QCM n° 2

Un peu de calcul.

Échauffement n°1 Calculer $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$ et $\lim_{x\to 0} 2x\ln(x+\sqrt{x})$.

Échauffement n°2 Calculer $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$.

QCM - cocher une case si la phrase qui suit est correcte.

Question n°1 Soit θ un réel.

- ☐ $\sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}}{2}$
- ☐ $\cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}}{2}$
- ☐ $\mathrm{e}^{1+i\frac{\pi}{4}} = \frac{\mathrm{e}\sqrt{2}}{2}(1+i)$.
- ☐ $\left|\mathrm{e}^{\theta(1+i)}\right| = 1$.

Question n°2 Les fonctions f suivantes sont de la forme $\frac{Cu'}{u}$ où C est une constante et u est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment I.

- ☐ $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3+1}$ et $I = [1,2]$.
- ☐ $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ et $I = [2,4]$
- ☐ $f(x) = \tan x$ et $I = [0, \frac{\pi}{4}]$
- ☐ $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}}$ et $I = [0,1]$

Question n°3 Soit f une fonction définie et croissante sur $\mathbb{R}_+$

- ☐ Alors f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- ☐ Alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- ☐ Alors f' est positive sur $\mathbb{R}_+$.
- ☐ Alors $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x+1) \geqslant f(x)$.

Question n°4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2^{(x-1)^2+2}$

- ☐ f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- ☐ f est injective sur $\mathbb{R}$.
- ☐ f admet un minimum sur $\mathbb{R}$ en 1 qui vaut 4.
- ☐ f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

Question n°5 Soit f une fonction décroissante définie sur un intervalle I. Alors

- ☐ $\forall x, y \in I,\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
- ☐ $\forall x, y \in I,\ x < y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$.
- ☐ $\forall x, y \in I,\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
- ☐ $\forall x, y \in I,\ f(x) \geqslant f(y) \Rightarrow x < y$.
- ☐ $\forall x, y \in I,\ f(x) > f(y) \Rightarrow x < y$.
- ☐ $\forall x, y \in I,\ f(x) \geqslant f(y) \Rightarrow x \leqslant y$.
- ☐ $f' \leqslant 0$.

Question n°6 Soit f la fonction définie par $f(t) = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)$.

- ☐ f est continue sur $\mathbb{R}_+$ en tant que composée de fonctions continues.
- ☐ f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car $t + \sqrt{t^2+1}$ ne s'annule pas.
- ☐ f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(t) = \dfrac{1 + \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}}{t + \sqrt{t^2+1}}$.
- ☐ Comme les fonctions $t \mapsto t^2+1$, $u \mapsto \sqrt{u}$, $v \mapsto \ln(v)$ sont croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$, f est croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$.

Question n°7

- ☐ La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est la dérivée de $x \longmapsto \left(\ln x\right)^2$ sur $[1, +\infty[$.
- ☐ La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est la dérivée de $x \longmapsto \dfrac{-1}{x^2}$ sur $[1, +\infty[$.
- ☐ La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^3}$ a pour dérivée $x \longmapsto \dfrac{-1}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$.
- ☐ La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ admet comme primitive $x \longmapsto \dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ sur $[1, +\infty[$.

Question n°8 Soit f une fonction continue sur $]a, b[$, strictement décroissante sur $]a, b[$.

- ☐ Alors d'après le théorème de la bijection, il existe un unique réel c de $]a, b[$ tel que $f(c) = c$.
- ☐ Alors d'après le théorème de la bijection, f est bijective de $]a, b[$ vers $]f(a), f(b)[$.
- ☐ Alors f est bijective et f^{-1} est continue et strictement décroissante.
- ☐ Alors f est dérivable sur $]a, b[$ et $\forall t \in]a, b[,\ f'(t) < 0$.

Question n°9 Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ et f, g deux fonctions définies respectivement sur A et sur B, telles que $g \circ f$ existe.

- ☐ pour tout $x \in B$, $g(x) \in A$.
- ☐ pour tout $x \in A$, $g(x) \in B$.
- ☐ pour tout $x \in A$, $f(x) \in B$.
- ☐ $g \circ f = g(f(x))$.
- ☐ $g \circ f$ est la fonction telle que g a f pour variable.
- ☐ une composée de fonctions est une fonction qui prend une fonction comme variable.