Feuille d'exercice n° 18 : **Espaces vectoriels**

Exercice 1 (✎) Dire si les objets suivants sont des espaces vectoriels :

1. L'ensemble des fonctions réelles sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2. L'ensemble des fonctions impaires sur $\mathbb{R}$.
3. L'ensemble des fonctions sur $[a,b]$ continues, vérifiant $f(a) = 7f(b) + \displaystyle\int_a^b t^3 f(t)\,dt$.
4. L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant $f'' + \omega^2 f = 0$.
5. L'ensemble des primitives de la fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^{x}$ sur $\mathbb{R}$.
6. L'ensemble des nombres complexes d'argument $\pi/4 + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.
7. L'ensemble des points (x,y) de $\mathbb{R}^2$, vérifiant $\sin(x+y) = 0$.
8. L'ensemble des vecteurs (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux au vecteur $(-1,3,-2)$.

Exercice 2 (✎) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On pose $F = E^2$. Pour tout couple $((x_1,y_1),(x_2,y_2))$ d'éléments de F, on pose $(x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, et tout $(x,y) \in F$, on note $\lambda.(x,y) = (ax-by, bx+ay)$, où $a = \mathrm{Re}\,\lambda$ et $b = \mathrm{Im}\,\lambda$.

Montrer que $(F,+,.)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (appelé le complexifié du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E).

Exercice 3 (🚲)

1. Soient les vecteurs $v_1 = (1-i, i)$, $v_2 = (2, -1+i)$ et $v_3 = (i+1, i)$ dans $\mathbb{C}^2$. v_1 est-il combinaison linéaire de v_2 et v_3 dans $\mathbb{C}$ considéré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel ? comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
2. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la fonction $x \mapsto \sin x$ est-elle combinaison linéaire des deux fonctions $x \mapsto \sin 2x$ et $x \mapsto \sin 3x$? Généraliser.

Exercice 4

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que $F \cup G = F + G \Leftrightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 5 (✎) Soient $F = \left\{ f \in \mathscr{C}([-1,1],\mathbb{C}) \mid \displaystyle\int_{-1}^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ et $G = \{ f \in \mathscr{C}([-1,1],\mathbb{C}) \mid f \text{ constante} \}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{C}([-1,1],\mathbb{C})$.

Exercice 6 (🚲) Soit $F = \{ f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) / f(0) + f(1) = 0 \}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 7 Soient F, G, F', G' des sous-espaces vectoriels de E tels que $F \cap G = F' \cap G'$. Montrer que $(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F$.

Exercice 8 Soient A et B deux parties d'un ev E. Comparer $\operatorname{Vect}(A \cap B)$ et $\operatorname{Vect} A \cap \operatorname{Vect} B$.

Exercice 9

Soient $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ deux sous-espaces affines **disjoints** d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On note V et W leurs directions respectives. Soient $a \in \mathscr{V}$ et $b \in \mathscr{W}$. On pose $U = V + W$, $\mathscr{V}' = a + U$ et $\mathscr{W}' = b + U$. Montrer que $\mathscr{V}'$ et $\mathscr{W}'$sont deux sous-espaces affines disjoints, de même direction et contenant respectivement $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$.

Exercice 10 (✎) Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x^2$
2. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 4x - 3$
3. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x^2}$
4. $\mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R} : f \mapsto f(3/4)$
5. $\mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R} : f \mapsto -\displaystyle\int_{1/2}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$
6. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sin(3x + 5y)$
7. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy$
8. $\mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R}) \to \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R}) : f \mapsto \left\{x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \int_0^1 f(t)\, dt\right\}$

Exercice 11 (✎)

Calculer le noyau et l'image de l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x + 2y \\ -x - 4y + 2z \\ 2x + 5y - z \end{pmatrix} \end{array}$.

Exercice 12 Donner des exemples d'applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

1. $\operatorname{Ker}(f)$ inclus strictement dans $\operatorname{Im}(f)$.
2. $\operatorname{Im}(f)$ inclus strictement dans $\operatorname{Ker}(f)$.
3. $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Im}(f)$.
4. $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires.

Exercice 13 (✎)

Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$ et $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$.
2. Montrer que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\} \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$.
3. Montrer que $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f \Longleftrightarrow \operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$.

Exercice 14 (✎🚲)

1. Pour des applications linéaires $f : E \to F$, $g : F \to G$, établir l'équivalence

$$g \circ f = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} g.$$

2. Soit f un endomorphisme d'un e.v. E, vérifiant l'identité $f^2 + f - 2i_E = 0$.

(a) Montrer que $(f - i_E) \circ (f + 2i_E) = (f + 2i_E) \circ (f - i_E) = f^2 + f - 2i_E = 0$.

(b) En déduire que $\mathrm{Im}(f - i_E) \subset \mathrm{Ker}(f + 2i_E)$ et $\mathrm{Im}(f + 2i_E) \subset \mathrm{Ker}(f - i_E)$.

(c) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - i_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + 2i_E)$.

Exercice 15 Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ où E est un $K-$espace vectoriel. On suppose :

$$\forall x \in E, \exists \lambda \in K, f(x) = \lambda x.$$

Montrer :

$$\exists \lambda \in K, \forall x \in E, f(x) = \lambda x.$$

Exercice 16 Dans $\mathbb{R}^4$, comparer (*i.e.* dire s'ils sont égaux ou si l'un est inclus dans l'autre) les sous-espaces F et G suivants :

$$\begin{array}{rcl} F & = & \mathrm{Vect}\{(1,0,1,1), (-1,-2,3,-1), (-5,-3,1,-5)\} \\ G & = & \mathrm{Vect}\{(-1,-1,1,-1), (4,1,2,4)\} \end{array}$$

Exercice 17 Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une famille génératrice.

Exercice 18 Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\overrightarrow{v_1}(1,1,0)$, $\overrightarrow{v_2}(4,1,4)$ et $\overrightarrow{v_3}(2,-1,4)$.

1. Montrer que $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ ne sont pas colinéaires. Faire de même avec $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_3}$, puis avec $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$.
2. La famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ est-elle libre ?

Exercice 19 Pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$, on pose $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_k(x) = x^k$. Montrer que la famille $(f_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 20

Quelle est la nature de l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -5x + 2y \\ -12x + 5y \\ -4x + 2y - z \end{pmatrix} \end{array}$? Déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 21 Soient $p, q \in \mathscr{L}(E)$. Montrer qu'on a équivalence entre les deux assertions suivantes :

(i) $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.

(ii) p et q sont deux projecteurs de même noyau.

Exercice 22 On pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$ et $G = \mathrm{Vect}(1, 1, 0)$. On admet que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une expression explicite de la projection de $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G.

Exercice 23 Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev E.
Montrer que :

$$p - q \text{ est un projecteur si et seulement si } p \circ q = q \circ p = q.$$