



M1 - CSM

Projet ELFI

Construction d'une librairie éléments finis

Jean POUSSET

16 mai 2025

Table des matières

1	Présentation des problèmes	2
1.1	Problème ($P1$)	2
1.2	Problème ($P2$)	2
1.3	Problème ($P3$)	3
2	Test de convergence	4
2.1	Liste des tests effectués	4
2.2	Résultats pour le domaine Ω_1	4
2.3	Résultats pour le domaine Ω_2	6

Introduction

◇ Objectifs du projet tutoré

Dans ce rapport je présente uniquement les tests de convergences qui valident (ou malheureusement invalident) les cas d'applications de la librairie éléments finis.

1 Présentation des problèmes

Nous avons 3 problèmes tests pour lesquels nous allons étudier la convergence sur deux domaines différents. Le premier domaine est $\Omega_1 := [0, 1] \times [0, 1]$. Le second est $\Omega_2 := [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$.

1.1 Problème (P1)

Le problème (P1) est un problème de poisson : $-\Delta u = f_\Omega$
où l'on fixera la solution $u(x, y) = 16xy(1-x)(1-y)$.

De cette expression, on déduit f_Ω par double dérivation : $f_\Omega = -32(x^2 - x)(y^2 - y)$.

On remarque également que $\forall (x, y) \in \{0, 1\} \times \{0, 1\}, u(x, y)$. Nous avons ainsi directement des conditions de Dirichlet homogènes sur les bords de Ω_1 .

Pour le second domaine, nous avons à la fois des conditions Dirichlet homogènes sur les bords gauche et bas de Ω_2 et du Dirichlet non-homogène sur les bords droits et haut : $u|_{x=\frac{1}{2}} = 4y(1-y)$ et $u|_{y=\frac{1}{2}} = 4x(1-x)$. Dans un soucis d'implémentation nous utilisons la même fonctions pour les deux bords non-homogènes, i.e $f_\Omega = u$.

Au niveau des coefficients de la forme bilinéaire, on identifie ici avec le Laplacien seul qu'il faut prendre $a_{00} = 0$ et $a_{ij} = \delta_{ij}, (i, j) \in \{1, 2\}$.

1.2 Problème (P2)

Le problème (P1) est aussi un problème de poisson : $-\Delta u = f_\Omega$
cette fois-ci la solution est fixée à $u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$.

De cette expression, on déduit f_Ω par double dérivation : $f_\Omega = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$.

Nous avons encore une fois $\forall (x, y) \in \{0, 1\} \times \{0, 1\}, u(x, y)$ donc des conditions Dirichlet homogènes sur les bords de Ω_1 . Et on applique le même raisonnement que pour (P1) pour le deuxième domaine Ω_2 .

Pour les coefficients de la forme bilinéaire, on a exactement la même chose : $a_{00} = 0$ et $a_{ij} = \delta_{ij}, (i, j) \in \{1, 2\}$.

1.3 Problème (P3)

Nous avons un problème toujours elliptique mais plus général : $-\Delta u + u = f_\Omega$
 Et l'on fixe la solution : $u(x, y) = \cos(\pi x) \cos(\pi y)$
 De cette expression, on déduit f_Ω par double dérivation : $f_\Omega = (1 + 2\pi^2) \cos(\pi x) \cos(\pi y)$.

Avec le rajout du terme u dans l'équation on a déduit qu'il faut prendre cette fois-ci $a_{00} = 1$ et encore $a_{ij} = \delta_{ij}, (i, j) \in \{1, 2\}$.

◇ Détermination conditions de Neumann sur Ω_1

Cette fois-ci nous étudions les conditions aux bords de type Neumann. Il faut donc déterminer la fonction $f_N = \frac{\partial u}{\partial \nu}$ sur chaque bords qui donne notre solution.

Par définition, $\frac{\partial u}{\partial \nu} := \nabla u \cdot \nu$

Ici

$$\nabla u = \begin{pmatrix} -\pi \sin(\pi x) \cos(\pi y) \\ -\pi \sin(\pi y) \cos(\pi x) \end{pmatrix}$$

À cause du sinus, nous allons avoir à chaque bord où x est fixe ($x = 0, 1$) : $\nabla u = \begin{pmatrix} 0 \\ -\pi \sin(\pi y) \cos(\pi x) \end{pmatrix}$
 et $\nu = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $f_N = 0$. Et vice-versa pour les bords où y est fixé constant. Donc sur le domaine Ω_1 on doit utiliser : $f_N = 0$.

