

# Loi binomiale, cours, première STMG

F.Gaudon

24 mai 2022

## Table des matières

# 1 Schéma de Bernoulli

## Définition :

Deux expériences sont dites indépendantes si le résultat de l'une n'influe pas sur le résultat de l'autre.

## Exemple :

il y a indépendance lorsqu'on lance deux fois de suite une pièce de monnaie.

## Définition :

On considère une expérience aléatoire ne comportant que deux issues ; l'une appelée « succès » et l'autre appelée «  chec ». On note  $p$  la probabilité de succès et  $q$  la probabilité d'échec ( $q = 1 - p$ ). La répétition de cette expérience  $n$  fois de manière indépendante constitue *un schéma de Bernoulli* de paramètres  $n$  et  $p$ .

## Propriété :

Dans un schéma de Bernoulli, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat

## Exemple :

arbre.png

On contrôle la qualité d'un produit sur une chaîne de production. On prélève 3 produits au hasard. On suppose que les prélèvements sont indépendants. Statistiquement, chaque produit a une probabilité  $p = 0,05$  d'être défectueux.

Sur l'arbre ci-dessus représentant un schéma de Bernoulli de paramètres  $n = 3$  et  $p = 0,05$ , la probabilité d'avoir les deux premières expériences qui donnent un succès et la dernière qui

donne un  $\tilde{P}(\text{chec}) = P(SS\bar{S}) = 0,05^2 \times 0,95 \approx 0,002$

soit 0,2 % de chances d'avoir deux produits défectueux sur les trois produits.

## 2 Loi binomiale

### Définition :

Soit un schéma de Bernoulli de paramètres  $n$  et  $p$  et soit  $X$  le nombre de succès obtenus. On dit que  $X$  est la *variable aléatoire* associée à ce schéma. On dit aussi que la variable aléatoire  $X$  suit une *loi binomiale* de paramètres  $n$  et  $p$ .

Si  $k$  est un entier compris entre 0 et  $n$ , l'événement « on a obtenu  $k$  succès » est noté  $X = k$  et sa probabilité est notée  $P(X = k)$ .

### Exemple :

On considère le problème de test des produits d'une chaîne de production. Les produits sont supposés indépendants les uns des autres, l'expérience constitue un schéma de Bernoulli de paramètres  $n = 3$  et  $p = 0,05$ . La variable aléatoire  $X$  qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres  $n = 3$  et  $p = 0,05$ .

On a  $P(X = 2) = P(SS\bar{S} \cup S\bar{S}S \cup \bar{S}SS)$

car trois chemins permettent d'obtenir deux succès c'est à dire deux objets défectueux.

D'où  $P(X=2)=P(SS)+P(S\bar{S})+P(\bar{S}S)$

donc  $P(X=2)=0,05^2 \times 0,95 + 0,95 \times 0,05 \times 0,95 + 0,95 \times 0,05^2 = 3 \times 0,05^2 \times 0,95 = 0,007$

soit une probabilité très faible de 0,007 d'avoir deux produits défectueux.

### Calcul pratique de $P(X = k)$ et $P(X \leq k)$ :

Soit  $X$  une variable aléatoire de paramètres  $n$  et  $p$ . Pour  $k$  allant de 0 à  $n$ , pour calculer  $P(X = k)$  ou  $P(X \leq k)$ , on utilise une calculatrice :

- Sur Texas instrument : aller dans le menu `2nd` `distrib`, choisir `binomFdp` et taper `n`, `p`, `k` pour calculer  $P(X = k)$  et choisir `binomFRp` et taper `n`, `p`, `k` pour calculer  $P(X \leq k)$ .
- Sur Casio : aller dans le menu `STAT` puis `DIST` puis `BINM`. Sélectionner alors `Bpd` puis `Var` pour variable, puis entrer alors  $k$  dans la ligne « x »,  $n$  dans la ligne « numtrial » et  $p$  dans la ligne « p » puis aller sur « execute » pour valider et calculer ainsi  $P(X = k)$ . Pour le calcul de  $P(X \leq k)$ , on utilisera `Bcd` au lieu de `Bpd`.

### Exemple :

On considère une variable aléatoire  $X$  suivant la loi binomiale de paramètres  $n = 4$  et  $p = 0,4$ . Sur TI, la probabilité  $P(X \leq 3)$  est donnée par `binomFRp(4,0.4,3)`.

**Remarques :**

- On a  $P(X < 3) = P(X \leq 2)$
- pour calculer  $P(X > k)$ , on calcule  $1 - P(X \leq k)$ .

**Définition :**

Lorsqu'on simule un « grand nombre de fois » un schéma de Bernoulli de paramètres  $n$  et  $p$ , la moyenne du nombre de succès par schéma se rapproche d'un réel appelé *espérance mathématique* de la variable aléatoire  $X$  que l'on note  $E(X)$ .

**Propriété :**

L'espérance mathématique de la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  est :

$$E(X) = np$$

**Exemple :**

Pour le problème de la chaîne de production, en prélevant  $n = 100$  produits indépendamment, la loi binomiale a pour paramètres  $n = 100$  et  $p = 0,05$ . On a alors  $E(X) = np = 100 \times 0,05 = 5$  ce qui signifie que l'on peut prévoir 5 produits défectueux pour un prélèvement de 100 produits indépendants.