Profesora: Lina Marcela Ocampo

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

$$\frac{dx_1}{dt} = g_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = g_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = g_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Este sistema de n ecuaciones de primer orden se llama **sistema de orden n.**

Forma matricial de un sistema de ecuaciones diferenciales lineal

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

el sistema (3) de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden se puede expresar como sigue:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

o simplemente como

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}. \qquad \textbf{(4)}$$

Si el sistema es homogéneo, su forma matricial es

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX}. \qquad \textbf{(5)}$$

EJEMPLO 1 **Sistemas expresados en notación matricial**

a) Si $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, la forma matricial del sistema homogéneo

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x + 4y \\ \frac{dy}{dt} &= 5x - 7y \end{aligned} \qquad \text{es} \qquad \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}\mathbf{X}.$$

b) Si $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, la forma matricial del sistema no homogéneo

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 6x + y + z + t \\ \frac{dy}{dt} &= 8x + 7y - z + 10t \\ \frac{dz}{dt} &= 2x + 9y - z + 6t \end{aligned} \qquad \text{es} \qquad \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & -1 \\ 2 & 9 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} t \\ 10t \\ 6t \end{pmatrix}.$$

DEFINICIÓN 8.1 **Vector solución**

Un vector solución en un intervalo I es cualquier matriz columna

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

cuyos elementos son funciones diferenciables que satisfagan el sistema (4) en el intervalo.

EJEMPLO 2 **Comprobación de soluciones**

Compruebe que, en el intervalo $(-\infty, \infty)$,

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t} = \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix}$$

son soluciones de

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X}. \qquad (6)$$

SOLUCIÓN En $\mathbf{X}_1' = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{X}_2' = \begin{pmatrix} 18e^{6t} \\ 30e^{6t} \end{pmatrix}$ vemos que

$$\mathbf{AX}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} - 3e^{-2t} \\ 5e^{-2t} - 3e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix} = \mathbf{X}_1'$$

y

$$\mathbf{AX}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{6t} + 15e^{6t} \\ 15e^{6t} + 15e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18e^{6t} \\ 30e^{6t} \end{pmatrix} = \mathbf{X}_2'. \quad ■$$

Gran parte de la teoría de los sistemas de n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden se parece a la de las ecuaciones diferenciales lineales de orden n.

TEOREMA 8.1 **Existencia de una solución única**

Sean los elementos de las matrices $\mathbf{A}(t) = \mathbf{F}(t)$ funciones continuas en un intervalo común I que contiene al punto t_0. Existe una solución única del problema de valor inicial, ecuaciones (7), en el intervalo.

Sistemas homogéneos En las próximas definiciones y teoremas sólo nos ocuparemos de los sistemas homogéneos. Sin decirlo explícitamente, siempre supondremos que las a_{ij} y las f_i son funciones continuas en un intervalo común I.

Principio de superposición El siguiente resultado es un **principio de superposición** para soluciones de sistemas lineales.

TEOREMA 8.2 **Principio de superposición**

Sean $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_k$ un conjunto de vectores solución del sistema homogéneo (5) en un intervalo I. La combinación lineal

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \cdots + c_k\mathbf{X}_k,$$

en que las c_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ son constantes arbitrarias, también es una solución en el intervalo.

DEFINICIÓN 8.2 **Dependencia lineal e independencia lineal**

Sean $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_k$ un conjunto de vectores solución del sistema homogéneo (5) en un intervalo I. Se dice que el conjunto es **linealmente dependiente** en el intervalo si existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$, no todas cero, tales que

$$c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \cdots + c_k\mathbf{X}_k = 0$$

para todo t en el intervalo. Si el conjunto de vectores no es linealmente dependiente en el intervalo, se dice que es **linealmente independiente**.

EJEMPLO 3 **Aplicación del principio de superposición**

El lector debe practicar comprobando que los dos vectores

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

son soluciones del sistema

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}.$$

De acuerdo con el principio de superposición, la combinación lineal

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1\begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

es una solución más del sistema.

TEOREMA 8.3 **Criterio para las soluciones linealmente independientes**

Sean

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

Sean n vectores solución del sistema homogéneo, ecuaciones (5), en un intervalo I. El conjunto de vectores es linealmente independiente en I si y sólo si el **wronskiano**

$$W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{9}$$

para todo t en el intervalo.

EJEMPLO 4 **Soluciones linealmente independientes**

En el ejemplo 2 dijimos que $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$ y $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}$ son soluciones del sistema (6).

