# I Nombres complexes

5 juillet 2016

# 1. Corps des nombres complexes

## 1.1. Construction à partir de $\mathbb{R}$

**Définition 1.1.1.**
Soit $E$ un ensemble. On appelle *loi de composition interne sur $E$* , ou plus simplement *loi (interne) sur $E$*, toute application de $E \times E$ dans $E$.

**Remarque 1.1.2.**
une loi de composition interne est ce que vous appeliez avant une « opération » : l'addition des réels, la multiplication, l'addition des vecteurs...

1. On suppose connu $\mathbb{R}$ muni de ses deux lois : l'addition $+$ et la multiplication $\times$.
2. Nous allons donner *une* construction de $\mathbb{C}$ : nous allons le construire comme l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ munis d'une certaine loi. Mais le choix de $\mathbb{R}^2$ pour cette construction n'est pas essentiel (d'autres façons de construire $\mathbb{C}$ existent). On ne considérera pas par la suite que $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ sont égaux, même s'il est parfois naturel de les identifier.
3. Construire $\mathbb{C}$ comme l'ensemble $\mathbb{R}^2$ n'est pas nécessairement très intuitif car on a l'impression que, pour construire $\mathbb{C}$, il faut chercher un sur ensemble de $\mathbb{R}$, or $\mathbb{R}^2$ n'en est pas un. L'idée est que l'ensemble $\mathbb{C}$ que nous allons construire contiendra une « copie » de $\mathbb{R}$. Par la suite, on identifiera cette copie et $\mathbb{R}$ lui-même.
4. Nous définissons donc deux lois de composition interne sur $\mathbb{R}^2$, notées provisoirement $\oplus$ et $\otimes$. Ce sont les lois telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{C}$ et tout $(x', y') \in \mathbb{C}$, on a
$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y')$$
$$(x, y) \otimes (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$$
5. $\mathbb{R}^2$ muni de ces deux lois est appellé $\mathbb{C}$.
6. Nous identifions à présent, pour tout réel $x$, le réel $x$ et l'élément de $\mathbb{C}$ $(x, 0)$. Cela signifie que, pour $x \in \mathbb{R}$, nous noterons maintenant $x$ à la place de $(x, 0)$. Via cette identification, $\mathbb{R}$ peut être vu comme une partie de $\mathbb{C}$. En particulier 1 désigne le couple $(1, 0)$.
7. On peut remarquer qu'on a alors, pour tous réels $x$ et $x'$
$$x \oplus x' = (x, 0) \oplus (x', 0) = (x + x', 0) = x + x'$$
$$x \otimes x' = (x, 0) \otimes (x', 0) \quad = (xx', 0) = xx'$$
Autrement dit, sur $\mathbb{R}$, $\oplus$ se confond avec l'addition usuelle et $\otimes$ avec la multiplication usuelle. $\oplus$ et $\otimes$ sont donc des prolongements à $\mathbb{C}$ des lois usuelles de $\mathbb{R}$. On reprendra donc les notations $+$ et $\times$, le symbole $\times$ étant souvent omis, comme dans $\mathbb{R}$.
8. Nous avons décidé plus haut de noter 1 le complexe $(1, 0)$, nous décidons maintenant de noter $i$ le complexe $(0, 1)$. Notons alors que pour tous réels $x$ et $y$, on a
$$\begin{aligned} x + i \times y &= (x, 0) + (0, 1) \times (y, 0) \\ &= (x, 0) + (0, y) \\ &= (x, y) \end{aligned}$$
Par ailleurs
$$\begin{aligned} i^2 &= (0 \times 0 - 1 \times 1, 0 \times 1 + 0 \times 1) \\ &= (-1, 0) \\ &= -1 \end{aligned}$$

**Définition 1.1.3** (Parties réelle et imaginaire)**.**
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe un unique couple $(x, y) \in \mathbb{C}$ vérifiant $z = x + iy$. Le réel $x$ est appelé *partie réelle* de $z$ et est noté $\mathrm{Re}(z)$, et le réel $y$ est appelé *partie imaginaire* de $z$ et est noté $\mathrm{Im}(z)$.

**Démonstration.**
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. D'après ce qui précède $x + iy = (x, y)$, donc
$$z = x + iy \iff z = (x, y)$$
Il existe donc bien un unique couple $(x, y)$ vérifiant $z = x + iy$. □

**Remarque 1.1.4.**
Pour tous $z$ et $z'$ dans $\mathbb{C}$, on a
$$z = z' \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \text{ et } \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$$

**Démonstration.**
C'est une conséquence directe de la définition précédente. $\square$

**Définition 1.1.5** (Réels et imaginaires purs)**.**
Un complexe est dit *réel* si sa partie imaginaire est nulle. Il est dit *imaginaire pur* si sa partie réelle est nulle.

## 1.2. Propriétés des lois $+$ et $\times$

### a. Commutativité

**Proposition 1.2.1.**
$+$ et $\times$ sont commutatives.

**Démonstration.**
Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes, avec $x, x', y, y'$ des réels. Alors,

$$\begin{aligned} z + z' &= (x + x') + i(y + y') \\ &= (x' + x) + i(y' + y) \\ &= z' + z \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} z \times z' &= (xx' - yy'') + i(x'y + xy') \\ &= (x'x - y'y) + i(xy' + x'y) \\ &= z' \times z. \end{aligned}$$

$\square$

### b. Associativité

**Proposition 1.2.2.**
$+$ et $\times$ sont associatives.

**Démonstration.**
Soit $z = x+iy$, $z' = x'+iy'$ et $z'' = x''+iy''$ trois nombres complexes, avec $x, x', x'', y, y', y''$ des réels. Alors,

$$\begin{aligned} (z + z') + z'' &= [(x + x') + i(y + y')] + [x'' + iy''] \\ &= (x + x' + x'') + i(y + y' + y'') \\ &= (x + iy) + [(x' + x'') + i(y' + y'')] \\ &= z + (z' + z'') \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (z \times z') \times z'' &= [(xx' - yy'') + i(x'y + xy')] \times z'' \\ &= [(xx' - yy') + i(x'y + xy')](x'' + iy'') \\ &= (xx'x'' - yy'x'' - yx'y'' - xy'y'') \\ &\qquad + i(yx'x'' + xy'x'' + xx'y'' - yy'y'') \\ &= [x(x'x'' - y'y'') - y(y'x'' + x'y'')] \\ &\qquad + i[x(y'x'' + x'y'') + y(x'x'' - y'y'')] \\ &= (x + iy) \times [(x'x'' - y'y'') + i(y'x'' + x'y'')] \\ &= z \times (z' \times z''). \end{aligned}$$

