


Feuille d'exercice n° 16 : **Fractions rationnelles**

Exercice 1 Donner une CNS sur $f \in \mathbb{C}(X)$ pour qu'il existe $g \in \mathbb{C}(X)$ tel que $f = g'$.

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X^n - 1}$ est

$$\frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega}{X - \omega}.$$

Exercice 3 () Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $p \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. On pose pour $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Mettre sous forme irréductible $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k^p}{X - \omega_k}$.

Exercice 4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme scindé à racines simples notées x_1, \dots, x_n .

1) Former la décomposition en éléments simples de $\frac{P''}{P}$.

2) En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0$.

Exercice 5 () Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes.

1) $\frac{X^3 - 3X^2 + X - 4}{X - 1}$

4) $\frac{X}{(X + i)^2}$

7) $\frac{X^5 + X + 1}{X^6 - 1}$

2) $\frac{X}{X^2 - 4}$


5) $\frac{X^5 + X + 1}{X^4 - 1}$

8) $\frac{X}{(X^2 + 1)(X^2 + 4)}$

3) $\frac{(3 - 2i)X - 5 + 3i}{X^2 + iX + 2}$

6) $\frac{X^5 + X^4 + 1}{(X - 1)^3(X + 1)^2}$

9) $\frac{X^7 + 3}{(X^2 + X + 2)^3}$

Exercice 6 () Calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes.

1) $\int \frac{dx}{1 - x^2}$

3) $\int \frac{dx}{x^3 - 7x + 6}$

5) $\int \frac{x^3 + 2x + 1}{x^3 - 3x + 2} dx$

2) $\int \frac{x}{x^4 + 16} dx$

4) $\int \frac{4x^2}{x^4 - 1} dx$

6) $\int \frac{-2x^2 + 6x + 7}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$

Exercice 7 (🐉)

- 1) Montrer, que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que

$$X^n + \frac{1}{X^n} = P_n\left(X + \frac{1}{X}\right).$$

On factorisera P_n dans $\mathbb{C}[X]$.

- 2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, décomposer $\frac{1}{P_n}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

Exercice 8 (🚲) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Décomposer $\frac{P'}{P}$ en éléments simples.
- 2) En déduire que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P c'est-à-dire que toute racine de P' s'écrit comme barycentre à poids positifs des racines de P .

Rappel : le barycentre des points z_1, \dots, z_m affectés des poids p_1, \dots, p_m , si $\sum_{i=1}^m p_i \neq 0$, est le point

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^m p_i} \sum_{i=1}^m p_i z_i.$$

