Feuille d'exercice n° 25 : **Espaces euclidiens**

Exercice 1 Sur $\mathbb{R}_3[X]$, on considère les formes bilinéaires suivantes. Dire lesquelles sont des produits scalaires.

1) $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$

2) $\chi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(P'(t)Q(t) + P(t)Q'(t)\right)\mathrm{d}t$

3) $\psi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t + P(0)Q(0)$.

Exercice 2 À deux polynômes $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on associe

$$< P, Q >= (a_0 + a_1)b_0 + (a_0 + 3a_1)b_1 + 3a_2b_2.$$

Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

Exercice 3 Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $v_1, \dots, v_n \in E$.

Montrer l'inégalité : $\left\|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i\right\|^2 \leqslant n\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2$.

Exercice 4 Soit $a < b$ deux réels.

1) Soient f et g deux applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Étudier le cas d'égalité.

2) Soit f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Étudier le cas d'égalité.

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que, sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, l'application $(A,B) \to \mathrm{tr}\,({}^tAB)$ est un produit scalaire.

2) Soit N la norme associée à ce produit scalaire (on l'appelle *norme de Frobenius*), montrer que :

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$

3) Montrer que :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), |\mathrm{tr}\,(A)| \leqslant \sqrt{n}N(A).$$

Exercice 6 Soit E un espace euclidien, et $(e_1, ..., e_n)$ des vecteurs unitaires vérifiant : $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2$.

1) Montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est une famille orthogonale.

2) Montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormale.

Remarque : on ne suppose pas que la dimension de l'espace est n.

Exercice 7 ( ) Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer les égalités suivantes.

1) $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$ **2)** $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ **3)** $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

Exercice 8 ( )

On munit $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ du produit scalaire usuel : $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. Déterminer $F^\perp$, avec $F = \{f \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$. Que peut-on en conclure ?

Indication : si $f \in F^\perp$, on pourra s'intéresser à la fonction $t \mapsto tf(t)$.

Exercice 9 ( ) On sait que l'application $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}({}^tAB)$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un produit scalaire. Calculer l'orthogonal de l'ensemble des matrices diagonales puis celui des matrices symétriques.

Exercice 10 ( ) $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien. Vérifier que les vecteurs $e_1 = (1,0,1)$, $e_2 = (1,0,2)$ et $e_3 = (1,1,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt.

Exercice 11 ( ) On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire : $(P, Q) \to \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. Existe t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall P \in \mathbb{R}[X], (P|A) = P(0)$?

Exercice 12 Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est orthogonal (c'est-à-dire $\operatorname{Ker}(p) \perp \operatorname{Im}(p)$) si et seulement si : $\forall x \in E : \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Indication : pour montrer une des implications, avec $k \in \operatorname{Ker} p$ et $i \in \operatorname{Im} p$, on pourra considérer le vecteur $i + \lambda k$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 13

1) Montrer qu'un parallélogramme est un rectangle si et seulement si ses diagonales sont de même longueur.

2) Montrer qu'un parallélogramme est un losange si et seulement si ses diagonales sont orthogonales.

Exercice 14 Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 2. Soit x et $y \in E$. Montrer les propriétés suivantes.

1) Si $\|x\| = \|y\|$, alors il existe un hyperplan H de E tel que $y = s(x)$ où s est la symétrie orthogonale par rapport à H.

2) Si $\langle x, y\rangle = \|y\|^2$, alors il existe un hyperplan H de E tel que $y = p(x)$ où p est la projection orthogonale sur H.

3) Les hyperplans trouvés précédemment sont-ils uniques ?

Exercice 15 Déterminer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \displaystyle\int_0^1 (\mathrm{e}^{\,x} - (ax+b))^2 dx$.

Exercice 16 ( ) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. À tout couple (P,Q) de E, on associe $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_0^\pi P(\cos t)Q(\cos t)dt$. On appelle k^{e} polynôme de Tchebychev le polynôme défini par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ P_k(\cos\theta) = \cos(k\theta).$$

1) Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur E.

2) Montrer que les polynômes de Tchebychev $P_0,\dots,P_n$ constituent une base orthogonale de E.

Bonus : si cela n'est pas clair, montrez l'existence et l'unicité de ces polynômes, déterminer le degré et le coefficient dominant de chacun.

Exercice 17 Soit E un espace euclidien, f et g deux endomorphismes de E qui commutent. On suppose que les matrices de f et de g dans une base orthonormée sont respectivement symétriques et antisymétriques.

Montrer que $\forall u \in E,\ \langle f(u), g(u)\rangle = 0$, puis que $\forall u \in E,\ \|(f-g)(u)\| = \|(f+g)(u)\|$.

Exercice 18 ( ) Soit E un espace euclidien de dimension 3, (i,j,k) une base orthonormale de E. Déterminer les matrices dans la base (i,j,k) des transformations suivantes.

1) La symétrie et la projection orthogonale par rapport au plan d'équation $x - 2y + 3z = 0$.

2) La symétrie et la projection orthogonale par rapport à la droite engendrée par le vecteur $i - 4k$.

Exercice 19 Soit E un espace euclidien de dimension n, et $\mathscr{B} = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une base orthonormale de E. Soit $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$ tels que $u = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i e_i$ est un vecteur unitaire de E.

1) Déterminer la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale sur la droite D engendrée par u.

2) En déduire les matrices de la projection orthogonale sur $D^\perp$, de la symétrie orthogonale par rapport à D et de la symétrie orthogonale par rapport à $D^\perp$.

Exercice 20 Soit f un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien E.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})^\perp$.

2) En déduire que si $(f - \mathrm{Id})^2 = 0$, alors $f = \mathrm{Id}$.

Exercice 21 ( ) Déterminer les natures et les éléments caractéristiques des transformations de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices dans la base canonique sont les suivantes.

1) $A = \dfrac{1}{25}\begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$ **2)** $B = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ **3)** $C = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 22 (✎) Caractériser les endomorphismes dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont les suivantes.

1) $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

2) $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Exercice 23 Soient E un espace euclidien orienté de dimension 2, r une rotation de E et s une réflexion de E. Déterminer $r \circ s \circ r$ et $s \circ r \circ s$.