$\square$

### c. Distributivité de $\times$ sur $+$

**Proposition 1.2.3.**
La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

**Démonstration.**
Soit $z = x+iy$, $z' = x'+iy'$ et $z'' = x''+iy''$ trois nombres complexes, avec $x, x', x'', y, y', y''$ des réels. Alors,

$$\begin{aligned} z \times (z' + z'') &= (x + iy) \times [(x' + x'') + i(y' + y'')] \\ &= xx' + xx'' - yy' - yy'' \\ &\qquad + i(yx' + yx'' + xy' + xy'') \\ &= [xx' - yy' + i(yx' + xy')] \\ &\qquad + [xx'' - yy'' + i(yx'' + xy'')] \\ &= (z \times z') + (z \times z''). \end{aligned}$$

$\square$

### d. Éléments neutres

**Définition 1.2.4.**
Soit $\#$ une loi de composition interne sur un ensemble $E$. On dit que $e$ est un élément neutre pour $\#$ si pour tout $x \in E$, $e\#x = x\#e = x$.

**Proposition 1.2.5.**
Soit $E$ un ensemble muni d'une loi de composition interne $\#$. Si $\#$ admet un élément neutre, alors celui-ci est unique.

**Démonstration.**
Soient $e$ et $e'$ deux neutres. Alors, $e'$ étant neutre, on a $e\#e' = e$ et $e$ étant neutre, on a $e\#e' = e'$. On a donc $e = e'$. $\square$

**Exemple 1.2.6.**
L'addition sur l'ensemble des entiers naturels (resp. relatifs) admet un unique neutre : 0. L'addition sur l'ensemble des entiers naturels non nuls n'admet aucun neutre.

**Proposition 1.2.7.**
Dans $\mathbb{C}$, 0 est un élément neutre pour $+$, 1 est un élément neutre pour $\times$.

**Démonstration.**
Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors,

$$z + 0 = (x + iy) + (0 + i0) = (x + 0) + i(y + 0) = x + iy = z$$

et

$$\begin{aligned} z \times 1 &= (x + iy) \times (1 + i0) \\ &= (1x - 0y) + i(1y + 0x) \\ &= x + iy \\ &= z. \end{aligned}$$

□

### e. Inverses

**Définition 1.2.8.**
Soient $(E, \#)$ un ensemble muni d'une loi interne, ayant un neutre $e$. On dit que $x \in E$ est *inversible* s'il existe un $x' \in E$ tel que $x\#x' = e$ **et** $x'\#x = e$.

**Remarque 1.2.9.**
Attention de bien vérifier les deux égalités, comme le montre l'exercice suivant.

**Exercice 1.2.10.**
On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, et on le munit de la lci $\circ$, qui dénote la composition de deux applications.

1. $(\mathscr{F}, \circ)$ a-t-il un élément neutre ?

2. Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n + 1$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n - 1 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$. Étudier $g \circ f$ et $f \circ g$. Que peut-on dire ?

**Proposition 1.2.11.**
Soit $E$ un ensemble muni d'une lci ***associative*** $\#$ admettant un neutre $e$.

Pour tout élément $x$ de $E$, si $x$ est inversible pour $\#$, alors son inverse est unique.

**Démonstration.**
Soient $y$ et $y'$ deux inverses de $x$. Alors $y\#x = e$ donc $y\#x\#y' = e\#y' = y'$. D'autre part, $x\#y' = e$ donc $y\#x\#y' = y\#e = y$. □

**Proposition 1.2.12.**
Soit $z \in \mathbb{C}$.

$z$ est inversible pour $+$, d'inverse $-z$.

Si $z \neq 0$, $z$ est aussi inversible pour $\times$, d'inverse $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$, où $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.

0 n'est pas inversible pour $\times$ dans $\mathbb{C}$.

**Démonstration.**
C'est simple pour l'addition.

Comme la multiplication complexe est commutative, on n'a besoin de vérifier qu'une égalité. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Alors $x^2 + y^2 \neq 0$ et

$$\begin{aligned} &\left[\frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}\right] \times (x + iy) \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2}\left[x^2 + y^2 + i(xy - yx)\right] \\ &= \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Enfin, on vérifie aisément que 0 est absorbant : pour tout complexe $z$, $0z = 0$. Si 0 était inversible, son inverse $z$ ne pourrait donc vérifier $0z = 1$, car $1 \neq 0$ ! □

**Remarque 1.2.13.**
Si $z$ et $z'$ sont deux nombres complexes, avec $z' \neq 0$, on note $\dfrac{z}{z'} = z \times (z')^{-1}$.

**Définition 1.2.14.**
On appelle *monoïde* tout couple $(G, \star)$ où $G$ est un ensemble et

1. $\star$ est une loi de composition interne sur $G$ ;
2. $\star$ est associative ;
3. et $\star$ possède un élément neutre.

On appelle *groupe* tout monoïde $(G, \star)$ dont tous les éléments sont inversibles.

On dit qu'un monoïde ou un groupe est *commutatif* si sa loi de composition interne l'est.

On appelle *anneau* tout triplet $(G, \star, \#)$ tel que

1. $(G, \star)$ est un groupe **commutatif** ;
2. $(G, \#)$ est un monoïde ;
3. et $\#$ est distributive par rapport à $\star$.

On dit qu'un anneau est *commutatif* si $\#$ est commutative.

Enfin, on appelle *corps* tout anneau **commutatif** $(G, \star, \#)$ tel que tout élément de $G$ différent du neutre de $\star$ est inversible pour $\#$.

**Exercice 1.2.15.**
Chacun des ensembles $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{C}$, muni des lois usuelles, est-il un monoïde, un groupe, un anneau, un corps ?

## 1.3. Interprétation géométrique

**Définition 1.3.1** (Affixe et image)**.**
Soit $M$ un point du plan de coordonnées $(x, y)$. On appelle *affixe* de $M$ le complexe $x + iy$.

Soit $z$ un complexe de partie réelle $x$ et de partie imaginaire $y$. On appelle *image* de $z$ le point du plan de coordonnées $(x, y)$.

