HLIN612 - Calculabilité/Complexité
Exercice 40 - Programmation dynamique : algorithme pseudo-polynomial

Antoine AFFLATET et Jérémie ROUX (L3 Groupe C)

2019 - 2020

Exercice 1

Problème de 2-PARTITION

Entrée : Étant donnés n objets a_i $(1 \leq i \leq n)$ de poids entiers $p(a_1)$,$p(a_2)$,...,$p(a_n)$ de somme $2P$.
Question : Est-il possible de les partager en 2 sous-ensembles de même poids total P ?

On considère i et j, tels que $1 \leq i \leq n$ et $0 \leq j \leq P$ et $T(i,j)$: "Étant donnés les i premiers éléments de la famille, il existe un sous-ensemble de ces i éléments de poids j".

$n = 6$
$2P = \sum_{i=1}^{n} p(a_i) = \sum_{i=1}^{6} p(a_i) = p(a_1) + p(a_2) + p(a_3) + p(a_4) + p(a_5) + p(a_6) = 5 + 9 + 3 + 8 + 2 + 5 = 32$
donc $P = \frac{32}{2} = 16$

T[i,j] est vrai si et seulement si $(p(a_i) == j)$ || $(T[i,j] == T[i-1,j])$ || $(T[i-1,j-p(a_i)] == 1))$ l'est aussi.

i/j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1																	
2																	
3																	
4																	
5																	
6																	

i/j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$\{\{\}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\{a_1\}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
2	$\{\{\}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\{a_1\}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a_2\}$
3	$\{\{\}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\{a_3\}\}$	$\emptyset$	$\{\{a_1\}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\{a_1,a_3\}\}$	$\{a_2\}$
4	$\{\{\}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\{a_3\}\}$	$\emptyset$	$\{\{a_1\}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\{a_1,a_3\},\{a_4\}\}$	$\{a_2\}$
5	$\{\{\}\}$	$\emptyset$	$\{\{a_5\}\}$	$\{\{a_3\}\}$	$\emptyset$	$\{\{a_1\}\},\{a_3,a_5\}\}$	$\emptyset$	$\{\{a_1,a_3\}\}$	$\{\{a_1,a_3\},\{a_4\}\}$	$\{a_2\}$
6	$\{\{\}\}$	$\emptyset$	$\{\{a_5\}\}$	$\{\{a_3\}\}$	$\emptyset$	$\{\{a_1\}\},\{a_3,a_5\},\{a_6\}\}$	$\emptyset$	$\{\{a_1,a_5\},\{a_6,a_5\}\}$	$\{\{a_1,a_3\},\{a_4\},\{a_6,a_3\}\}$	$\{a_2\}$

Depuis ce tableau (tableau 1) on prend l'élément de la première ligne vérifiant la colonne 16, puis celui de la première ligne vérifiant $16-p(a_i)$ avec a_i étant l'élément de la première ligne vérifiant la colonne 16. On reproduit jusqu'à avoir tous les éléments.

Algorithme 1 : Reconstruction de la solution(T : tableau à 2 dimensions, P : poids total, n : entier) : ensemble

---

$i \leftarrow n$;
$j \leftarrow P$;
$S \leftarrow \{\}$;
tant que $i > 0$ *et* $T[i][j] \neq 0$ **faire**
    $i - -$;
    $S \leftarrow S \cup \{a_{i+1}\}$;
    $j \leftarrow j - p(a_{i+1})$;
    $i \leftarrow n$;
fin
renvoyer S;

Complexité de l'algorithme = $O(n * P)$ où n est le nombre d'élément dans l'ensemble et $P = 1/2 * \sum_{i=1}^{n} p(a_i)$

Exercice 2

Problème du sac à dos sans répétition

Les objets seront pris au plus 1 fois. Pour cela considérons, un tableau K à deux dimensions tel que $K[j,w]$ représente la valeur maximale que l'on peut stocker dans un sac de capacité w, avec des objets $1,..,j$.

$K[0,w] = 0$ et $K[j,0] = 0$
$K[j,w] = \max$

$K[j,w] = \max(K[j-1,w], K[j-1,w-w_j]+v_j)$

$j\backslash w$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	**0**	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
3	0	1	6	7	7	**18**	19	24	25	25	25	25	25
4	0	1	6	7	7	**18**	22	24	28	29	29	40	41
5	0	1	6	7	7	18	22	24	28	30	31	40	**42**