}$$

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{9}$$

III. Algèbre linéaire

On considère l'application linéaire $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + y + 2t \\ -2y + 2z + 2t \\ x + 2y - z + t \\ -2x - 5y + 3z - t \end{pmatrix} \end{array} \right.$. Une base du noyau de ψ est

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{10}$$

et une base de son image est

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} . \tag{11}$$

Soit $s \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ la symétrie par rapport à $\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y=z \}$ et parallèlement à $\mathrm{Vect}(0,1,1)$. Alors

$$s : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} . \tag{12}$$

— FIN —