**Remarque 1.3.2.**
On peut identifier $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ au plan euclidien (l'ensemble des points du plan) muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, c'est-à-dire qu'un point du plan euclidien est identifié à ses coordonnées [1] dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

On peut également identifier $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ à l'ensemble des vecteurs du plan, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ étant identifié au point $M$, et donc à son affixe.

1. Notez la différence entre « identifié par » et « identifié à ».

**Théorème 1.3.3** (Règles de calcul)**.**
On a les propriétés suivantes :

(i) Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ deux vecteurs d'affixes respectifs $z$ et $z'$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors le vecteur $\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{u}'$ a pour affixe $z + \lambda z'$. En particulier, pour tout couple de vecteurs, l'affixe de la somme de ces vecteurs est la somme des affixes et pour tout scalaire $\lambda$ et tout vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $z$, l'affixe de $\lambda\overrightarrow{u}$ est $\lambda z$.

(ii) Soient $A$ et $B$ deux points d'affixes respectifs $a$ et $b$. Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b-a$.

**Démonstration.** (i) Notons $x$ et $y$ respectivement les parties réelle et imaginaire de $z$, et $x'$ et $y'$ celles de $z'$. Alors $\overrightarrow{u}$ (resp. $\overrightarrow{u}'$) a pour coordonnées $(x, y)$ (resp. $(x', y')$). $\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{u}'$ a alors pour coordonnées $(x+\lambda x', y+\lambda y')$, donc pour affixe $(x+\lambda x')+i(y+\lambda y')$. Or on a

$$\begin{aligned} z + \lambda z' &= (x + iy) + \lambda(x' + iy') \\ &= (x + \lambda x') + i(y + \lambda y') \end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{u}'$ a bien pour affixe $z + \lambda z'$.
Il suffit alors d'étudier les cas particuliers où $\lambda = 1$, où $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et où $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et $\lambda = -1$ pour conclure.

(ii) Il suffit d'utiliser la relation fondamentale $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ et le point précédent pour conclure. □

**Remarque 1.3.4.**
Soit $b \in \mathbb{C}$. L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z + b \end{array}$$

s'interprète géométriquement comme la translation de vecteur d'affixe $b$.

## 1.4. Conjugué et module d'un nombre complexe

**Définition 1.4.1.**
On appelle *conjugué d'un complexe* $z$ le complexe $\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$.
On appelle *module d'un complexe* $z$ le réel positif $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$.

**Remarque 1.4.2.**
Sur $\mathbb{R}$, le module coïncide avec la valeur absolue.

• Interprétation géométrique.

**Théorème 1.4.3.**
Soit $(z,z') \in \mathbb{C}^2$, on a les règles de calcul suivantes :

$$\begin{array}{cc} \operatorname{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2} & \operatorname{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i} \\ \overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'} & \overline{z\times z'} = \overline{z}\times\overline{z'} \\ \overline{\overline{z}} = z & \\ z\overline{z} = |z|^2 & |\overline{z}| = |z| \\ |zz'| = |z|.|z'| & z' \neq 0 \Rightarrow \left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|} \end{array}$$

De plus, on a

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$
$$|\operatorname{Re}(z)| \leqslant |z| \quad \text{et} \quad |\operatorname{Im}(z)| \leqslant |z|$$

Et enfin, l'*inégalité triangulaire*

$$\big|\,|z|-|z'|\,\big| \leqslant |z \pm z'| \leqslant |z|+|z'|$$

**Démonstration** (inégalité triangulaire)**.**
Les premières propriétés sont élémentaires et se vérifient directement en posant $z = x+iy$, avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Remarquons que, facilement, $|zz'|^2 = zz'\overline{zz'} = zz'\overline{z}\overline{z'} = z\overline{z}z'\overline{z'} = |z|^2|z'|^2$.

On a aussi $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$, il suffit ensuite d'utiliser que $x=0$ et $y=0$ si et seulement si $x^2+y^2=0$.

On montre l'encadrement pour $|z+z'|$. Pour $|z-z'|$ il suffit de remplacer $z'$ par $-z'$.

Pour montrer $|z+z'| \leqslant |z|+|z'|$, il suffit de montrer $|z+z'|^2 \leqslant (|z|+|z'|)^2$. Posons $d = (|z|+|z'|)^2 - |z+z'|^2$ et calculons $d$. On obtient successivement

$$\begin{aligned} d &= |z|^2 + \left|z'\right|^2 + 2|z|\left|z'\right| - \left(z+z'\right)\left(\overline{z}+\overline{z'}\right) \\ &= 2|z|\left|z'\right| - z\overline{z'} - z'\overline{z} \\ &= 2\left(|z|\left|z'\right| - \frac{z\overline{z'}+z'\overline{z}}{2}\right) \\ &= 2\left(|z|\left|\overline{z'}\right| - \frac{z\overline{z'}+\overline{z\overline{z'}}}{2}\right) \\ &= 2\left(\left|z\overline{z'}\right| - \operatorname{Re}\left(z\overline{z'}\right)\right) \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

On a donc $|z+z'| \leqslant |z|+|z'|$.

Pour la seconde inégalité : $|z| = |(z+z')+(-z')| \leqslant |z+z'|+|-z'|$, d'où $|z|-|z'| \leqslant |z+z'|$. On permute les rôles de $z$ et $z'$ et on a $|z'|-|z| \leqslant |z+z'|$, ce qui permet de conclure. ☐

**Remarque 1.4.4.** 1. En pratique : on se sert de $z\overline{z} = |z|^2$ pour calculer la forme algébrique de l'inverse d'un complexe :

$$\frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

2. Le module d'un complexe est la norme du vecteur ayant ce complexe pour affixe.
3. En particulier, soit $a$ et $z$ deux complexes et $R \geqslant 0$. Notons $M$ et $A$ les points du plans d'affixes respectives $z$ et $a$. Alors $|z-a|$ est la distance $AM$. Et $M$ appartient au cercle (resp. disque ouvert, resp. disque fermé) de centre $A$ et de rayon $R$ si et seulement si $|z-a| = R$ (resp. $|z-a| < R$, resp. $|z-a| \leqslant R$).
4. On peut préciser le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire :

   $$|z+z'| = |z|+|z'| \text{ si et seulement si } \exists(\lambda,\lambda') \in (\mathbb{R}_+)^2 \setminus \{(0,0)\} \mid \lambda z = \lambda' z'.$$

   Dans le cas où $z = z' = 0$, le résultat est immédiat.
   Sinon, d'après la démonstration de l'inégalité triangulaire, l'égalité est vérifiée si et seulement si $\left|z\overline{z'}\right| = \operatorname{Re}\left(z\overline{z'}\right)$ si et seulement si $z\overline{z'}$ est un réel positif.
   Dans le cas où $z' \neq 0$, on remarque que $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{z\overline{z'}}{|z'|^2}$, donc l'égalité est vérifiée si et

seulement si $\frac{z}{z'} \in \mathbb{R}_+$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z = \lambda z'$.
En inversant les rôles de $z$ et $z'$ dans le cas où $z' = 0$ on obtient le résultat voulu.
Géométriquement, l'égalité survient donc quand les images de $z$ et $z'$ sont sur une même demi-droite d'origine $O$.