Está claro que $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ son linealmente independientes en el intervalo $(-\infty, \infty)$ porque ninguno de los vectores es múltiplo constante del otro. Además,

$$W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \begin{vmatrix} e^{-2t} & 3e^{6t} \\ -e^{-2t} & 5e^{6t} \end{vmatrix} = 8e^{4t} \neq 0$$

para todos los valores reales de t. ■

DEFINICIÓN 8.3 **Conjunto fundamental de soluciones**

Todo conjunto, $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$, de n vectores solución linealmente independientes del sistema homogéneo (5) en un intervalo I, es un **conjunto fundamental de soluciones en el intervalo.**

TEOREMA 8.4 **Existencia de un conjunto fundamental**

Existe un conjunto fundamental de soluciones para el sistema homogéneo (5) en un intervalo I.

Los dos teoremas siguientes para sistemas lineales equivalen a los teoremas 4.5 y 4.6.

TEOREMA 8.5 **Solución general, sistemas homogéneos**

Sean $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ un conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo (5) en un intervalo I. Entonces, la **solución general** del sistema en el intervalo es

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \cdots + c_n\mathbf{X}_n,$$

en donde las c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son constantes arbitrarias.

EJEMPLO 5 **Solución general del sistema (6)**

En el ejemplo 2 vimos que $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$ y $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}$ son soluciones linealmente independientes de (6) en $(-\infty, \infty)$; por lo tanto, $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ forman un conjunto fundamental de soluciones en el intervalo. En consecuencia, la solución general del sistema en el intervalo es

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}. \qquad \textbf{(10)}$$

EJEMPLO 6 **Solución general del sistema (8)**

Los vectores

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\cos t \\ -\operatorname{sen} t + \cos t \end{pmatrix}$$

son soluciones del sistema (8) en el ejemplo 3 (véase el problema 16 en los ejercicios 8.1). Ahora bien,

$$W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3) = \begin{vmatrix} \cos t & 0 & \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t & e^t & -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\cos t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t & 0 & -\operatorname{sen} t + \cos t \end{vmatrix} = e^t \neq 0$$

para todos los valores reales de t. Llegamos a la conclusión de que $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ y $\mathbf{X}_3$ constituyen un conjunto fundamental de soluciones en $(-\infty, \infty)$. Así, la solución general del sistema en el intervalo es la combinación lineal $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_3$; esto es,

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\cos t \\ -\operatorname{sen} t + \cos t \end{pmatrix}.$$

TEOREMA 8.6 **Solución general, sistemas no homogéneos**

Sea $\mathbf{X}_p$ una solución dada del sistema (4) no homogéneo en un intervalo I y sea

$$\mathbf{X}_c = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \cdots + c_n\mathbf{X}_n$$

la solución general, en el mismo intervalo, del sistema homogéneo (5) correspondiente. Entonces, la **solución general** del sistema no homogéneo en el intervalo es

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_c + \mathbf{X}_p.$$

La solución general $\mathbf{X}_c$ del sistema homogéneo (5) se llama **función complementaria** del sistema no homogéneo (4).

EJEMPLO 7 **Solución general, sistema no homogéneo**

El vector $\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} 3t-4 \\ -5t+6 \end{pmatrix}$ es una solución particular del sistema no homogéneo

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 12t - 11 \\ -3 \end{pmatrix}$$

en el intervalo $(-\infty, \infty)$. (Compruébelo.) La función complementaria de (11) en el mismo intervalo, que es la solución general de

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X},$$

se determinó en (10), en el ejemplo 5, y era

$$\mathbf{X}_c = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}e^{6t}.$$

Entonces, según el teorema 8.6,

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_c + \mathbf{X}_p = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}e^{6t} + \begin{pmatrix} 3t-4 \\ -5t+6 \end{pmatrix}$$

es la solución general de (11) en $(-\infty, \infty)$.

EJERCICIOS

Las respuestas a los problemas de número impar comienzan en la página A-12.

En los problemas 1 a 6 exprese el sistema respectivo en forma matricial.

