



LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON
SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR
CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I.
ANNÉE 2022 - 2023

C3 : MODÉLISATION CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES COMPOSÉS DE CHAINES DE SOLIDES

TD 6 - Introduction à la modélisation des systèmes mécaniques (C3-1)

8 Novembre 2022

Compétences

- **Analyser**
 - Décrire le besoin et les exigences.
- **Modéliser**
 - Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.
 - Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides.

Exercice 1 : Le robot humanoïde LOLA

Source : Mines Ponts PSI 2015

1 Présentation

Le développement de robots à forme humaine est en croissance constante depuis quelques dizaines d'années. En robotique, il est difficile d'affirmer que tous les robots remplaçant l'homme dans ses tâches doivent être de forme humaine. Les véhicules autonomes, par exemple, ne sont pas anthropomorphes. Les tâches auxquelles sont destinées les robots définissent leur forme idéale. Si nous souhaitons un jour que les robots remplacent l'homme dans ses tâches ennuyeuses, ils devront s'intégrer au mieux à notre société, à notre environnement et à notre ergonomie.

Les dimensions d'une maison et la hauteur des meubles sont adaptées à notre forme humaine. L'avantage des robots humanoïdes devient alors économique : il n'est pas indispensable de modifier l'environnement quotidien pour les utiliser.

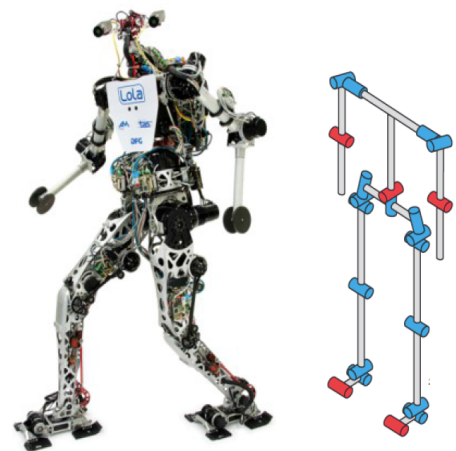


FIGURE 1 – le robot humanoïde LOLA et sa structure cinématique (sans la tête)

Le robot humanoïde LOLA (figure 1), développé par l'Université de Munich, est un robot de forme humaine conçu pour un mode de marche rapide. LOLA possède une structure à 25 degrés de liberté lui permettant une flexibilité ac-

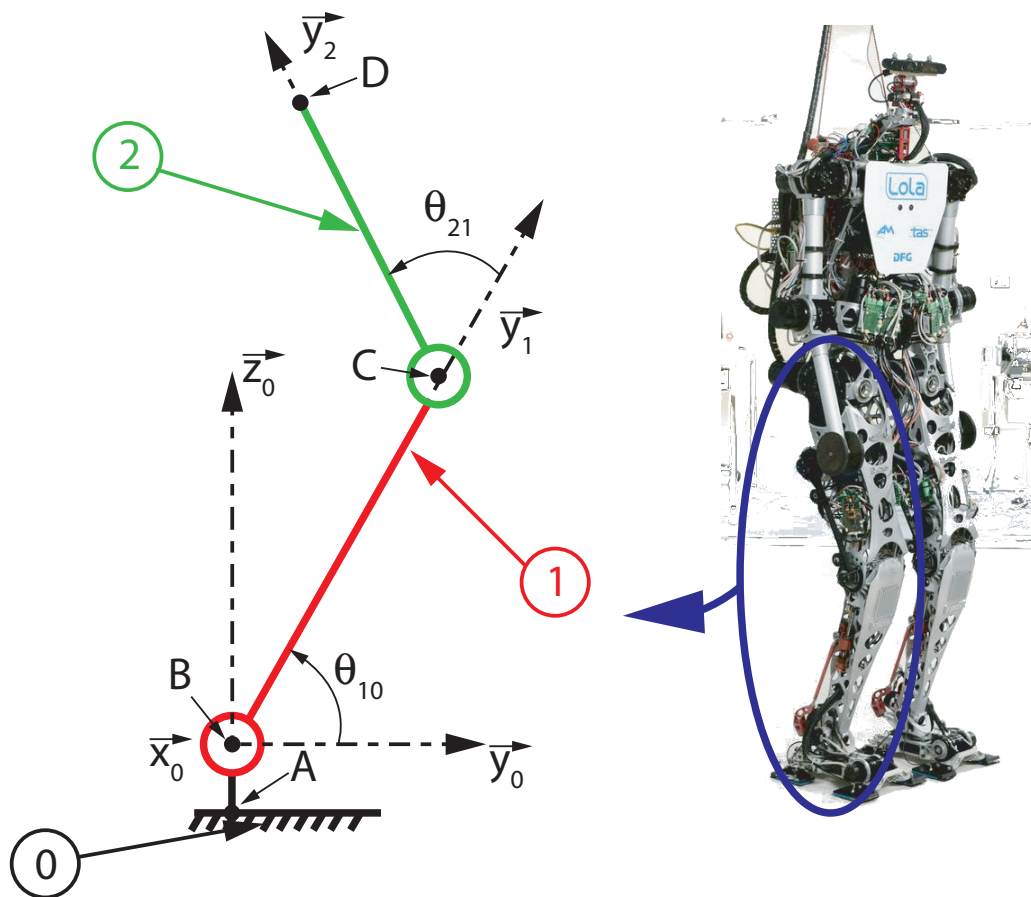
crue. Chaque jambe possède 7 degrés de liberté, le haut du corps 8 et la tête 3.