## 2. Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

Commençons par une première définition de trigonométrie :

**Définition 2.0.5** (Fonction tangente)**.**
Notons $A$ l'ensemble des réels congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo $\pi$ :

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \exists k \in \mathbb{Z}\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}.$$

On appelle alors *fonction tangente*, notée tan, la fonction :

$$\begin{array}{rccc} \tan : & \mathbb{R}\backslash A & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \dfrac{\sin t}{\cos t} \end{array}.$$

Cette fonction sera étudiée plus en détail dans le chapitre sur les fonctions usuelles, mais il est utile de retenir les valeurs de tan en 0, $\pm\frac{\pi}{6}$, $\pm\frac{\pi}{4}$ et $\pm\frac{\pi}{3}$, l'allure de son graphe et le fait qu'elle est impaire.

**Remarque 2.0.6.**
On peut définir de la même manière la fonction *cotangente* :
Posons

$$B = \{x \in \mathbb{R},\ \exists k \in \mathbb{Z}\ x = k\pi\} = k\mathbb{Z}.$$

On appelle alors *fonction cotangente*, notée cotan, la fonction :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{cotan} : & \mathbb{R}\backslash B & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \dfrac{\cos t}{\sin t} \end{array}.$$

Attention : la fonction cotangente n'est pas égale à $\frac{1}{\tan}$. Pourquoi ?

### 2.1. Définition et caractérisation

**Définition 2.1.1.**
On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Muni de la multiplication usuelle entre complexes, c'est un groupe de neutre 1.

**Remarque 2.1.2.**
$\mathbb{U}$ est l'ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique

**Définition 2.1.3.**
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle *exponentielle complexe de* $i\theta$ le complexe $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

L'écriture $\mathrm{e}^{i\theta}$ n'est qu'une **notation** : en aucun cas il ne s'agit du réel e élevé à la puissance $i\theta$, ce qui n'a aucun sens.

**Théorème 2.1.4.**
Soient $\theta$, $\theta' \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

(i) Les formules d'Euler :

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$$

(ii) $\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{i\theta'}$ ;

(iii) $\mathrm{e}^{i\theta} \neq 0$ ; et $\overline{\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{-i\theta} = \frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}}$, donc $\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{U}$.

(iv) les formules de De Moivre :

$$\mathrm{e}^{in\theta} = \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n$$
$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

(v) Si $\tan\dfrac{\theta}{2}$ est bien défini, alors en posant $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$, on a $\mathrm{e}^{i\theta} = \dfrac{(1+it)^2}{1+t^2}$.

**Démonstration.**
On donne ici la démonstration utilisant les formules de trigonométrie, admises jusqu'ici. Ces formules peuvent se démontrer géométriquement. Consulter par exemple la page Wolfram

http ://preview.tinyurl.com/pzkqg5q

Une autre approche possible serait d'admettre la troisième propriété et d'en déduire toutes les autres, ainsi que les formules de trigonométrie.

(i) Facile.

(ii) Simple développement.

(iii) $\mathrm{e}^{i\theta} \times \mathrm{e}^{-i\theta} = \mathrm{e}^{i0} = 1$, donc $\mathrm{e}^{i\theta}$ et $\mathrm{e}^{-i\theta}$ sont inverses l'un de l'autre. En particulier $\mathrm{e}^{i\theta} \neq 0$.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\\ &= \cos\theta - i\sin\theta\\ &= \overline{\mathrm{e}^{i\theta}}\end{aligned}$$

Donc $1 = \mathrm{e}^{-i\theta}.\overline{\mathrm{e}^{i\theta}} = \left|\mathrm{e}^{i\theta}\right|^2$, donc $\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{U}$.
On aurait aussi pu utiliser que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

(iv) Se démontre par une récurrence immédiate sur $n$.

(v) Ce point se déduit aisément des égalités $\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}$.
On peut aussi voir que, par la formule de De Moivre,

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{i\theta} &= \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^2\\ &= \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2\\ &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(1 + i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2\\ &= \frac{(1+it)^2}{1+t^2}\end{aligned}$$

car, pour tout $x$ pour lequel $\cos x \neq 0$, $1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.

□

**Théorème 2.1.5** (Paramétrisation de $\mathbb{U}$)**.**
L'application

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{C}\\ \theta & \mapsto & \mathrm{e}^{i\theta}\end{array}$$

est *un paramétrage de* $\mathbb{U}$, autrement dit, pour tout nombre complexe $z$ on a

$$z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \exists\theta \in \mathbb{R} \quad z = \mathrm{e}^{i\theta} \tag{1}$$

De plus, pour tout complexe $z \in \mathbb{U}$ donné, le paramètre correspondant est *unique à $2\pi$ près*, autrement dit, on a

$$\forall(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2 \quad \mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta = \theta'[2\pi] \tag{2}$$

**Remarque 2.1.6.**
Ce résultat a une interprétation géométrique intuitive.

**Démonstration.**
Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrons l'équivalence (1). L'implication de droite à gauche est évidente : s'il existe $\theta$ tel que $z$ s'écrive $\sin\theta + i\cos\theta$, alors $|z|^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, donc $z \in \mathbb{U}$. Réciproquement, soit $z \in \mathbb{U}$, alors $(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 = 1$ donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ vérifiant $\operatorname{Re} z = \cos\theta$ et $\operatorname{Im} z = \sin\theta$.