1. $\dfrac{dx}{dt} = 3x - 5y$

$\dfrac{dy}{dt} = 4x + 8y$

2. $\dfrac{dx}{dt} = 4x - 7y$

$\dfrac{dy}{dt} = 5x$

3. $\dfrac{dx}{dt} = -3x + 4y - 9z$

$\dfrac{dy}{dt} = 6x - y$

$\dfrac{dz}{dt} = 10x + 4y + 3z$

4. $\dfrac{dx}{dt} = x - y$

$\dfrac{dy}{dt} = x + 2z$

$\dfrac{dz}{dt} = -x + z$

5. $\dfrac{dx}{dt} = x - y + z + t - 1$

$\dfrac{dy}{dt} = 2x + y - z - 3t^2$

$\dfrac{dz}{dt} = x + y + z + t^2 - t + 2$

6. $\dfrac{dx}{dt} = -3x + 4y + e^{-t}\operatorname{sen} 2t$

$\dfrac{dy}{dt} = 5x + 9y + 4e^{-t}\cos 2t$

En los problemas 7 a 10 exprese al sistema dado sin usar matrices.

7. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{t}$

8. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -9 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{5t} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}e^{-2t}$

9. $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t$

10. $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \operatorname{sen} t + \begin{pmatrix} t-4 \\ 2t+1 \end{pmatrix} e^{4t}$

En los problemas 11 a 16 compruebe que el vector X sea una solución del sistema dado.

11. $\dfrac{dx}{dt} = 3x - 4y$

$\dfrac{dy}{dt} = 4x - 7y; \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-5t}$

12. $\dfrac{dx}{dt} = -2x + 5y$

$\dfrac{dy}{dt} = -2x + 4y; \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5\cos t \\ 3\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} e^{t}$

13. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}; \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-3t/2}$

14. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X}; \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} te^{t}$

15. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}; \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}$

16. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}; \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\cos t \\ -\operatorname{sen} t + \cos t \end{pmatrix}$

En los problemas 17 a 20 los vectores respectivos son soluciones de un sistema X′ = AX. Determine si los vectores constituyen un conjunto fundamental en (−∞, ∞).

17. $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-6t}$

18. $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix} te^{t}$

19. $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGÉNEOS CON COEFICIENTES CONSTANTES

Para solucionar un sistema de ecuaciones diferenciales lineales honogéneo con coeficientes constantes se utiliza la ecuación característica resultante de calcular el determinante: $Det(A - \lambda I)$.

TEOREMA 8.7 **Solución general, sistemas homogéneos**

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ n valores propios reales y distintos de la matriz $\mathbf{A}$ de coeficientes del sistema homogéneo (2), y sean $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_n$ los vectores propios correspondientes. Entonces, la **solución general** de (2) en el intervalo $(-\infty, \infty)$ es

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{K}_1e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{K}_2e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\mathbf{K}_ne^{\lambda_n t}.$$

EJEMPLO 1 **Valores propios distintos**

Resuelva

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 3y$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x + y. \qquad \textbf{(4)}$$

SOLUCIÓN Primero determinaremos los valores y vectores propios de la matriz de coeficientes.

En la ecuación característica

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 4) = 0$$

los valores propios son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 4$.

Cuando $\lambda_1 = -1$, la ecuación (3) equivale a

$$3k_1 + 3k_2 = 0$$
$$2k_1 + 2k_2 = 0.$$

Por consiguiente, $k_1 = -k_2$. Cuando $k_2 = -1$, el vector propio relacionado es

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Cuando $\lambda_2 = 4$,

$$-2k_1 + 3k_2 = 0$$
$$2k_1 - 3k_2 = 0$$

de modo que $k_1 = 3k_2/2$ y, por lo tanto, con $k_2 = 2$, el vector propio correspondiente es

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Como la matriz **A** de coeficientes es de 2×2, y en vista de que hemos llegado a dos soluciones de (4) linealmente independientes que son

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} \quad \text{y} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t},$$

concluimos que la solución general del sistema es

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}. \tag{5}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1e^{-t} + 3c_2e^{4t} \\ y(t) &= -c_1e^{-t} + 2c_2e^{4t}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Valores propios distintos

Resuelva

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -4x + y + z \\ \frac{dy}{dt} &= x + 5y - z \\ \frac{dz}{dt} &= y - 3z. \end{aligned} \tag{6}$$

SOLUCIÓN Usaremos los cofactores del tercer renglón, con lo cual

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+3)(\lambda+4)(\lambda-5) = 0,$$

de modo que los valores propios son $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -4$, $\lambda_3 = 5$.

