Feuille d'exercice n° 25 : **Espaces euclidiens**

Exercice 1 ( ) Sur $\mathbb{R}_3[X]$ on considère les formes bilinéaires suivantes. Dire lesquelles sont des produits scalaires.

1. $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$
2. $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(P'(t)Q(t) + P(t)Q'(t)\right)\mathrm{d}t$
3. $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t + P(0)Q(0)$.

Exercice 2 ( ) À deux polynômes $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on associe

$$< P, Q >= (a_0 + a_1)b_0 + (a_0 + 3a_1)b_1 + 3a_2b_2$$

Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

Exercice 3 ( ) Soient $(E, (,))$ un espace euclidien et $\|.\|$ la norme associée ; $n \in \mathbb{N}^*$, et $v_1, \ldots, v_n \in E$. Montrer l'inégalité : $\displaystyle\left\|\sum_{i=1}^{n} v_i\right\|^2 \leqslant n\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2$.

Exercice 4 ( ) Soit $a < b$ deux réels.

1. Soient f et g deux applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :
   $\forall (f,g) \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, $\displaystyle\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t$. Étudier le cas d'égalité.
2. Soit f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :
   $\forall f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, $\displaystyle\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t$. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 5 ( )

1. Montrer que sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'application :

$$(A,B) \to \mathrm{tr}\,({}^tAB)$$

   est un produit scalaire.

2. Soit N la norme associée (on l'appelle *norme de Frobenius*), montrer que :

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$

3. Montrer que :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), |\mathrm{tr}\,(A)| \leqslant \sqrt{n}N(A).$$

Exercice 6 Soit E un espace euclidien, et $(e_1, ..., e_n)$ des vecteurs unitaires vérifiant : $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2$.

1. Montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est une famille orthogonale.
2. Montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormale.

(NB : on ne suppose pas que la dimension de l'espace est n.)

Exercice 7 Soit $(E, (.|.))$ un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :

1. $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$;
2. $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$;
3. $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 8

On munit $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ du prod. scal. $(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. Soit $F = \{f \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$. Déterminer $F^\perp$. (indication : Si $f \in F^\perp$, on pourra s'intéresser à la fonction $t \mapsto tf(t)$). Conclusion ?

Exercice 9 On sait que l'application $(A,B) \mapsto \mathrm{tr}\,({}^tAB)$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un produit scalaire. Calculer l'orthogonal de l'ensemble des matrices diagonales puis celui des matrices symétriques.

Exercice 10 $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien. Vérifier que les vecteurs $e_1 = (1,0,1)$, $e_2 = (1,0,2)$ et $e_3 = (1,1,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt.

Exercice 11 On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire : $(P,Q) \to \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. Existe t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall P \in \mathbb{R}[X], (P|A) = P(0)$?

Exercice 12 Soit $(E, (.|.))$ un espace euclidien et $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est orthogonal (c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(p) \perp \mathrm{Im}(p)$) si et seulement si : $\forall x \in E : \|p(x)\| \leqslant \|x\|$. (indication : pour le sens $\Leftarrow$, considérer $k \in \mathrm{Ker}\,p$ et $i \in \mathrm{Im}\,p$, et le vecteur $i + \lambda k$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, et montrer que i et k sont orthogonaux).

Exercice 13 Soit $(E, (.|.))$ un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 2. Soient x et $y \in E$. Montrer que :

1. Si $\|x\| = \|y\|$, alors il existe un hyperplan H de E tel que $y = s(x)$ où s est la symétrie orthogonale par rapport à H.
2. Si $(x|y) = \|y\|^2$, alors il existe un hyperplan H de E tel que $y = p(x)$ où p est la projection orthogonale sur H.
3. Les hyperplans trouvés précédemment sont-ils uniques ?

Exercice 14 Déterminer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (\mathrm{e}^{\,x} - (ax+b))^2 dx$.

Exercice 15 ( ) $E = \mathbb{R}_n[X]$. A tout couple (P, Q) de E on associe : $< P, Q >= \displaystyle\int_0^\pi P(\cos t)Q(\cos t)dt$. Montrer que ceci définit un produit scalaire sur E. On appelle $k^{\text{ème}}$ polynôme de Tschebychev le polynôme défini par : $P_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$. Montrer que les polynômes de Tchebychev $P_0, \dots, P_n$ constituent une base orthogonale de E.

Bonus : si cela n'est pas clair, montrez l'existence et l'unicité de ces polynômes, déterminer le degré et le coefficient dominant de chacun.

Exercice 16 Soit E un espace euclidien, f et g deux endomorphismes de E qui commutent. On suppose que les matrices de f et de g dans une BON sont respectivement symétriques et antisymétriques. Montrer que $\forall u \in E,\ (f(u)|g(u)) = 0$, puis que $\forall u \in E,\ \|(f-g)(u)\| = \|(f+g)(u)\|$.

Exercice 17 ( ) Soit E un espace euclidien de dimension 3, (i, j, k) une base orthonormale de E. Déterminer la matrice dans la base (i, j, k) de :

1. la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation : $x - 2y + 3z = 0$.
2. la projection orthogonale sur ce plan.
3. la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par le vecteur : $i - 4k$.
4. la projection orthogonale sur cette droite.

Exercice 18 Soit E un espace euclidien de dimension n, et $\mathcal{B} = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une base orthonormale de E. Soit $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ un vecteur unitaire de E.

1. Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur la droite D engendrée par u.
2. En déduire les matrices de la projection orthogonale sur $D^\perp$, de la symétrie orthogonale par rapport à D et de la symétrie orthogonale par rapport à $D^\perp$.

Exercice 19 Soit f un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien E.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})^\perp$.
2. En déduire que si $(f - \mathrm{Id})^2 = 0$, alors $f = \mathrm{Id}$.

Exercice 20 (✎) Déterminer la nature et déterminer les éléments caractéristiques des transformations de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices dans la base canonique sont les suivantes :

$$A = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 21 (✎)

Caractériser les endomorphismes f et g dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Exercice 22 Soient E un espace euclidien orienté de dimension 2, r une rotation de E et s une réflexion de E. Calculer $r \circ s \circ r$ et $s \circ r \circ s$.