Le robot est équipé d'une caméra stéréoscopique haute définition afin de percevoir son environnement, d'une centrale inertielle équipée de 3 gyroscopes et de 3 accéléromètres. Chaque articulation possède un codeur angulaire absolu et chaque pied est muni d'un capteur d'effort 6 axes permettant d'obtenir l'effort de contact avec le sol. Les caractéristiques techniques de LOLA sont données dans le tableau suivant :

Caractéristiques	Valeurs
Hauteur	180 cm
Masse	55 kg
Nombre de degrés de liberté	25
Vitesse de marche	5 km·h ⁻¹ maxi
Hauteur du centre de gravité	105 cm

Le diagramme partiel des exigences est donné en annexe.

2 Modélisation cinématique de la jambe du robot Lola



On souhaite vérifier le débattement vertical au niveau de la hanche du robot Lola (exigence 1.1.1). On se place dans la configuration où le pied du robot Lola est posé à plat et est donc solidaire du sol.

- On attache au **pied fixe du robot** 0 le repère $R_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. \vec{z}_0 est l'axe vertical ascendant. A est le point de contact avec le sol. Le point B est le centre de l'articulation au niveau de la cheville. On pose $\vec{AB} = L_0 \cdot \vec{z}_0$.
- le tibia** 1 est en liaison pivot (une seule rotation) autour de l'axe $(B, \vec{x}_{0,1})$ par rapport au pied fixe du robot 0. On attache au solide 1 le repère $R_1(B, \vec{x}_{0,1}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. On pose $\vec{BC} = L_1 \cdot \vec{y}_1$ et $\theta_{10} = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$. Le point C est le centre de l'articulation du genou.
- Le **fémur** 2 est en liaison pivot d'axe $(C, \vec{x}_{0,1,2})$ avec le solide 1. On attache au solide 2 le repère $R_2(C, \vec{x}_{0,1,2}, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$. On pose $\vec{CD} = L_2 \cdot \vec{y}_2$ et $\theta_{21} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$. Le point D est le centre de l'articulation au niveau de la hanche.

Q 1 : Donner les figures planes de projection permettant de traduire toutes les rotations du mécanisme.

Q 2 : Déterminer le vecteur \overrightarrow{AD} .

Q 3 : Déterminer la projection du vecteur \overrightarrow{AD} selon les vecteurs \vec{y}_0 et \vec{z}_0 .

Les valeurs extrêmes articulaires du robot ainsi que les valeurs numériques des constantes sont données dans le tableau ci-dessous :

Paramètres angulaire	Angles en position extrême 1	Angle en position extrême 2
θ_{10}	40°	120°
θ_{21}	0°	160°

Paramètres	Valeur en m
L_0	$8cm$
L_1	$51,8cm$
L_2	$43,1cm$

Q 4 : Proposer les valeurs numériques des couples $(\theta_{10}^b, \theta_{21}^b)$ et $(\theta_{10}^h, \theta_{21}^h)$ correspondant respectivement à la position la plus basse (position agenouillée) et haute (position droite) de la hanche.