Pour l'équivalence (2), il suffit de remarquer que pour tout couple $(\theta,\theta')$ de réels, l'égalité $\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\theta'}$ implique l'égalité des cosinus ainsi que des sinus de $\theta$ et $\theta'$, donc l'égalité de $\theta$ et $\theta'$ à $2\pi$ près. L'autre sens découle de la proposition 2.1.4. □

## 2.2. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

**Définition 2.2.1.**
Soit $z \neq 0$. Alors $z/|z| \in \mathbb{U}$, donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ vérifiant $z/|z| = \mathrm{e}^{i\theta}$, c'est-à-dire $z = |z|\mathrm{e}^{i\theta}$.

Le réel $\theta$ est alors appelé ***un*** *argument* de $z$. Il existe à $2\pi$ près. Il existe alors un unique $\theta \in ]-\pi,\pi]$ vérifiant $z = |z|\mathrm{e}^{i\theta}$. Ce réel est appelé *l'argument principal* de $z$, et noté $\arg z$.
L'écriture «$z = |z|\mathrm{e}^{i\theta}$» est appelée *écriture trigonométrique* de $z$.

**Remarque 2.2.2.**
1. Attention à la non unicité de l'argument.
2. Le complexe 0 n'a pas d'argument.
3. Pour tout $z$ non nul, $(|z|, \arg z)$ est un couple de coordonnées polaires du point d'affixe $z$.

**Proposition 2.2.3.**
Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$. On a :

$$\begin{aligned} \arg \overline{z} &= -\arg z[2\pi] \\ \arg zz' &= \arg z + \arg z'[2\pi] \\ \text{et } \arg(1/z) &= -\arg z[2\pi]. \end{aligned}$$

**Démonstration.**
Utiliser l'écriture trigonométrique. □

## 2.3. Racines $n^{\text{ièmes}}$

**Définition 2.3.1.**
Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *racine n-ième de z* tout complexe $t$ tel que $t^n = z$.

Les racines de 1 sont appelées *racines n-ièmes de l'unité*.

L'ensemble des racines $n$-ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.

**Remarque 2.3.2.**
La notation $\sqrt[n]{.}$ est **interdite** sur les complexes quelconques. En effet, elle désigne l'application réciproque de la fonction $x \mapsto x^n$ qui n'est bijective que considérée comme application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ si $n$ est pair et de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ si $n$ est impair.

**Théorème 2.3.3.**
(i) La seule racine $n$-ième de zéro est zéro.

(ii) Soit $z \in \mathbb{C}$ non nul, donné sous une forme trigonométrique $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$, avec $r > 0$. Alors $z$ possède exactement $n$ racines $n$-ièmes, qui sont les nombres complexes

$$\sqrt[n]{r} \times \mathrm{e}^{\left(\frac{i\theta}{n} + \frac{2ik\pi}{n}\right)}$$

pour $k$ décrivant l'ensemble $[\![0, n-1]\!]$ (ou $[\![1, n]\!]$).

(iii) En particulier

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \;\middle|\; k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$$

**Démonstration.**
(i) Soit $t \in \mathbb{C}$. Alors $t \neq 0 \Rightarrow t^n \neq 0$ donc $t^n = 0 \Rightarrow t = 0$. On vérifie enfin que $t = 0 \Rightarrow t^n = 0$, pour $n > 0$.

(ii) Soit $(z, t) \in \mathbb{C}^2$, $z \neq 0$.
- 1er cas : $z = 1$ : on note $\rho = |t|$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ un argument de $t$. On a : $t^n = 1$ si et seulement si $\rho^n.\mathrm{e}^{in\varphi} = 1.\mathrm{e}^{i0}$ si et seulement si $\rho^n = 1$ et $n\varphi = 0[2\pi]$ si et seulement si $\rho = 1$ et $\varphi = \dfrac{2k\pi}{n}$.
- 2nd cas : $z$ est quelconque non nul donc s'écrit sous la forme $r\mathrm{e}^{i\theta}$ où $r > 0$. On pose $\alpha = \sqrt[n]{r} \times \mathrm{e}^{i\theta/n}$, donc $\alpha^n = z$. Alors, si $t = \rho.\mathrm{e}^{i\varphi}$, $t^n = z$ si et seulement si $\left(\dfrac{t}{\alpha}\right)^n = 1$ et on utilise le premier cas.

□

**Remarque 2.3.4** (Interprétation géométrique)**.**
Soit $n \geqslant 3$. Posons $z_i = \frac{2ik\pi}{n}$ et notons $A_i$ le point d'affixe $z_i$ pour $i \in [\![0, n-1]\!]$. Alors $A_0 A_1 \dots A_n$ est un polygones réguliers à $n$ côtés.

Les racines 2-ièmes de 1 sont $-1$ et 1 (racines carrées de 1).

En posant $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$, les racines 3-ièmes de l'unité sont 1, $j$ et $j^2$ (et on a $j^2 = \overline{j}$).

Cas $n = 4, 5, 6$.

**Proposition 2.3.5.**
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a les égalités suivantes :

$$\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (z - \omega) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(z - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = z^n - 1$$

$$\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} (z - \omega) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(z - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

La somme des racines $n$-ièmes de l'unité est nulle, i.e. :

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0.$$

En particulier $1 + j + \overline{j} = 0$.

**Démonstration.**
Pour démontrer ce résultat on admettra provisoirement le résultat suivant : Pour tout entier $n$ et tout polynôme $P$ un polynôme de degré $n$ admettant $n$ racines distinctes $z_1$, ..., $z_n$, de coefficient dominant $\alpha$, on a

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad P(z) = \alpha(z - z_1) \dots (z - z_n).$$

On admettra aussi la formule de sommation géométrique : pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$z^n - 1 = (z-1)(1 + z + \dots + z^{n-1}).$$

La première égalité est une application directe du résultat admis, en posant $P : z \mapsto z^n - 1$ ; $P$ est alors un polynôme de degré $n$ et de coefficient dominant 1.

La seconde est une application directe du même résultat en considérant $P : z \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} z^k$. De plus $n \neq 1$ donc $e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1$ donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k = \frac{1 - \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} = 0$$

□

# 3. Équations du second degré

## 3.1. Calcul des racines carrées d'un complexe sous forme algébrique

Soit $z$ et $t$ deux complexes. On veut résoudre explicitement l'équation $t^2 = z$, d'inconnue $z$, que nous noterons $(E)$.

