Devoir à la maison n° 06

À rendre le 12 novembre

I. Longueur d'une courbe

Pour toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, on note :

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\,\mathrm{d}t\ ,$$

que l'on admet être une expression intégrale de la longueur de la courbe représentative de f.

1) Vérifier la formule donnant $L(f)$ pour f définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = t$.

2) Calculer $L(f)$ pour f définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = \mathrm{ch}(t)$.

3) Un exemple de calcul de longueur d'un arc de courbe.

- **a)** Calculer $L(f)$ pour f définie sur $\left[0; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ par $f(t) = \sqrt{1 - t^2}$.
- **b)** Retrouver le résultat de la question précédente sans calcul, par des condidérations géométriques.

4)

- **a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{sh}(x) = 2$.
- **b)** Si $x \in \mathbb{R}$, donner $\mathrm{ch}(2x)$ et $\mathrm{sh}(2x)$ en fonction de $\mathrm{ch}(x)$ et de $\mathrm{sh}(x)$ (formules de duplication hyperboliques).
- **c)** Soit f définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = t^2$. Calculer $L(f)$, en s'inspirant de la question 2.

II. Systèmes différentiels

L'objet de cet exercice est l'étude de quelques systèmes d'équations différentielles.

1) On cherche à déterminer dans cette question quelles sont les fonctions f_1 et g_1, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, qui vérifient pour tout $t \in \mathbb{R}$ le système suivant :

$$(\mathcal{S}_1) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} f_1'(t) & = & 2g_1(t) \\ g_1'(t) & = & -f_1(t) + t\mathrm{e}^{\,t} \end{array} \right.$$

Considérons deux fonctions f_1 et g_1 qui conviennent.

- **a)** Montrer que f_1 est deux fois dérivable et calculer f_1''.
- **b)** En déduire que f_1 est solution de l'équation différentielle $y'' + 2y = 2t\mathrm{e}^{\,t}$ et résoudre cette équation différentielle.

c) En déduire g_1 puis les solutions du système $(\mathcal{S}_1)$.

d) Montrer qu'il existe une unique solution (que l'on déterminera) de ce système telle que $f_1(0) = g_1(0) = 0$.

2) On cherche à déterminer dans cette question quelles sont les fonctions f_2 et g_2, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, qui vérifient pour tout $t \in \mathbb{R}$ le système suivant :

$$(\mathcal{S}_2) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} f_2'(t) & = & 7f_2(t) - 5g_2(t) + \mathrm{sh}(t) \\ g_2'(t) & = & 10f_2(t) - 8g_2(t) + \mathrm{ch}(t) \end{array} \right.$$

Considérons deux fonctions f_2 et g_2 qui conviennent.

a) On pose $u = 2f_2 - g_2$. Montrer que u est solution d'une équation différentielle du premier ordre que l'on résoudra.

b) On pose $v = -f_2 + g_2$. Montrer que v est solution d'une équation différentielle du premier ordre que l'on résoudra.

c) En déduire f_2 et g_2 puis les solutions du système $(\mathcal{S}_2)$.

d) Montrer qu'il existe une unique solution (que l'on déterminera) de ce système telle que $f_2(0) = g_2(0) = 0$.

— **FIN** —