◇ Détermination conditions de Neumann sur Ω_2

Sur les bords du "bas" et de droite on va retrouver $f_N = 0$. Sur les autres bords ($x, y = \frac{1}{2}$ on va avoir $\sin(\pi x) = 1$ ou $\sin(\pi y) = 1$. et $\nu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Il va falloir, à cause du ν , faire une disjonction de cas dans l'expression de f_N pour Ω_2 .

2 Test de convergence

2.1 Liste des tests effectués

Nous avons faits plusieurs cas en mixant, le type d'élément (quadrangle ou triangle), le domaine (Ω_1 ou Ω_2) et le problème. Par soucis d'implémentation, chacun de ces test de convergence est associé à un numéro :

◇ Sur le premier domaine Ω_1

- 11 : ($P1$), triangle
- 12 : ($P1$), quadrangle
- 21 : ($P2$), triangle
- 22 : ($P2$), quadrangle
- 31 : ($P3$), triangle
- 32 : ($P3$), quadrangle

◇ Sur le deuxième domaine Ω_2

- 211 : ($P1$), triangle
- 212 : ($P2$), quadrangle
- 221 : ($P2$), triangle
- 222 : ($P2$), quadrangle
- 231 : ($P3$), triangle
- 232 : ($P3$), quadrangle

Pour chacun de ces problème nous disposons de fichier de maillages des même domaines avec des pas de temps h de plus en plus petits (augmentation du nombre de noeuds / éléments). Cela nous permet d'étudier l'évolution de l'erreur en fonction du pas de temps. Nous étudions l'approximation de l'erreur quadratique relative $\|u - u_h\|_{L^2} / \|u - \|_{L^2}$ et l'erreur maximale relative $\|u - u_h\|_{L^\infty} / \|u - \|_{L^\infty}$.

2.2 Résultats pour le domaine Ω_1

◇ Résultats graphiques

Nous traçons l'évolution du logarithme des erreurs en fonction du logarithme du pas de

discrétisation h pour tous les cas du domaine Ω_1 .

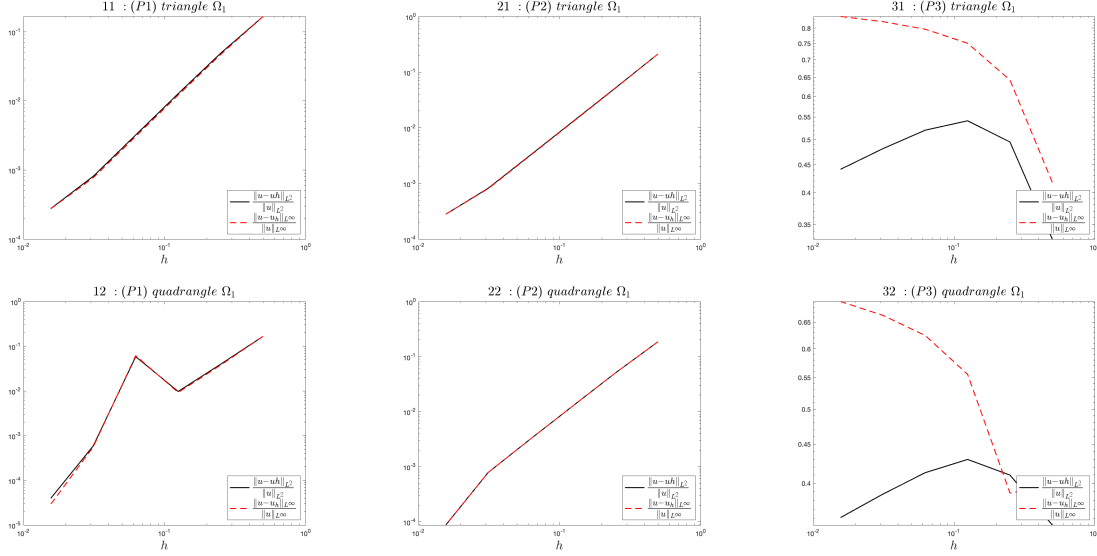


FIGURE 1 – Illustration des convergences ou non en fonction des problèmes et du type d'élément pour le domaine Ω_1

On voit que notre librairie présente des erreurs pour les cas de conditions de bords Neumann homogène. En revanche il semble y avoir convergence pour les problème de poisson à bords Dirichlet homogène. Même si on remarquera une anomalie pour un maillage du cas 12 : (P1), quadrangle.

