Devoir surveillé n° 06 - Résumé

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 32 points, ramené sur 5 points.
- Problèmes : chaque question sur 4 points (sauf II.I.2.c, II.I.3, II.I.4.b et III.I.2.b sur 2 points).

Statistiques descriptives.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \min\left(\frac{1}{10}\lceil 10x \rceil ; 20\right)$.

	Calculs	Ex. I	Ex. II	Ex. III	Note finale
Note maximale	20	33	37	32	17
Note minimale	0	0	4	2	4
Moyenne	$\approx 10,20$	$\approx 18,07$	$\approx 12,14$	$\approx 16,94$	$\approx 10,20$
Écart-type	$\approx 4,07$	$\approx 7,06$	$\approx 7,70$	$\approx 8,76$	$\approx 3,08$

Remarques générales.

Donner un argument inutile (mais vrai) ne peut que vous faire perdre des points (ainsi que du crédit), même si ce n'est pas une erreur. Par exemple, si vous avez montré que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 1$, rajouter que (u_n) est décroissante avant de dire que, par passage à la limite, $\gamma \leqslant 1$, est maladroit. Cela risque de faire penser au correcteur que vous n'avez rien compris à cette question !
Quand vous manipulez des expressions, pensez à les garder le plus factorisées possible. Ne développez une expression que lorsque vous en avez réellement besoin.
Pensez à bien réutiliser le résultat des questions précédentes. Ici, par exemple, dans l'exercice I, certains ont reproduit le raisonnement de la question deux ou trois fois. Cela vous fait perdre du temps (et un peu de crédit auprès du correcteur).

Exercice I

1 On ne peut pas poser $X = a - 1$: X est l'indéterminée, ce n'est pas une variable.

2b Poser comme hypothèse de récurrence, “pour tout n, (H_n) : (u_n) est strictement croissante” est absurde.

2b Il est bon d'observer que $x \mapsto x^2 + 2x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, mais il faut aussi voir que $a_1 > a_0$! Il suffit de voir que $x \mapsto x^2 + 2x$ est somme de fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+$. Faire une étude de fonction détaillée est une perte de temps et ne vous met pas en valeur.

2c Mieux vaut préciser que P a alors une infinité de racines DISTINCTES.

2d J'ai lu : $(-1-1)^2 - 1 = 1$ ou 2, plusieurs fois :(

2e $(a_n + 1)$ n'est pas une suite géométrique de raison 2, et encore moins de raison 2^n.

4 Il ne suffisait pas de montrer que 0 était la seule racine potentielle, il fallait aussi montrer que c'était bien une racine.

5 Si P a pour seule racine 0, cela ne veut pas dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda X$. Vous oubliez la multiplicité de la racine.
Cela ne veut pas non plus dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P = X^n$! Il ne fallait pas oublier les coefficients dominants.
Et encore moins que P s'écrit $\sum_{k=1}^{n} a_k X^k$.
On pouvait tout de suite voir que, si P est solution de $(*)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ P^n l'est aussi. X est aussi solution évidente de $(*)$.
Il ne fallait pas non plus oublier les solutions constantes.

Exercice II

Certains ont mal compris la définition de u_n et ont pensé que $\ln n$ faisait partie de la somme. Par convention, si cela avait été le cas, il y aurait eu des parenthèses pour délimiter les termes de la somme.

I2c Je lis « (u_n) est décroissante et minorée par $\frac{1}{n}$, donc converge ». Cela n'a aucun sens ! Un minorant est une ☠ **CONSTANTE** ☠.

Dans le même genre, dire “$\frac{1}{n}$ tend vers 0 donc (u_n) est minorée par 0” est faux.

I3 Vous pouviez passer à la limite dans l'inégalité $\forall n \in \mathbb{N}^* \ u_n \leqslant 1$ ou utiliser la décroissance de (u_n) et le fait que $u_1 = 1$.

Cependant, vous ne devez pas mélanger les deux arguments !

I4a Beaucoup d'erreurs dans l'étude de cette fonction, qui n'avait rien de terrible. Si c'était votre cas, entraînez-vous !

Pensez à calculer à la fois $f_k(k)$ et $f_k(k+1)$. Cela vous permettra de voir qu'affirmer que f_k est croissante est une erreur.

Résoudre l'équation $f_k(x) = 0$ ne permet pas de trouver le signe de f_k ...

II1 Étudier g_1 a été insurmontable pour certains. En même temps, vous-vous y prenez souvent n'importe comment.

Pourquoi développer $\dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{x(x+1)}$ en $\dfrac{1}{x^2+2x+1} - \dfrac{1}{x^2+x}$?

Pourquoi factoriser $\dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{x(x+1)} + \dfrac{1}{x^3}$ en $\dfrac{x^4(x+1) - x^3(x+1)^2 + x(x+1)^3}{x^4(x+1)^3}$?

C'est se tirer une balle dans le pied et mettre toutes les chances de son côté pour rater le calcul.

Surtout, la plupart ne savent pas dériver le premier ou le deuxième ou le troisième terme de g_1, ou le dernier terme de g_2. La proportion d'élèves parvenant à dériver sans faute les deux fonctions est un $o(1)$. C'est absolument anormal et honteux : il ne s'agit que de fonctions on ne peut plus classiques et sans aucun piège.

Un peu d'entraînement sur les fractions et beaucoup d'entraînement sur les dérivées ne ferait pas de mal à beaucoup d'entre vous.

Exercice III

P1-2 Il manquait une hypothèse de continuité de f dans l'énoncé (mais cela n'a gêné personne).

P1 Un seul élève a pensé au cas où J pouvait ne pas être borné. Relisez l'énoncé, J est juste un intervalle, cela pourrait être $\mathbb{R}$.

P2 La stabilité de J est souvent oubliée. Elle est pourtant indispensable, sinon la monotonie de (x_n) ne peut être prouvée.

P3 À nouveau, j'ai souvent lu que $f'(a) > 1$ impliquait que f était croissante au voisinage de a, ou que $f'(a) > 1$ permettait d'utiliser l'IAF. L'énoncé comportait une hypothèse : $f \in \mathscr{C}^1$. Il se trouve qu'il était possible de ne pas l'utiliser, mais c'était plus compliqué, et risqué : ne pas se servir d'une hypothèse doit vous interpeller immédiatement.

Si $f'(a) < -1$, on ne peut pas réutiliser directement le résultat montré en **1)**.

P5 Dire “tout peut arriver” avec quelques mots pour enjoliver ne sert à rien : il faut donner des EXEMPLES !