Q 5 : Donner les valeurs numériques de la projection du vecteur \overrightarrow{AD} selon le vecteur \vec{z}_0 pour les deux positions extrêmes du robot (positions agenouillée et droite).

Q 6 : Vérifier que le robot peut bien atteindre l'amplitude de mouvement vertical souhaité.

3 Annexes

a) Extrait du cahier des charges

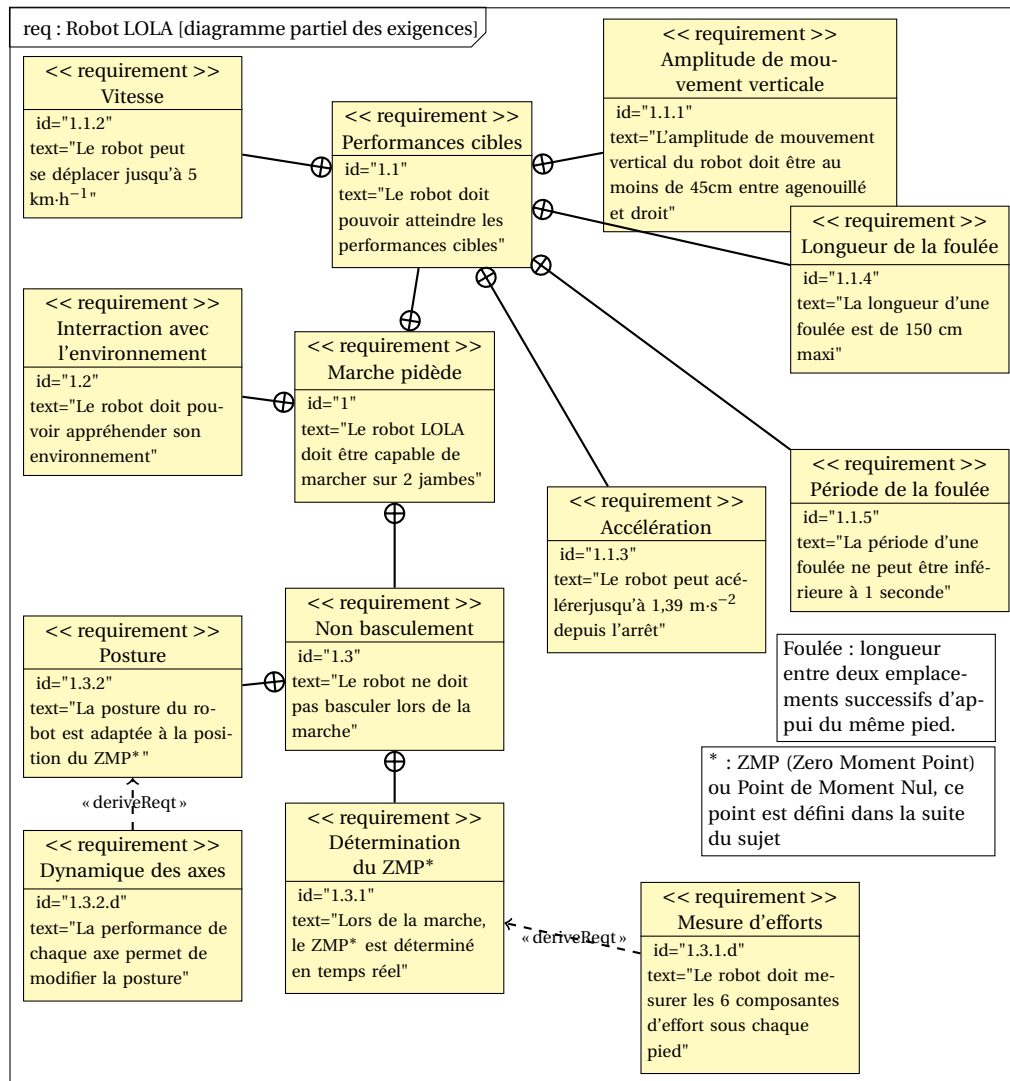


FIGURE 2 – Diagramme des exigences

Exercice 2 : Calculs vectoriels

Source : Emilien DURIF Soient $R_1 = (O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$, $R_2 = (O_2, \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ et $R_3 = (O_3, \vec{i}_3, \vec{j}_3, \vec{k}_3)$ avec $\vec{i}_m, \vec{j}_m, \vec{k}_m$ des vecteurs unitaire formant les bases orthonormées R_m .

