Devoir surveillé n° 02

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Soient E, F, G trois ensembles. Montrer que $(E \times G) \cup (F \times G) = (E \cup F) \times G$.

II. Le corps des quaternions.

On introduit les matrices suivantes, à coefficients complexes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

On définit alors l'ensemble des quaternions par

$$\mathbb{H} = \left\{ \alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L \mid (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

1) Montrer que $\forall q \in \mathbb{H},\ \exists!(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4,\ q = \alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L$.

On peut donc, pour un quaternion $q = \alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L$, avec $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$, définir son conjugué $\bar{q} = \alpha I - \beta J - \gamma K - \delta L$.
On dit qu'un quaternion q est réel si $\bar{q} = q$ et est pur si $\bar{q} = -q$.

2) Soit un quaternion $q = \alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L$, avec $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$

a) Montrer que q est réel si et seulement si $\beta = \gamma = \delta = 0$.

b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ pour que q soit pur.

À partir de maintenant, on identifiera un quaternion réel αI au réel α.

3) **a)** Exprimer JK, KL et LJ en fonction respectivement de L, J et K.

b) Calculer J^2, K^2, L^2.

c) En déduire, sans calcul matriciel, les expressions de KJ, LK et JL en fonction respectivement de L, J et K.

d) Montrer que $\mathbb{H}$ est stable par le produit matriciel (*i.e*, que le produit de deux quaternions est un quaternion). Le produit ainsi défini sur les quaternions est-il commutatif ?

e) Déterminer l'ensemble des quaternions qui commutent avec tous les quaternions, soit $\{q \in \mathbb{H} \mid \forall r \in \mathbb{H},\ qr = rq\}$.

4) **a)** Montrer que $\forall (q,r) \in \mathbb{H}^2$, $\overline{qr} = \bar{r} \times \bar{q}$.

b) Montrer que, si $q \in \mathbb{H}$, $q\bar{q}$ est un quaternion réel, positif.

5) Pour tout quaternion q, on peut donc définir sa norme $N(q) = \sqrt{q\bar{q}}$.

a) Montrer que tout quaternion non nul est inversible et que son inverse est un quaternion.

b) Montrer que $\forall (q,r) \in \mathbb{H}^2$, $N(qr) = N(q)N(r)$.

c) Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer quatre réels (p,q,r,s) vérifiant l'identité des quatre carrés d'Euler :

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2) = p^2+q^2+r^2+s^2.$$

6) On cherche à résoudre dans $\mathbb{H}$ l'équation $X^2 = -I$, d'inconnue X.

a) Donner sans calculs six solutions distinctes à cette équation.

b) Montrer que toute solution de cette équation est de norme 1. En déduire alors que toute solution est pure.

c) Étudier la réciproque et conclure.

III. Inégalité de Cauchy-Schwarz et une conséquence géométrique.

Il s'agit dans ce problème de démontrer trois inégalités faisant intervenir des symboles de sommation. Les questions **1)** et **2)** sont indépendantes, et la question **4)** est une application de la question **2)**.

1) **a)** Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$.

b) En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ de réels strictement positifs, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \times \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant n^2.$$

2) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, ainsi que $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ deux n-uplets de réels. Pour tout λ dans $\mathbb{R}$ on pose alors : $S(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + b_k)^2$.

a) Montrer que S est une fonction polynomiale positive de degré inférieur ou égal à 2. À quelle condition S est-elle de degré 2 ? Calculer dans ce cas son discriminant.

b) En déduire *l'inégalité de Cauchy-Schwarz* :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$$

c) Montrer que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $b_k = \alpha a_k$.

d) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer *l'inégalité triangulaire* :

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$$

3) Retrouver le résultat de la question **1.b)** en appliquant correctement l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

4) Voici une application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tout point P intérieur à un triangle ABC donné, on appelle respectivement D, E et F les pieds des perpendiculaires abaissées de P sur (BC), (CA) et (AB).

Déterminer tous les points P tels que $\dfrac{BC}{PD} + \dfrac{CA}{PE} + \dfrac{AB}{PF}$ soit minimum.

Indication : on appliquera l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux familles $\left(\sqrt{\dfrac{BC}{PD}}, \sqrt{\dfrac{CA}{PE}}, \sqrt{\dfrac{AB}{PF}}\right)$ et $(\sqrt{BC.PD}, \sqrt{CA.PE}, \sqrt{AB.PF})$.

— FIN —