Feuille d'exercice n° 23 : **Matrices**

Exercice 1 (✎)
On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si tous les coefficients de A sont positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chaque ligne de A est égale à 1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.

Exercice 2 Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), MH = HM.$$

Exercice 3

1. Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :
$$\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \quad AXB = 0$$
Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.
2. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à coefficients diagonaux dominants, c'est-à-dire telle que :
$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$
Montrer que A est inversible.
3. Déterminer les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ telles que $M^2 = 0$.

Exercice 4 (✎🚲)
Soit $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Déterminer $\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 5 (✎) Soit h l'homomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ défini par rapport à deux bases (e_1, e_2, e_3) et (f_1, f_2) par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. On prend dans $\mathbb{R}^3$ la nouvelle base :
$$e_1' = e_2 + e_3, \quad e_2' = e_3 + e_1, \quad e_3' = e_1 + e_2.$$
Quelle est la nouvelle matrice A_1 de h ?
2. On choisit pour base de $\mathbb{R}^2$ les vecteurs :
$$f_1' = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \quad f_2' = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$$
en conservant la base (e_1', e_2', e_3') de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la nouvelle matrice A_2 de h ?

Exercice 6 ( ) Soit φ une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même telle que $\varphi \neq 0$ et $\varphi^2 = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(x) \neq 0$. Montrer que $\{x, \varphi(x)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice de φ dans cette base.

Exercice 7 ( ) Soit A une matrice carrée d'ordre 2, et soit φ l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans lui même, envoyant M sur AM. Montrer que φ est linéaire et déterminer sa matrice sur la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 8 ( ) Soit E un espace vectoriel de dimension finie, notée n.

1. Soit φ un projecteur de E, peut-on trouver une base dans laquelle la matrice de φ est particulièrement simple ?
2. Même question pour une symétrie.

Exercice 9 ( )

On pose : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\varphi(P) = (X^2+2)P'' + (X+1)P' + P$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi - 5\mathrm{Id})$. Calculer $\varphi(1)$ et $\varphi(X+1)$.
4. En déduire une base de $\mathbb{R}^2[X]$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale.

Exercice 10 ( )

1. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$
Donner une base de $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$.
2. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$
Déterminer le rang de f, ainsi qu'une base de son noyau et de son image. Donner une équation de l'image.

Exercice 11 ( ) Soit $M = \begin{pmatrix} -35 & -7 & -22 \\ -6 & 0 & -4 \\ 57 & 11 & 36 \end{pmatrix}$.

1. En interprétant M comme étant la matrice d'un endomorphisme d'un espace vectoriel E, montrer qu'il existe une base (I, J, K) telle que cet endomorphisme a dans cette base pour matrice une matrice diagonale avec 1 , 2 , -2 sur la diagonale.
2. Calculer alors M^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
3. Exprimer en fonction de n les termes u_n , v_n , w_n où u_n , v_n , w_n sont les termes généraux de 3 suites vérifiant :
$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} u_{n+1} & = & -35u_n & - & 7v_n & - & 22w_n \\ v_{n+1} & = & -6u_n & & & - & 4w_n \\ w_{n+1} & = & 57u_n & + & 11v_n & + & 36w_n \end{array} \right. \qquad \text{avec } u_0 = v_0 = w_0 = 1$$

Exercice 12 Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Un endomorphisme φ de E est représenté canoniquement par la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & c \\ 1 & -2 & d \\ a & b & f \end{pmatrix}$. Déterminer les réels a, b, c, d, f de façon que l'endomorphisme φ vérifie les conditions suivantes :

1. $\operatorname{Ker}\varphi$ est engendré par le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3}$;
2. $\operatorname{Im}\varphi$ est engendré par les deux vecteurs $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_2} - 3\overrightarrow{e_3}$ et $\overrightarrow{w} = 3\overrightarrow{e_1} - 5\overrightarrow{e_3}$.

Exercice 13 (✎) Calculer le rang des matrices suivantes.

$$\diamondsuit = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \heartsuit = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \spadesuit = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \clubsuit = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 14 (✎) Calculer, s'il existe, l'inverse de chacune des matrices suivantes.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 13 & 2 & 1 & 9 \\ 7 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_n \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ a_1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 1 & \bar{z} & \bar{z}^2 \\ z & 1 & \bar{z} \\ z & z^2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 15 (✎)

Montrer que la famille $(X^3 + 2X + 1, X^3 - 2X^2 + 2, X^3 - 2X^2 + 1, X^3 + X)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ au moyen d'une technique matricielle.

Exercice 16 (✎) Soient a et b deux réels, et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\operatorname{rg}(A) \geqslant 2$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $\operatorname{rg}(A) = 2$?

Exercice 17 Calculer les rangs des matrices suivantes et calculer leurs inverses quand il y a lieu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ \lambda & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ -4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Exercice 18 Déterminer l'inverse des matrices suivantes (si cet inverse existe) :

$$\diamondsuit = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \heartsuit = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \spadesuit = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & . & . & a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 & . & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & a \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \clubsuit = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & . & . & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & . & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 19 Discuter, selon m paramètre réel, la dimension des ensembles des solutions des systèmes suivants : $\begin{cases} x+my+z &= 0 \\ mx+y+mz &= 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y+mz &= 0 \\ x+my+z &= 0 \\ mx+y+z &= 0. \end{cases}$

Exercice 20 (🚲) Soient (x_n), (y_n) et (z_n) trois suites définies par récurrence par :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= \dfrac{1}{2}(-x_n - 3y_n + 6z_n) \\ \\ y_{n+1} &= \dfrac{1}{2}(3x_n + 5y_n - 6z_n) \\ \\ z_{n+1} &= \dfrac{1}{2}(3x_n + 3y_n - 4z_n) \end{cases}$$

1. Montrer que le système s'écrit $X_{n+1} = AX_n$ où $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ et A est une matrice à déterminer.
2. On note φ l'endomorphisme canoniquement associé à A. Déterminer les droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ stables par φ. En déduire une base relativement à laquelle la matrice de φ est diagonale.
3. Déterminer les suites solutions du système.