Informatique tronc commun TP n° 10

Mercredi 3 février 2016

1. **Lisez attentivement tout l'énoncé avant de commencer.**
2. Commencez la séance en créant un dossier au nom du TP dans le répertoire dédié à l'informatique de votre compte.
3. Vous ne rendrez pas de compte rendu : l'objectif est d'écrire *vous-même* le plus de programmes (fonctionnels !) possible.
4. Ayez toujours un crayon et un papier sous la main. Quand vous réfléchissez à une question, utilisez les !
5. Vous devez être autonome. Ainsi, avant de poser une question à l'enseignant, merci de commencer par :
   — relire l'énoncé du TP (beaucoup de réponses se trouvent dedans) ;
   — relire les passages du cours [1] relatifs à votre problème ;
   — effectuer une recherche dans l'aide disponible sur votre ordinateur (ou sur internet) concernant votre question.

   Il est alors raisonnable d'appeler votre enseignant pour lui demander des explications ou une confirmation !

Le but de ce TP est d'apprendre à calculer de manière approchée des intégrales. On étudie ensuite une application sur le traitement de signal par ondelettes.

On s'intéresse au calcul approché d'une intégrale $I = \int_a^b f$, où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une application «raisonnable».

Vous pourrez trouver sur le site de la classe un document de test, intitulé `test_tp10.py`. Si vous l'enregistrez dans le même dossier que votre script (nommé par défaut `prog.py`), vous pourrez lancer des tests automatiques par le programme `py.test-3.4` (exemple : lancer la commande `py.test-3.4 > resultat.txt`).

1. Dans le cas fort improbable où vous ne vous en souviendriez pas.

1 Calcul approché d'une intégrale

La méthode des rectangles (à gauche) approche cette intégrale (vue comme une aire) par l'aire de N rectangles de largeur $\dfrac{b-a}{N}$, via la formule

$$\mathrm{Rg}_N(f) = \frac{b-a}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(a + k\frac{b-a}{N}\right).$$

La méthode des rectangles (à droite) approche cette intégrale (vue comme une aire) par l'aire de N rectangles de largeur $\dfrac{b-a}{N}$, via la formule

$$\mathrm{Rd}_N(f) = \frac{b-a}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(a + k\frac{b-a}{N}\right) = \frac{b-a}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(a + (k+1)\frac{b-a}{N}\right).$$

La méthode des trapèzes approche cette intégrale (vue comme une aire) par l'aire de N trapèzes de largeur $\dfrac{b-a}{N}$, via la formule

$$\mathrm{T}_N(f) = \frac{b-a}{N}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} f\left(a + k\frac{b-a}{N}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Rg}_N(f) + \mathrm{Rd}_N(f)\right).$$

Enfin, la méthode de Simpson approche cette intégrale (vue comme une aire) par la somme des aires sous la courbe de N polynômes du second degré, via la formule

$$\mathrm{S}_N(f) = \frac{b-a}{6N}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f\left(a + k\frac{b-a}{N}\right) + 4\sum_{k=0}^{N-1} f\left(a + \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{N}\right) + f(b)\right].$$

On se réfèrera au cours de mathématiques pour plus de détails. On considère aussi la fonction suivante :

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{rcl} \cos(8\pi x) & \text{si} & x \leq 1/4\ ; \\ 1/2 + \cos(160\pi x) & \text{si} & 1/4 < x \leq 1/2\ ; \\ -1/2 & \text{si} & 1/2 < x \leq 3/4\ ; \\ 8(x-1)(16x-13) + \cos(32\pi x) & \text{si} & x > 3/4. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Q1 Écrire une fonction `f(x)` renvoyant $f(\mathtt{x})$, pour $\mathtt{x} \in [0,1]$.

Q2 Écrire une fonction `plot_f(nom_de_fichier)` ne renvoyant rien et enregistrant dans `nom_de_fichier` le graphe de la fonction f.

Q3 Calculer à la main $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

Q4 Écrire une fonction `Rg(g,a,b,N)` renvoyant $\mathrm{Rg}_{\mathtt{N}}(\mathtt{g})$ pour une fonction `g` définie sur $[\mathtt{a},\mathtt{b}]$.

Q5 Écrire une fonction `Rd(g,a,b,N)` renvoyant $\mathrm{Rd}_{\mathtt{N}}(\mathtt{g})$ pour une fonction `g` définie sur $[\mathtt{a},\mathtt{b}]$.

Q6 Écrire une fonction `T(g,a,b,N)` renvoyant $\mathrm{T}_{\mathtt{N}}(\mathtt{g})$ pour une fonction `g` définie sur $[\mathtt{a},\mathtt{b}]$.

