Feuille d'exercice n° 07 : **Équations différentielles**

Exercice 1 ( ) Calculer les intégrales suivantes via un changement de variable adéquat :

a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ b) $\displaystyle\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ d) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t+t(\ln t)^2}$ e) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{\ln t+1}}$

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1}$ g) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\mathrm{d}t$ h) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+2t}$ i) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)-\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 Soit $I(a,b) = \displaystyle\int_a^b \frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{(x^4+1)}}\,\mathrm{d}x$

1. Montrer que $I(a,b) = I(-b,-a)$
2. Soient a et b de même signe. Montrer que $I\left(\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b}\right) = I(a,b)$. En déduire que $I(a,\dfrac{1}{a}) = 0$.
3. Calculer $I(a,b)$ pour $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$ en posant $u = x+\dfrac{1}{x}$ puis $u = \sqrt{2}\,\mathrm{ch}(x)$.

Exercice 3 ( ) On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx$.

1. Calculer I_0 et I_1. Donner une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}. En déduire la valeur de I_n selon la parité de n.
2. Montrer que la suite (I_n) est décroissante. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n-1}}{I_n}$
3. Montrer : $\forall n \geqslant 1,\quad nI_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n\sqrt{n}$
4. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2n(I_{2n})^2 = \frac{\pi}{2}$.
   En déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left[n\left(\frac{1.3.5.\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}\right)^2\right] = \frac{1}{\pi}$ (**formule de Wallis**)

Exercice 4 ( ) Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1. a) Vérifier que la fonction $x \mapsto \ln\ \tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$ est définie et dérivable sur $]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$ et calculer sa dérivée.
   b) Résoudre : $y' - y\tan x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ sur $]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$ avec $y(0)=1$.
2. $y' + y = (x^2-2x+2)\mathrm{e}^{2x}$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0)=0$.
3. $y' - 2y = \mathrm{sh}\,x - 2x\,\mathrm{ch}\,x$ sur $\mathbb{R}$.
4. $xy'\ln x - y = 3x^2\ln^2 x$ sur $]0,1[$.
5. $y' + x^2y + x^2 = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0)=0$.
6. $xy' - y = x$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.
7. $y'\sqrt{1-x^2} - y = 1$ sur $]-1,1[$.
8. $y' - 3y = x^2\mathrm{e}^{x} + x\mathrm{e}^{3x}$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0)=1$.

Exercice 5 Déterminer les fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in [0,1]\quad f'(x)+f(x) = f(0)+f(1)$.

Exercice 6 ( ) Résoudre $2x(1-x)y' + (1-x)y = 1$. On fera attention à bien préciser les intervalles de résolution. Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$? Lesquelles ?

Exercice 7 ( ) Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y' - 2y = 8 \sin x$ avec $y(\pi) = 0$ et $y'(\pi) = 1$.
2. $y'' + y' = 4x^2 \mathrm{e}^{x}$ avec $y(0) = \mathrm{e}$ et $y'(0) = 0$.
3. $y'' + 4y = x^2 - x + 1$.
4. $y'' + y' + 2y = (8x + 1)\mathrm{e}^{x}$.
5. $y'' - 3y' + y = \sin x + \cos x$.
6. $y'' - y = \operatorname{sh} x$.

Exercice 8 On étudie les équations différentielles d'Euler, qui sont de la forme $(\mathscr{E})$: $ax^2y'' + bxy' + cy = g(x)$, où a, b et c sont des constantes et g est une fonction.

1. On suppose que l'on étudie $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on pose $z(t) = y(e^t)$. Montrer que y est solution de $(\mathscr{E})$ si et seulement si z est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre deux, à coefficients constants.
2. Résoudre $x^2y'' + xy' - y = 2x \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Résoudre $x^2y'' + 3xy' + y = (x + 1)^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Résoudre $x^2y'' + 3xy' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
5. Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 9 Trouver les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \; f''(x) + f(-x) = x\mathrm{e}^{x}$$

Exercice 10 Le but de cet exercice est de résoudre le système différentiel $(\mathbf{S})$ suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'' & = & x' + y' - y \\ y'' & = & x' + y' - x \end{array} \right. , \; x, y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

1. Soient $x, y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $u = x + y$ et $v = x - y$. Montrer alors qu'il existe deux équations différentielles du second ordre $(\mathbf{E})$ et $(\mathbf{F})$ telles que l'on ait : (x, y) est solution de $(\mathbf{S})$ si et seulement si u est solution $(\mathbf{E})$ et v est solution de $(\mathbf{F})$.
2. Résoudre $(\mathbf{E})$.
3. Résoudre $(\mathbf{F})$.
4. En déduire les solutions de $(\mathbf{S})$.