DS n° 02 : Corrigé de la fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom : Note :

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

Équations polynomiales complexes de degré 2.

Donner sous forme algébrique les deux racines de l'équation $4iz^2+4(1+i)z+5+4i=0$, d'inconnue $z\in\mathbb{C}$:

$$\frac{(-2-\sqrt{2})+i(-3\sqrt{2}+2)}{4} \text{ et } \frac{(-2+\sqrt{2})+i(3\sqrt{2}+2)}{4} \tag{1}$$

Logique.

Soit $f\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction. Nier la proposition (la réponse ne comportera pas de $\Rightarrow$) :

$$\exists x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R},\ x>y\Rightarrow[f(x)\leqslant 3y\Rightarrow f(y)<2x\leqslant f(y+5)]\,.$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \exists y\in\mathbb{R},\ [x>y]\wedge[f(x)\leqslant 3y]\wedge[f(y)\geqslant 2x\vee 2x>f(y+5)] \tag{2}$$

Calculs algébriques.

Soit $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$. Calculer (on donnera une forme simplifiée et factorisée) :

$$\binom{13}{9} = 715 \tag{3}$$

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(\min(i,j)-i) = -\frac{n(n-1)(n+1)}{6} \tag{5}$$

$$\prod_{i=2}^{15}\frac{2i^2}{i^2+2i+1} = 256 \tag{4}$$

$$\sum_{i=-1}^{5}\sum_{j=0}^{4} i(j+i) = 420 \tag{6}$$

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $a,\,b\in\mathbb{R}$.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(a+kb) = 2^n\cos\left(a+\tfrac{nb}{2}\right)\cos^n\left(\tfrac{b}{2}\right) \tag{7}$$

Calcul matriciel

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & -3 \\ 1 & -4 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 9 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer leur produit :

$$A \times B = \boxed{\begin{pmatrix} -5 & 14 & 19 & -2 \\ 12 & -18 & -13 & 35 \\ 1 & 1 & 7 & 5 \\ -7 & 27 & 40 & 10 \end{pmatrix}} \tag{8}$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer :

$$A^{42} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 42 & 1722 \\ 0 & 1 & 84 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \tag{9}$$

Systèmes linéaires

Donner les ensembles des solutions des systèmes linéaires suivants, où les variables sont réelles.

$$\left\{ \begin{array}{rl} x + y - z & = 1 \\ x - y - t & = -1 \\ x + y + z - t & = 0 \\ -x + z + t & = 2 \end{array} \right. : \boxed{\{(2, 0, 1, 3)\}} \tag{10}$$

$$\left\{ \begin{array}{rl} x + 3y + 2z & = 1 \\ 2x - 2y & = 2 \\ x + y + z & = 2 \end{array} \right. : \boxed{\varnothing} \tag{11}$$

$$\left\{ \begin{array}{rl} x + 3y + 2z & = 3 \\ 2x - 2y & = 2 \\ x + y + z & = 2 \end{array} \right. : \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1+t \\ t \\ -2t+1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}} \tag{12}$$

— FIN —