Para $\lambda_1 = -3$, una eliminación de Gauss-Jordan conduce a

$$(\mathbf{A} + 3\mathbf{I}|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{de renglón}]{\text{operaciones}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Por lo tanto, $k_1 = k_3$ y $k_2 = 0$. La opción $k_3 = 1$ produce un vector propio y su vector solución correspondiente

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}. \tag{7}$$

De igual forma, para $\lambda_2 = -4$,

$$(\mathbf{A} + 4\mathbf{I}|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{de renglón}]{\text{operaciones}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

implica que $k_1 = 10k_3$ y $k_2 = -k_3$. Si optamos por $k_3 = 1$, obtenemos un segundo vector propio y el vector solución correspondiente

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}. \tag{8}$$

Por último, cuando $\lambda_3 = 5$, las matrices aumentadas

$$(\mathbf{A} - 5\mathbf{I}|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -9 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{de renglón}]{\text{operaciones}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

dan

$$\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}. \tag{9}$$

La solución general del sistema (6) es una combinación lineal de los vectores solución (7), (8) y (9):

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

EJEMPLO 3 Valores propios repetidos

Resuelva $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X}$.

SOLUCIÓN Desarrollamos el determinante en la ecuación característica

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

y obtenemos $-(\lambda+1)^2(\lambda-5) = 0$. Vemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, y que $\lambda_3 = 5$.

Para $\lambda_1 = -1$, la eliminación de Gauss-Jordan da

$$(\mathbf{A} + \mathbf{I}|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{de renglón}]{\text{operaciones}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El primer renglón de la última matriz indica que $k_1 - k_2 + k_3 = 0$; o sea, $k_1 = k_2 - k_3$. Las opciones $k_2 = 1$, $k_3 = 0$ y $k_2 = 1$, $k_3 = 1$ producen, a su vez, $k_1 = 1$ y $k_1 = 0$. Así, dos vectores propios que corresponden a $\lambda_1 = -1$ son

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Puesto que ninguno de los vectores propios es múltiplo constante del otro, hemos llegado a dos soluciones linealmente independientes que corresponden al mismo valor:

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} \quad \text{y} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Por último, cuando $\lambda_3 = 5$, la reducción

$$(\mathbf{A} - 5\mathbf{I}|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{de renglón}]{\text{operaciones}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

implica que $k_1 = k_3$, y $k_2 = -k_3$. Escogemos $k_3 = 1$, y obtenemos $k_1 = 1$ y $k_2 = -1$; de este modo, un tercer vector propio es

$$\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resulta que la solución general del sistema es

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

8.2.3 Valores propios complejos

Si $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $i^2 = -1$ son valores propios complejos de la matriz **A** de coeficientes, cabe esperar que sus vectores propios correspondientes también tengan elementos complejos.*

Por ejemplo, la ecuación característica del sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 6x - y \\ \frac{dy}{dt} &= 5x + 4y \end{aligned} \tag{19}$$

es

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0.$$

Aplicamos la fórmula cuadrática y tenemos $\lambda_1 = 5 + 2i$, $\lambda_2 = 5 - 2i$.

Ahora, para $\lambda_1 = 5 + 2i$, debemos resolver

$$\begin{aligned} (1 - 2i)k_1 - \qquad k_2 &= 0 \\ 5k_1 - (1 + 2i)k_2 &= 0. \end{aligned}$$

Puesto que $k_2 = (1 - 2i)k_1$,† la opción $k_1 = 1$ produce los vectores propio y solución siguientes

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2i \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2i \end{pmatrix} e^{(5+2i)t}.$$

De igual manera, cuando $\lambda_2 = 5 - 2i$ llegamos a

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + 2i \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + 2i \end{pmatrix} e^{(5-2i)t}.$$

EJERCICIOS:

En los problemas 1 a 12 determine la solución general del sistema respectivo.

1. $\dfrac{dx}{dt} = x + 2y$, $\quad \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y$

2. $\dfrac{dx}{dt} = 2y$, $\quad \dfrac{dy}{dt} = 8x$

3. $\dfrac{dx}{dt} = -4x + 2y$, $\quad \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{5}{2}x + 2y$

4. $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2}x + 9y$, $\quad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}x + 2y$

5. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

6. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

7. $\dfrac{dx}{dt} = x + y - z$, $\quad \dfrac{dy}{dt} = 2y$, $\quad \dfrac{dz}{dt} = y - z$

8. $\dfrac{dx}{dt} = 2x - 7y$, $\quad \dfrac{dy}{dt} = 5x + 10y + 4z$, $\quad \dfrac{dz}{dt} = 5y + 2z$

Tomado de: Ecuaciones Diferenciales de Denis Zill