On peut écrire $z$ sous la forme $x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $t$ sous la forme $a + ib$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Pour résoudre $(E)$, il y a une astuce très utile

**Astuce.**
Soit $t$ et $z$ deux complexes. Alors

$$t^2 = z \iff \begin{cases} t^2 = z \\ \text{et } |t|^2 = |z| \end{cases}$$

On en déduit successivement :

$$(E) \iff \begin{cases} a^2 - b^2 + i2ab = x + iy \\ \text{et } a^2 + b^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

$$(E) \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ \text{et } 2ab = y \\ \text{et } a^2 + b^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

$$(E) \iff \begin{cases} a^2 = \dfrac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2} \\ \text{et } b^2 = \dfrac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2} \\ \text{et } 2ab = y \end{cases}$$

**Exercice 3.1.1.**
Trouver les racines carrées de $z = 3 - 4i$.

## 3.2. Résolution des équations du second degré

**Théorème 3.2.1.**
Soient $a$, $b$, $c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ sont $\frac{-b \pm \delta}{2a}$, où $\delta$ est l'une quelconque des deux racines carrées du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. La somme de ces solutions vaut $-\frac{b}{a}$ et leur produit $\frac{c}{a}$.

**Démonstration.**
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left[z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right]\left[z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right] \\ &= a\left(z - \frac{-b - \delta}{2a}\right)\left(z - \frac{-b + \delta}{2a}\right) \end{aligned}$$

□

**Remarque 3.2.2.**
On peut connaître la somme et le produit des deux racines sans connaître les racines. Réciproquement, si on connaît la somme et le produit de deux complexes, alors on connaît une équation du second degré dont ils sont les racines.

**Exercice 3.2.3.**
Trouver $a$ et $b$ tels que $ab = 2$ et $a + b = i$.

# 4. L'exponentielle complexe

## 4.1. Définitions et premiers résultats

**Définition 4.1.1.**
Soit $z \in \mathbb{C}$, donné sous forme algébrique $z = x+iy$. On appelle *exponentielle de $z$* notée $\mathrm{e}^{z}$ le nombre complexe $\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{iy}$.

**Remarque 4.1.2.**
$\mathrm{e}^{z}$ n'est toujours pas une puissance : ce n'est qu'une notation.

**Exemple 4.1.3.**
$\mathrm{e}^{2+i\pi/2} = i\mathrm{e}^{2}$.

**Théorème 4.1.4.** (i) l'exponentielle complexe est $2i\pi$-périodique.
(ii) pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^{z}.\mathrm{e}^{z'}$ : on dit que l'exponentielle transforme les sommes en produits.
(iii) l'exponentielle complexe ne s'annule pas.
(iv) pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $t \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\mathrm{e}^{z} = t \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad z = \ln|t|+i\arg t+2ik\pi$$

**Démonstration.** (i) facile.
(ii) Séparer parties réelle et imaginaire.
(iii) L'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et $\mathrm{e}^{i\theta}$ non plus (déjà vu).
(iv) $\mathrm{e}^{z} = t$ si et seulement si $\mathrm{e}^{\operatorname{Re} z} = |t|$ et $\operatorname{Im} z = \arg t[2\pi]$.

□

**Remarque 4.1.5.**
L'exponentielle n'est ni surjective, ni injective, et il n'existe pas de « logarithme complexe ».

## 4.2. Un peu de technique

### a. Formules trigonométriques

Nous avons utilisé les formules de trigonométrie (cf. formulaire de trigonométrie) dans la démonstration de 2.1.4.
Néanmoins, les propriétés de l'exponentielle complexe permettent de retrouver ces formules, dans le cas inenvisageable où vous les auriez oubliées.
Par exemple : développer $\mathrm{e}^{i(a+b)}$ de deux manières différentes, identifier les expressions obtenues et retrouver les formules donnant $\sin(a + b)$ et $\cos(a + b)$.

### b. Technique de l'angle moitié

Très classique et indispensable. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{iy} &= \mathrm{e}^{i\frac{(x+y)}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{(x-y)}{2}} + \mathrm{e}^{-i\frac{(x-y)}{2}}\right)\\ &= 2\mathrm{e}^{i\frac{(x+y)}{2}}\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

Cette technique permet en particulier de montrer

**Proposition 4.2.1.**
Soit $t \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}1 + \mathrm{e}^{it} &= 2\mathrm{e}^{i\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{t}{2}\right)\\ 1 - \mathrm{e}^{it} &= -2\mathrm{e}^{i\frac{t}{2}}i\sin\left(\frac{t}{2}\right)\end{aligned}$$

**Démonstration.**
Il suffit de remarquer que $1 = e^{i0}$ et d'appliquer la technique. □

### c. Factorisation

Utilise la technique de l'angle moitié, souvent après avoir identifié la somme en question comme la partie réelle ou imaginaire d'un type de somme bien connue. On admet temporairement les formules suivantes.

**Sommation géométrique** : Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} n+1 & \text{si} \quad z = 1, \\ \dfrac{z^{n+1}-1}{z-1} & \text{si} \quad z \neq 1. \end{cases}$$

**Binôme de Newton** : Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

On peut calculer les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ avec le triangle de Pascal.

**Exemple 4.2.2.**

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(4kx) = \begin{cases} \frac{\sin(2(n+1)x)\cos(2nx)}{\sin(2x)} & \text{si } x \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \\ n+1 & \text{si } x \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \end{cases}$$

#### d. Linéarisation

Méthode pour supprimer les produits et puissances dans une expression en cosinus et sinus :

1- Utiliser la formule d'Euler et développer.

2- Regrouper les puissances pour réutiliser les formules d'Euler, mais dans l'autre sens.

**Exemple 4.2.3.**

$$\begin{aligned} \cos^3 x &= \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x \\ \sin^3(x)\cos^2(x) &= -\frac{1}{16}\sin(5x) + \frac{1}{8}\sin(x) \\ &\quad + \frac{1}{16}\sin(3x) \end{aligned}$$

## 5. Nombres complexes et géométrie plane

### 5.1. Colinéarité et orthogonalité

#### a. Interprétation géométrique du rapport

**Théorème 5.1.1.**
Soit $z$ et $z'$ deux complexes non nuls. On note $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ les vecteurs d'affixes respectives $z$ et $z'$. Alors

$$\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{\|\vec{u}'\|}{\|\vec{u}\|}$$
$$\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = (\vec{u}, \vec{u}') \quad [2\pi]$$

**Démonstration.**
Le premier point est immédiat, le second découle de l'interprétation géométrique de l'argument. En notant $\vec{i}$ le vecteur d'affixe 1, et en posant $\theta = \arg z$, on a $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, donc $(\vec{i}, \vec{u}) = \arg z \quad [2\pi]$. De même $(\vec{i}, \vec{u}') = \arg z' [2\pi]$. D'où

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \vec{u}') &= (\vec{i}, \vec{u}') - (\vec{i}, \vec{u}) && [2\pi] \\ &= \arg z' - \arg z && [2\pi] \\ &= \arg\left(\frac{z'}{z}\right) && [2\pi] \end{aligned}$$

□

**Corollaire 5.1.2.**
Soit $A$, $B$ et $M$ trois points deux à deux distincts d'affixes respectives $a$, $b$ et $z$. Alors

(i) $A$, $B$ et $M$ sont alignés si et seulement si $\dfrac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R}$ ;

(ii) $(AM)\perp(BM)$ si et seulement si $\dfrac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R}$.