On passe de R_1 à R_2 par un rotation α autour de \vec{i}_1 .

On passe de R_2 à R_3 par un rotation θ autour de \vec{j}_2 .

Q 7 : Faire les figures de changement de base.

Q 8 : Donner les composantes des vecteurs \vec{i}_3 et \vec{j}_3 dans R_1 .

Q 9 : Donner le résultat des opérations suivantes :

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{i}_2, \quad \vec{j}_3 \cdot \vec{k}_1, \quad \vec{i}_1 \cdot \vec{i}_3, \quad \vec{k}_1 \wedge \vec{i}_2, \quad \vec{j}_3 \wedge \vec{k}_1, \quad \vec{i}_1 \wedge \vec{i}_3.$$

On définit les vecteurs :

$$\vec{V}_1 = a \vec{i}_1 + b \vec{k}_1$$

$$\vec{V}_2 = c \vec{i}_3$$

$$\vec{V}_3 = d \vec{i}_3 + e \vec{j}_3.$$

Q 10 : Donner l'expression de la projection du vecteur $\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ sur \vec{i}_1 .

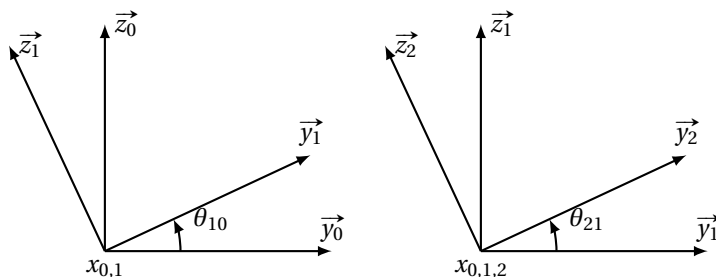
Q 11 : Calculer le produit mixte $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3$

.

Corrigé

Exercice 1 : Le robot humanoïde LOLA

Q 1 : Donner les figures planes de projection permettant de traduire toutes les rotations du mécanisme.



