

Fonctions usuelles - quelques exercices supplémentaires

Exercice 1 On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f , que l'on pourra noter \mathcal{D}_f .
- 2) Montrer que l'on peut réduire l'étude de f à l'intervalle $I = \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
- 3) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$, partout où cela est possible.
- 4) Étudier les variations de f sur I et en déduire le tableau de variations de f sur $[-\pi, \pi] \cap \mathcal{D}_f$.
- 5) Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé, sur $[-\pi, \pi] \cap \mathcal{D}_f$, en faisant apparaître ses tangentes et asymptotes remarquables.

On note g la restriction de f à l'intervalle I .

- 6) Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J , que l'on précisera, puis donner le tableau de variations de g^{-1} .
- 7) Pour $x \in I$, on pose $y = g(x)$. Exprimer x en fonction de y et en déduire une expression de g^{-1} .
- 8) En utilisant la formule précédente, déterminer l'ensemble de dérivabilité de (g^{-1}) et calculer $(g^{-1})'(y)$, partout où cela est possible.
- 9) Retrouver les résultats obtenus à la question précédente en utilisant la formule de dérivation d'une réciproque.
- 10) *Application* : calculer l'intégrale

$$\int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}.$$