Feuille d'exercice n° 13 : **Continuité**

Exercice 1 Etudier la continuité de

1. $f(x) = x + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.
2. $g(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

Exercice 2 (🚲) Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

$$a)\ f(x) = \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\ ;\quad b)\ f(x) = \frac{1}{x}\ln\frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}\ ;\quad c)\ f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}\ .$$

Exercice 3 f est une application croissante, continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit pour tout réel x, $F(x) = \mathrm{Sup}\{y \in \mathbb{R} / f(y) \leqslant x\}$.

1. F est-elle toujours définie ?
2. On prend pour cette question, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2$. Déterminer F.
3. On prend pour cette question, $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \leqslant -1 \\ -2 & \text{si } |x| < 1 \\ 2x-4 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

   Déterminer F, étudier sa continuité, continuité à droite, à gauche.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ 1/x & \text{si } x \in \mathbb{Q}\backslash\{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. a) En revenant à la définition de continuité, montrer que f est continue en 1 et en -1.

   b) Soient $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Donner, en la justifiant, la valeur, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, des quantités suivantes :

   $$\text{(i) } f(a + 1/n) \quad \text{(ii) } f(a + \sqrt{2}/n) \quad \text{(iii) } f(b + 1/n) \quad \text{(iv) } f\left(\frac{\mathbb{E}(b.10^n)}{10^n}\right).$$

   c) Que dire de la continuité de f en $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$?
3. À quoi ressemblerait la courbe représentative de f vue par un myope ?

Exercice 5 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in I, f(x)^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Exercice 6 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, et soit f, g définies et continues sur $[a; b]$ telles que $\forall x \in [a; b],\ 0 < g(x) < f(x)$.
Montrer : $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in [a; b],\ (1 + \lambda)g(x) < f(x)$.

Exercice 7 Trouver toutes les fonctions vérifiant :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x) \cos x$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x + 1) = f(x)$

Exercice 8 Montrer qu'une fonction continue périodique non constante définie sur $\mathbb{R}$ possède une plus petite période (strictement positive).

Exercice 9 Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $[a, b]$ telle que pour tout x et x' $(x \neq x')$ de $[a, b]$ on ait : $|f(x) - f(x')| < |x - x'|$.

1. Montrer que f est continue sur $[a, b]$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une et une seule solution dans $[a, b]$. (On pourra introduire la fonction : $x \mapsto g(x) = f(x) - x$).

Exercice 10

Soit P un polynôme de degré impair et à coefficients réels. Montrer que P possède une racine réelle.

Exercice 11

Soient $f,\ g \in \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que : $\forall x \in [a, b], \exists x' \in [a, b] \mid f(x) = g(x')$. On veut montrer que : $\exists c \in [a, b] \mid f(c) = g(c)$. Raisonnons par l'absurde et supposons que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \neq g(x)$.

1. Montrer qu'alors $f - g$ est de signe constant et ne s'annule pas.
2. On supppose que $f - g > 0$.
   (i) Montrer que f et g possèdent chacune un maximum sur $[a, b]$. On les notera M_f et M_g.
   (ii) Montrer que $M_g \geqslant M_f$ et conclure.
3. Retrouver le résultat si $f - g < 0$.

Exercice 12 Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$.

1. Montrer que la fonction $g(t) = f(t + \frac{b-a}{2}) - f(t)$ s'annule en au moins un point de $[a, \frac{a+b}{2}]$.
2. Application : une personne parcourt 4 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

Exercice 13 — TVI à l'infini —

Soit f : $[0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue ayant une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$. Montrer que f prend toute valeur comprise entre $f(0)$ et ℓ (ℓ exclu).

Exercice 14 f et g sont deux fonctions continues de $[a; b]$ dans $[a; b]$ avec $a < b$, telles que

$$\forall x \in [a; b],\ f \circ g(x) = g \circ f(x)\ .$$

On pose $E = \{x \in [a; b] / \ f(x) = x\}$.

1. Montrer que E a une borne inf et une borne sup. On notera $\alpha = \inf E$ et $\beta = \sup E$.
2. Montrer qu'il existe une suite (α_n) d'éléments de E telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = \alpha$. On montrerait de même qu'il existe une suite (β_n) d'éléments de E telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \beta_n = \beta$.
3. Montrer que α et β sont dans E.
4. Montrer que $g(\alpha)$ et $g(\beta)$ sont dans E.
5. Établir que $\exists x_0 \in [a;b],\ f(x_0) = g(x_0)$ (on pourra considérer la fonction $h = g - f$).