UNIVERSIDAD DEL QUINDÍO

UNIVERSIDAD DEL QUINDÍO
FACULTAD DE INGENIERÍA
PARCIAL IV

R.A.4: Plantea y resuelve problemas prácticos mediante la interpretación de sistemas de ecuaciones diferenciales con el propósito de encontrar la relación y variación que existen entre las variables en diferentes situaciones.

Este cuestionario debe ser resuelto de manera clara y ordenada.

Para cada ejercicio escribir el numeral y el enunciado correspondiente.

Cada ejercicio debe tener los procedimientos, no se aceptan respuestas aisladas ni resultados obtenidos por métodos que no correspondan a la Unidad a evaluar.

No olvide marcarlo con su nombre.

El uso de celulares, computadores, relojes inteligentes y apuntes está prohibido durante el parcial.

1. (3.0) Dados los vectores $\boldsymbol{X_1} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{X_2} = \begin{bmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t} \end{bmatrix}$
   a. Verifique si los vectores son solución del sistema $\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x + y \end{aligned}$
   b. Verifique si son linealmente independientes o linealmente dependientes
   c. Si son LI, escriba la solución del sistema como combinación lineal de ellos
2. (2.0) Solucione el sistema de ecuaciones lineales homogéneo con coeficientes constantes: $\begin{aligned} x'(t) &= x + y - z \\ y'(t) &= 2y \\ z'(t) &= y - z \end{aligned}$

Nombre Michael Steven Oliver Robi | Fecha día mes año
Profesor | Materia
Institución | Curso | Nota

1) $X_1 = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t} \end{bmatrix}$ $D(e^x) = e^x(x')$

$X_1' = \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$, $X_2' = \begin{bmatrix} 12e^{4t} \\ 8e^{4t} \end{bmatrix}$

$X' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$

A) Para X_1 $X_1' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$

$X_1' = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - 3e^{-t} \\ 2e^{-t} - 1e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$ R/ X_1 y X_2 son solucion del Sistema

Para X_2 $X_2' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t} \end{bmatrix}$ $X' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$

$X_2' = \begin{bmatrix} 6e^{4t} + 6e^{4t} \\ 6e^{4t} + 2e^{4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12e^{4t} \\ 8e^{4t} \end{bmatrix}$

B) $W(X_1, X_2) = \begin{vmatrix} e^{-t} & 3e^{4t} \\ -e^{-t} & 2e^{4t} \end{vmatrix} = 2e^{3t} - [-3e^{3t}]$
$\cancel{x}-1$ $= 2e^{3t} + 3e^{3t}$
$= 5e^{3t} \neq 0$ LI

C) Respuesta:

$X(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t)$

$X(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{4t}$

20/20 Felicidades

2) $X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix}$

$\mathrm{Det}[A - \lambda I] = 0 \quad \gamma - 1$

$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 & 2-\lambda \\ 0 & 1 & -1-\lambda & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$

$[1-\lambda][2-\lambda][-1-\lambda] = 0$

$-[1+\lambda][1-\lambda][2-\lambda] = 0$

$-[1-\lambda^2][2-\lambda] = 0$

$\lambda^2 - 1 = 0 \qquad\qquad 2-\lambda = 0$

$\sqrt{\lambda^2} = \pm\sqrt{1} \quad \lambda = \pm 1 \rightarrow \lambda = 1, \lambda = -1 \quad \lambda = 2$

Para $\lambda = -1$ $\quad 1-\lambda = 1-(-1)$; $2-\lambda = 2-(-1)$; $-1-\lambda = -1-(-1)$

$1-\lambda = 2$; $2-\lambda = 3$; $-1-\lambda = 0$

$\begin{array}{c} \begin{matrix} X & Y & Z & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \quad F_2(-1/3) + F_3$

$\begin{array}{c} \begin{matrix} X & Y & Z & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{matrix} \rightarrow 2X = -\cancel{Y} + Z, \ 2X = 1 \\ \rightarrow 3Y = 0, \ Y = 0 \quad X = 1/2 \\ \rightarrow \quad Z = 1 \end{matrix} \quad K_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$

Para $\lambda = 1$ $\quad 1-\lambda = 1-1$; $2-\lambda = 2-1$; $-1-\lambda = -1-1$

$1-\lambda = 0$; $2-\lambda = 1$; $-1-\lambda = -2$

$\begin{array}{c} \begin{matrix} X & Y & Z & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \end{array} \quad F_2(-1) + F_3$

$\begin{array}{c} \begin{matrix} X & Y & Z & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{matrix} Y = Z, \ X = 1 \\ Y = 0 \\ -2Z = 0, \ Z = 0 \end{matrix} \quad K_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{t}$

Para $\lambda = 2$ $\quad 1-\lambda = 1-2$; $2-\lambda = 2-2$; $-1-\lambda = -1-2$

$1-\lambda = -1$; $2-\lambda = 0$; $-1-\lambda = -3$

$\begin{array}{c} \begin{matrix} X & Y & Z & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{matrix} -X = -\overset{6}{Y} + \overset{2}{Z}, \ -X = -4, \ X = 4 \\ Y = 3Z, \ Z = 2 \\ Y = 6 \end{matrix} \quad K_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t}$

$Y(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{t} + C_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t}$