Devoir surveillé n° 10 - Remarques

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 28 points, ramené sur 5 points.
- Problèmes : chaque question sur 4 points (pb. 1 sur 90 points, pb. 2 sur 76 points), ramené sur 15 points.

Statistiques descriptives.

	Calculs	Sujet 1	Sujet 2	Note finale
Note maximale	22	37	56	17
Note minimale	4	3	8	3
Moyenne	$\approx 13,87$	$\approx 19,89$	$\approx 9,28$	$\approx 11,07$
Écart-type	$\approx 4,03$	$\approx 9,62$	$\approx 11,72$	$\approx 3,26$

Remarques générales.

Version 1

Ce problème a été mal traité : des erreurs abominables, des rédactions confuses, des erreurs de calculs ... vous n'étiez pas à la fête.

1. Inquiétant : à part pour 4 ou 5 élèves, si $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^{z} = 1$ ssi $z = 0$. Et dans le même genre, avec $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\mathrm{e}^{2i\pi\alpha} = 1$, ce qui vous a coûté très cher dans les calculs.

2. Si vous avez presque tous vu qu'il s'agissait en fait de montrer que $A_{n,\alpha} = A_{n,-\alpha}$, les rédactions ont été dans l'ensemble incorrectes. Petit rappel (vu en septembre-octobre, c'est loin) : pour montrer que $A = B$ sans utiliser de double inclusion, ce qui était ici inutile, on fixe x et on montre : $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

3. Finalement peu abordée malgré sa facilité.

5. Que d'erreurs .... Pêle-mêle : la matrice identité n'est pas le neutre de $(\mathscr{M}_3(\mathbb{C}), +)$, il n'y a pas de produit interne dans un ev, $1 - 1 = 0$ (erreur dans le calcul de $J_\lambda - J_\beta$!) etc.

6. Exercice on ne peut plus classique, travaillé dès le début de l'année : on écrit $J_\lambda = \lambda \mathrm{I}_3 + N$ et on utilise le binôme de Newton (en le citant et vérifiant son hypothèse). Très rarement bien fait.

Partie III Il y avait une erreur dans le sujet : les éléments de E ne sont pas des applications linéaires (regardez les f_k).

9. Quand on demande de montrer « soigneusement », dire « il est clair que » est une provocation. Et la définition d'endomorphisme n'est visiblement pas toujours connue.

10.a. Montrer que tout élément de E_n est combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{F}$ ne prouve pas que $E_n = \operatorname{Vect} \mathscr{F}$, mais seulement $E_n \subset \operatorname{Vect} \mathscr{F}$.
E_n n'est pas $\mathbb{C}_n[X]$, donc on ne savait pas si $\dim E_n = n+1$.
Enfin, la définition de famille échelonnée est très mal comprise. Ce n'est pas une définition équivalente à celle de famille libre. Depuis quelques devoirs je vois de plus en plus souvent la formule magique « la famille est échelonnée donc elle est libre » pour montrer qu'une famille est libre, même quand cela est tout à fait hors de propos. On dit qu'une famille de vecteurs est échelonnée si sa matrice dans la base dans laquelle on travaille est triangulaire (et donc en particulier l'ev dans lequel on travaille est de dimension finie). Donc dire directement « $\mathscr{F}$ est échelonnée » n'a pas de sens : on ne connaissait à ce stade pas de base de E_n, donc il était impossible de faire intervenir une matrice triangulaire.

10.b. Pour être sûr que vous aviez bien compris, je voulais voir
$\operatorname{Vect}(f_0, \cdots, f_n, f_{n+1}) = \operatorname{Vect}(f_0, \cdots, f_n) + \operatorname{Vect} f_{n+1}$. Sans voir cela, j'ai souvent pris votre réponse pour du bluff : si la question est du type « montrer que blabla » et que votre réponse est du type « je recopie les deux ou trois hypothèses de l'énoncé pour vous faire plaisir et j'ai blabla », vous ne convaincrez pas le correcteur.
Comble de l'horreur : ce qui ont écrit $\operatorname{Vect}(f_0, \cdots, f_n, f_{n+1}) = \operatorname{Vect}(f_0, \cdots, f_n) \cup \operatorname{Vect} f_{n+1}$ devaient dormir les 10 000 fois où j'ai crié et écrit en rouge et en majuscules au tableau UNE RÉUNION DE SEV N'EST PAS UN SEV (sauf dans le cas execeptionnel et sans intérêt où l'un est inclus dans l'autre). En écrivant cela je me rends compte que c'est peut-être pour cela que tant d'élèves on montré que $D_{n+1} \not\subset \operatorname{Vect}(f_0, \cdots, f_n)$ pour montrer que la somme était directe. Parce qu'en fait, ça ne sert à rien pour une somme directe.

Version 2

Ce sujet était très détaillé : dans l'ensemble vos copies étaient bien rédigées et ne contenaient pas d'erreurs graves, et ce sont souvent ceux qui ont été les plus rapides et les plus efficaces qui ont eu les meilleures notes.
Les copies les moins réussies sont celles où les transpositions par blocs n'ont pas été comprises. Il fallait respecter les notations du sujet : ${}^tA$ et non A^T.

1. $J^2 = -\mathrm{I}_{2n}$ donnait directement l'inversibilité de J et son inverse : il était inutile de calculer le rang ou le déterminant de J, de l'inverser « à la main » etc.

4. Question simple qui a pourtant été peu traitée.
Il ne faut surtout pas oublier de mentionner que $\det J \neq 0$, ce qui est donné par **1)**. Vous n'avez pas le droit d'écrire juste :

$$\det J = \det \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} = 1.$$

En effet, cela donne très fortement l'impression que vous utilisez la formule (☠ FAUSSE ☠) :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C).$$

8. Attention, ${}^t\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{pmatrix}$.

9) Question très élémentaire, mais vous ne devez pas oublier de dire que $I_n \in \mathscr{S}_{p_{2n}}$ et $-I_n \in \mathscr{S}_{p_{2n}}$.

17) Ce n'est pas parce que $D \neq 0$ que $DV_i \neq 0$. La question est : montrez que $V_i \notin \operatorname{Ker} D$.