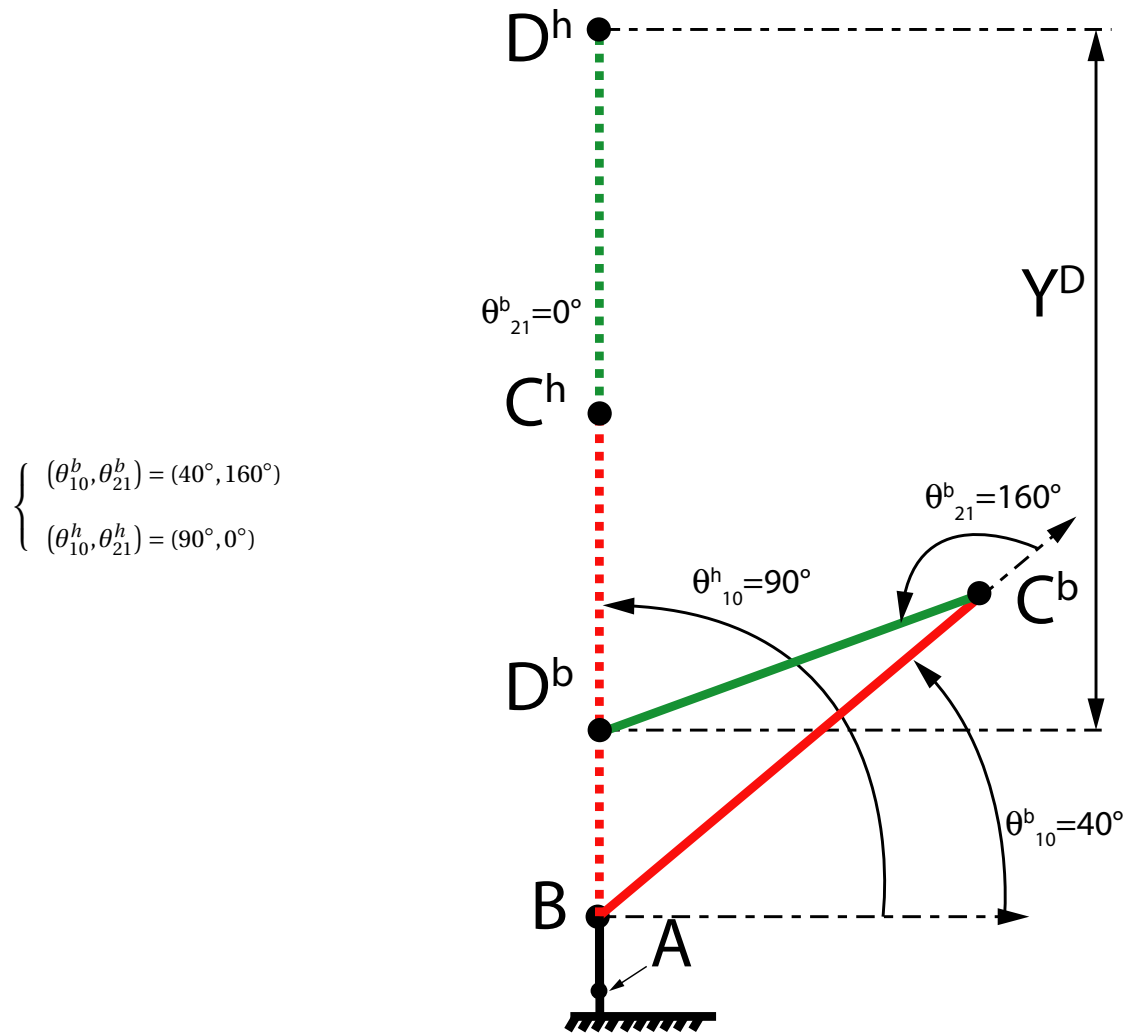
Q 2 : Déterminer le vecteur \overrightarrow{AD} .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \\ &= L_0 \cdot \vec{z}_0 + L_1 \cdot \vec{y}_1 + L_2 \cdot \vec{y}_2\end{aligned}$$

Q 3 : Déterminer la projection du vecteur \overrightarrow{AD} selon les vecteurs \vec{y}_0 et \vec{z}_0 .

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD} \cdot \vec{y}_0 = L_1 \cdot \cos \theta_{10} + L_2 \cdot \cos (\theta_{21} + \theta_{10}) \\ \overrightarrow{AD} \cdot \vec{z}_0 = L_0 + L_1 \cdot \sin \theta_{10} + L_2 \cdot \sin (\theta_{21} + \theta_{10}) \end{cases}$$

Q 4 : Proposer les valeurs numériques des couples $(\theta_{10}^b, \theta_{21}^b)$ et $(\theta_{10}^h, \theta_{21}^h)$ correspondant respectivement à la position la plus basse (position agenouillée) et haute (position droite) de la hanche.



$$\begin{cases} (\theta_{10}^b, \theta_{21}^b) = (40^\circ, 160^\circ) \\ (\theta_{10}^h, \theta_{21}^h) = (90^\circ, 0^\circ) \end{cases}$$

Q 5 : Donner les valeurs numériques de la projection du vecteur \overrightarrow{AD} selon le vecteur \vec{z}_0 pour les deux positions extrêmes du robot (positions agenouillée et droite).

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD}^b \cdot \vec{z}_0 = L_0 + L_1 \cdot \sin \theta_{10}^b + L_2 \cdot \sin (\theta_{21}^b + \theta_{10}^b) = 27 \text{ cm} \\ \overrightarrow{AD}^h \cdot \vec{z}_0 = L_0 + L_1 \cdot \sin \theta_{10}^h + L_2 \cdot \sin (\theta_{21}^h + \theta_{10}^h) = 103 \text{ cm} \end{cases}$$

Q 6 : Vérifier que le robot peut bien atteindre l'amplitude de mouvement vertical souhaité.

L'amplitude du mouvement vertical du robot est de 76 cm . Ce qui est bien conforme au cahier des charges.

