Devoir à la maison n° 1

À rendre le 14 septembre

Dans tout le problème n désigne **un entier naturel non nul**.
À tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x).$$

Le problème est consacré à l'étude de la famille des fonctions f_n et à celle d'une suite liée à ces fonctions f_n.
On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère orthonormal $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie I : Étude des fonctions f_n

1) Soit h_n la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$

Étudier le sens de variation de h_n. En utilisant la valeur de $h_n(0)$, déterminer le signe de h_n sur $]-1,+\infty[$.

2) **a)** Pour tout x appartenant à $]-1,+\infty[$ vérifier que :

$$f_1'(x) = h_1(x),$$

et que pour tout n strictement supérieur à 1,

$$f_n'(x) = x^{n-1}h_n(x).$$

b) On suppose n impair. Pour tout x appartenant à $]-1,+\infty[$ justifier que $f_n'(x)$ et $h_n(x)$ sont de même signe.
Dresser alors le tableau de variations de la fonction f_n, lorsque n est impair, en précisant ses limites en -1 et $+\infty$.

c) On suppose n pair. Dressez de même le tableau de variations de f_n lorsque n est pair, en précisant ses limites en -1 et $+\infty$.

3) **a)** Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

b) Tracer ces deux courbes.

Partie II : Étude d'une suite

Dans cette partie, U désigne la suite de terme général U_n définie pour tout n entier naturel non nul par :

$$U_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,\mathrm{d}x.$$

4) Étude de la convergence :

a) Démontrer que :

$$0 \leqslant U_n \leqslant \frac{\ln 2}{n+1}.$$

b) En déduire que la suite U est convergente et donner sa limite.

c) À l'aide de l'encadrement obtenu au **4)a)**, déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait :

$$0 \leqslant U_n \leqslant \frac{1}{100}.$$

5) Calcul de U_1 :

a) En remarquant que pour tout x appartenant à $[0,1]$ on a

$$\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$$

calculer

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

b) Calculer U_1 au moyen d'une intégration par parties.

6) Calcul de U_n :

Pour tout x de $[0,1]$ et pour tout $n \geqslant 2$, on pose :

$$S_n(x) = 1 - x + \ldots + (-1)^n x^n \quad (1).$$

a) Démontrer que $S_n(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} \quad (2).$

b) En utilisant successivement les expressions (1) et (2) de $S_n(x)$,montrer que :

$$1 - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

c) En utilisant une intégration par parties et le résultat précédent, démontrer que :

$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right]$$

7) Application :
Soit E l'ensemble des points M du plan, de coordonnées (x, y) vérifiant :

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad f_2(x) \leqslant y \leqslant f_1(x).$$

Calculer U_2 et en déduire l'aire de E en cm^2.

— FIN —