Modèles microscopiques

Jean

January 12, 2025

1 Préliminaires : équation de Keller-Segel et systèmes de particules

1.1 Keller-Segel

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \chi \nabla \cdot (u \nabla c), \\ \nu \dfrac{\partial c}{\partial t} = \Delta c + u. \end{cases} \tag{1}$$

où :

- $u(x,t)$ représente la densité des plantes à la position x et au temps t,
- $c(x,t)$ représente la concentration de la substance attractante (eau par exemple),
- χ est l'intensité de l'attraction et ν le ratio entre la vitesse de diffusion des plantes et celle de l'eau.

Hypothèse : Vitesse de diffusion de la substance attractrice très rapide : $\nu = 0$. Donc $\Delta c = -u$, l'équation se résoud explicitement et on a *in fine*,

$$\partial_t u(t,x) = \Delta u(t,x) - \chi \nabla \cdot (u(t,x)(K \star u)(t,x)) \tag{2}$$

où $K(x) = \frac{x}{2\pi |x|^2}$

On cherche une solution faible à 5. On multiplie l'équation par $\phi \in \mathcal{C}_c^2(R^d)$, et on intègre, on a :

$$\int_\Omega \partial_t u(t,x)\phi(x)dx = -\int_\Omega \Delta u(t,x)\phi(x)dx - \chi \int_\Omega \nabla \cdot (u(t,x)(K \star u)(t,x))\, \phi(x)dx$$

En faisant des IPPs il vient ($\Omega = R^d$,il n'y a pas de terme de bords.) :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Delta u(t,x)\, \phi(x)\, dx &= -\int_\Omega \nabla u(t,x) \cdot \nabla \phi(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \nabla u(t,x) \cdot \mathbf{n}\, \phi(x) \sigma \\ &= \int_\Omega u(t,x) \Delta \phi(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla \cdot (u(t,x)(K \star u)(t,x))\ \phi(x)\, dx &= -\int_\Omega u(t,x)\, (K \star u)(t,x) \cdot \nabla \phi(x)\, dx \quad - \int_{\partial\Omega} u(t,x)\, (K \star u)(t,x) \cdot \mathbf{n}\, \phi(x)\, d\sigma \\ &= -\int_\Omega \int_\Omega u(t,x) u(t;y) K(x-y) \cdot \nabla \phi(x) dx dy \\ &= -\frac{1}{2} \int_\Omega \int_\Omega u(t,x) u(t;y) K(x-y) \cdot (\nabla \phi(x) - \nabla \phi(y)) dx dy \end{aligned}$$

En utilisant le fait que K est anti-symétrique dans la dernière ligne. On a donc :

$$\partial_t \int_\Omega u(t,x)\, \phi(x)\, dx = \int_\Omega u(t,x) \Delta \phi(x)\, dx - \frac{\chi}{2} \int_\Omega \int_\Omega u(t,x) u(t;y) K(x-y) \cdot (\nabla \phi(x) - \nabla \phi(y)) dx dy \tag{3}$$

Existence, unicité ? (Lax milgram)

1.2 Système de Particule associé

On définit le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ associé à un individu "typique" définit comme :

$$dX_t = \sqrt{2}dB_t - \int_\Omega K(X_t - x)u(t,dx)dt$$

où $(B_t)_t$ est un mouvement brownien standard et $u(t,\cdot)$ la densité de X_t. En intégrant par rapport au temps, on a aussi de manière équivalente :

$$X_t = X_0 - \chi \int_0^t (K \star u(s,\cdot)(X_s)ds + \sqrt{2}B_t \tag{4}$$

En prenant une fonction test ϕ comme définie ci dessus, on a d'après le lemme d'Ito :

$$\begin{aligned}\frac{d\phi(X_t)}{dt} &= \nabla\phi(X_t)dX_t + \Delta\phi(X_t)dt \\ &= \sqrt{2}\nabla\phi(X_t)dB_t - \chi(K \star u(t,\cdot))(X_t)\cdot\nabla\phi(X_t)dt + \Delta\phi(X_t)dt\end{aligned}$$

En intégrant entre 0 et t, on a :

$$\phi(X_t) - \phi(X_0) = \sqrt{2}\int_0^t \nabla\phi(X_s)dB_s - \chi\int_0^t (K\star u(s,\cdot))(X_s)\cdot\nabla\phi(X_s)ds + \int_0^t \Delta\phi(X_s)ds$$

D'où, en prenant l'espérance:

$$\int_\Omega \phi(x)u(t,dx) = \int_\Omega \phi(x)u(0,dx) - \chi\int_0^t\int_\Omega (K\star u(s,\cdot)(x)\cdot\nabla\phi(x)u(s,ds)dx + \int_0^t\int_\Omega \Delta\phi(x)u(s,dx)dsds$$

i.e. la densité u de X est une solution faible de (5).