◇ Étude de l'ordre de convergence

Nous allons maintenant essayer de déterminer empiriquement les ordres de convergences de nos cas. Pour cela on estime les coefficients de la droite des moindres carrés qui passe par les points. J'ai choisis les erreurs quadratiques plutôt que les maximales pour prendre déjà une moyenne sur les points et éviter que des valeurs maximale anormalement grandes influent trop sur la pente ; On obtient les résultats suivants

- 11 : 1.8831 (P1), triangle
- 12 : 2.1669 (P1), quadrangle
- 21 : 1.9384 (P2), triangle
- 22 : 2.1530 (P2), quadrangle
- 31 : ✗ (P3), triangle
- 32 : ✗ (P3), quadrangle

On voit que lorsqu'il y a convergence, l'ordre se situe autour de 2. On notera également que

le maillage par quadrangle semble converger légèrement plus rapidement que le maillage par triangle.

2.3 Résultats pour le domaine Ω_2

◇ Résultats graphiques

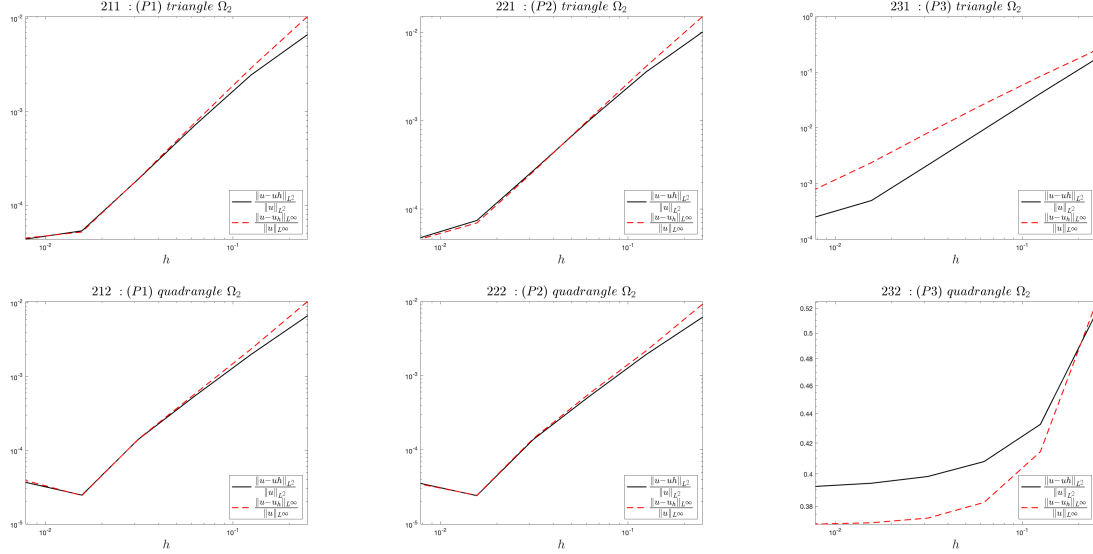


FIGURE 2 – Illustration des convergences ou non en fonction des problèmes et du type d'élément pour le domaine Ω_2

On remarque que cette fois-ci, il y a convergence pour le problème (P3) avec les triangles. Cependant il y a un gros écart avec l'erreur maximale, donc il y a sûrement des anomalies. Peut-être que les erreurs dans la librairie interviennent uniquement lorsqu'il y a des noeuds Neumann homogènes. Mais ce n'est pas vraiment une piste car il n'y a toujours pas de convergence pour les rectangles.

On notera également un coude au niveau de l'avant dernière précision (h le deuxième plus petit). Je ne pense pas que l'on ait déjà atteint une précision importante pour que ce soit lié à des arrondis machines. Il faudrait comparer avec les courbes d'autres librairies.

◇ Étude de l'ordre de convergence

On obtient les résultats suivants

— 211 : 1.5677 (P1), triangle

- 212 : 1.6699 ($P1$), quadrangle
- 221 : 1.6371 ($P2$), triangle
- 222 : 1.6593 ($P2$), quadrangle
- 231 : 1.9590 ($P3$), triangle
- 232 : ✗ ($P3$), quadrangle

Cette fois-ci l'ordre de convergence semble se situer plus autour de 1.5. On ne comptera pas le cas 231 où l'on peut difficilement dire que notre librairie fonctionne pour ce cas là.

Conclusion

Nous avons vu que notre librairie semble fonctionner pour les problèmes de poissons avec conditions de Dirichlet (homogène et non homogène avec Ω_2). L'ordre de convergence atteint semble cohérent avec ce que l'on peut retrouver dans la littérature.

En revanche nous sommes très loin de pouvoir valider la librairie actuellement en raisons de tous les non-convergence pour d'autres cas simple comme celui de conditions de Neumann.