Q7 Écrire une fonction `S(g,a,b,N)` renvoyant $\mathrm{S}_{\mathtt{N}}(\mathtt{g})$ pour une fonction `g` définie sur $[\mathtt{a},\mathtt{b}]$.

2 Traitement du signal par ondelettes.

On considère *l'ondelette mère* de la base de Haar :

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \text{si} & 0 \leq x < 1/2\ ; \\ -1 & \text{si} & 1/2 \leq x < 1\ ; \\ 0 & \text{sinon} & . \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Pour tout entier naturel r (que l'on appelle *niveau de résolution*) et tout entier $i \in [\![0, 2^r[\![$, on considère *l'ondelette fille* :

$$\psi_{r,i} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{2^r}\psi\left(2^r\left(x - \dfrac{i}{2^r}\right)\right). \end{array} \right.$$

Remarque 2.0.1. Ces fonctions ont les propriétés suivantes : pour tout $r, s \in \mathbb{N}$ et tout $i \in [\![0, 2^r[\![$, $j \in [\![0, 2^s[\![$ avec $(r, i) \neq (s, j)$

1. $\psi_{r,i}$ est nulle hors de $[0, 1]$;
2. $\displaystyle\int_0^1 \psi_{r,i}(t)\mathrm{d}t = 0$;
3. $\displaystyle\int_0^1 \psi_{r,i}(t)^2\mathrm{d}t = 1$;
4. $\displaystyle\int_0^1 \psi_{r,i}(t)\psi_{s,j}(t)\mathrm{d}t = 0.$

Q8 Écrire une fonction `psi(r,i,x)` renvoyant $\psi_{\mathtt{r},\mathtt{i}}(\mathtt{x})$, pour $\mathtt{r} \in \mathbb{N}$, $\mathtt{i} \in [\![0, 2^{\mathtt{r}}[\![$ et $\mathtt{x} \in \mathbb{R}$.

Q9 Écrire une fonction `plot_psi(r,i,nom_de_fichier)` ne renvoyant rien et enregistrant dans `nom_de_fichier` le graphe de la fonction $\psi_{r,i}$ sur $[0, 1]$.

Si $r \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![0, 2^r[\![$, on pose

$$\alpha_{r,i} = \int_0^1 \psi_{r,i}(t)f(t)\mathrm{d}t$$

et

$$\alpha_{-1} = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

Si $r \in \mathbb{N}$, on pose

$$H_r(t) = \sum_{i=0}^{2^r-1} \alpha_{r,i}\psi_{r,i}(t).$$

Enfin, si $N \in \mathbb{N}$, on reconstruit le signal de f au niveau de résolution N par :

$$\widehat{f}_N(t) = \alpha_{-1} + \sum_{r=0}^{N} H_r(t) = \alpha_{-1} + \sum_{r=0}^{N}\sum_{i=0}^{2^r-1} \alpha_{r,i}\psi_{r,i}(t).$$

Q10 En vous aidant des graphes de ψ tracés dans la question précédente, exprimer littéralement $\alpha_{r,i}$ en fonction d'intégrales de la fonction f (ainsi que de r et de i).

Q11 Écrire une fonction `alpha(r,i)` calculant $\alpha_{\mathtt{r},\mathtt{i}}$ pour $\mathtt{r} \in \mathbb{N}$ et $\mathtt{i} \in [\![0, 2^{\mathtt{r}}[\![$. On utilisera la méthode de Simpson pour calculer les intégrales de f.

Q12 Écrire une fonction `fchap(a,t,N)` calculant $\widehat{f}_{\mathtt{N}}(t)$ pour $\mathtt{N} \in \mathbb{N}$, $\mathtt{t} \in \mathbb{R}$ et en supposoant que les coefficients $\alpha_{r,i}$ ainsi que α_{-1} ont été précalculés et sont contenus dans `a`.

Par exemple, avec $\mathtt{N} = 2$, on supposera que

$$\mathtt{a} = [[\alpha_{0,0}] \ , \ [\alpha_{1,0}, \alpha_{1,1}] \ , \ [\alpha_{2,0}, \alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}] \ , \ \alpha_{-1}] \, .$$

Q13 Écrire une fonction `plot_Haar(nom_de_fichier)` enregistrant les graphes de f, $\widehat{f}_0$, $\widehat{f}_1$, $\widehat{f}_3$ et $\widehat{f}_6$ dans `nom_de_fichier`.
On fera attention à ne calculer les coefficients $\alpha_{r,i}$ qu'une fois !