Devoir surveillé n° 08
Version 2

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Indice d'un endomorphisme.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, soit f un endomorphisme de E. On cherche à démontrer le résultat suivant :

$$\exists\, p \in [\![1, n]\!], \quad E = \operatorname{Ker} f^p \oplus \operatorname{Im} f^p.$$

1) Cas général :

- **a)** Montrer que $\operatorname{Ker} f^k \subset \operatorname{Ker} f^{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- **b)** En déduire que la suite $(\dim \operatorname{Ker} f^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente.
- **c)** Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel non nul k tel que $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+1}$. On le notera p. Cet entier p est appelé *l'indice* de f.
- **d)** Montrer qu'il existe une famille $(x_1, \dots, x_p)$ telle que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $x_i \in \operatorname{Ker} f^i \setminus \operatorname{Ker} f^{i-1}$.
- **e)** Montrer que cette famille est libre.
- **f)** En déduire que $p \leqslant n$.
- **g)** Montrer par récurrence que $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^p$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant p$.
- **h)** En déduire que $E = \operatorname{Ker} f^p \oplus \operatorname{Im} f^p$.

2) Quelques exemples :

- **a)** Calculer l'indice de f si $f = 0$ ou si f est un automorphisme de E.
- **b)** Soit f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par : $\forall\, (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, $f_a(x, y, z, t) = (ax+y+az, y+az+t, x+y+az, y)$, pour tout $a \in \mathbb{R}$. Déterminer pour quelles valeurs de a f_a est bijective, et déterminer l'indice de f_a pour les valeurs de a pour lesquelles f_a n'est pas un automorphisme.

3) Contre-exemples. On ne suppose maintenant plus E de dimension finie.

- **a)** Existe t-il nécessairement k tel que $\operatorname{Im} f^{k+1} = \operatorname{Im} f^k$?
- **b)** Existe t-il nécessairement k tel que $\operatorname{Ker} f^{k+1} = \operatorname{Ker} f^k$?
- **c)** On pose $F = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Im} f^k$ et $G = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker} f^k$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
- **d)** A t-on nécessairement $E = F \oplus G$ dans le cas où E est de dimension finie ?
- **e)** Et dans le cas où E n'est pas de dimension finie ?

II. Étude d'une équation fonctionnelle.

L'objet de ce problème est de s'intéresser à résoudre dans certains cas l'équation fonctionnelle suivante :

$$f(x) - \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = g(x) \qquad (1)$$

où f est une fonction inconnue supposée continue sur $\mathbb{R}$ et g une fonction donnée définie sur $\mathbb{R}$.

A- Dans cette partie on suppose que la fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que les fonctions f solutions de (1) sont elles aussi deux fois dérivables et qu'elles vérifient :

$$f''(x) - f(x) = g''(x). \qquad (2)$$

2) En déduire la solution de l'équation (1) quand g est la fonction nulle, quand g est une constante, et quand g est un polynôme de degré 1.

3) Déduire aussi que l'équation (1) (que g soit dérivable ou non) a au plus une solution.

4) Montrer qu'il existe une solution f de (2) de la forme :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x}}{2}\left[\int_0^x \mathrm{e}^{-t} g''(t)\,\mathrm{d}t + k_A\right] - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\left[\int_0^x \mathrm{e}^{t} g''(t)\,\mathrm{d}t + k_B\right].$$

5) Montrer que si la fonction f écrite ci-dessus vérifie les relations :

$$f(0) = g(0) \qquad \text{et} \qquad f'(0) = g'(0),$$

alors f est solution de (1).

6) Expliciter la solution f de (1) quand g est la fonction exponentielle ($g(x) = \mathrm{e}^{x}$).

B- Dans cette partie on suppose que la fonction g est seulement continue.

On note E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1) On définit l'application A qui à une fonction f de E associe la fonction (notée $A(f)$) par la relation :

$$A(f)(x) = \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que l'application A est une application de E dans E injective.

2) Montrer que $A(f)$ est deux fois dérivable et donner l'expression de $(A(f))''$. Montrer également que $A(f)$ et $(A(f))'$ s'annulent en 0.

3) On désigne par A_n la n^{e} itérée de l'application A : $A_2(f) = A(A(f))$, …, $A_n(f) = A(A_{n-1}(f))$.

Montrer que $A_2(f) : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{3!}(x-t)^3 f(t)\,\mathrm{d}t$.

4) Généraliser ce résultat à $A_n(f)$. Justifier votre réponse.

5) On pose $U_n = A + A_2 + \cdots + A_n$.

Soit $U : f \mapsto U(f)$ l'application de E dans E définie par : $U(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{sh}\,(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que pour tout u on a : $\displaystyle\left|\mathrm{sh}\,(u) - \sum_{k=1}^{n} \frac{u^{2k-1}}{(2k-1)!}\right| \leqslant \frac{\mathrm{ch}\,(u)|u|^{2n+1}}{(2n+1)!}$

6) En déduire que pour tout réel x : $|U(f)(x) - U_n(f)(x)| \leqslant \dfrac{\mathrm{ch}\,(x)|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\left|\int_0^x |f(t)|\,\mathrm{d}t\right|$.

7) Montrer les égalités $U \circ A = A \circ U = U - A$.

8) Soit $I : f \mapsto f$ l'application identité de E dans E. Montrer que les application $I - A$ et $I + U$ sont (pour la composition des applications) des bijections de E dans E réciproques l'une de l'autre.

En déduire la fonction de E solution de l'équation (1).

9) Expliciter f pour la fonction g paire et telle que g est définie par :

$$g(x) = \begin{cases} x \text{ pour } x \in [0, 1[\\ 2 - x \text{ pour } x \in [1, 2[\\ 0 \text{ pour } x \geqslant 2 \end{cases}.$$

— **FIN** —