**Exemple 5.1.3.**
$i$, 1 et $2-i$ sont alignés, et $1+i$, 2 et $-2i$ forment un angle droit en 2.

## 5.2. Transformations usuelles

**Définition 5.2.1** (Transformations usuelles du plan)**.**
Soit $M$ et $M'$ deux points du plan, $\overrightarrow{u}$ un vecteur, $\Omega$ un point du plan, $\theta \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

1. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est l'application qui envoie $M$ sur $M'$, vérifiant $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$.
2. La rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\theta$ est l'application qui envoie $M$ sur $M'$, vérifiant $\Omega M = \Omega M'$ et $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta[2\pi]$.
3. L'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $\lambda$ est l'application qui envoie $M$ sur $M'$, vérifiant $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$.

**Théorème 5.2.2.**
Soit $M$ un point d'affixe $z$.

(i) Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur d'affixe $u$. L'image de $M$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour affixe le nombre complexe $z + u$ ;

(ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'image de $M$ par l'homothétie de centre $O$ et de rapport $\lambda$ a pour affixe le nombre complexe $\lambda z$ ;

(iii) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. L'image de $M$ par la rotation de centre $O$ et d'angle de mesure $\theta$ a pour affixe le nombre complexe $\mathrm{e}^{i\theta} z$. En particulier, $iz$ est l'affixe de l'image de $M$ par la rotation de centre $O$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ ;

(iv) L'image de $M$ par la symétrie centrale de centre $O$ a pour affixe le nombre complexe $-z$ ;

(v) L'image de $M$ par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses $(Ox)$ a pour affixe le nombre complexe $\overline{z}$ ;

(vi) L'image de $M$ par la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées $(Oy)$ a pour affixe le nombre complexe $-\overline{z}$.

**Démonstration.** (i) L'image $M'$ de $M$ est telle que $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{u}$. On traduit cela en termes d'affixes.

(ii) $\overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM}$.

(iii) $OM' = OM$ et $(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM}) = \theta[2\pi]$, donc $|z| = |z'|$ et $\arg z' - \arg z = \theta[2\pi]$, d'où $z' = |z|\mathrm{e}^{i(\theta + \arg z)}$.

(iv) C'est une homothétie de centre $O$ et de rapport $-1$.

(v) Déjà vu.

(vi) On compose.

□

**Remarque 5.2.3.**
On peut adapter pour changer les centres des homothéties et rotations.

**Exemple 5.2.4.**
1. L'homothétie de centre $(2-i)$ et de rapport 3 s'écrit : $z \mapsto 3(z - 2 + i) + 2 - i = 3z - 4 + 2i$.
2. La rotation de centre 0 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ s'écrit $z \mapsto iz$.
3. La rotation de centre $(1+i)$ et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ s'écrit $z \mapsto j(z - 1 - i) + 1 - i$.

## 5.3. Similitudes et isométries

**Définition 5.3.1.**
Soit $\lambda > 0$. On appelle *similitude (plane) de rapport* $\lambda$ toute application $f$ du plan dans lui-même telle que pour tous points $M$, $N$ on ait :

$$f(M)f(N) = \lambda MN$$

On appelle *isométrie (plane)* toute application $f$ du plan dans lui-même telle que pour tous points $M$, $N$ on ait :

$$f(M)f(N) = MN$$

**Remarque 5.3.2.**
1. Comme le nom l'indique (racines grecques), les isométries préservent les distances.
2. Les isométries sont les similitudes de rapport 1.
3. La composée de deux isométrie est une isométrie.
4. La composée de deux similitudes est une similitude de rapport le produit des rapports de celles-ci.

5. Il est clair que toute similitude est injective. On verra ci-dessous que toute similitude est en fait bijective.

**Exemple 5.3.3.**
Les translations, les rotations, les symétries et les homothéties sont des similitudes.

Dans la suite de ce chapitre, on identifiera le plan complexe et $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'on identifiera un point avec son affixe. Les applications du plan dans lui-même sont donc les applications de $\mathbb{C}$ dans lui-même. En ce qui concerne les similitudes, on a alors le résultat suivant :

**Théorème 5.3.4.** (i) Les similitudes planes sont exactement toutes les applications de la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\overline{z} + b$, où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a \neq 0$ ;
(ii) Les isométries planes sont exactement toutes les applications de la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\overline{z} + b$, où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, et $|a| = 1$.

**Démonstration.**
Soit $f$ une application de la forme $z \mapsto a\overline{z}+b$, où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a$ non nul.

Alors, soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. On a $|f(z') - f(z)| = |a|\left|\overline{z'} - \overline{z}\right| = |a||z' - z|$. Donc $f$ est une similitude de rapport $|a|$.

De même, toute application $f$ de la forme $z \mapsto az + b$, où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $a \neq 0$ est également une similitude de rapport $|a|$.

Donc les application de la forme données dans l'énoncé du théorème sont bien des similitudes dans le cas général et des isométries dans le cas où $|a| = 1$.

Il reste à montrer que toutes les similitudes et les isométries sont de la forme donnée dans l'énoncé.