Afin de linéariser la solution, on considère N particules et la mesure empirique : $u_t^N := N^{-1}\sum_{k=1}^n \delta_{X_t^i}$

Donc $(K\star u_t^N)(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j:X_t^j\neq x}^N \frac{x-X_t^j}{|x-X_t^j|^2}$

Donc pour l'individu i, sa position suit la dynamique suivante :

$$X_t^i = X_0^i + \sqrt{2}B_t - \frac{\chi}{2\pi N}\sum_{j\neq i}\int_0^t \frac{X_s^i - X_s^j}{|X_s^i - X_s^j|^2}ds$$

1.3 Keller-Segel avec processus de naissance mort

On considère l'équation modifiée de Keller-Segel :

$$\partial_t u(t,x) = \Delta u(t,x) - \chi\nabla\cdot(u(t,x)(K\star u)(t,x)) - d_r(u\star G)(t,x)u(t,x) + b_r u(t,x) \tag{5}$$

où $K(x) = \frac{x}{2\pi|x|^2}$.

Le système de particules associés reste le même que précedemment, mais chaque particule meure à des instants poissonniens d'intensité $(u\star G)(t,x)$ et donnent naissance à une autre particule avec un taux b_r.

1.4 Système de particule associé aux équations de diffusuion des plantes

Le système d'EDP qui décrit les interractions entre la densité de plantes, d'eau dans le sous sol et d'eau en surface est décrit par :

$$\begin{cases}\frac{d\rho}{dt}(t,x) = d_1\Delta\rho(t,x) + (\int G(t,x,y)\star c(t,y)dy)\rho(t,x)(1-\frac{\rho(t,x)}{K}) - \lambda\rho(t,x), \\ \frac{dc}{dt}(t,x) = d_2\Delta c(t,x) + I(\rho(t,x))h(t,x) - Lc(t,x) - (\int G(t,x,y)\star\rho(t,y)dy)c(t,x), \\ \frac{dh}{dt}(t,x) = d_3\Delta(h^2(t,x)) + P - I(\rho(t,x))h(t,x),\end{cases} \tag{6}$$

Où

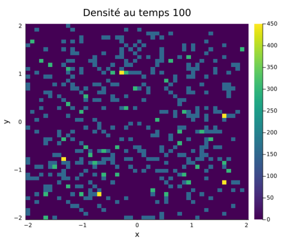

Figure 1: Temps 100

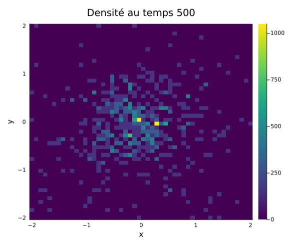

Figure 2: Temps 500

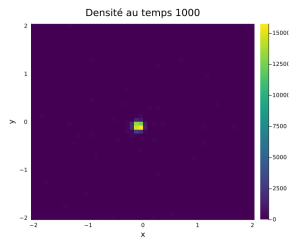

Figure 3: Temps 1000

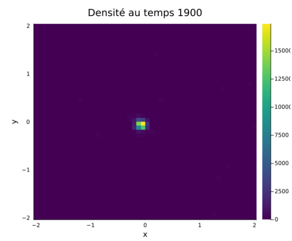

Figure 4: Temps 1900

Figure 5: Densité des particules à différents instants

- ρ représente la densité de biomasse, c l'eau dans le sous sol, et h l'eau en surface.
- d_1, d_2, d_3 constantes de diffusion, K une constante de satutration, P la pluviométrie supposée aussi être une constante dans un premier temps.
- En première approximation on suppose $G(t,x,y) = 1_{B(x(t),r_c)}(y)$ et $I(x) = \alpha x$, avec $\alpha > 0$.

On peut associer à ces équations un système de particules associé. On se donne $(B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, B_t^{(3)})$ trois mouvement browniens indépendants.

$$\begin{cases} dX_t = \sqrt{2} dB_t^{(1)} \\ dY_t = \sqrt{2} dB_t^{(2)} \\ dZ_t = \sqrt{2} dB_t^{(3)}, \end{cases} \tag{7}$$

- Chaque particule de plante i meurt à taux $d^{(X)}(i,t) := \lambda + \int G(t,x,y) \star c(t,y) dy \frac{\rho(x,t)}{K}$ et nait à taux $b^{(X)}(i,t) := \int G(t,x,y) \star c(t,y) dy$
- Chaque particule j meurt à taux $d^{(Y)}(j,t) := L + \int G(t,x,y) \star \rho(t,y) dy$
- Chaque particule k meurt à taux $d^{(Z)}(k,t) := I(\rho(t,x))$ - ce qui donne naissance à une particule Y au même endroit - et il y a une immigration à taux P.

Une horloge globale est associée à chaque type de particules. Ainsi, pour une population de $N_t^{(X)}$ particules, la somme de l'ensemble des processus de Poisson est un processus de Poisson de fonction d'intensité $\nu_t^{(X)} = \sum_{i=1}^{N_t^{(X)}} d^{(X)}(i,t) + b^{(X)}(i,t)$.

Probleme ? car si pas de plante, pas d'infiltration

Si l'on garde un modèle continu pour l'eau, on remplace seulement la densité des plantes par sa mesure empirique.

References