Exercice 2 : Calculs vectoriels

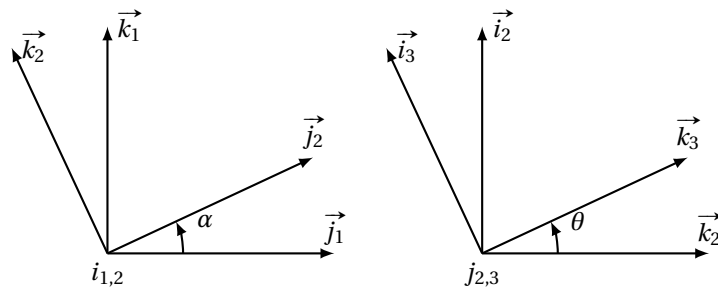
1 Calculs vectoriels

Soient $R_1 = (O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$, $R_2 = (O_2, \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ et $R_3 = (O_3, \vec{i}_3, \vec{j}_3, \vec{k}_3)$ avec $\vec{i}_m, \vec{j}_m, \vec{k}_m$ des vecteurs unitaire formant les bases orthonormées R_m .

On passe de R_1 à R_2 par un rotation α autour de \vec{i}_1 .

On passe de R_2 à R_3 par un rotation θ autour de \vec{j}_2 .

Q 7 : Faire les figures de changement de base.



Q 8 : Donner les composantes des vecteurs \vec{i}_3 et \vec{j}_3 dans R_1 .

$$\begin{aligned}\vec{i}_3 &= \cos\theta \vec{i}_{1,2} - \sin\theta \vec{k}_2 \\ &= \cos\theta \vec{i}_{1,2} - \sin\theta (\cos\alpha \vec{k}_1 - \sin\alpha \vec{j}_1) \\ \vec{j}_3 &= \vec{j}_2 = \cos\theta \vec{j}_1 + \sin\theta \vec{k}_1\end{aligned}$$

Q 9 : Donner le résultat des opérations suivantes :

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{i}_2 = 0$$

,

$$\vec{j}_3 \cdot \vec{k}_1 = \vec{j}_2 \cdot \vec{k}_1 = \sin\alpha$$

,

$$\vec{i}_1 \cdot \vec{i}_3 = \vec{i}_2 \cdot \vec{i}_3 = \cos\theta$$

,

$$\vec{k}_1 \wedge \vec{i}_2 = \vec{k}_1 \wedge \vec{i}_1 = \vec{j}_1$$

,

$$\vec{j}_3 \wedge \vec{k}_1 = \vec{j}_2 \wedge \vec{k}_1 = \cos\alpha \vec{i}_1$$

,

$$\vec{i}_1 \wedge \vec{i}_3 = \vec{i}_2 \wedge \vec{i}_3 = \sin\theta \vec{j}_2$$

.

Q 10 : Donner l'expression de la projection du vecteur $\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ sur \vec{i}_1 .

$$\begin{aligned}(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{i}_1 &= ((a\vec{i}_1 + b\vec{k}_1) \wedge c\vec{i}_3) \cdot \vec{i}_1 = (\vec{i}_1 \wedge (a\vec{i}_1 + b\vec{k}_1)) \cdot c\vec{i}_3 \\ &= -b \cdot c \cdot \vec{j}_1 \wedge \vec{i}_3 = -b \cdot c \cdot \vec{j}_1 \wedge (\cos\theta \vec{i}_2 - \sin\theta \vec{k}_2) \\ &= b \cdot c \cdot \sin\theta \sin\alpha\end{aligned}$$

Q 11 : Calculer le produit mixte $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3$

.

$$\begin{aligned}(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3 &= ((a\vec{i}_1 + b\vec{k}_1) \wedge c\vec{i}_3) \cdot (d\vec{i}_3 + e\vec{j}_3) \\ &= (c\vec{i}_3 \wedge (d\vec{i}_3 + e\vec{j}_3)) \cdot (a\vec{i}_1 + b\vec{k}_1) \\ &= c \cdot e \cdot \vec{k}_3 \cdot (a\vec{i}_1 + b\vec{k}_1) = c \cdot e \cdot (\cos\theta \vec{k}_2 + \sin\theta \vec{i}_2) \cdot (a\vec{i}_1 + b\vec{k}_1) \\ &= c \cdot e \cdot [b \cdot \cos\theta \cos\alpha + a \sin\theta \cos\alpha]\end{aligned}$$