1. Remarquons tout d'abord qu'il existe une unique isométrie plane fixant 0, 1 et $i$. En effet, soit $f$ une telle isométrie, c'est-à-dire vérifiant $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(i) = i$.
   Alors, soit $z \in \mathbb{C}$. $z$ s'écrit sous la forme $x + iy$ et $f(z)$ sous la forme $x' + iy'$ où $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$.
   On a $|f(z) - f(0)| = |z - 0|$, donc $x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$.
   De plus $|f(z) - f(1)| = |z - 1|$, donc $(x' - 1)^2 + y'^2 = (x - 1)^2 + y^2$.
   Par soustraction de ces deux égalités, on déduit $x' = x$.
   En outre, $|f(z) - f(i)| = |z - i|$, donc $x'^2 + (y' - 1)^2 = x^2 + (y - 1)^2$.
   Par soustraction de cette égalité à la première, on déduit $y' = y$.
   On a donc $f(z) = z$.
   Donc $f$ est nécessairement l'identité.
   Réciproquement l'identité est bien une isométrie fixant 0, 1 et $i$.
2. Montrons maintenant qu'il existe deux isométries planes et deux seulement fixant 0 et 1. Soit $f$ une telle isométrie. $f(i)$ s'écrit sous la forme $x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   On a $|f(i) - f(0)| = |i - 0| = 1$, donc $x^2 + y^2 = 1$. De plus $|f(i) - f(1)| = |i - 1|$, donc $(x - 1)^2 + y^2 = 2$.
   Par soustraction de ces deux égalités, on a donc $2x - 1 = -1$, donc $x = 0$. On en déduit $y^2 = 1$, donc $y = 1$ ou $y = -1$.
   Si $y = 1$, alors $f(i) = i$ et d'après ce qui précède, $f$ est nécessairement l'identité.
   Sinon, $y = -1$ et $f(i) = -i$. Notons $s : z \mapsto \overline{z}$. $s$ est bien une isométrie donc $s \circ f$ est une isométrie. Or $s \circ f$ fixe 0, 1 et $i$. Donc c'est l'identité : $s \circ f = \mathrm{Id}$, donc $s \circ s \circ f = s \circ \mathrm{Id}$, donc $f = s$.
   On a donc $f = \mathrm{Id}$ ou $f = s$.
   Réciproquement $s$ et Id sont bien des isométries fixant 0 et 1.
3. Montrons maintenant que toute similitude fixant 0 est de la forme $z \mapsto az$ ou de la forme $z \mapsto a\overline{z}$ avec $a \neq 0$.
   Soit $f$ une telle similitude. Alors posons $a = f(1)$. On a $f(0) = 0$ et $f$ est injective donc $a \neq 0$. Notons alors $g$ la similitude $z \mapsto z/a$. $g \circ f$ est une similitude fixant 0 et 1.
   Donc son rapport est 1 : c'est une isométrie. On a donc $g \circ f = \mathrm{Id}$ ou $g \circ f = s$ (où $s : z \mapsto \overline{z}$).
   En composant à gauche par $z \mapsto az$, on en déduit que $f$ est l'application $z \mapsto az$ ou $z \mapsto a\overline{z}$.
4. Montrons maintenant le résultat. Soit $f$ une similitude. Alors posons $b = f(0)$ et $g : z \mapsto z - b$. $g \circ f$ est une similitude fixant 0, donc est de la forme $z \mapsto az$ ou $z \mapsto a\overline{z}$. En composant à gauche par $z \mapsto z + b$, on en déduit que $f$ est de la forme $z \mapsto az + b$ ou de la forme $z \mapsto a\overline{z} + b$ avec $a \neq 0$.
   Dans les deux cas, le rapport de la similitude est $|a|$. Si $f$ est de plus une isométrie, on a donc de plus $|a| = 1$.

$\square$

**Définition 5.3.5** (Similitude directe/indirecte)**.**
On distingue les similitudes directes et indirectes :
(i) Toute similitude plane de la forme $z \mapsto az + b$, avec $a, b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$ préserve les angles orientés de vecteurs, et est dite *directe.*

(ii) Toute similitude plane de la forme $z \mapsto a\overline{z} + b$, avec $a, b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$ renverse les angles orientés de vecteurs, et est dite *indirecte*.

**Démonstration.** (i) Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq 0$ et soit $f$ la similitude $z \mapsto az + b$. Soient en outre $u$, $v$ et $w$ trois points distincts. Leurs images respectives par $f$ sont notées $u'$, $v'$ et $w'$. Alors

$$\frac{u'-w'}{u'-v'} = \frac{(au+b)-(aw+b)}{(au+b)-(av+b)} = \frac{a(u-w)}{a(u-v)} = \frac{u-w}{u-v}$$

d'où égalité des arguments de ces expressions, et l'égalité des angles recherchée.

(ii) On obtient, de la même façon,

$$\frac{u'-w'}{u'-v'} = \overline{\left(\frac{u-w}{u-v}\right)}$$

d'où le résultat.

□

**Exemple 5.3.6.**
Translations, rotations et homothéties vs. symétries axiales.

**Théorème 5.3.7** (Caractérisation géométrique)**.** Toute similitude plane directe est soit une translation, soit la composée d'une homothétie de rapport strictement positif et d'une rotation de même centre. Dans ce second cas, si $f$ est la composée d'une homothétie de centre $\omega$ et de rapport $\lambda > 0$, et d'une rotation de centre $\omega$ et d'angle de mesure $\theta$, alors on dit que $f$ est la *similitude (directe) de centre $\omega$, de rapport $\lambda$ et d'angle de mesure $\theta$.*

Toute isométrie plane directe est soit une translation, soit une rotation.

**Démonstration.**
Soient $(a, b) \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq 0$ et soit $f$ la similitude $z \mapsto az + b$. Si $a = 1$, alors $f$ est une translation de vecteur d'affixe $b$. Supposons donc que $a \neq 1$. Alors $f$ possède un unique point fixe, $\omega = \dfrac{b}{1-a}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
f(z) - \omega &= f(z) - f(\omega) \\
&= (az+b) - (a\omega + b) \\
&= a(z-\omega) \\
&= \underbrace{|a| \times \underbrace{\left(e^{i \arg a}(z-\omega)\right)}_{\text{rotation de centre } \omega \text{ et d'angle de mesure } \arg a}}_{\text{homothétie de centre } \omega \text{ et de rapport } |a| > 0} \\
&= \underbrace{e^{i \arg a} \times \underbrace{\left(|a|(z-\omega)\right)}_{\text{homothétie de centre } \omega \text{ et de rapport } |a| > 0}}_{\text{rotation de centre } \omega \text{ et d'angle de mesure } \arg a}
\end{aligned}$$

Le résultat sur les isométries découle immédiatement de celui sur les similitudes. □

**Exemple 5.3.8.**
L'application $f \quad z \mapsto (1+i)z + 2$ est la similitude directe de centre $2i$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{4}$.